EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Nagy Viktor

A felemelés és vetítés módszer az egészértékű programozásban

SZAKDOLGOZAT

Alkalmazott Matematikus MSc

Operációkutatás szakirány

Témavezető:

Kis Tamás

Operációkutatás Tanszék

Budapest, 2017

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Kis Tamásnak a rengeteg segítséget, amit a szakdolgozatommal kapcsolatban nyújtott. Köszönöm, hogy időt szakított rám, tanácsaival és útmutatásával segítette a munkám.

Köszönöm a családomnak és a barátaimnak, akik mindvégig támogattak a tanulmányaim során.

Tartalomjegyzék

1. Előkészületek **6**

1.1. Ortogonális vetítés 6

1.2. Rácsmentes vágások 7

1.3. Rácsmentes vágások a kibővített LP felírásokhoz 8

2. A $0-1$ változójú vegyes egészértékű halmazok **10**

3. A jó kibővített LP formulák tulajdonságai **13**

3.1. Minimalitás 13

3.2. A kibővített LP felírások korlátai általános vegyes egészértékű halamzokra 15

4. A legerősebb kibővített felírás általános vegyes egészértékű halmazokra **18**

5. Felemelés és vetítés **23**

5.1. A Lovász–Schrijver operátor 23

5.2. A Lovász–Schrijver operátor erősítése 26

6. Implementálás és számítási tapasztalatok **28**

6.1. A maximális súlyú stabil halmaz probléma 29

6.2. Számítási tapasztalatok 30

Bevezetés

Egy lineáris egyenlőtlenség-rendszerrel és néhány változóra egészértékű feltétellel adott vegyes egészértékű programozási feladat megoldásánál használható módszer, hogy néhány új változó bevezetésével egy olyan kibővített felírást kapunk, amely az eredetivel ekvivalens feladatot eredményez. Az új változók bevezetésével bizonyos értelemben egyszerűbb vagy erősebb felírást kaphatunk.

Az egészértékű programozásban főként arra használhatóak a kibővített felírások, hogy új LP relaxációját kapjuk a feladatnak, ami erősebb, mint az eredeti LP relaxáció. Ez alatt azt értjük, hogy az új relaxáltnak az eredeti változók terébe való visszavetítésével kapott poliédert szigorúan tartalmazza az eredeti LP relaxált által kapott poliéder. Ezáltal jobb korlátot kaphatunk egy optimalizálási feladat során. Erre jó példák Sherali és Adams által, a [12] cikkben ismertetett kibővített felírások.

A kibővített felírásokat használhatjuk arra is, hogy exponenciálisan sok egyenlettel, illetve egyenlőtlenséggel definiált poliédert egyszerűbben is megkapjuk. Azzaz olyan kibővített felírást használunk, amihez csak polinomiálisan sok egyenlet, illetve egyenlőtlenség kell, és az eredeti változók terébe való ortogonális vetítéssel megkapjuk az eredeti poliédert. Erre Balas és Pulleyblank a [4] cikkében található példa.

A szakdolgozatomban egy harmadik módszer elméleti eredményeit rendszerezem, illetve a maximális súlyú stabil halmaz problémára implemetnáltam is a módszert C++ programozási nyelven. A módszer lényege, hogy a kibővített felírásnak az eredeti változó térbe való visszavetítésével ugyan nem kapunk jobb relaxáltat, de ha a kibővített felírásokhoz adunk hozzá vágásokat, és úgy vetítjük le, akkor már jobb korlátot nyerhetünk, mintha csak az eredeti poliéderhez adtuk volna hozzá a megfelelő vágásokat.

A szakdolgozatom első fejezetében összefoglalom a későbbiek során használt ismereteket. Bemutatom az ortogonális vetítés valamint a rácsmentes vágások, illetve a split vágások fogalmát. Ismertetem, hogy hogyan tudjuk a split vágásoknak megfelelő vágásokat reprezentálni a kibővített felírásnál.

A második fejezetben speciális vegyes egészértékű programozási feladatokról foglalom össze a split vágásokkal kapcsolatos ismerteket. Itt nem csupán az egészérté-

kűséget követeljük meg néhány változóról, hanem azt is, hogy bináris változó legyen. Bodur és társai a [6] cikkben ismertettek egy olyan konstrukciót, amely, ha n jelöli az egész változók számát, akkor $n-1$ új változó hozzáadásával olyan poliédert eredményez, amelynek a split lezártja egész. A konstrukcióhoz szükséges a poliéder extrém pontjainak és extrém irányainak az explicit ismerete.

A harmadik fejezetben általános vegyes egészértékű programozási feladatokról foglalom össze az ismert eredményeket. Ismertetem a minimális kibővített felírás fogalmát. Megmutatom, hogy milyen felső korlát adható a minimális felíráshoz szükséges új változók számára. Belátható, hogy egy minimális kibővített felíráshoz tartozó polidér dimenziója felülről becsülhető az eredeti poliéder extrém csúcsainak, illetve extrém irányainak a számával. Ennek eredményeként igazolható, hogy nem minden esetben van olyan kibővített felírása egy P poliédernek, ami split vágásokat tekintve jobb eredményre vezet.

A negyedik fejezetben ismertetem, hogy általános esetben a 3. fejezethez hasonlóan, hogyan lehet megkonstruálni a legerősebb kibővített felírást a split, illetve általánosabban a rácsmentes vágásokat tekintve. Megmutatható, hogy speciális esetben a konstrukcióhoz szükséges új változók száma csökkenthető.

Az ötödik fejezetben bemutatom, a Lovász és Schrijver által a [10] cikkben bináris egészértékű feladatokra bevezetett felemelés és vetítés operátort. Erről belátható, hogy az erősítő lépésnél használt vágások split vágások. Ezt a megfigyelést kihasználva Bodur és társai a [6] cikkben egy erősebb operátort kaptak.

A hatodik, utolsó fejezetben ismertetem a számítási tapasztalataimat az új felemelés és vetítés operátorral kapcsolatban. Itt részletesen tárgyalom, hogy milyen hatása van ennek az operátornak a maximális súlyú stabil halmaz probléma korltátozás és szétválasztás módszerrel történő megoldása során. Ehhez egy C++ programot írtam, ami a FICO XPRESS optimalizáló program segítségével (ld. [13]) oldja meg az egészértékű programozási feladatot. Továbbá a gráfelméleti reprezentációt a LEMON könyvtár (ld. [14]) segítségével valósítottam meg.

1. fejezet

Előkészületek

Ebben a szakaszban ismertetek néhány eredményt, amit használni fogok a későbbiekben a poliéderek kibővített felírásáról, illetve a split vágások hatásairól szóló elemzésekben. Legyen

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \text{ és } Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+q} : Cx + Gy \leq d\},$$

olyan, hogy

$$\text{proj}_x(Q) = P,$$

ahol $\text{proj}_x(Q)$ jelöli a Q poliéder ortogonális vetületét az x terére. Azaz ekkor teljesül, hogy $Q \subseteq (P \times \mathbb{R}^q)$, ezért Q-t a P kibővített LP felírásának nevezzük. A P és Q poliédereken ugyanazt az eredményt kapjuk, ha egy olyan célfüggvény szerint optimalizálunk, ami csak x-től függ.

Legyen $n = n_1 + n_2$ és tekintsük a következő vegyes egészértékű halmazokat:

$$P^{IP} = P \cap (\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) \text{ és } Q^{IP} = Q \cap (\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2+q}).$$

Ekkor $\text{proj}_x(Q^{IP}) = P^{IP}$. Ezt a következőképpen hasznosíthatjuk. Ha érvényes split vágásokat alkalmazunk a Q poliéderen, majd levetítjük a P poliéderre, akkor szűkebb halmazt kaphatunk, mint ha közvetlenül a P-n alkalmaznánk a split vágásokat. Ezáltal a P^{IP} jobb közelítését nyerhetjük.

1.1. Ortogonális vetítés

Legyen, mint korábban,

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+q} : Cx + Gy \leq d\}.$$

Ekkor a Q ortogonális vetülete az x terére

$$\text{proj}_x(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, y \in \mathbb{R}^q \text{ olyan, hogy } (x, y) \in Q\}.$$

Legyen m az egyenlőtlenségek száma Q fenti definíciójában. Ekkor Q projekciós kúpja $K = \{u \in \mathbb{R}^m : u^T G = 0,\ u \geq 0\}$. Ha $K = \{0\}$, akkor $\mathrm{proj}_x(Q) = \mathbb{R}^n$, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $K \neq \{0\}$. Ekkor a vetítés a következő alakban írható:

$$\mathrm{proj}_x(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n : u^T C x \leq u^T d \quad \forall\, u \in K\}.$$

Ebből egyből következik, hogy egy poliéder vetülete szintén poliéder. Jelölje K^r a K extrém irányait, ekkor $\mathrm{proj}_x(Q)$ definíciójánál használható K^r a K helyett. A Q recessziós kúpja

$$\mathrm{rec}\,(Q) = \big\{(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q :\ Cu + Gv \leq 0\big\},$$

és a vetületének a recessziós kúpja

$$\mathrm{rec}\,\big(\mathrm{proj}_x(Q)\big) = \big\{u \in \mathbb{R}^n :\ u^T C d \leq 0 \quad \forall\, u \in K^r\big\}.$$

Tehát

$$\mathrm{rec}\,\big(\mathrm{proj}_x(Q)\big) = \mathrm{proj}_u\big(\mathrm{rec}\,(Q)\big).$$

Adott $\bar{x} \in \mathrm{proj}_x(Q)$ pont ősképe az $\big\{(x, y) \in Q :\ x = \bar{x}\big\}$ pontok halmaza. Hasonlóképpen definiálhatjuk $\mathrm{proj}_x(Q)$ irányainak az ősképét is. A vetítés további tulajdonságai tudhatók meg Balas az [1] cikkjéből.

1.2. Rácsmentes vágások

Vegyes egészértékű rácsnak hívjuk a $\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ halmazt. Az $L \subset \mathbb{R}^n$ halmazt rácsmentesnek nevezzük, ha $L \cap (\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) = \emptyset$, ahol $n = n_1 + n_2$. A rácsmentes halmazok szoros kapcsolatban állnak a vegyes egészértékű halmazokra vonatkozó érvényes vágásokkal, mivel az érvényes vágással levágott terület rácsmentes. Legyen $L \subset \mathbb{R}^n$ rácsmentes halmaz, a $c^T x \geq d$ egyenlőtlenséget ($c \in \mathbb{R}^n$ és $d \in \mathbb{R}$) rácsmentes vágásnak nevezzük, ha érvényes $\mathrm{conv}\,(P \setminus L)$-re. Itt és a továbbiakban is egy $X \subset \mathbb{R}^n$ halmaz konvex burkát a $\mathrm{conv}\,(X)$ jelöli.

Tekintsük a következő vegyes egészértékű halmazt $P^{IP} = P \cap (\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$, ahol $P \subset \mathbb{R}^n$. Ha L rácsmenetes, akkor

$$P^{IP} = P \cap (\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}) = (P \setminus L) \cap (\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}).$$

Tehát $P^{IP} \subseteq \mathrm{conv}\,(P \setminus L)$, ezért bármely $(P \setminus L)$-re érvényes egyenlőtlenség érvényes lesz P^{IP}-re is. Legyen $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots\}$ rácsmentes halmazok rendszere. Ekkor definiálhatjuk P rácsmentes lezártját $\mathcal{L}$-re nézve a következőképpen:

$$\mathcal{L}(P) = \bigcap_{L \in \mathcal{L}} \mathrm{conv}\,(P \setminus L). \tag{1.1}$$

Természetesen $P \supseteq \mathcal{L}(P) \supseteq P^{IP}$. Legyen $\pi \in \mathbb{Z}^n$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, és $\pi_j = 0$, ha $j > n_1$, ekkor egy rácsmentes halmazt kapunk a következőképpen:

$$S(\pi, \gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma + 1 > \pi^T x > \gamma\}.$$

Jelölje $\mathcal{S}^*$ az összes ilyen split halmazt, azaz

$$\mathcal{S}^* = \{S(\pi, \gamma) : \pi \in \mathbb{Z}^n,\ \gamma \in \mathbb{Z}, \text{ és } \pi_j = 0, \text{ ha } j > n_1\}.$$

Mivel minden $S \in \mathcal{S}^*$ rácsmentes halmaz, ezért $P \supseteq \mathcal{S}^*(P) \supseteq P^{IP}$.

