EÖTVÖS LÓRÁND TUDOMÁNY EGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

DISZKRÉT MAXIMUM-ELV ELLIPTIKUS FELADATOKRA

MSc Szakdolgozat

Írta: **Csicsó Diána**
Alkalmazott matematikus MSc, Alkalmazott analízis szakirány

Témavezető: **Karátson János**, egyetemi docens
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2015

Tartalom

Bevezetés 3
I. Lineáris egyenletek 5
1. Maximum-elvek folytonos esetben 5
2. Diszkrét maximum-elvek 6
2.1. Diszkrét maximumelv véges differenciaközelítéssel 6
2.2. Diszkrét maximum-elv végeselem-módszerrel 11
II. Nemlineáris egyenletek 17
1. Nemlineáris elliptikus egyenletek 17
1.1. Gyenge alak és korrekt kitűzés 18
1.2. Folytonos maximum-elvek nemlineáris modellekre 20
1.3. Végeselem-módszer nemlineáris elliptikus feladatokra 23
1.4. Általános feltételek a diszkrét maximum-elv érvényessége a feladat véges elemes közelítésére 26
III. Gyakorlati rész 32
1. Célkitűzés 32
Hivatkozások 39
Köszönetnyilvánítás 40
Nyilatkozat 41

Bevezetés

A természettudományok által oly közkedvelt és sokat vizsgált folyamatait leíró modellek a parciális differenciálegyenletek, melyek explicit képlettel történő megadása, néhány speciális eset kivételével lehetetlen, tehát közelítő módszert kell alkalmaznunk.

Elliptikus egyenletek olyan fizikai jelenségek (például a hullámegyenlet, a hővezetési egyenlet, Schröndinger-egyenlet vagy a rezgő húr) matematikai modellezésénél fordulnak elő, amelyek egyensúlyi állapotokat írnak le, valamint az idő múlása nem játszik szerepet, azaz nem befolyásolja a rendszert, s ezek gyakran parciális differenciálegyenletre vezetnek. Eredetüket tekintve az elliptikus egyenletek gyakran energia típusú mennyiséget leíró funkcionálok minimalizálásából származnak (ilyen függvény leírhat hőmérsékletet, elmozdulási vagy mágneses potenciált stb.):

$$E(h) := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} m|\nabla h|^2 + mgh\right),$$

ahol h egy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartományon értelmezett, a peremen előre ismert értékkel rendelkező függvény lehet. Ha h, m elég sima, azaz $m\nabla h \in C^1(\Omega)$, és a perem szakaszonként sima, akkor a

$$\begin{cases} -div(m\nabla h) = f, \\ h_{|\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

peremérték-feladat teljesül.

Elliptikus egyenletre nem kizárólagosan energiával megfogalmazott fizikai törvényszerűségek vezethetőek vissza. Gyakran modellezhetők egyes mennyiségek (pl. áramlások vagy erőterek) valamely

$$W \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

vektormezővel. Ha az $f \in C(\mathbb{R}^n)$ számértékű függvény sűrűség típusú mennyiséget ír le, akkor a megfelelő megmaradási törvény a következő alakú:

$$div\, W = f.$$

Ekkor a Gauss–Osztrogradszkij-tétel szerint tetszőleges sima peremű $D \subset \mathbb{R}^n$ n korlátos tartományon

$$\int_{\partial D} W \cdot v = \int_{D} f\,,$$

ahol a baloldal a W mező fluxusát, a jobb oldal az f sűrűségnek megfelel D-re eső összmennyiséget (tömeg, töltés stb.) írja le. Az $f \equiv 0$ esetben $\int_{\partial D} W \cdot v = 0$, azaz a ki- és belépő fluxus kiegyenlíti egymást: ez a modellnek megfelelően jelenthet összenyomhatatlanságot, forrásmentességet stb., és a $div\, W = 0$ egyenlethez vezet.
A W mezőre vonatkozó másik alapvető összefüggés a Fick-törvény, amely szerint a mező arányos egy alkalmas skalármennyiség (ún. skalárpotenciál) változásával. Ilyenkor a W mező a skalárpotenciál változása által létrehozott diffúziót jelenti. Ezt a törvényt a

$$W = -k\nabla u$$

egyenlőség írja le, ahol a k > 0 függvény vagy állandó az arányossági tényező és $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ a skalárpotenciál. Ha k állandó, akkor W potenciálos mező, azaz $rot\, W = 0$. Végül a következő elliptikus egyenletet kapjuk:

$$-\operatorname{div}(\mathrm{k}\,\nabla \mathrm{u}) = \mathrm{f}\,.$$

Egyik fontos probléma a numerikus szimulációkban megőrizni a megoldások jó tulajdonságait a matematikai modell által kiszámított közelítésekre. Az elliptikus peremérték-probléma egyik fontos tulajdonsága a maximum-elvekben rejlik. Az első ilyen klasszikus elv, amely a harmonikus függvényekre vonatkozik, azt mondja, hogy a harmonikus függvény minimum- és maximumértékeit az Ω tartomány $\partial\Omega$ peremén veszi fel, amikor $u \in C(\overline{\Omega})$, így

$$\min_{s\in\partial\Omega} u(s) \le u(x) \le \max_{s\in\partial\Omega} u(s), \quad \forall x \in \Omega.$$

Ezek a tulajdonságok előzetes becslést adnak az u-ra a perem segítségével. Ilyenek részletes tanulmányozásával és vizsgálatával foglalkozik a szakdolgozat. Az első részben a lineáris elliptikus differenciálegyenletekre vonatkozó maximum-elveket mutatjuk be és írjuk fel az így kapott nempozitivitási és nemnegativitási tulajdonságokkal együtt. Első ízben természetesen folytonos esetben vizsgáljuk a maximumelveket, majd diszkrét esetben részletezzük tovább a kapott eredményeket és fejtjük ki azokat véges differenciás, valamint végeselem-módszerekkel kapott közelítésekben. A dolgozat második részében elméleti szinten foglalkozunk a nemlineáris elliptikus feladatokra is megfogalmazható maximum-elvek minden tulajdonságával és kapcsolódó feltételeivel úgy folytonos, mint diszkrét esetben. A szakdolgozat utolsó fejezete két példa megoldásán keresztül mutatja be az elméletben igazolt állítások érvényességét.

I. Lineáris egyenletek

1. Maximum-elvek folytonos esetben

Elsősorban lineáris másodrendű egyenletekre ismertetjük a maximum-elveket és tulajdonságaikat. Legyen L lineáris operátor, melyet sima függvényeken értelmezünk az Ω korlátos tartományon:

$$Lu \equiv -div\,(a(x)\nabla u) + h(x)u, \tag{1.1}$$

ahol $a \in C^1(\Omega)$ és $h \in C(\Omega)$, valamint $0 < \mu_0 \leq a(x) \leq \mu_1$ és $0 \leq h(x) \leq \mu_1$ továbbá μ_0, μ_1 pozitív állandók, $x \in \Omega$ független. A későbbiekben az általánosság kedvéért $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ szakaszonként sima és Lipschitz-folytonos $\partial\Omega$ peremmel.

Tétel. Legyen $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ és $Lu \leq 0$ az Ω-n, akkor

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max\left\{0, \max_{\partial\Omega} u\right\}. \tag{1.2}$$

Amennyiben $h \equiv 0$, akkor

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \tag{1.3}$$

(A tétel érvényessége megmarad más differenciáloperátorokra is.) A divergenciaformáját használva az L operátornak, a bizonyítás ötlete a következő:

Legyen $M := \max\{0, \max_{\partial\Omega} u\}$ és vezessük be a következő szakaszonként C^2-beli függvényt: $v := \max\{u - M, 0\}$, ekkor $v \geq 0$ és $v_{|\partial\Omega} = 0$, továbbá, $u(x) = v(x) + M$ (minden $x \in \Omega$), hacsak nem $v(x) = 0$. Így a divergenciatételből:

$$0 \geq \int_\Omega (Lu)v dx = \int_\Omega (a\nabla u \cdot \nabla v + huv)dx = \int (a|\nabla v|^2 + h(v + M)v)dx \geq 0,$$

ahol az a, h-ra adott feltételekből $v = 0$, azaz $u \leq M$ az Ω-n.

Állítás. Legyen $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ megoldása az

$$\begin{cases} Lu = f\,, & az\ \Omega - \text{n} \\ u = g, & a\ \partial\Omega - \text{n}. \end{cases} \tag{1.4}$$

feladatnak, ahol $g \in C(\partial\Omega)$. Amennyiben $f \leq 0$ az Ω-n, akkor

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max\left\{0, \max_{\partial\Omega} g\right\} \tag{1.5}$$

Ha a lineáris operátorban $h \equiv 0$, akkor

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} g. \tag{1.6}$$

Az (1.5) és (1.6) eredményei jelentik a (folytonos) maximum-elveket.

Analogikusan következnek a (folytonos) minimum-elvek, amennyiben u helyett $-u$-t írunk.

Állítás. Legyen $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ megoldása a (1.4)-nek. Amennyiben $f \geq 0$, akkor

$$\min_{\bar{\Omega}} u \geq \max\left\{0, \min_{\partial\Omega} g\right\} \tag{1.7}$$

Ha az operátorban, $h \equiv 0$, akkor

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} g \tag{1.8}$$

Az (1.5) és (1.7) kifejezésekből következnek az úgynevezett *nempozitivitási* és *nemnegativitási* tulajdonságok:

Állítás. Legyen $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ megoldása a (1.4)-nek. Amennyiben $f \leq 0$ és g≤ 0, akkor $u \leq 0$. Ha $f \geq 0$ és $g \geq 0$, akkor $u \geq 0$.

A tétel igaz marad abban az esetben is, ha az előző három állításban azt a kiterjesztett esetet vizsgáljuk, ahol az $u \in H^1(\Omega)$ (ebben az esetben gyenge megoldást keresünk megfelelő peremfeltétellel és maximum helyett supremumot stb. írunk.).

2. Diszkrét maximum-elvek

Ebben a részben bemutatjuk a lineáris elliptikus feladatoknál kapott (1.5) és (1.6) folytonos maximum-elvek megfelelőit diszkrét maximum-elvekre, általános felépítéssel és bizonyítással, valamint Dirichlet-peremfeltétellel.

2.1. Diszkrét maximumelv véges differenciaközelítéssel

Legyen h a maximális rácsméret paramétere, valamint tekintsünk két véges diszjunkt halmazt, mely tartalmazza a rácspontokat. Az egyik ilyen halmaz, nevezzük Ω^h-nak, tartalmazza az összes N darab belső rácspontját az Ω halmaznak, míg a $\partial\Omega^h$ a $\partial\Omega$ halmaz N^∂

peremen vett rácspontjainak halmaza. Az egyszerűség kedvéért vezessük be a következő jelöléseket: $\overline{\Omega}^h = \Omega^h \cup \partial\Omega^h$ és $\overline{N} = N + N^\partial$.

Legyen X (illetve megfelelően $X^\partial, \overline{X}$) az a lineáris tér, amely tartalmazza az összes valósértékű függvényét az Ω^h (illetve megfelelően $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}^h$) tartománynak, így a dimenzió N (illetve $N^\partial, \overline{N}$). Minden $\bar{u} \in \overline{X}$ vektor felírható a következő módon

$$\bar{u} = u + u^\partial, \;\; u \in X \; és \; u^\partial \in X^\partial.$$

Tekintsük L^h véges differencia közelítését az L operátornak.

