Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Fazekas Karen Krisztina

Frakcionális folyamatok paraméterbecslése

Alkalmazott matematika Msc szakdolgozat

Témavezető:

Arató Miklós
Valószínűségelméleti és Statisztika tanszék

Budapest, 2017

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Arató Miklósnak, hogy elvállalta a konzulensi teendőket, és mindig rendelkezésemre állt.

Köszönettel tartozom még családomnak, férjemnek, barátaimnak a lelki támogatásért, hogy hozzájárultak a munkám sikerességéhez.

Tartalomjegyzék

Bevezetés **4**

1. Frakcionális folyamatok **6**
1.1. Frakcionális Brown-mozgás 6
1.2. Kevert frakcionális Brown-mozgás 8
1.3. Klasszikus Ornstein-Uhlenbeck folyamat 9
1.4. Frakcionális Orstein-Uhlenbeck 11
1.5. Kevert frakcionális Ornstein-Uhlenbeck 14

2. Folyamatok szimulációja **15**

3. Paraméterbecslések **19**
3.1. A várható érték becslése, diszkrét eset 19
3.2. A várható érték becslése, folytonos eset 24
3.3. Szigma becslése, diszkrét eset 29
3.4. Szigma becslése, folytonos eset 31
3.5. Szigma és theta becslése Le Breton alapján 35

Összefoglalás **37**

Irodalomjegyzék **38**

Bevezetés

Talán a legismertebb frakcionális folyamat a frakcionális Brown-mozgás, amely az egyik alapkövét képezi ennek a diplomamunkának. A frakcionális Brown-mozgás egyik jellegzetes tulajdonsága, hogy rendelkezik egy Hust paraméterrel (H). Ezt H. E. Hurst brit hidrológusról neveztek el, aki 1951-ben a Nílus vízszintingadozását vizsgálta. A megfigyelések alapján a H paramétert úgy interpretálta, hogy jellemezni tudja az ingadozás mértékének irregularitását.([1])

A H Hurst együttható 0 és 1 közötti, és $H = 0,5$ azoknál a folyamatoknál, amelyeknek független a növekményük. A H paraméter becslésére alkotta meg az R/S analízist, amellyel a $H = 0,91$ értéket kapta meg a Nílus vízszintingadozására. Ebből arra lehet következni, hogy a folyamat növekményei közt pozitív korreláció áll fenn, azaz egy áradás után nagyobb eséllyel következik be még egy. A vízszintingadozáson kívül alkalmazzák még hidrológiában a hőmérséklet és az áramlás nagyságának modellezésére is.

Frakcionális folyamatoknál a frakcionális elnevezés arra utal, hogy a folyamatok trajektóriái törtrendű dimenzióval rendelkeznek. Törtrendű dimenzió alatt Hausdorff-dimenziót értünk, ami a frakcionális Brown-mozgás esetében 1 valószínűséggel egyenlő $2 - H$-val.([2]) Ez összefüggésben áll a Hölder-folytonossággal. Mivel $0 < H \leq 1$, ezért $1 \leq 2 - H < 2$, tehát a folyamat trajektóriáira gondolhatunk úgy, mint egy 1 és 2 dimenzió közötti objektumra. A klasszikus Brown-mozgás Hausdorff-dimenziója 1,5.

A Hausdorff-dimenzió a fraktálok témakörében használatos, a frakcionális Brown-mozgás trajektóriájára pedig tekinthetünk fraktálként az önhasonlósági tulajdonság miatt. Ahogy a fraktálok témakörénél, itt is előkerül Mandelbrot neve, ugyanis egy Van Mess-szel közös publikációjában megkonstruáltak egy olyan folyamatot, ami eleget tesz a frakcionális Brow-mozgás definíciójának.

Az önhasonlósági tulajdonsághoz kapcsolódik a hosszú emlékezetű folyamatok témaköre is. A későbbiekben kimondjuk, hogy a frakcionális Brown-mozgás hosszú emlékezetű. Ez a tulajdonság gyakran előfordul makroökonómiai és pénzügyi folyamatok modellezésénél.([3]) Pénzügyi folyamatok modellezésére alkalmas lehet még a kevert frakcionális Brown-mozgás is, ami tovább általánosítja a frakcionális Brown-mozgás fogalmát.([4])

Az Ornstein-Uhlenbeck folyamatot széles körben alkalmazzák a pénzügyi folyamatok modellezésére. Ha ezt tovább általánosítjuk frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamattá, akkor a folyamat hosszú emlékezetűvé válik, és ezzel más körben is alkalmazhatóvá válik. Továbbá zajnak tekinthetjük a kevert frakcionális Brown-mozgást is, ekkor megkapjuk a kevert frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamatot.

A dolgozat során ismertnek tekintem a sztochasztikus folyamatok alapfogalmait, például a stacionaritás fogalmát és a Brown-mozgás tulajdonságait.

A dolgozat első fejezetében ismertetem a szakdolgozatban felhasznált sztochasztikus folyamatok definícióját és alaptulajdonságait. Itt kerül elő a Brown-mozgás két általánosítása, a frakcionális Brown-mozgás, illetve a kevert frakcionális Brown-mozgás (ábráknál az fBM, illetve $kfBM$ rövidítéssel jelölve). Mindkettő folyamatnál vizsgáltam, hogy az általánosítás következtében milyen tulajdonságaik módosulnak a klasszikus Brown-mozgáshoz képest. Itt szerepelnek olyan eredmények is, amelyekre később még hivatkozok.

A fejezet második részében ismertetem a klasszikus Ornstein-Uhlenbeck folyamatot és tulajdonságait, majd ennek tükrében vizsgálom a frakcionális (jelölés: fOU), illetve a kevert frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamatokat(jelölés: $mfOU$). A frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamatról szóló részben szerepel a kovariancia függvényével kapcsolatos számításom, amely a szimulációim elkészítéséhez szükséges.

A második fejezetben leírtam, hogy hogyan készítettem el a szimulációimat és az ábráimat. Ezen kívül különböző próbákat hajtottam végre azzal kapcsolatban, hogy a saját munkám, illetve egy programcsomag által generált folyamat tekinthető-e statisztikailag azonosnak.

A harmadik és egyben legutolsó fejezetben az első fejezetben tárgyalt folyamatok paraméterbecsléseiről esik szó. Először az $m \in \mathbb{R}^+$ paraméter becslésére kerül sor az $\eta_t = X_t + m$ folyamat alapján, ahol $(X_t)_{t\geq 0}$ egy folytonos trajektóriájú, centrált, Gauss-folyamat. A diszkrét esetben az elkészített szimulációk együtthatói alapján szeretnék sejtést megfogalmazni a folytonos esetre, majd kiszámoljuk a klasszikus Ornstein-Uhlenbeck folyamat esetben a becslést.

Folytonos esetben ismertetek egy módszert, egy eredményt, illetve a hozzá tartózó számolást az Ornstein-Uhlenbeck folyamat esetén, majd ezt megpróbáltam általánosítani frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamat esetére. A számítások viszont azt mutatják, hogy teljesen ugyanúgy nem lehet alkalmazni a módszert.

A diffúziós paraméter (σ) esetén szintén először a diszkrét esetet vizsgáltam, majd áttérünk a folytonosra. A folytonos eset tárgyalása tartalmaz egy saját eredményt, ami a frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamatok növekményeinek konvergenciáját vizsgálja.

A legutolsó fejezetrészben pedig egy közismert becslési módszert mutatok be a diffúziós (σ) és a drift (θ) paraméterre, folytonos időparaméter esetén.

A dolgozatban szereplő összes ábra, a hozzá tartó szimuláció és statisztikai próba önálló munka, illetve minden, már korábban belátott eredménynél közölt számítások is a sajátjaim.

1. fejezet

Frakcionális folyamatok

1.1. Frakcionális Brown-mozgás

A frakcionális Brown-mozgás a Brown-mozgás általánosítása, először Kolmogorov vizsgálta 1940-ben Hilbert tereken belül, majd 1968-ban Mandelbrot és Van Ness konstruálta meg. Definíciója a következő:

1.1.1. Definíció. *Adott $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ valószínűségi mértéktéren B^H sztochasztikus folyamatot frakcionális Brown-mozgásnak([5]) nevezzük $H \in (0;1]$ Hurst paraméterrel, ha az centrált, 1 valószínűséggel folytonos trajektóriájú Gauss-folyamat, amelynek kovariancia függvénye $t, s \in \mathbb{R}^+$ esetén*

$$\operatorname{cov}(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

Ha $0 < H < 0,5$, akkor a folyamat két diszjunkt intervallumra vonatkozó növekményeinek kovarianciája negatív, $0,5 < H \leq 1$ esetén pedig pozitív. A $H = 0,5$ esetben visszakapjuk a klasszikus Brown-mozgást. Tehát a H paraméterrel való általánosítással a növekmények függetlenségének tulajdonsága is módosult.

Belátható rá az önhasonlósági tulajdonság, azaz minden $a > 0$-ra $(a^H B_{t/a}^H)_{t\in\mathbb{R}}$ eloszlásban egyenlő a $(B_t^H)_{t\in\mathbb{R}}$ folyamattal. Jelöléssel:

$$(a^H B_{t/a}^H) \stackrel{d}{=} (B_t^H).$$

Ugyanis

$$\mathrm{E}(a^H B_{t/a}^H) = a^H \mathrm{E}(B_{t/a}^H) = 0,$$

tehát ez a folyamat is centrált, továbbá

$$\operatorname{cov}\left(a^H B_{t/a}^H, a^H B_{s/a}^H\right) = a^{2H} \operatorname{cov}\left(B_{t/a}^H, B_{s/a}^H\right) =$$
$$= \frac{a^{2H}}{2}\left(\left|\frac{t}{a}\right|^{2H} + \left|\frac{s}{a}\right|^{2H} - \left|\frac{t}{a} - \frac{s}{a}\right|^{2H}\right) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

Mivel Gauss-folyamatokról beszélünk, ezért ezzel beláttuk az eloszlásbeli egyenlőséget. Ebből már következik, hogy a folyamat 0-ból indul, ugyanis minden a-ra

$$B_0^H \stackrel{d}{=} a^H \cdot B_{0/a}^H = a^H \cdot B_0^H,$$

így 1 valószínűséggel igaz, hogy $B_0^H = 0$.

Ezen kívül a kovariancia függvény alapján kiszámítható, hogy a növekmények stacionáriusak, azaz $B_t^H - B_s^H \overset{d}{=} B_{t-s}^H$. Ugyanis mindkét oldalon normális eloszlású valószínűségi változó van, amelynek a várható értéke 0, és

$$\begin{aligned}\mathrm{E}((B_t^H - B_s^H)^2) &= \mathrm{E}((B_t^H)^2) + \mathrm{E}((B_s^H)^2) - 2\mathrm{E}(B_t^H B_s^H) = \\ &= |t|^{2H} + |s|^{2H} - \left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right) = |t-s|^{2H},\end{aligned}$$

ami megegyezik B_{t-s}^H szórásnégyzetével.

Egy későbbi fejezetben használni fogjuk a következő tételt([6]):

1.1.1. Tétel. *Legyenek $p, q > 0$ konstansok, (B_t^H) a frakcionális Brown-mozgás a $[0,1]$-en, $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_j^n B_j^H := B_{j/n}^H - B_{(j-1)/n}^H$, ha $j = 1, \ldots, n$. Ekkor ha $n \to \infty$, a konvergenciát L^1-ben értve:*

- $n^{pH-1} \sum_{j=1}^n |\Delta_j^n B^H|^p \longrightarrow \mathrm{E}\left(|B_1^H|^p\right)$;
- $n^{pH-1-q} \sum_{j=1}^n |\Delta_j^n B^H|^p \longrightarrow 0$;
- $n^{pH-1+q} \sum_{j=1}^n |\Delta_j^n B^H|^p \longrightarrow \infty$.

Belátható még ([5]), hogy minden $h \in \mathbb{R}$-re és $0 < t < s$-re

$$\mathrm{cov}(B_t^H, B_{s+t}^H - B_s^H) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \left(\prod_{k=0}^{2n-1} (2H-k) \right) s^{2H-2n}.$$

Ebből következik, hogy $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$-re

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{cov}\left(B_t^H, B_{(n+1)t}^H - B_{nt}^H\right) = \infty,$$

azaz a $(B_{(n+1)t}^H - B_{nt}^H)_{n=0}^{\infty}$ folyamat hosszú emlékezetű.

Leszámítva a klasszikus Brown-mozgás és a $H = 1$ esetét, nem Markov-folyamat és nem is szemimartingál ([6]), így például nem alkalmazható rá közvetlenül az Itó-kalkulus. Ez különösen nehézzé teszi a folyamat elemzését.

Mandelbrot és Van Ness([7]) a frakcionális Brown-mozgást konstruktívabban definiálta, ha $H \in (0,1)$:

$$B_t^H = c_H \cdot \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{s \le t} \cdot (t-s)^{H-1/2} - \mathbb{1}_{s \le 0} \cdot (-s)^{H-1/2} dW_s,$$

ahol c_H a normalizáló konstans, W_s pedig a kétoldali Brown-mozgás. Ha $H = 1$, akkor a frakcionális Brown-mozgás megkonstruálható, mint $B_t^1 = t\xi$ minden $t \in \mathbb{R}$-re, ahol ξ egy standard normális valószínűségi változó.

Malliavin-kalkulus segítségével belátható([8]), hogy $0 < H < 3/4$ paraméter esetén létezik alkalmas $\sigma_H > 0$ paraméter, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sigma_H} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\left(B_{k+1}^H - B_k^H\right)^2 - 1 \right) \xrightarrow{d} N(0,1),$$

ha $n \to \infty$. Hasonlóan, ha $H = 3/4$, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{n \log(n)} \cdot \sigma_{\frac{3}{4}}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\left(B_{k+1}^{\frac{3}{4}} - B_k^{\frac{3}{4}}\right)^2 - 1 \right) \xrightarrow{d} N(0,1).$$

1.2. Kevert frakcionális Brown-mozgás

1.2.1. Definíció. *Kevert frakcionális Brown-mozgás([4])([6]) alatt azt értjük, amikor vesszük nemnulla lineáris kombinációját egy B^H kevert frakcionális Brown-mozgásnak és egy tőle független B Brown-mozgásnak. Tehát*

$$M_t^H := a \cdot B_t^H + b \cdot B_t,$$

ahol $t \in \mathbb{R}^+$, a és b egyszerre nem 0-k.

Ez a definíció különböző cikkekben eltérhet. Néhol csak az $b = 1$([6]) vagy a $H \in [0,5;1]$([4]) esetet nézik. Máshol akár két frakcionális Brown-mozgás lineáris kombinációját is kevert frakcionális Brown-mozgásnak definiálják, de mi ettől az esettől eltekintünk.

