Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Rozner Bence Péter

Érzékenységvizsgálat Lévy-féle kamatláb-modellekben

Szakdolgozat - Alkalmazott matematikus MSc

Témavezető:

Boros Balázs

kutató

Falkstenen AB, Budapest

Johann Radon Institute, Linz

Belső konzulens:

Prokaj Vilmos

egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest, 2016

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is köszönöm témavezetőmnek, Boros Balázsnak a dolgozat igen alapos ellenőrzését, hasznos megjegyzéseit, valamint a LaTeX használatával kapcsolatos tanácsait.

Szeretnék köszönetet mondani Prokaj Vilmosnak, amiért folyamatosan figyelemmel kísérte munkámat, ötleteivel segített, illetve felhívta a figyelmemet az esetleges hibákra.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **4**

2. Malliavin-kalkulus Poisson-pontfolyamatra **5**

2.1. Poisson-pontfolyamat 5

2.2. Integrálás Poisson-pontfolyamat szerint 6

2.3. Káosz felbontás 10

2.4. Deriválás a p-edik Wiener-Itô-káoszon 13

2.5. Skorohod-integrál 15

3. Lévy-féle határidős kamatláb-modell **17**

3.1. Pénzügyi alapfogalmak 17

3.2. Idő-inhomogén Lévy-folyamatok 18

3.3. Sztochasztikus differenciálegyenletek megoldásának regularitása 19

3.4. A határidős kamatláb-modell konstrukciója 20

3.5. Érzékenységvizsgálat 26

Irodalomjegyzék **30**

1. fejezet

Bevezetés

Ha egy bank elad egy pénzügyi terméket az ügyfélnek, akkor igyekszik megszabadulni minden kockázattól, amely az adott termékből származik, azaz megpróbálja fedezni a pozícióját. Ehhez többnyire dinamikus fedezeti stratégia használható, amihez szükség van a pénzügyi eszközök piaci paraméterekre való érzékenységét mérő mennyiségek, az ún. *Görögök* ismeretére. Matematikailag a *Görögök* a pénzügyi eszközök árát megadó funkcionál parciális deriváltja a piaci paraméterek szerint. A származtatott pénzügyi eszközök árát megadó funkcionál tipikusan egy várható érték, amely függ a piaci paraméterektől. A *Görögök* numerikus módszerekkel való közelítéséből kétféle hiba adódhat, egyrészt a deriválásból, másrészt a várható érték közelítéséből adódó pontatlanság. Utóbbi kezelésére a [5] cikkben ismertetett, Malliavin-kalkuluson alapuló módszer alkalmazható.

Ebben a dolgozatban egy idő-inhomogén Lévy-folyamattal meghajtott határidős kamatláb-modellel foglalkozunk, amelyet Ernst Eberlein és Fehmi Özkan dolgoztak ki a [4] cikkben. Az idő-inhomogén Lévy-folyamat lehetővé teszi a modell a rugalmas kalibrálhatóságát.

A 2. fejezetben bemutatjuk a Poisson-pontfolyamatra vonatkozó Malliavin-kalkulus alapvető fogalmait, és azok néhány következményét.

A 3. fejezetben ismertetjük a határidős kamatláb-modell felépítéséhez szükséges alapvető pénzügyi fogalmakat, a modell konstrukcióját és egy gyakran előforduló pénzügyi eszköz, a *caplet* kapcsán felmerülő érzékenységvizsgálati feladatot, és annak megoldását.

2. fejezet

Malliavin-kalkulus Poisson-pontfolyamatra

Ebben a fejezetben a Poisson-pontfolyamatra vonatkozó Malliavin-kalkulus kerül bemutatásra. Először ismertetjük a Poisson-pontfolyamat definícióját. Ezután a Poisson-pontfolyamat szerinti többszörös integrál definíciója következik, amelyet több lépésben ismertetünk. Kezdetben egyszerűbb valószínűségi változókra definiáljuk az integrált, amelyet fokozatosan kiterjesztünk általánosabb valószínűségi változókra. Végül az integrálás adjungáltját, a Skorohod-integrált definiáljuk.

A fejezet szerkezete, továbbá az említésre kerülő definíciók és tételek megfogalmazása, valamint a bizonyítások Prokaj Vilmos útmutatásai alapján lettek felépítve.

2.1. Poisson-pontfolyamat

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező.

2.1.1. Tétel. *Ha $(E, \mathcal{B}, \mu)$ σ-véges mértéktér, akkor az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn megadható valószínűségi változók olyan $\{N(A) \big| A \in \mathcal{B}\}$ családja, ami teljesíti a következőket:*

(i) *ha $A \in \mathcal{B}$ véges μ-mértékű, akkor $N(A)$ Poisson-eloszlású, és $\mathbb{E}\left(N(A)\right) = \mu(A)$;*

(ii) *ha $A_1, \ldots, A_n$ páronként diszjunkt, véges μ-mértékű halmazok, akkor az $N(A_1), \ldots, N(A_n)$ valószínűségi változók függetlenek.*

(iii) *az $A \mapsto N(A)$ leképezés $(A \in \mathcal{B})$ egy valószínűséggel σ-véges mérték.*

Bizonyítás. Legyen $\{H_k \big| k \in \mathbb{N}^+\}$ az E egy véges μ-mértékű halmazokból álló partíciója. Minden H_k halmazhoz vegyünk egy $N(H_k)$ Poisson-eloszlású valószínűségi változót, melynek várható értéke $\mu(H_k)$ úgy, hogy az $\{N(H_k) \big| k \in \mathbb{N}^+\}$ valószínűségi változók függetlenek legyenek. Ezek után minden H_k halmazból válasszunk ki egymástól, és a többi $N(H_j)$ $(j \in \mathbb{N}^+ \setminus \{k\})$

változótól függetlenül $N(H_k)$ pontot véletlenszerűen a $\mathbb{P}_k(A) = \frac{\mu(A\cap H_k)}{\mu(H_k)}$ eloszlás szerint, ahol $A \in \mathcal{B}$. Legyen $A \in \mathcal{B}$ véges μ-mértékű. Jelölje $N(A)$ azon pontok számát, amelyek lefedhetők A-val. Vegyük észre, hogy így nem kerülünk ellentmondásba az $N(H_k)$ korábbi definíciójával. Az alábbiakban igazoljuk, hogy az $\{N(A)\big|A \in \mathcal{B}\}$ valószínűségi változók kielégíti a tételben megfogalmazott követelményeket. Legyen $\{A_1, \dots, A_n\}$ a H_k egy partíciója. Ha $(Z_i)_{i=1}^{N(H_k)}$ jelöli a H_k-ból a $\mathbb{P}_k$ eloszlás szerint választott pontok sorozatát, akkor az

$$Y_i = \left(\mathbf{1}_{\{Z_i\in A_1\}}, \dots, \mathbf{1}_{\{Z_i\in A_n\}}\right)$$

jelöléssel, az $N(A_1), \dots, N(A_n)$ együttes eloszlása megegyezik a $\sum_{i=1}^{N(H_k)} Y_i$ véletlen tagszámú összeg eloszlásával. Az $N(A_1), \dots, N(A_n)$ valószínűségi változók együttes eloszlásának karakterisztikus függvényére teljesül, hogy

$$G_{N(H_k)}\left(\varphi_{Y_1}(t_1, \dots, t_n)\right) = \exp\left\{\mu(H_k)\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_k(A_j)e^{\mathrm{i}t_j}\right)\right\} = \prod_{j=1}^{n} \exp\{\mu(A_j)(\exp\{\mathrm{i}t_j\} - 1)\},$$

ahol $G_{N(H_k)}$ jelöli az $N(H_k)$ generátorfüggvényét. Tehát az $N(A_l)$ valószínűségi változók függetlenek, és $\mu(A_l)$ várható értékű Poisson-eloszlásúak, ahol $l = 1, \dots, n$. Ha $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ páronként diszjunkt véges μ-mértékű halmazok, akkor az

$$\{N(A_l \cap H_k)\big|l = 1, \dots, n \text{ és } k \in \mathbb{N}^+\}$$

változók teljesen függetlenek és Poisson-eloszlásúak a megfelelő paraméterrel, ezért mindhárom tulajdonság megmarad az $N(A_l) = \sum_{k=1}^{\infty} N(A_l \cap H_k)$ összegek képzése után is. $\square$

A tételben felsorolt tulajdonságokkal rendelkező $N = \{N(A)\big|A \in \mathcal{B}\}$ folyamatot Poisson-pontfolyamatnak, a μ mértéket a folyamat karakterisztikus, vagy intenzitás mértékének nevezzük.

2.1.2. Megjegyzés. Legyen $E = [0, \infty)$ és $\mu(\mathrm{d}t) = \lambda \mathrm{d}t$, ahol $\lambda > 0$. Ezzel a szereposztással $t \geq 0$ esetén az $N_t = N([0, t))$ független és stacionárius növekményű folyamat, továbbá minden $0 \leq s < t$ esetén $N_t - N_s$ eloszlása $\lambda(t-s)$-paraméterű Poisson-eloszlás. Az $(N_t)_{t\geq 0}$ folyamatot λ-intenzitású homogén Poisson-folyamatnak nevezzük.

2.1.3. Definíció. Ha N Poisson-pontfolyamat az $(E, \mathcal{B}, \mu)$ σ-véges mértéktér felett, akkor az $\widetilde{N} = N - \mu$ folyamatot kompenzált Poisson-pontfolyamatnak nevezzük.

2.2. Integrálás Poisson-pontfolyamat szerint

Ebben a fejezetben bevezetjük a Poisson-pontfolyamat szerinti integrált. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, és legyen N Poisson-pontfolyamat a $\mathbb{T} = (E, \mathcal{B}, \mu)$ σ-véges mértéktér felett. Ekkor $\widetilde{N} = N - \mu$ a kompenzált Poisson-pontfolyamat. Tegyük fel, hogy μ atommentes.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$L^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mathcal{F}) = \{X : \Omega \to \mathbb{R} \big| X \ \mathcal{F}\text{-mérhető és } \mathbb{E}(X^2) < \infty\},$$
$$L^2(E^p) = \{f : E^p \to \mathbb{R} \big| f \text{ Borel-mérhető és } \int_{E^p} f^2(t)\mathrm{d}t < \infty\}, \text{ ahol } p \in \mathbb{N}^+.$$

Az $\widetilde{N}$ kompenzált Poisson-pontfolyamat szerinti integrált először az átlókat nem metsző, mérhető téglák félgyűrűjén definiáljuk, majd az így kapott integrál operátort fokozatosan kiterjesztjük.

2.2.1. Definíció. Páronként diszjunkt $A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{B}$ véges μ-mértékű halmazok esetén legyen

$$I_p(\mathbf{1}_{A_1 \times \cdots \times A_p}) = \widetilde{N}(A_1) \cdots \widetilde{N}(A_p) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}). \tag{2.1}$$

Az $A_1 \times \cdots \times A_p \mapsto \prod_{i=1}^p \widetilde{N}(A_i)$ leképezés egy véletlen, előjeles mérték, ami egy δ-gyűrűn van értelmezve. Az eszerinti (közönséges) integrálást a kompenzált Poisson-pontfolyamat szerinti p-szeres integrálnak nevezzük.

