Elágazó folyamatok változó környezetben

Diplomamunka

Írta: Smid Roland

Alkalmazott Matematikus szak

Témavezető:

Dr. Michaletzky György, egyetemi tanár

Valószínűségelméleti és Statisztika tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2018

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek a dolgozat elkészítése során és az azt megelőzően tett erőfeszítéseiért, hogy a szükséges elméletet könnyen megérthessem és el tudjam sajátítani. Továbbá köszönet illeti azon tanárokat is, akik a szükséges alapismereteket, eszközöket nyújtották, ami által a témámat könnyebben fel tudtam dolgozni. Illetve nem utolsó sorban köszönettel tartozom családomnak, a dolgozat készülése közben és az egyetemi évek alatt nyújtott támogatásáért.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **1**

2. Galton-Watson folyamat **2**

2.1. Alapfogalmak 2

2.1.1. Generátor függvény 3

2.1.2. Kihalás valószínűsége 4

2.2. Határeloszlások 6

3. Elágazó folyamatok változó környezetben **13**

3.3. Korai eredmények 14

3.4. A normalizált folyamat konvergenciája 16

3.4.1. Eszközök 18

3.4.2. Eredmény 24

4. Általános eredmények változó környezetben **28**

4.5. Tételek 29

4.6. Eszközök 34

4.7. Eredmények 44

4.8. Sejtek rezisztenciájának modellezése 51

4.8.1. A modell 52

5. Összefoglaló **55**

Irodalomjegyzék **56**

1. Bevezetés

Dolgozatom fő motivációja a Matematika egy olyan területének vizsgálata, amelyik az orvostudományban is nagy jelentőséggel bír. Ebből adódóan az elágazó folyamatok [6]-ban megjelenő általános eredmények felvezetésére, illetve bemutatására építem a szakdolgozatomat. Az elágazó folyamatok eredményeit számtalan más tudományterületen is alkalmazzák a matematikán kívül. Ilyen a genetika, ahol az Y kromoszóma kihalásának vizsgálata megfeleltethető a családnevek kihalásának vizsgálatával; a járványtan, ahol a különböző betegségek, járványok terjedésének vizsgálatára használható; a fizika, ahol a nukleáris láncreakciók elemzésében játszik fontos szerepet, csak hogy párat megemlítsünk.

Az első szakaszban bemutatom az elmélet eredetét, illetve az elsőként vizsgált elágazó folyamatot, a Galton-Watson folyamatot. Ebben a részben a [2]-ből építkezünk, hogy a Galton-Watson folyamat tulajdonságait és a hozzá kapcsolódó fontosabb állításokat, tételeket megfogalmazzuk. A következő szakaszban már az elágazó folyamatok általánosabb eredményeit tárgyaljuk a változó környezet bevezetésével többek között a [4]-ben és a [3]-ban megjelenő eredmények segítségével. Itt is bemutatjuk az elmélet felvezetéseként szolgáló eszközöket, illetve megvizsgáljuk, hogy az alap esetben érvényes hangsúlyosabb tételek milyen módosításokkal maradnak érvényben a változó környezet bevezetésével. A dolgozat hátralevő részében pedig azt az általános elméletet fogjuk bemutatni, aminek segítségével a változó környezetben tekintett elágazó folyamatok vizsgálata lényegesen egyszerűbbé válik. Itt röviden arról lesz szó, hogyha a változó környezetet definiáló valószínűségi változók teljesítenek egy feltétel, akkor abból a korábbiakban tárgyalt több eredmény ekvivalenciája is következik.

2. Galton-Watson folyamat

Az elágazó folyamat matematikai eszközökkel való megfogalmazása Francis Galton és H. W. Watsontól nevéhez köthető. Ők arra a kérdésre keresték a választ, hogy a brit családnevek milyen valószínűséggel halnak ki. Azt a hipotézist kívánták megcáfolni, miszerint a kiváltságos családok által képviselt családnevek nagyobb valószínűséggel halnak ki, mint az e tekintetben átlagosnak mondható családé. Ebből az okfejtésből eredő kezdeti eredményeket a [2] segítségével kívánjuk bemutatni. Tekintsük ehhez a következőket. Jelölje X_n a n. generáció lélekszámát. Jelölje továbbá $Z_{n,j}$ az n. generáció j. egyedét, ahol $Z_{n,j}$-ről feltesszük, $j \geq 1$ és $n \geq 1$-re független azonos eloszlású valószínűségű változók. Az n. generáció számosságát a következőképpen kaphatjuk meg:

$$X_n = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} Z_{n,j} \tag{2.1}$$

és ezt az $(X_n)_{n \in N}$ folyamatot elágazó, valamit Galton-Watson folyamatnak nevezzük. Jegyezzük meg a későbbi eredményekre való tekintettel, hogy diszkrét eloszlású valószínűségi változókról beszélünk.

2.1. Alapfogalmak

Jelölje $\{p_k = P(Z_{n,j} = k), k = 1, 2, \dots\}$ azon valószínűségek halmazát, miszerint n. időpontban a j. egyed k darab utódot hoz létre. π_n pedig a kihalás valószínűségét minden n-re, vagyis $P(X_n = 0) = \pi_n$. A folyamat kihalása azt jelenti, hogy létezik olyan n, amelyre $P(X_n = 0) = 1$. Tehát $\pi = P(\cup_{n \geq 1}\{X_n = 0\})$, illetve azt is tudjuk, hogy a kihalás valószínűsége monoton növő az idő függvényében, így $\pi = \lim_{n \to \infty} P(X_n = 0)$. A továbbiakban, hogy eltekintsünk bizonyos speciális esetektől, ezért előre tegyük fel, hogy

$0 < p_0 < 1$. Hiszen ha $P(X_1 = 0) = 1$ lenne, akkor $\pi_1 = 1$, amiből pedig következne, hogy $\pi = 1$. Másik esetben, ha $P(X_1 \geq 1) = 1$, akkor viszont $\pi_1 = 0$, tehát $\pi = 0$. Illetve $p_0 + p_1 < 1$ feltételre szintén azért van szükségünk, mivel $\pi_n = P(X_n = 0)$, amiből $1 - \pi_n = P(X_n = 1) = p_1^n$. Ebből látszik már, hogy $\pi_n = 1$ ebben az esetben is.

2.1.1. Generátor függvény

Mivel az $(X_n)_{n \in N}$ folyamat valószínűségi változók sorozata, ezért minden n. időpontban meghatározható X_n eloszlása, mégpedig az adott időpontban tekintett utódeloszlások konvolválásával. Mivel egy valószínűségi változó eloszlása és generátorfüggvénye kölcsönösen meghatározza egymást és feltettük, hogy az utódeloszlások független azonos eloszlásúak, ezért számításbeli könnyedség miatt a generátorfüggvényt használjuk.

Jelölje $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ a p_k valószínűségek által definiált eloszlású valószínűségi változó generátor függvényét. Ekkor

$$g_n(z) = E(z^{X_n}) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X_n = k)$$

jelöli az X_n generátor függvényét. Vizsgáljuk meg, hogy van-e összefüggés különböző időpontok generátor függvényei között.

2.1. Állítás. $g_{n+1}(z) = g_n(g(z))$

Bizonyítás. Először alkalmazzuk a definíciót, utána pedig a teljes várható érték tételét:

$$g_{n+1}(z) = E(z^{X_{n+1}}) = \sum_{k=0}^{\infty} E(z^{X_{n+1}} | X_n = k) P(X_n = k) = *$$

Továbbá kihasználva a függetlenséget és a generátor függvény definícióját kapjuk az állítást:

$$* = \sum_{k=0}^{\infty} E(z^{\sum_{j=1}^{X_n} Z_{n,j}} | X_n = k) P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{\infty} E(z^{\sum_{j=1}^{X_n} Z_{n,j}}) P(X_n = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{X_n} E(z^{Z_{n,j}}) P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{\infty} g(z)^k P(X_n = k) = g_n(g(z))$$

■

A kapott eredményt tovább iterálva a következőhöz jutunk: $g_{n+1}(z) = g(\dots(g(z)))$. Ebből speciálisan kijön az is, hogy: $g_{n+1}(z) = g_{n+1-k}(g_k(z))$ is valamilyen $k \in [1, n]$-re. A továbbiakban feltesszük, hogy $X_0 = 1$ vagyis, hogy a populáció egy egyedből indul. Ekkor ismerjük a következőt:

$$E(X_1) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = g^{'}(1)$$

Ezt a mennyiséget jelöljük m-mel, ahol $0 \leq m < \infty$. Mivel tudjuk továbbá a következőket is: $E(X_n) = g_n^{'}(1) = \frac{d}{dz} g(g_{n-1}(z)))|_{z=1}$, ezért ezt tovább alakítva kapjuk, hogy:

$$\frac{d}{dz} g(g_{n-1}(z)))|_{z=1} = g^{'}(1) g_{n-1}^{'}(1) = m g_{n-1}^{'}(1) = \dots = m^n$$

Ekkor ha $n \to \infty$, akkor

(i) $E(X_n) \to 0$, ha $m < 1$,

(ii) $E(X_n) \to 1$, ha $m = 1$,

(iii) $E(X_n) \to \infty$, ha $m > 1$.

Ezeket az eseteket a megfelelő sorrendben *szubkritikus*-, *kritikus*-, illetve *szuperkritikus*-nak nevezzük. A folyamat várható értékének ismeretében, rövid számolással a szórásnégyzetre is kapunk explicit eredményt , ami a következő:

$$D^2(X_n) = \begin{cases} n\sigma^2, & \text{ha } m = 1 \\ \sigma^2 m^{n-1} \frac{m^n - 1}{m-1}, & \text{ha } m \neq 1 \end{cases}$$

2.1.2. Kihalás valószínűsége

A következő részben a kihalási valószínűség fogalmának részletezésével foglalkozunk. Legyen $\pi_n = P(X_n = 0) = g_n(0)$. Vagyis ha létezik n, hogy $P(X_n = 0) > 0$, akkor $P(\cup_{n \geq 1}\{X_n = 0\}) = \pi_n$. Tudjuk tehát, hogy $g_{n+1}(0) = \pi_{n+1} = g(g_n(0)) = g(\pi_n)$. Kihasználva, hogy g folytonos függvény, és $\lim_{n\to\infty} \pi_n = \pi$ kapjuk a következő fontos összefüggést:

$$\pi = g(\pi)$$

2.2. Állítás. *Ezt a π-t explicit a $z = g(z)$ egyenlet legkisebb gyökeként kaphatjuk meg.*

Bizonyítás. Legyen r ez a legkisebb gyök, amire teljesül, hogy $r > 0$ és $r \geq \pi_0$. Alkalmazzuk a g függvényt a legutolsó egyenlőtlenségre. Így $g(r) \geq g(\pi_0)$, amiből következik, hogy $r \geq \pi_1$. Ezt iterálva kapjuk, hogy $r \geq \pi_n$, és ha $n \to \infty$, akkor megkapjuk, hogy $r = \pi$. ■

Az eddigiekből látszik, hogy ha $m < 1$, akkor $\pi = 1$ és ha, $m > 1$, akkor $\pi < 1$, de egy rövid számolással az is megállapítható, hogy $m = 1$ esetben is teljesül, hogy $\pi = 1$. Mivel tudjuk, hogy a kihalás valószínűsége milyen kapcsolatban van a várható értékkel, ezért érdemes a konvergencia sebességről is szót ejteni:

2.3. tétel. *Legyen $m = 1$ és $\sigma < \infty$, ekkor*

$$P(X_n > 0) \sim \frac{2}{n\sigma^2}.$$

Mivel a tétel bizonyítása hosszú és további előkészületeket igényel, ezért ezt nem kívánjuk bemutatni. Helyette gondoljuk meg a következőt. $m = 1$ esetben tudjuk, hogy $1 = E(X_n) = E(X_n|X_n > 0)P(X_n > 0) + 0 \times P(X_n = 0)$. Az eddigiekből pedig következik, hogy $E(X_n|X_n > 0) \to \infty$, ahogy $n \to \infty$, tehát ha a folyamatot amellett a feltétel mellett vizsgáljuk, hogy nem hal ki és az utódeloszlások várható értéke 1, akkor a folyamat a végtelenbe divergál. Mint látható az $m = 1$ eset rendelkezik érdekesebb, kevésbé triviális tulajdonságokkal, ezért ennek az esetnek további tulajdonságait is fogjuk vizsgálni:

2.4. tétel. *Legyen $m = 1$ és $\sigma < \infty$, ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n}{n} > x | X_n > 0\right) = exp\left(-\frac{2x}{\sigma^2}\right), \textit{ahol } x \geq 0.$$

Mivel a folyamat feltételes várható értékéről láttuk, hogy n-el arányosan növekszik, ezért valóban egy értelmes ötletnek tűnik, az n-el való normalizáltjának vizsgálata.

Bizonyítás. Azt szeretnénk itt belátni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} E[e^{-\alpha(\frac{X_n}{n})}|X_n > 0] = \frac{1}{1+\frac{\alpha\sigma^2}{2}}.$$

Vegyük észre, hogy ennek az egyenletnek a jobb oldala, a tételbeli egyenlet jobb oldalának Laplace transzformáltjának felel meg. Az egyenlet baloldala pedig a következővel egyezik meg:

$$\frac{g_n(e^{-\frac{\alpha}{n}}) - g_n(0)}{1-g_n(0)} = 1 - \frac{[n(1-g_n(0))]^{-1}}{[n(1-g_n(e^{-\frac{\alpha}{n}}))]^{-1}}.$$

Ahhoz, hogy a bizonyítást befejezhessük, a következő lemmát szeretnénk alkalmazni.

2.5. Lemma. *Legyen $m = 1$ és $\sigma < \infty$, ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1-g_n(t)} - \frac{1}{1-t}\right] = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Ebből következően, $n \to \infty$ határátmenettel, az 2.1.2 egyenlet jobb oldalának számlálója tart $\frac{\sigma^2}{2}$-hez. A nevezőre pedig teljesül a következő,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n[1-g_n(e^{-\frac{\alpha}{n}})]} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{n(1-e^{-\frac{\alpha}{n}})}\right) = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{\alpha}$$

A kapott eredményeket visszahelyettesítve, beigazolódik az állításunk.

■

Megkaptuk, hogy az X_n normalizáltjának eloszlása, adott feltételek mellett tart az exponenciális eloszláshoz.

2.2. Határeloszlások

A továbbiakban vizsgáljuk a következő hányadost: $W_n = \frac{X_n}{m^n}$.

2.6. Állítás. *W_n martingál minden $n \geq 0$ esetén.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. Ekkor

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}|X_n = k_n, X_{n-1} = k_{n-1}, \ldots, X_n = k_0) = E(X_{n+1}|X_n = k_n) =$$

$$E\left(\sum_{j=1}^{X_n} Z_{n,j}|X_n = k_n\right) = E\left(\sum_{j=1}^{X_n} Z_{n,j}\right) = X_n m.$$

Ahol a második egyenlőség jelnél a folyamat Markov tulajdonságát használtuk ki, a harmadiknál a feltételtől való függetlenséget. Ekkor,

$$E(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \frac{X_n m}{m^{n+1}} = \frac{X_n}{m^n} = W_n$$

■

Mivel definíciónk szerint $\frac{X_n}{n} \geq 0$, ezért W_n egy nem negatív martingál, amiről tudjuk, hogy konvergens. Tehát $\exists W$ valószínűségi változó, amire teljesül, hogy $W = \lim_{n\to\infty} W_n$.

Vizsgáljuk most a $\{W = 0\}$ halmazt. Az eddigiekből már világos az a tartalmazás, miszerint $\{X_n = 0\} \subseteq \{X_{n+1} = 0\}$, amiből következik, hogy $\{W_n = 0\} \subseteq \{W_{n+1} = 0\}$. Most vizsgáljuk azt az esetet, amikor $m \leq 1$, vagyis a folyamat szubkritikus. Ez azt jelenti, hogy $P(X_n = 1) \leq 1$, amiből következik, hogy $\pi = 1$, tehát $P(W = 0) = 1$. A másik eset érdekesebb eredményt ad, ezért ezt bővebben taglaljuk:

2.7. Állítás. *Legyen $m > 1, \sigma^2 < \infty$, ekkor $P(W = 0) = \pi$.*

Bizonyítás. Először lássuk be a következőt: $\{W_n, n \geq 1\}$ korlátos L_2-ben. Először W_n definícióját használjuk, utána a második momentumot átírjuk az általunk kívánt alakra és a korábbi szórással kapcsolatos 2.1.1 eredményt behelyettesítjük:

$$E(W_n^2) = E\left(\left(\frac{X_n}{m^n}\right)^2\right) = \frac{1}{m^{2n}}E(X_n^2) = \frac{1}{m^{2n}}(D^2(X_n) + E(X_n)^2) =$$

$$\frac{\sigma^2 m^{n-1}\frac{m^n-1}{m-1}}{m^{2n}} + 1 = \sigma^2\frac{1-\frac{1}{m^n}}{m(m-1)} + 1 \leq \frac{\sigma^2}{m(m-1)} + 1$$

Mivel minden n-re felülről becsültünk, ezért $sup_n E(W_n)^2 < \infty$, amiből már következik, hogy egy L_2-ben konvergens martingált kapunk: $W_n \to W$ L_2-ben. Az L_2-beli konvergenciából következik az is, hogy $E(W) = \lim_{n\to\infty} E(W_n) = 1$, amiből pedig következik, hogy $P(W = 0) < 1$. Legyen most $P(W = 0) = q$. Ekkor pedig szintén a korábbiakból adódik, hogy

$$q = P(W = 0) = \sum_{k\geq 0} P(W = 0|X_1 = k)P(X_1 = k) = \sum_{k\geq 0} q^k P(X_1 = k) = g(q)$$

2.2 állítás felhasználásával az eddigiekből világos, hogy $P(W = 0) = \pi$.