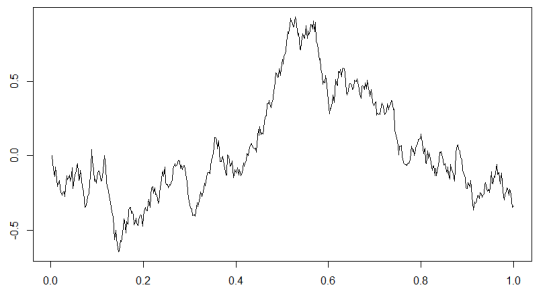
Ez szintén centrált, folytonos trajektóriájú folyamat, hiszen két ilyen folyamat lineáris kombinációja. Egy kevert frakcionális Brown-mozgás kovariancia függvénye visszavezethető a frakcionális és a klasszikus Brown-mozgás kovariancia függvényére, hiszen a függetlenség miatt

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(M_t^H, M_s^H) &= a^2 \cdot \operatorname{cov}(B_t^H, B_s^H) + b^2 \cdot \operatorname{cov}(B_t, B_s) = \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right) + b^2 \cdot \min(t,s).\end{aligned}$$

ahol $t, s \in \mathbb{R}^+$. Ekkor a szórásnégyzete:

$$\mathrm{D}^2(M_t^H) = \frac{a^2}{2} \cdot 2|t|^{2H} + b^2 \cdot t = a^2 \cdot |t|^{2H} + b^2 \cdot t.$$

A következő ábrán egy általam készített szimuláció látható, a szimuláció készítéséről leírás a *Folyamatok szimulációja* fejezetben található.



1.1. ábra. Egy kevert frakconális BM ($a = 1 = b$, $H = 0,75$ és $n = 500$)

A frakcionális Brown-mozgáshoz hasonlóan, a kevert frakcionális Brown-mozgásnak is stacionáriusak a növekményei, azaz $M_t^H - M_s^H \overset{d}{=} M_{t-s}^H$. Ugyanis mindkettőnek a várható értéke 0, illetve

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\left(\left(M_t^H - M_s^H\right)^2\right) = \mathrm{E}\left(\left(aB_t^H - aB_s^H + bB_t - bB_s\right)^2\right) = \\ &= a^2\mathrm{E}\left(\left(B_t^H - B_s^H\right)^2\right) + b^2\mathrm{E}\left((B_t - B_s)^2\right) + 2ab\mathrm{E}\left(\left(B_t^H - B_s^H\right)(B_t - B_s)\right) = \\ &= a^2\left|t-s\right|^{2H} + b^2(t-s) + 0 = a^2\left|t-s\right|^{2H} + b^2(t-s),\end{aligned}$$

ami megegyezik az M^H_{t-s} szórásnégyzetével, és normális valószínűségi változóknál ennyi elegendő.

Teljesül erre a folyamatra is egy önhasonlósági tulajdonság, azonban az a és b paraméterek módosulnak, ezért be kell vezetni az $M^H_t(a,b)$ jelölést a a, b és H paraméteres kevert frakcionális Brown-mozgásra. Ekkor fix $h \geq 0$-ra $M^H_{ht}(a,b) \stackrel{d}{=} M^H_t(a|h|^H, b\sqrt{h})$. Ugyanis:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(M^H_{ht}(a,b) \cdot M^H_{hs}(a,b)\right) = \\
&= a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(|ht|^{2H} + |hs|^{2H} - |ht-hs|^{2H}\right) + b^2 \cdot \min(ht, hs) = \\
&= a^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |h|^{2H} \cdot \left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right) + b^2 h \cdot \min(t,s) = \\
&= \mathrm{E}\left(M^H_t(a|h|^H, b\sqrt{h}) \cdot M^H_s(a|h|^H, b\sqrt{h})\right).
\end{aligned}$$

Hasonlóan a frakcionális esethez, belátható a következő tétel([9]):

1.2.1. Tétel. *Minden $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $b \in \mathbb{R}$ paraméterekre M^H_t nem Markov-folyamat.*

Illetve igaz az is ($a \neq 0$) esetben, hogy a növekmények korrelációja ugyanolyan struktúrát követ, mint a frakcionálisnál. Azaz ha $0 < H < 0,5$, akkor a folyamat két diszjunkt intervallumra vonatkozó növekményeinek kovarianciája negatív, $0,5 < H \leq 1$ esetén pedig pozitív, $H = 0,5$ esetén pedig korrelálatlan. ([9])

Érdemes vizsgálni még a szemimartingálság kérdését is. Az önhasonlósági tulajdonság miatt elég a $[0,1]$-en megfigyelni a folyamatot. Jelen esetben csak a $b = 1$ esetet vizsgáljuk.([6])

1.2.2. Tétel. *Minden $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ esetén $(M^H_t(a,1))_{t\in[0,1]}$ folyamat nem lehet gyenge szemimartingál. Ha $H = \frac{1}{2}$, akkor egy Brown-mozgás $\sqrt{1+a^2}$-szeresével ekvivalens. Ha $H \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]$, akkor ekvivalens egy Brown-mozgással.*

1.3. Klasszikus Ornstein-Uhlenbeck folyamat

Klasszikus értelemben akkor beszélünk Ornstein-Uhlenbeck folyamatról([5], [10]), ha az $(X_t)_{t\geq 0}$ kielégíti a következő sztochasztikus differenciálegyenletet:

$$X_t = \xi + \theta \cdot \int_0^t X_s ds + \sigma \cdot B_t, \tag{1.1}$$

ahol $\theta < 0$ és $\sigma > 0$ paraméter, B_t egy standard Brown-mozgás, $\xi \in L^0(\Omega)$ pedig a kezdőérték. A fenti egyenletnek létezik egyértelmű, erős megoldása $t \geq 0$ esetén:

$$X^\xi_t = e^{\theta t} \cdot \xi + \sigma \cdot \int_{-\infty}^t e^{\theta(t-u)} dB_u.$$

Leellenőrizhető Itó-formulával, hogy ez tényleg megoldása a fenti egyenletnek. Legyen $f(t,x) = x \cdot \exp(-\theta t)$, ekkor $\partial_t f(t,x) = -\theta x \cdot \exp(-\theta t)$, $\partial_x f(t,x) = \exp(-\theta t)$ és $\partial^2_x f(t,x) = 0$. Használva az Ito-formulát:

$$\begin{aligned}
df(t, X_t) &= \partial_t f(t,x)dt + \partial_x f(t,x) dX_t = -\theta X_t e^{-\theta t} dt + e^{-\theta t} dX_t = \\
&= -\theta X_t e^{-\theta t} dt + e^{-\theta t} \theta X_t dt + \sigma e^{-\theta t} dB_t = \sigma e^{-\theta t} dB_t.
\end{aligned}$$

Azaz megkaptuk, hogy

$$X_t \cdot e^{-\theta t} = X_0 + \sigma \int_{-\infty}^{t} e^{-\theta u} dB_u.$$

Ez egy 1 valószínűséggel folytonos Gauss-folyamat, ami egyben Markov-folyamat is. Vizsgáljuk azt a folyamatot $t \in \mathbb{R}$-n, hogy

$$X_t = \sigma \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{\theta(t-u)} dB_u, \text{ amelynek } X_0 = \sigma \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{-\theta u} dB_u \tag{1.2}$$

a kezdőértéke.

Ez egy majdnem mindenütt folytonos stacionárius Gauss-folyamat. Ekkor teljesül, hogy

$$X_t - X_t^{\xi} = e^{\theta t} (X_0 - \xi) \to 0, \text{ ha } t \to \infty,$$

tehát a végtelenben eltűnik a két folyamat közötti különbség. A továbbiakban végig Ornstein-Uhlenbeck folyamat alatt a stacionárius változatot kell érteni.

A kovariancia könnyen kiszámítható, használva az Itó-izometriát. Feltéve, hogy $t \geq s$, ekkor

$$\operatorname{cov}(X_t, X_s) = \operatorname{cov}\left(\sigma \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{\theta(t-u)} dB_u, \sigma \cdot \int_{-\infty}^{s} e^{\theta(s-u)} dB_u\right) =$$

$$= \mathrm{E}\left(\sigma^2 \int_{-\infty}^{t} e^{\theta(t-u)} dB_u \cdot \int_{-\infty}^{s} e^{\theta(s-u)} dB_u\right) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{s} e^{\theta(t-u)} e^{\theta(s-u)} du =$$

$$= \sigma^2 e^{\theta(t+s)} \int_{-\infty}^{s} e^{-2\theta u} du = \sigma^2 e^{\theta(t+s)} \cdot \left[\frac{e^{-2\theta u}}{-2\theta}\right]_{-\infty}^{s} = \frac{-\sigma^2}{2\theta} e^{\theta(t-s)}.$$

Ha pedig $t \leq s$, akkor a kitevőben $\theta(t-s)$ helyett $\theta(s-t)$ van. Összefoglalva:

$$\operatorname{cov}(X_t, X_s) = \frac{-\sigma^2}{2\theta} e^{\theta|t-s|}. \tag{1.3}$$

Mivel centrált Gauss-folyamatról van szó, ezért ez már meghatározza az eloszlást. A kovariancia függvényből levezethető, hogy (X_t) ergodikus.

Diszkrét időben (X_t) egy p-edrendű autoregresszív folyamat (jel. $AR(p)$), ha kielégíti a következő egyenletet:

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + \sigma_\epsilon \cdot \epsilon_t,$$

ahol ϵ_t független értékű zaj, α_i, σ_ϵ kostansok. A $p = 1$ esetben ennek a folytonos változta az Ornstein-Uhlenbeck folyamat, ugyanis felosztva egy intervallumot $1/n$ részre diszkretizálva a folyamatot:

$$X\left(\frac{k}{n}\right) = \sigma \cdot e^{\theta \frac{k}{n}} \int_{-\infty}^{\frac{k}{n}} e^{-\theta s} dW_s = \tag{1.4}$$

$$= \sigma \cdot e^{\frac{\theta}{n}} \, e^{\theta \frac{k-1}{n}} \int_{-\infty}^{\frac{k-1}{n}} e^{-\theta s} dW_s + \sigma \cdot e^{\theta \frac{k}{n}} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} e^{-\theta s} dW_s = \rho X\left(\frac{k-1}{n}\right) + \epsilon(k),$$

ahol $\rho = \exp(\theta/n)$ és mivel

$$\sigma \cdot e^{\theta \frac{k}{n}} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} e^{-\theta s} dW_s \approx \sigma \cdot e^{\theta \frac{k}{n}} e^{-\theta \frac{k}{n}} \left(W_{\frac{k}{n}} - W_{\frac{k-1}{n}}\right) = \sigma \left(W_{\frac{k}{n}} - W_{\frac{k-1}{n}}\right),$$

ezért $\epsilon(k) \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$

1.4. Frakcionális Orstein-Uhlenbeck

Frakcionális Orstein-Uhlenbeck folyamatról akkor beszélünk, ha az (1.1)-eshez hasonlóan $(X)_{t\geq 0}$ kielégíti a következő egyenletet:

$$X_t = \xi + \theta \cdot \int_0^t X_s ds + \sigma \cdot B_t^H. \tag{1.5}$$

A paraméterezés megegyezik a klasszikus változattal, csak a zaj szerepét a B_t^H frakcionális Brown-mozgás veszi át. A jelölés cikkenként változhat, néhol a $\lambda = -\theta$ jelölést használják, máshol már a cikk elején felteszik, hogy $H \geq 0,5$. A megoldás létezésével kapcsolatban a következő tétel teljesül: ([5])

1.4.1. Tétel. *Legyen $(B_t)_{t\in\mathbb{R}}$ frakcionális Brown-mozgás $H \in (0,1]$ Hurst-paraméterrel és $\xi \in L^0(\Omega)$ kezdőértékkel. Legyenek $-\infty \leq a < \infty$, $\sigma > 0$ és $\theta < 0$ paraméterek. Ekkor m. m. $\omega \in \Omega$-ra teljesülnek a következők:*

- *Minden $t > a$-ra $\int_a^t e^{-\theta u} dB_u^H$ létezik, mint egy Riemann-Stieljes integrál és*

$$\int_a^t e^{-\theta u} dB_u^H(\omega) = e^{-\theta t} B_t^H(\omega) - e^{-\theta a} B_a^H(\omega) + \theta \int_a^t B_u^H(\omega) e^{-\theta u} du.$$

- *Rögzített $a < t$ esetén a $t \mapsto \int_a^t e^{-\theta u} dB_u^H(\omega)$ függvény folytonos.*
- *Az egyértelmű, folytonos megoldása az alábbi egyenletnek $t \geq 0$-ra*

$$y(t) = \xi + \theta \cdot \int_0^t y(s) ds + \sigma \cdot B_t^H(\omega)$$

megadható olyan módon, hogy

$$y(t) = e^{\theta t} \cdot \xi + \sigma \cdot \int_{-\infty}^t e^{\theta(t-u)} dB_u^H(\omega).$$

Speciálisan, ha $\xi = \sigma \cdot \int_{-\infty}^0 e^{-\theta u} dB_u^H(\omega)$, akkor

$$y(t) = \sigma \cdot \int_{-\infty}^t e^{\theta(t-u)} dB_u^H(\omega). \tag{1.6}$$

A megoldás Gauss-folyamat és abból, hogy a frakcionális Brown-mozgás növekményei stacionáriusak következik, hogy az $(X_t^H)_{t\geq 0}$ stacionárius folyamat.

Szimulációt szerettem volna készíteni, amihez szükségem volt a kovariancia függvényre, aminek a meghatározásához a [5]-es cikkben található tételből érdemes kiindulni.

1.4.2. Tétel. *Legyen $H \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right]$, $\theta < 0$ és $-\infty \leq a < b \leq c < d < \infty$. Ekkor*

$$\mathrm{E}\left[\int_a^b e^{-\theta u} dB_u^H \cdot \int_c^d e^{-\theta v} dB_v^H\right] = H(2H-1) \int_a^b \int_c^d e^{-\theta(u+v)} |v-u|^{2H-2} dv du.$$

A fenti képlet $a = -\infty = c$, $b = 0$ és $d = t$ esetben lesz egyenlő $\mathrm{cov}(X_0^H, X_t^H)$-val (továbbá szorozni kell σ^2-tel)

$$\mathrm{cov}(X_0^H, X_t^H) = H(2H-1) \cdot \sigma^2 \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{t} e^{-\theta(u+v)} |v-u|^{2H-2} dv du, \qquad (1.7)$$

amit elegendő meghatározni a stacionaritás miatt. A jobb oldali képlet esetén a problémát jelent, hogy $H \in (0;1]$, ezért $(2H-2) \in (-2;0]$, és így ha $u = v$, akkor 0-t kellene venni egy nagyon kicsi negatív számon, ami miatt szingularitás keletkezik a függvényben. Emiatt az R-ben nem lehetett használni azokat a kész programokat, amik numerikusan számítanak ki kettős integrálokat.

