Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Szabó Dániel
Alkalmazott matematikus,
Számítástudomány szakirány

Önközelítő utak

Szakdolgozat

Témavezető:
Pálvölgyi Dömötör
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2018.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

2. Evolvensek **5**

3. Önközelítő utak **6**
3.1. Tulajdonságok 7
3.2. Önközelítő út létezésének ellenőrzése 11

4. Önközelítő alakzatok **12**
4.1. Önközelítő sokszögek 12
4.1.1. Tesztelő algoritmus O(n) időben 15
4.1.2. Lyukas sokszögek önközelítősége 23
4.2. Önközelítő sokszögek robot esetében 25
4.3. Önközelítő poliéderek 26

5. Sokszög kerneljének keresése **27**
5.1. Láthatóság sokszögben 27
5.2. Sokszög kerneljét kereső algoritmus 29

6. Összefoglalás **36**

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni a témavezetőmnek, Pálvölgyi Dömötörnek a sok segítséget, a rám áldozott idejét, pozitív hozzáállását és tanácsait, amelyek nélkül ez a dolgozat nem készülhetett volna el.

Köszönettel tartozom családomnak, barátaimnak támogatásukért, türelmükért.

1. fejezet

Bevezetés

A számítógépes geometriában (geometriai algoritmusokkal foglalkozókkal körében) az egyik alapvető probléma olyan optimális út keresése egy sokszögben, amely elkerül bizonyos akadályokat. A keresett útnak gyakran bizonyos feltételeknek eleget kell tenniük (az akadályok elkerülésén kívül). Ilyen feltétel lehet az, hogy legyen az út monoton vagy, hogy legfeljebb k szegmensből (szakaszból, ívből) álljon. Egy másik megkötés lehet, hogy a pont, ami az úton mozog, folyamatosan közeledjen a végponthoz. Az ilyen *mohó* utakat többek között hálózatépítésnél, mohó földrajzi útkeresésnél lehet felhasználni. Ennek a feltételnek egy erősebb változata az, hogy az útnak *önközelítőnek* kell lennie, azaz egy úton mozgó pontnak nem csak a végponthoz kell folyamatosan közelednie, hanem minden, az úton előtte lévő ponthoz.

Az önközelítő utaknak számos előnyük van a mohó utakkal szemben. Az önközelítő utakra igaz, hogy tetszőleges részutuk szintén önközelítő. Ezt a mohó utak nem teljesítik. Ezért ha a végpont nem ismert előre, és így kell mohó utat keresni, akkor érdemes az önközelítő utakhoz folyamodnunk. Egy másik előnye az önközelítő utaknak, hogy az euklideszi távolsághoz képest nem lehetnek bármekkorák. Szemben a mohó úttal, amely hosszának és a kezdő- és végpont közötti euklideszi távolság aránya tetszőleges nagy lehet (például ha a mohó út spirálban közeledik a végpont felé).

Egy nagyon hasonló problémával az [1] cikk foglalkozik. A szerzői ugyanilyen önközelítő utakat keresnek, csak nem sokszögben, hanem gráfokban, amelyek élei egyenesek. Teljesen hasonlóan definiálható a *mohó út*: a végponthoz folyamatosan közelednie kell a a gráf élein definiált útnak, és az *önközelítő út* is: nem csak a végponthoz kell közelednie az úton haladó pontnak, hanem az úton még előtte lévő összes ponthoz.

A dolgozatban a következőkkel foglalkozunk.

- A 2. fejezetben röviden bemutatjuk az evolvenseket, amelyekre az önközelítő utak jellemzésénél lesz szükségünk.
- Adott két pont egy egyszerű sokszögben, létezik-e köztük önközelítő út a sokszögben. És ha igen, egyértelmű-e a legrövidebb önközelítő út. Ezt a 3. fejezetben vizsgáljuk.
- Szintén a 3. részben a legrövidebb önközelítő út megtalálásával is foglalkozunk, ha van önközelítő út a két pont között.

- Az önközelítő sokszögekről a 4. fejezetben tárgyalunk részletesen, mutatunk egy lineáris tesztelő algoritmust, amely eldönti, hogy egy sokszög önközelítő-e.
- A 4. fejezet végén kitérünk arra az esetre, ha pontszerű tárgy helyett robot mozgását vizsgáljuk önközelítő sokszögekben, illetve az önközelítőséget érintőlegesen megvizsgáljuk a térben is.
- Végül bemutatjuk egy sokszög kernelkeresésének problémáját az 5. fejezetben, amelyhez az önközelítő utak elméletét is fel fogjuk használni.

Az ábrák egy részét a [2] és [3] cikk ábrái alapján készítettem.

2. fejezet

Evolvensek

Az önközelítő utak vizsgálatához szükség lesz az evolvensek ismeretére. Szemléletesen egy görbe evolvensét úgy kapjuk, hogy a görbére feltekerünk egy fonalat, majd lecsévéljük róla, ügyelve arra, hogy a fonal mindig feszes legyen. A fonal végének a pályája a görbe evolvense.

A pontos definícióhoz legyen c egy konvex görbe, amit a $\vec{c}(\theta)$ paraméterezés ír le. Legyen c arra irányítva, amerre θ nő.

2.1. Definíció. *A c görbe evolvensét a következő függvény írja le*

$$\vec{I}(\theta) = \vec{c}(\theta) - s(\theta)\frac{\vec{c}\,'(\theta)}{|\vec{c}\,'(\theta)|},$$

ahol $s(\theta)$ az érintő hossza $|c(\theta)I(\theta)|$, azaz

$$s(\theta) = \int_{\alpha}^{\theta} |\vec{c}\,'(t)|dt.$$

A konstans α határozza meg a pontot c-n, ahonnan az evolvenst indítjuk (szemléletesen, ahol elkezdjük a fonalat lecsévélni). Az evolvensnek két ága van: a pozitív az, amikor a lecsévélést α-ból abban az irányban kezdjük, amerre a θ nő. A negatív ága a másik irány. Ha feltesszük, hogy a c görbét a $\left[\theta_{\min}, \theta_{\max}\right]$ intervallumon definiáltuk, akkor az evolvens pozitív ága a $\left[\alpha, \theta_{\max}\right]$-n, a negatív ága a $\left[\theta_{\min}, \alpha\right]$-n van definiálva.

Egy $c(\theta)$ görbe egy k-rendű evolvense legyen a $(k-1)$-rendű evolvens egyik ágának evolvense. A nulladrendű evolvens legyen a görbe maga.

Precízen

$$\vec{I_k}(\theta) = \vec{I}_{k-1}(\theta) - s_k(\theta)\frac{\vec{I}_{k-1}\,'(\theta)}{|\vec{I}_{k-1}\,'(\theta)|}, \qquad \vec{I_0}(\theta) = c(\theta),$$

$$\text{ahol } s_k(\theta) = \int_{\alpha_k}^{\theta} |\vec{I_k}\,'(t)|dt.$$

3. fejezet

Önközelítő utak

Legyen π irányított, darabonként sima görbe s-ből t-be. π p_1 és p_2 pontjára azt mondjuk, hogy $p_1 \leq_\pi p_2$, ha p_1 az s és p_2 pontok között helyezkedik el π-n. A π p_1 és p_2 közötti részét jelöljük $\pi(p_1, p_2)$-vel.

3.1. Jelölés. *Az a és b pont közötti szakaszt jelöljük $\overline{ab}$-vel.*

3.2. Jelölés. *Az $\overline{ab}$ szakasz hosszát jelöljük $|\overline{ab}|$-vel.*

3.3. Definíció. *π önközelítő, ha tetszőleges három $a \leq_\pi b \leq_\pi c$-re $|\overline{ac}| \geq |\overline{bc}|$.*

3.4. Definíció. *Egy $a \in \pi$ pontból állított h merőleges két félsíkra osztja a síkot. Legyen h^+ az a félsík, amely felé π irányítva van.*

3.5. Lemma. *π út s-ből t-be önközelítő akkor és csak akkor, ha tetszőleges a pontjának merőlegese nem metszi (egyik oldali merőlegese sem metszi) $\pi(a, t)$-t.*

3.6. Megjegyzés. *Ha a görbe az a pontban nem deriválható, akkor a-ban a két oldali merőleges különbözni fog, ezért volt szükség a lemmában a zárójeles megjegyzésre. Ha a görbe az a pontban deriválható, akkor a két merőleges egybeesik.*

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy egy c pontban $\pi(a, t)$ metszi h merőlegest, amit a-ból állítottunk. Legyen $K_\epsilon(a)$ az a pont egy ϵ sugarú környezete és legyen $b \in \pi(a, t) \cap K_\epsilon(a)$. Ekkor a, b, c ponthármasra nem teljesül az önközelítőséget definiáló egyenlőtlenség.

Tegyük fel, hogy π nem önközelítő, vagyis létezik egy $a \leq_\pi b \leq_\pi c$-re $|\overline{ac}| < |\overline{bc}|$. Tekintsük a c középpontú $|\overline{ac}|$ sugarú kört, a feltevésünk alapján ekkor b a körön kívül van. A kör utolsó metszéspontja $\pi(a, b)$-vel legyen d. Legyen a d-ből a görbére állított merőleges h. Ekkor $\pi(d, c)$-nek el kell metszenie h-t, ami ellentmond az alapfeltevésünknek, vagyis π önközelítő. $\square$

Az előző lemma átfogalmazva:

3.7. Lemma (félsík-tulajdonság). *π önközelítő út akkor és csak akkor, ha tetszőleges a pontjának mindkét oldali h merőlegesére $\pi(a,t) \subset h^+$.*

3.8. Definíció. *Egy $p \in \pi$ akkor töréspontja a görbének, ha p-ben a görbe deriváltja nem folytonos.*

3.1. Tulajdonságok

Ebben a részben olyan önközelítő utakkal foglalkozunk amelyek egy egyszerű (azaz nincsen benne lyuk) P sokszög két pontját kötik össze P-n belül. Megmutatjuk, hogy a legrövidebb önközelítő út egyértelmű, illetve ezt a legrövidebb önközelítő utat karakterizáljuk: belátjuk, hogy csak szakaszokból, körívekből illetve evolvensekből áll.

3.9. Lemma. *A s-et t-vel összekötő önközelítő π tetszőleges két $p_1 \leq p_2$ pontjára a $\overline{p_1p_2}$ szakasz h szakaszfelező merőlegese nem metszi $\pi(p_2,t)$-t.*

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy metszi. Ekkor létezik q pont, ami h^--ban van, ahol h^- az a félsík, amelyet h határol és tartalmazza p_1-et. Ekkor a p_1, p_2, q ponthármasra nem teljesül az önközelítőséget definiáló egyenlőtlenséget. □

Legyen P egy egyszerű (azaz nincsen benne lyuk) sokszög a továbbiakban.