Az $\bar{u} \in \overline{X}$ vektor felírható a következő formában:

$$\bar{u} = \left(u_1, u_2, \dots, u_N; u_1^\partial, u_2^\partial, \dots, u_{N^\partial}^\partial\right), \tag{1.9}$$

ahol

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_N) \in X, és \; u^\partial = (u_1^\partial, u_2^\partial, \dots, u_{N^\partial}^\partial) \in X^\partial, \tag{1.10}$$

valamint, minden adott $\bar{u} \in \overline{X}$ vektorra az $L^h\bar{u}$ operátor komponensenként eleme az X térnek:

$$(L^h\bar{u})_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}u_j + \sum_{j=1}^{N^\partial} a_{ij}^\partial u_j^\partial \,, \;\; 1 \le i \le N, \tag{1.11}$$

és adott $f = (f_1, f_2, \dots, f_N) \in X$ és $g^\partial = (g_1^\partial, g_2^\partial, \dots, g_N^\partial) \in X^\partial$ esetén a diszkrét Dirichlet feladat konzisztens a (1.9) szerinti $\bar{u} \in \overline{X}$ megoldással. Így kaptuk:

$$(L^h\bar{u})_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}u_j + \sum_{j=1}^{N^\partial} a_{ij}^\partial u_j^\partial \,, \;\; 1 \le i \le N, \tag{1.12}$$

$$u_i^\partial = g_i^\partial, \quad 1 \le i \le N^\partial, \tag{1.13}$$

ami felírható a következő mátrix alakban:

$$\bar{A}\bar{u} = \bar{f}, \tag{1.14}$$

$$[\bar{A}] = \begin{bmatrix} A & A^\partial \\ 0 & I \end{bmatrix}, \;\; \bar{u} = \begin{bmatrix} u \\ u^\partial \end{bmatrix}, \;\; \bar{f} = \begin{bmatrix} f \\ g^\partial \end{bmatrix}, \tag{1.15}$$

ahol

$$A = (a_{ij}), 1 \le i, j \le N, \quad A^{\partial} = (a_{ij}^{\partial}), 1 \le i \le N, 1 \le j \le N^{\partial}. \tag{1.16}$$

A (2.13) egyenlet N^{∂} ismeretlenre történő megoldása után, kapjuk a következő N ismeretlenre redukált rendszert:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} u_j = f_i - \sum_{j=1}^{N^{\partial}} a_{ij}^{\partial} g_j^{\partial}, \ \ 1 \le i \le N, \tag{1.17}$$

ami szintén átírható mátrixformába:

$$Au = f - A^{\partial} g^{\partial}. \tag{1.18}$$

Az $\bar{A}$ mátrix akkor és csak akkor reguláris, ha az A mátrix is az, ebben az esetben az inverz mátrix:

$$\bar{A}^{-1} = \bar{G} = \begin{bmatrix} G & G^{\partial} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{1.19}$$

és $G = A^{-1}$, valamint $G^{\partial} = -A^{-1} A^{\partial}$. (1.20)

Vezessük be a következő tulajdonságot, figyelembe véve, hogy X^h altere az $\bar{X}$:

$\boldsymbol{DM}$: Az L^hoperátor kielégíti a diszkrét maximum-elvet, ha $\bar{u} \in \bar{X}$ és

$$(L^h \bar{u})_i \le 0, \quad 1 \le i \le N, \tag{1.21}$$

valamint

$$Max\{u_i; 1 \le i \le N\} \le Max\left\{0, Max\{u_i^{\partial} : 1 \le i \le N^{\partial}\}\right\}. \tag{1.22}$$

1. Tétel Az L^h operátor akkor és csak akkor elégíti ki a diszkrét maximum-elvet (DM), ha egyidejűleg kielégíti következő két feltételt:

(A_1): Az $\bar{A}$ mátrix a (1.15) egyenletben monoton, azaz reguláris és

$$\bar{A}^{-1} = \bar{G} \ge 0, \tag{1.23}$$

(G_1): Legyen $\bar{\xi} = \xi + \xi^{\partial}$ az $\bar{X}$ azon vektora, melynek minden komponense egyenlő 1,

$$-\bar{A}^{-1} A^{\partial} = G^{\partial} \xi^{\partial} \le \xi. \tag{1.24}$$

Bizonyítás: Első lépésben tételezzük fel, hogy L^hoperátor kielégíti a diszkrét maximumelvet. Ekkor a (1.15)-ben szereplő $\bar{A}$ mátrix reguláris, ha megmutatjuk, hogy az (1.16)-beli A mátrix reguláris, mert ez a két állítás ekvivalens. Legyen $u \in X$, olyan, hogy $Au = 0$ (itt a 0 az X tér nulla vektora). A $\bar{v} = u + 0^\partial$ vektor (itt 0^∂ az X^∂ nulla vektora), amelyre $L^h\bar{v} = 0$. Így $\pm u \leq 0$, a $(1.21) - (1.22)$ alapján, amennyiben $u = 0$, $\bar{A}$ reguláris.

Tovább részletezve a (2.11)-et kapjuk, hogy

$$u = GL^h\bar{u} + G^\partial u^\partial, \text{ ahol } \bar{u} = u + u^\partial \in \bar{X}. \tag{1.25}$$

Legyen

$$G = \left(g_{ij}\right), 1 \leq i,j \leq N, \text{ és } G^\partial = \left(g_{ij}^\partial\right),\ \ 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N^\partial. \tag{1.26}$$

A $g_j = (g_{1j}, g_{2j}, \dots, g_{Nj}) \in X$, $1 \leq j \leq N$ vektor egyetlen megoldása a $(1.12) - (1.13)$ rendszernek, ahol $f = (0,0, \dots, 1, \dots 0)$ és 1 a j-edik helyen áll. Így a $(1.21) - (1.22)$ DM-ben $g_j \geq 0$, ami biztosítja, hogy $G \geq 0$.

Hasonlóan, minden $g_j^\partial = \left(g_{1j}^\partial, g_{2j}^\partial, \dots, g_{Nj}^\partial\right) \in X$, $1 \leq j \leq N^\partial$ vektor egyetlen megoldása a $(1.12) - (1.13)$ rendszernek, $f = 0$- val és$g^\partial = (0,0, \dots, 1, \dots 0)$-val, ahol 1 a j-edik helyen áll. Így a $(1.21) - (1.22)$ DM-ben $g_j^\partial \geq 0$, értelemszerűen $G^\partial \geq 0$. Tehát (A_1) be van bizonyítva.

A (G_1) bizonyítása: Legyen $g = \sum_{j=1}^{N^\partial} g_j^\partial \in X$ egyetlen megoldása a $(1.12) - (1.13)$ feladatnak az X térben, ahol $f = 0$ és $g^\partial = (1,1, \dots, 1) = \xi^2$. Ezért a $(1.21) - (1.22)$ alapján azt kapjuk, hogy $(g)_i \leq 1, 1 \leq i \leq N$, amely bizonyítja a (G_1) feltételt a $g = G^\partial \xi^\partial$ jelöléssel.

Másik irány. Tételezzük fel, hogy $(A_1) - (G_1)$ igaz. $\bar{A}$ reguláris a (A_1) feltételben, így érvényes a (1.25) minden $\bar{u} \in \bar{X}$ vektorra:

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} g_{ij}(L^h\bar{u})_j + \sum_{j=1}^{N^\partial} g_{ij}^\partial u_j^\partial\,, \quad 1 \leq i \leq N. \tag{1.27}$$

Ekkor minden $\bar{u} \in \bar{X}$ megoldás kielégíti a $(1.21) - (1.22)$, ahol az (A_1) feltételből: $g_{ij} \geq 0$, $1 \leq i,j \leq N$; $g_{ij}^\partial \geq 0$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq N^\partial$, valamint $\sum_{j=1}^{N^\partial} g_{ij}^\partial \leq 1$, $1 \leq i \leq N$ a (G_1) feltétel értelmében.

2. Tétel Az L^h operátor kielégíti a diszkrét maximum-elvet (L_1^h), ha kielégíti a következő mátrixfeltételeket:

(A_1): Az (1.15) kifejezésben az $\bar{A}$ mátrix monoton és

(A_2): Az (1.15) kifejezésben az $\bar{A}$ mátrix sorösszegei nemnegatívak, azaz

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} + \sum_{j=1}^{N^\partial} a_{ij}^\partial \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N. \tag{1.28}$$

Bizonyítás: Jelöljük az 1. Tételben szereplő $\bar{X}$ tér azon vektorát, melynek minden komponense 1 a következő $\bar{\xi} = \xi + \xi^\partial$ vektorral, eszerint az (A_2):

$$A\xi + A^\partial \xi^\partial \geq 0.$$

Ismeretes az (A_1) feltételből, hogy $A^{-1}G \geq 0$, ezért, ha a fenti egyenlőtlenséget megszorozzuk balról A^{-1} inverz mátrixszal, kapjuk:

$$\xi + A^{-1}A^\partial \xi^\partial \geq 0, \text{ továbbá } \xi \geq A^{-1}A^\partial \xi^\partial = G^\partial \xi^\partial,$$

ami már a 1. Tételben szereplő (G_1) feltétel.

Az (A_2) mátrixfeltétel ekvivalens az L^h diszkrét operátor tulajdonságaival, s ennek diszkrét párja a következő L_2 tulajdonság:

(L_2^h): Jelöljük ξ-vel az $\bar{X}$ tér azon vektorát, mely minden komponense egyel egyenlő

$$L^h \bar{\xi} \geq 0. \tag{1.29}$$

Definíció: Az L^h véges differencia-operátor (1.11) általánosított nemnegatív akkor és csak akkor, ha a kapcsolódó (1.15)-ben felírt $\bar{A}$ mátrixra igazak a következő tulajdonságok:

- a (1.16)-ban szereplő A mátrix diagonális elemei $(a_{ii},\ 1 \leq i \leq N)$ pozitívak, amíg a nem diagonális $(a_{ij}, i \neq j,\ \ 1 \leq i,j \leq N$ és $a_{ij}^\partial, 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N^\partial)$ elemek nem pozitívak:
- $\bar{A}$ mátrix diagonálisan domináns
- az A mátrix irreducibilis diagonálisan domináns.

3. Tétel Ha az L^h általánosított nemnegatív, akkor kielégíti a diszkrét maximum-elvet (L_1^h).

Bizonyítás: Mivel az A mátrix irreducibilis diagonálisan domináns, ami azt jelenti, hogy $A^{-1} \geq 0$. Továbbá, mivel feltételeztük, hogy $A^{\partial} \leq 0$, így következik $G^{\partial} = -A^{-1}A^{\partial} \geq 0$, ami bizonyítja az $\bar{A}$ monotonitását ((A_1) feltétel). Végezetül, az $\bar{A}$ mátrix diagonális dominanciája ekvivalens az (A_2) feltétellel, melyet a 2. Tételben bizonyítottunk.

2.2. Diszkrét maximum-elv végeselem-módszerrel

Készítsük el az Ω tartomány $\mathfrak{I}_h$ triangulációját, jelöljük a csúcsokat $B_i, i = 1, \dots, n + m$, ahol $B_i, i = 1, \dots, n$ belső csúcsok és az $B_i, i = n + 1, \dots, n + m$ azok a csúcsok, amelyek a peremen vannak, azaz a $\partial\Omega$-n. Figyelembe véve az Ω a bázisfüggvényeit $\varphi_i, i = 1, \dots, n + m$: $\varphi_i(B_j) = \delta_{ij}$, ahol δ_{ij} a Kronecker szimbólum. Az u egzakt megoldás $c_1, \dots, c_n$ approximációs megoldásait a belső csúcsokban n, míg a $c_{n+1}, \dots, c_{n+m}$ m darab értékeit a peremcsúcsokban n:

$$c_{n+i} = g_i \coloneqq g(B_{n+i}), i = 1, \dots, m. \tag{1.30}$$

kapjuk.

Legyen $a(\cdot,\cdot)$ standard billineáris forma kapcsolatos a (4) feladattal. Definiáljuk az A $n \times n$-es véges elemes mátrixot $a(\varphi_j, \varphi_i)$, lépésekkel $(i, j = 1, \dots, n)$, és a határpontokkal vett bővített mátrixot $\tilde{A}$, $a(\varphi_{j+n}, \varphi_i)$, lépésekkel $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, valamint legyen $b_i = \int_\Omega f\varphi_i dx$, $i = 1, \dots, n$ és a $b = (b_1, \dots, b_n)^T$ és
$g = (g_1, \dots, g_m)^T$ transzponált vektorokat.

Kaptunk egy megoldásra váró $n \times n$ dimenziós lineáris egyenletrendszert

$$Ac = b - \tilde{A}g \tag{1.31}$$

ahol $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ az ismeretlen vektor.

Tekintsünk egy kényelmesebb kiterjesztett formát, nevezetesen az $(n + m) \times (n + m)$ dimenziós mátrixegyenletet:

$$\bar{A}\bar{c} = \bar{b}. \tag{1.32}$$

$\bar{A}$ struktúrája a következő:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & \tilde{A} \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{1.33}$$

ahol $I-$ az $m \times m$ dimenziós identitás mátrix, $0-$ az $m \times n$ dimenziós nulla mátrix. Az $\bar{c} = (c_1, \dots, c_{n+m})^T$ vektor tartalmazza a csúcsokban kapott u_h végegeselemes közelítés értékeit:

$$c_i = u_h(B_i) \quad \text{és} \quad u_h = \sum_{i=1}^{n+m} c_i \varphi_i, \tag{1.34}$$

a továbbiakban $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n, g_1, \dots, g_m)^T$.

