Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi kar

MSC SZAKDOLGOZAT

Hálózati folyamatok oszcillációinak vizsgálata

Bodó Ágnes

Alkalmazott matematikus MSc

Témavezető: Besenyei Ádám adjunktus Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Budapest, 2015.

Tartalomjegyzék

Kö	Köszönetnyilvánítás				
Bevezető					
1.	Elm	életi áttekintés	4		
	1.1.	Markov-láncok	4		
	1.2.	Lineáris algebra	5		
2.	Szto	ochasztikus mátrixok sajátértékei	8		
	2.1.	Történeti áttekintés	8		
	2.2.	Észrevételek	9		
	2.3.	Geometriai átfogalmazás	10		
	2.4.	Az M_n halmaz részleges leírása	13		
	2.5.	Az M_n halmaz teljes leírása	15		
	2.6.	Extremális sajátértékek	17		
3.	Hál	ózati folyamatok	21		
	3.1.	Járványterjedés adaptív hálózatokon	21		
	3.2.	Az oszcilláció megjelenése	23		
	3.3.	A modell	25		
	3.4.	Gráftulajdonságok vizsgálata	29		
Ös	Összefoglalás				
Ire	Irodalomjegyzék				

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Besenyei Ádámnak, aki rengeteg időt és energiát fordított rám hétről hétre. Az ő segítsége és motivációja nélkül e dolgozat nem jöhetett volna létre. Külön köszönettel tartozom neki azért, hogy az évek során végig segítő kezet nyújtott. Szakmailag és emberileg is nagyon sokat tanultam tőle.

Ezenkívül külön köszönettel tartozom még Simon L. Péternek, aki felkeltette érdeklődésemet a téma iránt és mindig bátran fordulhattam hozzá. Hasznos tanácsaival, észrevételeivel, illetve a szimulációk készítésében és elemzésében való segítségével nagyban segítette a munkámat.

Nagyon hálás vagyok továbbá tanáraimnak, akik nagyban hozzájárultak a szakmai fejlődésemhez és akik mindig szívesen segítettek, ha szükségem volt rájuk.

Végül, de nem utolsó sorban szeretném megköszönni barátaimnak és családomnak mindazt a bíztatást, segítséget, amit az évek során kaptam tőlük.

Bevezető

"Anélkül, hogy tudnánk róla, kiskorunk óta hálózatokban gondolkodunk, a világot ugyanis a hálózatok teszik számunkra felfoghatóvá. Ha távolabbról nézzük, egységnek tűnik, ha közelebbről, akkor hálózatnak."

(Csermely Péter)

A dolgozat középpontjában hálózatokon zajló folyamatok állnak. Ezek napjaink egyik igen fontos kutatási területét képezik, fizikában és matematikában egyaránt. Bár gyakran e folyamatok vizsgálata matematikailag egyszerű eszközöket igényel, azonban a rendszerek viselkedésének jellemzése ennél sokkal összetettebb feladat. A téma tele van nyitott kérdésekkel, ezáltal kiváló kutatási terület. Mára fontossá vált, hogy a kísérletek eredményeire elméleti modelleket adjunk. A hálózati folyamatok népszerűségét növeli, hogy gyakran összekapcsolja a matematika sokszor távolinak tűnő ágazatait, mint például diszkrét matematika, valószínűségszámítás és alkalmazott analízis. A dolgozatban is a differenciálegyenletek mellett nagy szerepet kapnak a Markov-láncok, illetve a lineáris algebra és a geometria.

Dolgozatom célja hálózati folyamatokban megjelenő oszcillációik matematikai leírása. Hálózati folyamatok oszcillációival többen is foglalkoztak, azonban szimulációkon túl matematikai magyarázatot még nem sikerült adni a jelenség okára és erősségére.

A dolgozat felépítése a következő. Az első fejezetben bevezetjük a Markov-láncokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat, illetve kitérünk néhány egyszerű lineáris algebrai összefüggésre. A második fejezetben kerül sor sztochasztikus mátrixok sajátértékeinek elhelyezkedésének leírására, amellyel számos kiváló matematikus foglalkozott. A harmadik fejezetben részletezzük, hogy az előző fejezetben tárgyaltak hogyan kapcsolódnak hálózati folyamatok oszcillációihoz. Rövid áttekintést nyújtunk a járványterjedésről, majd egy konkrét járványterjedési modellel foglalkozunk, ahol meghatározzuk a rendszer viselkedését. A fejezet végén különböző gráfstruktúrákat vizsgálunk az oszcilláció megjelenésének és erősségének szempontjából.

1. fejezet

Elméleti áttekintés

Mielőtt rátérnénk hálózati folyamatok oszcillációira, illetve az ehhez kapcsolódó alapproblémára, azaz sztochasztikus mátrixok sajátértékeinek vizsgálatára, emlékeztetünk néhány lényeges fogalomra.

1.1. Markov-láncok

A dolgozat alapkövét képezik a Markov-láncok, ezért a legfontosabb definíciókat összefoglaljuk, a részleteket lásd a [3] jegyzetben.

1.1. Definíció. Legyen I megszámlálható halmaz (állapottér). Ekkor $X_t : \Omega \to I$ $(t \ge 0)$ folytonos paraméterű homogén Markov-lánc, ha

1.
$$\mathbb{P}(X_{s+t} = j | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_{s+t} = j | X_s)$$
, ha $s, t \ge 0$,

2. $\mathbb{P}(X_{s+t} = j | X_s = i)$ nem függ s-től,

ahol $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : 0 \le s \le t\}$ az összes $X_s \ (0 \le s \le t)$ valószínűségi változó által generált σ -algebrát jelöli.

1.2. Definíció. A $p_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_{s+t} = j | X_s = i)$ számokat átmenetvalószínűségeknek és a belőlük előállított $P(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in I}$ mátrixot átmenetmátrixnak nevezzük.

A gyakorlatban folytonos paraméterű Markov-láncok esetén az átmenetmátrix kiszámítása bonyolult, ezért szokás bevezetni egy gyakran könnyebben kezelhető fogalmat, az infinitezimális generátort.

1.3. Definíció. A 0-beli $q_{ij} = p'_{ij}(0)$ jobb oldali deriváltakból alkotott $Q = (q_{ij})_{i,j \in I}$ mátrixot a Markov-lánc infinitezimális generátorának nevezzük.

1.4. Megjegyzés. Ha $i \neq j$, akkor a $p'_{ij}(0)$ jobb oldali nemnegatív derivált létezik és véges.

1.5. Példa. Az alkalmazásokban az egyik leggyakrabban előforduló sztochasztikus folyamat a Poisson-folyamat, ahol $I = \mathbb{N}$ és az átmenetvalószínűségek a következők:

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & \text{ha } j \ge i, \\ 0, & \text{ha } j < i. \end{cases}$$

1. FEJEZET. ELMÉLETI ÁTTEKINTÉS

Ebből következően az infinitezimális generátor elemeire

$$q_{ii} = -\lim_{t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t} = -\lim_{t \to 0} \frac{1 - e^{\lambda t}}{t} = -\lambda,$$

tovább
ái > jesetén $q_{ij} = 0,$ ési < jesetén

$$q_{ij} = p'_{ij}(t) = \lim_{t \to 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{j-i}}{t(j-i)!} = \begin{cases} \lambda, & \text{ha } j = i+1, \\ 0, & \text{ha } j > i+1. \end{cases}$$

A folyamat infinitezimális generátora tehát

$$\begin{pmatrix} -\lambda \ \lambda \ 0 \ 0 \ 0 \dots \\ 0 \ -\lambda \ \lambda \ 0 \ 0 \dots \\ 0 \ 0 \ -\lambda \ \lambda \ 0 \dots \\ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \ddots \end{pmatrix}.$$

1.6. Definíció. A Q infinitezimális generátor konzervatív, ha $\sum_k q_{ik} = 0$ minden i esetén, és $-q_{ii} < \infty$ minden i-re.

Az átmenetvalószínűségekre bizonyos feltételek mellett felírhatjuk az úgynevezett Kolmogorov-féle differenciálegyenleteket.

1.7. Tétel. Konzervatív Q mátrix esetén teljesülnek Kolmogorov hátrafelé haladó differenciálegyenletei:

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k} q_{ik} p_{kj}(t) \quad minden \ i, j \in I \ eset{energy}$$

azaz

$$P'(t) = QP(t).$$

1.8. Tétel. Ha Q konzervatív, továbbá az állapottér véges, vagy rögzített j és $h \to 0$ esetén a $\frac{p_{kj}(h)}{h} \to q_{kj}$ konvergencia k-ban egyenletes, akkor teljesülnek Kolmogorov előrehaladó differenciálegyenletei:

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k} p_{ik}(t)q_{kj}$$
 minden $i, j \in I$ esetén,

azaz

$$P'(t) = P(t)Q.$$

1.2. Lineáris algebra

A dolgozatban a későbbiekben néhány fontosabb, de kevésbé ismert lineáris algebrai fogalmat és állítást fogunk használni, amelyeket ebben a szakaszban foglalunk össze. További részletek a [12] könyvben olvashatók.

1.9. Tétel. Ha A és D négyzetes mátrixok, akkor

$$\det \begin{pmatrix} A B \\ 0 D \end{pmatrix} = \det(A) \det(B).$$

1. FEJEZET. ELMÉLETI ÁTTEKINTÉS

Az előző tétel általánosabb blokkmátrix esetén is megfogalmazható.

1.10. Tétel. Ha A és D négyzetes mátrixok, akkor

$$\det \begin{pmatrix} A B \\ C D \end{pmatrix} = \begin{cases} \det(A) \det(D - CA^{-1}B), & ha \ A^{-1} \ l\acute{e}tezik, \\ \det(D) \det(A - BD^{-1}C), & ha \ D^{-1} \ l\acute{e}tezik. \end{cases}$$

A továbbiakban használni fogjuk egy mátix reducibilitásának, illetve irreducibilitásának fogalmát.

1.11. Definíció. Egy $n \times n$ -es A mátrix reducibilis, ha létezik egy olyan P permutációmátrix, hogy

$$P^{\top}AP = \begin{pmatrix} X Y \\ 0 Z \end{pmatrix},$$

ahol X és Z szintén négyzetes mátrixok. Más szóval A hasonló egy blokk felső háromszögmátrixhoz. Ha A nem reducibilis, akkor irreducibilis.

A következő állítás egy mátrix irreducibilis voltát fogalmazza át gráftulajdonságra, amely a későbbiekben hasznos lesz számunkra. Ehhez előbb rendeljünk hozzá minden négyzetes mátrixhoz egy irányított gráfot.

1.12. Definíció. Négyzetes A mátrix esetén jelölje $\mathcal{G}(A)$ azon n csúcsú irányított gráfot, amelynek csúcsai N_1, N_2, \ldots, N_n , és N_i -ből N_j -be pontosan akkor mutat él, ha $a_{ij} \neq 0$.

1.13. Definíció. A $\mathcal{G}(A)$ gráf erősen összefüggő, ha minden (N_i, N_k) csúcspár esetén létezik irányított élek sorozata N_i -ből N_k -ba (azaz bármely csúcsból bármely csúcsba eljuthatunk irányított úton).

1.14. Tétel. Az A mátrix akkor és csak akkor irreducibilis, ha a $\mathcal{G}(A)$ gráf erősen összefüggő.

Az 1.14. Tétel illusztrációjaképpen tekintsük a következő példát.