Így további átalakításokra volt szükség. Először fel kell bontani X_t^H-t, mint

$$X_t^H = \sigma \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{\theta(t-u)} dB_u^H = X_0^H \cdot e^{\theta t} + \int_0^t e^{\theta(t-u)} dB_u^H,$$

majd kiszámítani $\mathrm{E}((X_0^H)^2)$-t a fenti tétel alapján:

$$\mathrm{cov}(X_0^H, X_0^H) = \mathrm{E}((X_0^H)^2) = \sigma^2 \cdot \mathrm{E}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-\theta s} dB_s^H \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{-\theta t} dB_t^H \right) =$$

$$= \sigma^2 H(2H-1) \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} e^{-\theta(t+s)} \left|t-s\right|^{2H-2} dt ds =$$

Ekkor kétszer kell mértékcserét végrehajtani, először $u = \theta t$, majd $v = \theta s$ választással:

$$= \sigma^2 H(2H-1) \cdot \frac{-1}{\theta} \int_{-\infty}^{0} \int_{0}^{\infty} e^{-u-\theta s} \left| \frac{u}{\theta} - s \right|^{2H-2} du ds =$$

$$= \sigma^2 H(2H-1) \cdot \frac{1}{\theta^2} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} e^{-(u+v)} \left| \frac{u-v}{\theta} \right|^{2H-2} du dv = \sigma^2 H \Gamma(2H) (-\theta)^{-2H},$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtam a [11]-es cikk 5.1 lemmáját, azonban ez csak $H \in]0,5;1[$-re érvényes. Azaz

$$\mathrm{cov}(X_0^H, X_0^H) = \mathrm{E}((X_0^H)^2) = \sigma^2 \cdot H \cdot \Gamma(2H) \cdot (-\theta)^{-2H}.$$

Így megkaptuk azt az eredményt, hogy:

$$\mathrm{cov}(X_t^H, X_0^H) = \sigma^2 H \Gamma(2H) \cdot (-\theta)^{-2H} \cdot e^{\theta t} + \mathrm{E}\left(\sigma^2 \int_0^t e^{-\theta(u-t)} dB_u^H \int_{-\infty}^{0} e^{-\theta v} dB_v^H \right).$$

A további számításokhoz felhasználtam a fenti tételt, és bevezettem a $u - v = x$ új változót (így elhagyható az abszolútérték).

$$\mathrm{E}\left(\sigma^2 \int_0^t e^{-\theta(u-t)} dB_u^H \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{-\theta v} dB_v^H \right) =$$

$$= H(2H-1) \cdot \sigma^2 \cdot e^{\theta t} \int_0^t \int_{-\infty}^{0} e^{-\theta(u+v)} |v-u|^{2H-2} dv du =$$

$$= H(2H-1) \cdot \sigma^2 \cdot e^{\theta t} \int_0^t \int_{u}^{\infty} e^{-\theta(2u-x)} |-x|^{2H-2} dx du =$$

$$= H(2H-1) \cdot \sigma^2 \cdot e^{\theta t} \int_0^t e^{-\theta 2u} \int_{u}^{\infty} e^{\theta x} x^{2H-2} dx du =$$

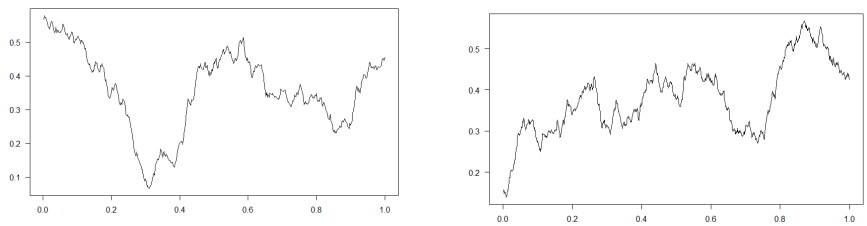
Felcserélve az integrálás sorrendjét, kiintegrálható a szorzat u-tól függő része.

$$
\begin{aligned}
&= H(2H-1)\cdot\sigma^2\cdot e^{\theta t}\int_0^\infty e^{\theta x}x^{2H-2}\int_0^{x\wedge t} e^{-2\theta u}dudx = \\
&= H(2H-1)\cdot\sigma^2\cdot e^{\theta t}\int_0^\infty e^{\theta x}x^{2H-2}\left[\frac{e^{-2\theta u}}{-2\theta}\right]_0^{x\wedge t} dx = \\
&= H(2H-1)\cdot\sigma^2\cdot e^{\theta t}\frac{1}{-2\theta}\int_0^t e^{\theta x}x^{2H-2}(e^{-2\theta x}-1)dx+ \\
&+H(2H-1)\cdot\sigma^2\cdot e^{\theta t}\frac{1}{-2\theta}\int_t^\infty e^{\theta x}x^{2H-2}(e^{-2\theta t}-1)dx = \\
&= \frac{-H}{\theta}(2H-1)\cdot\sigma^2\cdot e^{\theta t}\int_0^t \frac{e^{-\theta x}-e^{\theta x}}{2}\cdot x^{2H-2}dx+ \\
&+\frac{-H}{\theta}(2H-1)\cdot\sigma^2\cdot\frac{e^{-\theta t}-e^{\theta t}}{2}\int_t^\infty e^{\theta x}x^{2H-2}dx = \\
&= \frac{-H}{\theta}(2H-1)\cdot\sigma^2\left[e^{\theta t}\int_0^t \sinh(-\theta x)x^{2H-2}dx+\sinh(-\theta t)\int_t^\infty e^{\theta x}x^{2H-2}dx\right].
\end{aligned}
$$

Ezek után az alábbi formulához lehet jutni, összerakva a két fenti részeredményt:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_t^H, X_0^H) = \sigma^2\cdot H\Big[&\Gamma(2H)\cdot(-\theta)^{-2H}\cdot e^{\theta t}+ \\
&+\frac{2H-1}{-\theta}\cdot e^{\theta t}\cdot\int_0^t \sinh(-\theta x)\cdot x^{2H-2}dx+ \\
&+\frac{2H-1}{-\theta}\cdot\sinh(-\theta t)\cdot\int_t^\infty e^{\theta x}x^{2H-2}dx\Big].
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

A formulából látható, hogy miért szükséges, hogy $\theta < 0$, hiszen akkor a második integrál nem lenne véges, illetve nem lehetne θ-val osztani. Magyarázatot ad arra a feltételre is, hogy $H \geq 0,5$, ugyanis a számításhoz felhasználtam ezt a feltételt. A következő két ábrán egy-egy általam generált szimulációját láthatjuk a frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamatnak.



(a) 500 elemű mintára (b) 1000 elemű mintára

1.2. ábra. A frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamat $\theta = -1$ és $\sigma = 1$ esetben

A frakcionális Brown-mozgás hosszú emlékezetű, és ez átöröklődik a frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamatra is. Ugyanis:

1.4.3. Tétel. *Legyen* $H \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right]$ *és* $N = 1, 2, \ldots$. *Ekkor fix* $t \in \mathbb{R}$*-re és* $s \to \infty$ *esetén*

$$\operatorname{cov}(X_t^H, X_{t+s}^H) = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{n=1}^{N} (-\theta)^{-2n} \left(\prod_{k=0}^{2n-1} (2H - k) \right) s^{2H-2n} + O(s^{2H-2n-2}).$$

Ebből következik, hogy (X_t^H) ergodikus és hosszú emlékezetű, ha $H \in (\frac{1}{2}; 1]$.[5]

1.5. Kevert frakcionális Ornstein-Uhlenbeck

Kevert frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamatról, akkor beszélünk, ha az (1.1)-eshez és a (1.5)-ashoz hasonlóan a folyamat kielégíti a következő egyenletet $t \geq 0$ esetén:

$$X_t = \xi + \theta \cdot \int_0^t X_s ds + \sigma \cdot M_t^H. \tag{1.9}$$

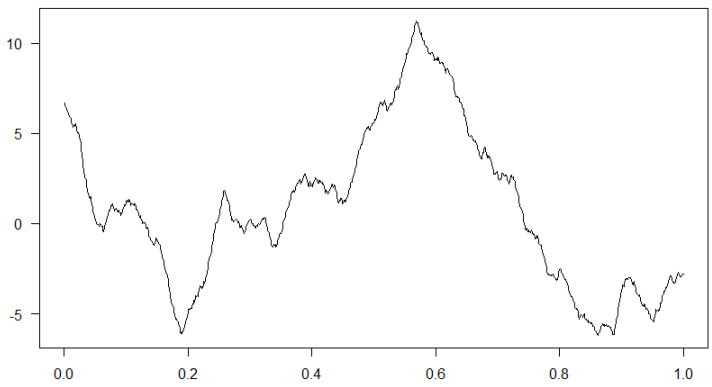
Ennek a stacionárius megoldása is ismert, az előzőekhez hasonlóan

$$Z_t^H = \sigma \cdot \int_{-\infty}^t e^{\theta(t-u)} dM_u^H.$$

A kovarianciafüggvény is meghatározható a (1.3)-es és a (1.7)-es alapján, hiszen $dM_u^H = a \cdot dB_u^H + b \cdot dB_u$, majd felhasználva a függetlenséget következik, hogy $Z_t^H = a \cdot X_t^H + b \cdot X_t$. Ekkor:

$$\operatorname{cov}(Z_t^H, Z_s^H) = a^2 \cdot \operatorname{cov}(X_t^H, X_s^H) + b^2 \cdot \operatorname{cov}(X_t, X_s) =$$
$$= a^2 H(2H-1) \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{|t-s|} e^{-\theta(u+v)} |v-u|^{2H-2} dv du + b^2 \cdot \frac{-\sigma^2}{2\theta} e^{\theta|t-s|}.$$

Tehát a fenti kovariancia függvényből is látszik, hogy ez is stacionárius folyamat. Továbbá folytonos Gauss-folyamat, mert két folytonos Gauss-folyamat lineáris kombinációja.



1.3. ábra. Kevert frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamat szimulációja

2. fejezet

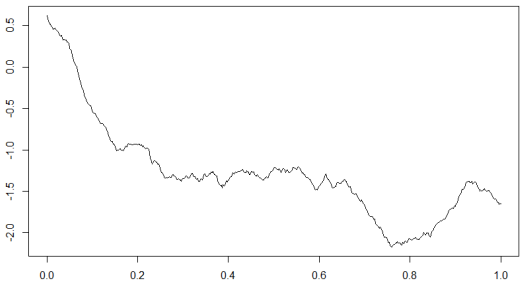
Folyamatok szimulációja

Ebben a fejezetben R-ben készített szimulációimról és statisztikai próbáimról szeretnék írni. Az R([12]) egy programnyelv és fejlesztői környezet, amely statisztikai számításokra lett optimalizálva. Az R előnyeihez tartozik, hogy ingyenesen elérthető és nyílt forráskódú program, így az implementált statisztikai próbák listája folyamatos fejlesztés alatt áll.

A szakdolgozatom első fejezetében említett folyamatok szimulációját készítettem el legelőször. Mindegyik folyamatot a $[0; 1]$ intervallumon ábrázoltam és ennek vettem az $1/n$-es felosztását. Mindegyik folyamat Gauss-folyamat, ezért a mintavételezés után egy n dimenziós normális valószínűségi változónak felelnek meg, természetesen különböző várható értékkel, illetve kovariancia mátrixszal.

Az R-ben a $MASS$([13]) programcsomagban található az *mvrnorm* függvény, amely véletlenszerűen generál k darab többdimenziós normális adatsort adott kovariancia mátrixszal és várható érték vektorral. Az első fejezetben mindegyik ábra ezzel a módszerrel készült, mivel mindegyik folyamatnak kiszámítottuk a kovarianciáját.

Az R rendelkezik egy *yuima*([14]) nevű csomaggal, ami célul tűzte ki bizonyos sztochasztikus differenciál egyenletek megoldását, becslését és ábrázolását. Így alkalmas néhány általam vizsgált folyamat szimulációjára, többek között a frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamatra is, kevertre azonban már nem.



2.1. ábra. A *yuima* által készített fOU ($H = 0,75$, $\sigma = 2$, $\theta = -3$ és $n = 1000$)

A szimuláció elkészítéséhez először a $setModel$ függvényt alkalmaztam a modell beállítására, azaz a kezdőérték, a H Hurst-együttható és a σ diffúziós és a

θ drift együttható megadására. Az adatsor előállításhoz a *simulate* függvényt használtam, amihez a *setSampling* függvénnyel állítottam be a mintavételezési pontokat, és a *setYuima* függvénnyel pedig elértem, hogy a minta *yuima* osztályú legyen.

A *yuima* csomag szimulációinak előnyei közé tartozik, hogy működik $H < 0,5$ esetén is, ugyanis numerikusan lettek megoldva a sztochasztikus differenciálegyenletek, illetve sokkal szélesebb körben használhatóak a függvényeik. A csomag tartalmaz szimuláción kívüli paraméterbecslésre alkalmas függvényeket is. Ehhez a *mmfrac* függvényt használtam egy $H = 0,75$, $\sigma = 2$ és $\theta = -3$ paraméterekkel és $n = 1000$ mintavételezési pontra generált (*yuima*) szimulációra.

```
Fractional OU estimation
           hurst   (sigma)    theta
Estimate    0.75 1.9821902 2.846518
Std. Error    NA 0.3208526      NaN
```

Érdekes kérdés azt vizsgálni, hogy tekinthető-e azonosnak a kétféle módszer statisztikailag. Erre a problémára a Box-M próbát([15]) használtam legelőször. Ez azt vizsgálja, hogy k darab többdimenziós normális eloszlású adatsor kovariancia mátrixai egyenlőek-e. Esetünkben $k = 2$. Legyen Σ_y a *yuima* csomag által, illetve Σ_x a szimulációm által készített adatsorból generált adatok valódi kovariancia mátrixa. Ekkor a hipotéziseim a következők:

$$H_0 : \ \Sigma_y = \Sigma_x$$
$$H_1 : \ \Sigma_y \neq \Sigma_x$$

Mindkét adatsort $n = 100$ darab mintavételezési pontban vettük ($t_i^n = i/n$, ahol $i = 1, \ldots, n$), a $\theta = -3$, $H = 0,75$ és $\sigma = 2$ paraméterekkel, majd ezt legeneráltam $m = 300$-szor. A generált adatsorokat egy $M_{2m \times n}$-es mátrixba tettem, majd a megfelelő faktorizálás után alkalmaztam a tesztet.

$$M := \begin{bmatrix} X_{1,t_1^n} & X_{1,t_2^n} & \ldots & X_{1,t_n^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m,t_1^n} & X_{m,t_2^n} & \ldots & X_{m,t_n^n} \\ Y_{1,t_1^n} & Y_{1,t_2^n} & \ldots & Y_{1,t_n^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{m,t_1^n} & Y_{m,t_2^n} & \ldots & Y_{m,t_n^n} \end{bmatrix}$$

Ekkor a következő eredményt kaptam:

```
Box's M-test for Homogeneity of Covariance Matrices

data:  M
Chi-Sq (approx.) = 5167.1, df = 5050, p-value = 0.1224
```

A Box-M próba nem utasította el a nullhipotézist, azonban mindkét adatsorból becsültem a kovariancia mátrixot, ezért érdemes további vizsgálatokat is végezni. A számításokhoz a *boxM* nevű R függvényt használtam a *biotools* csomagból([16]).