Definíció. Az $n \times n$ dimenziós mátrixot: $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ irreducibilis diagonálisan domináns nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

1. M irreducibilis, azaz minden $i \neq j$-re létezik egy nem nulla sorozata az M-nek: $\{m_{i,i_1}, m_{i,i_2}, \dots, m_{i_s,j}\}$, ahol $i, i_1, i_2, \dots, i_s, j$ különböző indexek,
2. M diagonálisan domináns, azaz

$$|m_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |m_{ij}|, i = 1, \dots, n,$$

3. legkisebb $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ indexre szigorú egyenlőtlenség áll fenn az 2.-ben, azaz

$$|m_{i_0,i_0}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |m_{i_0,j}|.$$

1. Tétel Ha egy $n \times n$ dimenziós mátrix: $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ irreducibilis diagonálisan domináns és $m_{i,j} \leq 0$ minden $i \neq j$-re, és $m_{ii} > 0$ minden $i = 1, \dots, n$, akkor $M^{-1} > 0$.

2. Tétel Legyen $\bar{A}$ $(n+m) \times (n+m)$ dimenziós mátrix, melynek struktúrája (1.33) szerint adott, a_{ij} elemeire pedig igazak a következő feltételek:

1. $a_{ii} > 0, \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n},$

2. $a_{ij} \leq 0, i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, n+m \ \ (i \neq j),$

3. $\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, n,$

4. A irreducibilis, diagonálisan domináns.

Ha $\bar{c} = (c_1, \dots, c_{n+m})^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ és $(\bar{A}\bar{c})_i \leq 0, i = 1, \dots, n$, akkor

$$\max_{i=1,\dots,n+m} c_i \leq \max\left\{0, \max_{i=n+1,\dots,n+m} c_i\right\}. \tag{1.35}$$

Emellett, ha

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} = 0, i = 1, \dots, n, \tag{1.36}$$

akkor

$$\max_{i=1,\dots,n+m} c_i = \max_{i=n+1,\dots,n+m} c_i. \tag{1.37}$$

Bizonyítás: Bontsuk fel diszkrét maximumelvet a következőképpen:
$\bar{c} = (c, \tilde{c})^T$, ahol $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ és $\tilde{c} = (c_{n+1}, \dots, c_{n+m})^T$. Tételezzük fel, hogy $Ac + \tilde{A}\tilde{c} \leq 0 \in \mathbb{R}^n$. Kapjuk: $c \leq -A^{-1}\tilde{A}\tilde{c}$, ahol $-A^{-1}\tilde{A}$ nemnegatív és megfelel a feladat feltételeinek. Hasonlóan járunk el a következő (1.36) feltevés esetekor is, azaz megmutatjuk, hogy I$\leq -A^{-1}\tilde{A}\tilde{I}$, ahol $I = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ $\tilde{I} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$.

A továbbiakban vegyük figyelembe azt, hogy

$$c \leq -A^{-1}\tilde{A}\tilde{c} \leq \max_{i=n+1,\dots,n+m} c_i \cdot \left(-A^{-1}\tilde{A}\tilde{I}\right) = \max_{i=n+1,\dots,n+m} c_i \cdot I,$$

azaz

$$\max_{i=1,\dots,n} c_i \leq \max_{i=n+1,\dots,n+m} c_i,$$

ami pontosan a (1.37).

1. *Megjegyzés:* Abban az esetben, ha $h \equiv 0$, érvényesül (1.36) és $a(1, \varphi_i) = 0, i = 1, \dots, n,$ tulajdonság, ha a bázisfüggvények $\sum_{j=1}^{n+m} \varphi_j \equiv 1$ alakúak az $\overline{\Omega}$-n:

$$\sum_{j=1}^{n+m} a(\varphi_j, \varphi_i) = a\left(\left(\sum_{j=1}^{n+m} \varphi_j\right), \varphi_i\right) = a(1, \varphi_i) = 0.$$

2. *Megjegyzés:* A tétel 2.-ből következik a nempozitivitási tulajdonság, amennyiben $g \leq 0$. Nevezetesen, abban az esetben, ha $c_i \leq 0, i = n+1, \dots, n+m$ implikálja a $\max_{i=1,\dots,n+m} c_i \leq 0$.
3. *Megjegyzés:* A tétel 2.-ben a nempozitivitási tulajdonság érvényben marad, amikor homogén Dirichlet-peremfeltételt veszünk, azaz $c_i = 0, i = n+1, \dots, n+m$. Ebben az esetben a $\bar{A}\bar{c} = \bar{b}$ rendszer a következő alakra redukálódik $Ac = b$, az A mátrixxal, amelyről feltételezzük azt, hogy irreducibilis diagonálisan domináns mátrix. Kihasználva azt a feltevést, hogy $(Ac)_i \leq 0$, azonnal adódik a (1.35)-el analogikus egyenlőtlenség:

$$\max_{i=1,\dots,n} c_i \leq 0.$$

Végezetül a következőket kaptuk. Az (1.35)-es kifejezés az utolsó tételben közvetlenül eredményezi:

$$\max_{\bar{\Omega}} u_h \leq \max\left\{0, \max_{\partial\Omega} g_h\right\} \tag{1.38}$$

a peremérték-feladat diszkretizációja után. (Itt g_h lineáris interpoláltja a g-nek.) A későbbiekben, abban az esetben ha $h(x) \equiv 0$ az (1)-ben, akkor a (1.37)-ben a következő a változás: $\max_{\bar{\Omega}} u_h = \max_{\partial\Omega} g_h$ (1.39).

Konkrét példa bemutatása érdekében, legyen adott a diszkrét feladat következő nemnegatív esete, ahol

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + auv \right) dx, \tag{1.40}$$

azaz,

$$Lu \equiv -\Delta u + au \tag{1.41}$$

ahol

$$a \in L^{\infty}(\Omega), \tag{1.42}$$

$$a \geq 0 \; a \; \Omega - ban. \tag{1.43}$$

Legyen T $\mathfrak{I}_h$ n-ed fokú triangulációja $\mathfrak{I}_h$, valamint legyen $a_r, 1 \leq r \leq n+1$ csúcsok és $\lambda_r, 1 \leq r \leq n+1$ baricentrikus koordinátái az $x \in T$ a csúcspontok közreműködésével.

A triangulációhoz tartoznak, még a következő paraméterek:

$$h(T) = diam\, T,$$

$$\sigma(T) = \max_{r \neq s}\{\cos\,(D\lambda_r, D\lambda_s)\},$$

valamint

$$D\lambda_r = \left(\frac{\partial \lambda_r}{\partial x_1}, \frac{\partial \lambda_r}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \lambda_r}{\partial x_n}\right), \quad 1 \leq r \leq n+1,$$

$$\cos(D\lambda_r, D\lambda_s) = \frac{\langle D\lambda_r, D\lambda_s \rangle}{\|D\lambda_r\| \|D\lambda_s\|}, \qquad 1 \leq r, s \leq n+1,$$

ahol $\langle .,. \rangle$ $és$ $\|.\|$ Euklidész skalár szorzat és Eukliédészi norma R^n.

A triangulációhoz kapcsolódó paraméterek:

$$h = \max_{T \in \Im_h} h(T) \tag{1.44}$$

$$\sigma(h) = \max_{T \in \Im_h} \sigma(T). \tag{1.45}$$

Legyen adott $\Im_h$ triangulációk családja, amelyekre $h \to 0$. Megmutatjuk, hogy a diszkrét feladat nemnegatív típusú, ha

$$\sigma(h) \leq \sigma_0 < 0, \quad minden\, h - ra, \tag{1.46}$$

$$h\, elég\, kicsi \tag{1.47}$$

ahol a σ_0 független a h választásától.

Hasonlóan látszik adott n-ed fokú $T \in \Im_h$ triangulációra és w_i bázisfüggvényeire. Ekkor

- bármelyik $T \subset supp\, w_i$, amelyik tartalmazza a b_i csúcspontot, azt mondjuk a_r eleme a T-nek, mivel $w_i|_T = \lambda_r$,
- vagy $T \not\subset supp\, w_i$, akkor ebben az esetben $w_i|_T = 0$.

Emiatt, amennyiben $j \neq i$ az $a_{ij} = a(w_j, w_i)$ együttható a következő véges integrálösszegre redukálódik:

$$\alpha_{rs} = \int_T \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \lambda_r}{\partial x_s} \frac{\partial \lambda_s}{\partial x_k} + a\lambda_r \lambda_s \right) dx\,, \qquad \mathrm{r} \neq s. \tag{1.48}$$

Ismeretes, h λ_r lineáris és teljesíti a $0 \leq \lambda_r \leq 1,\ 1 \leq r \leq n$ feltétel, valamint felhasználva a (2.31) kifejezést kapjuk:

$$\alpha_{rs} \leq \left(\langle D\lambda_r, D\lambda_s \rangle + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \right) meas\ (T) \leq$$

$$\leq \left(\frac{\sigma_0}{h} + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \right) means\ (T),$$

és $\frac{1}{h} \leq \|D\lambda_r\|,\ 1 \leq r \leq n+1$. Kapjuk, hogy $\alpha_{rs} \leq 0, minden$ $\mathrm{r} \neq s$ indexre.

A bázisfüggvények definíciójából következik $\sum_{j=1}^{N+M} a_j = 1,\ \overline{\Omega}$ -tartomány körül, ezért

$$\sum_{j=1}^{N+M} a_{ij} = \int_{\Omega} a w_i dx \geq 0, \qquad 1 \leq i \leq N, \tag{1.49}$$

a (1.43) feltétel miatt a $\sum_{j=1}^{N+M} a_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N$feltétel is teljesül.

Megjegyzés: A (1.46) feltétel mértani értelmezése $n = 2$ esetben. Ez a feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha *trianguláció egyenletesen hegyesszögű*, azaz létezik $\epsilon > 0$, hogy minden tetszőleges h lépésre a trianguláció háromszögeinek bármely γ szöge esetén

$\gamma \leq \frac{\pi}{2} - \epsilon$ (abban az esetben, ha $a = 0$, akkor a szögek $\gamma \leq \frac{\pi}{2}$ lesznek).

Amikor a lineáris elliptikus feladatokhoz vegyes peremfeltételeket mellékelünk, látjuk azt, hogy az első tétel továbbra is érvényben marad, bármilyen tetszés szerint megadott peremfeltételre, éspedig, érvényben maradnak a (1.38) illetve a (1.39) kifejezések, de $\partial\Omega$ helyett az ún. Dirichlet-perem szerepel. Ugyanakkor, ebben az esetben nincs pontos információ az u megoldásról, mivel nem ismerjük azt az egész határon.

A fő cél kiterjeszteni az eredményeket a már ismert Dirichlet-peremfeltétellel meghatározott lineáris elliptikus feladatokról nem lineáris elliptikus feladatokra vegyes peremfeltétellel. Ilyenkor azt várjuk az eredménytől (folytonos, avagy diszkrét esetben), hogy

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max\left\{0, \max_{\Gamma_D} g\right\},$$

$$\max_{\bar{\Omega}} u_h \leq \max\left\{0, \max_{\Gamma_D} g_h\right\} \tag{1.50}$$

igazodva a megfelelő feltételekhez, ahol a Γ_D ún. Dirichlet-perem nem más, mint egy része a $\partial\Omega$-nak, azaz ahol Dirichlet-peremfeltétel van $u_{|\Gamma_D} = g$, g_h pedig a közelítése a g függvénynek.

II. Nemlineáris egyenletek

1. Nemlineáris elliptikus egyenletek

Tekintsük meg a nemlineáris elliptikus peremértékprobléma következő típusát:

$$\begin{cases} -div\,(b(x,\nabla u)\nabla u) + q(x,u) = f(x) & az\ \Omega - n, \\ b(x,\nabla u)\dfrac{\partial u}{uv} + s(x,u) = \gamma(x) & a\ \Gamma_N - en, \\ u = g(x) & a\ \Gamma_D - n, \end{cases} \tag{2.1}$$

ahol Ω korlátos tartomány $\mathbb{R}^d$-ben, valamint érvényesek a következő feltételek:

1. Ω szakaszonként sima és $\partial\Omega$ pereme Lipschitz folytonos; $\Gamma_N, \Gamma_D \subset \partial\Omega$ mérhető nyílt halmaz, olyan hogy $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ és $\bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_D = \partial\Omega$.
2. Tekintsük a következő skalár függvényeket: $b\colon \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $g\colon \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $s\colon \bar{\Gamma}_N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mely folytonosan differenciálható a tartományban. A továbbiakban, $f \in L^2(\Omega)$, $\gamma \in L^2(\Gamma_N)$ és $g = g^*{}_{|\Gamma_D}$ ahol $g^* \in H^1(\Omega)$.
3. A b függvény kielégíti a következős egyenlőtlenséget:

$$0 < \mu_0 \le b(x,\eta) \le \mu_1, \tag{2.2}$$

ahol μ_0, μ_1 pozitív állandók független az (x,η) értékétől. A későbbiekben a diadikus szorzat mátrix $\eta \cdot \frac{\partial b(x,\eta)}{\partial \eta}$ szimmetrikus pozitív szemidefinit és korlátos valamennyi mátrix normában néhány μ_2 pozitív állandóval, amely független az (x,η) értékétől.