1.15. Példa. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 \ 0 \\ 1 \ 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \end{pmatrix}.$$

Könnyen látható, hogy A reducibilis, ugyanis

$$P = \begin{pmatrix} 0 \ 1 \\ 1 \ 0 \end{pmatrix}$$

esetén

$$P^{\top}AP = \begin{pmatrix} 1 \ 1 \\ 0 \ 1 \end{pmatrix},$$

míg *B* irreducibilis, mivel a 2 × 2-es mátrixok körében csak az identitás, illetve *P* permutációmátrix, és egyik esetben sem kapunk felső háromszögmátrixot. A $\mathcal{G}(A)$ gráfban az 1. csúcs önmagával van összekötve, a 2. csúcs szintén önmagával és az 1. csúccsal (ne felejtsük el, hogy irányított gráfról van szó), ami az 1.1. ábrán látható. A $\mathcal{G}(B)$ gráfban az 1. csúccs össze van kötve önmagával és a 2. csúccsal, és a 2. csúcs össze van kötve az 1. csúccsal, ami az 1.2. ábrán látható. Az előző gráf nem erősen összefüggő, míg utóbbi igen.



Szükség lesz még O. Perron (1880–1975) és F. G. Frobenius (1849–1917) eredményére, amely az [5] cikkben az alábbi alakban található.

1.16. Tétel (Perron–Frobenius). Legyen A egy $n \times n$ -es nemnegatív elemű mátrix, továbbá legyen

 $\varrho(A) = \max\left\{ |\lambda| : \lambda \text{ sajátértéke } A\text{-nak} \right\},\,$

az A mátrix spektrálsugara. Ha A irreducibilis, akkor

- 1. $\varrho(A) > 0$,
- 2. $\varrho(A)$ sajátértéke A-nak,
- 3. létezik egy pozitív elemű x vektor, amelyre $Ax = \rho(A)x$ teljesül,
- 4. $\rho(A)$ algebrai multiplicitása 1.

Az egyik legalapvetőbb módszer mátrix sajátértékeinek becslésére a Gersgorin-elmélet, amelyet S. A. Gersgorin (1901–1933) dolgozott ki 1931-ben. Ennek alapja, hogy az adott mátrix elemeit használva köröket határozunk meg, és a keresett sajátértékek ezen körökben helyezkednek el.

1.17. Tétel. Az $n \times n$ -es $\mathcal{A} = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ mátrix minden λ sajátértékéhez van olyan j, amelyre

$$|\lambda - a_{jj}| \le \sum_{k \ne j} |a_{jk}|.$$

A Gersgorin-köröknél erősebb állítást fogalmazott meg 1952-ben A. T. Brauer (1894–1985).

1.18. Tétel. Legyen a_{kk} , a_{ll} az $\mathcal{A} = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ mátrix két legkisebb főátlóbeli eleme. Ekkor az \mathcal{A} mátrix sajátértékei az alábbi úgynevezett Cassini-ovális peremén vagy belsejében helyezkednek el:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{kk}| |z - a_{ll}| \le (1 - a_{kk})(1 - a_{ll})\}.$$

Ha $a_{kk} \neq a_{ll}$, akkor a Cassini-ovális a legnagyobb Gersgorin-kör belsejében helyezkedik el, egyébként a két görbe metszi egymást.

2. fejezet

Sztochasztikus mátrixok sajátértékeinek elhelyezkedése

Ebben a fejezetben a bevezetőben említett kérdéssel foglalkozunk. A probléma megfogalmazásához vezessük be a sztochasztikus mátrix fogalmát.

2.1. Definíció. A $\mathcal{P} = (p_{jk})_{j,k=1}^n$ mátrix sztochasztikus, ha $p_{jk} \ge 0$ minden $j, k = 1, \ldots, n$ esetén és $\sum_{k=1}^n p_{jk} = 1$ minden $j = 1, \ldots, n$ esetén.

Markov-láncok elméletében a folyamatot leíró átmenetvalószínűségek éppen egy sztochasztikus mátrixszal reprezentálhatóak. Mivel ez az úgynevezett átmenetmátrix és egy kezdeti eloszlás egyértelműen meghatározza a Markov-láncot, ezért fontos ezen mátrixok vizsgálata.

Egy $n \times n$ -es \mathcal{P} sztochasztikus mátrix λ sajátértéke skalár, általában komplex szám, amelyet a $\mathcal{P}x = \lambda x$ sajátérték-egyenlet határoz meg, ahol x egy hozzá tartozó sajátvektor. Bevezethetjük sztochasztikus mátrixok sajátértékeinek M_n halmazát:

2.2. Definíció.

 $M_n = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ sajátértéke valamilyen } n \times n \text{-es sztochasztikus mátrixnak} \right\}.$

A fejezet célja az ${\cal M}_n$ halmaz néhány tulajdonságának vizsgálata.

2.1. Történeti áttekintés

Sztochasztikus mátrixokkal először V. I. Romanovsky (1897–1954) kezdett el foglalkozni, 1931-ben vezette be a fogalmukat. Később, 1936-ban rövid értekezést írt sztochasztikus mátrixokról, amelyben felhasználta O. Perron (1880–1975) és F. G. Frobenius (1849–1917) nemnegatív mátrixokról szóló eredményeit.

Pár évvel ezután, 1938-ban A. N. Kolmogorov (1903–1987) vetette fel azt a problémát, hogy határozzuk meg, avagy írjuk le az M_n tartományt a komplex síkon. Kolmogorov az 1944–45-ben a Moszkvai Állami Egyetemen Markov-láncokról tartott szemináriumán többek között ezt a problémát is felvetette. A szemináriumon két fiatal hallgató is részt vett, N. A. Dmitriev (1924–2000) és E. B. Dynkin (1924–2014), akik 1945-ben a kérdést (egymástól függetlenül) átfogalmazták egy geometriai problémára, majd 1946-ban meghatározták az M_n halmazt $n \leq 5$ esetén. Később, 1941-ben és 1951-ben Dynkin egy tanítványa, F. I. Karpelevich (1927–2000) írta le az M_n tartományt tetszőleges n esetén.

2.2. Észrevételek

Néhány egyszerű észrevételt fogalmazunk meg az alábbi állításokban az M_n halmazzal kapcsolatban.

2.3. Állítás. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $1 \in M_n$, vagyis az 1 tetszőleges sztochasztikus mátrixnak sajátértéke.

Bizonyítás. Mivel a \mathcal{P} mátrix sztochasztikus, ezért minden sorösszege 1, így $\mathcal{P}\mathbf{1} = \mathbf{1}$, ahol 1 jelöli a csupa 1-ből álló vektort. Az 1 tehát sajátértéke \mathcal{P} -nek, és egy hozzá tartozó sajátvektor az 1.

2.4. Állítás. Az M_n halmaz szimmetrikus az x-tengelyre nézve, és $M_n \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Bizonyítás. Jelölje $\|\mathcal{P}\|_{\infty} = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{k=1}^{n} |p_{jk}|$ az úgynevezett sornormát. Ekkor

$$\|\lambda v\|_{\infty} = \|\mathcal{P}v\|_{\infty} \le \left(\max_{j=1,\dots,n} \sum_{k=1}^{n} |p_{jk}|\right) \|v\|_{\infty} = \|v\|_{\infty},$$

amiből következik, hogy \mathcal{P} minden sajátértékének abszolútértéke legfeljebb 1, ezért $M_n \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$

Az előző fejezetben említett Gersgorin-tételt megfogalmazhatjuk sztochasztikus mátrixok esetén, ami így speciális esetben többet mond, mint általános esetben. A Cassini-ovális viszont nem ad pontosabb képet a sajátértékek elhelyezkedéséről a sztochasztikus esetben.

2.5. Állítás. Legyen
$$R_j = \sum_{k \neq j} |p_{jk}| = 1 - p_{jj}$$
, ekkor $M_n \subset \bigcup_{j=1}^n \overline{B(p_{jj}, R_j)}$. Így
$$M_n \subset \overline{B(\min p_{jj}, 1 - \min p_{jj})}.$$

Ezek a Gersgorin-féle körök, amelyeket a 2.1. ábrán láthatunk.

Ha n = 2, akkor az M_2 halmazt könnyedén meg tudjuk határozni:

2.6. Állítás. $M_2 = [-1, 1]$.

Bizonyítás. Tetszőleges 2×2 -es sztochasztikus mátrix a következő alakban írható:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p \ 1 - p \\ q \ 1 - q \end{pmatrix},$$

ahol $0 \le p, q \le 1$. Ekkor a \mathcal{P} sajátértékei 1 és p - q, amelyből kapjuk az állítást.



2.1. ábra. Gersgorin-féle körök

2.3. Geometriai átfogalmazás

Mint már a bevezetőben említettük, 1945-ben N. A. Dmitriev és E. B. Dynkin az M_n halmaz jellemzésének kérdését átfogalmazták egy geometriai problémára, amelyet ebben a fejezetben tárgyalunk. A következőkben konvex sokszög alatt zárt, konvex sokszöglapot értünk, de kizárjuk a 0 pontból álló egypontú sokszöget.

2.7. Tétel. $A \ \lambda \in \mathbb{C}$ szám akkor és csak akkor sajátértéke valamely $n \times n$ -es sztochasztikus mátrixnak, ha létezik olyan Q konvex q-szög ($q \le n$) a komplex síkon, hogy $\lambda Q \subset Q$ teljesül. A λQ sokszög a Q sokszög origó középpontú λ -szoros nagyítását jelenti, azaz ha Q csúcsai z_1, z_2, \ldots, z_q , akkor λQ az a sokszög, amelynek csúcsai $\lambda z_1, \lambda z_2, \ldots, \lambda z_q$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\lambda \in \mathbb{C}$ a $\mathcal{P} = (p_{jk})_{j,k=1}^n$ mátrix sajátértéke és z egy hozzá tartozó sajátvektor. Be kell látnunk, hogy létezik olyan Q konvex q-szög, amelyre $\lambda Q \subset Q$. A $Pz = \lambda z$ sajátérték-egyenlet koordinátánként azt jelenti, hogy

$$\lambda z_j = p_{j1} z_1 + p_{j2} z_2 + \ldots + p_{jn} z_n \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Mivel $p_{jk} \ge 0$ és $p_{j1} + p_{j2} + \ldots + p_{jn} = 1$, ezért λz_j a z_1, z_2, \ldots, z_n pontok konvex burkában helyezkedik el (lásd 2.2. ábra). Legyen Q a z_1, z_2, \ldots, z_n pontok által meghatározott konvex sokszög, ekkor egyrészt teljesül, hogy $\lambda Q \subset Q$, másrészt Q nem a 0 egypontú sokszög, hiszen z sajátvektor.





2.2. ábra. A 2.7. Tétel bizonyítása 1.

2.3. ábra. A 2.7. Tétel bizonyítása 2.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\lambda Q \subset Q$ valamilyen Q konvex sokszögre, amelynek csúcsai z_1, z_2, \ldots, z_q . Be kell látnunk, hogy a $\lambda \in \mathbb{C}$ szám sajátértéke valamilyen $n \times n$ -es sztochasztikus mátrixnak. Ebben az esetben a λz_j szám Q-ban vagy annak határán helyezkedik el, így választhatunk $p_{jk} \geq 0$ számokat, amelyre $p_{j1} + p_{j2} + \ldots + p_{jn} = 1$ teljesül és

$$\lambda z_j = p_{j1} z_1 + p_{j2} z_2 + \ldots + p_{jn} z_n \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Például λz_j benne van a sokszög valamely $z_{\alpha}, z_{\beta}, z_{\gamma}$ csúcsai által meghatározott háromszögben (lásd a 2.3. ábrát), így vannak olyan $p_{j\alpha}, p_{j\beta}, p_{j\gamma}$ súlyok, hogy $\lambda z_j = p_{j\alpha} z_{\alpha} + p_{j\beta} z_{\beta} + p_{j\gamma} z_{\gamma}$ (ha Q egy- vagy kétcsúcsú, akkor háromszög helyett egyetlen pont, vagy egy szakasz van). Minden egyéb k esetén pedig legyen $p_{jk} = 0$.