A számításaim alapján (1.8) ismertnek lehet tekinteni a kovariancia mátrixot, legyen ez Σ-val jelölve. Továbbra is Σ_y-nal jelölve a *yuima* csomag által generált adatok kovariancia mátrixot. Ekkor a hipotéziseink a következők:

$$H_0: \ \Sigma_y = \Sigma$$
$$H_1: \ \Sigma_y \neq \Sigma$$

A Bartlett teszttel([17]) azt lehet vizsgálni, hogy egy korreláció mátrix identitás mátrixnak tekinthető-e. Ehhez $n = 500$ mintavételezési pontban kiszámítottam a Σ kovariancia mátrixot $\theta = -3$, $H = 0,75$ és $\sigma = 2$ paraméterekkel. Majd m darab szimulációt készítettem el a *yuima* programcsomag segítségével, az előzővel megegyező paraméterekkel, a $t_i^n = i/n$ mintavételezési pontokban (ahol $i = 1, \ldots, n$).

$$Y := \begin{bmatrix} Y_{1,t_1^n} & Y_{1,t_2^n} & \ldots & Y_{1,t_n^n} \\ Y_{2,t_1^n} & Y_{2,t_2^n} & \ldots & Y_{2,t_n^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{m,t_1^n} & Y_{m,t_2^n} & \ldots & Y_{m,t_n^n} \end{bmatrix}$$

Első lépésben a fenti Y mátrixot normáltam a Σ-val, a sejtett kovariancia mátrixszal. Legyen ennek a folyamatnak a becsült kovariancia mátrixa $\widehat{\Sigma}_y$. Így a $\Sigma^{-\frac{1}{2}} \cdot \widehat{\Sigma}_y$ mátrixot alakítottam át korreláció mátrixszá és alkalmaztam a tesztet.

```
chisq              p.value            df
[1] 107248.6       [1] 1              [1] 124750
```

Erre a teszt 1 körüli p értéket adott, tehát nem vethető el a H_0 hipotézis és a két folyamatot tekinthető azonosnak.

A számításokhoz a *cortest.bartlett*([18]) nevű R függvényt használtam a *psych* csomagból. Ennél a tesztnél kihasználtam, hogy ismert a Σ kovariancia mátrix, azonban a normalitást nem.

Létezik a *psych* csomagban egy *cortest.normal* függvény is, amely szintén azt vizsgálja, hogy egy kovariancia függvény megegyezik-e statisztikailag az identitás mátrixszal, csak többdimenziós normális esetben. Az előző mátrixra futtatva ezt a következő eredményt kaptam:

```
Tests of correlation matrices

Call:cortest.normal(R1 = M5, n1 = 500)
Chi Square value 103865.1  with df =  124750 with probability < 1
```

Önellenőrzésképpen elvégeztem ugyanazt a tesztet a szimulációmra, amit a *yuima* csomagra végeztem a *cortest.bartlett* függvényre. Ez a teszt is 1 körüli p értéket adott, tehát jónak tekinthető a szimulációt.

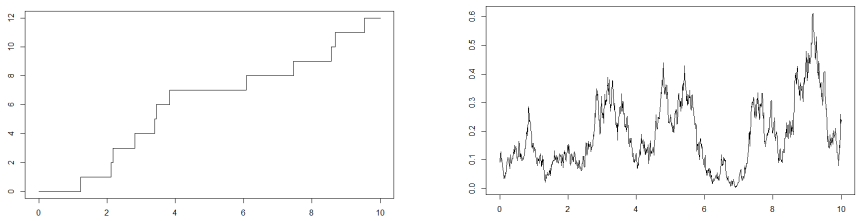
```
chisq              p.value            df
[1] 1202.373       [1] 1              [1] 4950
```

A *yuima* csomag alkalmas dW_t szerinti zajjal meghajtott sztochasztikus differenciál egyenletek megoldásának és ugró folyamatoknak a szimulációjára is. Mindegyik esetben az Euler-Maruyama metódust használták, ami általánosítása

az Euler-metódusnak, amely differenciál egyenleteket old meg. Szemléltetésképpen a CIR-folyamat

$$dY_t = a \cdot (c - y)dt + b \cdot \sqrt{Y_t}dWt$$

és a kompenzált Poisson-folyamat szimulációját készítettem el. Ugyanazokat a függvényeket használtam fel a *yuima* csomagból, mint a frakcionális folyamatoknál.



(a) Poisson-folyamat (b) CIR-folyamat

2.2. ábra. Különböző folyamatok a *yuima* csomaggal szimulálva

3. fejezet

Paraméterbecslések

3.1. A várható érték becslése, diszkrét eset

A fejezetrészben felvetett alapprobléma az, hogy hogyan lehetne megbecsülni egy stacionárius folyamat várható értékét. A nehézséget azt jelenti, hogy itt a tagok összefüggők, így az átlag nem minden előnyös tulajdonsága marad meg a függetlenhez képest. A továbbiakban $(X_t)_{t\geq 0}$ egy folytonos trajektóriájú, centrált, Gauss-folyamat lesz, így ebbe beletartozik az összes fajta Ornstein-Uhlenbeck folyamat is.

Vizsgáltam a $\eta_t = X_t + m$ folyamatot, ekkor $\mathrm{E}(\eta_t) = \mathrm{E}(X_t) + m = m$. Legyen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ az n darab megfigyelésem egy intervallumon, adott Σ kovariancia mátrixszal. Mivel (η_t) Gauss-folyamat, ezért az együttes sűrűségfüggvény:

$$L(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det \Sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2}[\eta_1 - m, \ldots, \eta_n - m]^{\mathsf{T}} \Sigma^{-1} [\eta_1 - m, \ldots, \eta_n - m]} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det \Sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2}[\underline{\eta} - m \cdot \underline{1}]^{\mathsf{T}} \Sigma^{-1} [\underline{\eta} - m \cdot \underline{1}]},$$

ahol $\underline{1}$ az n hosszú, azonosan 1 oszlopvektor és $\underline{\eta} = [\eta_1, \ldots, \eta_n]^{\mathsf{T}}$. Ahhoz, hogy L-et maximalizáljuk a kitevőt kell minimalizálni $-\frac{1}{2}$ nélkül.

$$\frac{d}{dm}[\underline{\eta} - m \cdot \underline{1}]^{\mathsf{T}} \Sigma^{-1} [\underline{\eta} - m \cdot \underline{1}] = 2m \cdot \underline{1}^{\mathsf{T}} \Sigma^{-1} \underline{1} - 2 \cdot \underline{1}^{\mathsf{T}} \Sigma^{-1} \underline{\eta}$$

Ennek a deriváltnak kell egyenlőnek lennie 0-val, és akkor megkapjuk a $\hat{m}$ becslést:

$$\hat{m} = \frac{\underline{1}^{\mathsf{T}} \Sigma^{-1} \underline{\eta}}{\underline{1}^{\mathsf{T}} \Sigma^{-1} \underline{1}}. \tag{3.1}$$

Ez valóban minimum, hiszen még egyszer deriválva:

$$\frac{d}{dm}\left[2m \cdot \underline{1}^{\mathsf{T}} \Sigma^{-1} \underline{1} - 2 \cdot \underline{1}^{\mathsf{T}} \Sigma^{-1} \underline{\eta}\right] = 2 \cdot \underline{1}^{\mathsf{T}} \Sigma^{-1} \underline{1} > 0,$$

ami azért pozitív, mert Σ pozitív definit, és ebből következik, hogy Σ^{-1} is pozitív definit, és így $\underline{1}^{\mathsf{T}} \Sigma^{-1} \underline{1} > 0$. A becslés eloszlásának vizsgálatához következő tételt fogjuk felhasználni([19]):

3.1.1. Tétel. *Ha $\underline{\xi}^{\mathsf{T}} := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ egy n-dimenziós normális vektor változó, $\underline{\xi} \sim N(\underline{m}, \Sigma_\xi)$ és az A mátrix $n \times m$-es, akkor $A\underline{\xi}$ egy m-dimenziós normális a következő paraméterezéssel: $A\underline{\xi} \sim N(A\underline{m}, A\ \Sigma_\xi\ A^{\mathsf{T}})$.*

Ez alapján $\hat{m}$ (skalár) normális eloszlású, a várható értéke pedig:

$$\mathrm{E}(\hat{m}) = \mathrm{E}\left(\frac{\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{\eta}}{\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{1}}\right) = \frac{\mathrm{E}\left(\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{\eta}\right)}{\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{1}} =$$

$$= \frac{\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\mathrm{E}\left(\underline{\eta}\right)}{\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{1}} = \frac{\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{1}\ m}{\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{1}} = m, \tag{3.2}$$

tehát a becslés torzítatlan. A szórására pedig az teljesül, hogy

$$\mathrm{D}^2(\hat{m}) = \mathrm{D}^2\left(\frac{\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{\eta}}{\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{1}}\right) = \frac{\mathrm{D}^2\left(\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{\eta}\right)}{\left(\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{1}\right)^2} = \frac{\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\mathrm{D}^2\left(\underline{\eta}\right)\left(\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\right)^{\mathsf{T}}}{\left(\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{1}\right)^2} =$$

$$= \frac{\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\mathrm{D}^2\left(\underline{\eta}\right)(\Sigma^{-1})^{\mathsf{T}}\underline{1}}{\left(\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{1}\right)^2} = \frac{\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\Sigma\ (\Sigma^{-1})^{\mathsf{T}}\underline{1}}{\left(\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{1}\right)^2} = \frac{1}{\underline{1}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{1}}, \tag{3.3}$$

ahol felhasználtam, hogy szimmetrikus mátrix inverze is szimmetrikus.

Feltételeztem, hogy ismerjük a kovariancia mátrixot, így a becslésünknek kisebb a hibája. További átalakítás nélkül alkalmazható ez a becslés a klasszikus, frakcionális és kevert frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamat esetén.

A klasszikus Ornstein-Uhlenbeck esetén azonban tovább is lehet számítani. Diszkrét esetben a folyamat olyan alakú, hogy

$$X_{n+1} = \rho X_n + \epsilon_{n+1}, \tag{3.4}$$

ahol $\rho = \exp(\theta/n)$, illetve ϵ_{n+1} független, azonos eloszlású normális valószínűségi változók (1.4). Ekkor

$$\mathrm{D}^2(X_{n+1}) = \rho^2\mathrm{D}^2(X_n) + D^2(\epsilon_{n+1}),$$

a függetlenség miatt. A továbbiakban felteszem, hogy $\mathrm{D}^2(X_{n+1}) = \mathrm{D}^2(X_n)$, tehát $\mathrm{D}^2(X_n) = \sigma_X^2(1-\rho^2) = \sigma_\epsilon^2$, ahol σ_ϵ^2 az ϵ-ok szórása. Az állandó szórás például stacionáriusság esetén áll fenn. Mivel $\theta < 0$, így $0 < \rho < 1$, ami a normális zajjal hajtott $AR(1)$ folyamatoknál a stacionárius megoldás létezésének elégséges feltétele.

A becsléshez szükség van a kovariancia mátrixra. Kiindulva abból, hogy $\mathrm{cov}(X_n, X_n) = \sigma_X^2$. Legyen $k > 0$ egész, ekkor

$$\mathrm{cov}(X_{n+k}, X_n) = \mathrm{cov}(\rho X_{n+k-1}, X_n) + \mathrm{cov}(\epsilon_{n+k}, X_n) = \rho \cdot \mathrm{cov}(X_{n+k-1}, X_n) =$$
$$= \ldots = \rho^k\mathrm{cov}(X_n, X_n) + \mathrm{cov}(\epsilon_{n+1}, X_n) = \rho^k \cdot \sigma_X^2,$$

ahol kihasználtam, hogy az ϵ független zaj. Ekkor a kovariancia mátrix a következő alakban áll elő:

$$\Sigma = \sigma_X^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \ldots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \ldots & \rho^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Ennek az inverze pedig a következő mátrix:[19]

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\rho & 1 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

A fenti becslésbe be kell helyettesíteni ezt a két mátrixot, először $\underline{1}^\mathsf{T}\Sigma^{-1}$-t számítottam ki:

$$\underline{1}^\mathsf{T}\Sigma^{-1} = \sigma_\epsilon^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 1-\rho & (1-\rho)^2 & \dots & (1-\rho)^2 & 1-\rho \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

ahol az i. koordináta az i. oszlop összege. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} \underline{1}^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\underline{1} &= \sigma_\epsilon^{-2}\left(2(1-\rho) + (n-2)(1-\rho)^2\right) = \\ &= \sigma_\epsilon^{-2}(1-\rho)\left(2 + (n-2)(1-\rho)\right), \end{aligned} \tag{3.7}$$

azaz az előző lépésben kapott vektor koordinátáinak összege. A nevezőre rátérve és felhasználva (3.6)-t:

$$\underline{1}^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\underline{X} = \sigma_\epsilon^{-2}(1-\rho)\left(X_1 + X_n + \sum_{i=2}^{n-1}(1-\rho)X_i\right).$$

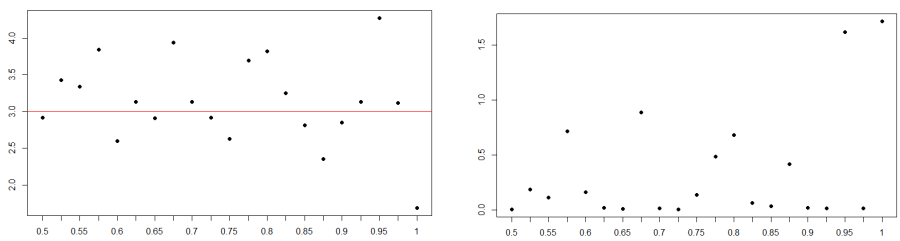
Visszahelyettesítve (3.1) a számlálóra és a nevezőre kapott eredményeket:

$$\hat{m} = \frac{\underline{1}^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\underline{X}}{\underline{1}^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\underline{1}} = \frac{X_1 + X_n + \sum_{i=2}^{n-1}(1-\rho)X_i}{2 + (n-2)(1-\rho)}.$$

Ekkor az általános eset alapján (3.3) torzítatlan és a szórása:

$$\mathrm{D}^2(\hat{m}) = \frac{1}{\underline{1}^\mathsf{T}\Sigma^{-1}\underline{1}} = \frac{\sigma_\epsilon^2}{(1-\rho)\left(2 + (n-2)(1-\rho)\right)} = \frac{\sigma_X^2(1+\rho)}{2 + (n-2)(1-\rho)}.$$

ahol behelyettesítettük a (3.7) formulát.