2.2.2. Definíció. Egy függvényt egyszerűnek nevezünk, ha előáll átlókat nem metsző mérhető téglák indikátorainak lineáris kombinációjaként. Jelölje $\mathcal{E}_p$ az egyszerű függvények halmazát, azaz legyen

$$\mathcal{E}_p = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_{k,1} \times \cdots \times A_{k,p}} \middle| n \in \mathbb{N}^+,\ a_k \in \mathbb{R} \text{ és } i \neq j \text{ esetén } A_{k,i} \cap A_{k,j} = \emptyset, \text{ ha } k = 1, \ldots, n \right\}.$$

Mivel I_p végesen additív a p-dimenziós, átlókat nem metsző, mérhető téglák félgyűrűjén, ezért kiterjeszthető az egyszerű függvényekre.

2.2.3. Lemma. *Minden $p \in \mathbb{N}^+$ esetén $\mathcal{E}_p \subset L^2(E^p)$ sűrű.*

Bizonyítás. Jelölje $\bar{\mathcal{E}}_p$ az $\mathcal{E}_p$ topologikus lezártját $L^2(E^p)$-ben. Tekintsük a következő halmazrendszereket:

$$\mathcal{C} = \{A_1 \times \cdots \times A_p \subset E^p \big| A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{B}\},$$
$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^p) \big| \mathbf{1}_A \in \bar{\mathcal{E}}_p\}.$$

Megmutatható, hogy $\mathcal{C}$ egy π-rendszer, és $\mathcal{D}$ egy λ-rendszer. Az alábbiakban igazoljuk, hogy $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, és ekkor a monoton-osztály tétel alapján $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$, azaz

$$\mathcal{B}(\mathbb{T}^p) = \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{B}(\mathbb{T}^p)$$

így azt kapjuk, hogy $\mathcal{D} = \mathcal{B}(\mathbb{T}^p)$, így $\bar{\mathcal{E}}_p = L^2(E^p)$.

A $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ reláció igazolásához azt kell megmutatnunk, hogy minden p-dimenziós (mérhető) tégla indikátora közelíthető $\mathcal{E}_p$-beli függvényekkel. Legyenek $A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{B}$ tetszőleges halmazok, és legyen $\{\alpha_i \big| i \in I\}$ az E alaphalmaz egy véges μ-mértékű halmazokból álló partíciója, ahol $|I| < \infty$. Ha $A_{i,j} = \alpha_i \cap A_j$ ($i \in I$ és $j = 1, \ldots, p$), akkor

$$\mathbf{1}_{A_1 \times \cdots \times A_p} = \sum_{\sigma : \{1,\ldots,p\} \to I} \mathbf{1}_{A_{\sigma(1),1} \times \cdots \times A_{\sigma(p),p}}.$$

A fenti összeg azon tagjai, amelyeknél $\sigma : \{1, \ldots, p\} \to I$ bijekció, benne vannak $\mathcal{E}_p$-ben. Mivel μ atommentes, így a partíció finomításával elérhető, hogy azon tagok hozadéka, amelyek nincsenek $\mathcal{E}_p$-ben, akármilyen kicsik legyenek, tehát $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. $\square$

2.2.4. Definíció. Ha $f : E^p \to \mathbb{R}$ függvény, akkor f szimmetrikus változata

$$\widetilde{f}(t_1, \ldots, t_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} f(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(p)}), \quad (t_1, \ldots, t_p) \in E^p,$$

ahol S_p jelöli a p-edfokú szimmetrikus csoportot.

2.2.5. Lemma. (A többszörös integrál folytonossága) *Ha $f \in \mathcal{E}_p$, és $g \in \mathcal{E}_q$, akkor*

$$\langle I_p(f), I_q(g) \rangle_{L^2(\Omega)} = \mathbb{E}[I_p(f) I_q(g)] = \begin{cases} 0 & \text{ha } p \neq q, \\ p! \int_{E^p} \widetilde{f}(t) \widetilde{g}(t) \mathrm{d}t & \text{ha } p = q, \end{cases}$$

ahol $\widetilde{f}$, illetve $\widetilde{g}$ az f, illetve a g szimmetrikus változata.

Bizonyítás. Mivel a bizonyítandó egyenlőség mindkét oldala bilineáris, ezért elegendő azt az esetet igazolni, amikor $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ páronként diszjunkt véges μ-mértékű halmazok rendszere, valamint $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_p}\} \subset \mathcal{A}$ és $\{A_{j_1}, \ldots, A_{j_q}\} \subset \mathcal{A}$ továbbá

$$f = \mathbf{1}_{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_p}},$$
$$g = \mathbf{1}_{A_{j_1} \times \cdots \times A_{j_q}}.$$

Feltehető, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\mu(A_i) \neq 0$. Ekkor

$$I_p(f) = \widetilde{N}(A_{i_1}) \cdots \widetilde{N}(A_{i_p}),$$
$$I_q(g) = \widetilde{N}(A_{j_1}) \cdots \widetilde{N}(A_{j_q}).$$

Vezessük be a következő indexhalmazokat:

$$\alpha = \{i_1, \ldots, i_p\},$$
$$\beta = \{j_1, \ldots, j_q\}.$$

A fenti jelölésekkel:

$$I_p(f) I_q(g) = \prod_{k \in \alpha \cup \beta} \widetilde{N}(A_k)^{r_k},$$

ahol $r_k = \mathbf{1}_{\{k\in\alpha\}} + \mathbf{1}_{\{k\in\beta\}}$. Mivel az $\{\widetilde{N}(A_k)\big|k \in \alpha\cup\beta\}$ független valószínűségi változók, ezért

$$\mathbb{E}[I_p(f)I_q(g)] = \prod_{k\in\alpha\cup\beta} \mathbb{E}[\widetilde{N}(A_k)^{r_k}].$$

A jobb oldalon álló szorzat pontosan akkor nem-nulla, ha minden r_k értéke 0 vagy 2. Ez csak akkor teljesülhet, ha $p = q$, továbbá $\{i_1, \dots, i_p\} = \{j_1, \dots, j_q\}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I_p(f)I_p(g)] &= \sum_{\sigma\in S_p} \int f(t_1, \dots, t_p)g(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(p)})\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_p = \\ &= p! \int f(t_1, \dots, t_p)\widetilde{g}(t_1, \dots, t_p)\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_p = \\ &= p! \int \widetilde{f}(t_1, \dots, t_p)\widetilde{g}(t_1, \dots, t_p)\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_p.\end{aligned}$$

□

2.2.6. Következmény. Vegyük észre, hogy minden $f \in \mathcal{E}_p$ esetén $I_p(f) = I_p(\widetilde{f})$. Ebből adódik I_p folytonossága:

$$\|I_p(f)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \mathbb{E}[(I_p(f))^2] = p! \int_{E^p} [\widetilde{f}(t)]^2\mathrm{d}t \le p! \int_{E^p} [f(t)]^2\mathrm{d}t = p!\, \|f\|^2_{\mathbb{L}^2(E^p)},$$

tehát $I_p : L^2(E^p) \supset \mathcal{E}_p \to L^2(\Omega, \mathcal{F})$ folytonos és lineáris operátor, így kiterjeszthető $L^2(E^p)$-re folytonos és lineáris operátorként.

Ha $p = 0$, akkor legyen $I_p = I_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. A továbbiakban I_p ($p \in \mathbb{N}_0^+$) jelöli a kiterjesztett integrált, azaz $I_p : L^2(E^p) \to L^2(\Omega, \mathcal{F})$.

2.2.7. Definíció. (Wiener-Itô-káosz) A kompenzált Poisson-pontfolyamat szerinti p-edik ($p \in \mathbb{N}_0^+$) Wiener-Itô-káosz $\mathcal{H}_p = \{I_p(f)\big|f \in L^2(E^p)\} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F})$.

2.2.8. Tétel. *Minden $p \in \mathbb{N}_0^+$ esetén $\mathcal{H}_p \subset L^2(\Omega, \mathcal{F})$ zárt, és ha $q \in \mathbb{N}_0^+ \setminus \{p\}$, akkor $\mathcal{H}_p \perp \mathcal{H}_q$.*

Bizonyítás. A 2.2.6. Következmény alapján teljesül az alábbi izometria. Minden $f \in L^2(E^p)$ esetén

$$\|I_p(f)\|_{L^2(\Omega)} = \left\|I_p(\widetilde{f})\right\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{p!}\left\|\widetilde{f}\right\|_{L^2(E^p)},$$

amiből adódik, hogy $\mathcal{H}_p \subset L^2(\Omega, \mathcal{F})$ zárt.

A $\mathcal{H}_p$ és $\mathcal{H}_q$ ($p \neq q$) alterek ortogonalitása a 2.2.5. Lemma következménye. □

2.3. Káosz felbontás

Legyen $A \in \mathcal{B}$ véges μ-mértékű. Jelölje $\mathrm{supp}N = \{x \in E \big| N(\{x\}) \geq 1\}$ a kompenzálatlan Poisson-pontfolyamat tartóját. Ekkor $A \cap \mathrm{supp}N$ egy valószínűséggel véges, és a kompenzált Poisson-pontfolyamat szerinti integrál mintájára definiálhatjuk a kompenzálatlan Poisson-pontfolyamat szerinti integrált. Vezessük be a következő jelölést: tetszőleges H halmaz esetén jelölje H^{*p} a H^p azon elemeit, amelyek különbözőek, azaz H^{*p} a H-beli, azonos elemeket nem tartalmazó p-hosszú sorozatok halmaza.

2.3.1. Definíció. Páronként diszjunkt $A_1, \ldots, A_p \subset A$ halmazok esetén legyen

$$I_p^0(\mathbf{1}_{A_1 \times \cdots \times A_p}) = N(A_1) \cdots N(A_p) = \sum_{x \in (\mathrm{supp}N)^{*}p} \mathbf{1}_{A_1 \times \cdots \times A_p}(x) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}) \tag{2.2}$$

Az $A_1 \times \cdots \times A_p \mapsto \prod_{i=1}^p N(A_i)$ leképezés egy véletlen mérték E^p mérhető részhalmazain. Az eszerinti (közönséges) integrálást a kompenzálatlan Poisson-pontfolyamat szerinti p-szeres integrálnak nevezzük.