■

Azonban szeretnénk az L_2-nél erősebb konvergenciát is belátni. Erre tekintsünk két tételt, amelyek közül az előbbi bizonyítás nélkül kerül közlésre.

2.8. tétel. *Tegyük fel, hogy $m > 1$ és ξ valószínűségi változóra teljesüljön a következő: $E(\xi log^+\xi) = \infty$. Ekkor $P(W = 0) = 1$ teljesül.*

2.9. tétel. *Tegyük fel, hogy $m > 1$ és $E(\xi log^+\xi) < \infty$, ekkor E(W)=1 teljesül, amiből pedig az is következik, hogy $P(W = 0) = \pi$.*

Bizonyítás. Vizsgálataink középpontjában, a következő Laplace-transzfomált fog állni:

$$\phi_n(u) = E(e^{-uW_n}).$$

$u \geq 0$-ra ϕ_n véges. Az e^{-uW_n} konvex függvény $n \geq 1$ mellett szubmartingál, hiszen tudjuk W_n-ről, hogy martingál. Ebből pedig már következik, hogy $\phi_n(u) \leq \phi_{n+1}(u)$. Tudjuk, hogy $\phi_n(u) = \int_0^\infty e^{-ux} dQ_{W_n}(x)$, illetve analóg módon $\phi(u) = \int_0^\infty e^{-ux} dQ_W(x)$. Mivel már beláttuk hogy $\lim_{n\to\infty} W_n = W$ L^2-beli konvergencia teljesül, amiből következik, hogy $Q_{W_n}(x) \to Q_W(x)$ gyengén, amint $n \to \infty$. Az eddigiek a következőt eredményezik $\lim_{n\to\infty} \phi_{n+1}(u) = \phi(u)$. Vizsgáljuk a Laplace transzformált deriváltját a nulla pontban,

$$\phi^{'}(u) = E(-We^{-uW}) \text{ ,amiből } \phi^{'}(0) = -E(W)$$

Ennek ismeretében azt kívánjuk belátni, hogy

$$\lim_{u\to 0} \frac{\phi(u) - 1}{u} = -1$$

Ennél egy jobb megközelítés a következő vizsgálata: $\lim_{u\to 0} \frac{\phi(u)-e^{-u}+e^{-u}-1}{u}$. Felhasználjuk azt az eredményt, miszerint $\lim_{u\to 0} \frac{e^{-u}-1}{u} = (e^{-u})^{'}|_{u=0} = -1$. Ekkor a feladatunk a következő bizonyítására egyszerűsödik:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\phi(u) - e^{-u}}{u} = 0$$

Észrevehetjük azt is, hogy $\phi_0(u) = E(e^{-uW_0}) = e^{-u}$, hiszen $W_0 = \frac{X_0}{m^0}$ és kikötöttük, hogy a populáció 1 egyedből induljon. Megmutattuk eddig, hogy ϕ_n monoton növekedő és határértéke a ϕ-hez tart. Most ϕ_0-t visszahelyettesítve a korábbi hányadosba, írjuk azt át összeg alakba. Vizsgáljuk tehát a határérték mögötti részt.

$$\frac{\phi(u) - \phi_0(u)}{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_{n+1}(u) - \phi_n(u)}{u}$$

A következő ötlet az, hogy keressünk összefüggést ϕ_n és ϕ_{n-1} között. Ehhez használjuk $\phi_n(u)$ definícióját.

$$\phi_n(u) = E(e^{-uW_n}) = E(e^{-u\frac{X_n}{m^n}}) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X_n = j)(e^{-\frac{u}{m^n}})^j =$$

$$g_n\big(e^{-\frac{u}{m^n}}\big) = g\big(g_{n-1}\big(e^{-\frac{u/m}{m^{n-1}}}\big)\big) = g(\phi_{n-1}(u/m))$$

Kihasználtuk továbbá a W_n definícióját és a generátor függvényre korábban kapott 2.1-es összefüggést is. A továbbiakban legyen, $\frac{\phi_{n+1}(u)-\phi_n(u)}{u} = \psi_{n+1}(u)$. Alkalmazzuk az előbbi ötletet az új változóra.

$$\psi_{n+1}(u) = \frac{\phi_{n+1}(u) - \phi_n(u)}{u} = \frac{g(\phi_n(\frac{u}{m})) - g(\phi_{n-1}(\frac{u}{m}))}{u} =$$

$$\frac{g(\phi_n(\frac{u}{m})) - g(\phi_{n-1}(\frac{u}{m}))}{\phi_n(\frac{u}{m}) - \phi_{n-1}(\frac{u}{m})} \frac{\phi_n(\frac{u}{m}) - \phi_{n-1}(\frac{u}{m})}{u} \leq \frac{\phi_n(\frac{u}{m}) - \phi_{n-1}(\frac{u}{m})}{\frac{u}{m}} = \psi_n\left(\frac{u}{m}\right)$$

Azért volt szükség a $(\phi_n(\frac{u}{m}) - \phi_{n-1}(\frac{u}{m}))/(\phi_n(\frac{u}{m}) - \phi_{n-1}(\frac{u}{m}))$ hányadossal való bővítésre, hogy az egyenlőtlenség bal oldalának első tagját fölülről tudjuk becsülni m-el, a *Lagrange* középérték tétel alapján. A kapott összefüggést iterálva arra a becslésre jutunk, hogy $\psi_{n+1}(u) \leq \psi_n(\frac{u}{m}) \leq \psi_{n-1}(\frac{u}{m^2}) \leq \cdots \leq \psi_1(\frac{u}{m^n})$. Ezeket felhasználva kapjuk a következő eredményt.

$$\frac{\phi(u) - \phi_0(u)}{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_{n+1}(u) - \phi_n(u)}{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{n+1}(u) \leq \psi_1(u) + \psi_1(u/m) + \psi_1(u/m^2) \ldots$$

Mivel az egyenlőtlenség bal oldaláról tudjuk, hogy nem negatív, ezért ha a jobb oldalról belátnánk, hogy $u \to 0$ mellett 0-hoz tart, akkor készen lennénk. Ezért vizsgáljuk a jobboldalt:

$$\lim_{u\to 0}\psi_1(u)=\lim_{u\to 0}\frac{\phi_1(u)-\phi_0(u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{E(e^{-uW_1})-e^{-u}}{u}=$$

$$\lim_{u\to 0}\left[\frac{E(e^{-uW_1})-1}{u}+\frac{1-e^{-u}}{u}\right]=-1+1=0$$

Itt kihasználtuk $E(W_1)=1$. Vizsgáljuk meg a deriváltat is:

$$\lim_{u\to 0}\psi_1^{'}(u)=\lim_{u\to 0}\left[\frac{\phi_1^{'}(u)+e^{-u}}{u}-\frac{\phi_1(u)-e^{-u}}{u^2}\right]=\lim_{u\to 0}\left[\frac{\phi_1^{'}(u)+e^{-u}}{u}-\frac{\phi_1^{'}(u)+e^{-u}}{2u}\right]=$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{\phi_1^{'}(u)+e^{-u}}{2u}=\lim_{u\to 0}\left[\frac{e^{-u}-1}{2u}+\frac{E(-W_1e^{-uW_1})+E(W_1)}{2u}\right]=$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-u}-1}{u}+E\big(W_1\big(\big(1-e^{-uW_1}\big)/u\big)\big)\right]=\frac{1}{2}\big[-1+\lim_{u\to 0}E\big(W_1\big(\big(1-e^{-uW_1}\big)/u\big)\big)\big]=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}[-E^2(W_1)+E(W_1^2)] & ,\text{ha } E(W_1^2)<\infty\\ \infty & ,\text{ha } E(W_1^2)=\infty\end{cases}$$

Ahol második egyenlőségnél a L'Hospital-szabályt alkalmaztuk. A kapott kifejezés utolsó egyenlőségénél ha $E(W_1^2)<\infty$, akkor az egész kifejezés tart $\frac{1}{2}D^2(W_1^2)$-hez, ahol a dominált konvergencia tételt használtuk. Ha viszont $E(W_1^2)=\infty$, akkor alkalmazva a Fatou lemmát, az egész kifejezésre azt kapjuk, hogy a végtelenhez tart. Tehát ha u kicsi, akkor $\psi_1^{'}(u)>0$. Ezeket felhasználva, tekintsünk a $\sum_{n=1}^{\infty}\psi_1(u/m^n)$ összegre, mint egy integrál közelítő összegre. Használjuk a $t\to\psi_1(u/m^t)$ folytonos leképezést, arra hogy ez előbbi összegre az integrál alsó közelítő összegeként tekintsünk:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi_1\left(\frac{u}{m^n}\right)\leq\int_0^{\infty}\psi_1\left(\frac{u}{m^t}\right)dt$$

A jobboldalról be szeretnénk látni, hogy nulla amint $u\to 0$. Ehhez alkalmazzunk változó cserét, mégpedig úgy, hogy $v=u/m^t$. Ebből következően $t=\frac{1}{log(m)}(log(u)-log(v))$. Visszahelyettesítve a jobboldalba, és a megfelelő átalakításokat elvégezve kapjuk, hogy:

$$\int_0^{\infty}\psi_1(u/m^t)dt=-\frac{1}{log(m)}\int_u^0\psi_1(v)\frac{1}{v}dv=\frac{1}{log(m)}\int_0^u\frac{\phi_1(v)-e^{-v}}{v^2}dv=$$

$$\frac{1}{log(m)}\int_0^u \frac{\phi_1(v)-1+v}{v^2}+\frac{e^{-v}-1+v}{v^2}dv$$

A második egyenlőségnél $\psi_1(u)$ definícióját alkalmaztuk. A kapott összeg második tagjára tudjuk alkalmazni a következő becslést:

$$\lim_{u\to 0}\int_0^u \frac{e^{-v}-1+v}{v^2}dv \leq \lim_{u\to 0}\int_0^u \frac{1}{2} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{2} \to 0.$$

Hiszen a számláló felülről becsülhető $v^2/2$-vel. Tehát elég az első tagot tovább elemezni.

$$\int_0^u \frac{\phi_1(v)-1+v}{v^2}dv = \int_0^u \frac{E(e^{-vW_1})-1+v}{v^2}dv = \int_0^u E\left(\frac{e^{-vW_1}-1+vW_1}{v^2}\right)dv =$$

$$\int_0^\infty\int_0^u \frac{e^{-vx}-1+vx}{v^2}dvdF_{W_1}(x) = \int_0^\infty\int_0^{ux} \frac{e^{-s}-1+s}{(\frac{s}{x})^2}\frac{1}{x}dsdF_{W_1}(x) = *$$

Itt kihasználtuk, hogy $E(W_1)=1$, a várható értéket integrál alakba írtuk, illetve elvégeztük a $vx=s$ változó cserét. Tovább egyszerűsítve a következőt kapjuk.

$$* = \int_0^\infty\int_0^{ux} \frac{e^{-s}-1+s}{s^2}xdsdF_{W_1}(x)$$

Most a belső integrált szeretnénk vizsgálni rögzített x mellett, és keresünk egy integrálható majoránst a dominált konvergencia tétel alkalmazhatósága érdekében:

$$x\int_0^{ux} \frac{e^{-s}-1+s}{s^2}ds = x\int_0^1 \frac{e^{-s}-1+s}{s^2}ds + x\int_1^{ux} \frac{e^{-s}-1+s}{s^2}ds$$

Az első tagot felülről tudjuk becsülni $\frac{x}{2}$-el, ahogy korábban láttuk, ezért vizsgáljuk most a másodikat, amiről pedig a következőket tudjuk:

$$0 \leq \int_1^{ux} \frac{e^{-s}-1+s}{s^2}ds \leq \int_1^\infty \frac{1}{s^2}ds + \int_1^{ux}\frac{1}{s}ds$$

A korábbi két eredményt összerakva kapjuk, hogy :

$$x\int_0^{ux} \frac{e^{-s}-1+s}{s^2}ds \leq \frac{x}{2} + x[1+log^+(ux)] \leq \frac{3}{2}x + xlog(x), \text{ha } u<1.$$

Visszahelyettesítve a belátandó egyenletebe megkapjuk a kívánt eredményt:

$$\int_0^\infty \frac{3}{2}x + xlog(x)dF_{W_1}(x) = \frac{3}{2}E(W_1) + E(W_1 log^+(W_1)) < \infty$$

A végesség a feltételéből adódik. Tehát $\lim_{u\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{n+1}(u) \to 0$, ami pedig azt eredményezi, hogy $E(W) = 1$.

■

3. Elágazó folyamatok változó környezetben

A változó környezet bevezetéséhez tekintsük a $Z_1, Z_2, \dots$ valószínűségi változó sorozatot és az $F_1, F_2 \dots$-t mint ezek eloszlását. $Z_{n,j}$-k ekkor $j \geq 1, n \geq 0$ mellett függetlenek. Továbbá ha n-et lerögzítjük, akkor $Z_{n,j}$-k $j \geq 1$ mellett azonos eloszlásúak a Z_n-el. $X_0 = 1$ kezdeti érték mellett, ugyanúgy mint a Galton-Watson folyamat esetében (2.1) a populáció alakulását a következő egyenlet írja le: $X_n = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} Z_{n,j}$. Ekkor az $(X_n)_{n \in N}$ folyamatot változó környezetben vizsgált elágazó folyamatnak nevezzük, ahol $v = (F_1, F_2, \dots)$ a változó környezet jelölése és $X_0 = 1$. A változó környezet bevezetésével, az elágazó folyamatok elméletének általánosítása a cél és ezáltal életszerű szituációk modellezése. A továbbiakban azt szeretnénk bemutatni, hogy az egyszerű Galton-Watson folyamatra kijött eredményekből melyek azok, amelyek bizonyos további feltételek mellett változó környezetben is érvényben maradnak.

Mielőtt tovább haladnánk, vizsgáljuk meg újra a folyamat elemzésénél eddig használt generátor függvényt. Amit tudunk a változó környezet nélküli elágazó folyamatokról, hogy X_n generátor függvénye megadható, mint $f_n(s) = E(s^{X_n}) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X_n = k)$. Mivel eddig független azonos eloszlású valószínűségi változóként jellemeztük a utódokat, ezért azok generátor függvényével nem volt érdemes foglalkozni. Most azonban bevezetjük az $g_n(s) = E(s^{Z_n}) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(Z_n = k)$-t mint a Z_n generátor függvénye, ami az n. időpont utódait jellemzi. Ekkor tehát felírható a következő összefüggés a generátor függvények között:

$$f_n(s) = (g_0 \circ g_1 \circ \dots g_{n-1})(s) \tag{3.2}$$

Mivel a környezet változó, ezért a folyamat várható értékét is kicsit pontosítani kell a korábbiakhoz képest. Legyen tehát $\mu_n = E(Z_n)$ és $m_n = E(X_n)$. A generátor függvények előbb ismertetett 3.2 tulajdonságából következik, hogy: $m_n = \prod_{i=0}^{n-1} \mu_i$.

3.3. Korai eredmények

Ebben a részben hasonló eredményeket szeretnénk bemutatni, mint amik a Galton-Watson esetben is megfigyelhetőek voltak. Az első ilyen *Lindvall* nevéhez fűződik. Az alap esetben megmutattuk, hogy a folyamat határértéke a $(Z_n)_{n\geq 0}$ valószínűségi változó, ami a változó környezet hiányában X_n-el egyezett meg, várható értékétől függött. Mégpedig úgy, hogy 0-hoz tart, amennyiben $E(Z_n) \leq 1$ és ∞-hez ha $E(Z_n) > 1$. Változó környezetben is ez a kettő határérték lesz irányadó.

3.10. tétel (Lindvall, 1974). *[9] Tegyük fel, hogy $g_n(s) \neq 1$, minden $n \geq 1$ és $|s| < 1$-re teljesül. Ekkor létezzen egy X_∞ valószínűségi változó úgy, hogy $X_n \to X_\infty$ m.m., illetve $(P(X_\infty = 0) + P(X_\infty = \infty)) < 1$ akkor és csak akkor, ha $\sum_{n=0}^{\infty}(1-p_{n1}) < \infty$, ahol p_{n1}-et a következőképpen definiáljuk $p_{n1} = P(X_n = 1)$, $n \geq 0$.*

Ez a tétel *J.D.Church* azonos tételének tovább gondolása, amely a m.m. konvergencia helyett az eloszlásbeli konvergenciát bizonyítja.