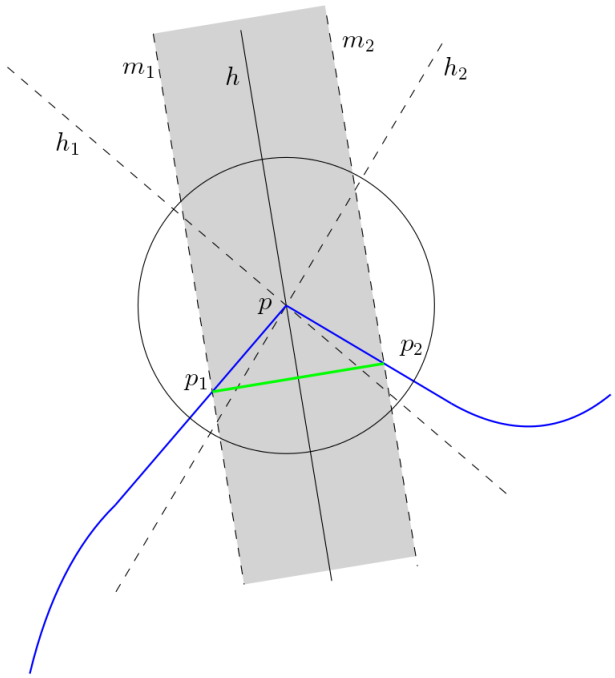
3.10. Lemma. *P-ben legrövidebb önközelítő útnak a töréspontjai P csúcspontjainak részhalmaza.*

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy az s-ből t-be vezető π legrövidebb önközelítő útnak P belsejében is van töréspontja, legyen ez a p pont. Tekintsünk egy ϵ-sugarú környezetét p-nek ($K_\epsilon(p)$), mely teljes egészében P-n belül van és ebben a környezetben π egy komponensből áll. Legyen h_1 és h_2 a p-ben állított két merőleges a $\pi(s,p)$-re és $\pi(p,t)$-ra, ezek szögfelezője legyen h. Legyen $p_1 \in \pi(s,p) \cap K_\epsilon(p)$ és $p_2 \in \pi(p,t) \cap K_\epsilon(p)$ úgy, hogy $\overline{p_1p_2}$ merőleges legyen h-ra és a $\overline{p_1p_2}$-re állított m_1, m_2 merőlegesek rendre p_1, p_2-ből h_1-et és h_2-t $K_\epsilon(p)$-n belül metsszék, lásd a 3.1 ábrát.

Megmutatjuk, hogy ha $\pi(p_1,p_2)$-t kicseréljük a $\overline{p_1p_2}$ szakaszra, akkor egy rövidebb önközelítő utat kapunk, ami ellentmondás. Nyilvánvalóan rövidebb lett. Az önközelítőséget a félsík-tulajdonság ellenőrzésével látjuk be. A $\pi(s,p_1)$ pontjaira igaz maradt a tulajdonság az előző lemma alapján. A $\pi(p_2,t)$ önközelítősége változatlan maradt. Tudjuk, hogy $\pi(p,t) \in h_1^+ \cap h_2^+$, és úgy választottuk ϵ-t hogy a $K_\epsilon(p)$-ban π csak egy komponensből álljon, ezért a p_1p_2-re állított egyik merőleges sem metszi el $\pi(p_2,t)$-t. Ezzel beláttuk, hogy a konstruált görbe is önközelítő és ellentmondásra jutottunk. □

3.11. Észrevétel. *Ha a legrövidebb π a P sokszög egy csúcsában megtörik, azaz „kanyarodik", akkor nyilván ezt ugyanarra teszi, mint amerre a sokszög kanyarodik az adott csúcsban. Hiszen, ha nem így lenne, akkor a fenti bizonyításból következik, hogy létezne rövidebb önközelítő út.*



3.1. ábra. Ha P-n belül az önközelítő útnak van töréspontja, akkor létezik nála rövidebb önközelítő út is.

A lemmából következik, hogy a legrövidebb önközelítő $s - t$ út belső pontjaiban a görbére illesztett érintő egyértelmű.

3.12. Definíció. *Legyen π a p-ben sima. Ekkor p inflexiós pont, ha a p-beli érintő egy kis környezetben szeparálja π-t.*

Hasonlóan definiálható az inflexiós szakasz: azt mondjuk, hogy a π egy szakasza inflexiós szakasz, ha a szakasz egyenese szeparálja π egy kis környezetben.

3.13. Lemma. *Egy legrövidebb önközelítő π-nek P-ben nincsen P belsejében inflexiós pontja.*

Bizonyítás: Meg fogjuk mutatni, hogy ha van P belsejében inflexiós pontja, akkor létezik nála rövidebb önközelítő út, ami ellentmondás. Tegyük fel tehát, hogy létezik ilyen p pont. Legyen ϵ olyan, hogy $K_\epsilon(p)$ P belül van és nincsen benne p-n kívül más inflexiós pont. Legyen $p_1 \in K_\epsilon(p) \cap \pi(s, p)$ olyan, hogy a p_1-ből húzott érintő $\pi(p, t)$-hez a definiált környezeten belül legyen. Az érintőpont legyen p_2. Ilyen p_1 a görbe simasága miatt mindig létezik. Legyen h_2 a p_2-ből állított merőleges π-re. A félsík-tulajdonság miatt $\pi(p_2, t) \in h_2^+$. Ezért a $\overline{p_1 p_2}$ minden pontja szintén teljesíti a félsík-tulajdonságot. Tehát ha π-ben kicseréljük $\pi(p_1, p_2)$-t a $\overline{p_1 p_2}$ szakaszra, akkor egy rövidebb önközelítő utat kapunk. $\square$

3.14. Definíció. *Két pont között a legrövidebb (irányított) utat P-n belül nevezzük geodetikus útnak.*

A következő két elemi állítást nem bizonyítjuk.

3.15. Állítás. *A geodetikus út egyértelmű egyszerű sokszögben és szakaszokból áll.*

3.16. Megjegyzés. *A geodetikus út szakaszokból áll P-n belül.*

3.17. Állítás. *Ha az egyszerű P sokszögben a geodetikus út s-ből t-be elmetsz egy e egyenest, akkor minden út s-ből t-be elmetszi e-t.*

3.18. Definíció. *A γ geodetikus út inflexiós kezdőpontjai legyenek az inflexiós szakaszok első pontjai. (Másképp megfogalmazva: az utolsó pontjai a γ maximális hosszúságú szegmenseinek, amelyek egy irányba kanyarodnak.)*

3.19. Lemma. *Egy legrövidebb önközelítő π P-ben tartalmazza az s-ből t-be vezető γ geodetikus útnak az összes inflexiós pontját.*

Bizonyítás: Tekintsük γ egy $\overline{p_ip_j}$ inflexiós szakaszát. p_i egy inflexiós pontja γ-nak. Bármely legrövidebb önközelítő út s-ből t-be elmetszi $\overline{p_ip_j}$-t. Ha a metszéspont nem p_i, akkor π-nek van inflexiós pontja P belsejében, ami ellentmond a 3.13 lemmának. □

3.20. Definíció. *Egy X ponthalmaz konvex burkának nevezzük azt a legkisebb konvex halmazt, amely tartalmazza X-et, és $CH(X)$-szel jelöljük.*

Tekintsünk két önközelítő utat s-ből t-be egy egyszerű P sokszögön belül, π_1 és π_2, amelyek csak s-ben és t-ben metszik el egymást. Legyen γ a két út közötti geodetikus út s-ből t-be.

3.21. Lemma. *Legyen a γ geodetikus út π_1 és π_2 önközelítő utak között. Ekkor γ is önközelítő.*

Bizonyítás: Tudjuk, hogy a γ geodetikus út benne van a két görbe konvex burkában (hiszen, ha nem lenne, akkor γ nem lenne a legrövidebb). Vagyis $\gamma \in CH(\pi_1) \cap CH(\pi_2)$.

Tetszőleges $p \in \gamma$ vagy π_1-en vagy π_2-en vagy a két görbe közös érintőjén van. Legyen p az π_1 görbén, h a p-ből állított merőleges. A félsík-tulajdonság miatt $\pi_1(p,t) \in h^+$, ezért $CH(\pi_1(p,t)) \subset h^+$ is teljesül, vagyis $\gamma \in h^+$. Az az eset teljesen hasonlóan végiggondolható, ha p töréspontja π_1-nek.

Ha p a közös érintőn fekszik, akkor tekintsük az érintő végpontját p_2-t. A p-ből állított h merőleges párhuzamos a p_2-ből állítottra és róla már tudjuk, hogy teljesíti a félsík-tulajdonságot a fentebbiek miatt, így a h-re is teljesül. Tehát a γ görbe összes pontjáról beláttuk a tulajdonság teljesülését, így a γ önközelítő.

□

Tekintsünk két önközelítő utat s-ből t-be. Ezek a görbék elmetszhetik egymást, legyenek a metszéspontok $s = p_0, p_1, \ldots, p_{k+1} = t$. Vegyük észre, hogy a p_i pontok a két görbén ugyanolyan sorrendben kell, hogy szerepeljenek, különben létezne olyan ponthármas a p_i-k közül, amelyek sértik az önközelítőség definícióját. Legyen γ_i az a geodetikus

görbe, amely p_i-t köti össze p_{i+1}-gyel a $\pi_1(p_i, p_{i+1})$ és $\pi_2(p_i, p_{i+1})$ között. Nyilván ezek a részgörbék is önközelítőek, tehát az előző lemma miatt γ_i is önközelítő. A γ_i görbék összefűzéséből kapott γ önközelítő az s és t pontok között. Ebből következik az alábbi tétel.

3.22. Tétel. *A legrövidebb π egyértelmű.*

Bizonyítás: Ha nem lenne egyértelmű, tehát lenne π_1 és π_2 különböző és legrövidebb önközelítő görbék, akkor a fenti konstrukcióval létrehozott γ rövidebb lenne és szintén önközelítő. □

3.23. Tétel. *A legrövidebb $s - t$ önközelítő π út egyszerű P sokszögben szakaszokból, körívekből és evolvensekből áll.*

Bizonyítás:

Jelöljük $p_1, p_2, \ldots, p_k$-val azokat a pontokat, amelyekben a legrövidebb π^* $s - t$ önközelítő út érinti a P határát s-től t felé haladva. Tekintsük az utolsó részt, $\pi^*(p_k, t)$-t. Ez egy egyenes szakasz. Különben lehetne rövidíteni a következőképpen. Az s-ből t-be vezető geodetikus út utolsó szakaszát jelöljük $\overline{qt}$-vel. Ezt q-n túl hosszabbítsuk meg, amíg el nem metszi π^*-t, a metszéspont legyen q'. Ekkor π^*-t lehetne rövidíteni, ha $\pi^*(q', t)$ kicseréljük $\overline{q't}$-vel.

Tegyük fel, hogy minden $\pi^*(p_i, p_{i+1})$ szegmensre beláttuk, hogy csak szakaszokból, körívekből illetve evolvensekből áll minden $i > \ell$-re valamilyen ℓ-re. Megmutatjuk, hogy ekkor a $\pi^*(p_{\ell-1}, p_\ell)$ is csak szakaszokból, körívekből illetve evolvensekből áll.

Legyen $CH_\ell = CH(\pi^*(p_\ell, t))$. Feltehetjük, hogy p_ℓ-ben a π^* a sokszög határát a bal oldalán érinti. Szerkesszük meg I_{CH_ℓ}-et, azaz a CH_ℓ evolvensét, p_ℓ-ből indulva és az érintési pont mozogjon órajárással megegyező irányban. Az evolvenst addig szerkesszük meg, amíg el nem metszi P határát. A keletkezett területet jelöljük D_ℓ-lel. A sokszögből az evolvens ezt a területet vágja le. Ekkor D_ℓ „halott" terület minden olyan önközelítő út számára, amelyek $\pi^*(p_\ell, t)$-vel folytatódnak. Vagyis nem létezik olyan önközelítő út, ami D_ℓ-ben kezdődik és aztán $\pi^*(p_\ell, t)$-vel folytatódik. Ugyanis tekintsünk egy tetszőleges $u \in D_\ell$ pontot. Be kell látni azt, hogy bármely útnak u-ból p_ℓ-be lesz olyan merőleges, amely metszi CH_ℓ-t és így $\pi^*(p_\ell, t)$-t, vagyis megsérti a félsík-tulajdonságot és így 3.7 lemma miatt nem lehet önközelítő. Tekintsük egy darabonként sima π_u utat u-ből p_ℓ-be és parametrizáljuk őt $\tau \in [0, 1]$-vel. Legyen $d_u(\tau)$ távolságfüggvény, amely megadja $\pi_u(\tau)$ távolságát I_{CH_ℓ}-től. Ez a függvény darabonként sima, mivel π_u is és I_{CH_ℓ} is az. π_u végül egybeesik p_ℓ-lel ezért létezik egy olyan τ', hogy a d_u csökken, és így a $\pi_u(\tau') = u'$-ban az érintő π_u-ra és az érintő a konvex burokra által bezárt szög nagyobb, mint 90°. Tehát u'-ban a π_u-ra állított merőleges nem tartalmazza teljesen a CH_ℓ-et és így $\pi(p_\ell, t)$t sem.