A rácsmentes vágásokat másképp is értelmezhetjük. Tekintsünk egy K véges indexhalmazt és legyen $D_k = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} : A^k x \leq b^k\right\}$ minden $k \in K$ indexre. A $D = \cup_{k \in K} D_k$ egy érvényes diszjunkció a $\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ vegyes egészértékű halmazra nézve, ha $\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \subseteq D$. Egy lineáris egyenlőtlenség diszjunktív vágása a P poliédernek, amit a D diszjunkcióból kapunk, ha érvényes a conv $(P \cap D)$-re. Mivel $D^c = \mathbb{R}^n \setminus D$ egy rácsmentes vágása a $\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ vegyes egészértékű halmaznak, ezért a D-ből kapható diszjunktív vágások megegyeznek a D^c-ből kapható rácsmentes vágásokkal.

Legyen adott az $\mathcal{L}$ rácsmentes halmazrendszer a vegyes egészértékű $\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ halmazra nézve és egy $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+q}$ kibővített felírása a $P \subseteq \mathbb{R}^n$ poliédernek, ekkor a Q kibővített felírás rácsmnetes lezártja

$$\mathcal{L}(Q) = \bigcap_{L \in \mathcal{L}} \text{conv}\,(Q \setminus L^+), \tag{1.2}$$

ahol $L^+ = L \times \mathbb{R}^q$. Minden $L \in \mathcal{L}$ halmazra az L^+ halamaz rácsmentes a vegyes egészértékű $\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2+q}$ halamazra nézve.

1.3. Rácsmentes vágások a kibővített LP felírásokhoz

Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^n$ egy poliéder és legyen $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+q}$ a kibővíttet felírása P-nek, azaz $P = \text{proj}_{\mathbb{R}^n}(Q)$. Feltesszük, hogy Q felírásában az első n változó ugyanaz, mint P felírásában, így a $\text{proj}_{\mathbb{R}^n}(.)$ operátor az első n koordinátát tartja meg, a többit törli. Bodur és társai bizonyították a [7] cikkben, hogy tetszőleges $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}^*$ rendszerre

$$\mathcal{S}(P) \supseteq \text{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{S}(Q)\big).$$

Sőt a fenti két halmaz egyenlő, ha $|\mathcal{S}| = 1$. Ezt könnyen általánosíthatjuk a következőképpen.

1.3.1. Tétel. *Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^n$ egy poliéder és a kibővíttet felírása $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+q}$, és legyen $\mathcal{L}$ rácsmentes halmazok rendszere $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor*

$$\mathcal{L}(P) \supseteq \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q)\big).$$

Továbbá $\mathcal{L}(P) = \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q)\big)$, ha $|\mathcal{L}| = 1$.

Bizonyítás. Ha $x \in \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q)\big)$, akkor van olyan $y \in \mathbb{R}^q$, hogy $(x, y) \in \mathcal{L}(Q)$. Ekkor tehát $(x, y) \in \mathrm{conv}(Q \setminus L^+)$ minden $L \in \mathcal{L}$ esetén, de ekkor $x \in \mathrm{conv}(P \setminus L)$ minden $L \in \mathcal{L}$ rácsmentes halmazra. $\square$

Bebizonyítható (ld. a [7]), hogy $|\mathcal{L}| > 1$ esetén lehet szigorú is a fenti tartalmazás. A bizonyítás a következő egyszerű $\mathbb{R}^2$-beli példán alapul.

1.3.2. Példa.

$$P = \mathrm{conv}\big((0, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 1)\big)$$

és a hozzátartozó kibővített felírás $\mathbb{R}^3$-ban

$$Q = \mathrm{conv}\big((0, \frac{1}{2}, 1), (1, \frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{2}, 0, 0), (\frac{1}{2}, 1, 0)\big).$$

Használjuk a következő split halmazokat $S_i = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : 1 > x_i > 0\big\}$, ahol $i = 1, 2$. Ekkor a P split lezártja az $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pont, míg Q split lezártja üres.

2. fejezet

A $0-1$ változójú vegyes egészértékű halmazok

Ebben a fejezetben ismertetem Bodur és társai által a [6] cikkben publikált eredményt, miszerint n bináris, és k folytonos változóval adott vegyes egészértű poliédernek mindig van $2n+k-1$ változót használó kibővített felírása. Ez a felírás egy természetesen adódó konstrukcióból kapható, de használja a poliéder extrém pontjait és extrém irányait is. Ezek kiszámítása azonban a gyakorlatban időigényes művelet is lehet.

Tekintsük a következő, az első n_1 koordinátában $0-1$ értékű, vegyes egészértékű halmazt $P^{IP} = P \cap \left(\{0,1\}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}\right)$, ahol $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ és az első n_1 változóra a $0-1$ korlát szerepel a feltételek között. Egy véges $X \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz esetén jelölje $\operatorname{cone}(X)$ az X nemnegatív lineáris kombinációinak a halmazát. Tegyük fel, hogy P egy csúcsos poliéder. Jelölje P extrém pontjait $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^m$ és extrém irányait $\bar{r}^1, \ldots, \bar{r}^l$. Ekkor

$$P = \operatorname{conv}(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^m) + \operatorname{cone}(\bar{r}^1, \ldots, \bar{r}^l).$$

Tetszőleges $t \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$ számhoz definiálhatjuk P egy kibővített LP felírását az $\mathbb{R}^{n+t}$ térben

$$Q^t = \operatorname{conv}(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^m) + \operatorname{cone}(\hat{r}^1, \ldots, \hat{r}^l),$$

ahol $\hat{r}^j = (\bar{r}^j, \mathbf{0})$ itt $j = 1, \ldots, l$ és a $\mathbf{0}$ az $\mathbb{R}^t$-beli nullvektor, míg $\hat{x}^j = (\bar{x}^j, y^j)$, itt $j = 1, \ldots, m$, és

$$y_i^j = \begin{cases} 1 & \text{ha } \bar{x}_i^j \text{ tört} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Belátható, hogy ha split vágásokat alkalmazunk 0-1 split halmazokkal a kibővített felírású Q^t-re, akkor az első t koordinátában egész poliédert kapunk, így ha a $0-1$ split vágásokat Q^{n_1}-re alkalmazzuk, majd levetítjük az eredeti térre, akkor megkapjuk P^{IP} konvex burkát.

2.0.1. Lemma. *Adott $t \in \{1, \dots, n_1\}$ esetén legyen*

$$P^t = Q^t \cap \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^t : y_j = 0,\ j = 1, \dots, t\big\}. \tag{2.1}$$

Ha P^t egy extrém pontja $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^t$, akkor $x_j^* \in \{0, 1\}$ minden $j \in \{1, \dots, t\}$ indexre.

Bizonyítás. Minden $j = 1, \dots, t$-re az $y_j \geq 0$ egyenlőtlenség érvényes a Q^t poliéderre, ezért P^t egy oldala a Q^t-nek. Ekkor viszont (x^*, y^*) a Q^t-nek is extrém pontja. Továbbá P^t minden pontjára fennáll, hogy $y = \mathbf{0}$, ezért $y^* = \mathbf{0}$. A Q^t definíciójából adódóan, ha $(x^*, \mathbf{0})$ extrém pontja Q^t-nek, akkor x^* extrém pontja P-nek és $x_j^* \in \{0, 1\}$ minden $j = 1, \dots, t$ esetén. $\square$

2.0.2. Lemma. *Tetszőleges $j \in \{1, \dots, t\}$ indexre, az $y_j = 0$ egyenlőség érvényes split vágás a Q^t poliéderre, amit az*

$$S_j^+ = \{x \in \mathbb{R}^{n+t} : 1 > x_j > 0\}$$

0-1 split halmazból nyerhetünk.

Bizonyítás. Legyen $j \in \{1, \dots, t\}$ adott index és tekintsük a következő poliédert: $W_0 = Q^t \cap \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^t \ : \ x_j = 0\big\}$. A Q^t poliéderre érvényes egyenlőtlenség az $x_j \geq 0$, ezért W_0 oldala a Q^t poliédernek. Ekkor viszont W_0 minden extrém pontja olyan extrém pontja a Q^t poliédernek, amelyre teljesül, hogy $x_j = 0$. Mivel Q^t minden iránya, és így W_0 minden iránya is olyan, hogy az y változókhoz tartozó koordinátákban 0, ezért $y_j = 0$ fennáll W_0 minden pontjára. Hasonló adódik, hogy a $W_1 = Q^t \cap \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^t \ : \ x_j = 1\big\}$ poliéder minden pontjára igaz, hogy $y_j = 0$. Továbbá $Q^t \setminus S_j^+ = W_0 \cup W_1$, ezért $y_j = 0$ egy split vágása a Q^t poliédernek. $\square$

2.0.3. Tétel. *A Q^{n_1} poliéder az S_j^+ $j = 1, \dots, n_1$ halmazok által vett $0 - 1$ split lezártja egész, ezért*

$$\mathrm{proj}_x\big(\mathcal{S}^{0,1}(Q^{n_1})\big) = \mathrm{conv}\,(P^{IP}).$$

Bizonyítás. A $\mathrm{proj}_x\big(\mathcal{S}^{0,1}(Q^{n_1})\big) \supseteq \mathrm{conv}(P^{IP})$ egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül, csak a másik irányú tartalmazást kell bizonyítani. A 2.0.2 lemma alapján minden $j \in \{1, \dots, n\}$ indexre az $y_j = 0$ egy érvényes, $0 - 1$ split halmazból nyert split vágás. Tehát a P^{n_1} tartalmazza a $\mathcal{S}^{0,1}(Q^{n_1})$ halmazt, ezért igaz a vetületekre is a tartalmazás, azaz $\mathrm{proj}_x\big(\mathcal{S}^{0,1}(Q^{n_1})\big) \subseteq \mathrm{proj}_x(P^{n_1})$. Viszont a 2.0.1 lemma szerint P^{n_1} egész poliéder, tehát $\mathrm{proj}_x(P^{n_1}) = \mathrm{conv}(P^{IP})$. $\square$

Az előbbi tétel következménye, hogy minden bináris vegyes egészértékű $\mathbb{R}^n$-beli halmaznak létezik olyan kibővített felírása az $\mathbb{R}^{n+n_1}$ térben, amelynek a $0 - 1$ split

lezártja egész. Bodur és társai megmutatták (ld. a [6]), hogy a $Q^{n_1-1} \subseteq \mathbb{R}^{n+n_1-1}$ $0-1$ split lezártja szintén egész. Továbbá az is bebizonyítható, hogy a kibővített felírás dimenziójára ez egy éles korlát, azaz bizonyos vegyes egészértékű halmazok esetén nem létezik olyan kibővített felírása a halmaznak, amely n_1-1-nél kevesebb új változót használ és a $0-1$ split lezártja egész.

2.0.4. Tétel. *A Q^{n_1-1} poliéder az S_j^+ $j=1,\dots,n_1$ halmazok által vett $0-1$ split lezártja egész, ezért*

$$\operatorname{proj}_x\big(\mathcal{S}^{0,1}(Q^{n_1-1})\big) = \operatorname{conv}(P^{IP}).$$

Bizonyítás.

$$\mathcal{S}^{0,1}(Q^{n_1-1}) = \bigcap_{j=1}^{n_1} \operatorname{conv}(Q^{n_1-1} \setminus S_j^+) \subseteq \operatorname{conv}(Q^{n_1-1} \setminus S_{n_1}^+) \cap P^{n_1-1}, \tag{2.2}$$

ahol P^{n_1-1} a 2.1 szerint van definiálva, az utolsó tartalmazás a 2.0.2 lemma miatt igaz. A 2.0.1 lemma bizonyításában láttuk, hogy P^{n_1-1} egy oldala Q^{n_1-1}-nek ezért

$$\operatorname{conv}(Q^{n_1-1} \setminus S_{n_1}^+) \cap P^{n_1-1} = \operatorname{conv}(P^{n_1-1} \setminus S_{n_1}^+), \tag{2.3}$$

mivel (ld. [9] 9 egyenlőség) minden P poliéderre és annak egy F oldalára fenáll, hogy $\operatorname{conv}(P \setminus S) \cap F = \operatorname{conv}(F \setminus S)$ tetszőleges S halmaz esetén. A 2.0.1 lemma szerint P^{n_1-1} egész az első n_1-1 koordinátában. Ezért az adódik, hogy a következő módon definiált $W_0 = P^{n_1-1} \cap \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_1-1} : x_{n_1} = 0\big\}$ poliéder, és hasonlóan a $W_1 = P^{n_1-1} \cap \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_1-1} : x_{n_1} = 1\big\}$ poliéder is egy-egy oldala a P^{n_1-1} poliédernek, ezért ezek is egészek az első n_1-1 koordinátában. A definíció alapján W_0 és W_1 n_1-edik koordinátája is egész, ezért mindkettő egész az első n_1 koordinátában. Mivel $\operatorname{conv}(P^{n_1-1} \setminus S_{n_1}^+) = \operatorname{conv}(W_0 \cup W_1)$, így $\operatorname{conv}(P^{n_1-1} \setminus S_{n_1}^+)$ szintén egész. Felhasználva a 2.2 tartalmazást és a 2.3 egyenletet azt kapjuk, hogy $\mathcal{S}^{0,1}(Q^{n_1-1})$ egész az első n_1 koordinátában, így $\operatorname{proj}_x\big(\mathcal{S}^{0,1}(Q^{n_1-1})\big)$ is. $\square$

2.0.5. Megjegyzés. A P poliéder kibővített felírásához használtuk P extrém pontjait és extrém irányait is. Továbbá előfordulhat, hogy exponenciális sok egyenlőtlenség kell a kibővített formula felírásához még akkor is, amikor a P poliédernek polinomiálisan sok oldala van.