4. Legyen $2 \le p_1$, ha $d = 2$ vagy $2 \le p_1 \le \frac{2d}{d-2}$ amennyiben $d > 2$, továbbá legyen $2 \le p_2$, ha $d = 2$, vagy $2 \le p_2 \le \frac{2d-2}{d-2}$ amennyiben $d > 2$. Ekkor léteznek a következő függvények $\alpha_1 \in L^{\frac{d}{2}}(\Omega), \alpha_2 \in L^{d-1}(\Gamma_N)$ és $\beta \ge 0$ állandó olyan, hogy minden $x \in \Omega$ (vagy $x \in \Gamma_N$) és $\xi \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} 0 \le \frac{\partial q(x,\xi)}{\partial \xi} \le \alpha_1(x) + \beta|\xi|^{p_1-2}, \\ 0 \le \frac{\partial s(x,\xi)}{\partial \xi} \le \alpha_2(x) + \beta|\xi|^{p_2-2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

5. Legyen $\Gamma_D \ne \emptyset$ vagy q szigorúan növő, legalább lineárisan tart ∞

$$q(x,\xi) \ge c_1|\xi| - c_2(x) \tag{2.4}$$

(ahol $c_1 > 0$ valamint $c_2 \in L^1(\Omega)$ függvény) $\forall (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}$, vagy s szigorúan növő és legalábbis lineárisan ∞-be tart.

Megyjegyzés4: A 3. feltevés biztosítja, hogy a Jacobi mátrix $\frac{\partial}{\partial\eta}(b(x,\eta)\eta)$ szimmetrikus és eleget tesz az ellipticitási feltételnek:

$$\mu_0|\zeta|^2 \leq \frac{\partial}{\partial\eta}(b(x,\eta)\eta)\zeta\cdot\zeta \leq \mu_3|\zeta|^2, \qquad \zeta\in\mathbb{R}^d \tag{2.5}$$

ahol $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$. (Ez biztosítja a potenciál létezését a bizonyításban, ekkor korrekt kitűzésű feladatot kapunk.) Például, a 3. feltétel teljesül az együtthatókra a következő esetekben:

(a) $b(x,\eta) = a(x,|\eta|)$, ahol C^1-beli függvények és $a\colon \Omega\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ megfelelően:

$$0 < \mu_0 \leq a(x,r) \leq \frac{\partial}{\partial r}(a(x,r)r) \leq \mu_3, \qquad (r>0).$$

(b) Még speciálisabb eset áll fenn, amennyiben $b(x,\eta) = a(x)$,

$$0 < \mu_0 \leq a(x) \leq \mu_3.$$

Az 5. feltétel adja a potenciál korlátlan növekedését, amely majd kell a korrekt kitűzéshez.

1.1. Gyenge alak és korrekt kitűzés

Ismert módja a létezés és egyértelműség megfogalmazásának az úgynevezett gyenge megoldás keresése. Ehhez szükséges bevezetni egy alkalmas Szoboljev teret, megfelelően homogén Dirichlet-peremfeltétellel:

$$H_D^1(\Omega) := \{u\in H^1(\Omega): u = 0 \; a\; \Gamma_D - n\}.$$

Tétel. Legyenek adottak az 1.-5. feltételek. Akkor a (16) feladatnak egyértelműen létezik $u^*\in H^1(\Omega)$ gyenge megoldása, azaz

$$u^* = g, \;\; \Gamma_D - n \tag{2.6}$$

és $\forall v\in H_D^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega [b(x,\nabla u^*)\nabla u^*\cdot\nabla + q(x,u^*)v]dx + \int_{\Gamma_N} s(x,u^*)v\,d\sigma =$$

$$= \int_\Omega fvdx + \int_{\Gamma_N}\gamma v d\sigma, \tag{2.7}$$

Bizonyítás:

(a) Először tekintsük a $g=0$ homogén esetet. Ekkor az u^* gyenge megoldást úgy kapjuk, hogy minimalizáljuk a konvex potenciált a $H_D^1(\Omega)$-ban. Ugyanakkor, mint *Megjegyzés4*-ben

említettük, hogy a 3. feltétel azt jelenti, hogy a Jacobi mátrixa a $b(x,\eta)\eta$ szimmetrikus és ezért létezik $B: \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ függvény, amely C^1-beli (η vonatkozásában) és minden (x,η)-ra:

$$\frac{\partial B(x,\eta)}{\partial \eta} = b(x,\eta)\eta.$$

Továbbá legyen $Q: \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $S: \overline{\Gamma}_N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1-beliek (ξ vonatkozásában), így minden (x,ξ)-ra:

$$\frac{\partial Q(x,\xi)}{\partial \xi} = q(x,\xi), \quad \frac{\partial S(x,\xi)}{\partial \xi} = s(x,\xi).$$

(Elegendő azt az esetet fegyelembe venni, amikor b, q, s csak a második változójukban C^1-beliek.) Kapjuk a következő funkcionált:

$$\Phi(u)v = \int_\Omega [B(x,\nabla u) + Q(x,u) - fu]dx +$$

$$+ \int_{\Gamma_N} [S(x,u) - \gamma u]d\sigma$$

megfelelően $H_D^1(\Omega)$-ban ($v \in H_D^1(\Omega)$)

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega [b(x,\nabla u)\nabla u \cdot \nabla v + q(x,u)v - fv]dx +$$

$$+ \int_{\Gamma_N} [s(x,u)v - \gamma u]d\sigma, \tag{2.8}$$

ahol 1.-5. feltételek biztosítják az integrálok végességét. Ekkor a (2.3) és (2.4), azaz a 4. és 5. feltétel miatt kapjuk:

$$\langle \Phi''(u)v, v\rangle \geq \mu_0 \int_\Omega |\nabla v|^2 dx, \tag{2.9}$$

ahol $u, v \in H_D^1(\Omega)$, és Φ szigorúan konvex. Továbbá, ha $\Gamma_D \neq \emptyset$,akkor $\int_\Omega |\nabla v|^2 dx$ ekvivalens a következővel: $\|v\|_1^2 := \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$, így a (2.9)-ből következik:

$$\Phi(u) \to +\infty \quad ha \quad \|u\|_1 \to +\infty \tag{2.10}$$

(Φ négyzetesen növekszik). Amennyiben $\Gamma_D = \emptyset$, akkor az 5. feltétel miatt még mindig igaz a (2.10) kifejezés, és a Φ végtelen növekedése az alatti becslés szerint áll fenn:

$$\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2)dx \quad vagy \quad \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\partial\Omega} v^2 \, d\sigma,$$

és ez ekvivalens $\|v\|_1^2$-vel. Az, hogy Φ szigorúan konvex és a (2.10) igaz, azt jelenti, hogy a Φ-nek létezik egyetlen kritikus pontja: $u^* \in H_D^1(\Omega)$ (mely minimalizált), azaz $\Phi'(u^*)v = 0$, minden $v \in H_D^1(\Omega)$. Így a (2.8) tulajdonságából u^*gyenge megoldás lesz.

(b)Abban az esetben, amikor $g = g^*$, ahol $g^* \in H^1(\Omega)$, a feladatot visszavezetjük a homogén esetre az általánosság elvesztése nélkül. Nevezetesen,

$$u^* = u + g^*, \tag{2.11}$$

abban az esetben, ha $u = 0, a\ \Gamma_D - n$, behelyettesítve ezt az összeget a (2.7)-be, u kielégíti a feladatot, homogén Dirichlet peremfeltétellel és a következő együtthatókkal:

$$\hat{b}(x,\eta) = b\big(x, \eta + \nabla g^*(x)\big),$$

$$\hat{q}(x,\xi) = q\big(x, \xi + g^*(x)\big),$$

$$\hat{s}(x,\xi) = s\big(x, \xi + g^*(x)\big).$$

A $g^*(x)$ független (ξ,η)-tól, és az együtthatók: b, q, s második változójukban C^1-beliek, valamint $\hat{b}$,$\hat{q}, \hat{s}$ kielégítik a (2.3)-(2.5) feltételeket megfelelően. Tehát u létezik és egyértelmű is, azaz u^* is az.

1.2. Folytonos maximum-elvek nemlineáris modellekre

Nemlineáris egyenletekre a folytonos maximum-elvek igazolása a megfelelő lineáris problémára való visszavezetéssel adódik.

Tétel. Tekintsük adottnak az 1.-5. feltételeket, valamint legyen

$u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gyenge megoldása a (16) feladatnak. Amennyiben

$$\begin{aligned} f(x) - q(x,0) &\le 0, \qquad & x \in \Omega \\ \gamma(x) - s(x,0) &\le 0, \qquad & x \in \Gamma_N \end{aligned} \tag{2.12}$$

akkor

$$\max_{\overline{\Omega}} u \le \max\left\{0, \max_{\Gamma_D} g\right\}. \tag{2.13}$$

Speciálisan, ha $\Gamma_D \neq \emptyset$ és $g \ge 0$, akkor

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\Gamma_D} g, \tag{2.14}$$

illetve, ha $\Gamma_D \neq \emptyset$ és $g \le 0$ vagy $\Gamma_D = \emptyset$, akkor u nempozitív tulajdonságú:

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq 0. \tag{2.15}$$

Bizonyítás: Jelöljük a következő kifejezést:

$$\begin{aligned} r(x,\xi) &:= \begin{cases} \dfrac{q(x,\xi)-q(x,0)}{\xi}, & ha\ \xi \neq 0, \\ \dfrac{\partial q}{\partial \xi}(x,0), & ha\ \xi = 0, \end{cases} \\ z(x,\xi) &:= \begin{cases} \dfrac{s(x,\xi)-s(x,0)}{\xi}, & ha\ \xi \neq 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial \xi}(x,0), & ha\ \xi = 0. \end{cases} \end{aligned}, \tag{2.16}$$

Itt a 2. feltétel értelmében $q \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ és $s \in C^1(\Gamma_N \times \mathbb{R})$, ezért az $r,\ z$ függvények folytonosak. Továbbá figyelembe véve a 4. feltételt,

$$r(x,\xi) \geq 0, \qquad z(x,\xi) \geq 0. \tag{2.17}$$

Definiáljuk a következőket:

$$\begin{aligned} &\tilde{a}(x) := b\big(x, \nabla u(x)\big), \tilde{h}(x) := r\big(x, u(x)\big) && (x \in \bar{\Omega}), \\ &\tilde{k}(x) := z\big(x, u(x)\big) && (x \in \Gamma_N). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ekkor $\tilde{a} \in C(\Omega)$, valamint a 3. alapján, $\tilde{a}$ ellipticitása szükséges az (1.1)-hez. Ezen kívül, $\tilde{h} \in C(\bar{\Omega})$ korlátos, továbbá, $r \geq 0$, ami azt jelenti, hogy $\tilde{h} \geq 0$. Így előáll az következő operátor:

$$\tilde{L}u \equiv -div\,(\tilde{a}(x)\nabla u) + \tilde{h}(x)u,$$

ahol az együtthatókat már a (2.18) kifejezésben definiáltuk, megfelelően szükséges tulajdonságokkal az (1.1) operátorhoz . Tehát a (2.1) egyenletet átírható a következő alakba:

$$\tilde{L}u = f(x) - q(x,0),$$

feltételezve, hogy $f(x) - q(x,0) \leq 0$.