Tekintsük a geodetikus utat s-ből p_ℓ-be $P \setminus D_\ell$-ben, és tekintsük az utolsó szegmensét, qp_ℓ-t, ahol q az utolsó pont p_ℓ előtt ahol az út érinti a P határát. Ez a szegmens lehet szakasz vagy egy szakasz, $\overline{qt_\ell}$, amelyet a I_{CH_ℓ} egy része követ. Ekkor $\overline{qt_\ell}$ érintője I_{CH_ℓ}-nek. Ha qp_ℓ nem része π^*-nek, akkor a bizonyítás elején leírt módon belátható, hogy π^*-t lehetne rövidíteni.

CH_ℓ a $\pi^*(p_\ell, t)$ konvexburka, amiről feltettük, hogy szakaszokból, körívekből és evolvensekből áll. Így qp_ℓ is ezekből épül fel. Ezzel az állítást beláttuk és még azt is látjuk, hogy az alkotó evolvensek nem nagyobb rendűek mint, ahány törés van π^*-n. $\square$

3.24. Kérdés. *Maximum hányadrendű evolvensek lehetnek egy n csúcsú sokszögben lévő legrövidebb önközelítő útban?*

3.25. Tétel. *Egy s-ből t-be menő önközelítő út legfeljebb $5,48 \cdot d(s,t)$ hosszú.*

A tétel bizonyítása megtalálható a [3] cikkben.

3.2. Önközelítő út létezésének ellenőrzése

Ebben a részben azzal foglalkozunk, hogy adott P sokszögben adott s-ből t-be létezik-e önközelítő út.

Vázolunk egy algoritmust, amely eldönti, hogy két pont között létezik-e önközelítő út és ha igen, akkor megadja a legrövidebbet.

Az algoritmus a következő ötleten alapszik. A t pontból indulva a geodetikus $s - t$ γ úton visszafelé haladva mindig fenntartjuk a CH konvex burkát a legrövidebb önközelítő π^* út végének, amit eddig építettünk.

Minden p_ℓ töréspontban csináljuk a következőt:

1. Számoljuk ki a jelenlegi konvex burok (CH) evolvensének a megfelelő ágát. Ha ez az evolvens elvágja s-et t-től (vagyis s a 3.23 tétel bizonyításában leírt „halott” zónában van), akkor jelentsük, hogy nincsen megoldás.

2. Számítsuk ki a geodetikus γ_ℓ utat a γ megelőző inflexiós pontjából (hiszen a 3.19 lemma alapján γ összes inflexiós pontját tartalmazni fogja π^*, ha létezik) p_ℓ-be $P \setminus I_{CH}$ és ennek utolsó qp_ℓ szegmensét fűzzük hozzá π^*-hoz.

3. Frissítsük CH-t, majd ismételjük meg az előzőket q-ból, amíg el nem érjük az s pontot.

Laczkovich Miklós bizonyította a következő tételt a [4] cikkben.

3.26. Tétel (Laczkovich Miklós). *Legyen f olyan függvény, amely racionális számokból, az x ismeretlenből, összeadásból, szorzásból, kompozícióból és a sinus függvényből áll. Ekkor $\exists x : f(x) = 0$ állítás nem eldönthető.*

A 3.23 tételből tudjuk, hogy a legrövidebb önközelítő út magasabb rendű evolvenseket is tartalmazhat. A 2 fejezetben láttuk, hogy az evolvenseket transzcendens egyenletek írják le. Az evolvensek egyenletei speciális esetei 3.26 tételben lévő függvényeknek. Ezért sejthető, hogy a magasabb rendű evolvensek egyenletei nem megoldhatóak. Így a [2] cikkben részletesebben leírt algoritmus által generált utat nem tudjuk egzaktul meghatározni, csak közelítőleg.

4. fejezet

Önközelítő alakzatok

Az előző fejezetben azzal foglalkoztunk, hogy egy alakzatban két kijelölt pont között mikor létezik önközelítő út, illetve, ha létezik, akkor hogyan találjuk meg a legrövidebbet. Ebben a fejezetben olyan alakzatokkal fogunk foglalkozni, amelyekben tetszőleges kezdő- és tetszőleges végpont között létezik önközelítő út.

4.1. Definíció. *Egy alakzatot akkor mondunk önközelítőnek, ha bármely két pontja között létezik önközelítő út.*

4.1. Önközelítő sokszögek

A fejezetben feltesszük, hogy a P sokszög egyszerű. Emlékeztetőül, egy sokszög akkor egyszerű, ha nincsen benne lyuk. A nem egyszerű sokszögekkel a 4.1.2 részben foglalkozunk.

A következőkben szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy egy sokszög mikor önközelítő és mutatunk egy (a sokszög csúcsszámában) lineáris algoritmust, amely egy sokszögről eldönti, hogy önközelítő-e.

4.2. Állítás. *Ha a P sokszögben a t középpontú és $|\overline{ts}|$ sugarú D_t körlemez és P metszete egy komponensből áll, akkor a γ geodetikus út s-ből t-be D_t-n belsejében van.*

Bizonyítás: Legyen $d(x, y)$ pedig a körvonal x-ből óramutató járásával megegyező irányba haladó köríve y-ba.

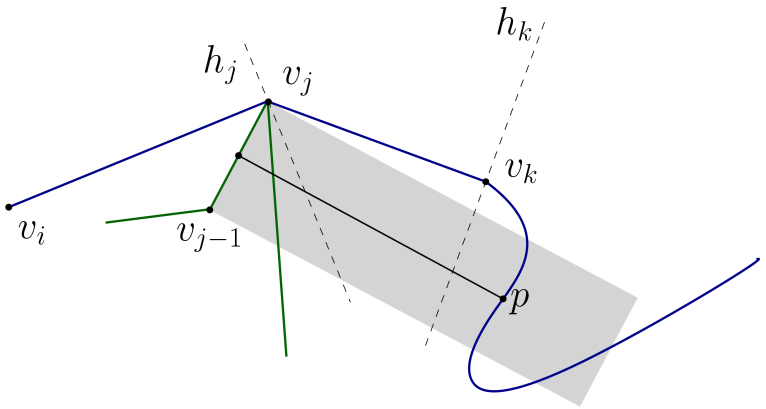
Tegyük fel, hogy γ egy a pontban kilép a körlemezről és egy b pontban pedig visszalép. Ezt a geodetikus út csak akkor teszi meg, ha $d(a, b)$-n van olyan pont, ami nem része P-nek, legyen ez a pont q. Ezt a q pontot „megkerüli" a γ. Mivel P egyszerű, ezért P komplementere ($\overline{P}$) összefüggő. A q pont csak úgy lehet $\overline{P}$ része, ha létezik r pont $d(b, a)$-n hogy r és q között létezik út $\overline{P}$-ben. Ekkor viszont ez az út D_t-ben szétválasztja a-t b-től, tehát $D_t \cap P$ mégsem egy komponensből áll, ami ellentmondás. □

4.3. Tétel. *P sokszög önközelítő akkor és csak akkor, ha tetszőleges $p \in P$ középpontú tetszőleges sugarú D körlemezre igaz, hogy $D \cap P$ egy kompenensből áll.*

Bizonyítás:

Legyen P sokszög önközelítő. Tegyük fel, hogy létezik p pont és D p középpontú körlemez, hogy $D \cap P$ legalább két komponensből áll. Válasszunk egy tetszőleges t pontot egy, nem p-t tartalmazó komponensből. Ekkor az önközelítő út t-ből p-be kilép D-ből majd visszatér, tehát van pontja D-n kívül, legyen ő u. De akkor $|\overline{tp}| < |\overline{up}|$, ami megsérti az önközelítőséget.

Most tegyük fel, hogy $D \cap P$ egy komponensből áll minden p-re és D-re. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $s, t \in P$-re létezik önközelítő út. Tekintsük D_t t középpontú és $|\overline{ts}|$ sugarú körlemezt. Tudjuk, hogy $D_t \cap P$ egy komponensből áll, ekkor az előző állítás miatt a γ geodetikus út s-ből t-be $D_t \cap P$ belsejében van. Tegyük fel, hogy γ nem önközelítő. Vegyük azt a $\overline{v_i v_j}$ szakaszát γ-nak, amely a legközelebb van t-hez és a v_j-ben erre a szakaszra állított merőleges elmetszi $\gamma(v_j, t)$-t. A v_j utáni pontja a γ-nak legyen v_k, lásd a 4.1 ábrát. Legyen h_k a v_k-ban a $\overline{v_j v_k}$-ra állított merőleges. Feltehető, hogy a v_i, v_j, v_k ponthármas jobbra kanyarodik. Feltettük, hogy $\overline{v_i v_j}$ az utolsó olyan szakasz, hogy h_j metszi az út későbbi részét, tehát h_k nem metszheti és h_j $\overline{v_i v_j}$-től jobbra metszi $\gamma(v_j, t)$-t (lásd ábra, ami nincs). Vegyük a sokszögnek a $\overline{v_{j-1} v_j}$ oldalát, amely felé $\overline{v_i v_j}$ néz. Ekkor erre az oldalra állított félszalag (vagyis a $\overline{v_{j-1} v_j}$ végpontjaira P-ből kifelé állított merőlegesek által meghatározott végtelen terület) elmetszi $\gamma(v_j, t)$-t. Válasszunk egy q pontot $\gamma(v_j, t)$-n amely benne van a félszalagban. Létezik q középpontú körlemez, amely kétszer is elmetszi $\overline{v_{j-1} v_j}$-t, tehát $D_q \cap P$ több mint egy komponensből áll. Ellentmondásra jutottunk, így nem igaz az alapfeltevésünk, vagyis γ önközelítő. □



4.1. ábra. A p-ből létezik körlemez, amivel összemetszve P két komponensre szakad.

A P sokszög oldalait irányítsuk az óramutató járásával ellentétes irányban, legyen e P egy oldala. Nevezzük az e oldalhoz tartozó félszalagnak azt a területet, amit az e két végpontjából e-re lokálisan kifelé állított merőlegesek határolnak.

Az e oldalhoz tartozó félszalagot jelöljük R_e-vel.

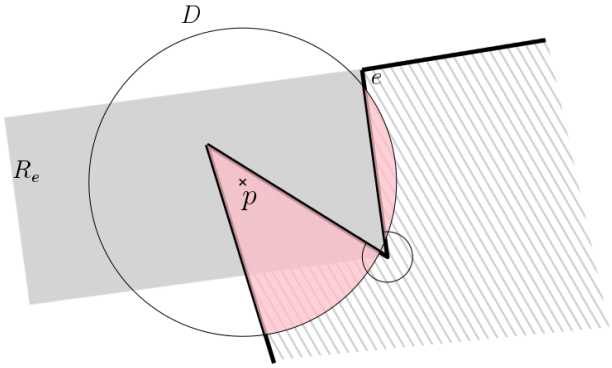
4.4. Következmény. *P akkor és csak akkor önközelítő, ha az összes oldalára a hozzá tartozó félszalag nem metsz bele P-be.*

Bizonyítás:

Ha az e-hez tartozó R_e félszalag metszené P-t, akkor tetszőleges $p \in R_e \cap P$ ponthoz létezne p középpontú D körlemez, hogy D határa két pontban is metszené e-t, így $D \cap P$ legalább két komponensből állna. Egy ilyen lehetséges konfigurációt mutat a 4.2 ábra. Az előző bizonyítás második részéből következik az állítás másik iránya. □

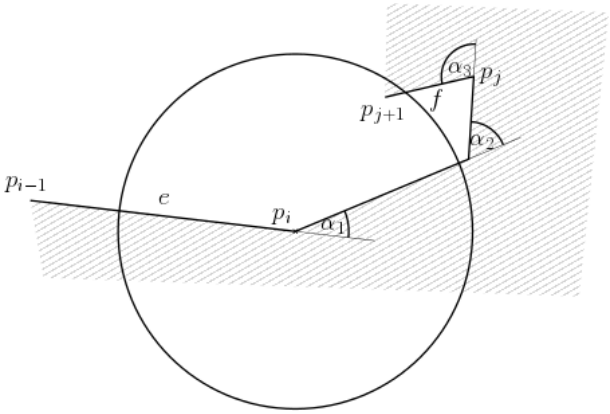
4.5. Következmény. *Ha a sokszögnek van* 270°*-osnál nagyobb szöge, akkor nem önközelítő.*

Hiszen ekkor az egyik oldal a másikhoz tartozó félszalagját metszi. Ezt és a két komponensre esést szemlélteti az 4.2 ábra.