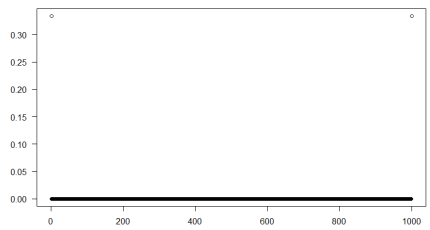


(a) A becslések értékei

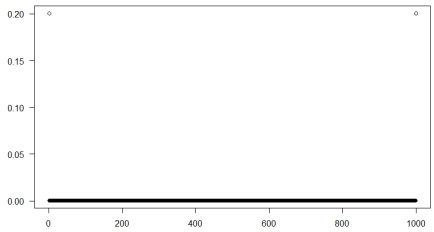
(b) A négyzetes eltérés

3.1. ábra. A $\hat{m}$ becslés fOU esetén 2000 pontra $\sigma = 1$, $\theta = -1$

A (3.1) ábra bal oldalán azt láthatjuk, hogy különböző H értékekre mekkora $\hat{m}$ becsléseket kapunk, a jobb oldalán pedig a valódi m értéktől való négyzetes



(a) $\theta = -1$, $\sigma = 1$

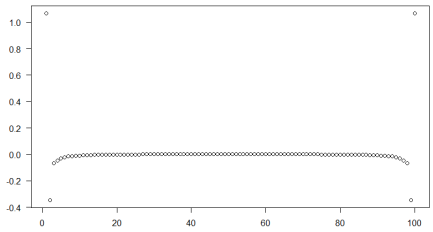


(b) $\theta = -3$, $\sigma = 2$

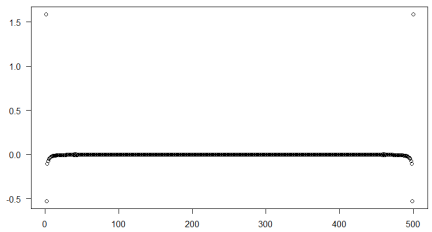
3.2. ábra. Együtthatók mintázata OU esetén 1000 pontra

eltérést. A $H \in \{0,50; 0,55; \ldots; 1,00\}$ értékekre futtattam le egy-egy szimulációt. Az ábra alapján levonható azt a következtetés, hogy a H növelésével nőhet a szórás is.

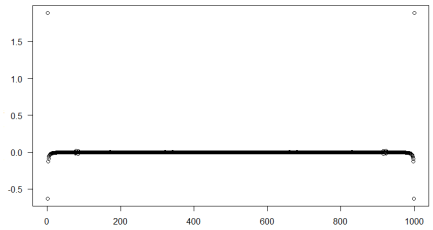
Mivel a ML-becslés a mintaelemek lineáris kombinációja, ezért érdemes vizsgálni, hogy az egyes mintaelemek milyen súllyal szerepelnek az összegben. A legelső esetben a klasszikus Ornstein-Uhlenbeck folyamatot vizsgáltam. Ebben az esetben a (3.2) ábrán látszik, hogy az első, illetve az utolsó mintaelem rendelkezik nullától jelentősen eltérő súllyal. A két egymás melletti ábrán látszik, hogy a különböző paraméterezés a pontok elhelyezkedését nem változtatja, csak az értékeit.



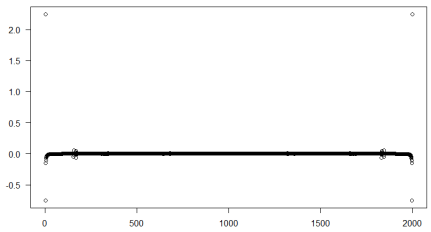
(a) 100 elemű mintára



(b) 500 elemű mintára



(c) 1000 elemű mintára

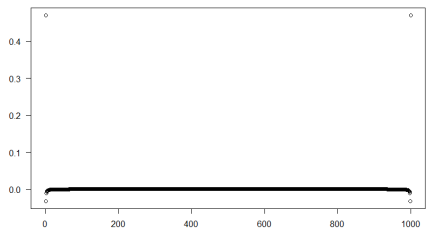


(d) 2000 elemű mintára

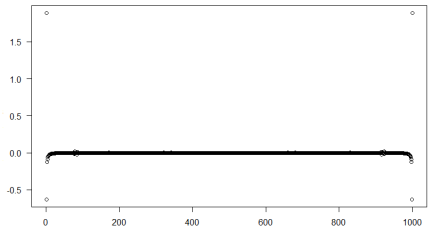
3.3. ábra. Együtthatók mintázata fOU esetén $\sigma = 1$, $\theta = -1$ és $H = 0,75$

A (3.3) ábrán látható különböző mintaelemszámra az együtthatók mintázatát, ha frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamatról van szó. Észrevehető a szabályosság, miszerint az első és az utolsó mintaelem szerepel nagy pozitív súllyal, a második és az utolsó előtti pedig kisebb (megközelítőleg a harmada)

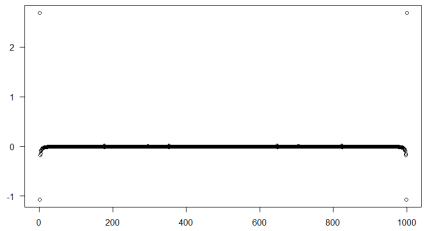
negatív súllyal, az össze többi együttható pedig 0-hoz tart. A paraméterezés mindegyiknél ugyanaz, $\sigma = 1$, $\theta = -1$ és $H = 0,75$. Az ábra szimmetriájára a folyamat stacionaritása a válasz.



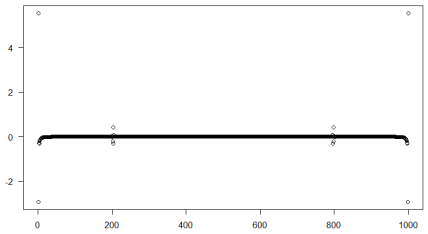
(a) $H = 0,55$ esetén



(b) $H = 0,75$ esetén



(c) $H = 0,8$ esetén

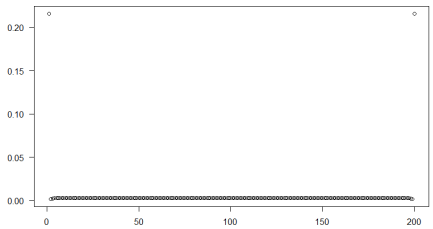


(d) $H = 0,9$ esetén

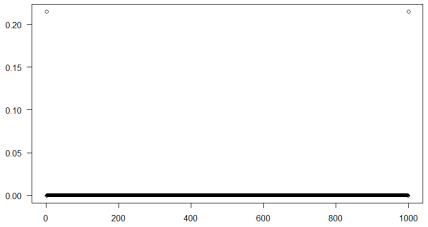
3.4. ábra. Együtthatók mintázata fOU esetén 1000 pontra $\sigma = 1$ és $\theta = -1$

A (3.4) ábrán az látható, hogy a H értéke hogyan befolyásolja az együtthatók mintázatát, miközben a többi paraméter változatlan, azaz $\sigma = 1$ és $\theta = -1$. Megfigyelhető, hogy ahogy nő a H úgy nő az együtthatók nagysága is.

Érdemes ugyanezt megvizsgálni a kevert frakcionális esetben is. Vegyük a $H = 0,75$, $\sigma = 2$, $a = 1$, $b = 1$ és $\theta = -3$ esetet, amikor a frakcionális Brown-mozgás és a klasszikus ugyanannyira befolyásolja a zajképzést. Ilyen paraméterezés esetében szintén az első és az utolsó együttható tekinthető 0-tól eltérőnek.



(a) 200 elemű mintára

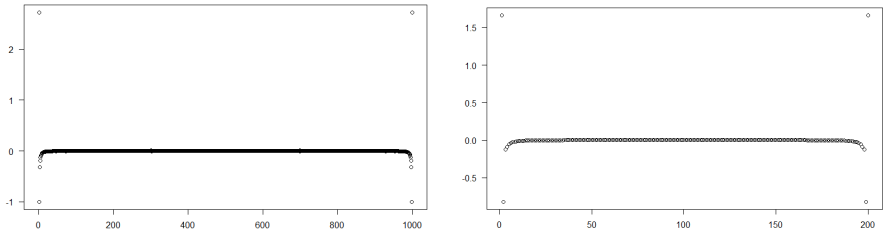


(b) 1000 elemű mintára

3.5. ábra. Az együtthatók mintázata mfOU és $H = 0,75$, $\sigma = 2$, $a = 1$, $b = 1$ és $\theta = -3$ paraméterezés esetén

Azonban nem szabad arra gondolni, hogy ez minden paraméterezés esetén ez teljesül, hiszen ha az $M_t^H = a \cdot B_t^H + b \cdot B_t$ összegben az a együtthatója jóval

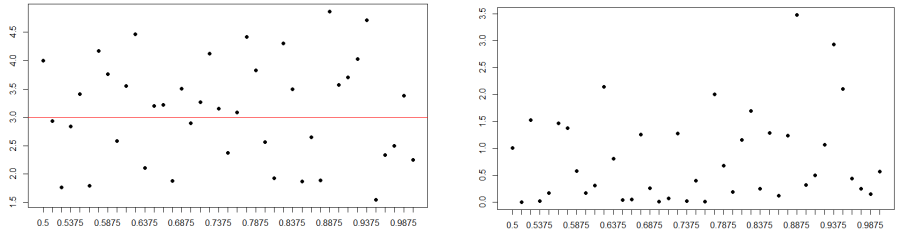
nagyobb nagyságrendű, akkor már az együtthatók mintázata jobban hasonlít a frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamatéra.



(a) 200 elemű mintára (b) 1000 elemű mintára

3.6. ábra. Az együtthatók mintázata mfOU és $H = 0,95$, $\sigma = 2$, $a = 55$, $b = 1$ és $\theta = -3$ paraméterezés esetén

A frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamathoz hasonlóan a kevertnél is vizsgálható az $\hat{m}$ becsléstől való négyzetes eltérés. Itt 1000 mintavételezési pontra számítottam ki 40 különböző H paraméter esetén, továbbá $\sigma = 1$, $\theta = -1$, $a = 1$ és $b = 1$. Itt is megfigyelhető, hogy a szórás a H nagyságával együtt nő. A (3.7) ábra bal oldalán a becsléseket ábrázoltam, a jobb oldali ábrán pedig a négyzetes eltérést.



(a) A becslések értékei (b) A négyzetes eltérés

3.7. ábra. A $\hat{m}$ becslés mfOU esetén 1000 pontra $\sigma = 1$, $\theta = -1$, $a = 1$, $b = 1$

3.2. A várható érték becslése, folytonos eset

Ebben a részben egy olyan módszert ismertetek, ami az előző részben felvetett alapproblémát oldja meg mértékcserével, folytonos esetben. Legyen az $(X_t)_{t\geq 0}$ folyamat egy centrált, stacionárius Gauss-folyamat egy P valószínűségi mérték alatt. Egy $P_{a(t)}$ valószínűségi mérték alatt pedig az $(X_t - a(t))_{t\geq 0}$ egy szintén 0 várható értékű, ugyanolyan kovariancia mátrixú Gauss-folyamat. Itt $a(t) \in \mathbb{R}$ a becsülendő paraméter. A következő tétel a [20] könyvben található.

3.2.1. Tétel. *Legyenek P és $P_{a(t)}$ Gauss-mértékek. A két mérték ekvivalenciája pontosan akkor teljesül, ha létezik olyan $\eta_{a(t)}$ valószínűségi változó, hogy $\eta_{a(t)}$ és X_t kovarianciája P alatt $a(t)$-vel egyenlő, azaz*

$$\mathrm{E}_P(\eta_{a(t)} \cdot X_t) = a(t).$$

Itt feltettük, hogy $\mathrm{E}(X_t) = 0$. *Ekkor a Radon-Nykodim derivált a következő alakba írható:*

$$\frac{dP_{a(t)}}{dP}(t) = D \cdot e^{\eta_{a(t)}},$$

ahol D *egy normáló konstans,* $D = \exp(\frac{1}{2} \cdot \mathrm{D}^2_{a(t)}(\eta_{a(t)}))$.

Jelen esetben $a(t) \equiv m$. Ezért ha létezik egy olyan η_1-t, amellyel teljesül, hogy

$$\mathrm{E}_P(\eta_1 \cdot X_t) = 1, \tag{3.8}$$

akkor $\eta_m := m \cdot \eta_1$. Ekkor a Radon-Nykodim derivált a következő alakban áll elő:

$$\frac{dP_m}{dP}(t) = e^{m \cdot \eta_1 - \frac{1}{2} m^2 \mathrm{D}^2_m(\eta_1)}.$$

Erre egy maximum likelihood becslést alkalmazhatunk, logaritmust véve a következő kifejezéshez jutunk:

$$m \cdot \eta_1 - \frac{1}{2} m^2 \mathrm{D}^2_m(\eta_1),$$

majd m szerint deriválva megkapjuk a maximalizálandó egyenletet:

$$0 = \eta_1 - m \cdot \mathrm{D}^2_m(\eta_1) \Longleftrightarrow \hat{m} = \frac{\eta_1}{\mathrm{D}^2_m(\eta_1)}.$$

Ez a becslés tényleg maximum, hiszen az előző egyenletet jobb oldalát még egyszer m szerint deriválva $-D^2(\eta_1)$-et kapunk, ami negatív.

Példaképp legyen most $X_t = B_t$, ahol B_t egy $[T_1, T_2]$ intervallumon értelmezett Brown-mozgás. Ekkor $\eta_1 = B_{T_1}/T_1$ (ha $T_1 \neq 0$) hiszen

$$\mathrm{E}(\eta_1 \cdot B_t) = \frac{1}{T_1} \cdot \min(T_1, t) = 1.$$

Ekkor $\hat{m} = B_{T_1}$, ugyanis

$$\mathrm{D}^2(\eta_1) = \frac{1}{T_1^2} \cdot \mathrm{D}^2(B_{T_1}) = \frac{1}{T_1}.$$

Ezt a módszert a klasszikus Ornstein-Uhlenbeck folyamatra alkalmaztam a $[0, T]$ intervallumon, amelynél $\mathrm{cov}(X_t, X_s) = \mathrm{E}(X_t \cdot X_s) = \frac{-\sigma^2}{2\theta} e^{\theta|t-s|}$, akkor azt szerettem volna elérni, hogy

$$\eta_1 = c_1 \cdot X_0 + c_2 \cdot X_T + c_3 \cdot \int_0^T X_s ds,$$

alkalmas c_1, c_2, c_3 konstanssal kielégítse a (3.8) feltételt. Legyen

$$1 = \mathrm{E}(X_t \cdot \eta_1) = \mathrm{E}\left(\left(c_1 \cdot X_0 + c_2 \cdot X_T + c_3 \cdot \int_0^T X_s ds\right) \cdot X_t\right) =$$

$$= -c_1 \frac{\sigma^2}{2\theta} \cdot e^{\theta t} - c_2 \frac{\sigma^2}{2\theta} \cdot e^{\theta(T-t)} - c_3 \frac{\sigma^2}{2\theta} \cdot \int_0^T e^{\theta|t-s|} ds,$$

ahol

$$\int_0^T e^{\theta|t-s|}ds = \int_0^t e^{\theta(t-s)}ds + \int_t^T e^{\theta(s-t)}ds = \frac{1}{-\theta}\left[e^{\theta(t-s)}\right]_0^t + \frac{1}{\theta}\left[e^{\theta(s-t)}\right]_t^T =$$
$$= \frac{-1}{\theta} + \frac{e^{\theta t}}{\theta} + \frac{e^{\theta(T-t)}}{\theta} - \frac{1}{\theta} = \frac{e^{\theta t}}{\theta} + \frac{e^{\theta(T-t)}}{\theta} - \frac{2}{\theta}.$$