Korábban $\mathcal{S}^*$ jelölte a split halmazokat. Bármely $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}^*$ és $k \geq 0$ esetén definiálhatjuk a P k-adik lezártját $\mathcal{S}$-re nézve, amit $\mathcal{S}^k(P)$-vel jelölünk. Legyen $\mathcal{S}^0(P) = P$ és $\mathcal{S}^k(P) = \mathcal{S}\big(\mathcal{S}^{k-1}(P)\big)$, ha $k \geq 1$.

Azt mondjuk, hogy a $P \cap (\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$-re érvényes egyenlőtlenség split rangja k, ha nem érvényes $(\mathcal{S}^*)^{k-1}(P)$-re, de érvényes $(\mathcal{S}^*)^k(P)$-re.

3. fejezet

A jó kibővített LP formulák tulajdonságai

Korábban a 2.0.3 tételben láttuk, hogy $0-1$ vegyes egészértékű halmazoknak van olyan kibővített felírása, aminek a split lezártja egész. Általános vegyes egészértékű halmazokra ez nem mindig lehetséges. Azonban konstruálható olyan kibővített felírás, ami jó relaxációhoz vezethet split illetve általánosabban rácsmentes vágások alkalmazásával. Ebben a fejezetben ezekről a kibővített felírásokról lesz szó.

Továbbiakban, mint ahogyan korábban, jelölje $\mathcal{L}$ egy a $\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ halmazra nézve rácsmentes halmazok összességét. Továbbá legyen $n = n_1 + n_2$, illetve $P \subseteq \mathbb{R}^n$ és a kibővített felírása $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+q}$. Legyen

$$\mathcal{L}(Q) = \bigcap_{L \in \mathcal{L}} \operatorname{conv}(Q \setminus L^+),$$

ahol $L^+ = L \times \mathbb{R}^q$. Természtesen minden $L \in \mathcal{L}$ halmazra az L^+ is rácsmentes a vegyes egészértékű $\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2+q}$ halamazra nézve.

3.1. Minimalitás

Tekintsük a $Q_1, Q_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazokat és az $\mathcal{L}$ rácsmentes halmazrendszert. Ekkor,

$$Q_1 \subseteq Q_2 \Rightarrow Q_1 \setminus L^+ \subseteq Q_2 \setminus L^+ \quad \forall L \in \mathcal{L} \Rightarrow \bigcap_{L \in \mathcal{L}} \operatorname{conv}(Q_1 \setminus L^+) \subseteq \bigcap_{L \in \mathcal{L}} \operatorname{conv}(Q_2 \setminus L^+).$$

Tehát ha $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n+q}$ két különböző kibővített LP felírása a $P \subseteq \mathbb{R}^n$ poliédernek, akkor

$$Q_1 \subseteq Q_2 \Rightarrow \mathcal{L}(Q_1) \subseteq \mathcal{L}(Q_2) \Rightarrow \operatorname{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q_1)\big) \subseteq \operatorname{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q_2)\big)$$

minden rácsmentes $\mathcal{L}$ halmazrendszer esetén. Tehát a tartalmazásra nézve kisebb kibővített felírások erősebb rácsmentes vágásokhoz vezethetnek. Ez az észrevétel

motiválja a következő definíciót. Egy kibővített LP felírást minimálisnak nevezünk, ha szigorúan nem tartalmaz másik kibővített LP felírást. A minimális kibővített felírások még rögzített q esetén sem egyértelműek. Formálisan a definíció a következő.

3.1.1. Definíció. Legyen $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+q}$ kibővített felírása $P \subseteq \mathbb{R}^n$-nek. Azt mondjuk, hogy Q minimális kibővített felírás, ha minden $Q' \subsetneq Q$ halmazra teljesül, hogy

$$P \nsubseteq \mathrm{proj}_{R^n}(Q').$$

A minimális kibővített felírás jellemzésére használhatjuk a következő lemmát.

3.1.2. Lemma. *Legyen Q a P csúcsos poliéder kibővített felírása. A Q minimális kibővített felírása a P poliédernek akkor és csak akkor, ha a következő két feltétel teljesül*

(i) P extrém pontja (iránya) extrém pontja (iránya) Q-nak

(ii) Q-nak nincsen más extrém pontja illetve extrém iránya

Bizonyítás. Tekintsük P extrém pontokkal illetve extrém irányaival történő felírását, azaz

$$P = \mathrm{conv}\,(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^m) + \mathrm{cone}\,(\bar{r}^1, \ldots, \bar{r}^l).$$

Mivel Q kibővített felírása P-nek, ezért P minden irányának és minden pontjának van legalább egy ősképe Q-ban. Legyenek ezek $\hat{x}^i = (\bar{x}^i, y^j) \in Q$, ahol $i = 1, \ldots, m$ illetve $\hat{r}^j = (\bar{r}^j, w^j) \in \mathrm{rec}\,(Q)$, ahol $j = 1, \ldots, l$. Tekintsük a következő poliédert:

$$Q' = \mathrm{conv}\,(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^m) + \mathrm{cone}\,(\hat{r}^1, \ldots, \hat{r}^l).$$

Természetesen $Q' \subseteq Q$. Legyen $x \in P$, ekkor létezik $\mu \in \mathbb{R}^l_+$ és olyan $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$, amire teljesül, hogy $\mathbf{1}^T\lambda = 1$, továbbá $x = \sum_{i=i}^m \lambda_i \bar{x}^i + \sum_{j=1}^l \mu_j \bar{r}^j$. De mivel $\sum_{i=1}^m \lambda_i \hat{x}^i + \sum_{j=1}^l \mu_j \hat{r}^j \in Q'$ azt kapjuk, hogy $x \in \mathrm{proj}_x(Q')$, azaz Q' kibővített felírása P-nek.

Belátható, hogy minden $i = 1, \ldots, m$ indexre $\hat{x}^i$ extrém pontja Q'-nek. Ugyanis, indirekt tegyük fel, hogy van olyan $1 \leq t \leq m$ index amire $(\hat{x}^t, y^t)$ nem extrém. Ekkor $(\hat{x}^t, y^t) = \sum_{i=i}^m \lambda_i \hat{x}^i + \sum_{j=1}^l \mu_j \hat{r}^j$ alakban áll elő, ahol $\mu \in \mathbb{R}^l_+$ és $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ olyan, hogy $\mathbf{1}^T\lambda = 1$ és $\lambda_t = 0$. Azonban ekkor ugyanezt a μ és λ együtthatókat használva azt kapnánk, hogy $\hat{x}^t$ nem extrém pontja P-nek, ami ellentmondás. Hasonlóan bizonyítható, hogy minden $j = 1, \ldots, l$ indexre $\hat{r}^j$ extrém iránya Q'-nek. Tehát Q' teljesíti a lemma (i) és (ii) feltételét.

Tegyük fel, hogy Q minimális kibővített felírása P-nek. Ekkor a minimalitás definíciója miatt Q' nem lehet valódi része Q-nak, azaz $Q = Q'$. Ekkor viszont Q teljesíti az (i) és (ii) feltételeket.

Fordítva tegyük fel, hogy Q teljesíti az (i) és (ii) feltételeket, és indirekt tegyük fel, hogy Q nem minimális kibővített felírás. Ekkor létezik $\hat{Q} \subsetneq Q$ kibővített felírása P-nek. Mivel $\hat{Q}$ szigorú része Q-nak ezért Q valamelyik extrém pontját vagy extrém irányát nem tartalmazza. De ekkor van P-nek olyan extrém pontja vagy extrém iránya, aminek nincs ősképe $\hat{Q}$-ban, ellentmondva annak, hogy $\hat{Q}$ kibővített felírása P-nek. $\square$

3.2. A kibővített LP felírások korlátai általános vegyes egészértékű halamzokra

Ebben a szakaszban egy szükséges feltételét ismertetem annak, hogy egy kibővített LP felírás erősebb relaxációhoz vezessen. Ehhez az kell, hogy a kibővített felírás dimenziója szigorúan nagyobb legyen, mint az eredeti felírásé. Fő észrevételként Bodur és társai a [6] cikkben ismertetett megfigyelését használjuk. Ennek, és a 3.1.2 lemmának a segítségével korlátot kapunk a szükséges új változók számára, ami a legerősebb kibővített felíráshoz kell rácsmentes vágások alkalmazása esetén.

3.2.1. Tétel. *Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^n$ poliéder és a kibővített felírása $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+q}$, valamint $t = \dim(Q) - \dim(P)$. Ha $t < q$, akkor bármely $\mathcal{L}$ rácsmentes halmazrendszerhez létezik olyan $Q' \subseteq \mathbb{R}^{n+t}$ kibővített felírása P-nek, amire teljesül, hogy* $\operatorname{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q)\big) = \operatorname{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q')\big)$.

Bizonyítás. Legyen $d_p = \dim(P)$ és $d_q = \dim(Q)$. Először tegyük fel, hogy P nem teljes rangú, azaz $n - d_p > 0$. Ekkor létezik $n - d_p$ olyan lineárisan független egyenlőség amit P minden x eleme kielégít. Másképpen fogalmazva van olyan A teljes sorrangú mátrix és b vektor, hogy minden $x \in P$ pontra fenáll az $Ax = b$. Hasonlóan minden $(x, y) \in Q$ pont kielégít $(n + q - d_q)$ lineárisan független egyenlőséget. Mivel ha $(x, y) \in Q$, akkor $x \in P$, ezért $Ax = b$. Tehát Q minden (x, y) pontja teljesíti az $Ax + 0y = b$ egyenletrendszert és még $(n + q - d_q) - (n - d_p) = q - t$ egyenletet, jelölje ezt $Cx + Ey = d$. Tehát a következő egyenletrendszert kaptuk:

$$\begin{array}{r} n - d_p \ \{ \\ q - t \ \{ \end{array} \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},$$

ahol az $\tilde{A} = (A, 0; C, E)$ mátrix teljes sorrangú.

Megmutatjuk, hogy E szintén teljes sorrangú. Ugyanis indirekt, tegyük fel, hogy nem. Ekkor $\tilde{A}$ utolsó $q - t$ során elemi lépéseket végrehajtva egy új egyenletet kaphatunk, ahol y együtthatói nullák. Jelölje ezt az egyenletet $c^T + 0y = g$, ekkor $c \neq 0$,

mert $\tilde{A}$ teljes sorrangú. Kapjuk tehát, hogy

$$\begin{array}{rl} n-d_p & \{ \\ 1 & \{ \\ q-t-1 & \{ \end{array} \begin{pmatrix} A & 0 \\ c & 0 \\ C' & E' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ g \\ d' \end{pmatrix},$$

ahol az $(A, 0;\ c, 0;\ C', E')$ mátrix teljes sorrangú, azaz c lineárisan független A soraitól. De ekkor $n-d_p+1$ egyenletet elégítenének ki P pontjai, de $\dim(P) = d_p$ miatt ez ellentmondás. Tehát E tényleg teljes sorrangú.