4.2. ábra. Ha van legalább 270°-os szöge, akkor nem önközelítő

Tekintsük a 4.3 ábrát. A sokszög nem önközelítő, hiszen többek között az f oldal félszalagjába belemetsz a sokszög. Intuitíve az is megfogalmazódhat bennünk, hogy az e oldalhoz képest f „vissza van fordulva", és ez már elég ahhoz, hogy ne lehessen önközelítő a sokszög. Hogy ezt egy állításként is megfogalmazhassuk, precízen meg kell mondanunk, mikor fordul vissza egy sokszög.



4.3. ábra. α_1, α_2 és α_3 összege legalább 180°, tehát e oldalhoz képest f visszafordul, ezért a sokszög nem önközelítő

Két szomszédos oldal közbezárt szögét felírhatjuk $180° + \alpha$ alakban, ahol $-180° < \alpha < 180°$. Az α azt jellemzi, hogy a sokszög az adott csúcsban mennyire fordul kifelé a

sokszög belsejéhez képest. Ha a sokszög egy oldalától indulva (valamelyik irányba) az első néhány α összege legalább 180°, akkor azt mondjuk, hogy a sokszög visszafordul.

Most már ki tudjuk mondani és be tudjuk látni a következő állítást.

4.6. Állítás. *Ha a sokszög a fent leírt módon visszafordul, akkor nem önközelítő.*

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy az $e = \overline{p_{i-1}p_i}$-hez képest $f = \overline{p_j p_{j+1}}$ visszafordul. Legyen h_i az e-re p_i-ben állított kifelé mutató merőleges és h_i^+ az a félsík, amelyet h_i határol és e nincsen benne, h_i^- legyen a másik félsík. Ha az f vagy egy másik e és f közötti oldal metszi a h_i félegyenest, akkor a 4.4 következmény miatt a sokszög nem önközelítő.

Tegyük fel, hogy $f \subset h_i^+$. Ekkor létezik p_i középpontú kör, hogy p_{j+1} benne legyen a körben, de p_j ne. Erre mutat példát szintén a 4.3 ábra. Ez a kör két komponensre osztja a sokszöget, ezért a 4.3 tétel alapján nem lehet önközelítő.

Az utolsó eset az, hogy f úgy metsz bele e félszalagjába, hogy nem metszi h_i-t (tehát a „a másik irányból"). Meggondolható, hogy ilyenkor létezik e helyett másik oldal, amelyhez képest a sokszög visszafordul. □

Tegyük fel, hogy létezik $e = \overline{p_{i-1}p_i}$ oldal, hogy a sokszög belemetsz R_e-be (amit h_i és h_{i-1} határol). Ha belemetsz, akkor nyilván legalább kétszer is belemetsz. Induljunk el p_i-ből és p_{i-1}-ből kifelé (tehát nem e_i-n) a sokszög határán és az első metszéspontjaik R_e-vel legyenek rendre q_{i-1} és q_i. Ekkor igaz a következő állítás.

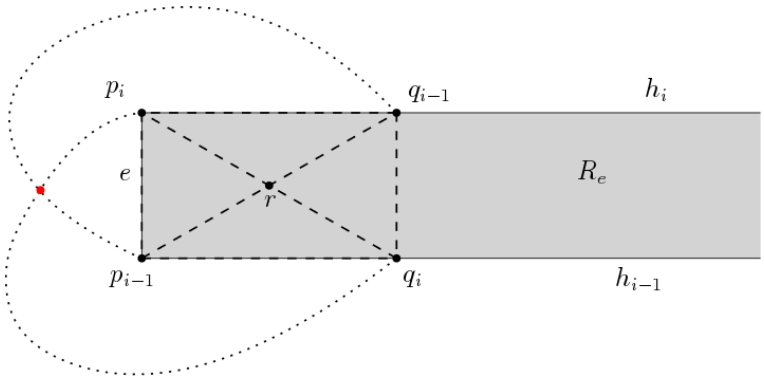
4.7. Állítás. *Nem lehet az, hogy q_{i-1} h_i-n és q_i h_{i-1}-en helyezkedik el.*

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy a p_{i-1}, p_i, q_{i-1} és q_i pontok mégis a 4.4 ábrán látható módon helyezkednek el. Ellentmondásra szeretnénk jutni úgy, hogy ez esetben a K_5 gráfot síkba tudnánk rajzolni. A gráf 5. pontja az előzőek mellett legyen a $\overline{p_{i-1}q_{i-1}}$ és a $\overline{p_i q_i}$ metszéspontja. A szaggatottal jelölt szakaszokba a sokszög p_i és q_i, illetve p_{i-1} és q_{i-1} közötti része nem metszhet bele (i), hiszen akkor nem q_{i-1} és q_i lenne az első metszéspont R_e-vel a p_{i-1}, p_i pontokból indulva. Nyilván a sokszög p_i és q_i, illetve p_{i-1} és q_{i-1} közötti részei nem metszhetik egymást (ii). Ha az (i) és (ii) peremfeltételek mellett össze tudnánk kötni a p_{i-1}, q_{i-1} és p_i, q_i pontokat, akkor az 5 csúcsú teljes gráfot síkba rajzolnánk, amit viszont a Kuratowski-tétel alapján nem lehet. Ezzel ellentmondásra jutottuk, így beláttuk az állítást. □

4.1.1. Tesztelő algoritmus O(n) időben

Egy sokszög önközelítőséget naív módon könnyű eldönteni. Ha egy algoritmus minden csúcsra ellenőrizni, hogy nincs-e benne egy félszalagban, akkor helyesen eldönti ezt a kérdést. Futásideje a sokszög pontjainak számában négyzetes. Ebben a részben bemutatunk



4.4. ábra. Nem lehet az, hogy q_{i-1} h_i-n és q_i h_{i-1}-en helyezkedik

egy gyorsabb algoritmust, amely egy egyszerű sokszögről eldönti, hogy önközelítő-e, majd bizonyítjuk helyességét illetve linearis futásidejét.

Az algoritmus először ellenőrzi, hogy P minden szöge kisebb-e, mint 270°. Ha nem, akkor P nem önközelítő (a 4.5 következmény alapján). Ez után az algoritmus megvizsgálja, hogy van-e visszaforduló oldala.

4.8. Lemma. *A visszafordulás vizsgálata megtehető lineáris időben.*

Bizonyítás:

Az algoritmusban a csúcsokhoz tartozó, fentebb definiált α-kat fogjuk használni. Ebben a bizonyításban kényelmesebb a sokszöget óramutató járásával megegyező irányban körbejárni.

A körbejárás során fenn fogunk tartani három irányvektort, amelyek a legelőrébb ($d_{\text{előre}}$), leghátrébb ($d_{\text{hátra}}$), illetve az aktuális (d_{akt}) irányokat fogják jelölni. Ezt a három irányvektort a legegyszerűbb egy körlapon elképzelni és a következő módon fogjuk őket frissíteni a körbejárás során. A kezdetben a három megegyezik és egy tetszőleges irányba (mondjuk „felfelé”) mutatnak. Az irányvektorok és a szögek között egyértelmű a megfeleltetés és egy d irányvektorhoz tartozzon a $deg(d)$ szög. Legyen d_1 és d_2 két irányvektor, azt mondjuk, hogy $d_1 > d_2$, ha $0° < deg(d_1) - deg(d_2) < 180°$. A soron következő α-val a következőképpen frissítjük az irányvektorokat.

1. d_{akt}-hoz adjuk hozzá α-t. Vagyis, ha $\alpha < 0$, akkor óramutató járásával megegyező, különben azzal ellentétes irányba forgassuk el d_{akt}-ot $|\alpha|$-val.

2. Ha $d_{\text{akt}} > d_{\text{előre}}$, akkor legyen $d_{\text{hátra}} := d_{\text{előre}} := d_{\text{akt}}$.

3. Ha $d_{\text{akt}} < d_{\text{hátra}}$, akkor legyen $d_{\text{hátra}} := d_{\text{akt}}$. Ha most $d_{\text{előre}} - d_{\text{hátra}} > 180°$, akkor a sokszög visszafordult, az algoritmus jelenti, hogy a sokszög nem önközelítő és kilép.

4. Az algoritmus lép a következő csúcsra.

Az algoritmus kétszer végigjárva a csúcsokat észreveszi, ha visszafordul a sokszög. Azért kell kétszer körbejárni, hogy minden oldalt dolgozzunk fel olyan pillanatban, amikor a három irányvektorba bele van számolva az aktuális oldalt megelőző $n - 1$ oldal. □

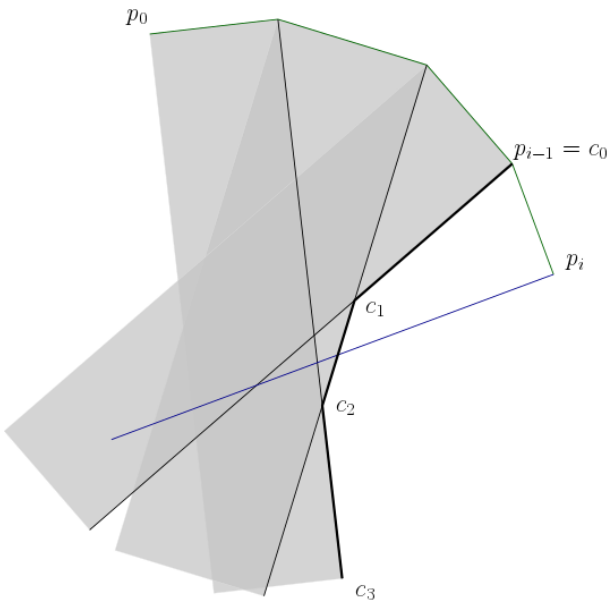
Az előző lemma miatt innentől feltehető, hogy a sokszög nem fordul vissza.

Legyenek a P csúcspontjai óramutató járásával ellentétes irányban a $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ pontok. Az óramutató járásával ellentétes körbejárási irányt nevezzük „előrének", a másik irányt „visszának". Az algoritmus egy $\rho_{\text{előre}}$ és egy $\rho_{\text{hátra}}$ töröttvonalakat épít, amelyek kezdetben üresek.

4.9. Megjegyzés. *Ha az algoritmus csak az egyik irányba építené fel a töröttvonalat, valószínűleg akkor is helyes lenne, de ez egy sokkal technikásabb bizonyítást igényelne.*

A következőkben $\rho_{\text{előre}}$ konstruálásával foglalkozunk, $\rho_{\text{hátra}}$ esete teljesen hasonló. A $\rho_{\text{előre}}$ csak az algoritmus elején üres, és ha már nem üres, akkor az utolsó szakasza speciálisan félegyenes. Ez a tulajdonság az egész algoritmus során teljesülni fog. A p_0 pontból „előre" irányba indulva az algoritmus végigjárja az oldalakat. Minden egyes $e_i = \overline{p_{i-1}p_i}$ oldalnál az e_i-re p_i-ből állított merőleges legyen h_i. Másképp fogalmazva, h_i az R_i félszalag azon félegyenese, amelyet p_i-ből húztunk. Az algoritmus h_i-vel frissíti a $\rho_{\text{előre}}$-t.