Ekkor a felső egyenletbe visszahelyettesítve

$$1 = -c_1\frac{\sigma^2}{2\theta}\cdot e^{\theta t} - c_2\frac{\sigma^2}{2\theta}\cdot e^{\theta(T-t)} - c_3\frac{\sigma^2}{2\theta}\cdot\left(\frac{e^{\theta t}}{\theta} + \frac{e^{\theta(T-t)}}{\theta} - \frac{2}{\theta}\right) =$$
$$= e^{\theta t}\frac{\sigma^2}{2\theta}\left(-c_1 - \frac{c_3}{\theta}\right) + e^{\theta(T-t)}\frac{\sigma^2}{2\theta}\left(-c_2 - \frac{c_3}{\theta}\right) + \frac{c_3\sigma^2}{\theta^2}.$$

Ekkor $\frac{c_3}{-\theta} = c_1 = c_2$ és $c_3 = \frac{\theta^2}{\sigma^2}$ választás jó lesz. Tehát

$$\eta_1 = \frac{-\theta}{\sigma^2}\cdot X_0 - \frac{\theta}{\sigma^2}\cdot X_T + \frac{\theta^2}{\sigma^2}\cdot\int_0^T X_s ds. \tag{3.9}$$

A becsléshez szükség lesz még $\mathrm{D}(\eta_1)^2$-ra is.

$$\mathrm{D}(\eta_1)^2 = \frac{\theta^2}{\sigma^4}\cdot\mathrm{D}(X_0)^2 + \frac{\theta^2}{\sigma^4}\cdot\mathrm{D}(X_T)^2 + \frac{\theta^4}{\sigma^4}\cdot\mathrm{D}\left(\int_0^T X_s ds\right)^2 + \tag{3.10}$$
$$+2\frac{\theta^2}{\sigma^4}\cdot\mathrm{cov}(X_0, X_T) - 2\frac{\theta^3}{\sigma^4}\cdot\mathrm{cov}\left(X_0, \int_0^T X_s ds\right) - 2\frac{\theta^3}{\sigma^4}\cdot\mathrm{cov}\left(X_T, \int_0^T X_s ds\right)$$

A hatból három tagot nem lehet a kovariancia függvény segítségével közvetlenül kiszámítani. Amikor a harmadik tagot kell kiszámítani, akkor ki kell használni, hogy $\mathrm{E}(X_t) = 0$, majd alkalmazva az $u = s - z$ helyettesítést, felbontva az abszolútértéket és elvégezve az integrálokat megkapható a végeredmény.

$$\mathrm{D}\left(\int_0^T X_s ds\right)^2 = \mathrm{E}\left(\left(\int_0^T X_s ds\right)^2\right) = \int_0^T\int_0^T \mathrm{E}(X_s X_z)dsdz =$$
$$= \int_0^T\int_0^T \frac{-\sigma^2}{2\theta}e^{\theta|s-z|}dsdz = \frac{-\sigma^2}{2\theta}\int_0^T\int_{-z}^{T-z} e^{\theta|u|}dudz =$$
$$= \frac{-\sigma^2}{2\theta}\left[\int_0^T\int_{-z}^0 e^{-\theta u}dudz + \int_0^T\int_0^{T-z} e^{\theta u}dudz\right] =$$
$$= \frac{\sigma^2}{2\theta^2}\left[\int_0^T \left(1 - e^{\theta z}\right) - \left(e^{\theta(T-z)} - 1\right)dz\right] =$$
$$= \frac{\sigma^2}{2\theta^2}\left[2T - \frac{1}{\theta}\left(e^{\theta T} - 1\right) + \frac{1}{\theta}\left(1 - e^{\theta T}\right)\right] = \frac{\sigma^2}{\theta^2}\left[T + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta}e^{\theta T}\right]$$

Szükséges még két kovariancia is:

$$\mathrm{cov}\left(X_0, \int_0^T X_s ds\right) = -\frac{\sigma^2}{2\theta}\cdot\int_0^T e^{\theta s}ds = -\frac{\sigma^2}{2\theta^2}\cdot(e^{\theta T} - 1)$$

Hasonlóan:

$$\operatorname{cov}\left(X_T, \int_0^T X_s ds\right) = -\frac{\sigma^2}{2\theta} \cdot \int_0^T e^{\theta(T-s)} ds = -\frac{\sigma^2}{2\theta^2} \cdot (e^{\theta T} - 1).$$

Mindent visszahelyettesítve a (3.10)-as képletbe:

$$\mathrm{D}(\eta_1)^2 = \frac{\theta^2}{\sigma^4}\left[-\frac{2\sigma^2}{2\theta} + \theta^2\frac{\sigma^2}{\theta^2}\left[T + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta}e^{\theta T}\right] - 2\frac{\sigma^2}{2\theta} \cdot e^{\theta T} + 2\theta\frac{\sigma^2}{\theta^2}(e^{\theta T} - 1)\right] =$$

$$= \frac{\theta^2}{\sigma^2}\left[\frac{-1}{\theta} + T + \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta}e^{\theta T} - \frac{1}{\theta}e^{\theta T} + \frac{2}{\theta}e^{\theta T} - \frac{2}{\theta}\right] = \frac{\theta^2}{\sigma^2}\left[T - \frac{2}{\theta}\right] \tag{3.11}$$

Ezzel elkészült a becslés $\hat{m}$-re, ha a klasszikus Ornstein-Uhlenbeck folyamatról van szó, ugyanis összerakva a (3.9)-es és a (3.11)-es képletet:

$$\hat{m} = \frac{\eta_1}{\mathrm{D}^2(\eta_1)} = \frac{X_0 + X_T - \theta\int_0^T X_s ds}{2 - \theta T}.$$

Ez a becslés normális eloszlású[19] és a torzítatlan:

$$\mathrm{E}(\hat{m}) = \frac{1}{2-\theta T} \cdot \mathrm{E}\left(X_0 + X_T - \theta\int_0^T X_s ds\right) =$$

$$= \frac{1}{2-\theta T} \cdot \left(m + m - \theta\int_0^T \mathrm{E}(X_s) ds\right) = \frac{1}{2-\theta T} \cdot (2m - \theta T m) = m.$$

Illetve a négyzetes eltérésre teljesül, hogy

$$\mathrm{E}((\hat{m} - m)^2) = \mathrm{D}^2(\hat{m}) = \frac{1}{\mathrm{D}^2(\eta_1)} = \frac{\sigma^2}{\theta^2 \cdot \left(T - \frac{2}{\theta}\right)} = \frac{\sigma^2}{\theta \cdot (\theta T - 2)},$$

ahol használtuk a (3.11) képletet. Ezen kívül $\hat{m}$ elégséges statisztika és az egyetlen hatásos becslése m-nek.[19]

Érdekes kérdés lenne még megnézni az előző η_1 definíció megfelelő-e frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamat esetén. Erre a kérdésre a válasz nemleges, ugyanis itt η_1 függ attól a $t \in [0, T]$ időponttól, ami nem megengedett.

Ehhez a számításhoz szükséges az (1.8) összefüggés, hogy

$$\operatorname{cov}(X_t^H, X_0^H) = \sigma^2 \cdot H\Bigg[\Gamma(2H) \cdot (-\theta)^{-2H} \cdot e^{\theta t} +$$

$$+\frac{2H-1}{-\theta} \cdot e^{\theta t} \cdot \int_0^t \sinh(-\theta x) \cdot x^{2H-2} dx + \frac{2H-1}{-\theta} \cdot \sinh(-\theta t) \cdot \int_t^\infty e^{\theta x} x^{2H-2} dx\Bigg].$$

Tehát itt is legyen

$$\eta_1 = c_1 \cdot X_0^H + c_2 \cdot X_T^H + c_3 \cdot \int_0^T X_s^H ds \tag{3.12}$$

alakú és ki kell kiszámítani $\mathrm{cov}(\eta_1, X_t^H)$-t. Az első tag a $\mathrm{cov}(X_t^H, X_0^H)$, és a kovarianciafüggvény előzetes átalakítását felhasználva megkapható, hogy

$$\mathrm{cov}(X_t^H, X_0^H) = \sigma^2 \cdot H \cdot \Bigg[\Gamma(2H) \cdot (-\theta)^{-2H} \cdot e^{\theta t} +$$
$$+\frac{2H-1}{-2\theta} \cdot \int_0^t e^{\theta(t-x)} \cdot x^{2H-2} dx + \frac{2H-1}{2\theta} \cdot \int_0^t e^{\theta(t+x)} \cdot x^{2H-2} dx +$$
$$+\frac{2H-1}{-2\theta} \cdot \int_t^\infty e^{\theta(x-t)} x^{2H-2} dx + \frac{2H-1}{2\theta} \cdot \int_t^\infty e^{\theta(x+t)} x^{2H-2} dx\Bigg].$$

A második tag is hasonlóan számolható:

$$\mathrm{cov}(X_T^H, X_t^H) = \sigma^2 \cdot H \cdot \Bigg[\Gamma(2H) \cdot (-\theta)^{-2H} \cdot e^{\theta(T-t)} +$$
$$+\frac{2H-1}{-2\theta} \cdot \int_0^{T-t} e^{\theta(T-t-x)} \cdot x^{2H-2} dx + \frac{2H-1}{2\theta} \cdot \int_0^{T-t} e^{\theta(T-t+x)} \cdot x^{2H-2} dx +$$
$$+\frac{2H-1}{-2\theta} \cdot \int_{T-t}^\infty e^{\theta(x-T+t)} x^{2H-2} dx + \frac{2H-1}{2\theta} \cdot \int_{T-t}^\infty e^{\theta(x+T-t)} x^{2H-2} dx\Bigg].$$

Áttérve a harmadik tagra:

$$\mathrm{cov}\left(X_t^H, \int_0^T X_s^H ds\right) = \sigma^2 \cdot H \cdot \Bigg[\Gamma(2H) \cdot (-\theta)^{-2H} \cdot \int_0^T e^{\theta|t-s|} ds +$$
$$+\frac{2H-1}{-\theta} \int_0^T \int_0^{|t-s|} e^{\theta|t-s|} \cdot \sinh(-\theta x) \cdot x^{2H-2} dx ds +$$
$$+\frac{2H-1}{-\theta} \int_0^T \int_{|t-s|}^T e^{\theta x} \cdot \sinh(-\theta|t-s|) \cdot x^{2H-2} dx ds\Bigg].$$

Ez a másik kettőnél hosszabb számolást igényel a harmadik tag, ezt érdemes szintén három részre bontani.

$$\int_0^T e^{\theta|t-s|} ds = \frac{1}{\theta}\left[e^{\theta t} + e^{\theta(T-t)} - 2\right].$$

Majd ezzel az összetevővel kell foglalkozni:

$$\int_0^T \int_0^{|t-s|} e^{\theta|t-s|} \cdot \sinh(-\theta x) \cdot x^{2H-2} dx ds = \frac{1}{2\theta}\Bigg[\int_0^t x^{2H-2} e^{\theta(t-x)} dx +$$
$$-\int_0^t x^{2H-2} dx + \int_0^t x^{2H-2} e^{2\theta x} dx - \int_0^t x^{2H-2} e^{\theta(t+x)} dx + \int_0^{T-t} x^{2H-2} e^{\theta(T-t-x)} dx +$$
$$-\int_0^{T-t} x^{2H-2} dx + \int_0^{T-t} x^{2H-2} e^{2\theta x} dx - \int_0^{T-t} x^{2H-2} e^{\theta(T-t+x)} dx\Bigg].$$

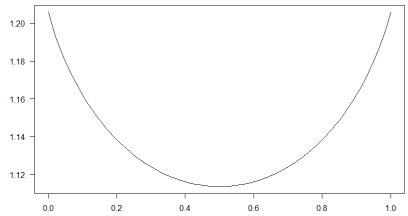
Illetve:

$$\int_0^T \int_{|t-s|}^T e^{\theta x} \cdot \sinh(-\theta|t-s|) \cdot x^{2H-2} dx ds = \frac{1}{2\theta} \Bigg[4 \int_0^\infty x^{2H-2} e^{\theta x} dx - \int_0^t x^{2H-2} dx +$$
$$- \int_0^t x^{2H-2} e^{\theta 2x} dx - \int_t^\infty x^{2H-2} e^{\theta(x-t)} dx - \int_t^\infty x^{2H-2} e^{\theta(x+t)} dx - \int_0^{T-t} x^{2H-2} dx +$$
$$- \int_0^{T-t} x^{2H-2} e^{\theta 2x} dx - \int_{T-t}^\infty x^{2H-2} e^{\theta(x-T+t)} dx - \int_{T-t}^\infty x^{2H-2} e^{\theta(x+T-t)} dx \Bigg].$$

Visszahelyettesítve az eredeti (3.12) egyenletbe $c_1 = c_2$ és $c_3 = -\theta c_1$ konstanssal:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X_t, \eta_1) = c_1 \sigma H \Bigg[& \frac{1}{-\theta} \cdot t^{2H-1} + \frac{1}{-\theta} \cdot (T-t)^{2H-1} + \\ & + e^{-\theta t} \cdot (2H-1) \cdot (-\theta)^{-2H} \cdot \Gamma(2H-1, -\theta t) + \\ & + e^{-\theta(T-t)} \cdot (2H-1) \cdot (-\theta)^{-2H} \cdot \Gamma(2H-1, -\theta(T-t)) \Bigg], \end{aligned}$$

ahol $\Gamma(a, x)$ a befejezetlen gamma függvény. Innen c_1 egyértelműen meghatározható, de függ t-től, így c_2 és c_3 is. Ábrázolva a c_1-re kapott kifejezést t függvényében, akkor látható, hogy az nem konstans függvény. Mivel tetszőleges paraméterezés esetén konstansnak kellene lenni, ez elegendő is.