Bizonyítás. Tegyük fel tehát, hogy $\sum_{n=0}^{\infty}(1-p_{n1}) < \infty$, és használjuk az $\varepsilon(s) = s$ jelölést. Továbbá jelölje $||\bullet||$ a suprémum normát a $[0,1]$ intervallumon. *J.D.Church* tételéből tudjuk, hogy ebből már következik az, hogy $(P(X_\infty = 0) + P(X_\infty = \infty)) < 1$. Mivel a m.m. konvergencia erősebb az eloszlásbeli konvergenciánál, ezért ennek bizonyításával a tétel bizonyításával is készen lennénk. Most tekintsük a következő becslést:

$$||g_n - \varepsilon|| = \sup_{0\leq s\leq 1} \left| \sum_{i=0}^{\infty} p_{ni}s^i - (1 - p_{n1} + p_{n1})s \right| =$$

$$\sup_{0\leq s\leq 1} \left| \sum_{i\neq 1} p_{ni}s^i - (1 - p_{n1})s \right| \leq 2(1 - p_{n1})$$

Az első egyenlőség egyszerűen csak az eddigi feltételeknek átírása. Az egyenlőtlenségnél kihasználtuk, hogy a generátor függvény nem negatív és monoton növő. Ezt a becslést ismerve, a sorösszegről is tudjuk, hogy véges:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||g_n - \varepsilon|| \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} (1 - p_{n1}) < \infty. \tag{3.3}$$

Vegyünk most egy n_0 küszöbindexet, ami elég nagy ahhoz, hogy a következő becslés teljesüljön: $\sum_{n=n_0}^{\infty} ||g_n - \varepsilon|| < \frac{1}{4}$. Tudjuk, hogy g_n-nek létezik inverze, és az értelmes minden $n \geq n_0$-ra az $[\frac{1}{4}, 1]$ tartományon. Most definiáljuk, az $a_{n_0} = \frac{1}{2}$-et, és ez alapján rekúrzióval határozzuk meg, az a_n-eket, az előbb definiált tartományon az $g_{n-1}(a_n) = a_{n-1}$ egyenlet segítségével. Ez az egyenlet értelmes és ekkor a következő becslést használhatjuk:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n - a_{n+1}| = \sum_{n=n_0}^{\infty} |g_n(a_{n+1}) - a_{n+1}| \leq \frac{1}{4}$$

Itt csak a korábbi definíciókat és eredményeket használtuk fel. Ebből viszont az látszik, hogy az a_n sorozat konvergens, valamint $a_n \to a$, ahol $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{3}{4}$, ami a norma becsléséből következik.

Most tekintsük az $a_n^{X_n}$ sorozatot, ahol n-re az eddigiek érvényben maradnak, és legyen $\mathcal{B}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ a folyamat által generált σ-algebra. Nézzük a következő lemmát:

3.11. Lemma. *$a_n^{X_n}$ martingál és adaptált $\mathcal{B}_n$-re.*

Bizonyítás. Az a-ra ismert korlátokból az L_1-beliség következik, az adaptáltság pedig triviális hiszen, mind az X_n, mint az a_n mérthető $\mathcal{B}_n$-re nézve. Tehát egyedül a martingáltulajdonság bizonyítása maradt hátra.

$$E(a_{n+1}^{X_{n+1}} | \mathcal{B}_n) = E(a_{n+1}^{X_{n+1}} | X_n) = E(a_{n+1}^{\sum_{j=1}^{X_n} Z_{n,j}} | X_n) =$$

$$\prod_{j=1}^{X_n} E(a_{n+1}^{Z_{n,j}}) = (g_n(a_{n+1}))^{X_n} = a_n^{X_n}$$

■

Az első egyenletnél kihasználtuk a folyamat Markov tulajdonságát, az utolsó egyenletnél pedig a 3.3-ban bizonyított összefüggést, amikkel beláttuk a martingál tulajdonságot is.

Mivel $a_n^{X_n}$ egy véges, nemnegatív martingál, ezért Doob martingál konvergencia tételele alapján 1 valószínűséggel létezik határértéke, ami legyen Y. Innen már könnyen láthatjuk, hogy létezik X_n-nek határértéke, ami viszont nem feltétlenül véges, hiszen $0 < a < 1$ és X_n növekedésével előfordulhat, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n^{X_n} = 0 = Y$:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = (\ln \text{ a})^{-1} \ln \text{ Y} = X_\infty \text{ m.m..}$$

■

Beláttuk tehát, hogy a változó környezetű elágazó folyamatba is átültethető az az eredmény miszerint a folyamatnak létezik határértéke. Ezt a gondolatot tovább alakítva egy másik szép eredményt is szeretnénk bemutatni, ami többlet feltételek mellett de ebben a bővebb környezetben is érvényben marad. Ez pedig a folyamat normalizáltjának eloszlásban a standard exponenciálishoz való tartása. Ez az eredmény Nicholas Bhattacharya és Mark Perlman nevéhez fűződik, ezért a következő rész eredményei a [3]-as cikkre támaszkodnak főként.

3.4. A normalizált folyamat konvergenciája

Az eredeti 2.4 Tétel feltételei érvényben maradnak, vagyis a szórásnégyzet végessége, illetve az hogy a 2.1.1-es besorolás alapján a *kritikus* osztályba tartozó folyamatot vizsgálunk. Azonban mint látni fogjuk, a *kritikus* besoroláshoz tartozó feltétel különbözni fog a $Galton - Watson$ esettől. Jelölje most $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ azt a feltételes folyamatot, ahol ζ_n valószínűségi változó eloszlása a következő valószínűségekkel adható meg:

$$P(X_n = k | X_n \neq 0) = \frac{P(X_n = k)}{1 - P(X_n = 0)}.$$

hol $k \geq 1$ egész szám. Ekkor a tétel a következőképpen fogalmazható át: ha teljesülnek a $(*)$ feltételek, akkor $\lim_{n\to\infty} P((X_n/E\zeta_n) > x | X_n \neq 0) = exp(-x)$, ahol $x \geq 0$. Ennek belátásához még meg kell adni a pontos feltételeket. Ehhez azonban még egy jelölésre szükségünk van, ez pedig a következő:

$$\Gamma_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j''(1)}{2\mu_j m_{j+1}} \tag{3.4}$$

Most nézzük milyen feltételek szükségesek a tétel megfelelő kimondásához.

3.12. Feltételek. *Az első pár feltétel a szokásos regularitási feltételek közé tartozik:*

$(F1)$ $\quad \sup_{n\geq 0} P(Z_n = 0) < 1,$

$(F2)$ $\quad \limsup_{n\to\infty} [\, P(Z_n = 0) + P(Z_n = 1)] \, < 1$

Az előbbi feltétel megakadályozza a folyamat egy generáción belüli biztos kihalását, a második pedig a folyamat fejlődésének stagnálását előzi meg.

$(F3)$ $\quad \liminf_{n\leq 0} P(Z_n = 0) > 0$

Ezzel megakadályozzuk hogy egy tiszta születési folyamatról beszélhessünk. Az eddigi három feltétel ismerős lehet, a Galton-Watson folyamatnál megkövetelt regularitási feltételekből (2.1).

$(F4a)$ $\quad \sup_{n\geq 0} E(Z_n^r) < \infty,\ r = 1, 2, 3$

$(F4b)$ $\quad \sup_{n\geq 0} E(Z_n^r) < \infty,\ r \geq 1$

Az első három momentum korlátossága elegendő feltételnek bizonyul az eloszlásban való konvergenciához, az $(F4b)$ pedig a momentumok konvergenciájához szükséges feltétel.

$(F5)$ $\quad \Gamma_n \to \infty,$

$(F6)$ $\quad m_n \Gamma_n \to \infty$

$n \to \infty$ mellett. Az általunk taglalt tételkörben az $(F4b)$ feltételre nem lesz szükségünk, így hat feltétel alatt az ezen kívüli feltételekre fogunk hivatkozni. Az utolsó két feltétel fogja meghatározni ebben az esetben a *kritikus* osztályt. Ha jobban megfigyeljük a 3.4-es összefüggést, akkor észrevehetjük, hogy az $(F5)$-ös feltétel miatt nem tartozhat a folyamat a *szuperkritikus* osztályba. Hiszen, mivel egy egyed utódlásának várható értéke meghaladja az egyet, ezért a nevező generációról generációra nőne, aminek következtében egyre kisebb számok kerülnének hozzáadásra. A *szubkritikus* régióból az $(F6)$-os feltétel zárja ki a folyamatot hasonló meggondolásból mint amit az előbbiekben levezettünk. Továbbá

ha a folyamat első és második momentuma véges és pozitív, akkor az (F5) a következőre egyszerűsödik: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{E(X_n)} = \infty$. Ahhoz, hogy a feltételes folyamat egyáltalán tarthasson a standard exponenciálishoz szükséges, hogy a feltétel nélküli folyamat 1 valószínűséggel kihaljon. Mielőtt belekezdenénk a bizonyítás módszertani felvezetéséhez említsük meg, hogy *P.Jagers* más feltételek mellett de egy hasonló eredményt bizonyított korábban.

3.4.1. Eszközök

3.13. tétel (Jagers, 1974). *[4] Tegyük fel, hogy a következők teljesülnek:*

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} p_{nk} k^2$ *egyenletesen konvergens n-ben,*

(ii) $\inf_{n\geq 1} g_n'' > 0$

(iii) $0 < \inf_{n\geq 1} m_n \leq \sup_{n\geq 1} m_n < \infty$

Ekkor a következő jelölés segítségével:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_k''}{2m_k\mu_k^2}$$

teljesül, hogy:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n}{b_n m_n} > x \middle| X_n \neq 0\right) = e^{-x}$$

Érdemes megfigyelni, hogy *Jagers* (iii) feltételéből következik az (F5)-(F6). Azt is könnyű észrevenni, hogy ez nem megfordítható. Ennek szemléltetésére egy egyszerű példát mutatunk be:

3.14. *Példa.* Legyen $P(Z_0 = 1) = 1$ és minden $n \geq 1$-re teljesüljenek a következők: $P(Z_n = 2) = \frac{n+1}{2n}$, $P(Z_n = 0) = 1 - P(Z_n = 2)$.
Egyszerű számolással megkapjuk, hogy $\mu_n = \frac{n+1}{n}$ és $m_n = n$. Az látszik, hogy ez a folyamat teljesíti a regularitási feltételeket, de azt sem nehezebb belátni, hogy az (F5)-(F6) feltételt is teljesíti, amint n-el tartunk a végtelenbe.

$$\Gamma_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j''(1)}{2\mu_j m_{j+1}} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n+1/n}{((n+1)^2)/n} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n+1}$$

Az utolsó egyenlőség jobb oldaláról pedig tudjuk, hogy $n \to \infty$ mellett végtelenhez tart. Az utolsó egyenlőség jobb oldalát beszorozva egy további monoton növő számmal, a kimenet nem változik, és így az $(F6)$ is teljesül. Pont ebből az aszimptotikából látszik, hogy a *Jagers* féle feltétel viszont nem teljesül, hiszen $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$. Most már viszont kimondhatjuk az ígért tételt.

3.15. tétel (Bhattacharya és Perlman, 2017). *[3]*

Legyen $a_n = E(X_n|X_n \neq 0)$. Ekkor ha teljesül a 3.12-ben megfogalmazott hat feltétel, akkor:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n}{a_n} > x \middle| X_n \neq 0\right) = e^{-x}$$

A bizonyítás több érdekes gondolatmenetet tartalmaz, ezért szeretnénk ezt bemutatni. Mivel ez nem egy teljesen természetes bizonyítás ezért a használt eszköztárat mutatjuk be először, amit a végén csak összerakva kijön a kívánt eredmény. Elöljáróban, annyit elárulunk, hogy a bizonyítás célja, megmutatni, hogy a 3.15-ben szereplő baloldal Laplace transzformáltja, tart a standard exponenciális Laplace transzformáltjához. Ezt azért tehetjük meg, mert hiszen tudjuk, hogy a Laplace transzformáltak egyezőségéből következik az eloszlások egyezősége is. Az első eszköz, amit fel szeretnénk használni az Alan Agresti nevéhez fűződik, ami a folyamat generátor függvényére ad alsó és felső határt minden n időpontra. Mivel a bizonyítás hosszú és körülményes, ezért csak a tételt említjük meg.

3.16. tétel ([1]). *Ha $g_n''(1) < \infty$ minden n-re, akkor*

$$\left(\frac{1}{(1-s)m_n} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j''(1)}{2\mu_j m_{j+1}}\right)^{-1} \leq 1 - f_n(s) \leq \left(\frac{1}{(1-s)m_n} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j''(0)}{2\mu_j m_{j+1}}\right)^{-1}$$

Amit itt egyből észrevehetünk, hogy a bal oldali tag szummája, pont a 3.4-ben definiálit Γ_n függvény. Az $(F6)$ könnyebb megértéséhez használjuk a teljes várható érték tételét a következőképpen:

$$m_n = E(X_n) = E(X_n|X_n = 0)P(X_n = 0) + E(X_n|X_n \neq 0)P(X_n \neq 0) =$$

$$E(X_n|X_n \neq 0)P(X_n \neq 0)$$

Használva a $\phi_n = P(X_n \neq 0)$ jelölést, kapjuk a következőt:

$$P\left(\frac{X_n}{a_n} > x \middle| X_n \neq 0\right) = P\left(\frac{X_n}{m_n/\phi_n} > x \middle| X_n \neq 0\right)$$

Ennek segítségével pedig arra az eredményre fogunk jutni, hogy a $\lim_{n\to\infty} \phi_n \Gamma_n = 1$, aminek felhasználásával a hatodik feltétel azt állítja, hogy a nevező tart a végtelenhez, ami nyilván szükséges is. Most tekintsünk két segédtételt és egy segédlemmát:

3.17. tétel. *Ha fennáll a 3.12-ban definiált hat feltétel, akkor a feltétel nélküli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folyamat 1 valószínűséggel kihal.*

3.18. tétel. *Ha fennáll a 3.12-bam definiált hat feltétel, akkor $\phi_n \Gamma_n \to 1$, amint $n \to \infty$.*

3.19. Lemma. *Tegyük fel, hogy teljesül az $(F1) - (F5)$ feltétel, illetve léteznek olyan $C, N > 0$ számok, hogy minden $n \geq N$-re teljesül a következő becslés:*

$$\Gamma_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j''(1)}{2\mu_j m_{j+1}} \leq C \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j''(f_{jn}(0))}{2\mu_j m_{j+1}}$$

Ennek a lemmának a segítségével tudjuk finomítani 3.16 becslésben a korlátokat, de mivel csak a becslésre lesz szükségünk, ezért a bizonyítást nem közöljük. Tekintsük most először a 3.17 tétel bizonyítását, mert az nagyon egyszerű és szükség lesz rá a későbbiekben is.

3.17 Tétel bizonyítása. A hatodik feltételt felhasználva látható, hogy 3.16 alsó korlátja aszimptotikusan $\frac{1}{\Gamma_n}$:

$$\left(\frac{1}{(1-s)m_n} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j''(1)}{2\mu_j m_{j+1}}\right)^{-1} = \left(\Gamma_n\left(\frac{1}{(1-s)\Gamma_n m_n} + 1\right)\right)^{-1} \sim (\Gamma_n)^{-1}$$

ahol az utolsó egyenlőségnél az $(F6)$-ra hivatkozunk. Továbbá felhasználva a 3.19-es lemmát adódik, hogy a jobb oldalnál egy pontosabb felső becslés pedig aszimptotikusan kisebb mint $C\frac{1}{\Gamma_n}$.

$$\left(\frac{1}{(1-s)m_n} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j''(f_{jn}(0))}{2\mu_j m_{j+1}}\right)^{-1} \leq C\left(\frac{1}{(1-s)m_n} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j''(1)}{2\mu_j m_{j+1}}\right)^{-1} \sim C\frac{1}{\Gamma_n}$$

Ha a kapott eredményeket visszahelyettesítjük 3.16-be és használjuk a ϕ_n jelölést, akkor a következő eredményt kapjuk:

$$1 \leq \lim_{n\to\infty} \inf \phi_n \Gamma_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup \phi_n \Gamma_n \leq C$$

Amiből pedig már látszik, hogy mivel Γ_n $(F5)$ alapján tart a végtelenhez, ezért ϕ_n nullához kell tartson, vagyis a feltétel nélküli folyamat kihalásához vezet.

■

A 3.18-as tétel bizonyítása már sokkal több ötletet tartalmaz, ezért ezt mutatjuk most be:

3.18 Tétel bizonyítása. Tekintsük a j időpontban elindított folyamatot, vagyis az $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$-et ahol $n \geq j$ és $X_j = 1$. Ekkor a korábban használt ϕ_n-et a következőképpen definiálhatjuk erre a feltételes folyamatra: $\phi_{jn} = P(X_n = 0|X_j = 1)$ és definiáljuk egyúttal az ehhez a feltételes folyamathoz tartozó generátor függvényt is:

$$f_{jn}(s) = (g_j \circ g_{j+1} \circ \dots g_{n-1})(s) \tag{3.5}$$

A 3.17-as tételből ismerjük a következő becslést: $\phi_n \leq \frac{C}{\Gamma_n}$. Ezt tovább tudjuk alakítani a következőre:

$$\phi_{jn} \leq C \frac{1}{\sum_{k=j}^{n-1} \frac{g_k''(1)}{2\mu_k(m_{k+1}/m_j)}} = C \frac{1}{m_j(\Gamma_n - \Gamma_j)} \tag{3.6}$$

Fontos még kiemelni a könnyebb megértés szempontjából, hogy az $\frac{m_{k+1}}{m_j}$ a bizonyítás elején meghatározott folyamat várható értéke, ami a folyamat várható értékének definíciójából következik, miszerint $m_n = \prod_{i=0}^{n-1} \mu_i$.