Ha $\rho_{\text{előre}}$ üres, akkor legyen $\rho_{\text{előre}} = h_i$. Ha $\rho_{\text{előre}}$ nem üres, akkor az algoritmus a következőt teszi. A $\rho_{\text{előre}}$ frissítéséhez járjuk be $\rho_{\text{előre}}$-nek minden $r_j = \overline{c_{j-1}c_j}$ szakaszát (c_0 mindig a sokszög egyik csúcsa lesz). Az egyszerűség kedvéért a töröttvonal utolsó részére, a félegyenesre is $\overline{c_{j-1}c_j}$-ként fogunk hivatkozni, ahol c_j-re gondolhatunk a megfelelő irányban lévő végtelen távoli pontként. Egy ilyen töröttvonal látható a 4.5 ábrán.



4.5. ábra. A $\rho_{\text{előre}}$ töröttvonal a c_0, c_1, c_2 és a speciális (végtelen távoli) c_3 pontokból áll

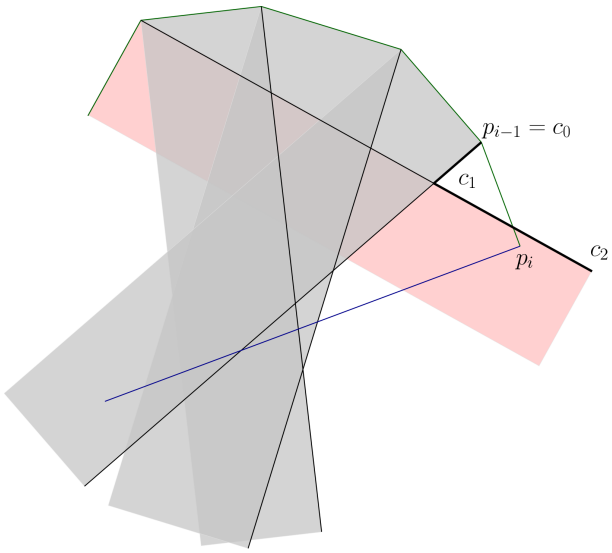
- Az e_i nem lehet egészében a $\rho_{\text{előre}}$ jobb oldalán (c_0-tól irányítva), hiszen akkor a p_i-ben lévő szöge nagyobb lenne, mint 270°, és ezt már ellenőriztük korábban.
- Ha az e_i p_i irányából nyitott, p_{i-1} irányából zárt szakasz metszi r_j-t, akkor a 4.4 következmény alapján P nem önközelítő, és az algoritmus kilép.
- Ha h_i metszi r_j-t, akkor a metszéspont legyen c' és $\rho_{\text{előre}}$ első néhány elemét r_j-ig cseréljük le a $\overline{p_ic'}$ és a $\overline{c'c_j}$ szakaszokra, majd lépjünk tovább a p_{i+1} pontra.

Ha egyik c_j-re sem teljesül a fentebbi felsorolás egyik pontja sem, akkor az eddigi $\rho_{\text{előre}}$-vel nem foglalkozva legyen $\rho_{\text{előre}} = h_i$. Vagyis az eddig épült töröttvonalat lecseréljük egy új félegyenesre, mert h_i nem metszett bele $\rho_{\text{előre}}$-be.

A 4.5 ábrán látható, hogy $\rho_{\text{előre}}$ szemléletesen a félszalagok uniójának a „jobb" oldalát jelenti.

Teljesen hasonló módon felépítjük $\rho_{\text{hátra}}$-t is. Itt a sokszöget „vissza" irányban járjuk végig és az oldalakhoz tartozó félszalagok másik oldalával fogjuk frissíteni a $\rho_{\text{hátra}}$-t.

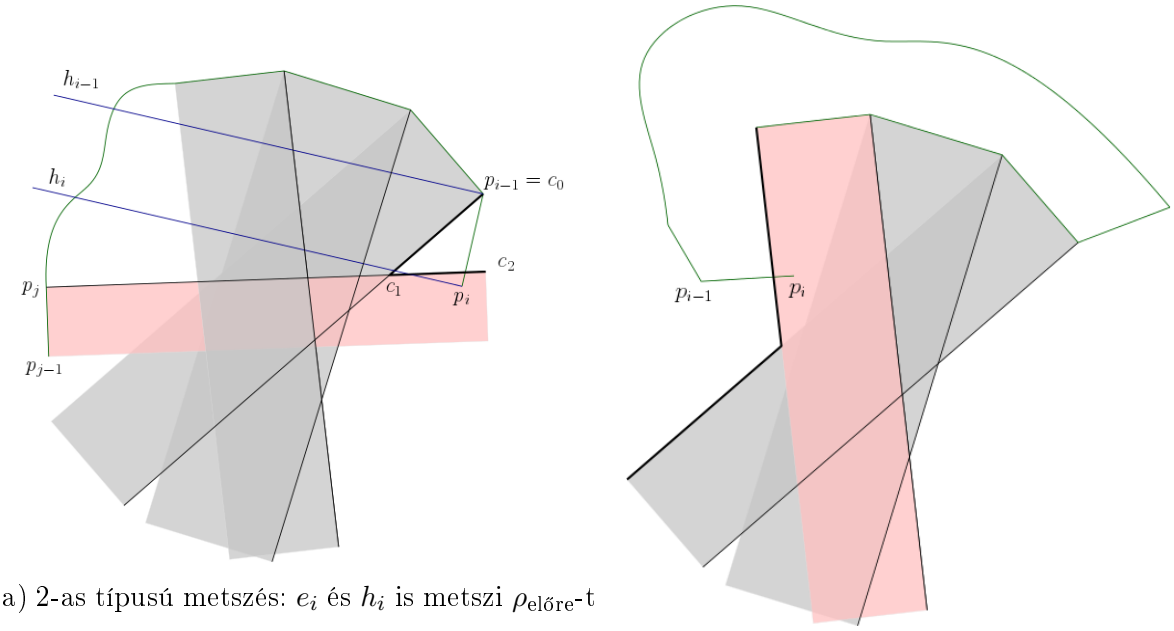
Az algoritmus P éleit végigjárja kétszer előre, majd szintén kétszer vissza irányban. Ha egyik e_i sem metszett bele $\rho_{\text{előre}}$-be vagy $\rho_{\text{hátra}}$-be, akkor P önközelítő. Azért kell kétszer körbejárni az oldalakat irányonként, hogy minden oldalt vizsgáljunk meg olyan állapotban, amikor az őt megelőző $n-1$ oldalt feldolgoztuk és a hozzájuk tartozó félszalagjaikkal frissítettük $\rho_{\text{előre}}$-t (és $\rho_{\text{hátra}}$-et). Ebből adódóan amikor a második kört kezdjük a végigjárásnál az adott irányban, akkor a $\rho_{\text{előre}}$-t és a $\rho_{\text{hátra}}$-t nem állítjuk vissza üresre.



4.6. ábra. 1-es típusú metszés

Tekintsük az „előre" irányú bejárását P határának. Különböztessünk meg három esetet. Az első két esetben elmetszi egy $e_i = \overline{p_{i-1}p_i}$ oldal $\rho_{\text{előre}}$-t. Az egyik eset, ha e_i elmetszi $\rho_{\text{előre}}$-t, de h_i nem, legyen ez az 1-es típusú metszés (4.6 ábra). A másik esetben e_i elmetszi $\rho_{\text{előre}}$-t miután h_i elmetszette. Nevezzük ezt 2-es típusú metszésnek (4.7a ábra). Ezenkívül e_i lehet, hogy egy másik oldalhoz tartozó félszalagba „hátulról" metsz bele (vagyis azt a határoló félegyenesét metszi el, amelyet nem használtunk fel $\rho_{\text{előre}}$ felépítéséhez), legyen ő a 3-as típusú metszés (4.7b ábra).

Tekintsünk egy töröttvonalat. Irányítsuk a szakaszait valamelyik irányba. A szakaszok kezdőpontjait mozgassuk egy közös origóba és a hosszukat módosítsuk egységhosszúságúra. Az így kapott struktúrát nevezzük a töröttvonalhoz tartozó óralapnak. Két szomszédos oldalnak megfelelő egységvektor az óralapon akkora szöget zár be, mint amekkora a két



(a) 2-as típusú metszés: e_i és h_i is metszi $\rho_{\text{előre}}$-t

(b) 3-as típusú metszés

4.7. ábra. 2-es és 3-as típusú metszések

szomszédos oldal kiegészítő szöge. A töröttvonal lehet zárt is, tehát ezt a reprezentációt sokszögekre is tudjuk alkalmazni. Lásd a 4.8 ábrát példáért.

4.10. Definíció. *Egy töröttvonalat konvexnek nevezünk, ha el lehet úgy forgatni, hogy egy konvex függvény grafikonja legyen.*

A konvexitás egy ekvivalens definíciója a következő.

4.11. Definíció. *Egy töröttvonalat konvexnek nevezünk, ha a hozzá tartozó óralapon az egységvektorok csak a kezdő szakasz vektorához tartozó egyenes egyik oldalán vannak és az egységvektorok a hozzájuk tartozó szakaszok sorrendjében követik egymást.*

Az algoritmus konstruálásánál láttuk, hogy a $\rho_{\text{előre}}$ és $\rho_{\text{hátra}}$ néha teljesen kidobódik és egy félegyenes lesz. A továbbiakban ρ-val fogjuk jelölni a $\rho_{\text{előre}}$ és $\rho_{\text{hátra}}$ két kidobás közötti részét, állapotát.

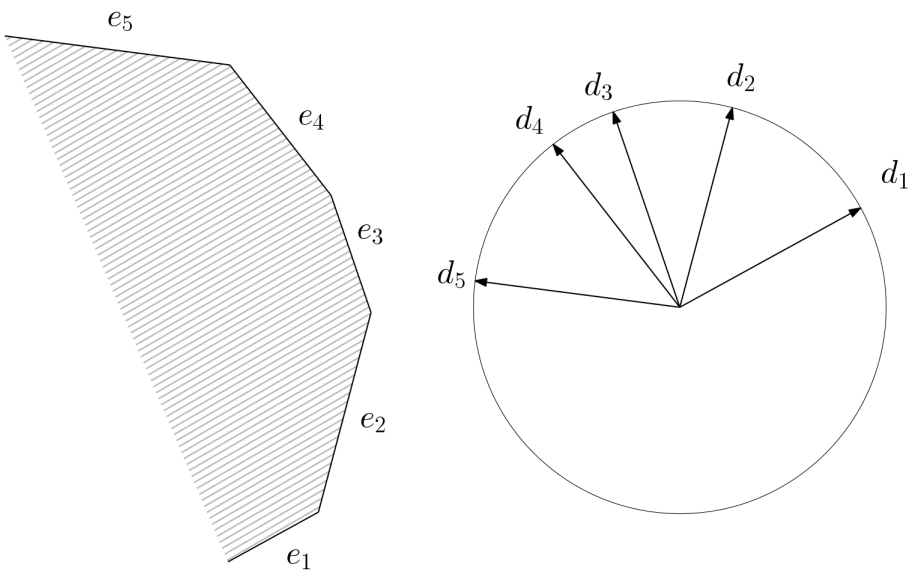
4.12. Állítás. *Az első metszésig ρ konvex és mindig egy irányba kanyarodik.*

Bizonyítás:

A p_i csúcsban az e_i oldalra állított h_i merőlegeshez tartozó egységvektort a óralapon jelölje d_i.