Ha $A_1, \ldots, A_p \subset A$ páronként diszjunkt halmazok, és $f = \mathbf{1}_{A_1 \times \cdots \times A_p}$, akkor (2.1) átírható a következő alakra:

$$I_p(f) = \sum_{\alpha : \alpha \subset \{1, \ldots, p\}} (-1)^{p-|\alpha|} \left(\sum_{x \in (\mathrm{supp}N)^{*|\alpha|}} f_\alpha(x) \right) = \sum_{\alpha : \alpha \subset \{1, \ldots, p\}} (-1)^{p-|\alpha|} I_{|\alpha|}^0(f_\alpha), \tag{2.3}$$

ahol f_α az a függvény, amit f-ből az α-ban nem szereplő koordináták μ-szerinti kiintegrálásával kapunk. Mindkét oldal lineáris f-ben, ezért igaz marad azon egyszerű függvényekre, amelyek tartója lefedhető A^p-vel. Vezessük be a következő jelölést:

$$L^2(E^p \big| A^p) = \{f \in L^2(E^p) : \mathrm{supp} f \subset A^p\}.$$

Ha $f \in L^2(E^p \big| A^p)$, akkor létezik olyan egyszerű függvényekből álló $\left(f^{(n)}\right)_{n=1}^\infty$ függvénysorozat, hogy $f^{(n)} \to f$, ha $n \to \infty$, és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\left|f^{(n)}\right| \leq |f|$. Erre $f_\alpha^{(n)} \to f_\alpha$ is teljesül $\mu^{\otimes(p-|\alpha|)}$-m.m., ha $n \to \infty$, így (2.3) érvényben marad erre az esetre is. Azt kaptuk, hogy minden $f \in L^2(E^p \big| A^p)$ esetén

$$I_p(f) = \sum_{\alpha : \alpha \subset \{1, \ldots, p\}} (-1)^{p-|\alpha|} I_{|\alpha|}^0(f_\alpha).$$

Legyen $\alpha \subset \{1, \ldots, p\}$. A fenti összefüggés felírható $f_\alpha \in L^2(E^{|\alpha|} \big| A^{|\alpha|})$ esetén is

$$I_{|\alpha|}(f_\alpha) = \sum_{\beta : \beta \subset \alpha} (-1)^{|\alpha \setminus \beta|} I_{|\beta|}^0(f_\beta).$$

Ekkor viszont a Möbius-féle inverziós formula szerint

$$I_{|\alpha|}^0(f_\alpha) = \sum_{\beta : \beta \subset \alpha} I_{|\beta|}(f_\beta). \tag{2.4}$$

Valóban, az $X_\alpha = I_{|\alpha|}(f)$, és $Y_\alpha = I^0_{|\alpha|}(f)$ jelöléssel

$$\begin{aligned}\sum_{\beta:\beta\subset\alpha} X_\beta &= \sum_{\beta:\beta\subset\alpha}\left(\sum_{\gamma:\gamma\subset\beta}(-1)^{|\beta\setminus\gamma|}Y_\gamma\right) = \\ &= \sum_{\gamma:\gamma\subset\alpha} Y_\gamma\left(\sum_{\beta:\gamma\subset\beta\subset\alpha}(-1)^{|\beta\setminus\gamma|}\right) = \\ &= \sum_{\gamma:\gamma\subset\alpha} Y_\gamma(1-1)^{|\alpha\setminus\gamma|} = \\ &= Y_\alpha.\end{aligned}$$

Az előző számolás speciális eseteként azt is megkapjuk, hogy

$$\begin{aligned}I^0_p(f) &= \sum_{\alpha\subset\{1,\dots,p\}} I_{|\alpha|}(f_\alpha),\\ I_p(f) &= \sum_{\alpha\subset\{1,\dots,p\}} (-1)^{p-|\alpha|} I^0_{|\alpha|}(f_\alpha),\end{aligned}$$

sőt, ha $f = \widetilde{f}$ szimmetrikus, akkor

$$\begin{aligned}I^0_p(f) &= \sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r} I_r(f_r),\\ I_p(f) &= \sum_{r=0}^{p}(-1)^r\binom{p}{r} I^0_r(f_r),\end{aligned} \tag{2.5}$$

ahol $f_r = f_{\{1,\dots,r\}}$. Másképpen fogalmazva

$$\sum_{p=0}^{n}\mathcal{H}_p(A) = \sum_{p=0}^{n}\mathcal{H}^0_p(A),$$

ahol

$$\mathcal{H}_p(A) = \{I_p(f)\big|f\in L^2(E^p\big|A^p)\} \quad \text{és} \quad \mathcal{H}^0_p(A) = \{I^0_p(f)\big|f\in L^2(E^p\big|A^p)\}.$$

A $\{\mathcal{H}_p(A)\big|p\in\mathbb{N}_0^+\}$ alterek, és a $\{\mathcal{H}^0_p(A)\big|p\in\mathbb{N}_0^+\}$ alterek lineáris burka megegyezik, továbbá

$$I^0_p(f)I^0_q(g) \in \sum_{r=0}^{p+q}\mathcal{H}_r, \tag{2.6}$$

sőt igazolható, hogy az alábbi szorzat formula is teljesül

$$I^0_p(f)I^0_q(g) = I^0_p(\widetilde{f})I^0_q(\widetilde{g}) = \sum_{r=0}^{p\wedge q} r!\binom{p}{r}\binom{q}{r} I^0_{p+q-r}(\widetilde{f}\otimes^r\widetilde{g}), \tag{2.7}$$

ahol $\otimes^r$ nem a szokásos kontraktív tenzor szorzat, hanem

$$(\widetilde{f}\otimes^r\widetilde{g})(x,x',x'') = \widetilde{f}(x,x')\widetilde{g}(x,x''),$$

ahol $x \in A^r$, $x' \in A^{p-r}$ és $x'' \in A^{q-r}$.

Legyen $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F})$ olyan valószínűségi változót, amely mérhető az $\mathcal{F}_A = \sigma(\{N(B)\big|B \subset A\})$ σ-algebrára nézve. Mivel $\mu(A) < \infty$, ezért egy valószínűséggel $N(A) < \infty$, és a valószínűségi mező esetleges bővítésével feltehető hogy léteznek $\{Y_i\big|i \in \mathbb{N}^+\}$ független és azonos $\frac{\mu(\cdot \cap A)}{\mu(A)}$ eloszlású véletlen elemek A-ból, úgy, hogy minden $B \subset A$ esetén

$$N(B) = \sharp\{1 \leq i \leq N(A) | Y_i \in B\}.$$

Itt valójában az történik, hogy a véletlenszerűen kisorsolt pontok közül találomra választunk egyet, ez lesz Y_1, a megmaradt pontok közül az előző választástól függetlenül választunk egyet, ez lesz Y_2, és így tovább, majd az $Y_1, \ldots, Y_{N(A)}$ sorozatot kiegészítjük egy független és azonos eloszlású valószínűségi változókból álló végtelen sorozattá. Legyen $\mathcal{G}_n$ az $(Y_i)_{i=1}^n$ valószínűségi változók által generált σ-algebra, ahol $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ filtráció. Tekintsük a

$$\mathcal{G}_{N(A)} = \{B \in \mathcal{F}\big|\forall n \in \mathbb{N}^+ : B \cap \{N(A) \leq n\} \in \mathcal{G}_n\}$$

megállított σ-algebrát. Mivel $F \sim \mathcal{F}_A \subset \mathcal{G}_{N(A)}$, ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $F\mathbf{1}_{\{N(A)=n\}} \sim \mathcal{G}_n$, és megadható egy $f_n : E^n \to \mathbb{R}$ mérhető függvény úgy, hogy az $\{N(A) = n\}$ eseményen $F = f_n(Y_1, \ldots, Y_n)$. Mivel F nem függ az Y_i $(i \in \mathbb{N}^+)$ valószínűségi változók sorrendjétől, ezért minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén f_n szimmetrikus függvény, amely csak $\mu^{\otimes n}$-m.m. egyértelmű.

Tetszőleges $F \sim \mathcal{F}_A$ valószínűségi változó felírható a következő alakban

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N(A)=n\}} \frac{1}{n!} \sum_{x \in (\mathrm{supp} N)^{*n}} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N(A)=n\}} \frac{1}{n!} I_n^0(f_n). \tag{2.8}$$

2.3.2. Tétel. *A $\{\mathcal{H}_p\big|p \in \mathbb{N}_0^+\}$ alterek lineáris burka sűrű $L^2(\Omega, \sigma(N))$-ben, ahol*

$$L^2(\Omega, \sigma(N)) = \{X : \Omega \to \mathbb{R}\big|X \ \sigma(N)\text{-mérhető és } \mathbb{E}(X^2) < \infty\}.$$

Bizonyítás. A (2.8) összefüggés jobb oldalán található függvénysorban, az $\mathbf{1}_{\{N(A)=n\}} I_n^0(f_n)$ tagok közül pontosan egy nem nulla, ezért ha $F \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, akkor a sor $\mathbb{L}^2(\Omega)$-ben is konvergens. Ebből adódóan elegendő megmutatni, hogy minden n-re $\mathbf{1}_{\{N(A)=n\}} I_n^0(f_n)$ a $\bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{H}_p^0$ lezártjában van. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az $\mathbf{1}_{\{N(A)=n\}}$ indikátorra teljesül, hogy

$$\mathbf{1}_{\{N(A)=n\}} = \sum_{p=n}^{\infty} (-1)^{p-n} \binom{p}{n} \binom{N(A)}{p} = \sum_{p=n}^{\infty} (-1)^{p-n} \binom{p}{n} \frac{1}{p!} I_p^0(\mathbf{1}_{A^p}),$$

ezért

$$\mathbf{1}_{\{N(A)=n\}} I_n^0(f_n) = \sum_{p=n}^{\infty} (-1)^{p-n} \binom{p}{n} \frac{1}{p!} I_p^0(\mathbf{1}_{A^p}) I_n^0(f_n). \tag{2.9}$$

Itt $I_p^0(\mathbf{1}_{A^p}) I_n^0(f_n) \in \bigoplus_{k=0}^{p+n} \mathcal{H}_k$ a (2.6) alapján, így elég megmutatni, hogy ez a sor $L^2(\Omega)$-ban konvergens. A (2.5) összefüggés, és a $\mathcal{H}_p$ alterek ortogonalitása alapján megbecsüljük egy

általános tag $L^2(\Omega)$ normáját.

$$\left\|I_p^0(\mathbf{1}_{A^p})\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 = \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r}^2 \left\|\mu^r(A) I_{p-r}(\mathbf{1}_A^{\otimes(p-r)})\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 =$$
$$= \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r}^2 \mu^{2r}(A)(p-r)!\mu^{p-r}(A) \le p!(1+\mu(A))^{2p}.$$

A tagok $\mathbb{L}^2(\Omega)$ normája

$$\left\|(-1)^p \binom{p}{n} \frac{1}{p!} I_p^0(\mathbf{1}_{A^p})\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \le \frac{\sqrt{p!}}{n!(p-n)!}(1+\mu(A))^p,$$

ami elég gyorsan tart nullához, így a fenti sor $\mathbb{L}^2(\Omega)$-ban is konvergens. Ha $|f_n| \le K$, akkor (2.7) alapján

$$\left\|I_p^0(\mathbf{1}_{A^p}) I_n^0(f_n)\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \le \sum_{r=0}^{n} r! \binom{p}{r}\binom{n}{r} K^n \left\|I_{p+n-r}^{(0)}(\mathbf{1}_A^{\otimes(p+n-r)})\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \le$$
$$\le \sum_{r=0}^{n} r! \binom{p}{r}\binom{n}{r} K^n \sqrt{(p+n-r)!}(1+\mu(A))^{p+n-r}.$$

Ha $|f_n| \le K$, akkor a (2.9) előállításában szereplő tagok $\mathbb{L}^2(\Omega)$ normája legfeljebb

$$\left\|(-1)^{p-n} \frac{1}{p!} I_p^0(\mathbf{1}_{A^p}) I_n^0(f_n)\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \le \frac{1}{n!(p-n)!} \sum_{r=0}^{n} p^n \binom{n}{r} K^n \sqrt{(p+n-r)!}(1+\mu(A))^{p+n-r},$$

ami elég gyorsan tart nullához ahhoz, hogy összegezhető legyen, és ezért

$$\mathbf{1}_{\{N(A)=n\}} I_n^0(f_n \mathbf{1}_{(|f_n|\le K)}) \in \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{H}_p.$$

Mivel $\mathbf{1}_{\{N=n\}} I_n^0(f_n)$ az $\mathbf{1}_{\{N=n\}} I_n^0(f_n \mathbf{1}_{(|f_n|\le K)})$ sorozat $\mathbb{L}^2(\Omega)$-beli limesze, ezért $\mathbf{1}_{\{N=n\}} I_n^0(f_n)$ és F is $\bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{H}_p$-ben van.