Most válasszuk meg N-et olyan nagyra, $\eta > 0$-t olyan kicsire, illetve L-et úgy, hogy teljesüljenek a következők:

$$\inf_{n\geq N} g_n''(1) > \eta$$

$$\sup_{n\geq 0} g_n'''(1) < L$$

Ahol kihasználtuk az előbbinél az $(F3)$ feltételt, a utóbbinál pedig az $(F4)$ feltételt, miszerint még a harmadik momentum is véges. Legyen továbbá $\varepsilon > 0$ olyan, amivel a következő index sorozatot definiálni tudjuk:

$$J(n) = \min\{j : \phi_{jn} > \frac{\varepsilon\eta}{L}\}$$

Azok az indexek amelyekre az teljesül, hogy $j < J(n)$, azt eredményezik, hogy ϕ_{jn} közel legyen a nullához. A következőkben megmutatjuk, hogy a $\{j < J(n)\}$ halmaz komplementere nem járul hozzá számottevően a szummázáshoz, ami 3.16 felső korlátjában jelenik meg.

Azt már beláttuk a 3.17-os tételben, hogy a folyamat kihal, tehát $\phi_{jn} \to 0$ rögzített j mellett amint $n \to \infty$. Ezt felhasználva észrevehetjük, hogy $J(n) \to \infty$ is teljesül, ha $n \to \infty$. Továbbá ha $N \leq j < J(n)$, akkor $\phi_{jn} \leq \frac{\varepsilon\eta}{L}$, ami $J(n)$ definíciójából adódik. Ezt követően felhasználva a Lagrange középérték-tételt a következő eredményre jutunk:

$$g_j''(f_{jn}(0)) = g_j''(1-\phi_{jn}) = g_j''(1) - g_j'''(\xi)\phi_{jn} \geq g_j''(1) - L\phi_{jn} \geq \tag{3.7}$$

$$g_j''(1)\left(1 - \frac{L\phi_{jn}}{g_j''(1)}\right) \geq g_j''(1)\left(1 - \frac{L\phi_{jn}}{\eta}\right) \geq g_j''(1)(1-\varepsilon)$$

Ahol $\xi \in (1-\phi_{jn}, 1)$. Itt felhasználtuk a pár sorral feljebb bevezetett jelölések definícióját. Hogy tovább mehessünk a 3.16 egyenlőtlenséget egy kicsit más formára hozzuk, ami legyen a következő:

$$\left(\frac{1}{(1-s)m_n} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j''(1)}{2\mu_j m_{j+1}}\right)^{-1} \leq 1 - f_n(s) \leq \left(\frac{1}{(1-s)m_n} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j''(\tau_j)}{2\mu_j m_{j+1}}\right)^{-1}$$

Ezt megtehetjük, hiszen 3.16 tétel bizonyítása pont ezt eredményezi, ahol az τ_j valószínűségi változóra a következő feltétel vonatkozik $f_{jn}(0) \leq \tau_j \leq 1$. Tehát használhatjuk helyette az f_{jn}-et, illetve ezt 0-val helyettesítve egy gyengébb felső becslést kapunk. Ezt még tovább alakítva $s = 0$ helyen:

$$\left(\frac{1}{m_n} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j''(1)}{2\mu_j m_{j+1}}\right)^{-1} \leq \phi_n \leq \left(\frac{1}{m_n} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j''(f_{jn}(0))}{2\mu_j m_{j+1}}\right)^{-1}$$

Az eddigi eredményeinket és ezt a becslést felhasználva a következőképpen haladhatunk tovább:

$$1 \geq \frac{1}{\phi_n \Gamma_n} \geq \frac{1}{\Gamma_n}\left(\frac{1}{m_n} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j''(f_{jn}(0))}{2\mu_j m_{j+1}}\right) \geq \frac{1}{\Gamma_n}\left(\sum_{j=0}^{J(n)-1} \frac{g_j''(f_{jn}(0))}{2\mu_j m_{j+1}}\right)$$

$$\geq \frac{1}{\Gamma_n}\left(\sum_{j=0}^{J(n)-1} \frac{g_j''(1)(1-\varepsilon)}{2\mu_j m_{j+1}}\right) = \frac{1}{\Gamma_n}(1-\varepsilon)\Gamma_{J(n)}$$

Felhasználtuk a legelején a 3.17 tételt, azt követően a $J(n)$-el kapcsolatos becslésünket. Az utolsó előtti egyenlőségnél kihasználtuk a 3.7-ben kiszámolt becslést. Habár a feltevések között szerepelt, hogy $N \leq j$, ez mégsem jelent problémát, hiszen véges sok hasonló esetet számításon kívül hagyhatunk a $\Gamma_n \to \infty$ feltevés miatt. A folytatásban azt használjuk fel, hogy $\Gamma_{J(n)} \leq \Gamma_n$, ami a Γ és $J(n)$ definíciójából nyilvánvaló és így:

$$\frac{1}{\Gamma_n}(1-\varepsilon)\Gamma_{J(n)} = \frac{\Gamma_{J(n)}}{\Gamma_n} - \varepsilon\frac{\Gamma_{J(n)}}{\Gamma_n} \leq \frac{\Gamma_{J(n)}}{\Gamma_n} - \varepsilon = (1-\varepsilon) - \frac{\Gamma_n - \Gamma_{J(n)}}{\Gamma_n}$$

Végezetül azt szeretnénk megmutatni, hogy a jobboldali kifejezés aszimptotikusan 0-hoz tart. Ehhez a következő becsléseket használjuk:

$$\frac{\Gamma_n - \Gamma_{J(n)}}{\Gamma_n} \leq \frac{C}{m_{J(n)}\phi_{J(n)n}\Gamma_n} \leq \frac{CL}{\eta\varepsilon}\frac{1}{m_{J(n)}\Gamma_n}$$

Kihasználtuk a bizonyítás elején a 3.6-ban kapott eredményt, illetve $J(n)$ definícióját ismét. Továbbá felhasználva, hogy $J(n) \to \infty$ kapjuk a következőt:

$$m_{J(n)}\Gamma_n \geq m_{J(n)}\Gamma_{J(n)} \to \infty$$

Amiből már következik, hogy a kívánt összefüggés nullához tart. Ahonnan már triviális a tétel bizonyításának befejezése. Minden $\varepsilon > 0$ mellett:

$$1 \geq \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{\phi_n \Gamma_n} \geq \lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{\phi_n \Gamma_n} \geq 1 - \varepsilon$$

■

Most már minden eszköz a kezünkben van, hogy bebizonyítsuk a 3.15-ös tételt, ezért lássunk is neki.

3.4.2. Eredmény

Bizonyítás. Ahogy már korábban is említettük, az $(F4a)$ feltétel mellett, azt szeretnénk belátni, hogy a $\zeta_n/E\zeta_n$ Laplace transzformáltja tart a standard exponenciális Laplace transzformáltjához, az $\frac{1}{1+s}$-hez. Ennek belátáshoz induljunk ki a generátor függvény definíciójából:

$$f_n(s) = E(s^{X_n}) = P(X_n \neq 0)E(s^{X_n}|X_n \neq 0) + P(X_n = 0)E(s^{X_n}|X_n = 0) = \tag{3.8}$$

$$\phi_n E(s^{X_n}|X_n \neq 0) + (1 - \phi_n)$$

Most tekintsük $f_n(s)$-t az $exp\big(-\frac{s}{E(X_n|X_n\neq 0)}\big)$ helyen. Ekkor 3.8 a következő alakú lesz:

$$E\Bigg(\exp\Bigg(-\frac{sX_n}{E(X_n|X_n \neq 0)}\Bigg)\Bigg|X_n \neq 0\Bigg) = \frac{f_n\big(\exp\big(-\frac{s}{E(X_n|X_n\neq 0)}\big)\big) - 1}{\phi_n} + 1 \tag{3.9}$$

$$= \frac{f_n\Big(\exp\Big(-\frac{s\phi_n}{m_n}\Big)\Big) - 1}{\phi_n} + 1$$

Ez ugyanaz az eredmény, ami a 3.8-ben is kijött. A 3.18-as tétel bizonyításából láttuk, hogy igaz a következő:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{g_j''(f_{jn}(0))}{2\mu_j m_{j+1}} = \Gamma_n + o(\Gamma_n)$$

Ezzel a 3.16-es becslést tovább tudjuk alakítani a következőképpen:

$$\left(\frac{1}{(1-s)m_n} + \Gamma_n\right)^{-1} \leq 1 - f_n(s) \leq \left(\frac{1}{(1-s)m_n} + \Gamma_n + o(\Gamma_n)\right)^{-1}$$

Ezt úgy szeretnék átalakítani, hogy hasonlítson a 3.9-ben kapott Laplace transzformáltra.

$$1-\frac{1}{\phi_n}\left(\frac{1}{(1-s)m_n}+\Gamma_n+o(\Gamma_n)\right)^{-1}\leq\frac{f_n(s)-1}{\phi_n}\leq 1-\frac{1}{\phi_n}\left(\frac{1}{(1-s)m_n}+\Gamma_n\right)^{-1}$$

A generátor függvényt ismét az $\exp(-\frac{\phi_n}{m_n})$ helyen tekintve, azt kapjuk, hogy:

$$1-\frac{1}{\phi_n}\left(\frac{1}{(1-\exp(-\frac{s\phi_n}{m_n}))m_n}+\Gamma_n+o(\Gamma_n)\right)^{-1}\leq E\left(\exp\left(-\frac{sX_n}{E(X_n|X_n\neq 0)}\middle|X_n\neq 0\right)\right.$$

$$\leq 1-\frac{1}{\phi_n}\left(\frac{1}{(1-\exp(-\frac{s\phi_n}{m_n}))m_n}+\Gamma_n\right)^{-1}$$

Tehát elég belátni, hogy:

$$\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{\phi_n}\left(\frac{1}{(1-\exp(-\frac{s\phi_n}{m_n}))m_n}+\Gamma_n\right)^{-1}=\frac{1}{1+s}$$

Az $(F6)$-ból és a 3.17-as tételből következik, hogy $\lim_{n\to\infty}\frac{\phi_n}{m_n}=0$, amiből pedig az látszik, hogy $\exp(-\frac{s\phi_n}{m_n})\to 1$. Befejezésül használjuk az első rendű sorfejtését az exponenciális résznek:

$$1-\frac{1}{\phi_n}\left(\frac{1}{(1-\exp(-\frac{s\phi_n}{m_n}))m_n}+\Gamma_n\right)^{-1}=1-\frac{1}{\phi_n}\left(\frac{1}{(\frac{s\phi_n}{m_n}+o(\frac{\phi_n}{m_n}))m_n}+\Gamma_n\right)^{-1}=$$

$$1-\frac{1}{\Gamma_n\phi_n}\left(\frac{1}{s\phi_n\Gamma_n+o(\phi_n\Gamma_n)}+1\right)^{-1}$$

Ha $n\to\infty$, akkor már következik a tétel állítása.

$$\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{\Gamma_n\phi_n}\left(\frac{1}{s\phi_n\Gamma_n+o(\phi_n\Gamma_n)}+1\right)^{-1}=1-\frac{s}{1+s}=\frac{1}{1+s}$$

Ahol még felhasználtuk a 3.18 eredményét. Itt pedig ismét hivatkozhatunk arra, hogy a Laplace transzformáltak egyezőségéből következik az eloszlások egyezősége és ezzel a bizonyítás teljes.

■

Mielőtt tovább mennénk egy példán nézzük meg, hogy tulajdonképpen ez a tétel mit is jelent, és milyen esetekben teljesül.

3.20. *Példa.* Tegyük fel, hogy az utódeloszlások azonos eloszlásból származnak, ami ebben az esetben legyen Poisson, $Z \sim Poisson(\lambda)$. Ekkor $\lambda = 1$ esetben, a 2.4 tétel alapján, teljesül a következő:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n}{n} > x | X_n > 0\right) = exp\left(-\frac{2x}{\sigma^2}\right), \text{ahol } x \geq 0.$$

Most vezessük be a változó környezetet a következőképpen:

$$v = (Z_1 \sim Poisson(\lambda_1), Z_2 \sim Poisson(\lambda_2), \ldots, Z_n \sim Poisson(\lambda_n)).$$

Ha $(\lambda_j)_{j=1,2,\ldots} \neq 0$ akkor az $(F1) - (F3)$ regularitási feltételek teljesülnek. A negyedik feltétel megvizsgálásához tekintsük a Poisson eloszlás momentumait.

$$\begin{aligned} E(Z_n) &= \lambda \\ E(Z_n^2) &= \lambda^2 + \lambda \\ E(Z_n^3) &= \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

Ebből látható, hogy $(\lambda_j)_{j=1,2,\ldots} < \infty$ mellett az $(F4)$ is teljesül. Vizsgáljuk meg tehát a fennmaradó $(F5) - (F6)$ feltételeket.

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j^2}{2\lambda_j \prod_{i=0}^{j} \lambda_i} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2\prod_{i=0}^{j-1} \lambda_i} \\ m_n\Gamma_n &= \textstyle\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j^2}{2\lambda_j \prod_{i=0}^{j} \lambda_i} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{2} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=0}^{j} \lambda_i} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{2} \prod_{i=j}^{n-1} \lambda_i \end{aligned}$$

A most leírtakból arra a következtetésre juthatunk, hogy $\lim_{n\to\infty} \Gamma_n = \infty$ csak akkor teljesül, ha $\lim_{j\to\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \lambda_i \neq \infty$. Ez például teljesül, ha $(\lambda_j)_{j=1,2,\ldots} \leq 1$ és könnyen sérülhet ha $(\lambda_j)_{j=1,2,\ldots} > 1$. Az $(F6)$-os feltételnél pont az ellenkezőjét figyelhetjük meg, mégpedig azt, hogy $(\lambda_j)_{j=1,2,\ldots} \geq 1$ esetben teljesül a feltétel, és $(\lambda_j)_{j=1,2,\ldots} < 1$ esetben pedig könnyen találunk olyan példát amelyre sérül.

Tekintsük most azt az esetet $j = 1, 2, \ldots$-re, amikor $(\lambda_j) \in \{c, \frac{1}{c}\}$, ahol $0 < c < 1$ és $P(\lambda_j = c) = P(\lambda_j = \frac{1}{c}) = 0.5$ lesz. $n \to \infty$ mellett könnyen beleeshetünk abba a hibába, hogy $m_n \sim 1$-et feltételezünk, hiszen kioltják egymást a változások. Ekkor persze teljesülni *Jagers* feltétele, amiből pedig következne, hogy a 3.15 tételt is kielégíti ez a

példa. Azonban végig gondolva hogy ez egy binomiális fán miképpen festene, levonhatjuk a megfelelő következtetéseket: amint c távolodik az 1-től úgy egyre laposabb lesz a $E(X_n)$ eloszlásának a farka, amire viszont arányaiban nagyobb súly kerül így az $(F5)$ nem fog minden esetben teljesülni.

Az eddigiek során azt láthattuk, hogy amíg a Galton-Watson folyamatról és annak jellemzőiről tárgyaltunk, addig a tételek és bizonyítások felépítésének egy egyszerű menete volt, ahol a használt eszközök jelentős része közismert analízisbeli tudást igényelt. Amikor bevezettük a változó környezetet és a Galton-Watson folyamat eredményeit mutattuk be ebben a általánosabb keret rendszerben, akkor már nem voltak elegendőek egyszerű gondolatmenetek, hanem több segéd lemma konstruálása kellett, hogy a bizonyítások megállják helyüket. Ezek a segéd lemmák nagyon fontos új eszközök, amiket maguk a megalkotók is több tételük során alkalmaztak.

A továbbikban viszont egy másfajta általánosítást szeretnénk bemutatni, amivel a dolgozat fő bemutatandó elméletéhez érkeztünk. Ez pedig abban fog különbözni a korábbiaktól, hogy itt az alap állítás nem egy egyszerű végeredményre fog vezetni, hanem több eredmény ekvivalenciáját fogja alátámasztani. A következőkben tárgyalt eredmények [6] cikkének segítségével kerül bemutatásra.

4. Általános eredmények változó környezetben

Előzetesen fontos kihangsúlyozni, hogy ez az általános elmélet az extrém esetekkel nem kíván foglalkozni. A célja nem az, hogy minden előforduló eloszlás által generált folyamatra igazoljon valamit, hanem a gyakrabban előforduló/hagyományosakra. Ki is mondjuk a fő feltételt, amire a későbbiekben (A)-ként fogunk hivatkozni:

$$\exists c_1 < \infty, \forall \text{ n} \geq 1 : E(Z_n(Z_n - 1)) \leq c_1 E(Y_n) E(Y_n - 1 | Y_n \geq 1)$$

Ezt a feltételt azonban egyáltalán nem egyszerű ellenőrizni a megjelenő feltételes várható érték miatt, ezért egy másik feltételt is bevezetünk, amit könnyebb bizonyítani és következik belőle (A). Ezt nevezzük (A^*)-nak:

$$\exists c_2 < \infty, \forall \text{ n} \geq 1 : E(Z_n(Z_n - 1)(Z_n - 2)) \leq c_2 E(Z_n(Z_n - 1))(1 + E(Z_n))$$

Mielőtt rátérnénk a lényegi részére az elméletnek vezessük be a használt jelöléseket, amik tulajdonképpen a korábbiak kiegészítése. A jelölések a faktoriális momentumokra vonatkoznak először:

- $E(Z) = \mu = g^{'}(1)$,
- $E(Z(Z-1)) = g^{''}(1)$,
- $E(Z(Z-1)(Z-2)) = g^{'''}(1)$.