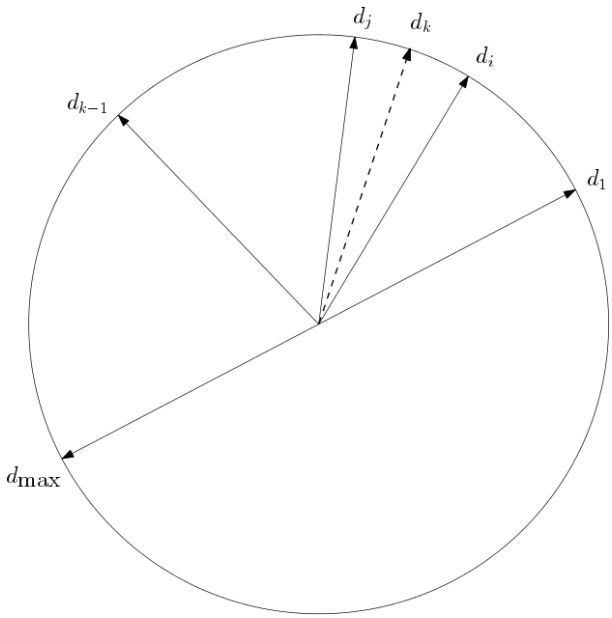
Ha egy szakaszból (ami speciálisan egy félegyenes) áll a ρ, akkor nyilván konvex. Tegyük fel, hogy $(k-1)$ oldalt már feldolgoztunk és a ρ még mindig konvex. Azt állítjuk, hogy a k. oldal feldolgozása után is konvex marad.

Feltehető, hogy ρ eddig óramutató járásával ellentétes irányban kanyarodott. A 4.9 ábra szemlélteti, hogyan nézhet ki az óralap az első $(k-1)$ oldal után. Tudjuk, hogy a sokszög nem fordul vissza (mert azt már ellenőriztük), tehát a 4.9 ábrán jelölt d_{max}



4.8. ábra. Egy sokszög részlete és a hozzá tartozó óralap. Az e_i oldalhoz a d_i irányvektor tartozik.

irányából nem lépheti át a d_1-hez tartozó egyenest a d_k. Ha (i) d_k a d_{k-1} és d_{max} vektorok között helyezkedik el, akkor a 4.11 definíció alapján ρ konvex marad. Ha (ii) a d_1-hez tartozó egyenest d_1 irányából átlépi a d_k, akkor h_k nem metsz bele a ρ-ba, tehát az algoritmus működése alapján az eddigi ρ-t, így az eddig d_i-ket kidobjuk és ρ csak egy félegyenesből fog állni, ami konvex.



4.9. ábra. A d egységvektorok egy lehetséges helyzete

Az az eset maradt, amikor a d_k két szomszédos d_i és d_j között helyezkedik el ($1 \leq i < j \leq k-1$), lásd szintén a 4.9 ábrát. Ez az eset teljesen hasonló az (ii) esethez, így ugyanazzal az indoklással h_k ρ-hoz való hozzávétele után minden $j \leq j'$-re $d_{j'}$ kidobódik a ρ-ból (illetve $i' \leq i$ indexű $d_{i'}$-k is kidobódhatnak) és így definíció szerint megint konvex

marad ρ, hiszen d_i-ig index szerint növekvő sorrendben vannak a d-k az indukciós feltevés alapján és d_k a d_i után van az óralapon ($k > i$).

A ρ konvex, így a 4.11 definíció alapján a megfelelő egységvektorok az oldalak sorrendjében követik egymást, ami pont azt jelenti, hogy a ρ vagy mindig jobbra vagy mindig balra kanyarodik. □

4.13. Megjegyzés. *Az előző bizonyítás végén a j' és az esetleges i' indexű d-k kidobása miatt nem biztos, hogy $i + 1 = j$, ezért valóban csak annyit tudunk róluk, hogy $i < j$.*

A 4.4 következményben a szükséges és elégséges feltételben félszalagok szerepelnek. Az algoritmus viszont csak a félszalagok elülső félegyenesével foglalkozik. Ezért a 3-as típusú metszést az algoritmus nem képes észrevenni. A következő állítás bizonyítja, hogy az algoritmus ennek ellenére helyes.

4.14. Állítás. *Tegyük fel, hogy létezik j, hogy az R_j-ben van a sokszögnek pontja. Ekkor létezik i, j, hogy $h_j \cap e_i \neq \emptyset$ és $j < i' < i$-re $p_{i'} \notin R_j$ és a sokszög p_j és p_i közötti hátárának első metszéspontja R_j-vel h_j-n van.*

Bizonyítás:

Ez az állítás csak egy átfogalmazása a 4.7 állításnak az algoritmusban használt jelölésekkel. Megfelelő h_j biztosan létezik, mert az algoritmusban mindkét irányban körbejárjuk a sokszöget. □

Nevezzük az ilyen (i, j) párokat *érdekeseknek*, a metszéspontjukat jelöljük p_{ij}-vel.

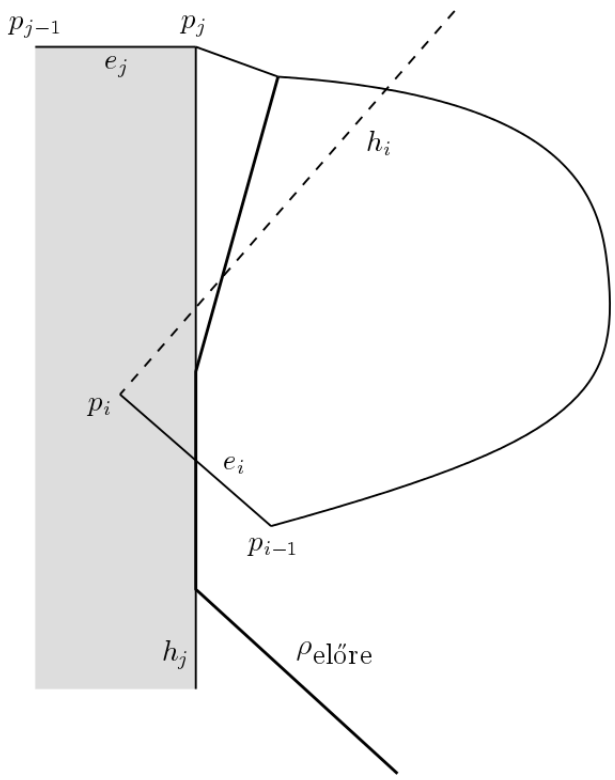
4.15. Következmény. *Ha létezik 3-as típusú metszés, akkor létezik 1-es vagy 2-es típusú is.*

4.16. Állítás. *Egy ρ építése közben legyen $e_i = \overline{p_{i-1}p_i}$ az első oldal, ami elmetszi egy már korábban vizsgált $e_j = \overline{p_{j-1}p_j}$ oldalhoz tartozó R_j félszalag elülső h_j félegyenesét és tegyük fel, hogy e_j-t is ugyanazon ρ építése közben vizsgáltuk meg. Ekkor ez a metszés 1-es típusú.*

Bizonyítás:

Ez a metszés 1-es vagy 2-es típusú. Tegyük fel, hogy 2-es típusú. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy az e_i-re p_i pontban állított kifelé mutató h_i merőleges elmetszi ρ-t mielőtt e_i metszené el. A 4.12 állítás alapján (mivel e_i az első metszés ρ-n) ρ konvex. Tehát h_j egy támasz egyenese ρ-nek, vagyis egyik oldalán van a ρ és a feltétel alapján a másikon a p_i. Ha ebből a p_i-ből állított h_i elmetszi ρ-t, akkor szükségszerűen h_j-t is. Ez viszont csak úgy történhet meg, ha az e_j oldalt vízszintesnek képzelve, e_i felfelé halad, lásd a 4.10 ábrát. Ekkor viszont e_i visszafordult e_j-hez képest, pedig a 4.8 lemma alapján tudjuk, hogy a sokszög nem fordulhat vissza, mert azt már korábban észrevettük volna. Tehát a metszés nem lehet 2-es típusú, ezzel beláttuk az állítást. □

4.17. Következmény. *Az algoritmus elején a visszafordulás ellenőrzésével kizártuk a 2-es típusú metszéseket.*



4.10. ábra. az e_i visszafordul e_j-hez képest, ha h_i metszi $\rho_{\text{előre}}$-t

4.18. Lemma. *A minimális $(i-j)$ különbségű (i,j) érdekes párhoz tartozó e_j és e_i oldalakat egyazon ρ építése közben dolgozza fel az algoritmus.*

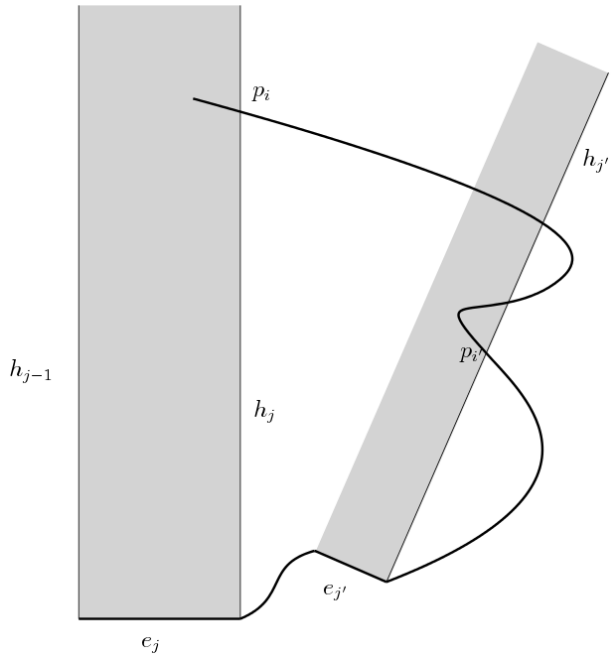
Bizonyítás: Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az aktuális ρ-t az e_j-ből kezdjük el felépíteni. Ha nem e_j-ből kezdjük, akkor is hasonlóan meggondolható a bizonyítás. A szimmetria miatt feltehető, hogy e_j-hez képest e_i az óramutató járással ellentétes irányban áll az óralapos reprezentációban.

Tegyük fel indirekt, hogy nem egyazon ρ építése közben dolgozzuk fel e_j-t és e_i-t. Ez úgy történhet meg, ha létezik egy $j < j' < i$, hogy $e_{j'}$ az e_j-hez képest az óramutató járásával megegyező irányban áll az óralapos reprezentációban, lásd a 4.11 ábrát. Ekkor tudjuk, hogy létezik töröttvonal (a sokszög határának egy része) $p_{j'}$ és p_{ij} között. Ez a töröttvonal nem metszi h_{j-1}-et és nyilván a sokszög határának más részét sem, így szükségszerűen elmetszi $h_{j'}$-t. Az első metszése $h_{j'}$-vel egy érdekes pár lesz valamilyen i'-re. Mivel $j' < j$ és $i' < i$ ezért az (i', j') érdekes párnak kisebb a különbsége, mint (i,j)-nek, ami ellentmond a feltevésnek. □

Beláttuk, hogy a minimális $(i-j)$ különbségű (i,j) érdekes párhoz tartozó e_j és e_i oldalakat egyazon ρ építése közben dolgoztuk fel. A 4.16 lemma alapján a (h_j, e_i) metszés csak 1-es típusú lehet, tehát az algoritmus észreveszi és sikeresen jelenti, hogy a sokszög nem önközelítő.

Ha pedig a sokszög önközelítő, akkor egyik e_i oldal sem fogja metszeni egyik ρ-t sem és az algoritmus azt fogja mondani, hogy önközelítő a sokszög.

Ezzel beláttuk az algoritmus helyességét.



4.11. ábra. Ha új ρ-t kezdünk építeni e_j és e_i között, akkor nem (i, j) a minimális érdekes pár

4.19. Lemma. *A fenti algoritmus futásideje $O(n)$.*

Bizonyítás:

Minden egyes iterációban feleannyi szakaszt törlünk $\rho_{\text{előre}}$-ből, ahány metszés ellenőrzést végeztünk és $\rho_{\text{előre}}$-hez legfeljebb 2 szakaszt adtunk hozzá (az aktuális h_i merőleges egy részét, illetve a ρ egy szakaszának egy részét). Tehát egy bejárás során legfeljebb $2n$-et töröltünk ki, így legfeljebb $4n$ metszés ellenőrzést hajtottunk végre. Tehát a futásidő valóban lineáris. □

4.1.2. Lyukas sokszögek önközelítősége

A P sokszögre tekinthetünk egy épület alaprajzaként is. Nagyobb épületekben statikai okok miatt gyakran oszlopokat helyeznek el az épületen belül is. Ez motiválja a következő megfontolásokat, állításokat.