Mivel E teljes sorrangú, az $\tilde{A}$ mátrix utolsó $q-t$ során elemi ekvivalens lépésekkel elérhető, hogy az egyenletrendszer a következő alkú legyen:

$$\begin{array}{rl} n-d_p & \{ \\ q-t & \{ \end{array} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ C'' & I & E'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y_B \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d'' \end{pmatrix}.$$

Itt I a $(q-t) \times (q-t)$ méretű egységmátrixot jelöli, és y_B illetve y_N az y egy partíciója, ahol $B \subseteq \{1, \ldots, q\}$, $|B| = q-t$ és $N = \{1, \ldots, q\} \setminus B$. Ekkor minden $(x, y) \in Q$ pontra

$$y_B = d'' - C''x - E''y_N$$

teljesül. Ha Q lineárisan függő változóit vetítéssel elhagyjuk, akkor a dimenzió nem csökken. Azaz legyen $Q' = \mathrm{proj}_{x,y_N}(Q)$, ekkor $\dim(Q') = \dim(Q) = d_q$. Továbbá a $Q' \subseteq \mathbb{R}^{n+t}$ kibővített LP felírása P-nek, mert

$$\mathrm{proj}_x(Q') = \mathrm{proj}_x\big(\mathrm{proj}_{x,y_N}(Q)\big) = \mathrm{proj}_x(Q) = P.$$

Most belátjuk, hogy $\mathcal{L}(Q') = \mathrm{proj}_{x,y_N}\big(\mathcal{L}(Q)\big)$. Mivel Q egy kibővített felírása Q'-nek, ezért $\mathcal{L}(Q') \supseteq \mathrm{proj}_{x,y_N}\big(\mathcal{L}(Q)\big)$ fenáll. A fordított irányú tartalmazás belátásához indirekt tegyük fel, hogy létezik egy olyan pont, amire

$$(\bar{x}, \bar{y_N}) \in \mathcal{L}(Q') \setminus \mathrm{proj}_{x,y_N}\big(\mathcal{L}(Q)\big). \tag{3.1}$$

Legyen $\bar{y_B} = d'' - C''\bar{x} - E''\bar{y_N}$. A 3.1 indirekt feltevés szerint létezik legalább egy $L \in \mathcal{L}$ rácsmentes halmaz, amire teljesül, hogy $(\bar{x}, \bar{y_B}, \bar{y_N}) \notin \mathrm{conv}\big(Q \setminus (L \times \mathbb{R}^q)\big)$, de $(\bar{x}, \bar{y_N}) \in \mathrm{conv}\big(Q' \setminus (L \times \mathbb{R}^t)\big)$. Ezért létezik $l \in \mathbb{Z}_+$, hogy

$$(\bar{x}, \bar{y_N}) \in \mathrm{conv}\big\{(x^1, y_N^1), \ldots, (x^l, y_N^l)\big\},$$

ahol minden $i \in \{1, \ldots, l\}$ indexre $(x^i, y_N^i) \in Q' \setminus (L \times \mathbb{R}^t)$. De ekkor minden $i \in \{1, \ldots, l\}$ indexre $(x^i, y_B^i, y_N^i) \in Q \setminus (L \times \mathbb{R}^q)$, ahol $y_B^i = d'' - C''x^i - E''y_N^i$, és ezért $(x^i, y_B^i, y_N^i) \in \mathrm{conv}\big(Q \setminus (L \times \mathbb{R}^q)\big)$, ami ellentmondás. Tehát $d_p < n$ esetén $\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q)\big) = \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q')\big)$.

Tekintsük most a $d_p = n$ esetet. Ekkor nincs olyan egyenlőség amit P minden pontja kielégítene, és a (C, E) mátrix teljes sorrangú. Innen ugyanazokkal a lépésekkel adódik, hogy E szintén teljes sorrangú és a többi eredmény hasonlóan következik. Ezért $\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q)\big) = \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q')\big)$ a $d_p = n$ esetén is fenáll. $\square$

3.2.2. Megjegyzés. A tétel bizonyítása során $\mathcal{L}$ rácsmentessége sehol sem volt használva, tehát az eredmény igaz minden $\mathcal{L}$ halmazrendszerre és az 1.1 illetve az 1.2 egyenletek által definiált $\mathcal{L}(P)$ és $\mathcal{L}(Q)$ halmazokra.

3.2.3. Következmény. *Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^n$ poliéder és a kibővített felírása $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+q}$. Ha $\dim(P) = \dim(Q)$, akkor $\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q)\big) = \mathcal{L}(P)$ tetszőleges $\mathcal{L}$ rácsmentes halmazrendszerre.*

Tekintsük a következő két triviális kibővített felírását $P \subseteq \mathbb{R}^n$-nek:

$$Q_0 = P \times \{0\}^q \quad \text{és} \quad Q_\infty = P \times \mathbb{R}^q.$$

Mivel $Q_0 \subseteq Q_\infty$, ezért $\mathcal{L}(Q_0) \subseteq \mathcal{L}(Q_\infty)$. Továbbá $\dim(Q_0) = \dim(P)$, így a 3.2.3 következmény miatt $\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q_0)\big) = \mathcal{L}(P)$. Ekkor viszont $\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q_\infty)\big) = \mathcal{L}(P)$ is fenáll, azaz ezek a triviális kibővített felírások nem hasznosak rácsmentes vágások alakalmazásának a szempontjából.

A rácsmentes vágások alkalmazásánál kapható legerősebb kibővített felíráshoz szükséges új változók számára korlátot kaphatunk a 3.1.2 lemma és a 3.2.1 összetételével.

3.2.4. Következmény. *Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^n$ poliéder és $Q \subseteq \mathbb{R}^{n+q}$ minimális kibővített felírása P-nek. Jelölje k a P poliéder extrém pontjainak és az extrém irányainak a számát. Ekkor $\dim(Q) \leq k - 1$.*

Továbbá legyen $t = k - 1 - \dim(P)$. Ha $q > t$ akkor, létezik $Q' \subseteq \mathbb{R}^{n+t}$ kibővített felírása P-nek, amire teljesül, hogy minden $\mathcal{L}$ rácsmentes halmazrendszerre $\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q)\big) = \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q')\big)$.

A 3.1.2 lemma szerint P bármely minimális kibővített felírásának ugyanannyi extrém pontja és extrém iránya van, mint a P polidérnek. Következésképpen a minimális felírás dimenzióját korlátozza P extrém pontjainak és extrém irányainak a száma. Azaz a 3.2.3 és a 3.2.4 következményekből következik, hogy:

3.2.5. Következmény. *Legyen P egy csúcsos poliéder és $\dim(P) = k - 1$, ahol k jelöli a P extrém pontjainak és az extrém irányainak a számát. Ekkor tetszőleges $\mathcal{L}$ rácsmentes halmazrendszer és tetszőleges Q kibővített felírás esetén fenáll, hogy $\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q)\big) = \mathcal{L}(P)$.*

4. fejezet

A legerősebb kibővített felírás általános vegyes egészértékű halmazokra

Ebben a fejezetben ismertetem a rácsmentes halmazokra vonatkozó legerősebb Q kibővített felírását egy $P \subseteq \mathbb{R}^n$ poliédernek. Legerősebb felíráson azt értjük, hogy P minden Q' kibővített felírására és minden $\mathcal{L}$ rácsmentes halmazrendszerre teljesül, hogy $\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q)\big) \subseteq \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q')\big)$. A 3.2.5. következmény szerint nem minden esetben van általános vegyes egészértékű halmaznak olyan kibővített felírása ami jobb rácsmentes vágásokat eredményez. Ebben az esetben a Q kibővített felíráshoz adott rácsmentes vágások sem jobbak P rácsmentes vágásainál. Sőt, ha Q nem vezet jobb rácsmentes vágásokhoz, akkor P-nek nincs is olyan kibővített felírása, ami jobb rácsmentes vágásokat adna. A továbbiakban jelölje az A mátrix oszlopai által generált teret $\mathrm{conv}\,(A)$, és az A oszlopai áltla generált kúpot $\mathrm{cone}\,(A)$.

Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^n$ poliédernek $m > 0$ extrém pontja és $l \geq 0$ extrém iránya. Legyenek továbbá a $V \subseteq \mathbb{R}^{n\times m}$ és az $R \subseteq \mathbb{R}^{n\times l}$ mátrixok oszlopai a P extrém pontjai, illetve az extrém irányai. Ekkor

$$P = \mathrm{conv}\,(V) + \mathrm{cone}\,(R). \tag{4.1}$$

Definiáljuk P egy kibővített felírását a következőképpen:

$$X(P) = \mathrm{conv}\begin{pmatrix} V \\ I_m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathrm{cone}\begin{pmatrix} R \\ \mathbf{0} \\ I_l \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

ahol I_s az $s \times s$ méretű egységmátrix, $\mathbf{0}$ a megfelelő méretű null mátrix. Így valóban egy kibővített felírást kapunk, hiszen $\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(X(P)\big) = P$. Mivel $X(P)$-t úgy kapjuk,

hogy P extrém pontjaihoz és extrém irányaihoz különböző egységvektorokat adunk, ezért P és $X(P)$ extrém pontjai és extrém irányai között egy-egyértelmű megfeleltetés van. Tehát a 3.1.2 lemma szerint $X(P)$ egy minimális kibővített felírása P-nek. Továbbá $X(P)$ extrém pontjai affin függetlenek, sőt ha bármelyik extrém irányát hozzáadjuk egy rögzített extrém ponthoz további affin független pontokat kapunk. Következésképpen $X(P)$ dimenziója legalább $m+l-1$. Ezt összevetve a 3.2.4 következménnyel adódik, hogy $\dim\big(X(P)\big) = m+l-1$. Bodur és társai a [6] cikkben bizonyították, hogy $X(P)$ a lehető legerősebb kibővített felírás P-nek a rácsmentes vágásokat tekintve.

4.0.1. Tétel. *Legyen Q kibővített felírása a $P \subseteq \mathbb{R}^n$ poliédernek. Ekkor tetszőleges $\mathcal{L}$ rácsmentes halmazrendszer esetén igaz, hogy*

$$\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\Big(\mathcal{L}\big(X(P)\big)\Big) \subseteq \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q)\big)$$

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy Q minimális kibővített felírása P-nek. Ekkor a 3.1.2 lemma szerint kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van Q és P extrém irányai és extrém pontjai között. Másképp fogalmazva van $k > 0$ egész, amelyre létezik olyan $V' \subseteq \mathbb{R}^{k\times m}$ és $R' \subseteq \mathbb{R}^{k\times l}$ mátrix, hogy

$$Q = \mathrm{conv}\begin{pmatrix} V \\ V' \end{pmatrix} + \mathrm{cone}\begin{pmatrix} R \\ R' \end{pmatrix}$$

teljesül. Definiáljuk a következő Q^+ poliédert:

$$Q^+ = \mathrm{conv}\begin{pmatrix} V \\ V' \\ I_m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathrm{cone}\begin{pmatrix} R \\ R' \\ \mathbf{0} \\ I_l \end{pmatrix}.$$

Ekkor Q^+ kibővített felírása Q-nak és $X(P)$-nek is. Az 1.3.1 tétel szerint ekkor teljesül, hogy

$$\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q^+)\big) \subseteq \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q)\big) \text{ és } \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q^+)\big) \subseteq \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\Big(\mathcal{L}\big(X(P)\big)\Big). \tag{4.3}$$

Hasonlóan $X(P)$ dimenziójához meggondolható, hogy a Q^+ dimenziójára is teljesül, hogy $\dim(Q^+) = k+l-1 = \dim\big(X(P)\big)$. De emiatt

$$\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\Big(\mathcal{L}\big(X(P)\big)\Big) = \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(Q^+)\big). \tag{4.4}$$

Összerakva a 4.3 és a 4.4 tartalmazásokat a tétel adódik. □

Leírhatjuk $X(P)$-t explicit alakban a következőképpen:

$$X(P) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m+l} : \exists\, \bar{\lambda}, \bar{\mu} \text{ olyan, hogy } \begin{pmatrix} x \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ I_m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \bar{\lambda} + \begin{pmatrix} R \\ \mathbf{0} \\ I_l \end{pmatrix} \bar{\mu}, \right.$$
$$\left. \mathbf{1}^T \bar{\lambda} = 1,\ \bar{\lambda}, \bar{\mu} \geq 0 \right\}.$$

Nyilvánvaló, hogy a fenti felírásban $\lambda = \bar{\lambda}$ és $\mu = \bar{\mu}$ tehát $X(P)$-t a következő egyszerűbb alakban is felírhatjuk:

$$X(P) = \left\{ (x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l : x = V\lambda + R\mu, \quad \mathbf{1}^T \lambda = 1,\ \lambda, \mu \geq 0 \right\} \tag{4.5}$$

A P poliéder explicit alakban való felírása:

$$X(P) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists\, \lambda, \mu \text{ olyan, hogy } x = V\lambda + R\mu, \quad \mathbf{1}^T \lambda = 1,\ \lambda, \mu \geq 0 \right\} \tag{4.6}$$

Az egyetlen különbség P és $X(P)$ felírásában az, hogy a P extrém pontjainál és az extrém irányainál használt szorzók $X(P)$ felírásában explicit változók. Meglepő lehet, hogy egy látszólag triviális változtatással erősebb rácsmentes vágásokat kaphatunk $X(P)$-re alkalmazva, mintha P-re alkalmaznánk ezeket.