Az alábbi állításban a 2.7. Tétel egy egyszerű következményét fogalmazzuk meg.

2.8. Állítás. *Ha* $\lambda \in \mathbb{C}$ sajátértéke egy sztochasztikus mátrixnak, akkor $|\lambda| \leq 1$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \in \mathbb{C}$ sajátértéke egy $n \times n$ -es sztochasztikus mátrixnak, ekkor a 2.7. Tétel szerint létezik olyan Q konvex q-szög $(q \leq n)$, amelyre $\lambda Q \subset Q$. Legyen $z \in Q$ olyan, amelyre |z| maximális, ilyen Q kompaktsága miatt létezik. Ekkor $\lambda z \in \lambda Q \subset Q$ (lásd 2.4. ábra), amiből következik, hogy $|\lambda z| \leq |z|$, azaz $|\lambda| \leq 1$ teljesül, ha $|z| \neq 0$. Ha viszont |z| = 0, akkor Q egyedül a 0 pontból áll, amit kizártunk.



2.4. ábra. A 2.8. Állítás bizonyítása

Az alábbi tétel arról szól, hogy ha speciálisan $|\lambda| = 1$ és $\lambda \in M_n$, akkor λ csak speciális alakú lehet.

2.9. Állítás. $A \ \lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| = 1 \ szám \ akkor \ és \ csak \ akkor \ van \ M_n$ -ben, ha $\lambda = \exp\left(2\pi i \frac{p}{q}\right)$, ahol $0 \le p \le q \le n \ egész \ számok$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy a $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ szám M_n -ben van. Be kell látnunk, hogy ekkor $\lambda = \exp\left(2\pi i \frac{p}{q}\right)$ alakú, ahol $0 \leq p \leq q \leq n$ egész számok. A 2.7. Tétel szerint létezik Q konvex q-szög $(q \leq n)$, amelyre $\lambda Q \subset Q$. Legyen $z \in Q$ olyan, amelyre |z|maximális, ilyen Q kompaktsága miatt van. Könnyen látható, hogy ekkor z a Q sokszög valamelyik csúcsa. Valóban, egyrészt z belső pont nem lehet, mivel ekkor lenne a z pontnak egy olyan környezete, amely Q-ban lenne, de így |z| nem lehet maximális. Másrészt geometriai megfontolások alapján az is látható, hogy z a Q oldalain sem helyezkedhet el, mivel így sem lenne |z| minimális (lásd a 2.5. ábrán $0z_1 > 0z$, hiszen a $0zz_1$ háromszögben z-nél tompaszög van). Összefoglalva, z a Q sokszög valamelyik csúcsa. Hasonlóan, $\lambda^2 Q \subset \lambda Q \subset Q$ és $|\lambda| = 1$ miatt $\lambda^2 z$ is Q valamelyik csúcsa és így tovább. Mivel legfeljebb n csúcsa van Q-nak, ezért létezik α , β , hogy $\lambda^{\alpha} = \lambda^{\beta}$, azaz $\lambda^{\alpha-\beta} = \lambda^q = 1$ valamilyen $q \leq n$ esetén (lásd 2.6. ábra), így $\lambda = \exp\left(2\pi i \frac{p}{q}\right)$, amit igazolni akartunk.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\lambda = \exp\left(2\pi i \frac{p}{q}\right)$, ahol $0 \le p \le q \le n$. Igazolni szeretnénk, hogy λ egy $n \times n$ -es sztochasztikus mátrix sajátértéke. Tudjuk, hogy egy szabályos q-szöget egy $\lambda = \exp\left(2\pi i \frac{p}{q}\right)$ számmal megszorozva egy olyan q-szöget kapunk, amely egybeesik önmagával. Ennélfogva a q-szög λ -szorosa része a q-szögnek, tehát a 2.7. Tétel szerint λ egy $n \times n$ -es sztochasztikus mátrix sajátértéke.



2.5. ábra. A 2.9. Állítás bizonyítása 1.

2.6. ábra. A 2.9. Állítás bizonyítása 2.

2.10. Állítás. A sajátértékeket tartalmazó M_n halmaz csillagszerű az origóra nézve, azaz minden $\lambda \in M_n$ esetén $[0, \lambda] \subset M_n$, ahol $[0, \lambda] = \{t\lambda : t \in [0, 1]\}$.

Bizonyítás. Ha $\lambda \in M_n$, akkor a 2.7. Tétel szerint létezik Q sokszög, amelyre $\lambda Q \subset Q$. Ekkor $0 \in Q$, különben Q kompaktsága miatt egyértelműen létezik egy $z \in Q$, hogy |z|minimális. Ebben az esetben viszont $|\lambda z| < |z|$, ezért $\lambda z \notin Q$, ahogy a 2.7. ábrán is látható, kivéve a triviális $|\lambda| = 1$ esetet. Ha pedig $|\lambda| = 1$, akkor λz a z egy elforgatottja, így |z|nem lehet minimális (lásd 2.8. ábra).





Mivel $0 \in Q$, ezért minden $0 \le \alpha \le 1$ esetén $(\alpha \lambda)Q \subset \lambda Q \subset Q$, így a 2.7. Tétel miatt $\alpha \lambda \in M_n$, azaz M_n csillagszerű.

2.4. Az M_n halmaz részleges leírása

A következőkben egy fontos lemmát tárgyalunk, amely segítségül szolgál az M_n tartomány részleges leírásához.

2.11. Lemma (Minimális szög). Legyen $A_1A_2...A_n$ egy konvex n-szög és $A_{n+1} = A_1$. Jelölje R az előbb definiált sokszög egy tetszőleges belső pontját, amelyet a 2.9. ábrán láthatunk. Ekkor

$$\min_{k=1,\dots,n} RA_k A_{k+1} \measuredangle \le \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fent, ha $A_1 A_2 \dots A_n$ szabályos n-szög és R a középpontja.



2.9. ábra. Minimális szög lemma

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $RA_kA_{k+1}\measuredangle > \alpha$ minden $k = 1, \ldots, n$ esetén, ahol $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ a rövidség kedvéért. Mivel $RA_kA_{k+1}\measuredangle > \alpha$, ezért létezik N_k pont az RA_{k+1} szakaszon, hogy $RA_kN_k\measuredangle = \alpha$. Jelölje Ψ_k az $RN_kA_k\measuredangle$ szöget, amelyet a 2.10. ábrán láthatunk. Ekkor az RA_kN_k háromszögben a szinusztételt felhasználva kapjuk, hogy



2.10. ábra. A 2.11. Lemma bizonyítása

$$\frac{\sin \Psi_k}{\sin \alpha} = \frac{RA_k}{RN_k} > \frac{RA_k}{RA_{k+1}}$$

A fenti egyenlőtlenséget felírva $k = 1, \ldots, n$ esetén, majd összeszorozva kapjuk, hogy

$$\frac{\sin\Psi_1}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin\Psi_2}{\sin\alpha} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin\Psi_n}{\sin\alpha} > \frac{RA_1}{RA_2} \cdot \frac{RA_2}{RA_3} \cdot \ldots \cdot \frac{RA_n}{RA_1} = 1,$$

tehát

(2.1)
$$\sin \Psi_1 \cdot \sin \Psi_2 \cdot \ldots \cdot \sin \Psi_n > (\sin \alpha)^n.$$

Másrészt belátjuk, hogy

$$\sin \Psi_1 \cdot \sin \Psi_2 \cdot \ldots \cdot \sin \Psi_n \le (\sin \alpha)^n.$$

Mivel

$$\sum_{k=1}^{n} \Psi_{k} = \sum_{k=1}^{n} (\pi - \alpha - A_{k} R A_{k+1} \measuredangle) = n(\pi - \alpha) - \sum_{k=1}^{n} A_{k} R A_{k+1} \measuredangle = n(\pi - \alpha) - 2\pi = n\alpha,$$

ahol $0 < \Psi_{1} < \pi, \dots, 0 < \Psi_{n} < \pi,$ ezért
(2.2)
 $(\sin \Psi_{1} + \dots + \sin \Psi_{n})^{n} ((\Psi_{1} + \dots + \Psi_{n}))^{n} + ((\Psi_{1} + \dots + \Psi_{n}))^{n})$

$$\sin \Psi_1 \cdot \ldots \cdot \sin \Psi_n \le \left(\frac{\sin \Psi_1 + \ldots + \sin \Psi_n}{n}\right)^n \le \left(\sin \left(\frac{\Psi_1 + \ldots + \Psi_n}{n}\right)\right)^n = (\sin \alpha)^n,$$

amelyet a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség és a Jensen-egyenlőtlenség felhasználásával kapunk. Látjuk, hogy a (2.1) és a (2.2) egyenletekkel ellentmondásra jutottunk, tehát

$$RA_kA_{k+1}\measuredangle \le \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$$

minden $k = 1, \ldots, n$ esetén, amit bizonyítani szerettünk volna.

Végül látható, hogy a fenti bizonyítás alkalmazható a lemmában szereplő egyenlőségre is. Ugyanis ekkor $RA_kA_{k+1} \measuredangle \ge \alpha$ minden $k = 1, \ldots, n$ esetén és $N_k = A_{k+1}$ is lehetséges, de továbbra is $0 < \Psi_k < \pi$. Ekkor a (2.1) egyenlőtlenségben egyenlőség is lehetséges, de a (2.2) egyenlőtlenségnek köszönhetően csakis utóbbi állhat fenn. Tehát $\Psi_1 = \ldots = \Psi_n$, ami szerint $\Psi_k = \alpha$ minden k esetén, így kapjuk, hogy $A_1A_2 \ldots A_n$ szabályos n-szög.

Az alábbi tétel az M_n tartomány részleges leírásáról szól.

2.12. Tétel. Egy $\lambda \in \mathbb{C}$ szám, amelyre $-\frac{2\pi}{n} \leq \arg \lambda \leq \frac{2\pi}{n}$ teljesül, akkor és csak akkor van M_n -ben, ha λ a $\{0, \exp\left(-\frac{2\pi i}{n}\right), 1, \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\}$ pontok által meghatározott négyszögben vagy annak határán van (lásd 2.11. ábra).



2.11. ábra. Az M_n halmaz részleges leírása

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy λ a $\{0, \exp\left(-\frac{2\pi i}{n}\right), 1, \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\}$ pontok által meghatározott négyszögben vagy annak határán van. Ekkor megmutatjuk, hogy $\lambda \in M_n$. A csillagszerűség (2.10. Állítás) miatt elég belátni, hogy tetszőleges $z \in [1, \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)]$ szám M_n -ben van (a $z \in [1, \exp\left(-\frac{2\pi i}{n}\right)]$ eset a szimmetria miatt hasonlóan meggondolható).

Legyen tehát $z \in \left[1, \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\right]$ tetszőleges és R_n szabályos *n*-szög a következő csúcsokkal:

1,
$$\exp\left(2\pi i\frac{1}{n}\right)$$
, ..., $\exp\left(2\pi i\frac{n-1}{n}\right)$.