Legyen $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ véges μ-mértékű halmazok olyan sorozata, amelyre minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $A_n \subset A_{n+1}$, és $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = E$, továbbá $\mathbb{E}(F|\mathcal{F}_{A_n}) \to F$ $\mathbb{L}^2(\Omega)$-ban, ha $n \to \infty$. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\mathbb{E}(F|\mathcal{F}_{A_n}) \in \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{H}_p$, ezért a limesz is ilyen. $\square$

2.4. Deriválás a p-edik Wiener-Itô-káoszon

Vezessük be a következő jelölést:

$$L^2(\Omega \times E) = \left\{ f : \Omega \times E \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \ \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}\text{-mérhető és } \mathbb{E}\left(\int_E f^2(t)\mathrm{d}t\right) < \infty \right\}.$$

Ha $f \in L^2(E^p)$, akkor jelölje $f_{i,x} \in L^2(E^{p-1})$ azt a függvényt, amely az $(y_1, \dots, y_{p-1}) \in E^{p-1}$ helyen az $f(y_1, \dots, y_{i-1}, x, y_i, \dots, y_{p-1})$ értéket veszi fel.

2.4.1. Definíció. Ha $f \in L^2(E^p)$, akkor az $I_p(f) \in L^2(\Omega, \mathcal{F})$ valószínűségi változó deriváltja az $x \in E$ pontban

$$D_x I_p(f) = \sum_{i=1}^{p} I_{p-1}(f_{i,x}) = pI_{p-1}\left(\widetilde{f}(\cdot, x)\right),$$

ahol $\widetilde{f}$ az f szimmetrizáltja. Minden $p \in \mathbb{N}_0^+$ esetén $DI_p(f) = (D_x I_p(f))_{x \in E}$ az E elemeivel paraméterezett folyamat.

2.4.2. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{E}_p$, akkor*

$$\mathbb{E}\left(\int_E |D_x I_p(f)|^2 \mu(dx)\right) = \|DI_p(f)\|^2_{L^2(\Omega \times E)} = p\|I_p(f)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Bizonyítás. Legyen $f \in L^2(T^p)$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_E |D_x I_p(f)|^2 \mu(\mathrm{d}x)\right) &= \int_E \|D_x I_p(f)\|^2_{L^2(\Omega)} \mu(\mathrm{d}x) = \\
&= \int_E p^2 \|I_{p-1}(\tilde{f}(\cdot, x))\|^2_{L^2(\Omega)} \mu(\mathrm{d}x) = \\
&= \int_E p^2 (p-1)! \|\tilde{f}(\cdot, x)\|^2_{L^2(E^{p-1})} \mu(\mathrm{d}x) = \\
&= p \cdot p! \|\tilde{f}\|^2_{L^2(E^p)} = p\|I_p(f)\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

ahol első lépésben a derivált definíciójának szimmetrizált változatát, majd az izometriát, majd a norma definícióját, végül újra az izometriát használtuk. □

Legyen $J_p : L^2(\Omega) \to \mathcal{H}_p$ a merőleges vetítés. Mivel $L^2(\Omega) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{H}_p$, ezért $L^2(\Omega \times E) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} (\mathcal{H}_p \otimes L^2(E))$. Használjuk a J_p jelölést az $J_p : L^2(\Omega \times E) \to \mathcal{H}_p \otimes L^2(E)$ merőleges vetítésre is. Ekkor, ha $F \in \mathcal{H}_p$, akkor $DF \in \mathcal{H}_{p-1} \otimes L^2(E)$ és $\|DF\|^2_{L^2(\Omega \times E)} = p\,\|F\|^2_{L^2(\Omega)}$.

2.4.3. Tétel. (D lezárható operátor) *A $\mathcal{H}_p$ terek lineáris burkán értelmezett D operátor lezárható, azaz ha $F_n \in \sum_{p=0}^{\infty} \mathcal{H}_p$ és $F_n \to 0$ $L^2(\Omega)$-ban, valamint $DF_n \to \psi$ $L^2(\Omega \times E)$-ben, akkor $\psi = 0$.*

Bizonyítás. $F_n = \sum_{p=0}^{\infty} F_{n,p}$, ahol $F_{n,p} = J_p F_n$ az F_n $\mathcal{H}_p$-be eső komponense. Mivel $DF_n \to \psi$, ezért $J_p DF_n \to J_p \psi$ minden p-re, és a linearitás miatt $J_p DF_n = DJ_{p+1}F$. Ugyanakkor D a $\mathcal{H}_{p+1}$-en folytonos, így $J_p \psi = \lim_{n\to\infty} DJ_{p+1}F_n = 0$. Tehát, a $\psi = \sum_{p=0}^{\infty} J_p \psi$ sorfejtés minden tagja nulla, így ψ is az. □

Ezután a Malliavin-deriváltat a D lezártjaként definiáljuk.

2.4.4. Definíció. (Malliavin-derivált) Legyen

$$\mathbb{D}^{1,2} = \left\{ F \in L^2(\Omega) \middle| \exists F_n \in \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{H}_p, \lim_{n\to\infty} \|F_n - F\|_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ és } \lim_{n,m\to\infty} \|DF_n - DF_m\|_{L^2(\Omega \times E)} = 0 \right\}.$$

Ha $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, akkor legyen F_n olyan sorozat ami ezt tanúsítja és $DF = \lim_{n\to\infty} DF_n$. Tehát, a Malliavin-derivált egy $\mathbb{D}^{1,2} \to L^2(\Omega \times E)$ operátor.

2.5. Skorohod-integrál

A δ divergencia operátort a D Malliavin-derivált adjungáltjaként definiáljuk. A δ operátor értelmezési tartománya

$$\mathrm{Dom}(\delta) = \left\{ \psi \in L^2(\Omega \times E) \middle| \exists c > 0, \text{ melyre } \forall F \in \mathbb{D}^{1,2}\colon \left| \langle DF, \psi \rangle_{L^2(\Omega \times E)} \right| \leq c \, \|F\|_{L^2(\Omega)} \right\}.$$

A fenti definícióban található c konstans értéke ψ-től függ. Minden $\psi \in \mathrm{Dom}(\delta)$ esetén

$$\mathbb{D}^{1,2} \ni F \mapsto \langle \psi, DF \rangle_{L^2(\Omega \times E)} \in \mathbb{R} \tag{2.10}$$

funkcionál folytonos lineáris. Mivel $\mathbb{D}^{1,2} \subset L^2(\Omega)$ sűrű, ezért a (2.10)-ben definiált funkcionál egyértelműen kiterjeszthető $L^2(\Omega)$-ra. Emlékeztetőül, $J_p : L^2(\Omega \times E) \to \mathcal{H}_p \otimes L^2(E)$ jelöli a merőleges vetítést. Mivel $D\big|_{\mathcal{H}_p} : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_{p-1} \otimes L^2(E)$ folytonos leképezés, azért az adjungáltja $\mathcal{H}_{p-1} \otimes L^2(E) \to \mathcal{H}_p$ folytonos leképezés. Más szavakkal, $\mathcal{H}_p \otimes L^2(E) \subset \mathrm{Dom}(\delta)$, minden $p \in \mathbb{N}_0^+$ esetén. A δ operátort Skorohod-integrálnak nevezzük. Végül mutatunk egy összefüggést, amely segítségével bizonyos esetekben egyszerűbben számolható a Skorohod-integrál.

2.5.1. Lemma. *Ha $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$, akkor $\delta J_p u = J_{p+1} \delta u$, és*

$$u \in \mathrm{Dom}(\delta) \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{p=0}^{\infty} \|\delta(J_p u)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} < \infty,$$

továbbá $\|\delta(J_p u)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (p+1) \, \|J_p u\|^2_{L^2(\Omega \times E)}$.

Bizonyítás. Legyen $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \langle F, J_{p+1}\delta(u) \rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle D J_{p+1} F, u \rangle_{L^2(\Omega \times E)} = \\ &= \langle DF, J_p u \rangle_{L^2(\Omega \times E)} = \\ &= \langle F, \delta(J_p u) \rangle_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

ezért

$$\langle F, J_{p+1}\delta(u) \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle F, \delta(J_p u) \rangle_{L^2(\Omega)}$$

minden $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ esetén, tehát $J_{p+1}\delta(u) = \delta(J_p u)$. Vegyük észre, hogy $J_0 \delta(u) = 0$. Tehát, a $\delta(u)$ Wiener-Itô-káosz szerinti felbontása $\sum_{p=0}^{\infty} \delta(J_p u)$, amiből adódik a feltétel szükségessége. Ha $\sum_{p=0}^{\infty} \|\delta(J_p u)\|^2_{L^2(\Omega)} < \infty$, akkor mivel $G = \sum_{p=0}^{\infty} \delta(J_p u)$ létezik, és minden $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ esetén

$$\begin{aligned} \langle DF, u \rangle_{L^2(\Omega \times E)} &= \sum_{p=0}^{\infty} \langle DF, J_p u \rangle_{L^2(\Omega \times E)} = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \langle F, \delta(J_p u) \rangle_{L^2(\Omega)} = \\ &= \langle F, G \rangle_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

tehát $G = \delta(u)$. Végül azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\|\delta(J_p u)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \sup_{F \in \mathcal{H}_{p+1}, F \neq 0} \left(\frac{\langle DF, J_p u \rangle_{L^2(\Omega \times E)}}{\|F\|_{L^2(\Omega)}} \right)^2 \leq \\
&\leq \|J_p u\|^2_{L^2(\Omega)} \sup_{F \in \mathcal{H}_{p+1}, F \neq 0} \left(\frac{\|DF\|^2_{L^2(\Omega \times E)}}{\|F\|^2_{L^2(\Omega)}} \right) = \\
&= (p+1) \|J_p u\|^2_{L^2(\Omega)} .
\end{aligned}$$

□

Igazolható, hogy ha $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ és $\varphi \in L^2(E)$, akkor $F \otimes \varphi \in \mathrm{Dom}(\delta)$, és

$$\delta(F \otimes \varphi) = F \widetilde{N}(\varphi) - \langle DF, \varphi \rangle_{L^2(E)} .$$

Ha $f \in L^2(E^{p+1})$, akkor $u = (I_p(f(\cdot, x)))_{x \in E} \in \mathrm{Dom}(\delta)$ és $\delta(u) = I_{p+1}(f)$.

3. fejezet

Lévy-féle határidős kamatláb-modell

Ebben a fejezetben egy idő-inhomogén Lévy-folyamattal meghajtott határidős kamatláb-modellt mutatunk be, majd megvizsgáljuk a *caplet* árának a piaci paraméterekre vonatkozó érzékenységét. A fejezet felépítése elsősorban a [2] és [3] cikkeket, valamint a [7] dolgozatot követi.

3.1. Pénzügyi alapfogalmak

A modellt a $[0, T^*]$ véges időhorizonton definiáljuk, ahol $T^* > 0$ tetszőleges valós szám. Legyen $(\Omega, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T^*]}, \mathbb{P})$ filtrált valószínűségi mező, és tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}$ filtráció

(i) jobbról folytonos, azaz $\forall t \in [0, T^*)$ esetén $\mathcal{F}_t = \cap_{t<s\leq T^*}\mathcal{F}_s$,

(ii) teljes, azaz $\forall t \in [0, T^*]$ esetén $A \in \mathcal{F}_t$-re, ha $\mathbb{P}(A) = 0$ és $B \subset A$, akkor $B \in \mathcal{F}_0$.