Jelölések:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &:= f(x) - q(x,0), \\ \hat{\gamma}(x) &:= \gamma(x) - s(x,0), \end{aligned} \tag{2.19}$$

A (2.1)-es feladat gyenge megoldása felírható:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \big(\tilde{a}\nabla u \cdot \nabla v + \tilde{h}uv\big)dx + \int_{\Gamma_N} \tilde{k}uv\, d\sigma = \\ &= \int_{\Omega} \hat{f}\, v\, dx + \int_{\Gamma_N} \hat{\gamma}\, v\, d\sigma, \qquad \forall v \in H_D^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Legyen most az első tétel bizonyításából

$$M := \max\left\{0, \max_{\Gamma_D} g\right\}$$

és vezessük be a következő szakaszonként C^1 függvényt:

$$v := \max\{u - M, 0\}$$

$$v \geq 0, \quad v_{|\Gamma_D} = 0,$$

továbbá $u(x) = v(x) + M$, minden $x \in \overline{\Omega}$, kivéve ha $v(x) = 0$. Így

$$\int_{\Omega} \left(\tilde{a}\nabla u \cdot \nabla v + \tilde{h}uv\right)dx + \int_{\Gamma_N} \tilde{k}uv\, d\sigma =$$

$$= \int_{\Omega} \left(\tilde{a}|\nabla v|^2 + \tilde{h}(v + M)v\right)dx + \int_{\Gamma_N} \tilde{k}(v + M)v\, d\sigma \geq 0, \quad \forall v \in H_D^1(\Omega).$$

mivel az $\tilde{a}, \tilde{h}, \tilde{k}, v$ függvények és az M állandó nemnegatívak. Másrészt, $\hat{f} \leq 0$ és $\hat{\gamma} \leq 0$ feltételből következik, hogy a v-re a (2.20) jobboldala nem más, mint

$$\int_{\Omega} \hat{f}\, v\, dx + \int_{\Gamma_N} \hat{\gamma}\, v\, d\sigma \leq 0,$$

összesítve kapjuk:

$$\int_{\Omega} \left(\tilde{a}|\nabla v|^2 + \tilde{h}(v + M)v\right)dx + \int_{\Gamma_N} \tilde{k}(v + M)v\, d\sigma = 0.$$

Itt $\tilde{a}$ minimuma pozitív a 3. feltétel miatt, ezért $|\nabla v| = 0$, azaz v nem más, mint egy állandó, sőt még az is elmondható róla, hogy nemnegatív, tehát

$$v(x) \equiv c \geq 0, \qquad \overline{\Omega} - on.$$

Ha $c = 0$, akkor $u \leq M$ az Ω-n, így a (2.13) bizonyítást nyert, viszont $c > 0$ esetén $\Gamma_D = \emptyset$ (egyébként amennyiben $v_{|\Gamma_D} = 0$ ellentmondáshoz jutunk) tehát $M = 0$ és $v = \max\{u, 0\}$, így $v \equiv c$ ami azt, jelenti $u \equiv c$. Tehát a (2.1) kifejezésben a következő egyszerűsítések adódnak: $q(x, c) \equiv f(x)$ az Ω-n és $s(x, c) \equiv \gamma(x)$ a $\partial\Omega$-n. A (2.12) alapján $q(x, c) \leq q(x, 0)$ és $s(x, c) \leq s(x, 0)$ pozitív c állandóval. Az 5. feltétel alapján tudjuk, hogy ez lehetetlen, mert bármely q vagy s szigorúan növekvő.

Összesítve $c = 0$, tehát (2.13) kész.

Speciális esetben, amikor $q \equiv 0$ és $s \equiv 0$, a (2.14) egyenletre $g \geq 0$ feltétellel megfogalmazható a következő tétel:

Tétel: Legyen a (2.1) feladat $q \equiv 0$ és $s \equiv 0$ feltételekkel és az előző tétel feltételeivel, emellett 1.-3. feltételek legyenek adottak, $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ és (2.12) ismert, ekkor

$$f(x) \leq 0, x \in \Omega \qquad \text{és} \qquad \gamma(x) \leq 0, x \in \Gamma_N \tag{2.21}$$

és

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\Gamma_D} g. \tag{2.22}$$

Bizonyítás: Amennyiben $\max_{\Gamma_D} g \geq 0$, ekkor a (2.13) megfelelője a (2.22).

Legyen $\max_{\Gamma_D} g < 0$, ekkor $\max\limits_{\Gamma_D} g = -K$, valamely $K > 0$ értékre. A kapott $w \coloneqq u + K$ függvény megfelel ugyanannak a vegyes feladatnak, amely jobboldalai $f, \gamma, \text{és } g + K$, illetőleg az előző tétel érvényes e problémára és a (2.13) w-val átírva:

$$\max_{\overline{\Omega}} w \leq \max\left\{0, \max_{\Gamma_D}(g + K)\right\} = 0.$$

Ekkor

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq -K = \max_{\Gamma_D} g.$$

Vegyük figyelembe, hogy a megfelelő minimum-elvek és a nemnegatívitási tulajdonság megmarad, ha a feltételekben az előjelek (2.12) illetve (2.21) fordítottak. Továbbá, analogikusan igazolható, hű maradva a tételhez és a levezetés menetéhez, hogy minden igaz marad $u \in H^1(\Omega)$ esetén, azaz a gyenge megoldásra nem reguláris feltételekkel és olyan g-re, mely korlátos a Γ_D-n. Ekkor $\max u$ és $\max g$ lecserélhető $\sup u$ -ra és $\sup g$-re.

1.3. Végeselem-módszer nemlineáris elliptikus feladatokra

A következőkben végig feltesszük, hogy Ω egy politópikus tartomány. Legyen $\mathfrak{I}_h$ a megfelelő triangulációja az $\overline{\Omega}$-nak, például 3 dimenzióban tetraéder, aminek csúcsai $B_1, \dots, B_{\overline{n}}$. Jelölje $\varphi_1, \dots, \varphi_{\overline{n}}$ szokásos úton meghatározott szakaszonként lineáris és folytonos bázis függvényeket, azaz $\varphi_i(B_j) = \delta_{ij}$, ahol $i, j = 1, \dots, \overline{n}$, valamint δ_{ij} a Kronecker szimbólum. Legyen V_h a véges elemes altér a bázis függvények felett

$$V_h = span\,\{\varphi_1, \dots, \varphi_{\overline{n}}\} \subset H^1(\Omega).$$

Továbbá legyen $n < \overline{n}$ oly módon, hogy

$$B_1, \dots, B_n \tag{2.23}$$

és a csúcsai az Ω-n vagy a Γ_N-en fekszenek, és legyen

$$B_{n+1}, \dots, B_{\overline{n}} \tag{2.24}$$

mely csúcsok a Γ_D-n fekszenek. Ekkor a bázisfüggvények $\varphi_1, \dots, \varphi_{\bar{n}}$ eleget tesznek a homogén Dirichlet peremfeltételnek a Γ_D-n, azaz $\varphi_i \in H_D^1(\Omega)$. Definiáljuk

$$V_h^0 = span\,\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset H_D^1(\Omega).$$

Továbbá, legyen

$$g_h = \sum_{j=n+1}^{\bar{n}} g_j \varphi_j \in V^h \tag{2.25}$$

(ahol $g_j \in \mathbb{R}$) szakaszonként lineáris közelítése a g-nek a Γ_D-n (szomszédos elemekre).

Végezetül a közelítő megoldást úgy nyerjük, hogy megoldjuk a következő problémát (hasonlóan a (2.6)-(2.7) a V_h-n):

Találjunk $u_h \in V_h$ melyre

$u_h = g_h \quad a\ \Gamma_D$-n, valamint

$$\begin{aligned} \int_\Omega [b(x, \nabla u_h)\nabla u_h \cdot \nabla v_h + r(x, u_h)u_h v_h]\, dx + \int_{\Gamma_N} z(x, u_h)u_h v_h d\sigma = \\ = \int_\Omega f v_h\, dx + \int_{\Gamma_N} \gamma v_h d\sigma, \qquad \forall v_h \in V_h^0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Tétel: Legyen adott 1.-5. feltétel. Ekkor a (2.26) feladat $u_h \in V_h$ megoldása egyértelmű és

$$\|\mathrm{u}^* - \mathrm{u_h}\|_1 \to 0, \text{amikor } \mathrm{h} \to 0.$$

Bizonyítás: Az $\mathrm{u_h}$ előállításához elegendő megismételni a korábbi tétel bizonyítását csak ki kell cserélni a $H^1(\Omega)$-t V_h-ra. Az, hogy az $\mathrm{u_h}$ konvergál az u^*-hoz a H^1 normában következik a szokásos módon az egyenlet ellipticitásából (azaz a szigorú konvexitásból a megfelelő esetekben) és az is igaz, hogy a V_h véges dimenziós altér eleget tesz a következő feltételnek: $\lim_{h\to 0} dist(u, V_h) = 0$, minden $u \in H^1(\Omega)$, ahol

$$dist(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1.$$

5. *Megjegyzés:* Amennyiben Ω görbe peremmel rendelkezik, a diszkrét megoldás konvergenciája sokkal bonyolultabb problémát eredményez.

Nézzünk most a nemlineáris algebrai rendszert, amely megfelel a (2.26)-nak. Annak érdekében, hogy igazolhassuk rá a diszkrét maximum-elvet átírjuk a (2.26) kifejezést a (2.16) és (2.19) jelöléseivel a következőképpen:

$$\int_{\Omega} [b(x, \nabla u_h)\nabla u_h \cdot \nabla v_h + r(x, u_h)u_h v_h]\, dx + \int_{\Gamma_N} z(x, u_h)u_h v_h d\sigma =$$
$$= \int_{\Omega} \hat{f} v_h\, dx + \int_{\Gamma_N} \hat{\gamma} v_h d\sigma, \qquad \forall v_h \in V_h^0. \tag{2.27}$$

Kapjuk:

$$u_h = \sum_{j=1}^{\bar{n}} c_j \varphi_j, \tag{2.28}$$

ahol $c_1, \dots, c_{\bar{n}}$. Minden $\bar{c} = (c_1, \dots, c_{\bar{n}})^T \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$; és $j = 1, \dots, \bar{n}$, kapjuk:

$$\begin{aligned}
b_{ij}(\bar{c}) &= \int_{\Omega} b\left(x, \sum_{k=1}^{\bar{n}} c_k\, \nabla\varphi_k\right) \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i dx\,, \\
r_{ij}(\bar{c}) &= \int_{\Omega} r\left(x, \sum_{k=1}^{\bar{n}} c_k\, \varphi_k\right) \varphi_j \varphi_i dx\,, \\
z_{ij}(\bar{c}) &= \int_{\Gamma_N} r\left(x, \sum_{k=1}^{\bar{n}} c_k\, \varphi_k\right) \varphi_j \varphi_i d\sigma\,, \\
d_i(\bar{c}) &= \int_{\Omega} \hat{f} \varphi_i\, dx + \int_{\Gamma_N} \hat{\gamma} \varphi_i d\sigma, \\
a_{ij}(\bar{c}) &= b_{ij}(\bar{c}) + r_{ij}(\bar{c}) + z_{ij}(\bar{c}).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Helyezzük a (2.28) és a $v_h = \varphi_i$ kifejezéseket a (2.27) egyenletbe, ekkor kapunk egy $n \times \bar{n}$ dimenziós algebrai egyenletrendszert:

$$\sum_{j=1}^{\bar{n}} a_{ij}(\bar{c}) c_j = d_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.30}$$

Használjuk a következő jelöléseket

$$\begin{gathered}
A(\bar{c}) = \{a_{ij}(\bar{c})\}; i, j = 1, \dots, n \\
\tilde{A}(\bar{c}) = \{a_{ij}(\bar{c})\}; i, = 1, \dots, n; j = n+1, \dots, \bar{n}, \\
d = \{d_j\}, \;\; c = \{c_j\}, \qquad j = 1, \dots, n \\
\tilde{c} = \{c_j\}, \qquad j = n+1, \dots, \bar{n},
\end{gathered} \tag{2.31}$$

a (2.30) rendszerből

$$A(\bar{c})c + \tilde{A}(\bar{c})\bar{c} = d. \tag{2.32}$$

Definiáljuk továbbá

$$\bar{A}(\bar{c}) = \left[A(\bar{c})\ \tilde{A}(\bar{c})\right], \qquad \bar{c} = \begin{bmatrix} c \\ \tilde{c} \end{bmatrix}, \tag{2.33}$$

és írjuk újra a (2.32)-t a következőképpen:

$$\bar{A}(\bar{c})\bar{c} = d. \tag{2.34}$$

Annak érdekében, hogy a rendszerünk négyzetes mátrix alakú legyen, fel kell nagyítanunk $\bar{n} \times \bar{n}$ méretűre. Nevezetesen, legyen $u_h = g_h$ a Γ_D-n, és a koordinátái $c_i, n+1 \leq i \leq \bar{n}$, $c_i = g_i$-nek automatikusan eleget téve, azaz

$$\tilde{c} = \tilde{g},$$

ahol $\tilde{g} = \{g_j\}, j = n+1, \dots, \bar{n}$.

Ekvivalens egyenletet kaptunk a (2.32) mátrixegyenlettel, azaz amit szerettünk volna

$$\begin{bmatrix} A(\bar{c}) & \tilde{A}(\bar{c}) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ \tilde{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ \tilde{g} \end{bmatrix}. \tag{2.35}$$

1.4. Általános feltételek a diszkrét maximum-elv érvényessége a feladat véges elemes közelítésére

Tétel: Legyenek adottak az 1.-5. feltételek, és

$$\begin{aligned} f(x) - q(x,0) \leq 0, \quad x \in \Omega \\ \gamma(x) - s(x,0) \leq 0, \quad x \in \Gamma_D \end{aligned} \tag{2.36}$$

Tekintsük az egyszerű triangulációk családját $\mathfrak{I}_h (h > 0)$ és legyenek érvényesek a következő összefüggések: minden $i = 1, \dots, n,\ \ j = 1, \dots \bar{n}\ \ (i \neq j)$

$$\nabla\varphi_i \nabla\varphi_j \leq -\frac{\sigma_0}{h^2} < 0 \tag{2.37}$$

a $supp\ \varphi_i \cap supp\varphi_j\ halmazon, ahol\ \ \sigma_0 > 0$ az $i, j, h - tól$ független.