Ezt követően a normalizáltjukra is bevezetünk jelöléseket:

- $\nu = E(Z(Z-1))/E(Z)^2$,
- $\rho = Var(Z)/E(Z)^2 = \nu + 1/E(Z) - 1$.

Felelevenítjük a kihalás valószínűségét, illetve a folyamat várható értékét is:

- $\pi = P(X_\infty = 0)$,
- $m_n = g_1'(1) \dots g_n'(1)$.

Illetve az eddigi jelölésekbe elvégezve a folyamatra adott időpontjára történő behelyettesítéseket:

- $\nu_n = g_n''(1)/g_n'(1)^2$,
- $\rho_n = \nu_n + 1/g_n'(1) - 1$.

A jelölések bevezetése után az elméleti áttekintő a következőképpen fog történni: először bemutatjuk a tételek egy pár példával szemléltetve, utána bevezetünk néhány segéd lemmát amik a bizonyítások végigvezetéséhez szükségesek, a végén pedig az (A) és (A^*) viszonyát valamint a bizonyításokat fogjuk ismertetni.

4.5. Tételek

A tételek a következő logikai menetet fogják felvenni: ha teljesül (A) vagy (A^*), akkor az adott állítások ekvivalensek. Ez nyilvánvalóan egy nagy fegyvertény, hiszen egy probléma vizsgálatánál kevesebb tulajdonság ellenőrzése elegendő a kívánt információ kinyeréséhez.

4.21. tétel. *Tegyük fel, hogy (A) teljesül. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) $\pi = 1$

(ii) $E(X_n)^2 = o(E(X_n^2))$

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{m_{k-1}} = \infty$

(iv) $m_n \to 0$ *és/vagy* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{m_{k-1}} = \infty$

És a következők is ekvivalensek lesznek egymással:

(v) $\quad \pi < 1$

(vi) $\quad E(X_n^2) = O(E(X_n)^2)$

(vii) $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\rho_k}{m_{k-1}} < \infty$

$(viii)$ $\quad \exists 0 < r \leq \infty \ : m_n \to r \ \textit{és} \ \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\nu_k}{m_{k-1}} < \infty$

Az (i) és (iv) állítások kimondják, hogy a folyamat 1 vagy kevesebb mint 1 valószínűséggel hal ki. Ezt bizonyíthatják a (iii) és (vii) állítások, hiszen a nevezőt tekintve gyanakodhatunk arra, hogy amint $f_n^{'}(1) \to 0$, akkor a nevező tart a nullához és az összeadandó értékek egyre nőnek. A (vi) állítás a folyamat növekedésének mértékének meghatározásában fog segíteni. A (iv) és $(viii)$ állítások pedig a folyamat osztályokba való besorolását fogják meghatározni, ahogy a Galton-Watson esetben is láthattuk.

Itt érdemes megjegyezni, hogy a $(v) - (vii)$ állítások ekvivalenciájának bizonyítása a [10]-es cikkben is megtalálható amellett a feltétel mellett, hogy:

$$\sup_n ||X_n||_\infty < \infty$$

Ehhez a tételhez még azt érdemes megemlíteni, hogy [1]-ben a kihalás valószínűsége a következővel ekvivalensen lett meghatározva: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_{k-1}} = \infty$. *Agresti* azért köthette egy egyszerűbb feltételhez az 1 valószínűségű kihalást, mert az ekvivalenciát eredményező alap feltételek sokkal szigorúbbak. Ő megköveteli a következő analógiát:

- ha $\sup_{n \geq 0} g_n^{''}(1)/g_n^2(1) < \infty$,akkor $\pi = 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} 1/m_{k-1} = \infty$
- ha $\exists 0 \leq n_0 < \infty \ \inf_{n \geq n_0} g_n^{''}(1)/g_n^{'}(1) > 0$,akkor $\sum_{k=1}^{\infty} 1/m_{k-1} = \infty \implies \pi = 1$

Hogy a (iii) vagy (vii) feltétel, illetve *Agresti* feltételének különbözőségét szemléltessük, bemutatunk két egyszerű példát:

4.22. *Példa.* Tegyük fel, hogy Z_n csak két értéket vehet fel mégpedig a következőképpen: $P(Z_n = n+2) = \frac{1}{n}$, $P(Z_n = 0) = \frac{n-1}{n}$. Ebből rövid számolással a következők adódnak: $E(Z_n(Z_n - 1)) = \frac{(n+1)(n+2)}{n} \sim n$, $E(Z_n) = 1 + \frac{2}{n}$, $E(Z_n - 1 | Z_n \geq 1) \sim n$. Ekkor triviálisan tudunk választani olyan c_1-et, hogy (A)-ba behelyettesítve $n \leq c_1(1 + \frac{2}{n})n$. Továbbá kiszámolható, hogy $m_n = \prod_{k=1}^{n-1}(1 + \frac{2}{k}) = \frac{(n+1)!}{2(n-1)!} \sim \frac{n^2}{2}$ és $\rho_n \sim n$, amivel korábbi

tanulmányainkból már tudjuk, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} 1/m_{k-1} < \infty$, de $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k/m_{k-1} = \infty$.
A 4.21 tételből következik, hogy ekkor a folyamat 1 valószínűséggel kihal. De amint látjuk ebből nem következik, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_{k-1}} = \infty$, hiszen $\sup_{n\geq 0} g_n''(1)/g_n^2(1) = n$, ami tart végtelenhez, amint $n \to \infty$.

Most tekintsünk a másik "szereposztásra" is egy szemléletes példát:

4.23. *Példa.* Tegyük fel most azt, hogy Z_n három értéket vehet fel a következőképpen: $P(Z_n = 0) = P(Z_n = 2) = \frac{1}{2n^2}$, $P(Z_n = 1) = 1 - \frac{1}{n^2}$. Ebből könnyen adódik, hogy $E(Z_n(Z_n - 1)) = \frac{4}{2n^2} + 1 - \frac{1}{n^2} - 1 \sim \frac{1}{n^2}$, $E(Z_n) = 1$, $E(Z_n - 1|Z_n \geq 1) \sim \frac{1}{2n^2}$. Most is könnyű belátni, hogy tudunk választani olyan c_1-et, hogy (A)-ba behelyettesítve igaz lesz a következő $\frac{1}{n^2} \leq c_1 * \frac{1}{n^2}$. Továbbá kiszámolható, hogy $m_n = 1$ és $\rho_n \sim 1/n^2$, amiből pedig következik, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} 1/m_{k-1} = \infty$, de $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k/m_{k-1} < \infty$.
Itt ugyanúgy mint az előbbi példánál, ha *Agresti* saját feltételét használnánk, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_{k-1}} = \infty$-ből következne, hogy a folyamat 1 valószínűséggel kihal, ami nem teljesül. Mégpedig azért nem, mert a második feltétel, a $\exists 0 \leq n_0 < \infty$ $\inf_{n\geq n_0} g_n''(1)/g_n'(1) > 0$ nem teljesül, hiszen $g_n''(1)/g_n'(1) = \frac{1}{2n^2-1} \to 0$, ha $n \to \infty$.

Ezzel jól látható, hogy a 4.21-es tétel általánosabb vizsgálatnak enged teret. A következő tétel a folyamat normalizáltjával, W_n-el foglalkozik.

4.24. tétel. *Tegyük fel, hogy (A) teljesül. Ekkor a következők igazak:*

(i) *Ha $\pi = 1$, akkor $W = 0$ m.m.*

(ii) *Ha $\pi < 1$, akkor $E(W) = 1$ és $P(W = 0) = \pi$*

Ez emlékeztethet minket a 2.8 és 2.9-es tételekre a közönséges $Galton - Watson$ esetből. A következőkben vizsgáljuk azt a feltételes folyamatot, ahol a feltétel az, hogy a folyamat 1 valószínűséggel nem hal ki.

4.25. tétel. *Tegyük fel, hogy (A) teljesül. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:*

(i) *$\forall \varepsilon > 0$-ra, $\exists c < \infty$, hogy $P(X_n > c|X_n > 0) \leq \varepsilon$, $\forall n \geq 0$*

(ii) *$\exists c$, hogy $cm_n \leq P(X_n > 0) \leq m_n$, $\forall n \geq 0$, vagy ami azzal ekvivalens, hogy $\sup_{n\geq 0} E(X_n|X_n > 0) < \infty$*

(iii) *$\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\nu_k}{m_{k-1}} = O\left(\dfrac{1}{m_n}\right)$, ahogy $n \to \infty$*

Érdemes itt megemlíteni, hogy a $\pi < 1$ esetben a feltételek tulajdonképen abban az esetben fognak teljesülni, hogyha $0 < \lim_{n\to\infty} m_n < \infty$. Ezt szokás, nyers fordításban ragadós folyamatnak hívni, ugyanis nem tart a végtelenhez sem, de nullához sem. Ha $\pi = 1$, akkor már érdekesebb a helyzet, hiszen ha vissza emlékszünk, mind a Galton-Watson esetre, akkor észrevehetjük, hogy a feltételes folyamatnak, ha az szubkritikus, volt határeloszlása. Ebben az általános kontextusban ez viszont nem teljesülhet, amit a következő példával szeretnénk ismertetni:

4.26. *Példa.* Tekintsünk két külön utódeloszlást $\tilde{F}$ és $\hat{F}$-t, úgy hogy a határeloszlásuk pedig $\tilde{H}$ és $\hat{H}$ legyen, ahol ezek különbözzenek egymástól. Válasszunk egy természetesen számokból álló monoton növő sorozatot $0 = n_0 < n_1 < \dots$ és tekintsük az X_n elágazó folyamatot a $v = (F_1, F_2, \dots)$ változó környezetben, ahol legyen $F_n = \hat{F}$, akkor hogyha $n_{2k} < n \leq n_{2k+1}$, ahol $k \in \mathbb{N}_0$ és egyébként pedig $F_n = \tilde{F}$. Innen már világos, hogyha $(n_k)_{k\geq 0}$ elég gyorsan nő, akkor az $X_{n_{2k+1}}$ folyamat eloszlásban tart $\hat{h}$-hoz ha feltesszük, hogy $X_{n_{2k+1}} > 0$, illetve $X_{n_{2k}}$ pedig eloszlásban a $\tilde{h}$-hoz tart, hogyha $X_{n_{2k}} > 0$.

Az utolsó tétel, a konvergencia sebességről szól, ami a folyamat kihalását illeti:

4.27. tétel. *Tegyük fel, hogy* (A^*) *teljesül és* $\pi = 1$. *Továbbá tegyük fel azt is, hogy*

$$\frac{1}{m_n} = o\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{m_{k-1}}\right)$$

ahogy $n \to \infty$. *Ekkor igaz lesz a következő:*

$$P(X_n > 0) \sim 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{m_{k-1}}\right)^{-1}$$

ahogy $n \to \infty$. *Továbbá, ha az* a_n *folyamatot a következőképpen definiáljuk:*

$$a_n = \frac{m_n}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}} \text{ ,ahol } n \geq 1$$

akkor $a_n \to \infty$ *és*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n}{a_n} > x \middle| X_n \neq 0\right) = e^{-x}$$

Elevenítsük fel egy korábban már leírt formulát miszerint:

$$m_n = E(X_n) = E(X_n|X_n = 0)P(X_n = 0) + E(X_n|X_n \neq 0)P(X_n \neq 0) =$$

$$E(X_n|X_n \neq 0)P(X_n \neq 0)$$

Emlékezve korábbról, használjuk ismét a $\phi_n = P(X_n \neq 0)$ jelölést, illetve ζ-t a feltételes folyamatra. Ekkor:

$$\frac{\zeta_n}{E\zeta_n} = \frac{\zeta_n}{\frac{m_n}{\phi_n}}$$

Ebből látható, hogy a feltételes folyamat várható értéke hogyan reprezentálható. Ezt kifejtve:

$$\frac{m_n}{\phi_n} \sim \frac{m_n}{2(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{m_{k-1}})^{-1}}$$

Összevetve ezt és a tétel állításait, kapjuk hogy:

$$E\zeta_n = \frac{m_n}{\phi_n} = \frac{m_n}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}} = a_n$$

Ezzel a 3.15 tételben kapott formulához hasonló alakra hoztuk a bizonyítandó állítást.

Mielőtt rátérnénk a bizonyításhoz szükséges eszközök bemutatására, először gondoljuk meg, hogy a Galton-Watson folyamat esetében használt osztályozás, hogy öröklődik át a változó környezetbe. Feltételezve a $v = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ változó környezetet és az (A) feltétel teljesülését, a következőképpen sorolhatjuk osztályba a folyamatot:

szuperkritikus ha	$\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$ és $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{m_{k-1}} < \infty$
ragadós ha	$0 < \lim_{n\to\infty} m_n < \infty$ és $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{m_{k-1}} < \infty$
kritikus ha	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{m_{k-1}} = \infty$ és $\frac{1}{m_n} = o\big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}}\big)$
szubkritikus ha	$\lim_{n\to\infty} m_n = 0$ és $\sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}} = O\big(\frac{1}{m_n}\big)$

4.6. Eszközök

Ahogy említettük korábban, az általános elágazó folyamatok esetében a bizonyítások már nem vezethetőek végig egy egyenes fonal mentén, ezért először a megfelelő segédeszközöket mutatjuk be és csak azokat fogjuk bizonyítani, ahol a bizonyítás bizonyos lépései a későbbiekben is felhasználásra kerülnek.

4.28. Lemma. *Legyen g_1, g_2 két valószínűségi mérték az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ valószínűségi téren, melyeknek azonos a tartójuk és teljesítik a következőket: ha tetszőleges $y \in \mathbb{N}_0$-ra teljesül, hogy $g_1(y) > 0$, akkor érvényes lesz a következő összefüggés is*

$$\frac{g_1(z)}{g_1(y)} \leq \frac{g_2(z)}{g_2(y)} \text{ minden } z > y \text{ esetében}$$

Továbbá legyen, $\alpha : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ egy nemcsökkenő leképzés. Ekkor igaz lesz a következő:

$$\sum_{y=0}^{\infty} \alpha(y) g_1(y) \leq \sum_{y=0}^{\infty} \alpha(y) g_2(y) \tag{4.10}$$

Bizonyítás. Válasszunk először egy tetszőleges $y \geq 0$ úgy, hogy $g_1(y) > 0$ teljesüljön. Mivel g_1 és g_2 tartója közös, ezért $g_2(y) > 0$ is teljesül, illetve azt is tudjuk, hogy

$$\sum_{z \geq y} \frac{g_1(z)}{g_1(y)} \leq \sum_{z \geq y} \frac{g_2(z)}{g_2(y)}$$

Hiszen, ha külön-külön a tagokra érvényes, akkor azok összegére is érvényes marad a reláció. Most tegyük fel, hogy $\exists z < y$, hogy $g_1(z) > 0$. Ekkor a lemma feltételéből következik, hogy $g_1(y)/g_1(z) \leq g_2(y)/g_2(z)$. Ezeket ha összeadjuk az említett tartományon, az a következő egyenlőtlenséghez vezet:

$$\sum_{z < y} \frac{g_1(y)}{g_1(z)} \leq \sum_{z < y} \frac{g_2(y)}{g_2(z)}$$

Felhasználva az eddigieket a következő összefüggésre jutunk tetszőleges $y \in \mathbb{N}_0$-ra:

$$\frac{\sum_{z \geq y} g_1(z)}{1 - \sum_{z \geq y} g_1(z)} = \frac{\sum_{z \geq y} g_1(z)}{\sum_{z < y} g_1(z)} = \frac{\sum_{z \geq y} g_1(z)/g_1(y)}{\sum_{z < y} g_1(z)/g_1(y)} \leq \frac{\sum_{z \geq y} g_2(z)/g_2(y)}{\sum_{z < y} g_2(z)/g_2(y)} =$$

$$\frac{\sum_{z\geq y} g_2(z)}{\sum_{z<y} g_2(z)} = \frac{\sum_{z\geq y} g_2(z)}{1-\sum_{z\geq y} g_2(z)}$$

A mértékek pozitivitása továbbá a nevező és számlálóban elvégzett ekvivalens átalakítások miatt a második és harmadik egyenlőség mindig igaz lesz. Az egyenlőtlenségnél a számlálóban a lemma feltételét használtuk ki, a nevezőben pedig a bizonyítás során konstruáltat, azzal a módosítással hogy itt a reciprokokat tekintettük. Az előbbi egyenlőtlenségből pedig következik az is, hogy :

$$\sum_{z\geq y} g_1(z) \leq \sum_{z\geq y} g_2(z)$$

Amiből látszik, hogy minden $y \geq 0$-ra is igaz lesz ez az egyenlőtlenség, hiszen tetszőleges $y \geq 0$-ra bizonyítottuk be az állítást, így mindegyikre érvényes lesz.