Tekintsük az egyik legalapvetőbb pénzügyi eszköz definícióját.

3.1.1. Definíció. Kötvénynek nevezzük az olyan pénzügyi termékeket, amely egységnyi pénzt fizet a tulajdonosának a $T \in [0, T^*]$ időpontban, az ún. lejárati időpontban. Tetszőleges $t \in [0, T^*]$ esetén jelölje $B(t, T)$ a kötvény árát. Ekkor a $t \mapsto B(t, T)$ ($t \in [0, T^*]$) leképezés egy nemnegatív folyamat, amely adaptált az $\mathcal{F}$ filtrációhoz, és $B(T, T) = 1$ egy valószínűséggel.

Úgy is gondolhatunk $B(t, T)$-re, mint a T-ben fizetett egységnyi összegű pénz t-beli értékére. A továbbiakban feltesszük, hogy tetszőleges $T \in [0, T^*]$ esetén létezik T lejárati idejű kötvény.

3.1.2. Definíció. Az azonnali határidős kamatláb $f_{t,T} = -\frac{\partial}{\partial T} \log B(t, T)$, amennyiben a derivált létezik.

A továbbiakban feltesszük, hogy tetszőleges $u \in [t, T^*]$ esetén az $f_{t,u}$ határidős kamatláb létezik, továbbá $B(t, T) = \exp\{-\int_t^T f_{t,u}\mathrm{d}u\}$.

3.1.3. Definíció. Az $r_t = f_{t,t}$ mennyiséget rövid kamatlábnak nevezzük.

A rövid kamatlábra gondolhatunk úgy is, mint egy kockázatmentes befektetésre, ezért a bankszámla t-beli értékének definíciója

$$B_t = \exp\left\{\int_0^t r_u \mathrm{d}u\right\}, \text{ ahol } t \in [0, T^*],$$

amennyiben létezik a rövid kamatláb.

3.1.4. Definíció. A határidős kamatláb-folyamat definíciója:

$$t \mapsto F(t,T,U) = \frac{B(t,T)}{B(t,U)} = \mathrm{e}^{-\int_t^T f_{t,u}\mathrm{d}u + \int_t^U f_{t,u}\mathrm{d}u} = \mathrm{e}^{-\int_T^U f_{t,u}\mathrm{d}u},$$

ahol $0 \le t \le T \le U \le T^*$.

3.1.5. Definíció. Az $(\Omega, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T^*]}, \mathbb{P})$ filtrált valószínűségi mezőn definiált $\mathbb{P}^*$ mértéket kockázatsemleges mértéknek, vagy ekvivalens martingál mértéknek nevezzük, ha

(i) $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$, azaz $\mathbb{P}^*$ ekvivalens $\mathbb{P}$-vel,

(ii) minden $T \in [0, T^*]$ esetén $t \mapsto \frac{B(t,T)}{B_t}$ martingál $\mathbb{P}^*$ alatt az $\mathcal{F}$ filtrációban, ahol $0 \le t \le T$.

Vegyük észre, hogy ekkor minden $0 \le t \le T \le T^*$ esetén

$$\frac{B(t,T)}{B_t} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left(\frac{1}{B_T}\middle|\mathcal{F}_t\right),$$

ahol $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}$ jelöli a $\mathbb{P}^*$ szerint vett várható értéket.

3.2. Idő-inhomogén Lévy-folyamatok

3.2.1. Definíció. Az $(L_t)_{t\ge0}$ folyamatot (idő-homogén) Lévy-folyamatnak nevezzük, ha független és stacionárius növekményű és sztochasztikusan folytonos.

Az idő-inhomogén Lévy-folyamat abban különbözik az idő-homogén Lévy-folyamattól, hogy nem követlejük meg a növekmények stacionaritását.

3.2.2. Definíció. Az $(L_t)_{t\ge0}$ folyamatot idő-inhomogén Lévy-folyamatnak nevezzük, ha független növekményű és sztochasztikusan folytonos.

3.2.3. Tétel. ([6] Theorem 13.1) *Legyen $(L_t)_{t\ge0}$ idő-inhomogén Lévy-folyamat. Ekkor az $(L_t)_{t\ge0}$ folyamatnak létezik* cádlág *modifikációja.*

A továbbiakban olyan idő-inhomogén Lévy-folyamatokat vizsgálunk, amelyekhez található olyan $(b,c,F) = (b_t, c_t, F_t)_{t\ge0}$, melyre minden $t \ge 0$ esetén

$$\mathbb{E}\left(e^{\mathrm{i}uL_t}\right) = \exp\int_0^t \left(\mathrm{i}ub_s - \frac{1}{2}u^2c_s + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{\mathrm{i}ux} - 1 - \mathrm{i}ux\mathbf{1}_{|x|\le1}\right)F_s(\mathrm{d}x)\right)\mathrm{d}s,$$

ahol $(b,c,F) = (b_t, c_t, F_t)_{t\ge0}$-ra teljesül, hogy

(i) minden $t \geq 0$ esetén $F_t(\{0\}) = 0$,

(ii) minden $t > 0$ esetén

$$\int_0^t \left(|b_s| + |c_s| + \int_{\mathbb{R}} \left(|x|^2 \wedge 1 \right) F_s(\mathrm{d}x) \right) \mathrm{d}s < \infty.$$

A $(b, c, F) = (b_t, c_t, F_t)_{t \geq 0}$ hármast lokális karakterisztikának nevezzük.

3.3. Sztochasztikus differenciálegyenletek megoldásának regularitása

Tekintsük a következő sztochasztikus differenciálegyenletet:

$$\begin{aligned} S_t - S_0 &= \int_0^t b(s, S_{s-})\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, S_{s-})\mathrm{d}W_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \varphi(s, S_{s-}, z)\widetilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z), \\ S_0 &= x, \end{aligned}$$

ahol $x \in \mathbb{R}$, $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ egy m-dimenziós standard Wiener-folyamat, $\widetilde{N}$ kompenzált Poisson-pontmérték a $[0, T] \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ szorzattéren, melynek karakterisztikus mértéke $\mu_t(\mathrm{d}z)\mathrm{d}t$. A fenti egyenletben szereplő együtthatók: $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{1\times m}$ és $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a térváltozó szerint folytonosan differenciálható leképezések korlátos deriválttal, továbbá a $(\mu_t)_{t\in[0,T]}$-re teljesül, hogy

$$\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (|z|^2 \wedge 1)\mu_t(\mathrm{d}z) \right) \mathrm{d}t < \infty \text{ és } \mu_t(\{0\}) = 0.$$

Tegyük fel, hogy létezik olyan $C > 0$ konstans, melyre minden $t \in [0, T]$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |\varphi(t, x, z)|^2 \mu_t(\mathrm{d}z) \leq C(1 + |x|^2)$$

teljesül. Tegyük fel, hogy létezik olyan $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre

(i) $\sup_{0\leq t\leq T} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |\varrho(z)|^2 \mu_t(\mathrm{d}z) < \infty$, és

(ii) létezik olyan $K > 0$ konstans, melyre minden $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}$ és $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

$$|\varphi(t, x, z) - \varphi(t, y, z)| \leq K|\varrho(z)|\,|x - y|\,.$$

3.3.1. Tétel. ([9] Theorem 17.4) *Legyen $(S_t)_{t\in[0,T]}$ a fenti differenciálegyenlet megoldása. Ekkor minden $t \in [0, T]$ esetén $S_t \in \mathbb{D}^{1,2}$, továbbá, ha $D_{r,0}$ jelöli a Wiener-folyamat szerinti*

Malliavin-deriválást, akkor

$$\begin{aligned}
D_{r,0}S_t &= \int_r^t \frac{\partial b}{\partial x}(u, S_{u-})D_{r,0}S_{u-}\mathrm{d}u + \sigma(r, S_{r-}) + \\
&+ \int_r^t \frac{\partial \sigma}{\partial x}(u, S_{u-})D_{r,0}S_{u-}\mathrm{d}W_u + \\
&+ \int_r^t \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, S_{u-}, y)D_{r,0}S_{u-}\widetilde{N}(\mathrm{d}u, \mathrm{d}y), \qquad ha\ 0 \le r \le t \\
D_{r,0}S_t &= 0, \qquad ha\ t < r \le T.
\end{aligned}$$

3.4. A határidős kamatláb-modell konstrukciója

Legyen $(\Omega, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T^*]}, \mathbb{P})$ a szokásos feltételeket teljesítő filtrált valószínűségi mező. Tegyük fel, hogy az azonnali határidős kamatláb fejlődését az alábbi sztochasztikus differenciálegyenlet írja le:

$$\mathrm{d}f_{t,T} = \alpha(t,T)\mathrm{d}t - \sigma(t,T)\mathrm{d}L_t^{T^*},$$

ahol $T \in [0, T^*]$ és $t \in [0, T]$. A fenti definícióban szereplő $\alpha : [0, T^*]^2 \to \mathbb{R}$, $\sigma : [0, T^*]^2 \to \mathbb{R}$ determinisztikus függvények, valamint $(L_t^{T^*})_{t\in[0,T^*]}$ idő-inhomogén Lévy-folyamat. Tegyük fel, hogy minden $t > T$ esetén $\alpha(t, T) = 0$ és $\sigma(t, T) = 0$. Az α-t driftnek, a σ-t pedig volatilitásnak szokás nevezni.

3.4.1. Tétel. *A kötvény diszkontált árát az alábbi formulával kaphatjuk meg:*

$$\frac{B(t,T)}{B_t} = B(0,T)\exp\left\{-\int_0^t A(s,T)\mathrm{d}s + \int_0^t \Sigma(s,T)\mathrm{d}L_s^{T^*}\right\}, \tag{3.1}$$

ahol

$$A(s,T) = \int_{s\wedge T}^T \alpha(s,u)\mathrm{d}u \ \textit{és}\ \Sigma(s,T) = \int_{s\wedge T}^T \sigma(s,u)\mathrm{d}u.$$

Bizonyítás. A bizonyítás [7] Proposition (A.1) alapján történik. Legyen $T \in [0, T^*]$ rögzített időpont. Az azonnali határidős kamatláb fejlődését definiáló sztochasztikus differenciálegyenlet alapján minden $t \in [0, T]$ és $u \in [0, t]$ esetén

$$f_{t,u} = f_{0,u} + \int_0^t \alpha(s,u)\mathrm{d}s - \int_0^t \sigma(s,u)\mathrm{d}L_s^{T^*}. \tag{3.2}$$

Ha a (3.2)-t u-szerint integráljuk a $[t, T]$-n, akkor

$$\int_t^T f_{t,u}\mathrm{d}u = \int_t^T f_{0,u}\mathrm{d}u + \int_t^T \int_0^t \alpha(s,u)\mathrm{d}s\mathrm{d}u - \int_t^T \int_0^t \sigma(s,u)\mathrm{d}L_s^{T^*}\mathrm{d}u. \tag{3.3}$$