Az R_n sokszöget z-vel szorozva egy olyan $\tilde{R_n}$ sokszöget kapunk, amelynek csúcsai R_n oldalain vannak, hiszen a z-vel való szorzás során az 1 az $[1, \exp(\frac{2\pi i}{n})]$ szakaszra kerül, így a forgásszimmetria miatt R_n többi csúcsai $\tilde{R_n}$ megfelelő oldalaira kerülnek. Az R_n , $\tilde{R_n}$ sokszöget a 2.12. ábrán kékkel és pirossal jelöltük. Ezért $\tilde{R_n} \subset R_n$, azaz a 2.7. Tétel miatt $z \in M_n$, amit bizonyítani akartunk.



2.12. ábra. A részleges leírás bizonyítása 1.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\lambda \in M_n$ olyan, amelynek argumentumára $0 \leq \arg \lambda \leq \frac{2\pi}{n}$ teljesül (a $-\frac{2\pi}{n} \leq \arg \lambda \leq 0$ eset a szimmetria miatt hasonlóan kezelhető). Be szeretnénk látni, hogy ekkor λ a $\{0, \exp\left(-\frac{2\pi i}{n}\right), 1, \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\}$ pontok által meghatározott négyszögben vagy annak határán van. A 2.7. Tételben és a 2.10. Állításban foglaltak szerint létezik Y konvex sokszög y_1, \ldots, y_q ($q \leq n$) csúcsokkal, hogy $0 \in Y$ és $\lambda Y \subset Y$. A 2.11. Lemma miatt továbbá létezik k, hogy

$$y_{k+1}y_k 0 \measuredangle \le \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$$

Legyen $w := \lambda y_k$, amelyet a 2.13. ábrán is láthatunk. Mivel $w \in Y$, ezért

$$wy_k 0\measuredangle \le y_{k+1}y_k 0\measuredangle \le \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$$

Mivel $wy_k 0 \measuredangle = \lambda 10 \measuredangle$ (lásd 2.14. ábra), ezért $\lambda 10 \measuredangle \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ alapján $01 \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right) \measuredangle = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$, ami éppen azt jelenti, hogy λ az R_n négyszögben van.

2.5. Az M_n halmaz teljes leírása

Az előző szakaszban a 2.11. Lemma segítségével megadtuk a 2.12. Tételben az M_n tartomány részleges leírását. Kérdés azonban továbbra is az M_n tartomány teljes megha-



2.13. ábra. A részleges leírás bizonyítása 2. 2.14. ábra. A részleges leírás bizonyítása 3.

tározása. Ehhez vezessük be a ciklikusság fogalmát, amelyet Dmitriev és Dynkin definiált először.

2.13. Definíció. Egy Q konvex q-szög ciklikus és μ generálja, ha Q az $\{1, \mu, \mu^2, \ldots\}$ pontok konvex burka.

2.14. Példa. Ciklikus konvex sokszög például az $\exp\left(\frac{2\pi i p}{5}\right)$ (p = 0, 1, 2, 3, 4) csúcsok által meghatározott szabályos ötszög, amelyet $\mu = \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$ generál.

Dmitriev és Dynkin 1946-ban leírta az M_n halmazt tetszőleges $n \leq 5$ esetén, erről szól az alábbi tétel.

2.15. Tétel. Az M_n $(n \le 5)$ tartomány azon ciklikus q-szögek egyesítése, amelyekre $q \le n$.

A 2.13. Definícióban bevezetett ciklikusság fogalmát Karpelevich általánosította és ennek segítségével az M_n halmaz jellemzését tetszőleges n esetén adta meg.

2.16. Definíció. Egy Q konvex q-szög ciklikus, ha létezik egy $\mu \in \mathbb{C}$ és $p \leq q$ pozitív egész szám, hogy Q megegyezik a $\mu^m \exp\left(2\pi i \frac{r}{p}\right)$ pontok konvex burkával, ahol $m = 0, 1, \ldots$ és $r = 0, 1, \ldots, p - 1$.

Az M_n tartomány teljes leírását tetszőleges *n*-re Karpelevich fogalmazta meg és bizonyította 1941-ben és 1951-ben, amely a 2.15. Tétel általánosítása n > 5 esetén.

2.17. Tétel. Az M_n halmaz azon ciklikus q-szögek egyesítése, amelyekre $q \leq n$.

Karpelevich az M_n tartomány számos tulajdonságát is meghatározta 1951-ben, amelyeket az alábbi tétel foglal össze.

2.18. Tétel. Az M_n halmaz szimmetrikus a valós tengelyre, és a $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ egységkörlapnak részhalmaza. A $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ egységkört az $\{\exp(2\pi i \frac{a}{b})\}$ pontokban érinti, ahol $0 \leq a \leq b \leq n$ egész számok. Az M_n tartomány határa tartalmazza ezen pontokat, amelyek egymással az egységkörlapon belül különböző paraméterű ívekkel kapcsolódnak egymáshoz. Minden ívet a következő egyenletek valamelyike ír le:

$$\lambda^{q} (\lambda^{p} - t)^{r} = (1 - t)^{r},$$
$$(\lambda^{b} - t)^{d} = (1 - t)^{d} \lambda^{q},$$

ahol $0 \le t \le 1$, és a b, d, p, q és r egész számok a [11] cikkben leírtak alapján vannak definiálva, aminek részletezésére (a technikai nehézségek miatt) most nem térünk ki.

2.6. Extremális sajátértékek

Az M_n halmaz leírásához elegendő meghatározni az úgynevezett extremális sajátértékeket, amelyeket az alábbiakban definiálunk.

2.19. Definíció. A $\lambda \in \mathbb{C}$ számot extremális sajátértéknek nevezzük, ha $\alpha \lambda \notin M_n$ minden $\alpha > 1$ esetén.

A 2.12. Tétel alapján tegyük fel, hogy egy sztochasztikus mátrix valamely extremális sajátértéke az $\left[1, \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\right]$ szakaszon helyezkedik el, amit a 2.15. ábrán láthatunk. Mit mondhatunk ekkor a többi sajátértékről? Hogy néz ki ilyenkor a mátrix?



2.15. ábra. Extremális sajátérték

Ha $\lambda \in \left[1, \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\right]$, akkor λ a következő alakban is írható:

$$\lambda = \alpha + \beta \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}\right),\,$$

ahol $\alpha, \beta \ge 0$ és $\alpha + \beta = 1$. Ezért

$$(\lambda - \alpha)^n = \beta^n$$

teljesül, tehát a mátrix karakterisztikus polinomja (konstans szorzó erejéig)

$$(x-\alpha)^n - \beta^n.$$

Így ennek a gyökei $\lambda_j = \alpha + \beta \varepsilon_j$ alakúak, ahol ε_j jelöli az *n*-edik egységgyököt. Ez tehát azt jelenti, hogy a sajátértékek egy szabályos *n*-szög csúcsai. Egy sztochasztikus mátrix ilyen sajátértékekkel a következő alakú, vagy ehhez hasonló mátrix:

(2.3)
$$\begin{pmatrix} \alpha \ \beta \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ \alpha \ \beta \ 0 \ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ddots \\ \ddots \\ \ddots \\ 0 \\ \beta \ 0 \ 0 \ \alpha \ \beta \\ \beta \ 0 \ 0 \ \alpha \ \alpha \end{pmatrix}.$$

Ennek mintájára Dmitriev és Dynkin fogalmazta meg 1946-ban a következő, extremális sajátértékről szóló tételt.

2.20. Tétel. Ha egy $n \times n$ -es sztochasztikus mátrix λ extremális sajátértéke olyan, hogy $\lambda \in M_n \setminus M_{n-1}$ és $\frac{2\pi p}{n} \leq \arg \lambda \leq \frac{2\pi (p+1)}{n}$, ahol $0 \leq p \leq n-1$ egész, akkor a mátrix a következő alakú:



2.16. ábra. Extremális sajátérték mátrixa

A [18] dolgozatban a szerző részletesen tárgyalja az M_n tartományokat kis *n*-ek esetén. Ezek közül említünk pár egyszerűbb esetet a következő példákban, ahol egyrészt különböző *n* értékekre ábrázoljuk az M_n tartományokat, és a megfelelő szögek esetén felírjuk az extremális sajátértéket leíró egyenleteket. Látni fogjuk, hogy az M_n halmazokat határoló ívek egyenletei cseppet sem triviálisak.

2.21. Példa. Az M_3 halmazt a 2.17. ábrán láthatjuk.



2.17. ábra. Az $M_{\rm 3}$ halmaz

2.18. ábra. Az M_4 halmaz

Az extremális sajátértéket leíró egyenlet (ahol $\alpha,\beta\geq 0,\alpha+\beta=1)$:

- a $\left(-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ szögtartományban $(\lambda \alpha)^3 = \beta^3$,
- a $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ szögtartományban $\lambda^3 = \alpha + \beta \lambda$.
- **2.22.** Példa. Az M_4 halmaz a 2.18. ábrán látható.

Az extremális sajátértéket leíró egyenlet (ahol $\alpha,\beta\geq 0,\alpha+\beta=1)$:

- a $\left(-\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}\right)$ szögtartományban $(\lambda \alpha)^4 = \beta^4$,
- a $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$ szögtartományban $\lambda^4 = \alpha + \beta\lambda$,
- a $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ szögtartományban $(\lambda^2 \alpha)^2 = \beta^2 \lambda$.

2.23. Példa. Az M_5 tartomány leírása.

Az extremális sajátértékeket leíró egyenlet (ahol $\alpha, \beta \ge 0, \alpha + \beta = 1$):

- a $\left(-\frac{2\pi}{5},\frac{2\pi}{5}\right)$ szögtartományban $(\lambda \alpha)^5 = \beta^5$,
- a $\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{8\pi}{5}\right)$ szögtartományban $\lambda^5 = \alpha + \beta\lambda$,
- a $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$ szögtartományban $\lambda^4 = \alpha + \beta \lambda$,
- a $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}\right), \left(\frac{6\pi}{5}, \frac{4\pi}{3}\right)$ szögtartományban $\lambda^5 = \alpha + \beta \lambda^2$,
- a $\left(\frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}\right)$ szögtartományban $\lambda(\lambda^2 \alpha)^2 = \beta^2$.

Az M_n tartomány ismeretében $n \times n$ -es nemnegatív mátrixok sajátértékeinek elhelyezkedéséről is kimondható egy állítás, amelyet Kolmogorov, Dmitriev és Dynkin fogalmaztak meg 1946-ban.

2.24. Tétel. Az $n \times n$ -es nemnegatív elemekből álló \mathcal{A} mátrix sajátértékei a $\varrho(\mathcal{A})M_n$ halmazban vannak, ahol $\varrho(\mathcal{A})$ az \mathcal{A} mátrix spektrálsugara.

Bizonyítás. Egyrészt ha \mathcal{A} irreducibilis, azaz nem hasonló blokk háromszög mátrixhoz, akkor az 1.16. Tételből következik, hogy létezik egy pozitív $x \in \mathbb{R}^n$ sajátvektor, amelyre $\mathcal{A}x = \varrho x$. Legyen X diagonális mátrix $X_{jj} = x_j$ diagonális elemekkel, ekkor $\mathcal{B} := \frac{1}{\varrho} X^{-1} \mathcal{A}X$ sztochasztikus mátrix, hiszen

$$X^{-1}AX\mathbf{1} = X^{-1}Ax = X^{-1}\varrho x = \varrho \mathbf{1}.$$

Ha λ az \mathcal{A} mátrix sajátértéke, akkor $\frac{\lambda}{\varrho}$ a \mathcal{B} mátrix sajátértéke, amely M_n -ben van, ezért $\lambda \in \varrho(\mathcal{A})M_n$. Másrészt, ha \mathcal{A} reducibilis, akkor \mathcal{A} hasonló az alábbi blokk háromszög mátrixhoz:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix},$$

ahol A_{11}, \ldots, A_{kk} irreducibilisek. Ha λ sajátértéke \mathcal{A} -nak, akkor λ valamely A_{jj} -nek is sajátértéke, ezért $\lambda \in \varrho(A_{jj})M_n \subset \varrho(A)M_n$.