Végezetül definiáljuk a $h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ leképzést úgy, hogy $\sum_{j=0}^{n} h(j) = \alpha(n)$, minden $n \geq 0$-ra. Ekkor elvégezhetőek a következő átalakítások:

$$\sum_{z=0}^{\infty} \alpha(z) g_1(z) = \sum_{z=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{z} h(j) g_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j) \sum_{z=j}^{\infty} g_1(z) \leq$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} h(j) \sum_{z=j}^{\infty} g_1(z) = \sum_{z=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{z} h(j) g_2(z) = \sum_{z=0}^{\infty} \alpha(z) g_2(z)$$

Ezzel beláttuk az állítást tetszőleges $z \geq y$-ra, amiből következik, hogy $z = y$-ra is igaz, amivel pedig a lemma bizonyítása teljes.

■

A következő lemma már kézzelfoghatóan közelebb visz (A) és (A^*) kapcsolatának formalizálásához.

4.29. Lemma. *Legyen az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ valószínűségi téren Y olyan valószínűségi változó, amelyik értékeit $\mathbb{N}_0$-ból veszi fel. Teljesül rá, hogy $0 < E(Y(Y-1)) < \infty$. Ekkor igaz lesz a következő:*

$$E(Y-1)^+ \geq \frac{2E(Y(Y-1))^2}{2E(Y(Y-1)) + E(Y(Y-1)(Y-2))} \tag{4.11}$$

$$\frac{E(Y(Y-1))}{E(Y)} \leq \frac{E(Y(Y-1)(Y-2))}{E(Y(Y-1))} + 1 \tag{4.12}$$

Bizonyítás. A bizonyítás kulcsa az 4.28 lemma alkalmazásában rejlik. Legyen Y valószínűségi változó eloszlása l és definiáljuk a g_1 és g_2 valószínűségi mértékeket a következőképpen:

$$g_1(y) = \frac{(y-1)l(y)}{\sum_{h\geq 2}(h-1)l(h)},\ g_2(y) = \frac{y(y-1)l(y)}{\sum_{h\geq 2} h(h-1)l(h)},$$

teljesüljön $y \geq 2$-re. Ezek a mértékek jól definiáltak, ami a lemma feltételéből következik, és teljesítik a 4.28 lemma feltételeit is, hiszen:

$$\frac{g_1(z)}{g_1(y)} = \frac{(z-1)l(z)\sum_{h\geq 2}(h-1)l(h)}{(y-1)l(y)\sum_{h\geq 2}(h-1)l(h)} = \frac{(z-1)l(z)\sum_{h\geq 2} h(h-1)l(h)}{(y-1)l(y)\sum_{h\geq 2} h(h-1)l(h)} \leq$$

$$\frac{z(z-1)l(z)\sum_{h\geq 2} h(h-1)l(h)}{y(y-1)l(y)\sum_{h\geq 2} h(h-1)l(h)} = \frac{g_2(z)}{g_2(y)}$$

igaz lesz minden $z > y$-ra, illetve $g_1(y) > 0$. Ekkor válasszuk meg $\alpha(y)$-t a következőképpen: $\alpha(y) = y$. Használva a 4.28 lemma állítását a következőt kapjuk:

$$\frac{\sum_{y\geq 2} y(y-1)l(y)}{\sum_{z\geq 2}(z-1)l(z)} \leq \frac{\sum_{y\geq 2} y^2(y-1)l(y)}{\sum_{z\geq 2} z(z-1)l(z)}$$

Ezt átírva ennek a lemmának a nyelvezetére, kapjuk az első állításunknak megfelelő egyenlőtlenséget:

$$\frac{E(Y(Y-1))}{E(Y-1)^+} \leq \frac{E(Y^2(Y-1))}{E(Y(Y-1))}$$

Egyszerű átalakításokkal könnyen visszanyerhető az első állítás. 4.12 belátásához is a 4.28 lemmát szeretnénk alkalmazni, csak a mérték megválasztása fog különbözni. Legyen most:

$$g_1(y) = \frac{yl(y)}{\sum_{z\geq 2} zl(z)},\ g_2(y) = \frac{y(y-1)l(y)}{\sum_{z\geq 2} z(z-1)l(z)}$$

$y \geq 2$-re. Az előzőhöz hasonlóan itt is könnyen belátható, hogy teljesülnek a 4.28 lemma feltételei. Most viszont válasszuk meg $\alpha(y)$-t a következőképpen: $\alpha(y) = (y-1)$, amivel a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$\frac{\sum_{y\geq 2} y(y-1)l(y)}{\sum_{z\geq 2} zl(z)} \leq \frac{\sum_{y\geq 2} y(y-1)^2 l(y)}{\sum_{z\geq 2} z(z-1)l(z)}$$

Ezt az eredményt is az aktuális lemma nyelvezetére átírva kapjuk, hogy:

$$\frac{E(Y(Y-1))}{E(Y|Y\geq 2)} \leq \frac{E(Y(Y-1)^2)}{E(Y(Y-1))}$$

Amiből, ha a jobb oldal számlálóját átírjuk $E(Y(Y-1)(Y-2)) + E(Y(Y-1))$ alakra, illetve észrevesszük, hogy a y alapvetően $y \geq 2$ tartományon volt definiálva, már következik a második állítás is.

■

A következő állítás már közelebb fog vinni ahhoz, hogy beláthassuk miért következik (A^*)-ból (A).

4.30. Állítás. *Legyen az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ valószínűségi téren Y olyan valószínűségi változó, amelyik értékeit $\mathbb{N}_0$-ból veszi fel, továbbá $c < \infty$ konstans pedig olyan, hogy teljesítse a következőt:*

$$E(Y(Y-1)(Y-2)) \leq cE(Y(Y-1))(1+E(Y)) \leq \infty$$

Ekkor a következő igaz lesz:

$$E(Y(Y-1)) \leq (3c+2)E(Y)E(Y-1|Y\geq 1) \tag{4.13}$$

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy az első összefüggés az (A) feltételnek, a második pedig az (A^*)-nak feleltethető meg. Tegyük fel, hogy $0 < E(Y(Y-1)) < \infty$. Esetszétválasztással fogunk operálni. Első esetben tegyük fel, hogy $E(Y) \leq 2$. Ezt kihasználva a feltételben, kapjuk a következő becslést:

$$E(Y(Y-1)(Y-2)) \leq 3cE(Y(Y-1))$$

Felhasználva ezt és a 4.11-et, kapjuk a következő becslést:

$$E(Y-1)^+ \geq \frac{2E(Y(Y-1))^2}{2E(Y(Y-1)) + E(Y(Y-1)(Y-2))} \geq \frac{E(Y(Y-1))}{2+3c}$$

amit egyszerű behelyettesítéssel értünk el. Mivel Y $\mathbb{N}_0$-ból veszi fel az értékeit, ezért $E(Y|Y \geq 1) \geq 1$ teljesülni fog. Tehát a korábbi egyenlőtlenséget kicsit átalakítva kapjuk, hogy:

$$E(Y(Y-1)) \leq (3c+2)E(Y-1)^+E(Y|Y \geq 1)$$

Ahol, ha megfigyeljük, hogy $(3c+2) = c_1$, akkor visszakapjuk az állítást erre az esetre. Nézzük a másik részét is, amikor $E(Y) \geq 2$. Felhasználva 4.12-t és a feltételt kapjuk a következőt:

$$\frac{E(Y(Y-1))}{E(Y)} \leq \frac{E(Y(Y-1)(Y-2))}{E(Y(Y-1))} + 1 \leq c(E(Y)+1) + 1 \leq \frac{3c+1}{2}E(Y)$$

Az utolsó becslésre a $3c$ konstans megjelenése miatt volt szükségünk. Az eddigiekből már következik, hogy:

$$E(Y(Y-1)) \leq \frac{3c+1}{2}E(Y)^2 \leq (3c+2)E(Y-1)^+E(Y|Y \geq 1)$$

ahol felhasználtuk a következő természetes becsléseket.

$$E(Y|Y \geq 1) \leq E(Y)\ ,\ E(Y-1)^+ \geq E(Y) - 1 \geq \frac{1}{2}E(Y)$$

Ezzel beláttuk, amit szerettünk volna, hogy alkalmas helyen elég az (A^*) feltételt is használni, mert abból következik az (A).

■

Most két példával fogom ezt a viszonyt a két feltétel között bemutatni. Alapvetően nem tűnik egyértelműnek, hogy az (A^*) olyan könnyen teljesíthető feltétel, de mégsem kell túl bonyolult eloszlású valószínűségi változókat tekinteni, amik teljesítik. Mind a Poisson, a Binomiális, a Hipergeometrikus vagy a Negatív binomiális esetében teljesül a 4.30. Lássuk

be szemléltetésképpen kicsit részletesebb is a Negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó esetére.

4.31. *Példa.* Legyen Z negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor a generátor függvény $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ és $0 < p < 1$ mellett ismert, mégpedig:

$$g(s) = \left(\frac{p}{1 - s(1-p)}\right)^{\alpha}$$

Ebből kiszámolva a faktoriális momentumokat a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} g^{'}(1) = &\quad E(Z) = \alpha(1-p)/p \\ g^{''}(1) = &\quad E(Z(Z-1)) = \alpha(\alpha+1)((1-p)/p)^2 \\ g^{'''}(1) = &\quad E(Z(Z-1)(Z-2)) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)((1-p)/p)^3 \end{aligned}$$

Ezeket az eredményeket összerakva, könnyen adódik az (A^*) teljesülése

$$E(Z(Z-1)(Z-2)) \leq 3E(Z(Z-1))(1 + E(Z))$$

Amiből már az (A) is következik a 4.30-nak köszönhetően.

4.32. *Példa.* Ebben a példában legyen Z geometriai eloszlású valószínűségi változó. Ebben az esetben is ismerjük a generátor függvény, ami a következő:

$$g(s) = \left(\frac{ps}{1 - s(1-p)}\right)$$

Ebben az esetben is tekintsük a a faktoriális momentumokat:

$$\begin{aligned} g^{'}(1) = &\quad E(Z) = 1/p \\ g^{''}(1) = &\quad E(Z(Z-1)) = 2((1-p)/p^2) \\ g^{'''}(1) = &\quad E(Z(Z-1)(Z-2)) = 1 + ((1 + 5(1-p))/p^3) \end{aligned}$$

Tehát a következő egyenlőtlenségre keresünk megoldást c-ben fix $0 < p < 1$ mellett:

$$1 + ((1 + 5(1-p))/p^3) \leq c2((1-p)/p^2)(1 + 1/p)$$

Amiből rövid átalakítások után kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{2}\frac{p^3+3(1-p)+1}{p(1-p)} \leq c$$

Innen láthatjuk, hogy ebben az esetben is teljesül a 4.30, például $p = 0.5$-re $c = 6$-al.

Szükségünk lesz még egy jelölés bevezetésére a bizonyítások előtt. Ehhez emlékezzünk vissza, hogy egy valószínűségi változó várható értéke, amit jelöljön m a későbbiekben, meghatározható mint a generátor függvény első deriváltja az 1 helyen: $m = f^{'}(1)$, ahol $0 < m < \infty$. Legyen továbbá $\phi = \phi_f : [0,1) \to \mathbb{R}$ leképzés, ami a következő egyenletet határozza meg.

$$\phi(s) = \frac{1}{1-f(s)} - \frac{1}{m(1-s)},\ 0 \leq s < 1 \tag{4.14}$$

Tudjuk az $f(s)$ generátor függvényről, hogy második deriváltja s szerint pozitív, tehát $f(s)$ konvex. Emiatt azt is tudjuk, hogy $\phi(s) \geq 0$ teljesül minden $0 \leq s < 1$-re. Most fejtsük f-et másodrendben sorba 1 körül, ami egyszerű számolással a következőhöz vezet:

$$\lim_{s\to 1}\phi(s) = \frac{1}{2}\frac{f^{''}(1)}{f^{'}(1)^2} \tag{4.15}$$

Mivel ezt az eredményt később is felhasználjuk, ezért röviden végigvezetjük az említett számolást. Elsősorban csak a 4.14 formulát alakítjuk át, és behelyettesítjük a sorfejtésre kapott eredményt.

$$\left[\phi(s) + \frac{1}{m(s-1)}\right] - \left[f^{'}(1)(s-1) + \frac{f^{''}(1)}{2}(s-1)^2\right] = 1$$

Itt kihasználtuk, hogy $f(1) = 1$. Most végezzük el a beszorzást, és rendezzük egy kicsit át, figyelembe véve, hogy $m = f^{'}(1)$.

$$-\phi(s)\left[f^{'}(1)(s-1) + \frac{f^{''}(1)}{2}(s-1)^2\right] + \phi(s)f(1) - \phi(s)f(1) = -\frac{f^{''}(1)}{2f^{'}(1)}(s-1)$$

Itt látható, hogy arra törekszünk, hogy az $f(s)$ alakot visszaírjuk. Miután ezt megtettek, osszunk le $f^{'}(1)(s-1)$-el.

$$\phi(s)\left[\frac{f(1)-f(s)}{f'(1)(s-1)}\right] = -\frac{1}{2}\frac{f''(1)}{f''(1)^2}$$

Innen pedig már látszik, hogyha kibontjuk a bal oldalt a sorfejtés segítségével, egyszerűsítünk, illetve elvégezzük a határátmenetet, akkor pontosan a 4.15 formulát kapjuk. A korábbi jelöléseink mellett az említett formulában kapott mennyiséget úgy is írhatjuk mint $\nu/2$. Ehhez kapcsolódóan két további lemmát közlünk:

4.33. Lemma. *Tegyük fel, hogy $f''(1) < \infty$. Ekkor minden $0 \leq s \leq 1$-re teljesül a következő:*

$$\frac{1}{2}\phi(0) \leq \phi(s) \leq 2\phi(1) \tag{4.16}$$

4.34. Lemma. *Tegyük fel, hogy $f'''(1) < \infty$. Ekkor minden $0 \leq s \leq 1$-re teljesül a következő:*

$$-\frac{f''(1)^2}{f'''(1)^3} \leq \phi'(s) \leq \frac{2}{3}\frac{f'''(1)}{f'(1)^2} + 2\frac{f''(1)^2}{f'(1)^3} \tag{4.17}$$

További lemmák előtt, érdemes visszaemlékezni, hogy $k \leq n$ egész szám esetén a generátor függvény a következő módon jellemezhető:

$$f_{k,n} = f_{k+1} \circ \cdots \circ f_n$$

4.35. Lemma. *Az (X_n, v) elágazó folyamatra a következő teljesül $E(X_n) = m_n$ mellett:*

$$\frac{E(X_n(X_n-1))}{E(X_n)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}}$$

Bizonyítás. A bizonyítás egyszerű, hiszen tekintsük az $f_{k,n}$ deriváltját:

$$f'_{k,n}(s) = \prod_{l=k+1}^{n} f'_l(f_{l,n}(s))$$

Továbbá tekintsük a második deriváltat is:

$$f''_{k,n}(s) = f'_{k,n}(s)^2 \sum_{l=k+1}^{n} \frac{f''_l(f_{l,n}(s))f'_l(f_{l,n}(s))}{f'_l(f_{l,n}(s))^2 \prod_{j=k+1}^{l-1} f'_j(f_{j,n}(s))}$$

Ha ezt a $k = 0$ és $s = 1$ helyen tekintjük, valamint elvégezzük a megfelelő átosztást, akkor visszakapjuk az állítást:

$$\frac{E(X_n(X_n-1))}{E(X_n)^2} = \frac{f''_{0,n}(s)}{f'_{0,n}(s)^2} = \sum_{l=1}^{n} \frac{f''_l(1)}{f'_l(1)\prod_{j=1}^{l-1} f'_j(1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}}$$

■

A következő lemma előtt elevenítsük fel még a Galton-Watson esetből a következő összefüggést: $f_{k,n} = f_{k+1} \circ f_{k+1,n}$ minden k<n-re.

4.36. Lemma.

$$\frac{1}{1-f_{k,n}(s)} = \frac{m_k}{m_n(1-s)} + m_k \sum_{l=k+1}^{n} \frac{\phi_l(f_{l,n}(s))}{m_{l-1}},\ 0 \le s < 1,\ 0 \le k < n$$

A bizonyítása a [7]-es cikkben is előjön, de egyszerűen belátható az eddigi eszközök segítségével:

Bizonyítás. Kiindulva az egyenlőség bal oldalából, olyan átalakításokat szeretnénk végezni, hogy a kívánt összefüggés kijöjjön.

$$\frac{1}{1-f_{k,n}(s)} = \frac{m_k}{m_n(1-f_{n,n}(s))} + \sum_{l=k+1}^{n} \left(\frac{m_k}{m_{l-1}(1-f_{l,n}(s))} - \frac{m_{k+1}}{m_l(1-f_{l+1,n}(s))} \right) =$$

$$\frac{m_k}{m_n(1-s)} + m_k \sum_{l=k+1}^{n} \frac{\phi_l(f_{l,n}(s))}{m_{l-1}}$$

Az első lépésben átalakítottuk teleszkopikus összeggé, ahol kihasználtuk ismét, hogy a k időpontban indított folyamat várható értéke egy rögzített $n \ge k$ időpontban m_n/m_k. A második lépésben pedig felhasználtuk, hogy $f_{n,n}(s) = s$, illetve a 4.14 formulát. A lemmát ezzel be is bizonyítottuk.