Ha a (3.2)-ben $t = u$, majd az így kapott egyenletet u-szerint integráljuk a $[0, t]$-n, akkor

$$\int_0^t f_{u,u}\mathrm{d}u = \int_0^t f_{0,u}\mathrm{d}u + \int_0^t \int_0^u \alpha(s,u)\mathrm{d}s\mathrm{d}u - \int_0^t \int_0^u \sigma(s,u)\mathrm{d}L_s^{T^*}\mathrm{d}u.$$

Mivel $s > u$ esetén $\alpha(s,u) = 0$, és $\sigma(s,u) = 0$, így (3.3) a következő alakban írható:

$$\int_0^t f_{u,u}\mathrm{d}u = \int_0^t f_{0,u}\mathrm{d}u + \int_0^t \int_0^t \alpha(s,u)\mathrm{d}s\mathrm{d}u - \int_0^t \int_0^t \sigma(s,u)\mathrm{d}L_s^{T^*}\mathrm{d}u. \tag{3.4}$$

A (3.3) és (3.4) egyenleteket összeadva azt kapjuk, hogy

$$\int_t^T f_{t,u}\mathrm{d}u + \int_0^t f_{u,u}\mathrm{d}u = \int_0^T f_{0,u}\mathrm{d}u + \int_0^T \int_0^t \alpha(s,u)\mathrm{d}s\mathrm{d}u - \int_0^T \int_0^t \sigma(s,u)\mathrm{d}L_s^{T^*}\mathrm{d}u.$$

A sztochasztikus Fubini-tétel alapján a kettős integrálokban az integrálások sorrendje felcserélhető, így

$$\int_t^T f_{t,u}\mathrm{d}u + \int_0^t f_{u,u}\mathrm{d}u = \int_0^T f_{0,u}\mathrm{d}u + \int_0^t \int_0^T \alpha(s,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s - \int_0^t \int_0^T \sigma(s,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}L_s^{T^*}.$$

Mivel $B(t,T) = \exp\{-\int_t^T f_{t,u}\mathrm{d}u\}$ és $B_t = \exp\{\int_0^t f_{u,u}\mathrm{d}u\}$, ezért az

$$A(s,T) = \int_{s\wedge T}^T \alpha(s,u)\mathrm{d}u \text{ és } \Sigma(s,T) = \int_{s\wedge T}^T \sigma(s,u)\mathrm{d}u$$

választással azt kapjuk, hogy

$$-\log B(t,T) + \log B_t = -\log B(0,T) + \int_0^t A(s,T)\mathrm{d}s - \int_0^t \Sigma(s,T)\mathrm{d}L_s^{T^*}.$$

□

3.4.2. Feltétel. *Létezik $M, \varepsilon > 0$, hogy*

(i) $\forall u \in [-(1+\varepsilon)M, (1+\varepsilon)M]$ *esetén*

$$\int_0^{T^*} \int_{\{|x|>1\}} \exp(ux) F_t^{T^*}(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t < \infty,$$

(ii) *minden $0 \le s \le T \le T^*$ esetén $|\Sigma(s,T)| \le M$.*

3.4.3. Tétel. ([8] Proposition 1.9) *Legyen $T \in [0, T^*]$, és $t \in [0, T]$. Ha az $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ függvényre minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén $|\Re f(x)| \le M$, akkor*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left\{\int_t^T f(s)\mathrm{d}L_s^{T^*}\right\}\right) = \exp\left\{\int_t^T \theta_s\left(f(s)\right)\mathrm{d}s\right\}.$$

3.4.4. Tétel. *A 3.4.2. Feltétel teljesülése mellett, ha minden* $0 \le s \le T \le T^*$ *esetén*

$$A(s,T) = \theta_s(\Sigma(s,T)),$$

teljesül, akkor a diszkontált kötvény árak martingálok, tehát a $\mathbb{P}$ *mérték kockázatsemleges.*

Bizonyítás. Rögzített $t \in [0,T^*]$ esetén legyen

$$X_t = \int_0^t \Sigma(s,T)\mathrm{d}L_s^{T^*}.$$

Mivel $(L_t^{T^*})_{t\in[0,T^*]}$ független növekményű, és Σ determinisztikus, ezért $(X_t)_{t\in[0,T^*]}$ is független növekményű. A 3.4.2. Feltétel esetén $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{X_t}}{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{X_t})}$ $(t \in [0,T^*])$ martingál $\mathcal{F}$-ben $\mathbb{P}$ alatt, így alkalmazható a 3.4.3. Tétel, tehát

$$\mathbb{E}(\mathrm{e}^{X_t}) = \exp\left\{\int_0^t \theta_s(\Sigma(s,T))\mathrm{d}s\right\}.$$

Ekkor a

$$t \mapsto \exp\left\{-\int_0^t \theta_s(\Sigma(s,T))\mathrm{d}s + \int_0^t \Sigma(s,T)\mathrm{d}L_s^{T^*}\right\} \ (t \in [0,T^*])$$

leképezés martingál $\mathcal{F}$-ben $\mathbb{P}$ alatt. Azt kaptuk, hogy ha

$$A(s,T) = \theta_s(\Sigma(s,T))$$

minden $0 \le s \le T \le T^*$-ra, akkor $\left(\frac{B(t,T)}{B_t}\right)_{t\in[0,T^*]}$ martingál $\mathcal{F}$-ben $\mathbb{P}$ alatt, tehát a $\mathbb{P}$ mérték kockázatsemleges. $\square$

A továbbiakban tegyük fel, hogy minden $0 \le s \le T \le T^*$ esetén $A(s,T) = \theta_s(\Sigma(s,T))$.

3.4.5. Definíció. Legyen $T \in [0,T^*]$ tetszőleges időpont. A $\mathbb{P}_T$ valószínűségi mértéket a T időponthoz tartozó kockázatsemleges mértéknek nevezzük, ha

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_T}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = \frac{1}{B_T B(0,T)}.$$

3.4.6. Megjegyzés. Legyen $T' \in [0,T]$ rögzített időpont. Ha a T'-ben lejáró kötvény ára a t időpontban $B(t,T')/B(t,T)$ $(t \in [0,T'])$, akkor ezen árak diszkontált változatai martingálok $\mathbb{P}_T$ alatt.

A továbbiakban legyen $(L_t^{T^*})_{t\in[0,T^*]}$ 0-ból induló idő-inhomogén Lévy-folyamat, melynek lokális karakterisztikája $(b_t, c_t, F_t)_{t\in[0,T^*]}$. Ekkor

$$L_t^{T^*} = \int_0^t b_s^{T^*}\mathrm{d}s + \int_0^t \sqrt{c_s}\mathrm{d}W_s^{T^*} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x(\mu - \nu^{T^*})(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x),$$

ahol $(W_t^{T^*})_{t\in[0,T^*]}$ Brown-mozgás $\mathbb{P}_{T^*}$ alatt, és $\mu-\nu^{T^*}$ az L^{T^*} véletlen ugrásainak $\mathbb{P}$-kompenzált változata, továbbá $\nu^{T^*}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = F_t^{T^*}(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t$ a μ mérték $\mathbb{P}$-kompenzátora. Tetszőleges $t \in [0,T^*]$ esetén legyen θ_t az $L_t^{T^*}$ kumuláns generáló függvénye, azaz

$$\theta_t(z) = zb_t^{T^*} + \frac{z^2}{2}c_t + \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{zx} - 1 - zx)F_t^{T^*}(\mathrm{d}x),$$

ahol $z \in \mathbb{C}$.

Legyen $T \in [0,T^*]$ rögzített időpont, és jelölje $\mathbb{P}_T$ a T időponthoz tartozó kockázatsemleges mértéket. A kockázatsemleges mérték. és a (3.1) egyenlet alapján

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_T}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = \frac{1}{B_T B(0,T)} = \exp\left\{-\int_0^T A(s,T)\mathrm{d}s + \int_0^T \Sigma(s,T)\mathrm{d}L_s^{T^*}\right\}.$$

Minden $t \in [0,T]$ esetén, a fenti egyenletet az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrára megszorítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_T}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{1}{B_T B(0,T)}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{B(t,T)}{B_t B(0,T)} = \\ &= \exp\left\{-\int_0^t A(s,T)\mathrm{d}s + \int_0^t \Sigma(s,T)\mathrm{d}L_s^{T^*}\right\}.\end{aligned}$$

3.4.7. Tétel. ([7] Corollary 3.1) *Ha $\mathbb{P}_T$ jelöli a $T \in [0,T^*]$ időhöz tartozó kockázatsemleges mértéket, akkor az $(L_t^{T^*})_{t\in[0,T^*]}$ folyamat lokális karakterisztikája $\mathbb{P}_T$ alatt:*

$$\begin{aligned} b_s^T &= b_s^{T^*} + c_s\Sigma(s,T) + \int_{\mathbb{R}} x(\mathrm{e}^{\Sigma(s,T)x} - 1)F_t^{T^*}(\mathrm{d}x), \\ c_s^T &= c_s, \\ F_s^T(\mathrm{d}x) &= \mathrm{e}^{\Sigma(s,T)x}F_s^{T^*}(\mathrm{d}x), \end{aligned}$$

továbbá $\mathbb{P}_T$ alatt $W_t = W_t^T - \int_0^t \sqrt{c_s}\Sigma(s,T^*)\mathrm{d}s$, ahol $(W_t^T)_{t\in[0,T^*]}$ Brown-mozgás $\mathbb{P}_T$ alatt.

A Lévy-féle határidős kamatláb-modellben feltesszük, hogy a piacon $n > 0$ kötvény érhető el. A kötvények lejárati időpontjai legyenek a $0 < T_1 < \cdots < T_n = T^*$ diszkrét időpontok, és a jelölések egyszerűsítése végett legyen $T_0 = 0$. Jelölje $\delta_k = T_{k+1} - T_k$ a rögzített időpontok között eltelt időt, ahol $k = 0,1,\ldots,n-1$. Jelölje $B(t,T_i)$ a T_i időpontban lejáró kötvény árát t-ben, ahol $t \in [0,T_i]$ és $i = 1,2,\ldots,n$.

A határidős kamatláb-modell Lévy-féle modelljében az

$$F(t,T_i,T_{i+1}) = \frac{B(t,T_i)}{B(t,T_{i+1})},$$

folyamatot modellezzük, ahol $i = 1,2,\ldots,n-1$, és rögzített i esetén $t \in [0,T_i]$.

Legyen $(L_t^{T^*})_{t\in[0,T^*]}$ 0-ból induló idő-inhomogén Lévy-folyamat az $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_{T^*})$ valószínűségi mezőn, és tegyük fel, hogy a lokális karakterisztikája $(b_t^{T^*}, c_t, F_t^{T^*})_{t\in[0,T^*]}$.

Az $F(t, T_{n-1}, T^*)$ $(t \in [0, T_{n-1}])$ folyamatot modellezzük

$$F(t, T_{n-1}, T^*) = F(0, T_{n-1}, T^*) \exp\left\{\int_0^t \lambda(s, T_{n-1}) \mathrm{d}L_s^{T^*}\right\}$$

alakban, ahol a $\lambda(\cdot, T_{n-1})$ determinisztikus folytonos függvény. Célunk olyan $\mathbb{P}_{T_{n-1}}$ mérték konstruálása, amely alatt a $t \mapsto F(t, T_{n-1}, T_n)$ $(t \in [0, T_{n-1}])$ leképezés martingál $\mathcal{F}$-ben $\mathbb{P}_{T_{n-1}}$ alatt.