3.8. ábra. A c_1 ábrázolása t függvényében, $H = 0,75$, $\sigma = 2$, $\theta = -3$ paraméterezéssel

3.3. Szigma becslése, diszkrét eset

A következő feladat a σ^2 paraméter becslése frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamat esetén. Diszkrét esetben maximum likelihood becslést alkalmaztam. Legyenek $X_1^H, X_2^H, \ldots, X_n^H$ a megfigyeléseink a $t_1, \ldots, t_n$ időpontokban, jelölje $\underline{X}$ a $\left[X_1^H, \ldots, X_n^H\right]$ vektort. A becsléshez felbontható a kovariancia mátrix egy σ-tól függő és egy σ-tól nem függő részre. Ugyanis

$$\operatorname{cov}(X_i^H, X_j^H) = \sigma^2 \cdot \mathrm{E}\left(\int_{-\infty}^{t_i} e^{\theta(t_i - u)} dB_u^H \cdot \int_{-\infty}^{t_j} e^{\theta(t_j - v)} dB_v^H \right) = \sigma^2 \cdot \Sigma_{i,j},$$

ahol $\Sigma_{i,j}$ annak a frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamatnak a kovarianciája, ha $\sigma = 1$. Legyen $\Sigma := (\Sigma_{i,j})_{i,j=1}^n$ mátrix, ekkor az $\underline{X}$ kovariancia függvénye

$\sigma^2 \cdot \Sigma$-val egyenlő. Kihasználva az együttes normalitást és a centráltságot, a likelihood függvény:

$$L(\underline{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det(\sigma^2\Sigma)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\underline{X}^{\mathsf{T}}(\sigma^2\Sigma)^{-1}\underline{X}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n\sqrt{\det\Sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\underline{X}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{X}},$$

ahol a második lépésben kihasználtuk, hogy $\det(\sigma^2\Sigma) = \sigma^{2n}\det(\Sigma)$. Ennek a függvénynek kell a logaritmusát venni:

$$l(\underline{X}) = -\frac{n}{2}\cdot\ln(\sigma^2) - \ln\left((2\pi)^{\frac{n}{2}}\cdot\sqrt{\det\Sigma}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\cdot\underline{X}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{X},$$

majd σ^2 szerint deriválni. A σ^2 a szélsőértékét ott veszi fel, ahol ez az egyenlet 0, azaz

$$-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\cdot\underline{X}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{X} = 0 \Longleftrightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\underline{X}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{X}}{n}.$$

Meg kell határozni ennek a becslésnek az eloszlását. Az első lépéshez szükséges, hogy Σ^{-1} pozitív definit. Ez pedig teljesül, mivel pozitív definit mátrix inverze is az. Ezért

$$n\cdot\hat{\sigma}^2 = \underline{X}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{X} = \underline{X}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\Sigma^{-\frac{1}{2}}\underline{X} = \left(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\underline{X}\right)^{\mathsf{T}}\left(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\underline{X}\right) = C^{\mathsf{T}}C,$$

ahol a $C := \Sigma^{-\frac{1}{2}}\underline{X}$ jelölés került bevezetésre. Mivel $\underline{X} \sim N_n(0, \sigma^2\ \Sigma)$, ezért a (3.1.1) tétel alapján C n-dimenziós normális, $\mathrm{E}(C) = 0$ és

$$\mathrm{D}^2(C) = (\Sigma^{-\frac{1}{2}})^{\mathsf{T}}\cdot\sigma^2\cdot\Sigma\cdot\Sigma^{-\frac{1}{2}} = \sigma^2\cdot I_n,$$

ahol I_n az n-dimenziós egységmátrix. Azaz $C \sim N_n(0, \sigma^2\cdot I_n)$. A kovariancia függvény alapján C oszlopai függetlenek, legyen az i-edik oszlop C_i-vel jelölve. Ekkor

$$n\cdot\hat{\sigma}^2 = C^{\mathsf{T}}C = \sum_{i=1}^{n} C_i^{\mathsf{T}}C_i \sim \sigma^2\chi_n^2.$$

Ekkor a becslés várható értékére teljesül, hogy

$$\mathrm{E}\left(\hat{\sigma}^2\right) = \mathrm{E}\left(\frac{\sigma^2}{n}\cdot\chi_n^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}\cdot\mathrm{E}\left(\chi_n^2\right) = \frac{\sigma^2}{n}\cdot n = \sigma^2,$$

azaz $\hat{\sigma}^2$ torzítatlan. A szórása pedig

$$\mathrm{D}^2(\hat{\sigma}^2) = \frac{\sigma^4}{n^2}\cdot\mathrm{D}^2\left(\chi_n^2\right) = \frac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2n = \frac{2\cdot\sigma^4}{n}.$$

Ez a becslés persze csak akkor használható, ha a H és θ paraméterek ismertek. Mivel a becslés során csak az kellett, hogy a kovariancia mátrix felbontható legyen σ-tól függő és nem függő részre, ezért ugyanez elmondható kevert frakcionális Ornstein-Uhlenbeck esetben is.

A klasszikus Ornstein-Uhlenbeck folyamat esetén a folyamat a korábbiak alapján ilyen alakú(3.4):

$$X_{n+1} = \rho X_n + \epsilon_{n+1},$$

megfelelő ρ-val és ϵ-nal. Ezen kívül már felírjuk a kovariancia mátrixot(3.5), ami alapján:

$$\underline{X}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{X} = \sigma_\epsilon^2 \cdot \left[X_1^2 + X_n^2 - 2\rho\sum_{i=2}^{n} X_i X_{i-1} + \sum_{i=2}^{n-1} X_i^2(1+\rho^2)\right] =$$

$$= \sigma_\epsilon^2 \cdot \left[X_1^2 + \sum_{i=2}^{n} X_i^2 - 2\rho\sum_{i=2}^{n} X_i X_{i-1} + \rho^2\sum_{i=2}^{n-1} X_i^2\right] =$$

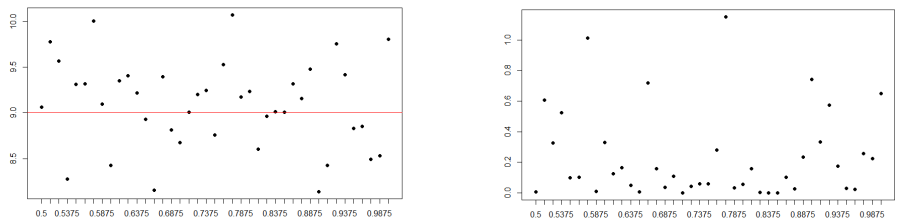
$$= \sigma_\epsilon^2 \cdot \left[X_1^2 + \sum_{i=2}^{n} (X_i - \rho X_{i-1})^2 - \rho^2\sum_{i=2}^{n} X_{i-1}^2 + \rho^2\sum_{i=2}^{n-1} X_i^2\right] =$$

$$= \sigma_\epsilon^2 \cdot \left[(1-\rho^2)X_1^2 + \sum_{i=2}^{n} (X_i - \rho X_{i-1})^2\right].$$

Ekkor a becslés a következő alakban áll elő:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\underline{X}^{\mathsf{T}}\Sigma^{-1}\underline{X}}{n} = \frac{\sigma_\epsilon^2}{n} \cdot \left[(1-\rho^2)X_1^2 + \sum_{i=2}^{n} (X_i - \rho X_{i-1})^2\right].$$

Ebben az esetben is vizsgálható a valódi értéktől való négyzetes eltérés. A (3.9) ábra jobb oldalán az látható, hogy különböző H értékekre mekkorák $\hat{\sigma}^2$ becslés értékei. A bal oldalán pedig a valódi σ^2 értéktől való négyzetes eltérés van ábrázolva. A $H \in \{0,50; 0,5125; \ldots; 1,00\}$ értékekre futtattam le egy-egy szimulációt, így összesen 40 különböző 1000 pontos szimulációt készítettem el.



(a) A becslések értékei

(b) A négyzetes eltérés

3.9. ábra. A $\hat{\sigma}^2$ becslés fOU esetén 1000 pontra, $\theta = -1$

3.4. Szigma becslése, folytonos eset

A következő becslésnél áttértem a folytonos esetre és felhasználjuk azt a tényt, hogy a frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamat ergodikus. Ehhez szükség van néhány definícióra és tételre, ezeket a [21] könyv alapján dolgoztam ki. Legyen $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ valószínűségi mező és rajta a T az Ω-n definiált eltolás operátor. Például az X_t folyamatra a k-val való eltolás operátora:

$$T(X_i, X_{i+1}, X_{i+2}, \ldots) = (X_{k+i}, X_{k+i+1}, X_{k+i+2}, \ldots).$$

A témakörben két fontos fogalom a stacionaritás és az ergodicitás.

3.4.1. Definíció. *Egy $T : \Omega \to \Omega$ mérhető transzformáció stacionárius, ha $\forall A \in \mathbb{A}$-ra $P(T(A)) = P(A)$.*

3.4.2. Definíció. *Egy $T : \Omega \to \Omega$ mérhető transzformáció ergodikus, ha az eltolásinvariáns események bekövetkezési valószínűsége triviális, azaz $\forall A \in \mathbb{A}$-ra*

$$T^{-1}(A) = A \Longrightarrow P(A) = 0 \text{ vagy } P(A) = 1.$$

Az (X_t) stacionárius folyamat ergodikus, ha létezik T stacionárius, ergodikus transzformáció és X valószínűségi változó úgy, hogy $X_n(\omega) = X(T^n(\omega))$.

3.4.3. Definíció. *A $T : \Omega \to \Omega$ mérhető transzformáció keveredik, ha A, B eseményekre*

$$\lim_{n\to\infty} P(A \cap T^{-n}(B)) = P(A)P(B).$$

Az (X_t) folyamat keveredik, ha a hozzá tartozó T eltolás operátor keveredik.

A definíciókból látszik, hogy a keveredésből következik az ergodicitás. Ugyanis feltéve, hogy teljesül a keveredés és B egy eltolás invariáns esemény, ekkor tetszőleges A eseményre

$$P(A)P(B) = \lim_{n\to\infty} P(A \cap T^{-n}(B)) = \lim_{n\to\infty} P(A \cap B) = P(A \cap B).$$

Azaz az A és B függetlenek, ahol A tetszőleges volt. Ha speciálisan $A = B$, akkor azt kaptuk, hogy $P(B^2) = P(B)$, az pedig csak úgy lehetséges, ha $P(B) = P(A)$ az 0 vagy 1. Azonban a két fogalom nem ekvivalens, tehát lehet konstruálni egy olyan folyamatot, amely ergodikus, de nem keveredik ([21]).

Továbbá, ha az (X_t) stacionárius Gauss-folyamat, és $R(t) \to 0$, ha $|t| \to \infty$, akkor (X_t) keveredik [21]. Az ergodikus tulajdonság azért fontos, mert akkor használható az Ergod-tétel:

3.4.1. Tétel (Ergod-tétel). *A T operátor akkor és csak akkor ergodikus, ha $h \in L^1(\Omega, A, P)$ mérhető függvény esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} h(T^j(X_0, \ldots, X_k)) = \mathrm{E}(h(X_0, \ldots, X_k)) \text{ 1 valsz.}$$

Ismert tény, hogy a frakcionális Brown-mozgás növekményei ergodikus folyamatot alkotnak, és ez a tulajdonság átöröklődik az (X_t^H) frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamatokra is, ha $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Ugyanis a kovariancia függvényre teljesül a következő tétel.([5])

3.4.2. Tétel. *Legyen $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, $N = 1, 2, \ldots$ és ekkor rögzített t-re, ha $s \to \infty$, akkor*

$$\mathrm{cov}(X_t^H, X_{t+s}^H) = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{n=1}^{N} (-\theta)^{-2n} \left(\prod_{k=0}^{2n-1} (2H - k) \right) s^{2H-2n} + O(s^{2H-2n-2}).$$

Ebből látszik, hogy $R(t) = \mathrm{cov}(X_s^H, X_{t+s}^H) \to 0$, ha $t \to \infty$.

Érdemes lenne vizsgálni a frakcionális Ornstein-Uhlenbeck növekményeit, mert az valószínűleg nem függ a θ-tól. Tehát ha $0 = t_0, t_1, \ldots, t_n = 1$ egy $\frac{1}{n}$-es

felosztása a $[0,1]$-nek, akkor frakcionális Brown-mozgás növekményeire ismert tény(1.1.1), hogy teljesül az L^1-beli konvergencia:

$$n^{pH-1}\sum_{j=0}^{n-1}|B^H_{t_{j+1}}-B^H_{t_j}|^p \longrightarrow \mathrm{E}(|B^H_1|^p). \tag{3.13}$$

A sejtésünk az, hogy a frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamat növekményei is ide tartanak.

$$\sum_{j=0}^{n-1}|X^H_{t_{j+1}}-X^H_{t_j}|^{\frac{1}{H}} = \sum_{j=0}^{n-1}\left|\theta\int_{t_j}^{t_{j+1}}X^H_s ds+\sigma(B^H_{t_{j+1}}-B^H_{t_j})\right|^{\frac{1}{H}} = \sum_{j=0}^{n-1}|a_{n,j}+b_{n,j}|^{\frac{1}{H}},$$

ahol be lett vezetve az $a_{n,j}$ jelölés az integrálra és a $b_{n,j}$ a frakcionális Brown-mozgás növekményének σ-szorosára. Tudjuk, hogy

$$|a_{n,j}| = \left|\theta\int_{t_j}^{t_{j+1}}X^H_s ds\right| \leq \max|X^H_s|\cdot\frac{|\theta|}{n} = c\cdot\frac{1}{n}$$

alkalmas c konstanssal. A fentiből az a sejtés vonható le, hogy az összeg ugyanoda tart, ahova a $b_{n,j}$-k összege tartana, azaz

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left||a_{n,j}+b_{n,j}|^{\frac{1}{H}}-|b_{n,j}|^{\frac{1}{H}}\right| \longrightarrow 0.$$

A becslésünkhöz felhasználtam a Lagrange-középérték tételt, miszerint ha létezik f az $[d,e]$ zárt intervallumon folytonos függvény, ami az (d,e)-ben differenciálható, akkor létezik olyan $c\in(d,e)$, amelyre teljesül, hogy $f(e)-f(d) = f'(c)(e-d)$. Ezt az $f(x)=x^{\frac{1}{H}}$, $e=|a_{n,j}+b_{n,j}|$ és $d=|b_{n,j}|$ szereposztással kell alkalmazni. Az abszolútérték miatt nem probléma, hogy nem tudjuk, d vagy e a nagyobb.

$$\left||a_{n,j}+b_{n,j}|^{\frac{1}{H}}-|b_{n,j}|^{\frac{1}{H}}\right| = \left|\frac{1}{H}\cdot c_j^{\frac{1}{H}-1}\left(|a_{n,j}+b_{n,j}|-|b_{n,j}|\right)\right| \leq$$
$$\leq \left|\frac{1}{H}\cdot c_j^{\frac{1}{H}-1}\left(|a_{n,j}|+|b_{n,j}|-|b_{n,j}|\right)\right| = \left|\frac{1}{H}\cdot c_j^{\frac{1}{H}-1}|a_{n,j}|\right| \leq$$

A következő lépéshez szükséges, hogy

$$c_j \leq \max(|a_{n,j}+b_{n,j}|, |b_{n,j}|) \leq |a_{n,j}|+|b_{n,j}|,$$

tehát:

$$\leq \left|\frac{1}{H}\left(|a_{n,j}|+|b_{n,j}|\right)^{\frac{1}{H}-1}|a_{n,j}|\right| = \frac{1}{H}\left(|a_{n,j}|+|b_{n,j}|\right)^{\frac{1}{H}-1}|a_{n,j}|$$

Szummázva minden j-re:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left||a_{n,j}+b_{n,j}|^{\frac{1}{H}}-|b_{n,j}|^{\frac{1}{H}}\right| \leq \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{H}\left(|a_{n,j}|+|b_{n,j}|\right)^{\frac{1}{H}-1}|a_{n,j}| \leq$$
$$\leq \frac{1}{H}\max\left(\left(|a_{n,j}|+|b_{n,j}|\right)^{\frac{1}{H}-1}\right)\cdot\sum_{j=0}^{n-1}|a_{n,j}| \longrightarrow 0,$$

ugyanis $|a_{n,j}| \to 0$, és $|b_{n,j}| \to 0$, mivel a frakcionális Brown-mozgás folytonos függvény, a szumma pedig $O(1)$ nagyságrendű.