Képezzük a P' sokszöget úgy a P sokszögből, hogy köröket vágunk ki belőle.

4.20. Állítás. *Ha a P sokszögben tetszőleges $p \in P$ középpontú tetszőleges sugarú D körlemezre igaz, hogy $D \cap P$ egy komponensből áll, akkor tetszőleges $p' \in P'$ középpontú tetszőleges sugarú D' körlemezre is teljesül, hogy $D' \cap P'$ egy kompeóonensből áll.*

4.21. Állítás. *Ha P' önközelítő, akkor tetszőleges $p' \in P'$ középpontú tetszőleges sugarú D' körlemezre is teljesül, hogy $D' \cap P'$ egy komponensből áll.*

Ha a sokszögből kisebb sokszögeket vágunk ki, akkor a 4.3 tétel bizonyításához hasonlóan belátható, hogy nem lehet önközelítő.

Vizsgáljuk meg önközelítőség szempontjából egyszerű sokszögek bizonyos csoportját.

4.22. Definíció. *Ortogonálisnak nevezünk egy sokszöget, ha szögei csak* $90°$ *vagy* $270°$*-osak.*

4.23. Definíció. *Monotonnak nevezünk egy sokszöget, ha létezik egy Descartes-féle koordinátarendszer úgy, hogy a sokszög tetszőleges két pontja között létezik a tengelyekkel párhuzamos út, és ennek az útnak a tengelyekkel párhuzamos komponensei monotonak (függvényként tekintve rájuk).*

A monotonitás egy ekvivalens definíciója a következő.

4.24. Definíció. *Rögzítsünk egy koordinátarendszert. A sokszög határát osszuk fel négy görbére a sokszög legészakibb, legkeletibb, legdélibb és legnyugatibb pontja mentén. A sokszög monoton, ha a kapott négy görbe* x *és* y *irányban is monoton (vagyis a deriváltja nem vált előjelet).*

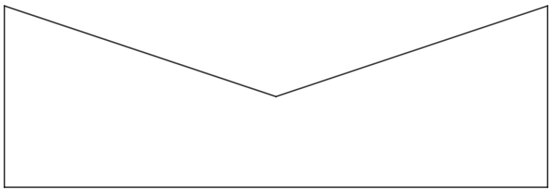
4.25. Állítás. *A monoton ortogonális sokszögek önközelítőek.*

Bizonyítás:
A sokszög monoton, így tetszőleges két pontja között van lépcsős függvény, amelynek a tengelyekkel párhuzamos komponensei monotonak. Ez az út önközelítő a 3.7 lemma alapján. □

Ha a lépcsőket egyre sűrűbben vesszük, akkor ez a lépcsős út sorozat tartani fog egy görbéhez. A konvergencia megtartja az önközelítőséget, így ez a görbe is önközelítő. Ebből következik, hogy ha egy görbe x és y irányú deriváltjai nem váltanak előjelet, akkor a görbe önközelítő. Kapjuk a következő állítást.

4.26. Állítás. *A monoton sokszögek önközelítőek.*

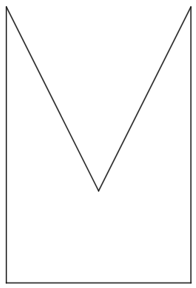
A ábrán látható példa monoton és önközelítő.



4.12. ábra. Önközelítő sokszög, ami monoton

Ha nagyobb törés lenne az ötszögben, akkor már nem lenne önközelítő, hiszen például az ötszög felső három csúcsa a 4.13 ábrán nem teljesíti az önközelítőség definíciójában szereplő egyenlőtlenséget.

Felmerülhet a kérdés, hogy a nem túl sok oldalú sokszögek közül melyek önközelítőek. Triviálisan minden konvex sokszög önközelítő. A konkáv négyszögek közül viszont már nem mindegyik önközelítő. Ennek okát a 4.5 következmény írja le.



4.13. ábra. Nem önközelítő ötszög

4.2. Önközelítő sokszögek robot esetében

A dolgozatban eddig csak pontszerű testtel foglalkoztunk. Lehetséges gyakorlati felhasználások miatt adódik a kérdés, hogy milyen állításokat tudunk megfogalmazni, ha egy kiterjedéssel rendelkező tárgy számára keresünk önközelítő utat. Ezentúl a tárgyat nevezzük robotnak, és tegyük fel, hogy kör alakú (és hogy bármilyen irányba képes mozogni). Azt mondjuk, hogy a robot önközelítő úton halad, ha a robot középpontja által bejárt út önközelítő. Feltehető, hogy a robot egységnyi sugarú. A robotot jelöljük R-rel.

Egy robot egy P alakzatban csak úgy tud mozogni, hogy a robot határa sosem metszi el P határát, érinteni érintheti (ez az a természetes feltevés, hogy a robot a falba beleütközik).

Az alatt, hogy R egy p pontban van, azt értjük, hogy R középpontja éppen p.

Vizsgáljuk meg, hogy a robot P-n belül milyen területen tud mozogni. Például, ha P egy négyzet, akkor a számára elérhető terület egy kisebb négyzet lesz P-n belül. Ha P-nek van 90°-nél nagyobb szöge, akkor a robot számára elérhető terület határa körívet is fog tartalmazni, ami bentről nézve konkáv. Tehát a terület egy olyan „sokszög” lesz, aminek a 90°-nél nagyobb szögei „le vannak kerekítve”.

4.27. Definíció. *Legyen P sokszög, R robot. Legyen P_R a P komplementerének és R Minkowski-összegének a komplementere.*

Szemléletesen P_R P-nek azon részhalmaza, ahol R lehet, tehát ahol tartózkodva nem metszi át P határát. (P, R) párral jelöljük azt a rendszert, amiben R a P-ben mozog.

4.28. Definíció. *Legyen P sokszög, R robot. A (P, R) akkor önközelítő, ha P_R tetszőleges két pontja között létezik önközelítő út R számára.*

Pontszerű test esetében már ismerünk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy P mikor önközelítő (4.3 tétel). P önközelítőségéből nem tudunk következtetni (P, R) önközelítőségére:

Ha (P, R) önközelítő , abból nem következik az, hogy P is az a pontszerű test esetében. Erre példa egy négyzet, amiből kiáll egy keskeny kampó alak. Ez nem önközelítő a pontszerű test számára, de R számára az, mert a kampó részbe R nem fér be, így R csak a négyzetben mozoghat, ami konvex, így önközelítő.

Hasonlóan ha P önközelítő a pontszerű test esetében, abból nem következik az, hogy (P, R) is az. Hiszen tekintsünk egy homokóraszerű sokszöget, amely középen olyan keskeny, hogy R nem fér át rajta. Ez pontszerű tárgy esetén önközelítő, de R számára nem.

4.29. Kérdés. *Az utóbbi példában R robot számára nem érhető el P minden pontja (azaz (P, R) nem összefüggő). Nem ismert olyan példa arra, hogy pontszerű önközelítőségből ne következzen (P, R) önközelítősége, ha (P, R) összefüggő marad.*

4.30. Állítás. *(P, R) önközelítő akkor és csak akkor, ha tetszőleges $p \in P_R$ középpontú D körlemezre $D \cap P_R$ egy komponensből áll.*

A bizonyítása hasonlóan történik, mint a 4.3 tételé.

4.3. Önközelítő poliéderek

A monoton ortogonális sokszögekhez hasonlóan lehet definiálni a monoton ortogonális poliédereket is.

4.31. Definíció. *Ortogonálisnak nevezünk egy poliédert, ha létezik egy Descartes-féle koordinátarendszer úgy, hogy a sokszög oldalai a tengelyekre merőlegesek.*

Az ortogonális poliéderekre gondolhatunk úgy is, mint amiket kis kockákból ragasztottuk őket össze.

4.32. Definíció. *Monotonnak nevezünk egy poliédert, ha létezik egy Descartes-féle koordinátarendszer úgy, hogy a poliéder tetszőleges két pontja között létezik a tengelyekkel párhuzamos út, és ennek az útnak a tengelyekkel párhuzamos komponensei monotonak (függvényként tekintve rájuk).*

A monoton ortogonális sokszögekhez kimondott állítás megfelelője térben is igaz:

4.33. Állítás. *A monoton ortogonális poliéderek önközelítőek.*

Bizonyítás:
A 3.7 lemma alapján triviális. □

4.34. Állítás. *Ha a poliéder önközelítő, akkor a poliéder és egy tetszőleges gömb, melynek közeppontja a poliéderben van, metszete egy komponensből áll.*

Bizonyítás: Legyen P önközelítő poliéder. Megmutatjuk, hogy ekkor bármely $p \in P$ középpontú S gömbre teljesül, hogy $S \cap P$ egy komponensből áll. Tegyük fel, hogy létezik ennek ellentmondó (p, S) pár. Ekkor válasszunk egy s pontot abból a komponensből, amiben p nincsen benne. Tetszőleges s-ből p-be vezető út elmetszi S felszínét, tehát az útnak létezik olyan s és p közötti r pontja, melyre $|sp| < |rp|$, amely ellentmond az önközelítőségnek.

4.35. Kérdés. *Önközelítő poliéderekre nem ismert elégséges feltétel.*

4.36. Állítás. *Önközelítő poliéderben a legrövidebb út mindig önközelítő.*

5. fejezet

Sokszög kerneljének keresése

Ebben a fejezetben egy olyan problémát mutatok be, ami elsőre függetlennek tűnik a önközelítő utaktól, de később kiderül, hogy fontos szerepet játszanak a probléma megoldásában.

Tegyük fel, hogy egy 360°-ban látó robot felébred egy ismeretlen környezetben. A feladata az, hogy egy olyan helyre menjen, ahonnan belátja az egész környezetet, és ezt minél hatékonyabban tegye meg.

A problémát a következőképpen modellezhetjük. A robot egy pont, a környezet pedig egy P egyszerű sokszög. Nyilván, P-nek csillag alakúnak kell lennie ahhoz, hogy létezzen pont, ahonnan be lehet látni az egész sokszöget – a pontos meghatározásért lásd az 5.3 definíciót. Egy adott p pontban a robot tisztában van a „láthatósági sokszöggel", $vis(p)$-vel (5.2 definíció). A megoldás költségét a robot által megtett út hosszában mérjük.

Ha robot előre ismerné a sokszöget, akkor ki tudná számolni a kerneljét (5.3 definíció) és az s kezdőpontból rögtön a kernel legközelebbi pontjához, k-hoz tudna menni. Vegyük észre, hogy mivel a kernel minden pontjából látható a sokszög minden pontja, speciálisan a kezdőpont is, ezért a robot csak egy egyenes mentén mozogna, ami az optimális $d(s, k)$ költségű megoldást eredményezi. Ennek a részleteiért lásd az [5] és [6] cikket.

5.1. Definíció. *Egy algoritmus egy PC optimalizációs problémacsaládra c-kompetitívnek nevezünk, ha minden $P \in PC$ problémára az algoritmus által adott megoldás nem rosszabb, mint a P-re adható legjobb megoldás c-szerese.*

Mutatni fogok egy algoritmust a fent leírt problémára, ami 5,48-kompetitív.

5.1. Láthatóság sokszögben

A P sokszög legyen egyszerű, tehát lyukmentes.

5.2. Definíció. *Legyen p és q két pont P-ben. Azt mondjuk, hogy q látható p-ből, ha a $\overline{pq}$ szakasz P-ben van. A p-ből látható P-beli pontok halmazát p láthatósági sokszögének nevezzük és $vis(p)$-vel jelöljük.*

5.3. Definíció. *A P kerneljének nevezzük és $ker(P)$-vel jelöljük, azon P-beli pontok halmazát, amelyekre teljesül, hogy a láthatósági sokszögük a teljes P. Ha $ker(P)$ nem üres, akkor P-t csillag alakúnak mondjuk.*

Néhány észrevétel:

- A láthatóság szimmetrikus tulajdonság.
- Csak konvex P-kre teljesül, hogy $ker(P) = P$. Különben a sokszögnek van legalább egy csúcsa, ahol a belső szög nagyobb, mint 180°, ezeket a csúcsokat nevezzük *konkáv csúcsoknak.*
- Minden e oldala P-nek két félsíkra osztja a síkot, a belső félsíknak nevezzük azt, amelyik lokálisan tartalmazza P-t.