Ezután a T^* időponthoz tartozó kockázatsemleges mértéket kicseréljük a T_{n-1}-hez tartozóra, és az $F(t, T_{n-2}, T_{n-1})$ $(t \in [0, T_{n-2}])$ folyamatot modellezzük

$$F(t, T_{n-2}, T_{n-1}) = F(0, T_{n-2}, T_{n-1}) \exp\left\{\int_0^t \lambda(s, T_{n-2}) \mathrm{d}L_s^{T_{n-1}}\right\}$$

alakban. A fenti egyenletben $(L_t^{T_{n-1}})_{t\in[0,T^*]}$ 0-ból induló idő-inhomogén Lévy-folyamat, amely az $(L_t^{T^*})_{t\in[0,T^*]}$ folyamattól csak a driftben különbözik. Az $(L_t^{T_{n-1}})_{t\in[0,T^*]}$ folyamatban a driftet úgy kell megválasztanunk, hogy $F(t, T_{n-2}, T_{n-1})$ $(t \in [0, T_{n-2}])$ martingál legyen a T_{n-1}-hez tartozó kockázatsemleges mérték alatt. Ezután a fenti konstrukciót iteráljuk.

3.4.8. Feltétel. *Létezik $M, \varepsilon > 0$, hogy*

(i) $\forall u \in [-(1+\varepsilon)M, (1+\varepsilon)M]$ *esetén*

$$\int_0^{T^*} \int_{\{|x|>1\}} \exp(ux) F_t^{T^*}(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t < \infty,$$

(ii) *a $B(0, T_i) > 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ értékek adottak,*

(iii) *minden T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ lejárati időponthoz adott egy $\lambda(\cdot, T_i) : [0, T^*] \to \mathbb{R}$ determinisztikus folytonos függvény, melyekre teljesül, hogy*

$$\left|\sum_{j=1}^{i} \lambda(s, T_{n-j})\right| \leq M,$$

ahol $s \in [0, T^*]$ és $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Feltehető, hogy minden $i = 1, 2, \ldots, n-1$ esetén $\lambda(s, T_i) = 0$, ha $s > T_i$.

Ha a fenti feltételek teljesülnek, akkor $(L_t^{T^*})_{t\in[0,T^*]}$ olyan szemimartingál, melynek kanonikus reprezentációja

$$L_t^{T^*} = \int_0^t b_s^{T^*} \mathrm{d}s + \int_0^t \sqrt{c_s} \mathrm{d}W_s^{T^*} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x(\mu - \nu^{T^*})(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x).$$

A folyamat konstrukcióját kezdjük a legtávolabbi lejárati időponttal, és tegyük fel, hogy

$$F(t, T_{n-1}, T^*) = F(0, T_{n-1}, T^*) \exp\left\{\int_0^t \lambda(s, T_{n-1}) \mathrm{d}L_s^{T^*}\right\}.$$

Annak érdekében, hogy az $F(\cdot, T_{n-1}, T^*)$ folyamat martingál legyen $\mathcal{F}$-ben $\mathbb{P}_{T^*}$ alatt, úgy kell megválasztanunk $(b_t^{T^*})_{t\in[0,T^*]}$-t, hogy teljesüljön az alábbi egyenlőség:

$$\int_0^t \lambda(s, T_{n-1}) b_s^{T^*} \mathrm{d}s =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^t c_s \lambda^2(s, T_{n-1})\mathrm{d}s - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\mathrm{e}^{x\lambda(s,T_{n-1})} - 1 - x\lambda(s, T_{n-1})\right) \nu^{T^*}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x).$$

Ha a T^*-hoz tartozó kockázatsemleges mértéket kicseréljük a T_{n-1}-hez tartozóra, akkor az $(L_t^{T^*})_{t\in[0,T^*]}$ folyamat lokális karakterisztikája megváltozik. Ekkor $\mathbb{P}_{T_{n-1}}$ mérték alatt minden $t \in [0, T^*]$ esetén

$$L_t^{T^*} = \int_0^t \widetilde{b}_s \mathrm{d}s + \int_0^t \sqrt{c_s}\mathrm{d}W_s^{T_{n-1}} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x(\mu - \nu^{T_{n-1}})(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x),$$

ahol

$$W_t^{T_{n-1}} = W_t^{T^*} - \int_0^t \sqrt{c_s}\lambda(s, T_{n-1})\mathrm{d}s,$$

továbbá

$$\nu^{T_{n-1}}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) = \mathrm{e}^{x\lambda(s,T_{n-1})} F_s(\mathrm{d}x),$$

és végül $(\widetilde{b}_t)_{t\in[0,T^*]}$ a drift. Az $F(t, T_{n-2}, T_{n-1})$ $(t \in [0, T_{n-2}])$ folyamatot modellezzük az

$$F(t, T_{n-2}, T_{n-1}) = F(0, T_{n-2}, T_{n-1}) \exp\left\{\int_0^t \lambda(s, T_{n-2})\mathrm{d}L_s^{T_{n-1}}\right\}$$

alakban, ahol $(L_t^{T_{n-1}})_{t\in[0,T^*]}$ 0-ból induló idő-inhomogén Lévy-folyamat, amely csupán a driftben különbözik az $(L_t^{T^*})_{t\in[0,T^*]}$ folyamattól. Annak érdekében, hogy az $F(\cdot, T_{n-2}, T_{n-1})$ folyamat martingál legyen $\mathcal{F}$-ben $\mathbb{P}_{T_{n-1}}$ alatt, úgy kell megválasztanunk $(b_t^{T_{n-1}})_{t\in[0,T^*]}$-t, hogy teljesüljön az alábbi egyenlőség:

$$\int_0^t \lambda(s, T_{n-2}) b_s^{T_{n-1}} \mathrm{d}s =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^t c_s \lambda^2(s, T_{n-2})\mathrm{d}s - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\mathrm{e}^{x\lambda(s,T_{n-2})} - 1 - x\lambda(s, T_{n-2})\right) \nu^{T_{n-1}}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x).$$

Ezután a fenti konstrukciót iteráljuk. Azt kapjuk, hogy tetszőleges $i = 1, 2, \ldots, n-1$ esetén

$$F(t, T_i, T_{i+1}) = F(0, T_i, T_{i+1}) \exp\left\{\int_0^t \lambda(s, T_i)\mathrm{d}L_s^{T_{i+1}^*}\right\}.$$

A $\mathbb{P}_{T_{i+1}}$ mérték alatt

$$L_t^{T_{i+1}} = \int_0^t b_s^{T_{i+1}}\mathrm{d}s + \int_0^t \sqrt{c_s}\mathrm{d}W_s^{T_{i+1}} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x(\mu - \nu^{T_{i+1}})(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x),$$

ahol

$$
\begin{aligned}
W_t^{T_{i+1}} &= W_t^{T^*} - \int_0^t \sqrt{c_s} \sum_{j=1}^{i} \lambda(s, T_{n-j}) \mathrm{d}s, \qquad (3.5)\\
\nu^{T_{i+1}}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) &= \exp\left\{ x \sum_{j=1}^{i} \lambda(s, T_{n-j}) \right\} \nu^{T^*}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x),
\end{aligned}
$$

a $(b_t^{T_{i+1}})_{t\in[0,T^*]}$ driftre teljesül, hogy

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \lambda(s, T_i) b_s^{T_{i+1}} \mathrm{d} = \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^t c_s \lambda^2(s, T_i) \mathrm{d}s - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\mathrm{e}^{x\lambda(s,T_i)} - 1 - x\lambda(s, T_i) \right) \nu^{T_{i+1}}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x),
\end{aligned}
$$

és végül

$$
F_s^{T_{i+1}}(\mathrm{d}x) = \exp\left\{ x \sum_{j=1}^{i} \lambda(s, T_{n-j}) \right\} F_s(\mathrm{d}x).
$$

A 3.4.2. Feltétel miatt minden $i = 1, 2, \ldots, n-1$ esetén

$$
\left| \sum_{j=1}^{i} \lambda(s, T_{n-j}) \right| \leq M,
$$

ahol $s \in [0, T^*]$, ezért

$$
\int_0^{T_{i+1}} \int_{|x|>1} |x| \exp\left\{ \sum_{j=1}^{i} x\lambda(s, T_{n-j}) \right\} F_s(\mathrm{d}x) \mathrm{d}s < \infty.
$$

3.5. Érzékenységvizsgálat

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy a Lévy-féle határidős kamatláb-modellben a *caplet* ára mennyire érzékeny a LIBOR kamatláb megváltozására.

Mivel a *floor* ára a *put-call* paritás segítségével kiszámítható a *cap* árából, és viszont, így elegendő az egyiket meghatározni. A *cap* a LIBOR kamatlábra vonatkozó *call* opciók sorozata, amelyeket *caplet*-nek nevezünk. Legyen K a rögzített kamatláb, és T_i a *caplet* lejárati ideje. Legyen $\delta_i = T_{i+1} - T_i$, ahol $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Ekkor a kifizetési függvény

$$
\delta_i (L(T_i, T_i) - K)^+,
$$

ahol a kifizetés a T_{i+1} időpontban történik, és a fenti képletben lévő $L(T_i, T_i)$ mennyiség a LIBOR kamatláb. A LIBOR kamatláb definíciója, és a határidős kamatlábbal való kapcsolata:

$$
L(t, T_i) = \frac{1}{\delta_i} \left(F(t, T_i, T_{i+1}) - 1 \right) = \frac{1}{\delta_i} \left(\frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+1})} - 1 \right).
$$

Jelölje $C(T_i, K)$ a *caplet* árát. Ekkor

$$C(T_i, K) = B(0, T_i)\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_{i+1}}}\left(L(T_i, T_i) - K)^+\right).$$

A határidős kamatláb és a LIBOR kamatláb között fennálló összefüggés alapján a *caplet* ára

$$C(T_i, K) = \delta_i B(0, T_i)\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_{i+1}}}\left[\left(F(T_i, T_i, T_{i+1}) - \widetilde{K}_i\right)^+\right],$$

ahol $\widetilde{K}_i = 1 + \delta_i K$.

Legyen $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ rögzített index, és tekintsük az $(F(t, T_i, T_{i+1}))_{t\in[0,T_i]}$ határidős kamatláb-folyamatot. A továbbiakban jelölje

$$Y(t, T_i, T_{i+1}) = \frac{\partial_1 F(t, T_i, T_{i+1})}{\partial_1 F(0, T_i, T_{i+1})}$$

az ún. variációs folyamatot, ahol $t \in [0, T_i]$.