Ezek alapján minden $0 < H < 1$-re teljesül, hogy

$$\sigma^{\frac{1}{H}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |X^H_{t_{j+1}} - X^H_{t_j}|^{\frac{1}{H}} \longrightarrow \mathrm{E}(|B^H_1|^{\frac{1}{H}}).$$

Mivel (X^H_t) Gauss-folyamat 0 várhatóértékkel és $\mathrm{D}^2(B^H_t) = |t|^{2H}$, ezért $B^H_1 \sim N(0,1)$. Így

$$\mathrm{E}\left(|B^H_1|^{\frac{1}{H}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\frac{1}{H}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{H}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

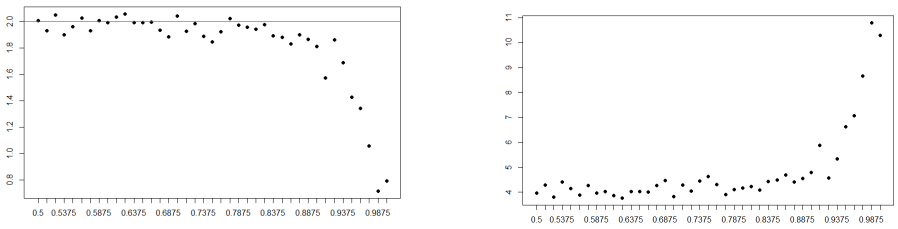
Az $y = \frac{x^2}{2}$ új változó bevezetésével vissza lehet vezetni egy Gamma-függvényre:

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} 2^{\frac{1}{2H}} \cdot y^{\frac{1}{2H}} \cdot e^{-y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} dy =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^{\frac{1}{2H}} \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2H} - \frac{1}{2}} \cdot e^{-y} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^{\frac{1}{2H}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2H} + \frac{1}{2}\right).$$

Ezért σ-ra a becslés kiszámítható úgy, hogy

$$\hat{\sigma} \approx \left(\sum_{j=0}^{n-1} |X^H_{t_{j+1}} - X^H_{t_j}|^{\frac{1}{H}}\right)^{-H} \cdot \pi^{-\frac{H}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\Gamma\left(\frac{1}{2H} + \frac{1}{2}\right)\right)^{H}$$

Ehhez a becsléshez nem kell ismerni a θ paramétert, azonban a H-t igen. A (3.10) ábra jobb oldalán az látható, hogy különböző H értékekre mekkora $\hat{\sigma}$ becsléseket kaptam, a bal oldalán pedig a valódi σ értéktől való négyzetes eltérést. Itt $H \in \{0,5; 0,5125; \ldots; 1\}$ értékekre futtattam le egy-egy szimulációt, és készítettem el az adatsorból a becslést.



(a) A becslések értékei (b) A négyzetes eltérés

3.10. ábra. A $\hat{\sigma}$ becslés fOU esetén 1000 pontra, $\theta = -1$

Az ábrán az látszik, hogy a kb. 0,8-es H értéktől kezdve a négyzetes eltérés nő, a becslés értéke pedig egyre csökken, ahogy $H \to 1$. A sejtésünk az, hogy valószínűleg $H = 1$ esetben a folyamat variációja végtelen lehet.

3.5. Szigma és theta becslése Le Breton alapján

Egy elterjedt és klasszikus becslése a σ paraméter becslésének Le Breton cikk([10]) alapján készül, amihez be kell vezetni a következő definíciókat és jelöléseket. Legyen $0 < s < t \leq T$:

$$k_H(t,s) := k_H^{-1} \cdot s^{\frac{1}{2}-H} \cdot (t-s)^{\frac{1}{2}-H}, \tag{3.14}$$

$$k_H =: 2 \cdot H \cdot \Gamma(1,5-H) \cdot \Gamma(H+0,5), \quad \omega_t^H := \lambda_H^{-1} \cdot t^{2-2H}, \tag{3.15}$$

$$\lambda_H := \frac{2H \cdot \Gamma(3-2H) \cdot \Gamma(H+0,5)}{\Gamma(1,5-H)}, \quad M_t^H := \int_0^t k_H(t,s) dB_s^H. \tag{3.16}$$

Az (M_t^H) folyamat egy martingál (szokás fundamentális martingálnak nevezni), aminek a kvadratikus variációja $[M^H]_t = \omega_t^H$. Teljesül még, hogy (M^H) természetes filtrációja egybe esik (X^H) természetes filtrációjával. Bevezetve a $Q(t)$ folyamatot:

$$Q(t) := \frac{d}{d\omega_t^H} \int_0^t k_H(t,s) dX_s^H, \quad 0 \leq t \leq T \tag{3.17}$$

és a (Z_t), $t \in [0,T]$ szemimartingált,

$$Z_t := \int_0^t k_H(t,s) dX_s. \tag{3.18}$$

Szintén igaz, hogy a Z_t folyamat a következő dekompozíciót elégíti ki:

$$Z_t = \theta \cdot \int_0^t Q(s) d\omega_s^H + \sigma \cdot M_t^H.$$

Ebből következik, hogy egy jó becslést lehet kapni σ-ra felhasználva (Z_t) kvadratikus variációját, ugyanis $[Z]_t = \sigma^2 \cdot \omega_t^H$ 1 valószínűséggel, így

$$\hat{\sigma}^2 = (\omega_t^H)^{-1} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (Z_{t_{i+1}^n} - Z_{t_i^n})^2,$$

ahol (t_i^n) $i = 0, \ldots, n$ egy megfelelő partíciója a $[0,T]$-nek. Ennek a becslésnek nagy előnye, hogy nem függ θ-tól, azonban H-tól igen.

Áttérve arra a problémára, hogy a θ paramétert szeretném megbecsülni egy frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamat esetén. Az előző rész alapján feltehető, hogy σ ismert és egyenlő 1-gyel. Ebben a részben is ugyanabból a Le Breton cikkből dolgoztam([10]), és itt is használtam az előbb bevezetett ω_t^H(3.14), $Q(t)$(3.17) és Z_t(3.18) jelöléseket.

Jelölje $\underline{X}$ a megfigyelés vektot. Ekkor egy frakcionális Brown-mozgásra vonatkozó Girszanov-tételt szeretnék használni a P_θ és P_1 mértékekre, ahol P_θ azt jelöli, hogy a paraméter értéke θ. Ekkor ([10])

$$L(\underline{X}) = \exp\left(\theta \cdot \int_0^t Q(s) dZ_s - \frac{\theta^2}{2} \int_0^t Q(s)^2 d\omega_s^H\right).$$

Maximum likelihood becslést fogok alkalmazni, így ennek a logaritmusát véve:

$$l(\underline{X}) = \theta \cdot \int_0^t Q(s) dZ_s - \frac{\theta^2}{2} \int_0^t Q(s)^2 d\omega_s^H,$$

majd θ szerint deriválva, a következő egyenlet kapható meg:

$$\int_0^t Q(s)dZ_s - \theta \int_0^t Q(s)^2 d\omega_s^H = 0$$

Amiből következik a becslés:

$$\theta_t := \left(\int_0^t Q(s)^2 d\omega_s^H \right)^{-1} \int_0^t Q(s)dZ_s. \tag{3.19}$$

Ugyanebben a cikkben ([10]) szerepel a következő tétel:

3.5.1. Tétel. *A* (3.19)*-ben definiált becslése a θ-nak erősen konzisztens, azaz minden $\theta \in \mathbb{R}$ esetén*

$$lim_{t\to\infty}\theta_t = \theta.$$

A hibák vizsgálatához érdemes a Laplace-transzformáltat használni, amely jelen esetben $a > 0$ paraméter esetén

$$\Psi_t^H(\theta, a) = \mathrm{E}\left(\exp\left(-a \int_0^t Q^2(s) d\omega_s^H \right) \right)$$

alakú. Vizsgálva a torzítást: $B_H(\theta, t) = \mathrm{E}(\theta_t - \theta)$, és a négyzetes eltérést: $MSE_H(\theta, t) = \mathrm{E}(\theta_t - \theta)^2$, akkor ezek előállnak a következő alakban:

$$B_H(\theta, t) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\theta} \Psi_t^H(\theta, a) da,$$
$$MSE_H(\theta, t) = \int_0^\infty \Psi_t^H(\theta, a) da + \int_0^\infty a \cdot \frac{\partial^2}{\partial^2\theta} \Psi_t^H(\theta, a) da.$$

Ekkor B_H és MSE_H ezen alakjából levezethető a következő tétel:

3.5.2. Tétel. *Az előzőleg definiált θ_t becslésre a következő tulajdonságok teljesülnek:*

- *Ha $\theta < 0$, akkor $t \to \infty$ esetén*

$$B_H(\theta, t) \approx -2t^{-1} \text{ és } MSE_H(\theta, t) \approx 2|\theta|t^{-1};$$

- *Ha $\theta = 0$, akkor fix t-re*

$$B_H(\theta, t) = B_H(\theta, 0) \cdot t^{-1} \text{ és } MSE_H(\theta, t) = MSE_H(\theta, 0) \cdot t^{-2};$$

- *Ha $\theta > 0$, akkor $t \to \infty$ esetén $B_H(\theta, t)$*

$$B_H(\theta, t) \approx -2\sqrt{\pi \sin(\pi H)} \cdot \theta^{\frac{3}{2}} e^{-\theta t} \sqrt{t},$$
$$MSE_H(\theta, t) \approx 2\sqrt{\pi \sin(\pi H)} \cdot \theta^{\frac{5}{2}} e^{-\theta t} \sqrt{t}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy nem függ a H paramétertől az, hogy B_H, illetve MSE_H milyen nagyságrendben tart 0-hoz, illetve $\theta < 0$ esetben a konstansok sem függnek tőle.

Összefoglalás

A dolgozat első fejezetében ismertettem a frakcionális Brown-mozgás és a kevert frakcionális Brown-mozgás definícióját, tulajdonságait, illetve néhány hozzájuk kapcsolódó tételt. Hasonló felépítésben készültek az Ornstein-Uhlenbeck, a frakcionális Ornstein-Uhlenbeck és a kevert frakcionális Ornstein-Uhlenbeck folyamatokról szóló fejezetrészek. Mindegyik általánosításnál vizsgáltam, hogy milyen tulajdonságokban különbözik a klasszikus változattól.

A fejezetekben található ábrák, illetve az ehhez kapcsolódó szimulációk saját munkák. Végeztem statisztikai vizsgálatokat is arra nézve, hogy statisztikailag tekinthető-e azonosnak a szimulációm és egy másik szimulációs módszer által generált adatsor.

A dolgozat legvégén a folyamatok paramétereinek becslésével foglalkoztam. Az m és a σ paraméterek esetében vizsgáltam a diszkrét és a folytonos esetet is. A legtöbb paraméterbecslés már korábban is ismert volt, ellenben igyekeztem bővebben és eltérő metódussal számolni a forrásokhoz képest. Kitértem a becslések eloszlására és egyéb tulajdonságaira is. Folytonos esetben a növekmények segítségével konstruáltam egy becslési módszert.

Ezt a témakört sok módon lehetséges még bővíteni. Például a σ paraméternél, folytonos esetben ismertetek egy módszert, egy eredményt, illetve a hozzá tartózó számolást az Ornstein-Uhlenbeck folyamatnál. Ezt megpróbáltam általánosítani frakcionális Ornstein-Uhlenbeck esetére, de ez még mindig további munkát igényelne. Érdemes lenne a becsléseket egymáshoz képest is vizsgálni, illetve nem esett szó a H paraméter becsléséről sem.

Irodalomjegyzék

[1] G. Sakalauskiene, *The Hurst Phenomenon in Hydrology*, Environmental research, engineering and management. 3, 16-20. 2003.

[2] K. J. Falconer, *Fractal geometry, Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons Ltd., pp. 245-247. 1990.

[3] M. Henry, P. Zaffaroni, *The Long Range Dependence Paradigm for Macroeconomic and Finance*, In: Theory of Long-Range Dependence, Eds.: P. Doukhan, G. Oppenheim, M. S. Taqqu, Birkhauser, Boston, pp. 417-438. 2003.

[4] P. Zhang, Q. Sun, W. L. Xiao, *Parameter identification in mixed Brownian fractional Brownian motions using Powell's optimization algorithm*, Economic Modelling, 40, 314-319. 2014.

[5] P. Cheridito, H. Kawaguchi, M. Maejima, *Fractional Ornstein-Uhlenbeck processes*, Electronic journal of probability, 8, 14 p. 2000.

[6] P. Cheridito, *Mixed fractional Brownian motion*, Bernoulli, 7, 913-934. 2001.

[7] B. B. Mandelbrot, J. W. Van Ness, *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM Review, 10, 422-437. 1968.

[8] L. H. Y. Chen, G. Poly, *Chapter 6. Stein's method, Malliavin calculus, Dirichlet forms and the fourth moment theorem*, In: Festschrift Masatoshi Fukushima, Interdisciplinary Mathematical Sciences, Eds.: Z. Q. Chen, N. Jacob, M. Takeda, T. Uemura, World Scientific, pp. 107-130. 2014.

[9] M. Zili, *On the mixed fractional Brownian motion*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 2006, 32435. 2006.

[10] M. L. Kleptsyna, A. Le Breton, *Statistical Analysis of the Fractional Ornstein Uhlenbeck Type Process*, Statistical Inference for Stochastic Processes, 5, 229-248. 2002.

[11] Y. Hu and D. Nualart, *Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes*, Statistics & Probability Letters, 80, 1030-1038. 2009.

[12] *R-project*, $https://www.r-project.org/$, 2017.03.19.

[13] *Package MASS*, $https://cran.r-project.org/web/packages/MASS/MASS.pdf$, 2017.03.19.

[14] *Package yuima*, $https://cran.r-project.org/web/packages/yuima/yuima.pdf$, 2016.05.06.

[15] G. E. P. Box, *A General Distribution Theory for a Class of Likelihood Criteria*, Biometrika, 36, 317-346. 1949.

[16] *Package biotools*, $https://cran.r-project.org/web/packages/biotools/biotools.pdf$, 2017.03.13.

[17] M. S. Bartlett, *The Effect of Standardization on a χ^2 Approximation in Factor Analysis*, Biometrika, 38, 337-344. 1951.

[18] *Bartlett's test that a correlation matrix is an identity matrix*, $http://personality-project.org/r/html/cortest.bartlett.html$, 2017.03.13.

[19] M. Arató, *Linear stochastic systems with constant coefficients*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, pp. 138-139. 1982.

[20] Ju. A Rozanov, *Infinite-Dimensional Gaussian distribution*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (108) (Engl. transl. 1971), Providence (RI), pp. 29-47. 1968.

[21] G. Samorodnitsky *Long Range Dependence*, Foundation and Trends, R in Stochastic Systems, 1, 163-257. 2006.