(1) Amennyiben a $\mathfrak{I}_h$ trianguláció reguláris, azaz léteznek $m_1, m_2 > 0$ állandók, olyanok, hogy minden $h > 0$-ra és minden $T_h \in \mathfrak{I}_h$ esetén

$$m_1 h^d \leq meas\ (T_h) \leq m_2 h^d,$$

(ahol $meas\ (T_h)$ a d dimenziós mértéke T_{h-nak}). Ekkor elég kis h-ra a (2.32)-ban definiált $\bar{A}(\bar{c})$ mátrix teljesíti a következő tulajdonságokat:

(i) $a_{ii}(\bar{c}) > 0, \quad i = 1, \dots, n,$

(ii) $a_{ij}(\bar{c}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots \bar{n}\ \ (i \neq j)$

(iii) $\sum_{j=1}^{\bar{n}} a_{ij}(\bar{c}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$

(iv) itt létezik $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ index, amelyre $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}(\bar{c}) > 0,$

(v) $A(\bar{c})$ irreducibilis.

(2) Általában az $\bar{A}(\bar{c})$ mátrixra ezek a (i)-(v) tulajdonságok érvényesek akkor is, amikor a $\mathfrak{I}_h$ triangulációk kvázi-regulárisak, azaz kapjuk, hogy a (3.37) lecserélődik:

$$c_1 h^\gamma \leq meas\,(T_h), \tag{2.38}$$

ahol $\gamma \geq d$ és kielégíti:

$$\begin{gathered} 2 \leq \gamma < 3, ha\ \ d = 2 \\ 3 \leq \gamma < \min\left\{\frac{12}{p_1 - 2}, 5 - \frac{p_2}{2}\right\}, ha\ d = 3, \\ d \leq \gamma < \min\left\{\frac{4d}{(p_1 - 2)(d - 2)}, 3 + \frac{(4 - p_2)(d - 2)}{2}\right\}, ha\ d > 3, \end{gathered} \tag{2.39}$$

ahol p_1, p_2 ismeretes a (2.1) kifejezés a 4. feltételéből.

Bizonyítás: Minden $i = 1, \dots, n$, számra:

$$a_{ij}(\bar{c}) = \int_\Omega \left[b(x, \nabla u_h)\nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j + r(x, u_h)\varphi_i\varphi_j\right]dx +$$

$$+ \int_{\Gamma_N} z(x, u_h)\varphi_i\varphi_j d\sigma.$$

Először bebizonyítjuk az (i)-(iv)-et a (2) esetre vonatkozóan; az (2.38)-(2.39) feltételeivel csak az (ii) feltételt használva.

(i) Abból, hogy $b \geq \mu_0 > 0, r \geq 0, z \geq 0$ kapjuk:

$$a_{ii}(\bar{c}) \geq \mu_0 \int_\Omega |\nabla\varphi_i|^2 dx > 0.$$

(ii) Legyen $i = 1, \dots, n,\ \ j = 1, \dots \bar{n}\ \ (i \neq j)$, valamint Ω_{ij} tartalmazza a belső pontjait a $supp\ \varphi_i \cap supp\varphi_j$ metszetnek. Amennyiben $\Omega_{ij} = \emptyset$, ekkor

$$a_{ij}(\bar{c}) = 0.$$

Viszont, ha $\Omega_{ij} \neq \emptyset$, a (2.17) és (2.37) tulajdonságok, valamint az a tény, hogy $0 \leq \varphi_i \leq 1, (i = 1, \dots \bar{n})$, adja, hogy

$$\begin{gathered} a_{ij}(\bar{c}) \leq -\frac{\sigma_0}{h^2}\mu_0 meas(\Omega_{ij}) + \\ + \int_{\Omega_{ij}} r(x, u_h)dx + \int_{\Gamma_{ij}} z(x, u_h)d\sigma, \end{gathered} \tag{2.40}$$

és felhasználva: $\Gamma_{ij} = \Gamma_N \cap \bar{\Omega}_{ij}$. Itt, a (2.16) és a 4. feltételből

$$\int_{\Omega_{ij}} r(x,u_h)dx = \int_{\Omega_{ij}} \frac{dq}{d\xi}(x,\theta u_h)dx \leq$$

$$\leq \int_{\Omega_{ij}} (\alpha_1(x) + \beta|\theta u_h|^{p_1-2})\, dx \leq$$

$$\leq \int_{\Omega_{ij}} \alpha_1(x)\, dx + \beta \int_{\Omega_{ij}} |u_h|^{p_1-2}\, dx$$

(ahol $\theta = \theta(x) \in [0,1]$), valamint éppen így kapjuk

$$\int_{\Gamma_{ij}} z(x,u_h)d\sigma \leq \int_{\Gamma_{ij}} \alpha_2(x)\, d\sigma + \beta \int_{\Gamma_{ij}} |u_h|^{p_2-2}\, d\sigma.$$

Ezt becsülni tudjuk a következő integrállal: $\int_{\Omega_{ij}} |u_h|^{p_1-2}\, dx$ és $\int_{\Gamma_{ij}} |u_h|^{p_2-2}\, d\sigma$. Definiáljuk a következőket $p^* := \frac{2d}{d-2}$, $p^{**} := \frac{2(d-1)}{d-2}$, amennyiben $d \geq 3$, és $p^* := p^{**} := +\infty$, amikor $d = 2$. Ekkor a Szoboljev beágyazási becslés:

$$\|v\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq k_1\|v\|_1, \quad \|v\|_{L^{p^{**}}(\Gamma_N)} \leq k_2\|v\|_1, \tag{2.41}$$

ahol $v \in H^1(\Omega)$ és $k_1, k_2 > 0$, valamint $\|v\|_1 = \|v\|_{H^1(\Omega)}$. Feltételezzük, hogy a $p_1, p_2 > 2$ és *r,t* fix valós számok kielégítik a következőket:

$$\frac{\gamma}{2} < r \leq \frac{p^*}{p_1 - 2}, \quad \frac{d-1}{d+1-\gamma} < t \leq \frac{p^{**}}{p_2 - 2} \tag{2.42}.$$

Ilyen szám létezik, amikor $d \geq 3$ az (2.39) szerint,

$\gamma < \frac{2p^*}{p_1-2}$, valamint

$\gamma < 3 + \frac{(4-p_2)(d-2)}{2} = d + 1 + \frac{(2-p_2)(d-2)}{2} = d + 1 + \frac{(2-p_2)(d-1)}{p^{**}}$.

Továbbá, $\gamma \geq 2$, ami azt jelenti, hogy $r \geq 1$ és $t \geq 1$. Amennyiben $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{t} + \frac{1}{l} = 1$, akkor a Hölder-egyenlőtlenségből következik

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{ij}} |u_h|^{p_1-2}\, dx &\leq \|l\|_{L^s(\Omega_{ij})} \||u_h|^{p_1-2}\|_{L^r(\Omega_{ij})} = \\ &= meas(\Omega_{ij})^{1/s} \|u_h\|^{p_1-2}_{L^{(p_1-2)r}(\Omega_{ij})}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Itt $(p_1 - 2)r \leq p^*$ az (2.41) egyenlettel azt mutatja, hogy:

$$\begin{aligned} \|u_h\|^{p_1-2}_{L^{(p_1-2)r}(\Omega_{ij})} &\leq \|u_h\|^{p_1-2}_{L^{(p_1-2)r}(\Omega)} \leq const \cdot \|u_h\|^{p_1-2}_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \\ &\leq const \cdot \|u_h\|_1^{p_1-2}. \end{aligned}$$

A végeselemes konvergencia eredményéből $\|u_h\|_1 \to \|u^*\|_1$, ahol u^* nem más, mint a feladat gyenge megoldása. Ezért, ha a h kisebb valamely rögzített h_0-nál, akkor a (2.43) végül is a következőképpen alakul:

$$\int_{\Omega_{ij}} |u_h|^{p_1-2}\, dx \le K_1 meas(\Omega_{ij})^{\frac{1}{s}} \tag{2.44}$$

ahol $K_1 > 0$ függetlenül a h értékétől. Hasonlóan

$$\int_{\Gamma_{ij}} |u_h|^{p_2-2}\, dx \le K_2 meas(\Gamma_{ij})^{\frac{1}{l}} \tag{2.45}.$$

Végezetül, ha p_1 vagy p_2 egyenlők 2-vel, akkor a megfelelő egyenletek konvergálnak, $s=1$ vagy $l=1$ –el.

Az integráljai az $\alpha_1(x)$ és $\alpha_2(x)$ becsülhetőek a Hölder-egyenlőtlenségből következő (2.43) becslésből és $\frac{2}{d} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{d-1} + \frac{1}{l'} = 1$:

$$\int_{\Omega_{ij}} \alpha_1(x)\ dx \le K_3 meas(\Omega_{ij})^{\frac{1}{s'}}, \quad \int_{\Gamma_{ij}} \alpha_2(x)\ dx \le K_4 meas(\Gamma_{ij})^{\frac{1}{l'}}$$

ahol $K_3 = \|\alpha_1\|_{L^{d/2}(\Omega)}$, valamint $K_4 = \|\alpha_2\|_{L^{d-1}(\Gamma_N)}$.

Az összes becslést behelyettesítve a (2.40) egyenlőtlenségbe kapjuk:

$$\begin{aligned} a_{ij}(\bar{c}) \le -\frac{\sigma_0}{h^2}\mu_0 meas(\Omega_{ij}) + \beta K_1 meas(\Omega_{ij})^{\frac{1}{s}} + K_3 meas(\Omega_{ij})^{\frac{1}{s'}} + \\ +\beta K_2 meas(\Gamma_{ij})^{\frac{1}{l}} + K_4 meas(\Gamma_{ij})^{\frac{1}{l'}}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Ez átírható a következő alakba:

$$a_{ij}(\bar{c}) \le A_1^{ij}(h) + A_2^{ij}(h) + A_3^{ij}(h) + A_4^{ij}(h)$$

a megfelelő állandókkal: $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ h választásától függetlenül minden i,j-re,

$$\begin{aligned} A_1^{ij}(h) &:= -\frac{C_0}{h^2} meas(\Omega_{ij}) + C_1 meas(\Omega_{ij})^{\frac{1}{s}}, \\ A_2^{ij}(h) &:= -\frac{C_0}{h^2} meas(\Omega_{ij}) + C_2 meas(\Gamma_{ij})^{\frac{1}{l}}, \\ A_3^{ij}(h) &:= -\frac{C_0}{h^2} meas(\Omega_{ij}) + C_3 meas(\Omega_{ij})^{\frac{1}{s'}}, \\ A_4^{ij}(h) &:= -\frac{C_0}{h^2} meas(\Omega_{ij}) + C_4 meas(\Gamma_{ij})^{\frac{1}{l'}}. \end{aligned}$$

Ellenőrizzük elég kis h-ra $A_k^{ij}(h) < 0$, $(k = 1,2,3,4)$.

Használjuk $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ és (2.38), kapjuk

$$A_1^{ij}(h) = meas(\Omega_{ij})^{\frac{1}{s}}\left(-\frac{C_0}{h^2}meas(\Omega_{ij})^{\frac{1}{r}} + C_1\right) \leq$$

$$\leq meas(\Omega_{ij})^{\frac{1}{s}}\left(-C_5 h^{-2+\left(\frac{\gamma}{r}\right)} + C_1\right).$$

Az (2.42) azt mutatja, hogy $\frac{\gamma}{r} < 2$ esetén a zárójeles kifejezés $-\infty$-hez tart, amikor $h \to 0$ és ezért $A_1^{ij}(h) < 0$ kis h-ra.

Felhasználva az (2.38) újra, valamint azt, hogy $meas(\Gamma_{ij}) \leq const \cdot h^{d-1}$ (a h nem más, mint az átmérője az egésznek és a Γ_{ij} *(d-1)* dimenziós határ pontjai), kapjuk

$$A_2^{ij}(h) \leq -C_6 h^{\gamma-2} + C_7 h^{\frac{d-1}{l}}.$$

Visszatérve az (2.42) kifejezéshez és $1 - \frac{1}{l} = \frac{1}{l} < \frac{d+1-\gamma}{d-1} = 1 - \frac{\gamma-2}{d-1}$, kapjuk $\frac{d-1}{l} > \gamma - 2$, azaz a második kifejezés általában 0, ezért $A_2^{ij}(h) < 0$ kis h-ra.