■

Tekintsük az utolsó eszközt is, ami szükséges, hogy az az első tétel bizonyítását teljesen végig vihessük.

4.37. Lemma. *Ha (A) teljesül, akkor létezik olyan $c < \infty$ konstans, hogy minden $n \geq 0$-ra:*

$$\frac{E(X_n)^2}{E(X_n^2)} \leq P(X_n > 0) \leq c\frac{E(X_n)^2}{E(X_n^2)}$$

Bizonyítás. Mivel feltettük, hogy a a folyamat varianciája véges, ezért alkalmazhatjuk a $Paley - Zygmund$ egyenlőtlenséget, ami a következő:

$$P(X_n > \theta E(X_n)) \geq (1-\theta)^2 \frac{E(X_n)^2}{E(X_n^2)}$$

$\theta = 0$ helyen ez pontosan a baloldali egyenlőtlenségnek felel meg. Emlékezzünk vissza, hogy a $P(X_n > 0)$ ugyanazt a mennyiséget jelöli, mint az $1 - f_{0,n}(0)$. Ezt és a 4.36-os lemmát felhasználva az $s = 0$ helyen kapjuk a következőt:

$$\frac{1}{P(X_n > 0)} = \frac{1}{m_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\phi_k(f_{k,n}(0))}{m_{k-1}} \tag{4.18}$$

Hiszen feltettük, hogy 1 egyedből indulunk így $m_0 = 1$. Használva a 4.33-as lemmát ezt alulról tudjuk becsülni:

$$\frac{1}{P(X_n > 0)} \geq \frac{1}{m_n} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\phi_k(0)}{m_{k-1}} \tag{4.19}$$

Most használjuk fel a 4.14-es formulát:

$$\phi_k(0) = \frac{1}{1 - f_k(0)} - \frac{1}{f_k'(1)}$$

Közös nevezőre hozva és kihasználva, hogy a kihalás nem egy valószínűséggel következik be, a következőt láthatjuk:

$$\phi_k(0) = \frac{E((Z_k - \mathbb{1}_{\{Z_k > 0\}})^+)}{P(Z_k > 0)E(Z_k)}$$

A következőben felhasználjuk a 4.30-as állításban szereplő (A) feltétel alakját és ν_k definícióját:

$$\frac{1}{P(X_n > 0)} \geq \frac{1}{m_n} + \frac{1}{2c_1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}} \geq \frac{1}{c}\left(\frac{1}{m_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}}\right) \tag{4.20}$$

$c = \max(1, 2c_1)$ mellett. Felhasználva az 4.35-ös lemmát, ezt tovább alakíthatjuk:

$$\frac{1}{P(X_n > 0)} \geq \frac{1}{c}\left(\frac{1}{m_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{E(X_n(X_n-1))}{E(X_n)^2}\right) = \frac{1}{c}\frac{E(X_n^2)}{E(X_n)^2} \tag{4.21}$$

Ahonnan már csak egy reciprok vételre van szükségünk és visszakapjuk a kívánt állítást.

■

4.38. Lemma. *Tegyük fel, hogy (A^*) teljesül és $q = 1$. Továbbá tegyük fel azt is, hogy*

$$\frac{1}{m_n} = o\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{m_{k-1}}\right)$$

ahogy $n \to \infty$. Ekkor igaz lesz a következő:

$$\sup_{0 \leq s \leq 1} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\phi_k(f_{k,n}(s))}{m_{k-1}} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}} \right| = o\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}}\right),$$

amint $n \to \infty$.

Most már minden eszköz a kezünkbe van, hogy mind a 4 tétel bebizonyítását levezethessük.

4.7. Eredmények

4.21 Tétel bizonyítása. Kezdjük $(i) - (ii)$ ekvivalenciájának bizonyításával. Definíció szerint $\lim_{n\to\infty} P(X_n > 0) = 1 - \pi$-nek felel meg. Tudjuk korábbi tanulmányokból, hogy $E(X_n)^2 = o(E(X_n^2))$ azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} E(X_n)^2/E(X_n^2) = 0$. Felhasználva a 4.37-es a következő adódik $\pi = 1$ mellett: $\lim_{n\to\infty} P(X_n > 0) = 0$. Mivel tudjuk, hogy a várható érték négyzete és a négyzet várható értéke is nem negatív mennyiség, ezért:

$$\frac{E(X_n)^2}{E(X_n^2)} = 0,\ n \to \infty,$$

Ebből pedig már következik (ii). A megfordításhoz elég azt meggondolni, hogy a 4.37-es lemmában szereplő formula jobb és bal oldala is nullához tart, ekkor a $P(X_n > 0)$ is nullához tart, tehát $\pi = 1$ $n \to \infty$ mellett.

A $(ii) - (iii)$ ekvivalenciájához kezdjük el a (iii) állítást vizsgálni.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k}{m_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k + f_k'(1)^{-1} - 1}{m_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_{k-1}} \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}} + \frac{1}{m_n} - 1$$

Az első egyenlőségnél pusztán a ρ_n definícióját írtuk be, a harmadik egyenlőségnél kihasználtuk, hogy a teleszkopikus összeg utolsó és első tagja marad meg, illetve felhasználva az 4.21-es számolás eredményét azt kapjuk, hogy:

$$\frac{E(X_n^2)}{E(X_n)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k}{m_{k-1}} + 1 \tag{4.22}$$

Ami pont azt jelenti, hogy ha az egyik oldal tart végtelenhez, akkor abból következően a másik is. A $(iii) - (iv)$ ekvivalenciájához nem is kell semmi többet feltenni, hanem kijön az előző bizonyításából:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k}{m_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}} + \frac{1}{m_n} - 1$$

Itt szintén triviális, hogyha az egyik oldal tart végtelenhez, akkor a másik is. Ezzel beláttuk, hogy $(i) - (iv)$ ekvivalensek. Most vizsgáljuk meg a tétel második felét, $(v) - (viii)$ ekvivalenciáját. Ezekre tulajdonképpen elég lenne annyit mondani, hogy a bizonyítás első feléből következik, de egy rövid magyarázatot tűzünk mellé. Az $(v) \iff (vi)$ hasonlóan a 4.37-ből következik. Felhasználjuk, hogy $E(X_n^2) = O(E(X_n)^2)$ azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} E(X_n^2)/E(X_n)^2 \leq C$, ahol $0 \leq C < \infty$:

$$C\frac{E(X_n^2)}{E(X_n)^2} \leq \frac{1}{P(X_n > 0)} \leq \frac{E(X_n^2)}{E(X_n)^2}$$

Vagyis ha (vi) igaz, akkor az egyenlőtlenség két vége korlátos, tehát $\pi < 1$. Ha viszont az alapfeltétel az, hogy (v) teljesül, akkor mivel az egyenlőtlenség két oldala egymás konstans szorosa, ezért mindkettő végessége szükséges. A $(vi) \iff (vii)$ a $(ii) \iff (iii)$-nél felhasznált 4.22-es egyenlőségből következik. Hiszen ha $\lim_{n\to\infty} E(X_n^2)/E(X_n)^2 < C < \infty$ és $C \neq 0$, abból már adódik, hogy $1/C < \infty$. A $(vii) \iff (viii)$ is következik a $(iii) \iff (iv)$-ből, és ezzel a tételt beláttuk. ■

Itt érdemes megemlíteni, hogy a [5]-ös cikkben az elágazó folyamat kihalási valószínűségével kapcsolatban volt egy sejtés:

4.39. Sejtés. *A folyamat* 1 *valószínűséggel kihal, hogyha teljesül a következő:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{P(X_k = 0)}{m_k} = \infty$$

Ahogy láttuk a 4.19-ben, az 1 valószínűségű kihalás elégséges feltétele a következő:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\phi_k(0)}{m_{k-1}} = \infty$$

Ezt kicsit átalakítva már következik a sejtés bizonyítása is:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{m_{k-1}}\left(\frac{1}{1-f_k(0)} - \frac{1}{f_k'(1)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{m_{k-1}}\frac{1}{1-f_k(0)} - \frac{1-f_k(0)}{(1-f_k(0))m_k}\right) \geq$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-f_k(0)}\left(\frac{1}{m_{k-1}} - \frac{1}{m_k}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(0)}{m_k}$$

Ahol az utolsó tagban megjelenik a *Jirina* sejtésben előjövő tag. Ha $n \to \infty$, akkor annak a szummának a degeneráltságából is következik a folyamat 1 valószínűségű kihalása.

4.24 Tétel bizonyítása. Ahhoz, hogy belássuk az (i) állítást, emlékezzünk vissza a következőkre:

$$W = \lim_{n\to\infty} W_n = \lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{m^n} \text{ és } \pi = P(X_\infty = 0)$$

Ebből egyértelműen következik, hogyha $\pi = 1$, akkor $W = 0$ m.m. (ii) bizonyítását bontsuk két részre. Először lássuk be az első állítását. Ehhez használjuk ki 4.21-es tétel (vi) állítását, miszerint $E(X_n^2) = O(E(X_n)^2)$, amiből következik, hogy $\sup_{n\geq 0} E(X_n^2) < \infty$. Ugyanez természetesen igaz lesz W_n-re is. Kihasználva W_n martingálságát ez azt jelenti, hogy W_n négyzetesen integrálható martingál, amiből következik, hogy:

$$E(W) = E(W_0) = 1$$

Ez igaz lesz, hiszen feltettük, hogy $X_0 = 1$. Az (ii) állítás második részéhez az m_n szerinti esetszétválasztással szeretnénk bizonyítani. Használjuk fel az 4.21-es tétel $(viii)$ állítását, miszerint $\exists 0 < r \leq \infty : m_n \to r$ és $\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k/m_{k-1} < \infty$. Az első esetben legyen $0 < r < \infty$. Ekkor:

$$P(W = 0) = P(\lim_{n\to\infty} W_n = 0) = P(\lim_{n\to\infty} X_n/m_n = 0) =$$

$$P(X_\infty/r = 0) = P(X_\infty = 0) = \pi$$

Ami pontosan az, amit szerettünk volna. Most lássuk be ugyanezt az $r \to \infty$ esetre. Emlékszünk arra, hogy $\{X_\infty = 0\} \subset \{W = 0\}$. Ebből következően pedig elég belátni, hogy $P(X_\infty > 0, W = 0) = 0$. Ehhez először a $P(X_\infty = 0|X_k = 1)$ valószínűséget szeretnénk becsülni. Emlékezhetünk arra, hogy $P(X_n = 0) = 1 - P(X_n > 1) = f_{0,n}(0)$. Ezt felhasználva a következő becslésre jutunk $k < n$ mellett:

$$\frac{1}{1 - P(X_n = 0|X_k = 1)} = \frac{1}{1 - f_{k,n}(0)} \geq \frac{m_k}{m_n(1-s)} + m_k \sum_{l=k+1}^{n} \frac{\phi_l(f_{l,n}(s))}{m_{l-1}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} m_n \sum_{l=k+1}^{n} \frac{\phi_l(0)}{m_{l-1}}$$

Ahol az első egyenlőtlenséget a 4.36-os lemmából ismerjük, a második egyenlőtlenség pedig a 4.33-as lemmából következik, amiből a $\frac{1}{2}\phi(0) \leq \phi(s)$ részt alkalmaztuk. Ugyanebből az elgondolásból igaz a következő is $\lambda > 0$ és az $s = e^{-\lambda W_n}$ helyettesítés mellett:

$$\frac{1}{1-E(e^{-\lambda W_n}|X_k=1)} = \frac{1}{1-f_{k,n}\big(e^{-\frac{\lambda}{m_n}}\big)} = \frac{m_k}{m_n\big(1-e^{-\frac{\lambda}{m_n}}\big)} + m_k \sum_{l=k+1}^{n} \frac{\phi_l\big(f_{l,n}\big(e^{-\frac{\lambda}{m_n}}\big)\big)}{m_{l-1}} \leq$$

$$\leq \frac{m_k}{m_n\big(1-e^{-\frac{\lambda}{m_n}}\big)} + 2m_k \sum_{l=k+1}^{n} \frac{\phi_l(1)}{m_{l-1}}$$

Annyi különbséggel az előzőhöz képest, hogy itt az 4.33-as lemma $\phi(s) \leq 2\phi(1)$ részét alkalmaztuk. A következőkben felhasználjuk a 4.15-ös összefüggést miszerint $\phi_l(1) = \nu_l/2$, illetve a 4.20-as összefüggést a 4.37-es lemmából:

$$\frac{1}{1-E(e^{-\lambda W_n}|X_k=1)} = \frac{m_k}{m_n\big(1-e^{-\frac{\lambda}{m_n}}\big)} + m_k \sum_{l=k+1}^{n} \frac{\nu_l}{m_{l-1}}$$

$$\leq \frac{m_k}{m_n\big(1-e^{-\frac{\lambda}{m_n}}\big)} + \frac{2C}{1-P(X_n=0|X_k=1)}$$

Most tartsunk n-el a végtelenbe és használjuk ki, hogy $\lim_{n\to\infty} m_n(1-e^{-\frac{\lambda}{m_n}}) \to \lambda$

$$\frac{1}{1-E(e^{-\lambda W}|X_k=1)} \leq \frac{m_k}{\lambda} + \frac{2C}{1-P(X_\infty=0|X_k=1)}$$

Ha lambdával is tartunk a végtelenbe, akkor:

$$\frac{1}{P(W>0|X_k=1)} \leq \frac{2C}{1-P(X_\infty=0|X_k=1)}$$

Most használjuk ki, hogy $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$-re $e^{-2x} \leq 1-x$ teljesül, ekkor ha feltesszük, hogy $P(W>0|X_k=1) \leq (4C)^{-1}$, akkor igaz lesz a következő:

$$P(X_\infty=0|X_k=1) = 1-P(X_\infty>0|X_k=1) \geq 1-2CP(W>0|X_k=1) \geq$$

$$e^{-4CP(W>0|X_k=1)} \geq (1-P(W>0|X_k=1))^{4C} = P(W=0|X_k=1)^{4C}$$

Definiáljuk most a következő M_n martingált:

$$M_n = P(W=0|X_1,\ldots,X_n) = P(W=0|X_1)^{X_n}$$

Erről ugyanúgy megmutatható, hogy martingál, mint ahogy a 3.10-es tétel bizonyítása során tettük. Tudjuk még azt is, hogy $M_n \to 1$ m.m. a $\{W = 0\}$ halmazon. A bizonyítás befejezéséhez két esetet kell megvizsgálni. Az egyik esetben $P(W > 0|X_k = 1) > (4C)^{-1}$. Ezt összerakva az M_n-el kapcsolatos eddigi eredményünkkel kapjuk, hogy $X_n \to 0$ m.m. a $\{W = 0\}$ halmazon. Különben használva a $P(W > 0|X_k = 1) \leq (4C)^{-1}$-el kapcsolatos eddigi eredményeinket kapjuk, hogy $P(X_\infty = 0|X_1)^{X_n} \to 1$ m.m. a $\{W = 0\}$ halmazon. Most legyen $\varepsilon > 0$ és n elég nagy:

$$P(X_\infty > 0|W = 0) \leq \varepsilon + P(X_n > 0, P(X_\infty = 0|X_1)^{X_n} \geq 1 - \varepsilon) \leq$$

$$\leq \varepsilon + \frac{1}{1-\varepsilon} E(P(X_n\infty = 0|X_n)|X_n > 0) = \varepsilon + \frac{1}{1-\varepsilon} P(X_\infty = 0|X_n > 0)$$

Ha n-el tartunk a végtelenbe, akkor azt kapjuk, hogy $P(X_\infty > 0|W = 0) \leq \varepsilon$, ahonnan $\varepsilon \to 0$-ból következik az állítás.