Most részletesebben is összefoglalom, hogy az $X(P)$ kibővített felírás split lezártját hogyan tudjuk leírni. Megjegyzendő, hogy általános rácsmentes halmazokra is átvihetőek a következő eredmények. Balas a [2] cikk 3.3 tételével megmutatta, hogy hogyan lehet felírni explicit módon két poliéder uniójának a konvex burkát. Tekintsük az $S^k = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma^k + 1 > (\pi^k)^T x > \gamma^k\}$ split halmazt és a $\hat{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ poliédert, ekkor a fent említett tétel szerint

$$\operatorname{conv}\left(\hat{P} \setminus S^k\right) = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists\, \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in \mathbb{R}^n \text{ és } \nu \in \mathbb{R} \text{ olyan, hogy} \tag{4.7}$$

$$x = \bar{x} + \bar{\bar{x}}, \qquad 0 \leq \nu \leq 1, \tag{4.8}$$

$$A\bar{x} \leq \nu b, \qquad A\bar{\bar{x}} \leq (1-\nu) b, \tag{4.9}$$

$$(\pi^k)^T x \leq \nu \gamma^k, \quad (\pi^k)^T x \geq (1-\nu)(\gamma^k + 1) \Big\}. \tag{4.10}$$

Legyen P a 4.6 egyenlőség által definiált és tekintsük az $\mathcal{S} = \{S^k : k \in K\}$ split halmazokat. A 4.7 - 4.10 rendszerrel egy split halmazra tekintett lezártját kapjuk a $\hat{P}$ poliédernek. Ezek alapján a P poliédernek az $\mathcal{S}$-re vonatkozó split lezártját a következőképpen írhajuk le:

$$\mathcal{S}(P) = \Bigg\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists\, \bar{x},\, \bar{\bar{x}},\, \bar{\lambda},\, \bar{\bar{\lambda}},\, \bar{\mu},\, \bar{\bar{\mu}},\, \nu^k \text{ olyan, hogy}$$

$$\begin{aligned}
x &= \bar{x}^k + \bar{\bar{x}}^k, & 0 \le \nu^k \le 1, & \quad k \in K,\\
\bar{x}^k &= V\bar{\lambda}^k + R\bar{\mu}^k, & \bar{\bar{x}}^k &= V\bar{\bar{\lambda}}^k + R\bar{\bar{\mu}}^k, & k \in K,\\
\mathbf{1}^T\bar{\lambda}^k &= \nu^k, & \mathbf{1}^T\bar{\bar{\lambda}}^k &= 1-\nu^k, & k \in K,\\
(\pi^k)^T\bar{x}^k &\le \nu^k\gamma^k, & (\pi^k)^T\bar{\bar{x}}^k &\ge (1-\nu^k)(\gamma^k+1), & k \in K,\\
\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k &\ge 0, & \bar{\bar{\lambda}}^k, \bar{\bar{\mu}}^k &\ge 0 & k \in K \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Hasonló módon $\mathcal{S}\big(X(P)\big)$ felírható (x, λ, μ) pontok halmazaként, ahol x kielégíti a 4.11 rendszert és ezen felül $\lambda^k = \bar{\lambda}^k + \bar{\bar{\lambda}}^k$, valamint $\mu^k = \bar{\mu}^k + \bar{\bar{\mu}}^k$ teljesül minden $k \in K$-ra.

4.0.2. Következmény. *Legyen P és $X(P)$ a 4.6 és a 4.5 rendszerekkel definálva és legyen $\mathcal{S} = \{S^k : k \in K\}$ adott split halmazrendszer. Ekkor*

$$\operatorname{proj}_x\Bigg(\mathcal{S}\big(X(P)\big)\Bigg) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, \bar{x},\, \bar{\bar{x}},\, \bar{\lambda},\, \bar{\bar{\lambda}},\, \bar{\mu},\, \bar{\bar{\mu}},\, \nu^k \textit{ olyan, hogy a } 4.11 \textit{ teljesül,}$$

$$\bar{\lambda}^k + \bar{\bar{\lambda}}^k = \bar{\lambda}^{k'} + \bar{\bar{\lambda}}^{k'}, \quad \bar{\mu}^k + \bar{\bar{\mu}}^k = \bar{\mu}^{k'} + \bar{\bar{\mu}}^{k'} \quad \textit{minden} \quad k \ne k' \in K\big\}. \tag{4.12}$$

A 4.0.2 következmény jobb megértése érdekében tekintsük azt az esetet, amikor P egy politóp. Ekkor R és μ, $\bar{\mu}$, $\bar{\bar{\mu}}$ nem szerepel a 4.11 rendszerben és a 4.0.2 következményben. Ha $x \in \mathcal{S}(P)$, akkor valamely $k \in K$-ra x egyenlő két pont $\bar{x}^k$ és $\bar{\bar{x}}^k$ konvex kombinációjával. Ezeket a pontokat x *barátainak* hívjuk az S^k split halmazra nézve. Az $\bar{x}^k$ konvex kombinációja V oszlopainak, ahol a j-edik oszlop együtthatója $\bar{\lambda}^k_j$. Hasonló igaz $\bar{\bar{x}}^k$-ra csak a $\bar{\bar{\lambda}}^k_j$ együtthatókkal. Ha $x \in \operatorname{proj}_x\Bigg(\mathcal{S}\big(X(P)\big)\Bigg)$, akkor V j-edik oszlopára teljesül, hogy $\bar{\lambda}^k_j + \bar{\bar{\lambda}}^k_j = \bar{\lambda}^{k'}_j + \bar{\bar{\lambda}}^{k'}_j$ $k \ne k' \in K$-ra. Másképp fogalmazva minden $k \in K$-ra x két barátja az S^k split halmazra tekintve függ x két barátjától $k' \ne k$-ra olyan értelemben, hogy V j-edik oszlopához tartozó szorzók összege k-ra pontosan megegyezik ugyanezzel az összeggel $k' \ne k$-ra.

Megmutatható még, hogy a rácsmentes vágosokhoz való legerősebb kibővített felíráshoz szükséges változók számára az $m + l$ felsőbecslés nem éles. Egy speciális esetben erősíthetjük ezt a felső korlátot. Tegyük fel, hogy néhány extrém irány egységvektor, ekkor a nekik megfelelő hozzáadott változók levetíthetőek az erős kibővített formula változása nélkül.

4.0.3. Lemma. *Legyen P és $X(P)$ a 4.6 és a 4.5 rendszerekkel definálva. Legyen $R_U \subseteq R$ a P azon extrém irányainak a halmaza, amik egységvektorok. Ekkor létezik*

olyan $\tilde{X} \subseteq \mathbb{R}n + m + l - |R_U|$ *kibővített felírása* P*-nek, amire teljesül, hogy tetszőleges* $\mathcal{L}$ *rácsmentes halmazrendszerre nézve* $\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\big(\mathcal{L}(\tilde{X})\big) = \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^n}\Big(\mathcal{L}\big(X(P)\big)\Big)$.

Bizonyítás. Legyen $k = |R_U| \leq n$ és tegyük fel, hogy az R-ben lévő vektorok rendezve vannak úgy, hogy az első k vektor alkotja R_U.

$$\tilde{X} = \mathrm{conv}\begin{pmatrix} V \\ I_m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathrm{cone}\begin{pmatrix} R_U & R \setminus R_U \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{l-k} \end{pmatrix}.$$

Az $X(P)$ nyilvánvalóan kibővített felírása $\tilde{X}$-nak. Korábban láttuk, hogy teljesül a $\dim\big(X(P)\big) = m + l - 1$. A 3.2.5 következmény szerint $\tilde{X}$ dimenziójára fenáll, hogy $\dim(\tilde{X}) \leq m + l - 1$. Belátható, hogy $\tilde{X}$ extrém pontjai és azok a pontok, amiket úgy kapunk, hogy $\tilde{X}$ tetszőleges extrém irányát hozzáadjuk $\tilde{X}$ egy rögzített extrém pontjához $m + l$ darab affin független pontot határoznak meg. Tehát az is igaz, hogy $\dim(\tilde{X}) \geq m + l - 1$, és ezért telejesül, hogy $\dim(X) = \dim(\tilde{X})$. A 3.2.4 következményből adódóan $\mathrm{proj}_{\mathbb{R}^{n+m+l-k}}\Big(\mathcal{L}\big(X(P)\big)\Big) = \mathcal{L}(\tilde{X})$, amiből az állítás következik. $\square$

5. fejezet

Felemelés és vetítés

Ebben a fejezetben ismertetek egy új felemelés és vetítés operátort, amit Bodur és társai publikáltak az [5] cikkben. Ehhez először bemutatom a Lovász és Schrijver által definiált $N(P)$ operátort. A [10] cikk 1.3 lemmája szerint $N(P)$ egy poliéder az $\mathbb{R}^n$ térben és $N(P) \subseteq \mathcal{S}(P)$. Tehát ez az operátor egy relaxáltja P^{IP}-nek ami legalább olyan erős, mintha az összes split vágást hozzáadtuk volna P-hez. Mivel $\mathcal{S}^{n_1}(P) = \operatorname{conv}(P^{IP})$, ezért fenáll, hogy

$$\operatorname{conv}(P^{IP}) = N^{n_1}(P) \subseteq \ldots \subseteq N^2(P) \subseteq N^1(P) \subseteq P,$$

ahol $N^1(P) = N(P)$ és $N^k(P) = N\big(N^{k-1}(P)\big)$, ha $k > 1$.

Ezeket az operátorokat felemelés és vetítés operátoroknak hívjuk, mert a következő sémán alapulnak:

1a Létrehoz egy poliédert egy kibővített téren (felemelés)

1b Egy erősítő lépést tesz a kibővített téren

2 Visszavetíti a kibővített teret az eredeti térre (vetítés)

Hasonlóan a 2. fejezetben ismertetett operátorhoz, az 1a lépést P egy kibővített felírásának tekinthetjük, míg az 1b lépést pedig néhány speciális $0-1$ split vágás hozzáadásának. Ez a megfigyelés vezetett Bodur és társai által az [5] cikkben publikált, új felemelés és vetítés operátor megalkotásához. Ezeknek az operátoroknak a kibővített felírásához nem szükséges P csúcsainak és irányainak az explicit ismerete, ellentétben a 2. fejezetben ismertetett operátorral.

5.1. A Lovász–Schrijver operátor

Ebben a szakaszban részletesen is ismertetem a Lovász–Schrijver operátort. Az eredeti jelöléseket meghagyva az 1a lépésben kapott kibővített felírást $\hat{M}(P)$-vel, az

1b erősítő lépés utáni poliédert $M(P)$-vel, míg a vetítés utáni poliédert $N(P)$-vel jelölöm. Az operátort Lovász és Schrijver csak bináris halmazokra definiálta, itt általánosabban $0-1$ vegyes egészértékű halmazokra alkalmazzuk, akárcsak Balas és társai a [3] cikkben. Továbbá a folytonos változók nemnegatívitását sem követeljük meg.

Tekintsük az $I = \{1, \ldots, n_1\}$ és a $J = \{1, \ldots, n\}$ indexhalmazokat, valamint az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenség rendszert $\mathbb{R}^n$-ben. A sorokat indexeljük a $L = \{1, \ldots, m\}$ halmaz segítségével, tehát az egyenlőtlenség rendszer a következő alakú $(a^l)^T x \leq b^l$, ahol $l \in L$. Feltesszük még, hogy a $0 \leq x_i \leq 1$ $(i \in I)$ egyenlőtlenségeket az $Ax \leq b$ tartalmazza. Legyen $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$. Minden $i \in I$ indexre x_i egész P^{IP}-ben.

Jelölje, mint korábban

$$\mathcal{S}^{0,1}(P) = \bigcap_{i \in I} \operatorname{conv}(P \setminus S_i), \text{ ahol } S_i = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 > x_i > 0\} \text{ minden } i \in I \text{ indexre.}$$

A kibővített LP felírást úgy kapjuk, hogy a P-t definiáló egyenlőtlenségeket megszorozzuk, $x_i \geq 0$ és $1 - x_i \geq 0$ $(i \in I)$ szorzókkal, a következő kvadratikus egyenlőtlenség rendszert kapva ezzel

$$x_i(b^l - (a^l)^T)x \geq 0 \quad i \in I,\, l \in L \tag{5.1}$$

$$(1 - x_i)(b^l - (a^l)^T)x \geq 0 \quad i \in I,\, l \in L, \tag{5.2}$$

ami érvényes P-re, mivel $x_i \geq 0$ és $1 - x_i \geq 0$ teljesül minden $x \in P$-re. Minden kvadratikus $x_i x_j$ változót helyettesíthetünk egy új y_{ij} változóval ($i \in i$ és $j \in J$), ezzel a linearizálva az egyenlőtlenségeket. Továbbá biztosítani kell, hogy y_{ij} és y_{ji} egyenlőek minden $i \in I$ és $j \in J$ esetén. A gyakorlati alkalmazások esetén ezeket a változókat csak egyszer adjuk hozzá a kibővített felíráshoz. A kibővített felírás $\hat{M}(P) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_1 \cdot n}$ kielégíti a következő egyenlőtlenségeket

$$b^l x_i - \sum_{j \in J} a_j^l y_{ij} \geq 0 \quad i \in I,\, l \in L \tag{5.3}$$

$$b^l - \sum_{j \in J} a_j^l x_j - b^l x_i + \sum_{j \in I} a_j^l y_{ij} \geq 0 \quad i \in I,\, l \in L, \tag{5.4}$$

$$y_{ij} = y_{ji} \quad i \in I,\, j \in J. \tag{5.5}$$

5.1.1. Lemma. *Az $\hat{M}(P)$ halamaz kibővített felírása a P poliédernek.*

Bizonyítás. Minden rögzitett $i \in I$ és $l \in L$ indexpár esetén, ha összeadjuk az 5.3 és az 5.4 egyenlőtlenségeket a $b^l - (a^l)^T x \geq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ezért minden

egyes egyenlőtlenség, ami az $Ax \leq b$ egyenlőtlenség-rendszerben szerepel, érvényes $\hat{M}(P)$-re és így $\mathrm{proj}_x\big(\hat{M}(P)\big) \subseteq P$. A fordított tartalmazás belátásához tegyük fel, hogy $\bar{x} \in P$ és legyen $\bar{y} = (\bar{y_{ij}} : i \in I, j \in J)$, ahol $y_{ij} = x_i x_j$. Ekkor az 5.3 egyenlőtlenség baloldala ugyanaz, mint az 5.1 baloldala, azaz $x_i(b^l - (a^l)^T)x$. Ez viszont nemnegatív ugyanis $\bar{x} \in P$, ezért $\bar{x} \geq 0$ és $A\bar{x} \leq b$. Hasonló érveléssel igazolható, hogy $(\bar{x}, \bar{y})$ kielégíti az 5.4 egyenlőtlenségeket és az 5.5 egyenleteket. Következésképpen $(\bar{x}, \bar{y}) \in \hat{M}(P)$ és $\mathrm{proj}_x\big(\hat{M}(P)\big) = P$. $\square$