A következő fejezetben tárgyalt alkalmazások során sztochasztikus mátrixok helyett gyakrabban fordulnak elő az alábbi speciális tulajdonságú mátrixok.

2.25. Definíció. Az $n \times n$ -es $\mathcal{A} = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ mátrixot sztochasztikus generátornak nevezzük, ha $a_{jk} \ge 0$ minden $j \ne k$ esetén és $\sum_{k=1}^n a_{jk} = 0$ minden $j = 1, \ldots, n$ esetén.

Sztochasztikus mátrixok esetéhez hasonlóan felmerül a kérdés, hogy hol helyezkednek a sajátértékek. Később látjuk, hogy ez hogyan kapcsolódik hálózati folyamatok oszcillációjához, azaz milyen gyakorlati alkalmazása van ezen problémakör vizsgálatának. A sajátértékek elhelyezkedését a következő tétel foglalja össze.

2.26. Állítás. Az $n \times n$ -es \mathcal{A} sztochasztikus generátorok sajátértékeiből álló halmaz a következő kúp:

$$\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) \le \arg z \le \pi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)$$

amelyet a 2.19. ábrán láthatunk.



2.19. ábra. Sztochasztikus generátor sajátértékei

Bizonyítás. Egyrészt, ha \mathcal{P} sztochasztikus mátrix és $\mu > 0$, akkor $\mathcal{A} = \mu(\mathcal{P}-I)$ sztochasztikus generátor, amelynek sajátértéke $\mu(\lambda-1)$. Ha λ befutja az M_n halmazt, akkor a $\mu(\lambda-1)$ $(\mu > 0)$ alakú számok a tételben szereplő kúpot írják le (lásd a 2.20–2.22.ábrákat). Ez azt jelenti, hogy bármely, a szóbanforgó kúpbeli komplex szám előáll mint egy sztochasztikus generátor sajátértéke.

Másrészt, ha \mathcal{A} generátor, akkor $\mu > \max_{j=1,...,n} |a_{jj}|$ esetén $\mathcal{P} = \frac{1}{\mu}(\mathcal{A} + \mu I)$ sztochasztikus mátrix és $\mathcal{A} = \mu(\mathcal{P} - I)$. Mivel az \mathcal{A} sajátértékeinek M_n -ben kell lennie, az előbbi transzformációból kitűnik, hogy \mathcal{A} sajátértékei csakis a szóbanforgó kúpban helyezkedhetnek el.



2.20. ábra. λ 2.21. ábra. $\lambda-1$ 2.22. ábra. $\mu(\lambda-1)$

3. fejezet

Hálózati folyamatok

A hálózati folyamatok vizsgálata a mai modern alkalmazott matematika egyik fontos kutatási területe. Hálózati folyamat például egy populáción belüli fertőzés terjedésének időbeli lefolyása. A járványterjedésen kívül is számos alkalmazás említhető, amelyekben hálózati folyamatokkal találkozunk, ilyen például híresztelések terjedése társadalmi hálózatokon, vagy az aktivitás terjedése neurális hálózatokon.

Kiváló összefoglaló munkák jelentek meg a hálózati folyamatok matematikai leírásról, Newman, Barabási és Watts [13] könyve, Barrat, Barthélemy és Vespagnani [1] monográfiája, valamint Draief és Massoulié [4] kifejezetten a járvány és híresztelések terjedésére vonatkozó könyve.

A dolgozatban hálózati folyamatokon belül járványterjedéssel foglalkoztunk.

3.1. Járványterjedés adaptív hálózatokon

A járványterjedés modellezésére számos dinamika létezik, az egyik legelterjedtebb az SIS típusú járványterjedés. Ez olyan fertőzések leírására alkalmas, amelyben a fertőzésen átesett egyedek nem nyernek immunitást, hanem újra fertőzhetővé válnak. Az egyedek tehát kétféle állapotban lehetnek: S (egészséges - susceptible), illetve I (fertőző - infected). Az egyedek állapota kétféleképpen változhat: egy I típusú egyed adott valószínűséggel meggyógyul, azaz S típusú egyed lesz; illetve egy S típusú egyedet az I típusú egyedek megfertőzhetnek, azaz I típusú egyed lesz. A másik gyakran vizsgált dinamika az SIRtípusú járványterjedés, amely olyan fertőzések modellezésére alkalmas, ahol a fertőzésen átesett egyedek immunitást nyernek, tehát a fertőzött, I típusú egyedek egy új osztályba kerülnek, amelyet R (recovered) jelöl. Az egyedek tehát háromféle állapotban lehetnek: S, I, R. Az egyedek között a fenti kétféle átmenet lehetséges, azzal a módosítással, hogy a gyógyulás itt $I \to R$ átmenetet jelent. Ha az immunitás nem végleges, akkor szokás az SIRS típusú modellt alkalmazni, amelynél szintén háromféle állapot van, de a fenti átmeneteken kívül az $R \to S$ átmenet is lehetséges. Ha az S típusú egyedek a fertőzést megkapva nem lesznek azonnal betegek, akkor egy új osztályt célszerű bevezetni, amelyet E (exposed) jelöl. Ebben az esetben az egyedek négyféle állapotban lehetnek: S, I, R, E. Ekkor a következő átmenetek fordulhatnak elő: $S \to E, E \to I, I \to R$. Ezt a dinamikát SEIR típusú járványterjedésnek nevezik. Ha a fertőzés után az egyed nem nyer immunitást, akkor ehelyett SEIS dinamikát szokás használni.

Ebben a dolgozatban az egyszerűség kedvéért az SIS típusú járványterjedéssel foglalkozunk. A járványterjedést egy gráfon lezajló folyamatnak tekintjük. Tekintsünk egy N csúcsú irányítatlan, egyszerű gráfot, ahol a gráf csúcsai a populáció egyedeinek felelnek meg és két csúcs között akkor van él, ha köztük a fertőzés terjedhet. A gráf csúcsai tehát kétféle állapotban lehetnek: S (egészséges), illetve I (fertőző). A fertőzés ($S \rightarrow I$) és a gyógyulás ($I \rightarrow S$) Poisson-folyamattal írható le, ez azt jelenti, hogy infinitezimális Δt idő alatt egy S típusú csúcs (amely k darab I típusú szomszéddal rendelkezik) I típusú csúccsá változhat

$$P_{S \to I} = 1 - \exp(-k\tau\Delta t)$$

valószínűséggel, és hasonlóan egy ${\cal I}$ típusú csúc
sStípusú csúccsá változhat

$$P_{I \to S} = 1 - \exp(-\gamma \Delta t)$$

valószínűséggel, ahol τ és γ pozitív számok. A τ számot fertőzési rátának, a γ számot pedig gyógyulási rátának nevezzük, amelyek meghatározzák a fertőzés, illetve a gyógyulás valószínűségét. Az alapvető kérdés az, hogyan változik időben a fertőző csúcsok számának várható értéke.

A betegségterjedés leírására alkalmas dinamikán kívül másik fontos tényező a folyamatot leíró gráf. A kutatások célja annak felderítése, hogy a gráf szerkezetének ismeretében mit lehet mondani a folyamat jellemzőiről. A folyamatot leíró gráf időben lehet állandó, azonban változhat is az úgynevezett adaptív hálózatok esetében. Adaptív hálózatokról olyan folyamatoknál beszélünk, amikor a gráf maga is megváltozik a csúcsok állapotától függően, tehát az élek létrehozása és megszüntetése a csúcsok állapotától függ. Járványterjedésnél ez például azzal motiválható, hogy a fertőzött csúcsokkal az egészséges csúcsok igyekeznek megszüntetni kapcsolataikat, és ezzel egyidejűleg új kapcsolatokat hoznak létre. Más típusú hálózati folyamatnál is gyakori ez a jelenség, például neurális hálózatok modellezése során is fontos annak vizsgálata, hogy a gráf hogyan változik.

A [19] cikk alapján az élek létrehozása, illetve elvágása is Poisson-folyamattal írható le, azaz infinitezimális Δt idő alatt az A és B típusú csúcsok között él jön létre

$$P_{A\sim B} = 1 - \exp(\alpha_{AB}\Delta t)$$

valószínűséggel, és hasonlóan az A és B típusú csúcsok közötti él

$$P_{A \not\sim B} = 1 - \exp(\omega_{AB} \Delta t)$$

valószínűséggel törlődik, ahol az α_{AB} és ω_{AB} ráták pozitív számok. SIS típusú járványterjedés során ez hat különböző ráta megadását jelenti: α_{SI} , α_{SS} , α_{II} és ω_{SI} , ω_{SS} , ω_{II} .

Az ezzel kapcsolatos szakirodalomban két fő esetre fókuszálnak:

1. $\alpha_{SI} = \alpha_{II} = 0$, $\alpha_{SS} \neq 0$ és $\omega_{II} = \omega_{SS} = 0$, $\omega_{SI} \neq 0$,

2. $\alpha_{SI} = \alpha_{II} = \alpha$ és $\omega_{SI} = \omega_{II} = \omega_{SS} = \omega$.

Míg az első eset mindennapi megfontolások alapján lett konstruálva, ahol a csúcsok igyekeznek minimalizálni a megbetegedésük kockázatát, de a teljes elszigetelődés elkerülése is szempont, addig a második esetben az élek törlése és létrehozása független a csúcsok típusaitól, ami egy egyszerűbb modellhez vezet. Ezen rendszer viselkedésének leírására a dolgozatban nem térünk ki, de az eredmények megtalálhatóak a [19] cikkben.

Bármely két csúcs közötti élek létrehozásának és törlésének lehetőségével már kis csúcsszám esetén is nagy egyenletrendszerrel találkozunk, ha a folyamatot szeretnénk modellezni. Ezért a dolgozatban egy teljesen más, új rendszer vizsgálata volt a cél, amelyet a 3.3. szakaszban részletezünk.

Célunk a rendszer viselkedésének meghatározása volt, beleértve, hogy mikor hal ki a betegség, az úgynevezett endemikus egyensúly mikor áll be, illetve mikor jön létre oszcilláció.

3.2. Az oszcilláció megjelenése

Annak érdekében, hogy megértsük a rendszer viselkedését, szükségünk van az úgynevezett master-egyenlet levezetésére. Ehhez néhány jelölést vezetünk be. Egy N csúcsú gráf esetén, ahol a folyamat során a gráf rögzített és amelyen SIS típusú járványterjedés folyik, a rendszer állapottere a 2^N elemet tartalmazó $\{S, I\}^N$ halmaz.

Legyen S^0 az az állapot, amelyben minden csúcs S típusú, azaz $S^0 = (S, S, ..., S)$. Jelölje S^k azon állapotok halmazát, amelyben k darab I típusú csúcs van. Az S^k részhalmazban $c_k = \binom{n}{k}$ állapot van. Végül jelölje S^N a csupa I típusú csúcsokból álló állapotot, azaz $S^N = (I, I, ..., I)$.