Hasonlatosak az $A_3^{ij}(h)$ és $A_4^{ij}(h)$ kifejezések, *s'* és *l'* tekintetében, amikor is úgy becsüljük őket, mint *s*, *l*. Nevezetesen, $\frac{d}{2} = \frac{p^*}{p^*-2}$ és $d - 1 = \frac{p^{**}}{p^{**}-2}$, ezért helyettesítve $\frac{d}{2}$ és $d - 1$-et *r* és *t* helyébe, kapjuk (2.42), amely speciális esetben $p_1 = p^*$ és $p_2 = p^{**}$. Köszönhetően a $\frac{2}{d} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{d-1} + \frac{1}{l'} = 1$ feltételeknek, s', l' számok az s, l szerepét játszzák, tehát kapjuk a következő becsléseket $A_3^{ij}(h)$ és $A_4^{ij}(h)$, az $A_1^{ij}(h)$ és $A_2^{ij}(h)$ becslésének ismétléséből.

Összegezve, elég kis h-ra kapjuk, $A_k^{ij}(h) < 0$ $(k = 1,2,3,4)$, ami mutatja a létezést $h_0 < 0$-ra:

$$a_{ij}(\bar{c}) < 0 \tag{2.47}$$

minden $h \leq h_0$ és *i*,*j*-re.

(iii) Minden $i = 1, \dots, n$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(\bar{c}) = \int_{\Omega} \left[b(x, \nabla u_h)\nabla\varphi_i \cdot \nabla\left(\sum_{j=1}^{\bar{n}} \varphi_j\right) + r(x, u_h)\varphi_i\left(\sum_{j=1}^{\bar{n}} \varphi_j\right)\right] dx +$$

$$+ \int_{\Gamma_N} z(x, u_h)\varphi_i\left(\sum_{j=1}^{\bar{n}} \varphi_j\right) d\sigma = \tag{2.48}$$

$$= \int_{\Omega} r(x, u_h)\varphi_i dx + \int_{\Gamma_N} z(x, u_h)\varphi_i d\sigma \geq 0,$$

felhasználtuk, hogy $\sum_{j=1}^{\bar{n}} \varphi_j \equiv 1$ és r, z, φ_i nemnegatívak.

(iv) Indirekt feltételezzük az ellenkezőjét, hogy $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(\bar{c}) = 0, i = 1,..,n,$ ami azt jelenti: $A(\bar{c})$ az $\{1,1,..,1\}$-es vektrot a nulla vektorába viszi, ami lehetetlen, mert ő pozitív definit.

(v) Legyen $i, j = 1, \dots, n,\ i \neq j$ tetszőleges és legyen a szomszédos csúcsok egy sorozata B_{i_k} $(k = 1, \dots, s)$ az Ω-ban, ami összekapcsolja B_i-t B_j-vel (azaz $i_0 = i$ és $i_s = j$). Itt a (2.47) azt mutatja, hogy $a_{i_k, j_{k+1}}(\bar{c}) < 0$, ezért az első definíció alapján $A(\bar{c})$ irreducibilis.

Tétel: Az előző tétel feltételei miatt kapjuk:

$$\max_{\bar{\Omega}} u_h \leq \max\left\{0, \max_{\Gamma_D} g_h\right\}. \tag{2.49}$$

Speciálisan, ha $\Gamma_D \neq \emptyset$ és $g \geq 0$, következik

$$\max_{\bar{\Omega}} u_h \leq \max_{\Gamma_D} g_h, \tag{2.50}$$

azonban, ha $\Gamma_D \neq \emptyset$ és $g \leq 0$ vagy $\Gamma_D = \emptyset$ kapjuk a nem pozitív esetet

$$\max_{\bar{\Omega}} u_h \leq 0. \tag{2.51}$$

Bizonyítás: Ellenőrizzük a munkám 3. Tételének elégséges feltételeit az $\bar{A}(\bar{c})$-vel és $\bar{n}$ helyett az $\bar{A}$ mérete n+m. Nevezetesen, az említett tétel (i)-(iii) feltételei és az előző tétel (i)-(iii) feltételei egybevágóak. Továbbá, az első definíció három kritériuma szintén teljesül, azaz $A(\bar{c})$ irreducubilis megfelelően az (v) kijelentésével, valamint a két másik kritérium egybevág a (iii)-(iv) feltételekkel, ami adódik a (i)-(iii) által. Jelöljük, az (2.35) értelmében, $d \leq 0$, és a (2.34) jelentse a $\bar{A}(\bar{c})\bar{c} \leq 0$, ezért a 3. tétel adja

$$\max_{i=1,\dots,\bar{n}} c_i \leq \max\left\{0, \max_{i=n+1,\dots,\bar{n}} c_i\right\}. \tag{2.52}$$

Az, hogy $c_i = g_i$ minden $i = n + 1, \dots, \bar{n}$, adja

$$\max_{i=1,\dots,\bar{n}} c_i \leq \max\left\{0, \max_{i=n+1,\dots,\bar{n}} g_i\right\}. \tag{2.53}$$

ami implikálja a (2.49) diszkrét maximum-elvet.

III. Gyakorlati rész

1. Célkitűzés

Ebben a részben numerikus megoldással szemléltetjük az elliptikus parciális differenciálegyenletek speciális esetét, a Poisson-egyenletet, annak adott peremfeltétellel illetve forrástaggal módosított alakját. Ezen feladatok közelítő megoldásait végeselem-módszer alkalmazásával nyerjük, és minden esetben elsőfajú, tehát Dirichlet-peremfeltételt alkalmazunk.

Tekintsük a következő Poisson egyenletet, amely a hővezetési egyenlet stacionárius esetét modellezi:

$$-\Delta u = f,$$
$$u_{|\partial\Omega} = 0,$$

ahol a megoldási tartomány legyen az egységnégyzet, valamint a forrástag, azaz $f: \Omega \to \mathbb{R}$ függvény a következőképp van megadva:

$$f = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

Ebben az esetben a pontos megoldás könnyen meghatározható, alakja a következő:

$$u = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

A feladat megoldására a MATLAB programcsomagot alkalmaztam beépített és saját sémák használatával és a végeselem-módszer alkalmazásával. Az eredmények a következők lettek.

A program leírása:

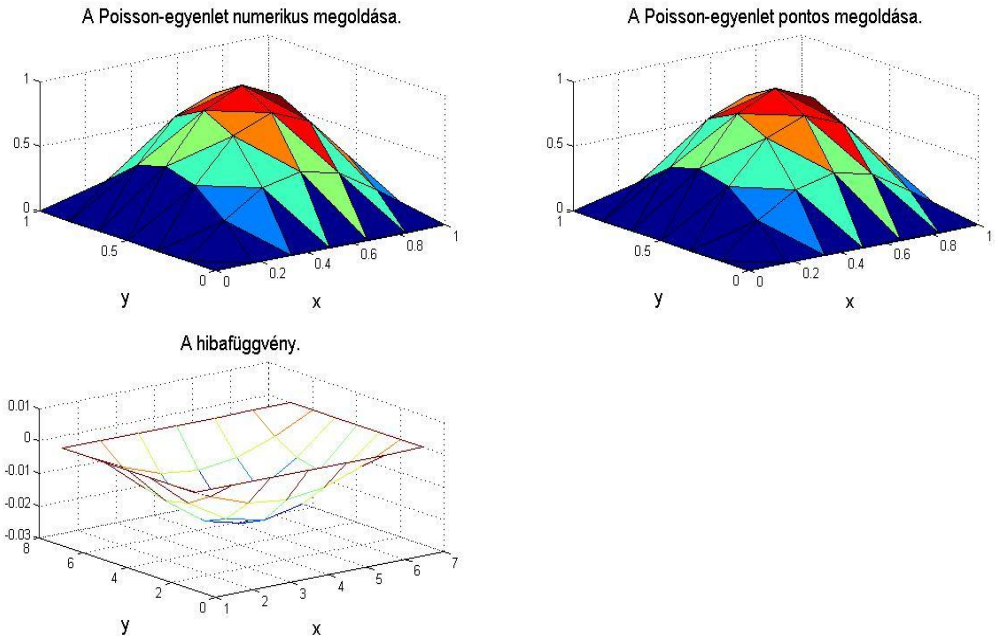
1. **Feladat:**

```
% Csicsó Diána

%  Program a
%                - d_xx u(x,y) - d_yy u(x,y) = f
%
%  feladat megoldására az egységnégyzet alakú tartományban,
ahol az egzakt megoldás
%
%                     u = sin(pi*x)*sin(pi*y)

% f=2pi^2*sin(pi*x)*sin(pi*y) forrástaggal
%  és a homogén Dirichlet peremfeltétellel.


close all; clear all;
n=5; h=1/(n+1); % rácspontok száma x és y irányban,
rácstávolság
x=h*[1:n]; y=x; % oldalak ekvidisztáns felosztása
[xi,yi]=meshgrid(x,y); % a rácspontok koordinátáinak
kiszámítása
f =2*pi.^2*sin(pi*xi).*sin(pi*yi); % forrás % A merevségi
mátrix konstrukciója
I = speye(n);
E = sparse(2:n,1:n-1,1,n,n);
D = E+E'-2*I;
A = -kron(D,I)-kron(I,D);
% A terhel´esi vektor konstrukciója
b=reshape(f,n^2,1)*h^2; % a forrás miatt (a bázisfüggvények
és f szorzatainak integráljának közelítésére
% Az egyenletrendszer megoldása
uapprox=A\b;
% A numerikus megoldás ábrázolása
ugridin = reshape(uapprox,n,n); % megoldásvektor mátrixszá
alakítása
ugrid = zeros(n+2,n+2); % a peremfeltételek figyelembevétele
ugrid(2:n+1,2:n+1)=ugridin;
tri=[0 0 0]; % A háromszögek konstrukciója a hozzájuk tartozó
csúcsokból.
for i=1:(n+1)*(n+2)
if mod(i,n+2)~=0
tri(length(tri(:,1))+1,:)=[i,i+1,i+n+2];
tri(length(tri(:,1))+1,:)=[i+1,i+1+n+2,i+n+2];
end
end
```

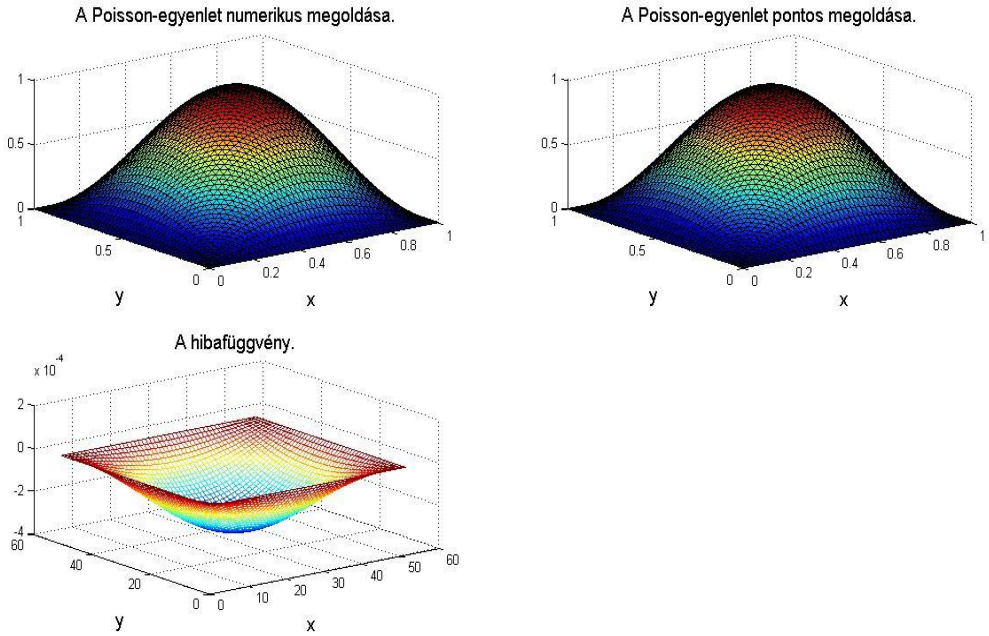
```
tri(1,:)=[];
[xii,yii]=meshgrid(0:h:1,0:h:1);
pontos=sin(pi*xii).*sin(pi*yii);
hiba=pontos-ugrid;
%hiba a max normában véve
h*norm(hiba)
hold on;
subplot(2,2,1)
trisurf(tri,xii,yii,ugrid)
axis([0,1,0,1,0,1])
xlabel('x','FontSize',14)
ylabel('y','FontSize',14)
title(['A Poisson-egyenlet numerikus
megoldása.'],'FontSize',14)
subplot(2,2,2)
trisurf(tri,xii,yii,pontos);
axis([0,1,0,1,0,1])
xlabel('x','FontSize',14)
ylabel('y','FontSize',14)
title(['A Poisson-egyenlet pontos megoldása.'],'FontSize',14)
subplot(2,2,3)
mesh(hiba)
xlabel('x','FontSize',14)
ylabel('y','FontSize',14)
title(['A hibafüggvény.'],'FontSize',14)
hold off;
```