Lovász és Schrijver a következőképpen definiálta az erősítő lépés után az $M(P)$ halamazt.

$$M(P) = \hat{M}(P) \cap \big\{(x, y) : y_{ii} = x_i \ \forall\, i \in I\big\}. \tag{5.6}$$

A motivációja ennek az erősítő lépésnek az, hogy ha $\hat{x}$ vektor 0 vagy 1 értéket vesz fel, akkor $\hat{y}_{ii} = \hat{x}_i \hat{x}_i = \hat{x}_i{}^2 = \hat{x}_i$. Végül a vetítés után kapjuk az $N(P) = \mathrm{proj}_x\big(M(P)\big)$ operátort.

Az 5.1 és az 5.2 kvadratikus egyenlőtlenségekből és a hozzájuk tartozó az 5.3 és az 5.4 lineáris egyenlőtlenségekből tekintsük azokat, amelyeket úgy kapunk, hogy az x_j változóra fenálló korlátokat az x_i és az $(1 - x_i)$ tagokkal szorozzuk. Ekkor a következő $\hat{M}(P)$-re érvényes egyenlőségeket kapjuk:

$$\begin{aligned}
x_i x_j &\geq 0 \rightarrow \quad y_{ij} \geq 0, \\
x_i(1 - x_j) &\geq 0 \rightarrow \quad x_i \geq y_{ij}, \\
(1 - x_i)x_j &\geq 0 \rightarrow \quad x_j \geq y_{ij}, \\
(1 - x_i)(1 - x_j) &\geq 0 \rightarrow \quad 1 - x_i - x_j + y_{ij} \geq 0,
\end{aligned}$$

ahol $i, j \in I$, $i \leq j$.

A fenti négy linearizált egyenlőtlenséget McCormick-egyenlőtlenségeknek nevezzük, és ezek a $\big\{(x_i, x_j, y_{ij}) \in \{0, 1\}^3 : y_{ij} = x_i x_j\big\}$ halmaz konvex burkát adják (ld. [11]).

Boudur és társai megfigyelték az [5] cikkben, hogy az egyenlőtlenségek, amiket $\hat{M}(P)$-hez adunk, hogy megkapjuk $M(P)$-t, $0 - 1$ split vágások.

5.1.2. Lemma. *Bármely $i \in I$ indexre az $y_{ii} = x_i$ egyenlet érvényes $\mathcal{S}^{0,1}\big(\hat{M}(P)\big)$-re.*

Bizonyítás. Legyenek $i, j \in I$, $i \leq j$ rögzített indexek. Ekkor a következő implikációk a McCormick-egyenlőtlenségekből következnek:

$$x_i = 0 \Rightarrow y_{ij} = 0, \tag{5.7}$$

$$x_i = 1 \Rightarrow y_{ij} = y_j. \tag{5.8}$$

Mind $x_i = 0$, mind $x_i = 1$ esetén azt kapjuk, hogy $y_{ii} = x_i$. Ekkor tehát minden $(x, y) \in \operatorname{conv}(\hat{M}(P) \setminus S_i)$ párra igaz, hogy $y_{ii} = x_i$. Mivel tudjuk, hogy $\mathcal{S}^{0,1}\big(\hat{M}(P)\big) \subseteq \operatorname{conv}(\hat{M}(P) \setminus S_i)$ igaz, ezért a tétel következik. $\square$

5.2. A Lovász–Schrijver operátor erősítése

Az előző 5.1.2 lemma tehát azt mondja, hogy $M(P)$-t úgy kapjuk $\hat{M}(P)$-ből, hogy pontosan egy split vágást adunk hozzá mindegyik S_i $0-1$ split halmazból. Ezt kihasználva Bodur és társai az [5] cikkben egy erősebb operátort kaptak. Neveztesen, ha $\hat{M}(P)$-hez az összes $0-1$ split vágást hozzáadjuk, az

$$\tilde{N}(P) := \operatorname{proj}_x\Big(\mathcal{S}^{0,1}\big(\hat{M}(P)\big)\Big)$$

operátort kapjuk.

Az $N(P)$-hez hasonlóan szintén polinomiális időben lehet optimalizálni $\tilde{N}(P)$ felett. Az 5.1.2 lemmából adódik, hogy $\mathcal{S}^{0,1}\big(\hat{M}(P)\big) \subseteq M(P)$ és ezért $\tilde{N}(P) \subseteq N(P) \subseteq \mathcal{S}^{0,1}(P)$. A fő eredmény az [5] cikkben a következő: az $\tilde{N}(P)$ operátor erősítő lépésénél kapott kibővített formulát alkalmazni P-re erősebb, mint a Lovász–Schrijver operátort alkalmazni P $0-1$ split lezártjára.

5.2.1. Tétel. $\mathcal{S}^{0,1}\big(\hat{M}(P)\big) \subseteq M\big(\mathcal{S}^{0,1}(P)\big)$.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{S}^{0,1}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n : (c^k)^T x \leq d^k,\ k \in K\}$. A definíció szerint $\mathcal{S}^{0,1}(P) = \bigcap_{i \in I} \operatorname{conv}(P \setminus S_i)$, ezért az $\mathcal{S}^{0,1}(P)$ egyenlőtlenség rendszerrel való leírását megkaphatjuk a $\operatorname{conv}(P \setminus S_i)$ $(i \in I)$ halmazok leírásaiból úgy, hogy mindig csak nem redundáns egyenlőtlenséget veszünk hozzá. Tehát feltehető, hogy minden $k \in K$ indexhez létezik egy $t \in I$ index, hogy a $(c^k)^T x \leq d^k$ érvényes $\operatorname{conv}(P \setminus S_t)$-re. Az is feltehető még, hogy $0 \leq x_i \leq 1$ egyenlőtlenségek minden $i \in I$ index esetén szerepelnek a $(c^k)^T x \leq d^k$ $(k \in K)$ egyenlőtlenség rendszerben, ha ugyanis valmelyik redundáns is volna, ez nem változtatná meg $\mathcal{S}^{0,1}(P)$-t és $\hat{M}\big(\mathcal{S}^{0,1}(P)\big)$-t sem.

Az $\hat{M}\big(\mathcal{S}^{0,1}(P)\big)$-t a következő lineáris egyenlőtlenségekkel definiálhatjuk:

$$d^k x_i - \sum_{j \in J} c_j^k y_{ij} \geq 0 \quad i \in I,\ k \in K \tag{5.9}$$

$$d^k - \sum_{j \in J} c_j^k x_j - d^k x_i + \sum_{j \in I} c_j^k y_{ij} \geq 0 \quad i \in I,\ k \in K, \tag{5.10}$$

$$y_{ij} = y_{ji} \quad i, j \in I,\ i < j. \tag{5.11}$$

Megmutatjuk, hogy minden fenti egyenlőtlenség érvényes $\mathcal{S}^{0,1}\big(\hat{M}(P)\big)$-re is.

Legyen $k \in K$ és $t \in I$ olyan, hogy $(c^k)^T x \leq d^k$ érvényes a $\operatorname{conv}(P \setminus S_t)$-re. Ekkor $(c^k)^T x \leq d^k$ érvényes a $P \cap \{x : x_t = 0\}$ halmazra is, ezért van olyan $\lambda \in \mathbb{R}^L_+$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy

$$(c^k)^T x = \lambda^T A x + \alpha x_t, \quad d^k \geq \lambda^T b.$$

Ebből következik, hogy $-\alpha x_t + (c^k)^T x \leq d^k$ érvényes P-re. Hasonlóan igazolható az is, hogy $(c^k)^T x \leq d^k$ érvényes a $P \cap \{x : x_t = 1\}$ halmazra is, ezért létezik $\beta \in \mathbb{R}$, hogy $-\beta(1 - x_t) + (c^k)^T x \leq d^k$ érvényes P-re. Ha $i \in I$ indexre ezeket az egyenlőtlenségeket megszorozzuk az x_i illetve az $(1 - x_i)$ tagokkal, akkor a következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$d^k x_i - \sum_{j \in J} c^k_j y_{ij} + \alpha y_{it} \geq 0, \tag{5.12}$$

$$d^k x_i - \sum_{j \in J} c^k_j y_{ij} + \beta x_i - \beta y_{it} \geq 0, \tag{5.13}$$

$$d^k - \sum_{j \in J} c^k_j x_j - d^k x_i + \sum_{j \in J} c^k_j y_{ij} + \alpha(x_t - y_{it}) \geq 0, \tag{5.14}$$

$$d^k - \sum_{j \in J} c^k_j x_j - d^k x_i + \sum_{j \in J} c^k_j y_{ij} + \beta(1 - x_t - x_i + y_{it}) \geq 0, \tag{5.15}$$

A definíciója alapján ezek az egyenlőtlenségek érvényesek $\hat{M}(P)$-re is.

Legyen $(x, y) \in \hat{M}(P)$. Ha $x_t = 0$, akkor az 5.8 szerint $y_{it} = 0$ és az 5.12 egyenlőtlenségből következik az 5.9 érvényes az $\hat{M}(P) \cap \big\{(x, y) : x_t = 0\big\}$ halmazra.

Ha $x_t = 1$, akkor az 5.8 szerint $y_{it} = x_i$ és az 5.13 egyenlőtlenségből következik, hogy az 5.9 érvényes az $\hat{M}(P) \cap \big\{(x, y) : x_t = 0\big\}$ halmazra. Tehát az 5.9 érvényes az $\hat{M}(P) \setminus S_t$-re és így érvényes $\mathcal{S}^{0,1}\big(\hat{M}(P)\big)$-re.

Hasonlóan az 5.14 és az 5.15 egyenlőtlenségekből következik, hogy az 5.10 érvényes $\mathcal{S}^{0,1}\big(\hat{M}(P)\big)$-re. Végül az 5.11 érvényes $\hat{M}(P)$-re és így érvényes $\mathcal{S}^{0,1}\big(\hat{M}(P)\big)$-re.

Az eddigiek alapján az következik, hogy $\mathcal{S}^{0,1}\big(\hat{M}(P)\big) \subseteq \hat{M}\big(\mathcal{S}^{0,1}(P)\big)$. Az 5.1.2 lemma miatt tudjuk, hogy $\mathcal{S}^{0,1}\big(\hat{M}(P)\big) \subseteq \big\{(x, y) : y_{ii} = x_i, \forall\, i \in I\big\}$, ezért

$$\mathcal{S}^{0,1}\big(\hat{M}(P)\big) \subseteq \hat{M}\big(\mathcal{S}^{0,1}(P)\big) \cap \big\{(x, y) : y_{ii} = x_i, \forall\, i \in I\big\} = M\big(\mathcal{S}^{0,1}(P)\big).$$

□

Az $\mathcal{S}^{0,1}\big(\hat{M}(P)\big)$ és az $M\big(\mathcal{S}^{0,1}(P)\big)$ halmazok x terére történő vetítésével az 5.2.1 tétel szerint erősebb relaxáltat kapunk, ha az új operátor alkalmazzuk P-re, mint ha a Lovász–Schrijver operátort alkalmaznánk P $0-1$ split lezártjára.