Az S^k részhalmazait jelölje $S_1^k, S_2^k, \ldots, S_{c_k}^k$. Az S_j^k állapotban az *l*-edik csúcs típusát jelölje $S_j^k(l)$, tehát $S_j^k(l) = S$ vagy $S_j^k(l) = I$. A [17] alapján SIS típusú járványterjedés során a rendszer állapota kétféleképpen változhat:

- 1. Fertőzés: egy S csúcs I típusúvá válik, ami $S_j^k \to S_i^{k+1}$ típusú átmenetet jelent, ahol *i* és *j* olyanok, hogy létezik *l*, hogy $S_j^k(l) = S$, $S_i^{k+1}(l) = I$ és $S_j^k(m) = S_i^{k+1}(m)$ minden $m \neq l$ esetén. Továbbá létezik $r \neq l$, amelyre $S_j^k(l) = I$ és van SI típusú él az *l* és *r* csúcs között.
- 2. Gyógyulás: egy I típusú csúc
sStípusú lesz, amely $S_j^k \to S_i^{k-1}$ típusú átmenet, ahol
 iés jolyanok, hogy létezik
 l, amelyre $S_j^k(l) = I$, $S_i^{k-1}(l) = S$ é
s $S_j^k(m) = S_i^{k-1}(m)$ minden $m \neq l$ esetén.

Jelölje $X_j^k(t)$ annak a valószínűségét, hogy atidőpontban a rendszer az S_j^k állapotban van. Legyen

$$X^{k}(t) = \left(X_{1}^{k}(t), X_{2}^{k}(t), \dots, X_{c_{k}}^{k}(t)\right)$$

a k beteget tartalmazó állapotok valószínűségeit tartalmazó c_k nagyságú vektor, ahol k = 0, 1, ..., N. A [17] cikk alapján tudjuk, hogy a fenti átmenetek az $X_j^k(t)$ függvényekre egy lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszert határoznak meg, ezt

alapegyenletnek (master equation) nevezik. Mivel az átmenetek során a fertőző csúcsok száma legfeljebb eggyel változhat, ezért az alapegyenlet az alábbi blokk-tridiagonális alakban írható fel:

$$\dot{X}^{k} = A^{k} X^{k-1} + B^{k} X^{k} + C^{k} X^{k+1}, \qquad k = 0, 1, \dots, N,$$

ahol az A^k, B^k és C^k mátrixokat az adott gráfstruktúra határozza meg. A fenti egyenlet mátrix alakja

$$\dot{X} = \mathcal{M}X,$$

ahol \mathcal{M} úgynevezetett sztochasztikus generátor, amelynek jelentését a 2.25. Definícióban részleteztük.

Adaptív hálózatok esetében is felírható az alapegyenlet, azonban ilyen esetben az állapottér jóval nagyobb. Feladatunk egy a 3.3. szakaszban tárgyalt rendszer viselkedésének leírása.

Kérdés továbbá az oszcilláció megjelenésének magyarázata a modellben. A [19] cikk alapján az utóbbihoz szükségünk van az \mathcal{M} mátrix spektrumának meghatározására. A 2.26. Tétel alapján tudjuk, hogy tetszőleges sztochasztikus generátor spektruma a komplex sík negatív részén helyezkedik el és a nulla egy sajátérték. A nulla sajátértékhez tartozó sajátvektor koordinátái nemnullák azokban az állapotokban, ahol minden csúcs egészséges.

Az alapegyenlet x(t) megoldása az $e^{\lambda t}u$ alakú függvények lineáris kombinációja, ahol λ az \mathcal{M} mátrix sajátértéke és u egy hozzá tartozó sajátvektor. Ha $\lambda \neq 0$, akkor a valós része negatív, ezért $t \to \infty$ esetén az előbb említett függvény nullához tart, azaz csak nagy t esetén észlelhetünk betegségmentes állapotot. Tipikusan a sajátértékek valós része elég közel van nullához, de hosszú idő elteltével a viselkedés különbözik a betegségmentes állapottól. Statikus, azaz nem adaptív hálózatokra ez a sajátérték valós, ezért a rendszer hosszútávú viselkedését az úgynevezett endemikus egyensúlyi állapot jellemzi, amely azt jelenti, hogy a betegség nem hal ki, hanem beáll valamilyen állandó értékre. Adaptív hálózatok esetén ez a sajátérték komplex, ami csillapított oszcillációhoz vezethet, amely különbözik mind a betegségmentes állapottól, mind az endemikus egyensúlytól is. Ilyen esetben a fertőző csúcsok számának várható értéke időben nagyjából ismétlődően változik. Ezen jelenség vizsgálata azért fontos, mert míg a betegségmentes állapot és az endemikus egyensúly esetén könnyen meg lehet határozni, hogy milyen paraméterek esetén megy végbe, addig az oszcilláció megjelenése a paraméterek függvényében nem magától értetődő.

Az oszcillációt a [6], [8], [16] cikkekben is vizsgálták, különböző típusú hálózatokon végeztek szimulációkat és megállapították, hogy milyen paraméterek esetében lehet oszcilláció, azonban az oszcilláció megjelenésére és a csillapodás mértékére semmilyen magyarázatot nem említettek.

Vizsgáljuk meg, hogy vajon milyen típusú sajátértékek felelősek az előbb említett oszcillációért. A [19] cikkben leírtak alapján elmondhatjuk, hogy ha a sajátérték komplex, azaz $\lambda = -\mu + i\nu$ alakú, akkor bevezetve a $\frac{\mu}{\nu}$ hányadost, amely éppen a komplex sajátérték fázisával van kapcsolatban, a következőket kapjuk: ha ez a hányados kisebb mint 1, akkor az oszcilláció mindig csillapított, és minél kisebb ez a hányados, annál kisebb a csillapítás. A kulcs kérdés az, hogy ezen hányados nagysága hogyan függ a paraméterektől. Az előző fejezetben ezt a problémakört általánosabban tárgyaltuk, meghatároztuk a 2.17. Tételben tetszőleges n esetén az M_n halmazt, amely azon komplex számokat tartalmazza, amelyek egy $n \times n$ -es sztochasztikus mátrix sajátértékei. Speciálisan a 2.26. Tételben megfogalmaztuk azt is, hogy egy $n \times n$ -es sztochasztikus generátor esetén ez a tartomány egy $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ félnyílásszögű kúp.

3.3. A modell

Az adaptív hálózatok vizsgálata napjainkban egy széleskörben kutatott terület, számos dolgozat és egy összefoglaló jellegű könyv született, a [7], amelyben rengeteg alkalmazás található. A cikkek száma folyamatosan növekszik, ezek közül említésre méltó például a [9], [10], [14], [15].

Az adaptív hálózatokban a gráf időben változik, élek jönnek létre és szünnek meg. Az általunk tárgyalt modell valamennyire speciális, mivel nem engedjük meg tetszőleges él törlését, illetve él létrehozását, hanem adott valószínűséggel egy úgynevezett gyengén összekötött rögzített gráfból élek létrehozásával eljuthatunk egy erősen összekötött rögzített gráfba és fordítva. Az általános esettel ellentétben tehát nem jöhet létre N csúcsból álló tetszőleges gráf, hanem két rögzített gráfból választhatunk.

Jelölje az állapotteret

$$\{c_1, c_2, \ldots, c_N, d_1, d_2, \ldots, d_N\},\$$

ahol c_i az *i* beteget tartalmazó állapot az erősen összekötött gráfban, és d_i az *i* beteget tartalmazó állapot a gyengén összekötött gráfban. Az átmenetek rátái:

$$\mathbf{r}(c_i \to c_{i+1}) = a_i \tau,$$

ahol a_i jelöli az SI élek átlagos számát, ha i beteg van és a gráf erősen összekötött,

$$\mathbf{r}(c_i \to c_{i-1}) = i\gamma,$$

 $\mathbf{r}(d_i \to d_{i+1}) = b_i\tau,$

ahol b_i jelöli az SI élek átlagos számát, ha i beteg van és a gráf gyengén összekötött,

$$\mathbf{r}(d_i \to d_{i-1}) = i\gamma.$$

A gráfok közötti átmenetek rátái:

$$\mathbf{r}(c_i \to d_i) = \omega_i,$$

 $\mathbf{r}(d_i \to c_i) = \alpha_i,$

ahol $\omega_i = \omega_{SI} \cdot a_i$, továbbá α_i meghatározásához vezessünk be néhány jelölést. Jelölje n_l az átlagos fokszámot a gyengén összefüggő gráf esetén, n_h az átlagos fokszámot az erősen



3.1. ábra. Adaptív hálózatot leíró Markov folyamat állapottere és átmeneti rátái

összefüggő gráf esetén. Nyilvánvaló, ha egy állapotban i darab I típusú csúcs van, akkor N - i darab S típusú csúcs van. Ekkor a következő összefüggések állnak fenn:

$$[SI]_l + [SS]_l = n_l(N-i),$$

amelyből $[SI]_l = b_i$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$[SS]_l = n_l(N-i) - b_i.$$

Hasonlóan az erősen összefüggő gráf esetén $[SI]_h=a_i$ felhasználásával adódik, hogy

$$[SS]_h = n_h(N-i) - a_i.$$

Így az $r_{d_i \to c_i}$ rátában szereplő α_i értékre kapjuk, hogy

$$\alpha_i = \alpha_{SS} \left([SS]_h - [SS]_l \right),$$

ha ezen érték nemnegatív és legyen nulla, ha a fenti kifejezés negatív. A modellhez tartozó Markov folyamat átmenet gráfját a 3.1. ábrán láthatjuk.

Jelölje $x_i(t)$ a c_i állapot valószínűségét a t időpontban és hasonlóan $y_i(t)$ a d_i állapot valószínűségét a t időpontban. Ezen állapotvalószínűségekre könnyedén felírhatóak az alábbi differenciálegyenletek (alapegyenletek):

$$\dot{x}_{k}(t) = a_{k-1}\tau x_{k-1} + (k+1)\gamma x_{k+1} + \alpha_{k}y_{k} - (a_{k}\tau + k\gamma + \omega_{k})x_{k},$$

$$\dot{y}_{k}(t) = b_{k-1}\tau y_{k-1} + (k+1)\gamma y_{k+1} + \omega_{k}x_{k} - (b_{k}\tau + k\gamma + \alpha_{k})y_{k}.$$

A differenciálegyenlet-rendszer tehát a következő mátrix alakban írható:

(3.1)
$$\begin{pmatrix} \dot{x}\\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \ddots \\ & & \\ & \\ & &$$

$$A = \begin{pmatrix} -a_{0}\tau - \omega_{0} & \gamma & 0 & \cdots \\ a_{0}\tau & -a_{1}\tau - \gamma - \omega_{1} & 2\gamma & 0 & \cdots \\ 0 & a_{1}\tau & \ddots & \ddots \\ & & & N\gamma \\ & & & a_{N-1}\tau - N\gamma \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} -b_{0}\tau - \omega_{0} & \gamma & 0 & \cdots \\ b_{0}\tau & -b_{1}\tau - \gamma - \omega_{1} & 2\gamma & 0 & \cdots \\ 0 & b_{1}\tau & \ddots & \ddots \\ & & & N\gamma \\ & & & b_{N-1}\tau - N\gamma \end{pmatrix}$$

és

ahol

Kérdés még az a_i és b_i függvények megválasztása a paraméterek $(n_h, n_l, \alpha_{SS}, \omega_{SI}, \tau, \gamma, N)$ ismeretében. A legegyszerűbb a_i, b_i választás a következő gondolatmeneten alapszik: egy S típusú csúcsnak n darab szomszédja van, ezek $\frac{i}{N}$ -ed része I típusú. Az SI élek száma tehát nagyjából $\frac{n}{N}i(N-i)$, így

$$a_i = \frac{n_h}{N}i(N-i)$$

$$b_i = \frac{n_l}{N}i(N-i).$$

Továbbá

$$[SS]_h = \frac{n_h}{N} (N-i)^2,$$
$$[SS]_l = \frac{n_l}{N} (N-i)^2$$

és általánosan

$$\alpha_i = \alpha_{SS} \left((N-i)(n_h - n_l) + b_i - a_i \right)$$

Korábban célul tűztük ki a rendszer viselkedésének teljes leírását, amely egyrészt azt jelenti, hogy milyen paraméterértékek mellett szűnik meg a betegség, másrészt mikor áll be az endemikus egyensúly és mikor jelenhet meg oszcilláció. A [9], [16], [19] cikkekre támaszkodva bizonyos paramétereket rögzítettünk és néhány paramétereket változtattunk és ezen paraméterek változtatása esetén vizsgáltuk a rendszer viselkedését. A rögzített paraméterek: $N = 200, n_l = 5, n_h = 30, \alpha_{SS} = 0.01$ és $\gamma = 1$.