3.5.1. Tétel. *Az $(F(t, T_i, T_{i+1}))_{t\in[0,T_i]}$ határidős kamatláb-folyamatra teljesül, hogy tetszőleges $t \in [0, T_i]$ esetén $F(t, T_i, T_{i+1}) \in \mathbb{D}^{1,2}$, és a Malliavin-derivált hatása*

$$D_{r,0}F(t, T_i, T_{i+1}) = Y(t, T_i, T_{i+1})Y(r-, T_i, T_{i+1})^{-1}F(r-, T_i, T_{i+1})\lambda(r, T_i)\sqrt{c_r}\mathbf{1}_{\{r\leq t\}}.$$

Bizonyítás. A tétel a [9] Theorem 17.4 következménye. □

Jelölje $C(T_i, K)$ az előző szakaszban látott *caplet* árát. A ún. *Delta* definíciója

$$\Delta\left(F(0, T_i, T_{i+1})\right) = \frac{\partial_1 C(T_i, K)}{\partial_1 F(0, T_i, T_{i+1})}.$$

Ebből már megkapható a LIBOR kamatláb szerinti derivált is, azaz

$$\begin{aligned}
\Delta\left(L(0, T_i)\right) &= \frac{\partial_1 C(T_i, K)}{\partial_1 L(0, T_i)} = \\
&= \Delta\left(F(0, T_i, T_{i+1})\right)\frac{\partial_1 F(0, T_i, T_{i+1})}{\partial_1 L(0, T_i^*)} = \\
&= \delta_i \Delta\left(F(0, T_i, T_{i+1})\right),
\end{aligned}$$

hiszen

$$L(0, T_i) = \delta_i\left(F(0, T_i, T_{i+1}) - 1\right).$$

Tekintsük a $\widetilde{T}_i$ függvényosztályt, melynek definíciója:

$$\widetilde{T}_i = \left\{h_i \in \mathbb{L}^2([0, T_i]) \,\middle|\, \int_0^{T_i} h_i(u)\mathrm{d}u = 1\right\}.$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\Lambda^i(s) = \sum_{j=1}^{i} \lambda(s, T_{n-j}),$$

ahol $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

3.5.2. Tétel. *Tetszőleges $h_i \in \widetilde{T}_i$ esetén*

$$\begin{aligned}\Delta\left(F(0,T_i,T_{i+1})\right) &= \frac{B(0,T_{i+1})}{F(0,T_i,T_{i+1})}\mathbb{E}_{\mathbb{P}_T}\Bigg[\left(F(T_i,T_i,T_{i+1})-\widetilde{K}_i\right)^+ \times \\ &\times \exp\left(\int_0^{T^*}\Lambda^{n-i+1}(s)\mathrm{d}L_s^{T^*}-\int_0^{T^*}\theta_s(\Lambda^{n-i+1}(s))\mathrm{d}s\right)\times \\ &\times \left(\int_0^{T_i}\frac{h_i(u)}{\lambda(u,T_i)\sqrt{c_u}}\mathrm{d}W_u^{T^*}-\int_0^{T_i}\frac{h_i(u)\Lambda^{n-i+1}(u)}{\lambda(u,T_i)}\mathrm{d}u\right)\Bigg].\end{aligned}$$

Bizonyítás. A tételt általánosabb kifizetés-függvényekre bizonyítjuk. Legyen $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lokálisan integrálható függvény, amelyre teljesül, hogy

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_{i+1}}}\left[H\left(F(T_i,T_i,T_{i+1})\right)^2\right]<\infty.$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\Delta_H\left(F(0,T_i,T_{i+1})\right)=\frac{\partial_1\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_{i+1}}}\left[H\left(F(T_i,T_i,T_{i+1})\right)\right]}{\partial_1 F(0,T_i,T_{i+1})}.$$

Először tegyük fel, hogy H folytonosan differenciálható, és kompakt tartójú. Ebben az esetben a deriválás és a várható érték felcserélhető, így

$$\begin{aligned}\Delta_H\left(F(0,T_i,T_{i+1})\right) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_{i+1}}}\left[H'\left(F(T_i,T_i,T_{i+1})\right)\frac{\partial_1 F(T_i,T_i,T_{i+1})}{\partial F(0,T_i,T_{i+1})}\right]= \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_{i+1}}}\left[H'\left(F(T_i,T_i,T_{i+1})\right)Y(T_i,T_i,T_{i+1})\right].\end{aligned}$$

A 3.5.1. Tétel alapján, minden $h_i\in\widetilde{T}_i$ függvény esetén

$$Y(T_i,T_i,T_{i+1})=\int_0^{T_i}D_{u,0}F(T_i,T_i,T_{i+1})\frac{h_i(u)Y(u-,T_i,T_{i+1})}{F(u-,T_i,T_{i+1})\lambda(u,T_{i+1})\sqrt{c_u}}\mathrm{d}u.$$

A lánc-szabály ([10] Proposition 4.8) alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\Delta\left(F(0,T_i^*,T_{i-1}^*)\right)= \\ &=\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_{i+1}}}\left[\int_0^{T_i}H'\left(F(T_i,T_i,T_{i+1})\right)D_{u,0}F(T_i,T_i,T_{i+1})\times\frac{h_i(u)Y(u-,T_i,T_{i+1})}{F(u-,T_i,T_{i+1})\lambda(u,T_i)\sqrt{c_u}}\mathrm{d}u\right]= \\ &=\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_{i+1}}}\left[\int_0^{T_i}D_{u,0}H\left(F(T_i,T_i,T_{i+1})\right)\times\frac{h_i(u)Y(u-,T_i,T_{i+1})}{F(u-,T_i,T_{i+1})\lambda(u,T_i)\sqrt{c_u}}\mathrm{d}u\right]= \\ &=\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_{i+1}}}\left[\int_0^{T_i}\int_{\mathbb{R}}D_{u,x}H\left(F(T_i,T_i,T_{i+1})\right)\times\frac{h_i(u)Y(u-,T_i,T_{i+1})}{F(u-,T_i,T_{i+1})\lambda(u,T_i)\sqrt{c_u}}\delta_0(\mathrm{d}x)\mathrm{d}u\right],\end{aligned}$$

ahol δ_0 jelöli a 0-ra koncentrált Dirac-mértéket. A Skorohod-integrál definíciója alapján

$$\Delta_H\left(F(0,T_i,T_{i+1})\right)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_{i+1}}}\left[H\left(F(T_i,T_i,T_{i+1})\right)\delta\left(\frac{h_i(\cdot)Y(\cdot-,T_i,T_{i+1})\delta_0(\cdot)}{F(\cdot-,T_i,T_{i+1})\lambda(\cdot,T_i)\sqrt{c}}\right)\right].$$

Mivel

$$\left(\frac{h_i(\cdot)Y(\cdot-,T_i,T_{i+1})\delta_0(\cdot)}{F(\cdot-,T_i,T_{i+1})\lambda(\cdot,T_i)\sqrt{c}}\right)_{0\le u\le T_i}$$

előrejelezhető folyamat, így a Skorohod-integrál egybeesik az Itô-integrállal, tehát

$$\Delta_H\left(F(0,T_i,T_{i+1})\right)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_{i+1}}}\left[H\left(F(T_i,T_i,T_{i+1})\right)\int_0^{T_i}\frac{h_i(u)Y(u-,T_i,T_{i+1})\mathrm{d}W_u^{T_{i+1}}}{F(u-,T_i,T_{i+1})\lambda(u,T_i)\sqrt{c}}\right].$$

A [9] Lemma 12.28 alapján a fenti összefüggés igaz minden olyan lokálisan integrálható H függvényre, melyre

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_{i+1}}}\left[H\left(F(T_i,T_i,T_{i+1})\right)^2\right]<\infty.$$

Ha a H függvény megegyezik a *caplet* kifizetési függvényével, azaz

$$H\left(F(T_i,T_i,T_{i+1})\right)=B(0,T_{i+1})\left(F(T_i,T_i,T_{i+1})-\widetilde{K}_i\right)^+,$$

akkor a *caplet* árának, tehát a $C(T_i,K)$ várható értékének a deriváltja, az $F(0,T_i,T_{i+1})$ kezdeti érték mellett

$$\begin{aligned}&\Delta\left(F(0,T_i,T_{i+1})\right)=\\&=B(0,T_{i+1})\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_{i+1}}}\left[\left(F(T_i,T_i,T_{i+1})-\widetilde{K}_i\right)^+\int_0^{T_i}\frac{h_i(u)Y(u-,T_i,T_{i+1})\mathrm{d}W_u^{T_{i+1}}}{F(u-,T_i,T_{i+1})\lambda(u,T_i)\sqrt{c}}\right].\end{aligned}$$

Mivel

$$Y(u-,T_i,T_{i+1})=\frac{F(u-,T_i,T_{i+1})}{F(0,T_i,T_{i+1})},$$

ezért

$$\Delta\left(F(0,T_i,T_{i+1})\right)=\frac{B(0,T_{i+1})}{F(0,T_i,T_{i+1})}\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_{i+1}}}\left[\left(F(T_i,T_i,T_{i+1})-\widetilde{K}_i\right)^+\int_0^{T_i}\frac{h_i(u)\mathrm{d}W_u^{T_{i+1}}}{\lambda(u,T_i)\sqrt{c}}\right].$$

A (3.5) összefüggés alapján

$$W_t^{T_{i+1}}=W_t^{T^*}-\int_0^t\Lambda^{n-i}(s)\sqrt{c_s}\mathrm{d}s,$$

ezért

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{T_{i+1}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{T^*}}=\exp\left\{\int_0^{T^*}\Lambda^{n-i+1}(s)\mathrm{d}L_s^{T^*}-\int_0^{T^*}\theta_s\left(\Lambda^{n-i+1}(s)\right)\mathrm{d}s\right\},$$

tehát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Delta\left(F(0,T_i,T_{i+1})\right)\;=\;&\frac{B(0,T_{i+1})}{F(0,T_i,T_{i+1})}\mathbb{E}_{\mathbb{P}_T}\Bigg[\left(F(T_i,T_i,T_{i+1})-\widetilde{K}_i\right)^+\times\\&\times\;\exp\left(\int_0^{T^*}\Lambda^{n-i+1}(s)\mathrm{d}L_s^{T^*}-\int_0^{T^*}\theta_s(\Lambda^{n-i+1}(s))\mathrm{d}s\right)\times\\&\times\;\left(\int_0^{T_i}\frac{h_i(u)}{\lambda(u,T_i)\sqrt{c_u}}\mathrm{d}W_u^{T^*}-\int_0^{T_i}\frac{h_i(u)\Lambda^{n-i+1}(u)}{\lambda(u,T_i)}\mathrm{d}u\right)\Bigg].\end{aligned}$$

□

Irodalomjegyzék

[1] Ernst Eberlein, Kathrin Glau és Antonis Papapantoleon. *Analysis of Fourier transform valuation formulas and applications,* Applied Mathematical Finance 17(3): 211-240, 2010.

[2] Ernst Eberlein, M'hamed Eddhabi és Sidi Mohamed Lalaoui Ben Cherif. *Computation of Greeks in LIBOR models driven by time-inhomogeneous Lévy Processes,* Preprint, 2015.

[3] Ernst Eberlein, M'hamed Eddhabi és Sidi Mohamed Lalaoui Ben Cherif. *Option pricing and sensitivity analysis in the Lévy forward process model,* Preprint, 2015.

[4] Ernst Eberlein, Fehmi Özkan. *The Lévy LIBOR model,* Finance and Stochastics 9: 327-348, 2005.

[5] Eric Fournié, Jean-Michel Lasry, Jerôme Lebuchoux, Pierre-Louise Lions, Nizar Touzi. *Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance,* Finance and Stochastics 3(4): 391-412, 1999.

[6] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*, Springer 1997.

[7] Demeter Kiss. *Lévy Market Models with Applications to Interest Rate Derivative Valuation*, Thesis for M.Sc. degree, 2010.

[8] Wolfgang Kluge. *Time-inhomogeneous Lévy Processes in interest rate and credit risk models,* PhD Dissertation, 2005.

[9] Giulia Di Nunno, Bernt Øksendal és Frank Proske. *Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance,* Springer 2008.

[10] Aleh Yablonski. *The calculus of variations for processes with independent increments.* Rocky Mountain Journal of Mathematics 38(2): 669-701, 2008.