5.2.2. Következmény. $\tilde{N}(P) \subseteq N\big(\mathcal{S}^{0,1}(P)\big)$.

Mivel $N\big(\mathcal{S}^{0,1}(P)\big) \subseteq \mathcal{S}^{0,1}\big(\mathcal{S}^{0,1}(P)\big)$, ezért az új operátor $\lceil n_1/2 \rceil$ lépésben megadja P^{IP} konvex burkát, ellentétben a Lovász–Schrijver operátorral, aminek n_1 lépés kell.

5.2.3. Következmény. $\tilde{N}^{\lceil n_1/2 \rceil}(P) = \operatorname{conv}(P^{IP})$.

6. fejezet

Implementálás és számítási tapasztalatok

A felemelés és vetítés módszerét a maximális súlyú stabil halmaz problémán vizsgáltam meg. A programokat C++ nyelven implementáltam, a gráfelméleti algoritmusokhoz a LEMON könyvtárat (ld. a [14]), míg az egészértékű feladatok megoldására a FICO XPRESS Optimization Suite 7.9 verzióját (ld. a [13]) használtam. Az egészértékű programozási feladatot a korlátozás és szétválasztás módszerével oldja meg a szoftver.

A korlátozás és szétválasztás módszerének a lényege, hogy az eredeti problémát szétválasztjuk részfeladatokra úgy, hogy az eredeti probléma megengedett megoldásainak a halmaza a részfeladatok megengedett megoldás-halmazainak diszjunkt uniója legyen. Így minimalizálási feladat esetén a részfeladatok optimumának minimuma megegyezik az optimum értékkel. Hasonló igaz maximalizási probléma esetén, a részfeladat optimumok maximuma egyenlő az eredeti probléma optimális megoldásának az értékével. Az egyes részfeladatokat további részfeladatokra lehet bontani, így a vizsgált feladatok egy fát alkotnak, ezt a továbbiakban *BB fának* nevezzük.

A BB fa gyökerében az eredeti feladat van, a többi csúcs a részfeladatokból áll. A részfeladatokhoz alsó és felső korlátot számolunk az optimum értékére. Maximalizálási feladatnál, ha egy részfeladatra vonatkozó felső korlát kisebb, mint egy már ismert alsó korlát, akkor a részproblémával már nem kell foglalkozni, törölhető a fából.

A részproblémák korlátait a részfeladat LP relaxáltjának a megoldásával kaphatjuk meg. A vizsgálataink célja, hogy megfigyeljük, hogyan befolyásolja a korltátozás és szétválasztás módszerét, ha az egyes részproblémáknál a kibővített felírásból adódó rácsmentes vágásokat adunk hozzá, és ezután az így kapott jobb lineáris rendszert használjuk a korlátok kiszámítására és az új részfeladatok definiálására.

6.1. A maximális súlyú stabil halmaz probléma

A maximális súly stabil halmaz probléma a következő: adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és egy $w : V \to \mathbb{Z}_+$ súlyfüggvény a csúcsokon. A feladat, hogy keressünk a w súlyozásra nézve maximális súlyú független halmazt. Ezt a következő egészértékű programként írhatjuk, fel

$$\begin{gathered} \max \textstyle\sum_{v \in V} w(v)x(v) \\ x(u) + x(v) \leq 1 \quad \forall\, (u, v) \in E \\ x \in \{0, 1\}^{|V|} \end{gathered}$$

A fenti egészértékű program megengedett megoldásai éppen a független halmazok karakterisztikus vektorai, ezek konvex burkát STAB(G)-vel jelöljük. Tehát a G gráf stabil halmaz politópja a

$$\mathrm{STAB}(G) = \{x \in \{0, 1\}^{|V|} : x(u) + x(v) \leq 1 \quad \forall\, (u, v) \in E\}.$$

A folytonos relaxáltja STAB(G)-nek a G gráf tört stabil halmaz politópja:

$$\mathrm{FSTAB}(G) = \{x \in [0, 1]^{|V|} : x(u) + x(v) \leq 1 \quad \forall\, (u, v) \in E\}.$$

Az egyszerűség kedvéért bevezethetjük a továbbiakban használt jelöléseket, legyen $P^{IP} = \mathrm{STAB}(G)$ és $P = \mathrm{FSTAB}(G)$. A tesztelés során az azonosan 1 súlyfüggvényt használtuk.

Lovász és Schrijver a [10] cikkben megmutatták, hogy $N(P) = \mathcal{S}^{0,1}(P)$ a tört stabil halmaz politóp esetén. Továbbá azt is belátták, hogy $N(P)$ megkapható az úgynevezett páratlan kör egyenlőtlenségek P-hez való felírásával. A páratlan kör egyenlőtlenség a következőt jelenti. Legyen adott egy C páratlan kör, és jelölje $|C|$ a pontszámát, ekkor egy független ponthalmaz C-ből csak $\lfloor \frac{|C|}{2} \rfloor = \frac{|C|-1}{2}$ pontot tartalmazhat. Ez a megfigyelés lehetőséget ad arra, hogy $N(P)$-t explicit leírjuk:

$$N(P) = \left\{ \begin{array}{c} x \in [0, 1]^{|V|} : x(u) + x(v) \leq 1 \quad \forall\, (u, v) \in E \text{ és} \\ \sum_{u \in C} x(u) \leq \frac{|C|-1}{2} \text{ minden páratlan } C \text{ körre} \end{array} \right\}$$

Az x aktuális megoldás mellett a páratlan kör egyenlőtlenségeket megsértő páratlan kört a következő algoritmussal találhatunk. Létrehozunk egy $G' = (V', V"; E')$ páros segédgráfot, amelynek a pontjai a G pontjainak megduplázásával kapott v' és v'' pontok. A segédgráf éleit úgy definiáljuk, hogy ha $(u, v) \in E$, akkor $u'v'' \in E'$ és $v'u'' \in E'$. Így az eredeti gráfban egy a v pontra illeszkedő páratlan kör megfeleltethető a segédgráfban egy v'-ből v''-be menő útnak, és viszont. Tekintsük a segédgráf élein a következő nemnegatív súlyozást: $c_x(u', v'') = 1 - x(u) - x(v)$.

Az aktuális x megoldásban egy v-re illeszkedő páratlan kör pontosan akkor sérti meg a páratlan kör egyenlőtlenséget, ha a körnek megfelelő $v'v''$ út c_x-hossza kisebb, mint 1. Tehát a páratlan kör egyenlőtlenségeket sértő páratlan köröket a segédgráfban egy Dijkstra–algoritmussal megtalálhatjuk.

6.2. Számítási tapasztalatok

A teszteléshez létrehoztam egy gráf generáló programot, aminek meg lehet adni a kívánt csúcs számot és az élsűrűséget. A program kimenete a LEMON könyvtárnak megfelelő gráf reprezentáció. A maximális súlyú stabil problémát azonosan 1 súlyfüggvénnyel vizsgáltam. A gráfokat 100 illetve 150 ponttal generáltam, az élsűrűség pedig $25\%, 50\%$, és 75% volt. Minden pontszám-élsűrűség párra 3 különböző gráfot generáltam.

A gráf beolvasása után létrehoztam, a már fent említett segédgráfot. Ha egy részfeladat aktuális megoldása nem egész, akkor vágásokat generáltam. A vágásgenerálás során a segédgráf éleit az aktuális x megoldás segítségével súlyoztam és az így kapott gráfban kerestem 1-nél kisebb súlyú utat. A FICO XPRESS megoldója ezeket a vágásokat eltárolta. Ha egy vágást megpróbálnánk másodszor is eltárolni, akkor csak abban az esetben lesz eltárolva, ha az eredetin javít. Egy részproblémánál maximum 50 vágást add hozzá a program a meglévő vágások közül. Az eltárolt vágásokat törölni is lehet, de a tapasztalataink azt mutatták, hogy ezek később újra generálódnak, ezzel lassítva a futási időt.

Egy feladatot négy különböző módon oldottunk meg, attól függően, hogy a vágásokat melyik részproblémáknál adjuk hozzá. Mindegyik esetben a FICO XPRESS megoldóján minden előfeldolgozást, és minden a megoldó általi vágásgenerálást kikapcsoltunk, hogy ténylegesen a felemelés és vetítés módszeréből adódó eredményeket kapjunk.

Az első esetben egyáltalán nem adtunk hozzá vágásokat, csak a FICO XPRESS megoldójának az LP alapú korlátozás és szétválasztásával történt a megoldás. A többi esetet ehhez tudtuk hasonlítani, hogy a páratlan kör egyenlőtlenséggel generált split vágások mennyit javítottak a korlátozás és szétválasztás algoritmusán.

Az eredményeket több szempontból is vizsgáltuk. Megnéztük, hogy a BB fa gyökerében milyen korlát adódik a vágások hozzáadása után. Vizsgáltuk, hogy a BB fa csúcsainak száma hogyan változik, illetve megfigyeltük a futás idő változásását, és az összes hozzáadott vágás számát.

A további megoldási módok a következők voltak. A második esetben csak a BB fa gyökerénél adtunk hozzá vágásokat. A harmadik esetben a BB fa gyökerénél és

minden olyan szinten lévő csúcshoz, aminek a szintje osztható 3-mal. A negyedik esetben minden csúcsnál megengedtünk vágások hozzáadását.

A futási eredmények a 6.1 - 6.6 táblázatokban láthatóak. A táblázatok oszlopai a következő sorrendben vannak: a gráf neve, a vágások generálásának a helye, a gráf csúcsainak a száma, a gráf éleinek a száma, a BB fa gyökerében a legjobb korlát, a végső legjobb korlát, az egészértékű optimum, a futási idő másodpercben, a BB fa csúcsainak a száma és a módszer által generált vágások száma.

Az összes feladatpéldányra igaz, hogy a gyökérben, azaz az eredeti problémához hozzáadott vágások jelentősen csökkentették az optimumra vonatkozó legjobb felső korlátot. A 100 pontú gráfoknál a következő megfigyeléseket tehetjük. A 75%-os élsűrűségnél ha növeltük a vágások számát, akkor minden esetben csökkent a BB fa csúcsainak a száma, de jelentősen megnőtt a futási idő is (ld. a 6.1 táblázat). Az 50%-os élsűrűségű gráfoknál a futás idő minden esetben jelentősen növekedett. Azonban a BB fa csúcsok száma nem minden esetben csökkent, sőt ha csak a gyökér csúcsban adtunk hozzá vágásokat a BB fa csúcsainak a száma is nőtt (ld. a 6.2 táblázat). A 25%-os élsűrűségű gráfoknál, ha csak a gyökérben adtunk hozzá vágásokat, akkor a futási idő nem növekedett jelentősen, sőt a $g_100_25_1$ esetben egyáltalán nem nőtt. A BB fa csúcsok száma álatlában csökkent a hozzáadott vágások számának növelésével. Ez alól kivétel a $g_100_25_3$ gráf, itt, ha csak a gyökérben adtunk hozzá vágásokat, a BB fa csúcsainak a száma megnövekedett (ld. a 6.3 táblázat).

A 150 pontú gráfokra is elvégeztük a kísérleteket, a következő eredménnyel. A 75%-os élsűrűségű gráfok esetén a vágások számának növelésével a futás idő jelentősen növekedett, a BB fa csúcsainak a száma azonban, ha csak a gyökér csúcsnál adtunk hozzá vágásokat nem mindig csökkent, sőt a $g_150_75_3$ gráfnál még nőtt is (ld. a 6.4 táblázat). Amikor az élsűrűség 50%-os volt, akkor hasonló eredményeket figyelhetünk meg, mint a 75%-os esetben. A futás idő itt is jelentősen növekszik a vágások számának növelésével, bár arányaiban nem olyan mértékben, mint a 75%-os esetnél. A BB fa csúcsainak a száma két esetben csökken a vágások számának növelésével, de a $g_150_50_2$ gráf példájánál a csúcsszám növekszik, ha csak a gyökérben adunk hozzá csúcsokat. Továbbá ha mindenhol hozzáadaunk vágásokat akkor is nő a csúcs szám ahhoz az esethez képest, amikor csak minden 3. szinten lévő csúcshoz adunk vágásokat (ld. a 6.5 táblázat). A 25%-os élsűrűségű gráfoknál a következőket figyelhetjük meg. A BB fa csúcsainak a száma csökken, a vágások számának növelésével. Sőt ahhoz az esethez képest, amikor nem adunk vágásokat a problémához, a csökkenés jelentős. Ha azt a két esetet hasonlítjuk össze, amikor mindenhol hozzáadunk vágásokat és amikor minden 3. szinten hozzáadunk vágásokat a BB fa csúcsainak a változása nem számott tevő, sőt a $g_150_25_1$ gráfnál még

növekszik is a vágások számának növelésével. A futási időnél a következő érdekes dolgot figyelhetjük meg. Ha csak a gyökér csúcsban adunk hozzá vágásokat, akkor a háromból két esetben is itt kapjuk a legjobb futás időt. Abban a két esetben ahol a gyökér csúcson kívül is hozzáadunk vágásokat a futás idő továbbra is növekszik (ld. a 6.6 táblázat).