A τ és ω_{SI} paraméterek függvényében háromféle viselkedés tapasztalható: ha ω_{SI} kicsi és τ nagy, akkor úgynevezett endemikus egyensúlyt tapasztalunk, azaz a betegség beáll egy nullától különböző konstans értékre; ha ω_{SI} nagy és τ kicsi, akkor kihal a betegség.

Ezen viselkedések igazolása miatt numerikus szimulációkat végeztünk Matlab segítségével, ahol a különböző paraméterek esetében először kiszámoltuk a (3.1) egyenletben szereplő mátrixot, majd a (3.1) differenciálegyenlet-rendszert a beépített numerikus megoldó módszerrel oldottuk meg. Ezután az (x(t), y(t)) megoldást a $(0, 1, \ldots, N, 0, 1, \ldots, N)^{\top}$ vektorral szorozva és azt megfelelő időközönként ábrázolva megkaptuk a fertőző csúcsok száma várható értékének időbeli változását. A 3.2. és a 3.3. ábrákon különböző τ és ω_{SI} esetében látható a fertőző csúcsok száma várható értékének időbeli változása. A 3.2. ábrán τ kicsi és ω_{SI} nagy és láthatóan megszűnik a betegség, a 3.3. ábrán τ nagy és ω_{SI} kicsi, ekkor pedig beáll az endemikus egyensúly, mint ahogy ezt vártuk.



3.2. ábra. A (3.1) differenciálegyenlet-rendszer megoldásából származó betegszám az idő függvényében, amikor a betegségmentes egyensúly stabil



3.3. ábra. A (3.1) differenciálegyenlet-rendszer megoldásából származó betegszám az idő függvényében, amikor az endemikus egyensúly stabil

Mint már említettük, a különböző paraméterek változtatása esetén az oszcilláció megtalálása rendkívül nehéz. Ehhez segítséget nyújthat, ha kiszámoljuk a (3.1) egyenletben szereplő mátrix sajátértékeit. Pontosabban, nincs szükség minden sajátértékre, csak az összes sajátértéket tartalmazó kúp félnyílásszögére. (A 2.26. Állításban megmutattuk, hogy sztochasztikus generátorok esetében ez a tartomány kúp.) Ezen félnyílásszöghöz tartozó egyenes meredekségét ábrázoltuk különböző τ és ω_{SI} esetén, amit a 3.4. ábra szemléltet, ahol a különböző színek a különböző nagyságú meredekséget jelentik.



3.4. ábra. A (3.1)-ben szereplő mátrix spektrumát tartalmazó kúp félnyílásszögének meredeksége $(\tau, \omega_{SI}) \in [0, 1] \times [0, 1]$ és h = 0,01 felosztás esetén

A szimulációkat elvégezve még a legnagyobb félnyílásszögnél sem tapasztaltunk oszcillációt. Ennek oka valószínűleg az, hogy a rendszerben nem is jöhet létre oszcilláció. A következő szakaszban látni fogjuk, hogy adott n csúcsú gráf esetén az n hosszú körnél legnagyobb a félnyílásszög, és az oszcillációt is látni fogjuk. Ebben a rendszerben az átmeneti ráták úgy lettek kialakítva, hogy nem alakult ki a rendszerben kellő nagyságú kör. A szögek nagysága is ezt erősíti meg, hiszen azt is látni fogjuk, hogy kör esetén ez a szög jóval nagyobb.

A tanulságot levonva létrehoztunk egy mesterséges rendszert, ahol az $a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i$ rátákat úgy módosítottuk, hogy megjelenjen egy kellően hosszú kör. A 3.5. ábrán a (3.1) differenciálegyenlet-rendszer megoldásából származó betegszám látható az idő függvényében.

3.4. Gráftulajdonságok vizsgálata

Az előző szakaszban tárgyaltak alapján felmerülhet bennünk az a kérdés, hogy a járványterjedéstől függetlenül egy hálózatot megadó gráf milyen tulajdonságai vannak hatással az oszcilláció megjelenéséhez és a csillapítás erősségéhez. Ebben az irányított gráfban a különböző csúcsok a különböző állapotokat jelölik és két állapot között akkor van él, ha az egyik állapotból a másik állapotba nem 0 valószínűséggel juthatunk el.

Legyen ${\mathcal G}$ egy irányított súlyozott gráf, amely a Markov-lánc átmenet
gráfja. Ebben a



3.5. ábra. A (3.1) differenciálegyenlet-rendszer megoldásából származó betegszám az idő függvényében módosított paraméterek esetén

szakaszban feltesszük, hogy minden súly *a*-val egyenlő. Gyakorlati alkalmazásoknál előfordul, hogy ez nem teljesül, azonban az egy bonyolultabb problémához vezet, amivel a dolgozatban nem foglalkozunk, de ez további kutatási munkára ad lehetőséget.

Jelölje $x_k(t)$ a k-adik állapot valószínűségét a t időpontban. Ekkor a Markov-láncra vonatkozó alapegyenlet a következő alakú:

$$\dot{x}(t) = \mathcal{M}x(t),$$

ahol az \mathcal{M} mátrix főátlón kívüli elemei megegyeznek \mathcal{G} elemeivel és a főátlóban olyan elemek szerepelnek, hogy minden oszlopösszeg nulla. Látjuk, hogy így \mathcal{M} egy sztochasztikus generátor, amelyet a 2.25. Definícióban említettünk. Továbbá az \mathcal{M} mátrixot a Markovlánc infinitezimális generátorának nevezzük (lásd 1.3. Definíció).

Egy adott \mathcal{G} gráf esetén, amelynek infinitezimális generátora \mathcal{M} , jelölje $SC(\mathcal{G})$ a legkisebb kúpot, amelyben benne vannak \mathcal{M} sajátértékei. Ezt spektrális kúpnak nevezzük. Jelölje $A_{SC}(\mathcal{G})$ ezen spektrális kúp félnyílásszögét. A 3.2. szakaszban láttuk, hogy a [19] cikk alapján ezen szög határozza meg az oszcilláció csillapítását az adott rendszerben. Minél nagyobb ez a szög, annál nagyobb a csillapítás. A továbbiakban célunk volt meghatározni $A_{SC}(\mathcal{G})$ nagyságát a \mathcal{G} gráf geometriai/topologikus tulajdonságai függvényében. Az előző fejezetben látottak alapján megfogalmazhatjuk a következő állítást.

3.1. Állítás.

$$\max \{A_{SC}(\mathcal{G}) : |\mathcal{G}| = n\} = A_{SC}(C(n))$$

ahol C(n) jelöli az n csúcsból álló irányított kört.

Bizonyítás. Szeretnénk belátni, hogy $A_{SC}(C(n)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$. Számozzuk a kör csúcsait a körüljárás szerint. Meggondolható, hogy az állapotokat tetszőlegesen számozva a hozzá-



juk tartozó mátrixok sajátértékei nem változnak, így a csúcsok számozását önkényesen megválaszthatjuk. Így C(n) infinitezimális generátora:

 $\begin{pmatrix} -a \ a \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ -a \ a \ 0 \ 0 \\ 0 \ \ddots \ \ddots \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ -a \ a \\ a \ 0 \ 0 \ 0 \ -a \end{pmatrix}.$

Ekkor az infinitezimális generátorból a 2.26. Állítás bizonyításában szereplő transzformáció alapján kapott sztochasztikus mátrix éppen megegyezik a (2.3) egyenletben szereplő mátrixszal, amiből következik, hogy $A_{SC}(C(n)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$.

Gráftípusok, amelyeket vizsgáltunk ($n \in \mathbb{N}^+, k \in \mathbb{N}$ esetén):

- n hosszú irányított kör: C(n),
- n hosszú irányított kör a kör (egy vagy több) csúcsából kiinduló k darab él hozzávételével (ezen élek irányítása lehet a kör felé mutató, illetve a körből kifelé mutató): CE(n,k),
- n hosszú irányított kör a kör egy csúcsából kiinduló k hosszú út hozzávételével (az út irányítása lehet a kör felé mutató, illetve a körből kifelé mutató): CP(n,k),
- *n* hosszú irányított kör egy tetszőleges él hozzávételével, amely a kör két pontját köti össze (mint egy átló), így a kört két részre vágja, p és 1 p arányszámmal: CD(n, p).

A CE(n,k) és CP(n,k) gráfokra két egyszerű példát a 3.6. és a 3.7. ábrákon láthatunk. Természetesen nem csak ilyen típusú átmenetgráfok lehetségesek, azonban idő hiányában más gráftípusokat nem vizsgáltunk.

Szimulációk alapján az alábbi állításokra, sejtésekre jutottunk.

3.2. Állítás. $Az A_{SC}(C(n))$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ monoton növő n-ben.

Bizonyítás. Ez az állítás következik a 3.1. Állításból, amely szerint $A_{SC}(C(n)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$, tehát világos, hogy *n* növelésével $A_{SC}(C(n))$ is növekszik.



3.8. ábra. C(100) és C(500) gráfok esetén a (3.2) egyenlet megoldásának 20. koordinátája az idő függvényében

Ezt a 3.8. ábrán is láthatjuk, ahol n = 100 és n = 500 esetén látható a (3.2) egyenlet megoldásának 20. koordinátája az idő függvényében.

3.3. Állítás. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$A_{SC}(C(n)) = A_{SC}(CE(n,k)),$$

ahol a CE(n,k) gráfban a k darab él a kör felé van irányítva.