■

4.25 Tétel bizonyítása. Felhasználva azt a tudásunkat, hogy az eloszlás függvény és a generátor függvény kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást, ezért az (i) pontban szereplő eloszlás generátor függvényéből indulhatunk ki:

$$E(1 - s^{X_n}|X_n > 0) = \frac{1 - f_{0,n}(s)}{1 - f_{0,n}(0)} = \frac{\frac{1}{m_n} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\phi_l(f_{0,n}(0))}{m_{k-1}}}{\frac{1}{m_n(1-s)} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\phi_l(f_{0,n}(s))}{m_{k-1}}} \geq$$

$$\frac{\frac{1}{m_n} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \frac{\phi_l(0)}{m_{k-1}}}{\frac{1}{m_n(1-s)} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \frac{\phi_l(0)}{m_{k-1}}} \geq \frac{\frac{1}{2C}\sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}}}{\frac{1}{m_n(1-s)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}}}$$

Az első egyenlőségnél egyszerűen a generátor függvény átalakítási lehetőségét használtuk ki, a másodiknál pedig a 4.36-os lemmát alkalmaztuk. Ezután a 4.33-as lemma segítségével becsültünk és végül a 4.37-es lemma bizonyítása során kapott 4.20-as formulával és további egyszerűsítéssel megkaptuk a végső alsó becslést. Mivel a fenti lemmák a $0 \leq s < 1$ esetre teljesülnek, ezért ki tudjuk használni a 4.24-es tétel bizonyítása során használt becslést, miszerint a $E(1 - s^{X_n}|X_n > 0) \leq (4C)^{-1}$:

$$\frac{1}{4C} \geq \frac{\frac{1}{2C}\sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}}}{\frac{1}{m_n(1-s)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}}}$$

Amit átrendezve a következő becsléshez jutunk:

$$\frac{1}{m_n(1-s)} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}}$$

Ami pont azt jelenti, hogy:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{m_{k-1}} = O\left(\frac{1}{m_n}\right), \text{ ahogy } n \to \infty$$

Ezzel tehát beláttuk, hogy (i)-ből következik (iii). Most vizsgáljuk meg a $(iii) \to (ii)$-t.

$$1 \leq E(X_n|X_n > 0) = \frac{m_n}{P(X_n > 0)} \leq \frac{m_n}{E(X_n)^2/E(X_n^2)} = 1 + m_n \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}}$$

Ahol az első egyenlőtlenségnél a $Paley-Zigmund$ formulát alkalmaztuk, az utolsó egyenlőségnél pedig a 4.37-es lemma 4.21-es számolásnál nyert eredményt. Ha n-ben szuprémumot veszünk a reláció nem változik, amivel beláttuk, hogy $\sup_n E(X_n|X_n > 0) < \infty$, ami a (ii) Végezetül pedig lássuk be, hogy $(ii) \to (i)$. Ez könnyen belátható a feltételes valószínűség különböző ekvivalens formáinak segítségével.

$$P(X_n > c|X_n > 0) = \frac{P(X_n > 0|X_n > c)P(X_n > c)}{P(X_n > 0)} \leq \frac{P(X_n > c)}{c_2 m_n} \leq \varepsilon$$

Ebből pedig már látszik, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz találunk olyan c_2-t, amely teljesíti a következőt $P(X_n > c|X_n > 0) \leq \varepsilon$.

■

4.27 Tétel bizonyítása. A bizonyítást a 4.37-es lemma 4.18-as formulájának segítségével kezdjük.

$$\frac{1}{P(X_n > 0)} = \frac{1}{m_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\phi_k(f_{k,n}(0))}{m_{k-1}}$$

Most használjuk fel a tétel feltételeit, amik megegyeznek a 4.38-as lemma feltételeivel, illetve helyettesítsünk vissza a 4.38-as lemmába és akkor megkapjuk az első állítást:

$$\frac{1}{P(X_n > 0)} \sim \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}}$$

A továbbiakban használjuk fel ismét a 4.24-es tételben alkalmazott gondolatmenetet, miszerint az eloszlás helyett a generátor függvényből szeretnénk kiindulni.

$$1 - E(e^{-\lambda X_n/a_n}|X_n > 0) = \frac{1 - f_{0,n}(e^{-\lambda/a_n})}{1 - f_{0,n}(0)} = \frac{\frac{1}{m_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\phi_k(f_{k,n}(0))}{m_{k-1}}}{\frac{1}{m_n(1-e^{\lambda/a_n})} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\phi_k(f_{k,n}(e^{-\lambda/a_n}))}{m_{k-1}}}$$

A második egyenlőségnél a 4.36-os lemmát alkalmaztuk. Továbbá definiáljuk a_n-et a következőképpen: $a_n = (m_n/2)\sum_{k=1}^{n}(\nu_k/m_{k-1})$. A tétel feltevései alapján tudjuk, hogy ebben az esetben $\lim_{n\to\infty} a_n \to \infty$. A továbbiakban használjuk fel a tétel feltételeit:

$$1 - E(e^{-\lambda X_n/a_n}|X_n > 0) = \frac{(1+o(1))\sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{2m_{k-1}}}{(1+o(1))\frac{a_n}{\lambda m_n} + (1+o(1))\sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{2m_{k-1}}}$$

Felhasználtuk azt is, hogy $a_n \to \infty$ mellet tudjuk a következőt: $1 - exp(-\lambda/a_n) \to \lambda/a_n$. Most helyettesítsük be a pár sorral korábban leírt a_n képletét, és egyszerűsítsünk le.

$$1 - E(e^{-\lambda X_n/a_n}|X_n > 0) = \frac{\lambda + o(1)}{1 + \lambda}$$

Ezt átalakítva megkapjuk a következőt:

$$E(e^{-\lambda X_n/a_n}|X_n > 0) = \frac{1 + o(1)}{1 + \lambda}$$

Ami pont az mint amit szerettünk volna, hiszen visszakaptuk a standard exponenciális eloszlás Laplace transzformáltját, és mivel ez minden λ-ra teljesül így a tételt is bebizonyítottuk.

■

4.8. Sejtek rezisztenciájának modellezése

A szakirodalomban számos példa szerepel azzal kapcsolatban, hogy különböző a biológiában, illetve orvostudományban felmerülő problémák miképpen modellezhetőek elágazó folyamatok segítségével. A példa amit be szeretnék mutatni, az egy génnek a sejten belüli számosságának növekedésével kapcsolatos. [8] Ezen belül is az olyan géneket tekintjük,

amik a dihydrofolát reduktáz nevű enzim (DHFR) kódolásával foglalkoznak, mivel ennek az enzimnek a viselkedéséből kutatások során következtettek az egészséges sejtek ráksejtekkel szembeni viselkedésének jellegére. Kimutatták, hogy a metotrexáttal kezelt daganatos betegek szervezetében kialakulhat egy a kezelésre rezisztens sejt populáció, amelynek jellemzője az említett gének magas számossága, ami által egy újabb kezelés már nem lenne hatékony. Ennek a problémának a megoldására elméletben az az ötlet fogant meg, miszerint a kezelés által érintett területből a rezisztens sejtpopulációt áttelepíteni, arra a részére a szervezetnek, ami nem állt kezelés alatt. Az ezt követő génpopuláció fogyás, vagyis rezisztencia csökkenés a következőképpen modellezhető:

4.8.1. A modell

Jelölje Z_n annak a számosságát, hogy az n. generációban hány darab DHFR található egy sejtben. A sejt élete során a DHFR vagy klónozódik a valószínűséggel, vagy nem $(1-a)$ valószínűséggel. Később mikor a sejtosztódás bekövetkezik, akkor ha a DHFR nem lett klónozva, úgy 0.5 valószínűséggel öröklődik az utód sejtbe, ha pedig klónozva lett, akkor egyenlő valószínűséggel kerül mindkét enzim vagy az egyik vagy a másik utód sejtbe,aminek az értéke $\alpha/2$, illetve $(1-\alpha)$ valószínűséggel egyenlően megoszlanak az utódsejtek között. Tehát a sejtosztódást követően:

$$\begin{cases} \frac{1-a}{2} + \frac{a\alpha}{2} & \text{valószínűséggel nem öröklődik az utódsejtebe enzim} \\ \frac{1-a}{2} + a(1-\alpha) & \text{valószínűséggel egy darab öröklődik az utódsejtbe enzim} \\ \frac{a\alpha}{2} & \text{valószínűséggel két darab öröklődik az utódsejtbe enzim} \end{cases}$$

Ezekből az utódlási valószínűségekből megkonstruálható Z_n generátor függvénye is, ami legyen a következő:

$$g_n(s) = d_n + (1 - b_n - d_n)s + b_n s^2$$

Ahol $b_n = a_n\alpha_n/2$ és $d_n = (1-a_n)/2+a_n\alpha_n/2$. Szemügyre véve a korábbi valószínűségeket, ez a két jelölés a populáció számosságának növekedését és csökkenést jellemzik. Külső beavatkozás nélkül fokozatosan eltűnnek a DHFR kódoló gének a sejt populációból, ami

az jelenti, hogy $d_n > b_n$, ezáltal pedig egy szubkritikus folyamatról beszélünk. Tegyük fel továbbá, hogy Z_n eloszlása $n \geq 1$-re változó, de $m_n < 1$ mindig igaz lesz rá. Most vizsgáljuk meg a 4.30 feltételt:

$$\begin{aligned} g_n^{'}(1) = &\quad E(Z_n) = 1 + b_n - d_n \\ g_n^{''}(1) = &\quad E(Z_n(Z_n - 1)) = 2b_n \\ g_n^{'''}(1) = &\quad E(Z_n(Z_n - 1)(Z_n - 2)) = 0 \end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy a feltétel tetszőleges $c \geq 0$-ra teljesül. Mivel $\lim_{n\to\infty} m_n = 0$, ezért a 4.21-ből tudjuk, hogy ez a folyamat 1 valószínűséggel kihal. A korábbi jelöléseknek megfelelő eredményt is kiírjuk a könnyebb hivatkozás érdekében:

$$\begin{aligned} \nu_n = &\quad \tfrac{2b_n}{(1+b_n-d_n)^2} \\ \rho_n = &\quad \nu_n + \tfrac{1}{1+b_n-d_n} - 1 \end{aligned}$$

A 4.24-es tételből tudjuk, hogy az 1 valószínűségű kihalásból következik, hogy $n \to \infty$ mellett a normalizált folyamat tart a nullához. 4.25-ös tételből könnyen belátható (iii), hiszen:

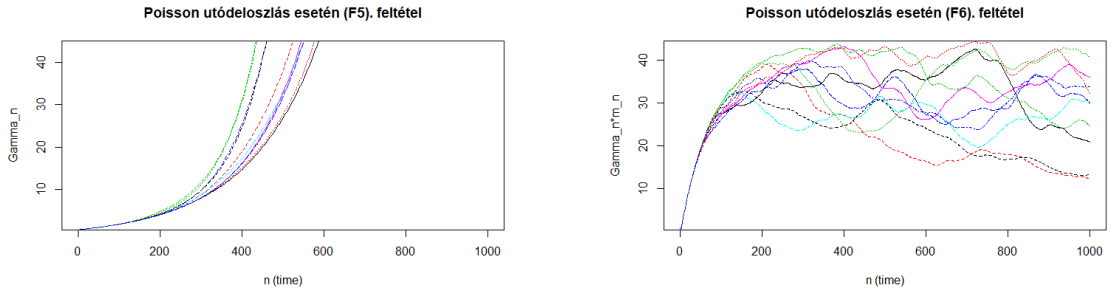
$$m_n \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}} = 2m_{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{m_k}$$

Ahol észrevehetjük, hogy az n. tag $2b_n/(1+b_n-d_n)$, az $(n-1)$. tag $2b_{n-1}$, az $(n-2)$. már $2b_{n-2}(1+b_{n-1}-d_{n-1})$, az $(n-3)$. pedig $2b_{n-3}(1+b_{n-1}-d_{n-1})(1+b_{n-2}-d_{n-2})$. Ebből már látszik, hogy a fenti kifejezés korlátos marad $n \to \infty$ mellett. Ebből pedig következik az is, hogy $\sup_{n\geq 0} E(X_n|X_n > 0) \to \infty$, illetve hogy alkalmas $c < \infty$, $\varepsilon > 0$ és $n \geq 0$ mellett $P(X_n > c|X_n > 0) < \varepsilon$. Ezzel a 4.27 feltételeit már nem is tudjuk teljesíteni. Szemléltetésképpen meg is mutatom ennek az okát. Az a kutatási eredmény is ismert, miszerint $b \sim 0.47$ és $d \sim 0.5$. [8] Ekkor a $E(Z_n) \sim 0.97$ lesz. Jelölésbeli egyszerűség kedvéért az $(F5) - (F6)$-ot fogjuk használni a 3.12 alapján, ahol az $(F5)$ a 4.27-beli első feltételnek, az $(F6)$ az a_n-nek felel meg.

$$\begin{aligned} &(F5) \qquad \Gamma_n \to \infty, \\ &(F6) \qquad m_n\Gamma_n \to \infty \end{aligned}$$

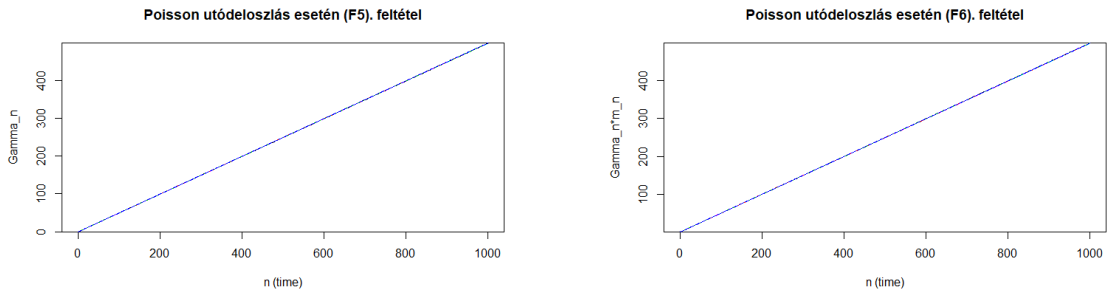
Ahol $\Gamma_n = \sum_{j=0}^{n-1} g_j^{''}(1)/(2\mu_j m_{j+1})$.

Ezek a következő két ábrán úgy fognak megjelenni, hogy 3%-os elmozdulást engedünk a várható értékben. Tehát Poisson utódeloszlású valószínűségi változókkal modellezve, az $(F5) - (F6)$ feltétel a 4.1 ábrán látható:



4.1. ábra

De hogy a 4.27 tételt is tudjuk valamennyire szemléltetni tegyük fel, hogy $b \sim d$-vel. Ekkor nem kívánjuk újra tárgyalni az előző 3 tételt csak a legutolsót. $\pi = 1$ természetesen változatlanul teljesül, és az eddigi jelölések mellett most már a folyamat *kritikus*-nak mondható. Ekkor $(F5) - (F6)$ alakulása a 4.2 ábrán látható.



4.2. ábra

Ekkor tehát a tétel jelölései mellett $P(X_n > 0) \sim 2(\sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{m_{k-1}})^{-1}$, illetve a várható érték $a_n = m_{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{m_k} \sim \sum_{k=1}^{n} b_k$ mellett:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n}{a_n} > x | X_n > 0\right) = exp(-x)$$

5. Összefoglaló

A dolgozatom fő mondanivalója Kersting 2017-es cikkében szereplő általános eredmények bemutatása. [6] Azonban ennek a megértéséhez először az elágazó folyamatok alapjait is be kellett mutatni. Bemutattuk a Galton-Watson folyamat gondolatának eredetét, illetve a legfontosabb ehhez kapcsolódó elméleteket, amik az általunk kívánt irányba mutattak. Ilyen volt például a kihalás valószínűségének kérdése vagy a normalizált folyamat standard exponenciálishoz való tartása. Ezután bevezettük a változó környezetet általánosabb esetek vizsgálata érdekében, illetve a szélesebb körű felhasználhatóság tekintetében. Ebben a változó környezetben is megtárgyaltuk a Galton-Watson folyamatra jellemző tulajdonságokat, hogy azok milyen plusz feltételek mellett maradnak érvényben.

Végezetül pedig bemutattuk azt a feltételt, aminek segítségével a korábban taglalt tételek, tulajdonságok bizonyos szempontból összeköthetőek. Hiszen itt láthattuk, hogy a feltétel teljesülése több állítás ekvivalenciáját vonta maga után, aminek köszönhetően ezeket már nem szükséges külön-külön megvizsgálni. Bár ez az elmélet nem foglalja magába az extrém esetek kezelését, az utolsó példában mégis láthatjuk, hogy széles körben használható, akár fontos kérdések megválaszolásában is mint a kemoterápiás kezelésekre kialakuló rezisztencia orvosolása.

Ahogy már említettük, túlzottan extrém esetekkel nem kívántak foglalkozni ebben az általános elméletben, így a nem olyan szépen viselkedő valószínűségi változókra nincsenek még ilyen eredmények. De amit a pénzügyi világban is látunk, a szélsőséges esetek kezelése is nagy hozzáadott értékkel bírhat.

Irodalomjegyzék

[1] Alan Agresti. On the extinction times of varying and random environment branching processes. *Journal of Applied Probability*, 12(1):39–46, 1975.

[2] Krishna B. Athreya and Peter E. Ney. *Branching Processes.* Springer, 1972.

[3] Nicholas Bhattacharya and Mark Perlman. Time-inhomogeneous branching processes conditioned on non-extinction. `https://arxiv.org/abs/1703.00337`, 2017.

[4] Peter Jagers. Galton-Watson process in varying environment. *Journal of Applied Probability*, 11(1):174–178, 1974.

[5] Miloslav Jirina. Extinction of non-homogenous Galton-Watson processes. *Journal of Applied Probability*, 13(1):132–137, 1976.

[6] Götz Kersting. A unifying approach to branching processes in varying environment. `https://arxiv.org/abs/1703.01960`, 2017.

[7] Götz Kersting and J Geiger. The survival probability of a critical branching process in a random environment. *Theory of Probability and Its Application*, 45(3):517–525, 2001.

[8] Marek Kimmel and David E. Axelrod. *Branching Processes in Biology.* Springer, 2002.

[9] Torgny Lindvall. Almost sure convergence of branching processes in varying and random environments. *The Annals of Probability*, 2(2):344–346, 1974.

[10] Russell Lyons. Random walks, capacity and percolation on trees. *The Annals of Probability*, 20(4):2043–2088, 1992.