Összeségében tehát a következőket mondhatjuk. A vágások hozzáadásával a gyökér csúcsban jelentősen javult a felső korlát. Minnél több vágást adtunk hozzá a problémához, a BB fa csúcsainak a száma annál jobban csökkent, ellenben a futási idő megnövekedett a vágások generálása miatt. Ha nem csak a gyökérben adunk hozzá vágásokat a problémákhoz, akkor nagyon sok vágás generálódik és ez nem teszi hatékonnyá a módszert a futás idő szempontjából. A gyökér csúcsban hozzáadott vágásoknál a könnyebb problémák esetén, ahol nagyobb volt az élsűrűség, nem mindig csökkent a BB csúcsok száma és a futásidő is jelentősen növekedett. Azonban nehezebb problémák esetén a gyökérben hozzáadott vágásokkal a BB fa csúcsainak a száma jelentősen csökkent, és a $g150_25_1$, illetve a $g150_25_3$ gráfoknál még a futás idő is javult.

Gráf	Vágások	Csúcsok	Élek	Gyökér korlát	Végső korlát	Végső IP	Futási idő	BB csúcsok	Saját vágások
g100_75_1	Nincs	100	3709	49.5	6	6	6	863	0
g100_75_1	Csak gyökér	100	3709	33	6	6	14	721	511
g100_75_1	Gyökér + 3.	100	3709	33	6	6	70	457	3417
g100_75_1	Mindenhol	100	3709	33	6	6	120	365	4443
g100_75_2	Nincs	100	3689	49.5	6	6	6	917	0
g100_75_2	Csak gyökér	100	3689	33	6	6	21	805	622
g100_75_2	Gyökér + 3.	100	3689	33	6	6	92	487	3654
g100_75_2	Mindenhol	100	3689	33	6	6	96	391	5093
g100_75_3	Nincs	100	3697	49.5	5	5	4	1049	0
g100_75_3	Csak gyökér	100	3697	33.0305	5	5	17	1021	820
g100_75_3	Gyökér + 3.	100	3697	33.0305	5	5	70	633	4471
g100_75_3	Mindenhol	100	3697	33.0305	5	5	118	535	5961

6.1. táblázat. Stabil halmaz probléma 100 pontú gráfokra 75%-os élsűrűséggel

Gráf	Vágások	Csúcsok	Élek	Gyökér korlát	Végső korlát	Végső IP	Futási idő	BB csúcsok	Saját vágások
g100_50_1	Nincs	100	2519	49.5	9	9	5	2251	0
g100_50_1	Csak gyökér	100	2519	33	9	9	18	2663	917
g100_50_1	Gyökér + 3.	100	2519	33	9	9	82	1327	11423
g100_50_1	Mindenhol	100	2519	33	9	9	149	1125	13789
g100_50_2	Nincs	100	2459	49.5	9	9	6	2457	0
g100_50_2	Csak gyökér	100	2459	33	9	9	24	3797	1017
g100_50_2	Gyökér + 3.	100	2459	33	9	9	98	1631	14458
g100_50_2	Mindenhol	100	2459	33	9	9	181	1439	18488
g100_50_3	Nincs	100	2437	49.5	9	9	7	2933	0
g100_50_3	Csak gyökér	100	2437	33.104	9	9	25	4037	1114
g100_50_3	Gyökér + 3.	100	2437	33.104	9	9	104	1745	15804
g100_50_3	Mindenhol	100	2437	33.104	9	9	19685	1403	18602

6.2. táblázat. Stabil halmaz probléma 100 pontú gráfokra 50%-os élsűrűséggel

Gráf	Vágások	Csúcsok	Élek	Gyökér korlát	Végső korlát	Végső IP	Futási idő	BB csúcsok	Saját vágások
g100_25_1	Nincs	100	1216	49.5	17	17	16	10553	0
g100_25_1	Csak gyökér	100	1216	33	17	17	16	5633	395
g100_25_1	Gyökér + 3.	100	1216	33	17	17	63	1203	17362
g100_25_1	Mindenhol	100	1216	33	17	17	85	797	16044
g100_25_2	Nincs	100	1217	49.5	16	16	26	12935	0
g100_25_2	Csak gyökér	100	1217	33.0019	16	16	47	9777	997
g100_25_2	Gyökér + 3.	100	1217	33.0019	16	16	115	2241	29995
g100_25_2	Mindenhol	100	1217	33.0019	16	16	200	1791	39604
g100_25_3	Nincs	100	1295	49.5	15	15	24	13317	0
g100_25_3	Csak gyökér	100	1295	33.0497	15	15	37	15275	413
g100_25_3	Gyökér + 3.	100	1295	33.0497	15	15	173	3721	48520
g100_25_3	Mindenhol	100	1295	33.0497	15	15	279	2817	53390

6.3. táblázat. Stabil halmaz probléma 100 pontú gráfokra 25%-os élsűrűséggel

Gráf	Vágások	Csúcsok	Élek	Gyökér korlát	Végső korlát	Végső IP	Futási idő	BB csúcsok	Saját vágások
g150_75_1	Nincs	150	8330	74.5	6	6	19	3157	0
g150_75_1	Csak gyökér	150	8330	49.7824	6	6	143	3051	2856
g150_75_1	Gyökér + 3.	150	8330	49.7824	6	6	619	2073	15618
g150_75_1	Mindenhol	150	8330	49.7824	6	6	1275	1931	20323
g150_75_2	Nincs	150	8372	74.5	6	6	18	3039	0
g150_75_2	Csak gyökér	150	8372	49.6667	6	6	46	2691	539
g150_75_2	Gyökér + 3.	150	8372	49.6667	6	6	474	1843	11965
g150_75_2	Mindenhol	150	8372	49.6667	6	6	867	1711	16337
g150_75_3	Nincs	150	8359	74.5	7	7	16	2673	0
g150_75_3	Csak gyökér	150	8359	49.672	7	7	79	2777	1484
g150_75_3	Gyökér + 3.	150	8359	49.672	7	7	462	1741	12682
g150_75_3	Mindenhol	150	8359	49.672	7	7	759	1357	15859

6.4. táblázat. Stabil halmaz probléma 150 pontú gráfokra 75%-os élsűrűséggel

Gráf	Vágások	Csúcsok	Élek	Gyökér korlát	Végső korlát	Végső IP	Futási idő	BB csúcsok	Saját vágások
g150_50_1	Nincs	150	5600	74.5	10	10	84	18265	0
g150_50_1	Csak gyökér	150	5600	49.6667	10	10	117	17935	561
g150_50_1	Gyökér + 3.	150	5600	49.6667	10	10	950	6579	61924
g150_50_1	Mindenhol	150	5600	49.6667	10	10	1777	5157	79129
g150_50_2	Nincs	150	5613	74.5	10	10	81	17353	0
g150_50_2	Csak gyökér	150	5613	49.8023	10	10	200	19237	2011
g150_50_2	Gyökér + 3.	150	5613	49.8023	10	10	1363	8441	80114
g150_50_2	Mindenhol	150	5613	49.8023	10	10	3232	9491	125989
g150_50_3	Nincs	150	5573	74.5	10	10	86	18051	0
g150_50_3	Csak gyökér	150	5573	49.6667	10	10	141	18609	950
g150_50_3	Gyökér + 3.	150	5573	49.6667	10	10	1153	7485	75014
g150_50_3	Mindenhol	150	5573	49.6667	10	10	2080	5895	91085

6.5. táblázat. Stabil halmaz probléma 150 pontú gráfokra 50%-os élsűrűséggel

Gráf	Vágások	Csúcsok	Élek	Gyökér korlát	Végső korlát	Végső IP	Futási idő	BB csúcsok	Saját vágások
g150_25_1	Nincs	150	2800	74.5	20	20	641	194369	0
g150_25_1	Csak gyökér	150	2800	49.6771	20	20	507	96831	1000
g150_25_1	Gyökér + 3.	150	2800	49.6771	20	20	2449	17049	213283
g150_25_1	Mindenhol	150	2800	49.6771	19	19	6176	19247	394576
g150_25_2	Nincs	150	2772	74.5	19	19	667	215115	0
g150_25_2	Csak gyökér	150	2772	49.715	19	19	1091	172573	1600
g150_25_2	Gyökér + 3.	150	2772	49.715	19	19	5362	29465	417737
g150_25_2	Mindenhol	150	2772	49.715	19	19	7865	26277	544057
g150_25_3	Nincs	150	2803	74.5	19	19	1465	613326	0
g150_25_3	Csak gyökér	150	2803	49.6667	19	19	744	179641	750
g150_25_3	Gyökér + 3.	150	2803	49.6667	19	19	6025	38309	533377
g150_25_3	Mindenhol	150	2803	49.6667	19	19	7458	25661	521088

6.6. táblázat. Stabil halmaz probléma 150 pontú gráfokra 25%-os élsűrűséggel

Összefoglalás

A szakdolgozatomban ismertettem, hogy hogyan lehet megkonstruálni egy adott vegyes egészértékű halmazhoz a rácsmentes vágásokra való tekintettel legerősebb kibővített LP felírást. Bináris változók esetén midig lehet olyan kibővített felírást találni, aminek a split lezártja egész. Általános esetben azonban ez nem igaz, sőt ha az eredeti poliéder dimenziója elég nagy (az extrém csúcsainak és az extrém irányainak számának összege - 1), akkor nem létezik olyan kibővített felírás, ami erősebb korlátot adna rácsmentes vágásokra.

Ezekhez a legerősebb kibővített felírásokhoz szükség van a poliéder extrém csúcsainak és extrém irányainak explicit ismeretére. Ezek kiszámítása a gyakorlatban, néhány speciális esetet leszámítva, nagyon sok időt igényel, így nem lehet őket jól alkalmazni. Azonban az alkalmazások során nem szükséges a legerősebb kibővített felírás megkonstruálása. Elég ha egy könnyen adódó kibővített felírást használunk, ami jobb korlátot ad rácsmentes vágások használatánál.

Ilyen könnyen konstruálható vágásokat adnak a páratlan kör egyenlőtlenségek a maximális méretű stabil halmaz problémánál. Ennél a feladatnál implementáltam is a módszert, és a következő számítási tapasztalatokat figyeltem meg. Általában a vágások generálásával a BB fa csúcsainak a száma csökken, azonban a vágás generálás még így is elég lassú, így a futás idő növekszik. Azonban bonyolultabb feladatoknál, mint például a 150 pontú 25%-os élsűrűségű gráfoknál, ha a vágásokat csak a BB fa gyökerében adjuk hozzá, akkor a futás idő is csökkenhet.

Irodalomjegyzék

[1] E. Balas. *Projection, lifting and extended formulation in integer and combinatorial optimization.* Annals of Operations Research, 140:125-161, 2005.

[2] E. Balas. *Disjunctive programming and a hierarchy of relaxations for discrete optimization problems.* SIAM J. Algebr. Discrete Methods, 6(3):466-486, 1985.

[3] E. Balas, S. Ceria, and G. Cornuéjols. *A lift-and-project cutting plane algorithm for mixed 0-1 programs.* Mathematical Programming, 58(1-3):295-324, 1993.

[4] E. Balas, W.R.Pulleyblank. *The perfectly matchable subgraph polytope of a bipartite graph.* Networks, 13:495-518, 1983.

[5] M. Bodur, S. Dash, O. Günlük.*A new lift-and-project operator* European Journal of Operation Research, 257:420-428, 2017.

[6] M. Bodur, S. Dash, O. Günlük.*Cutting planes from Extended LP Formulation.* Mathematical Programming, 161:159-192, 2017.

[7] M. Bodur, S. Dash, O. Günlük, J. Luedtke. *Strengthened benders cuts for stochastic integer programs with continuous recourse.* INFORMS Journal on Computing, 29:77-91, 2016.

[8] M. Conforti, G. Cornuéjols, G. Zambelli.*Integer programming* Springer, 2014.

[9] W. Cook, R. Kannan, A. Schrijver.*Chvátal closures for mixed integer programming problems.* Mathematical Programming, 47:155-174, 1990.

[10] L. Lovász and A. Schrijver. *Cones of matrices and set-functions and 0-1 optimization.* SIAM J. Optim., 1(2):166-190, 1991.

[11] G.P. McCormick.*Computability of global solutions to factorable nonconvex programs: Part I-Convex underestimating problems* Mathematical Programming 10(1):147-175, 1976.

[12] H.D. Sherali, W.P. Adams.*A hierarchy of relaxations between the continuous and convex hull representations for zeroone programming problems.* SIAM J. Discrete Math. 3:411-430, 1990.

[13] FICO XPRESS. *http://www.fico.com/en/products/fico-xpress-optimization*

[14] LEMON. *https://lemon.cs.elte.hu/trac/lemon*