Bizonyítás. Meggondolható, hogy az állapotokat tetszőlegesen számozva a hozzájuk tartozó mátrixok sajátértékei nem változnak, így a csúcsok számozását önkényesen megválaszthatjuk. Először belátjuk, hogy $A_{SC}(C(n)) = A_{SC}(CE(n,1))$. Jelölje az 1. csúcs a körön kívüli csúcsot, a 2. csúcs a körnek azon pontját, ahol a kör a plusz éllel találkozik és a kör irányításának megfelelően a többi csúcsot. Ekkor a CE(n,1) infinitezimális generátorának karakterisztikus polinomja:

$$\det \begin{pmatrix} -a - \lambda & B \\ \mathbf{0} & A - \lambda \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

alakú, ahol az $A - \lambda I$ mátrix a C(n) infinitezimális generátorához tartozó karakterisztikus polinom és **0** adott $l \times m$ -es nullmátrix, ahol l, r az A és B mátrixok méretétől függ. Az 1.9. Tételből adódóan ekkor CE(n, 1) infinitezimális generátorának sajátértékei C(n) infinitezimális generátorának sajátértékei hozzávéve a -a számot. Így $A_{SC}(C(n)) =$ $A_{SC}(CE(n, 1)).$

Könnyedén látható az is, hogy $A_{SC}(C(n)) = A_{SC}(CE(n,2))$, ugyanis ha ez előzőek szerinti csúcsszámozást tekintjük, akkor CE(n,2) infinitezimális generátorának karakte-

risztikus polinomja

$$\det \begin{pmatrix} -a - \lambda & 0 & a & 0 \dots \\ 0 & -a - \lambda & a & 0 \dots \\ 0 & 0 & -a - \lambda & a \dots \\ \vdots & \vdots \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a & 0 \dots \end{pmatrix},$$

amelyre az 1.9. Tételt alkalmazva kapjuk, hogy $A_{SC}(C(n)) = A_{SC}(CE(n,2))$. Teljes indukcióval adódik, hogy $A_{SC}(C(n)) = A_{SC}(CE(n,k))$.

3.4. Sejtés. Az $A_{SC}(CP(n,k))$ monoton növő *n*-ben, ahol a CP(n,k) gráfban a *k* hosszú út a kör felé mutat.

3.5. Sejtés. Minden $k, l \in \mathbb{N}$ esetén

$$A_{SC}(CP(n,k)) = A_{SC}(CP(n,l)),$$

ahol a CP(n,k) gráfban a k hosszú út a kör felé irányított.

3.6. Sejtés. Tetszőleges k, l esetén, ha n < m, akkor

$$A_{SC}(CP(n,k)) < A_{SC}(CP(m,l)),$$

ahol a CP(n,k) gráfban a k hosszú út a kör felé mutat.

3.7. Állítás. Minden $k \in \mathbb{N}^+$, $l \in \mathbb{N}$ esetén

$$A_{SC}(CP(n,k)) = A_{SC}(CP(n,l)),$$

ahol a CP(n,k) gráfban a k hosszú út a körből kifelé van irányítva.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy k > l. A CP(n, k) állapotait számozzuk úgy, hogy az 1. csúcs legyen a k hosszú él végpontja, a 2. csúcs a k hosszú él végpont előtti pontja, hasonlóan a k-adik csúcs a k hosszú él kezdőpontja, a (k + 1)-edik csúcs a kör irányításának megfelelő következő csúcs, és így tovább. A CP(n, l) állapotait számozzuk hasonló módon. Speciálisan legyen l = 1, k = l + 1. Ekkor a CP(n, 2) gráfhoz tartozó karakterisztikus polinom:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & -a - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & -2a - \lambda & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a - \lambda & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a - \lambda \end{pmatrix}.$$

Alkalmazzunk a 2. sor, azaz az új csúcs szerinti kifejtési tételt. Ekkor az első elem szerinti kisebb méretű determináns nulla lesz, mivel az első sora csupa nulla elemet tartalmaz. Így

a karakterisztikus polinom:

$$(-a-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -2a-\lambda & a & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -a-\lambda & a & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a-\lambda \end{pmatrix}$$

amire az 1. sor szerinti kifejtési tételt alkalmazva CP(n, 1) karakterisztikus polinomját kapjuk (CP(n, 1) infinitezimális generátorának karakterisztikus polinomjára az 1. sor szerinti kifejtési tételt alkalmaztuk).

Megkaptuk tehát, hogy CP(n, 1) = CP(n, 2), amiből teljes indukcióval adódik, hogy CP(n, k) = CP(n, l).

3.8. Sejtés. Minden $n \in \mathbb{N}^+$, $k \in \mathbb{N}$ esetén $A_{SC}(CE(n,k))$ maximális, ha a k darab él ugyanabból a csúcsból indul ki és ahol a CE(n,k) gráfban a k darab él a körből kifelé van irányítva.

3.9. Sejtés. Rögzített $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $A_{SC}(CE(n,k))$ monoton csökkenő k-ra nézve, ahol a CE(n,k) gráfban a k darab él a körből kifelé mutat.

3.10. Sejtés. Rögzített $k \in \mathbb{N}$ esetén $A_{SC}(CE(n,k))$ monoton növekedő *n*-re nézve, ahol a CE(n,k) gráfban a k darab él a körből kifelé van irányítva.

Összefoglalás

A dolgozatban hálózati folyamatok oszcillációival foglalkoztunk. Célunk az volt, hogy kiderítsük, hogyan dönthető el, hogy egy adott rendszerben kialakulhat-e oszcilláció, és ha igen, milyen erősségű.

Ehhez az adott rendszer gráfstruktúráját vizsgáltuk. Természetes gondolat, hogy a rendszert leíró mátrix sajátértékei kapcsolatban állnak az oszcilláció jelenségével. Megvizsgáltuk ezért, hogy egy sztochasztikus mátrix sajátértékei hol helyezkedhetnek el a komplex számsíkon. Bár a problémakör egészen Kolmogorovig nyúlik vissza, a kapcsolódó eredmények, amelyek elegáns geometriai eszközöket használnak, talán kevésbé ismertek. A második fejezetben e témakörről adunk egy rövid áttekintést.

Ezután a harmadik fejezetben egy konkrét adaptív hálózaton modelleztük a járványterjedést. A második fejezetben tárgyaltak alapján vizsgáltuk a hálózaton az oszcilláció megjelenését és erősségét a paraméterek függvényében. Végül, a gráfstruktúra segítségével állításokat, sejtéseket fogalmaztunk meg egy adott rendszerben megjelenő oszcilláció erősségéről.

További kutatás tárgyát képezi egyrészt különböző adaptív hálózatok és egyéb gráfstruktúrák vizsgálata, másrészt az oszcilláció szükséges feltételének meghatározása.

Irodalomjegyzék

- A. Barrat, M. Barthelemy, A. Vespignani: Dynamical processes on complex networks, Cambridge University Press Cambridge, 2008.
- [2] Å. Besenyei, The Brocard angle and a geometrical gem from Dmitriev and Dynkin, Amer. Math. Monthly 122 (2015), 495–499.
- [3] V. Csiszár, *Diszkrét és folytonos paraméterű Markov-láncok*, elektronikus jegyzet. http://cs.elte.hu/~villo/ml/ML.pdf
- [4] M. Draief, L. Massoulié: *Epidemics and rumours in complex networks*, Cambridge University Press, 2010.
- [5] P. D. Egleston, T. D. Lenker, S. K. Narayan, The nonnegative inverse eigenvalue problem, *Linear Algebra Appl.* **379** (2004), 475–490.
- [6] C. Feng, C. S. Pettis, Oscillatory Behavior of a Network Epidemic SIS Model with Nonlinear Infectivity, Appl. Math. 5 (2014), 203–211.
- [7] T. Gross, H. Sayama, Adaptive Networks: Theory, Models and Applications, Springer, 2009.
- [8] T. Gross, B. Blasius, Adaptive coevolutionary networks: a review, J. R. Soc. Interface 5 (2008), 259–271.
- T. Gross, C. J. D. D'Lima, B. Blasius, Epidemic dynamics on an adaptive network, *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006), 208701–4.
- [10] T. Gross, I. G. Kevrekidis, Robust oscillations in SIS epidemics on adaptive networks: Coarse-graining by automated moment closure, *Europhys. Lett.* 82 (2008), 38004–6.
- [11] H. Ito, A new statement about the theorem determining the region of eigenvalues of stochastic matrices, *Linear Algebra Appl.* 267 (1997), 241–246.
- [12] C. D. Meyer, Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [13] M. E. J. Newman, A.-L. Barabási, D. J. Watts, The structure and dynamics of networks, Princeton University Press, 2006.

- [14] G. Rozhnova, A. Nunes, A. J. McKane, Stochastic oscillations in models of epidemics on a network of cities, *Phys. Rev. E* 84 (2011), 051919.
- [15] H. Sayamaa, I. Pestov, J. Schmidt, B. J. Busha, C. Wonga, J. Yamanoic, T. Gross, Modeling complex systems with adaptive networks, *Comput. Math. Appl.* 65 (2013), 1645–1664.
- [16] L. B. Shaw, I. B. Schwartz, Fluctuating epidemics on adaptive networks, *Phys. Rev. E* 77 (2008), 066101.
- [17] P. L. Simon, M. Taylor, I. Z. Kiss, Exact epidemic models on graphs using graphautomorphism driven lumping, J. Math. Biol. 62 (2011), 479–508.
- [18] J. Swift, Location of characteristic roots of stochastic matrices, MSc Thesis, Montreal, 1972.
- [19] A. Szabó-Solticzky, L. Berthouze, I. Z. Kiss, P. L. Simon, Oscillating epidemics in a dynamic network model: stochastic and mean-field analysis, J. Math. Biol., megjelenés alatt.

Ábrák jegyzéke

1.1.	A $\mathcal{G}(A)$ gráf	7
1.2.	A $\mathcal{G}(B)$ gráf	7
2.1.	Gersgorin-féle körök	10
2.2.	A 2.7. Tétel bizonyítása 1	10
2.3.	A 2.7. Tétel bizonyítása 2	10
2.4.	A 2.8. Állítás bizonyítása	11
2.5.	A 2.9. Állítás bizonyítása 1	12
2.6.	A 2.9. Állítás bizonyítása 2	12
2.7.	A csillagszerűség bizonyítása 1	12
2.8.	A csillagszerűség bizonyítása 2	12
2.9.	Minimális szög lemma	13
2.10.	A 2.11. Lemma bizonyítása	13
2.11.	Az M_n halmaz részleges leírása	14
2.12.	A részleges leírás bizonyítása 1	15
2.13.	A részleges leírás bizonyítása 2	16
2.14.	A részleges leírás bizonyítása 3	16
2.15.	Extremális sajátérték	17
2.16.	Extremális sajátérték mátrixa	18
2.17.	Az M_3 halmaz $\ldots \ldots \ldots$	18
2.18.	Az M_4 halmaz $\ldots \ldots \ldots$	18
2.19.	Sztochasztikus generátor sajátértékei	20
2.20.	λ	20
2.21.	$\lambda - 1$	20
2.22.	$\mu(\lambda-1)$	20
3.1.	Adaptív hálózatot leíró Markov folyamat állapottere és átmeneti rátá i $\ .\ .$	26
3.2.	A (3.1) differenciálegyenlet-rendszer megoldásából származó betegszám az	
	idő függvényében, amikor a betegségmentes egyensúly stabil	28
3.3.	A (3.1) differenciálegyenlet-rendszer megoldásából származó betegszám az	
	idő függvényében, amikor az endemikus egyensúly stabil	28
3.4.	A (3.1)-ben szereplő mátrix spektrumát tartalmazó kúp félnyílásszögének	
	meredeksége $(\tau,\omega_{SI})\in[0,1]\times[0,1]$ és $h=0,01$ felosztás esetén	29

ÁBRÁK JEGYZÉKE

3.5.	A (3.1) differenciálegyenlet-rendszer megoldásából származó betegszám az	
	idő függvényében módosított paraméterek esetén $\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$	30
3.6.	A $CE(8,2)$ gráf	31
3.7.	A $CP(8,2)$ gráf	31
3.8.	${\cal C}(100)$ és ${\cal C}(500)$ gráfok esetén a (3.2) egyenlet megoldásának 20. koordi-	
	nátája az idő függvényében	32

NYILATKOZAT

Név:

ELTE Természettudományi Kar, szak:

Neptun kód:

Szakdolgozat címe:

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 20

a hallgató aláírása