Eredmények:

1. A rács finomsága: **0.1667**; (n=5)**.**
   A pontos és a numerikus megoldás hibája: **0.0116.**



2. A rács finomsága: **0.0196**; (n=50).
   A pontos és a numerikus megoldás hibája: **1.5814e-04.**



2. Feladat:

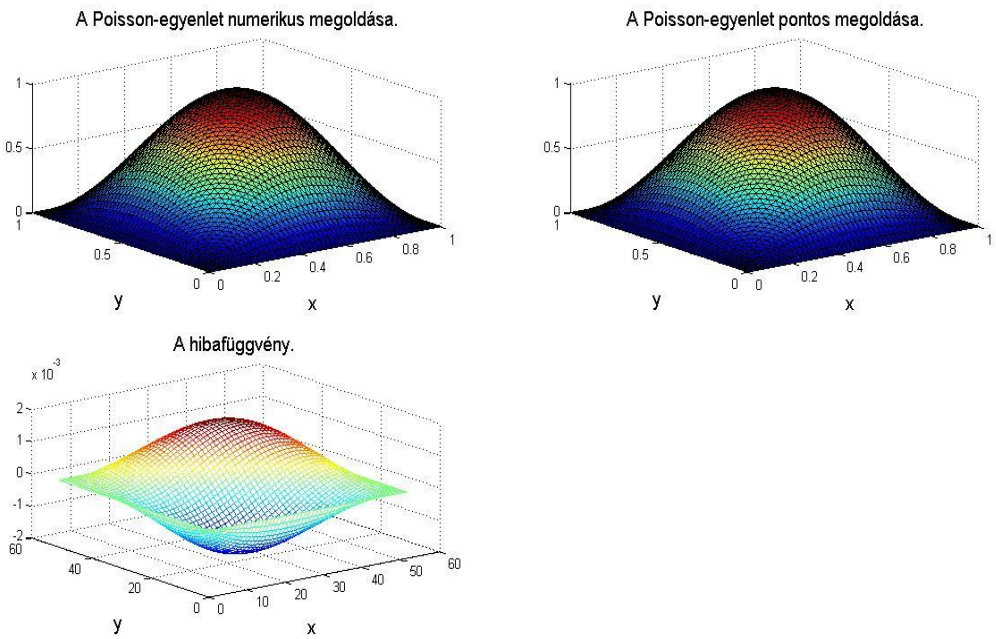
```
% Csicsó Diána

%  program a
%                - d_xx u(x,y) - d_yy u(x,y)+lamda*u(x,y) = f
%
%  feladat megoldására az egységnégyzet alakú tartományban,
ahol az egzakt megoldás, könnyen megállapítható:
%              u(x,y)=sin(pi*x)*sin(pi*y)
%
%           f =2*pi.^2*sin(pi*x)*sin(pi*y)
%
%  és Dirichlet-peremfeltétellel.

close all; clear all;
n=10; h=1/(n+1); % rácspontok száma x és y irányban,
rácstávolság
lambda=10;
x=h*[1:n]; y=x; % oldalak ekvidisztáns felosztása
[xi,yi]=meshgrid(x,y); % a rácspontok koordinátáinak
kiszámítása
f =2*pi.^2*sin(pi*xi).*sin(pi*yi); % forrs
% A merevségi mátrix konstrukciója
I = speye(n);
E = sparse(2:n,1:n-1,1,n,n);
D = E+E'-2*I;
```

```
A = -kron(D,I)-kron(I,D);
% A terhelési vektor konstrukciója
b=reshape(f,n^2,1)*h^2; % a forrás miatt (a bázisfüggvények
és f
% szorzatainak integráljának közelítésére
o=zeros(1,n);
o_0=zeros(1,n-1);
e=[ones(1,n-2),0,0];
e_f2=[ones(1,n-3),0,0,0];
mtxn_e=e'*ones(1,(n-2));
mtxn_ef2=e_f2'*ones(1,(n-2));
mtxn_ef5=e'*ones(1,(n-3));
atlo=reshape(mtxn_e,1,n*(n-2));
atlo_f2=reshape(mtxn_ef2,1,n*(n-2));
atlo_f5=reshape(mtxn_ef5,1,n*(n-3));
fo_atlo=[o,0,atlo,o_0];
f_1=[o,atlo,o];
f_2=[o,atlo_f2,o];
f_3=[0,atlo,o,o_0];
f_4=[atlo,o,o];
f_5=[0,atlo_f5,o,o,o_0];
% a lépésmátrix
AA =lambda*((-h.^2)/6)*spdiags([0*f_5' 0*f_4' 0*f_3' 0*f_2'
0*f_1' (-5)*fo_atlo' f_1' f_2' f_3' f_4' f_5'],[-2*n-1,-n-2,-
n-1,-2,-1,0,1,2,n+1,n+2,2*n+1],n*n,n*n);
lepesm=A+AA;
% Az egyenletrendszer megoldása
uapprox=lepesm\b;
% A numerikus megoldás ábrázolása
ugridin = reshape(uapprox,n,n); % megoldásvektor mátrixszá
alakítása
ugrid = zeros(n+2,n+2); % a peremfeltételek figyelembevétele
ugrid(2:n+1,2:n+1)=ugridin;
%ugrid(1,2:n+1)=g;
tri=[0 0 0]; % A háromszögek konstrukciója a hozzájuk tartozó
csúcsokból.
for i=1:(n+1)*(n+2)
if mod(i,n+2)~=0
tri(length(tri(:,1))+1,:)=[i,i+1,i+n+2];
tri(length(tri(:,1))+1,:)=[i+1,i+1+n+2,i+n+2];
end
end
tri(1,:)=[];
[xii,yii]=meshgrid(0:h:1,0:h:1);
pontos=sin(pi*xii).*sin(pi*yii);
hiba=pontos-ugrid;
%hiba a max normában véve
h*norm(hiba)
hold on;
subplot(2,2,1)
trisurf(tri,xii,yii,ugrid)
```

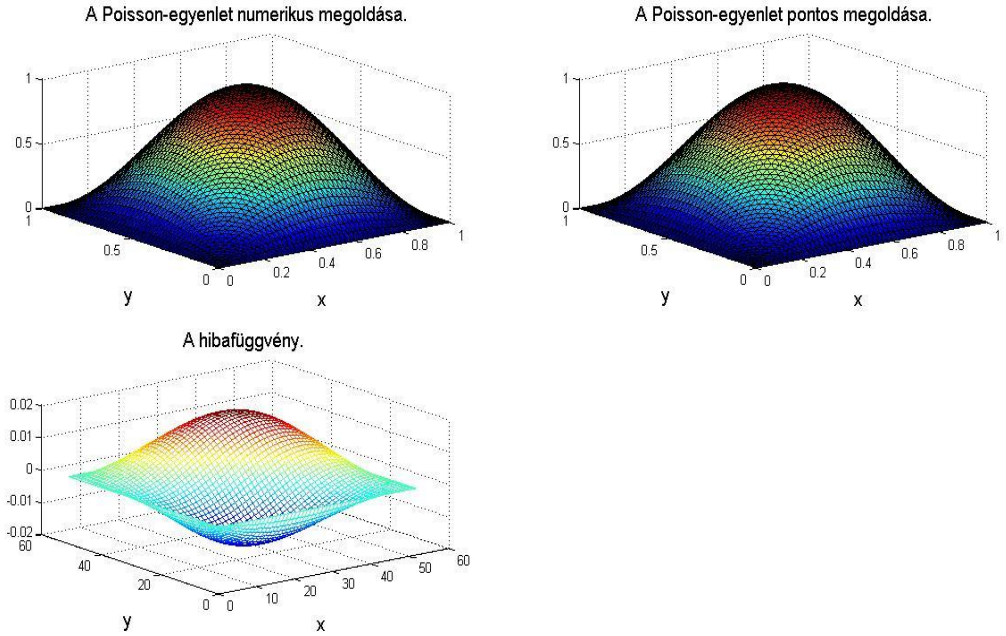
```
axis([0,1,0,1,0,1])
xlabel('x','FontSize',14)
ylabel('y','FontSize',14)
title(['A Poisson-egyenlet numerikus
megoldása.'],'FontSize',14)
subplot(2,2,2)
trisurf(tri,xii,yii,pontos);
axis([0,1,0,1,0,1])
xlabel('x','FontSize',14)
ylabel('y','FontSize',14)
title(['A Poisson-egyenlet pontos megoldása.'],'FontSize',14)
subplot(2,2,3)
mesh(hiba)
xlabel('x','FontSize',14)
ylabel('y','FontSize',14)
title(['A hibafüggvény.'],'FontSize',14)
hold off;
```

Eredmények:

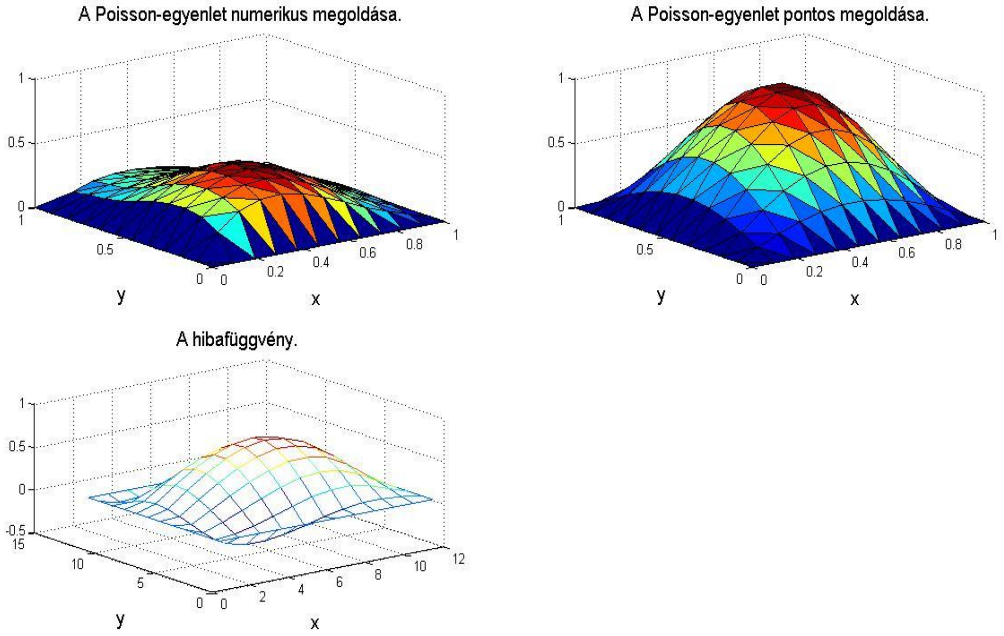
1. A rács finomsága: 0.0196; (n=50)**.**
Lambda= 1.
A pontos és a numerikus megoldás hibája: **6.3928e-04.**



2. A rács finomsága: 0.0196; (n=50)**.**
Lambda= 10.
A pontos és a numerikus megoldás hibája: **0.0067.**



3. A rács finomsága: 0.0909; (n=10)**.**
Lambda= 100.
A pontos és a numerikus megoldás hibája: **0.2768.**



Hivatkozások

[1] J. Karatson and S. Korotov: Discrete maximum principles for finite element solutions of nonlinear elliptic problems with mixed boundary conditions, Numer. Math., 99 (2005), pp. 669– 698.

[2] P. G. Ciarlet and P.-A. Raviart: Maximum principle and uniform convergence for the finite element method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, (1973), pp. 17– 31.

[3] P. G. Ciarlet: Discrete maximum principle for finite-difference operators, Aequationes Math. 4 (1970), 338-352.

[4] S. Gisbert, Numerikus modszerek 2-3.: Typotex Elektronikus Kiadó Kft.

[5] J. Brandts, S. Korotov, M. Krizek and J. Solc: On nonobtuse simplicial partitions.

[6] M. Krizek and Q. Lin: On diagonal dominance of stiffnes matrices in 3D, East-West J. Numer. Math., Vol. 3 (1995), No. 1, pp.59-69.

[7] Horváth Róbert, Izsák Ferenc és Karátson János: Parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei számítógépes alkalmazásokkal.

Köszönetnyilvánítás

Végezetül szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Karátson Jánosnak a sok segítségért és, hogy türelmével, észrevételeivel végig segített és támogatott.

Külön köszönettel tartozom családomnak és szeretteimnek, akik a dolgozatom elkészítésének folyamatában végig bíztattak és támogattak.

Nyilatkozat

Név:

ELTE Természettudományi Kar, szak:

Neptun kód:

Szakdolgozat címe:

A szakdolgozat szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 20

a hallgató aláírása