5.4. Állítás. *A P oldalaihoz tartozó belső félsíkok metszete $ker(P)$.*

Bizonyítás:

Egy e oldal csak az e-hez tartozó belső félsíkból látható. A $ker(P)$ halmazban olyan pontok vannak, ahonnan az egész P látható, speciálisan az oldalak is. Tehát $ker(P) \subseteq \bigcap_e H_e$, ahol H_e az e-hez tartozó belső félsík.

A másik irányú tartalmazáshoz legyen $x \in \bigcap_e H_e$. Be kell látni, hogy $x \in ker(P)$. Tegyük fel, hogy létezik $y \in P$, hogy x-ből y nem látható, vagyis $\overline{yx} \notin P$. Ekkor a y-ból induló x-en átmenő félegyenes elmetsz egy f oldalt még x előtt (ha több ilyen f is van, vegyük az elsőt). Nyilván $y \in H_f$ és $x \notin H_f$. Utóbbi viszont ellentmond az $x \in \bigcap_e H_e$ feltevésnek.

Kapjuk, hogy $ker(P) = \bigcap_e H_e$. □

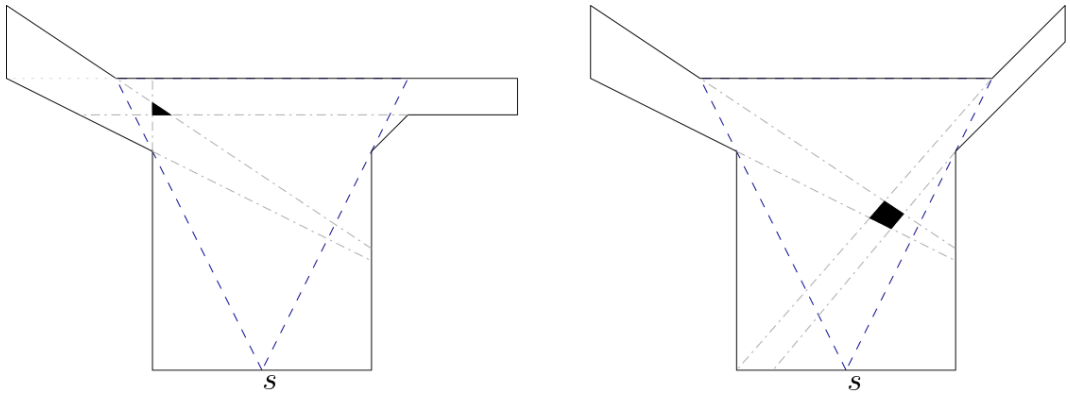
5.5. Következmény. *$ker(P)$ konvex, hiszen félsíkok metszete konvex.*

Rögzítsünk egy $p \in P$ pontot. A $vis(p)$ csillag alakú és $ker(vis(p))$ tartalmazza p-t. A $vis(p)$ határa kétféle szakaszból állhat:

1. A P sokszög oldalaiból, illetve az oldalai részeiből.
2. „Áloldalakból", amelyek p-ből induló, konkáv csúcsot érintő félegyenesen vannak rajta, és egyik végpontjuk a konkáv csúcs, a másik pedig a félegyenes P-vel való (első) metszéspontja a konkáv csúcs után.

Az áloldal P-t két részre: az egyik oldalon p-ből látható pontok vannak, a másikon nem. Utóbbi részét P-nek nevezzük *barlangnak.* $vis(p)$ határa akkor és csak akkor nem tartalmaz áloldalt, ha $p \in ker(P)$.

Az 5.1 ábrán látható két sokszög egészen hasonló, az s pontból ugyanaz a láthatósági sokszög, a kerneljük mégis jelentősen különböző. Tehát egy s pontban állva nem sok információ áll a robot rendelkezésére a sokszög kerneljéről. Azt viszont tudja, hogy a sokszög kerneljét látja, sőt a következő állítás alapján a láthatósági sokszög kerneljének részhalmaza a sokszög kernelje és a láthatósági sokszög növekedésével a láthatósági sokszög kernel mérete csökken.



5.1. ábra. Az s pontból ugyanaz a láthatósági sokszög, mégis teljesen más a két sokszög kernelje

5.6. Lemma. *Legyen u és v P két pontja úgy, hogy $vis(v) \subseteq vis(u)$. Ekkor teljesül a következő:*

$$ker(P) \subseteq ker(vis(u)) \subseteq ker(vis(v)).$$

Bizonyítás:

Legyen $x \in ker(P)$, és jelöljük P'-vel $vis(u)$-t. Az első tartalmazáshoz meg kell mutatni, hogy $x \in ker(P')$. Az x pont kernelpont P-ben, ezért látja u-t, ami szimmetrikus tulajdonság, tehát $x \in vis(P)$, és tetszőleges $y \in P'$-re is tudjuk, hogy $\overline{xy}$ P-ben van. Ha $\overline{xy}$-t elmetszené P' határa, akkor az x vagy y pont barlangban lenne u-ból nézve, de tudjuk, hogy mindketten $vis(u)$-ban vannak. Tehát $\overline{xy} \subset P'$, tetszőleges P'-beli y-ra, tehát x-ből mindent lehet látni P'-ben, ami azt jelenti, hogy $x \in ker(vis(u))$.

A feltevés alapján $v \in vis(v) \subseteq vis(u) = P'$. Ekkor a már bizonyított első tartalmazást alkalmazva P'-re és v-re kapjuk, hogy $ker(P') \subseteq ker(vis_{P'}(v))$. A bizonyítás befejezéséhez még be kell látnunk, hogy $vis_{P'}(v) = vis(v)$. A $vis_{P'}(v) \subseteq vis(v)$ teljesül, hiszen $\overline{vx}$ P'-ben és így P-ben is (hiszen $P' \subseteq P$). A $vis(v) \subseteq vis_{P'}(v)$ tartalmazás meggondolásához vegyünk egy x-et $vis(v)$-ből. A feltétel alapján $\overline{vx} \subset vis(v) \subseteq vis(u) = P'$ és így $x \in vis_{P'}(v)$. Ezek alapján az állítás második tartalmazása is teljesül. □

5.2. Sokszög kerneljét kereső algoritmus

Tegyük fel, hogy P csillag alakú. Egy szakaszhoz tartozó félsíkok alatt értsük a szakasz egyenese által meghatározott félsíkokat. Az s kezdőpontban a robot ellenőrzi, hogy $vis(s)$-t határolja-e áloldal. Ha nem, akkor s benne van $ker(P)$-ben és az algoritmus kilép. Különben a robotnak olyan irányba kell mozognia, hogy a barlangokba egyre jobban belásson és közben a már látott területet ne veszítse szem elől. A robot úgy tud többet látni egy barlangból, ha a hozzátartozó áloldal belső félsíkjába lép (vagyis amelyik nem tartalmazza a barlangot). Ekkor az áloldal a konkáv csúcs körül „befordul” a barlangba. Emellett úgy kell mozognia, hogy a P már látott oldalainak belső félsíkját sosem hagyja el (speciálisan P-n belül kell maradnia). Ezeket a következő két definíció fogalmazza meg precízen.

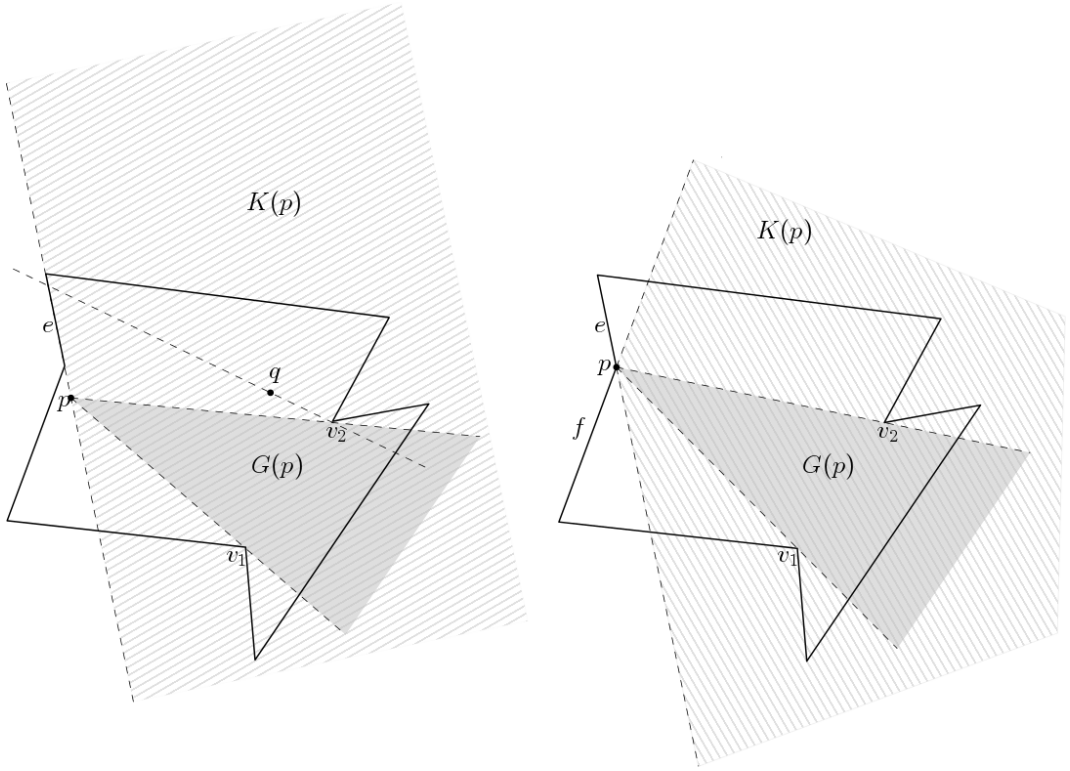
Félsíkok üres halmazának a metszete legyen a teljes sík.

5.7. Definíció. *Jelöljük $G(p)$-vel a „növelő éket", amely a $vis(p)$ áloldalaihoz tartozó belső félsíkok metszete. Azon konkáv csúcsokat, amelyek az ék két támasz félegyeneséhez tartoznak maximális megszorító csúcsoknak nevezzük.*

5.8. Definíció. *Jelöljük $K(p)$-vel a „megtartandó éket", amely azon oldalakhoz tartozó belső félsíkoknak a metszete, amelyeken p rajta van, vagy amelyek láthatóak p-ből és p rajta van az egyenesükön.*

Az 5.2 ábrákon satírozottal van jelölve a $K(p)$, illetve teli szürkével $G(p)$. Mindkét ábrán a p ponthoz két maximális megszorító csúcs létezik, v_1 és v_2. Az első ábrán q-hoz viszont csak egy megszorító csúcs tartozik (v_2), így $G(q)$ egy félsík. Az első ábrán q nincsen rajta egyik oldalon sem és egyik oldal egyenesén sem, így $K(q)$ a teljes sík. Ezzel szemben $K(p)$ az e oldal belső félsíkja, hiszen p rajta van az e oldal egyenesén.

A második ábrán p egy konkáv csúcsban helyezkedik el, ezért $K(p)$ az e és f oldalakhoz tartozó belső félsíkok metszete lesz.



5.2. ábra. Az ábrákon satírozottan van jelölve a megtartandó ék és teli szürkével a növelő ék

5.9. Megjegyzés. *A megtartandó ék definíciója azt fejezi ki, hogy lokálisan merre tud továbbhaladni a robot úgy, hogy a már látott területet ne veszítse szem elől. Egy általános pontból bármerre mehet, ezért lesz ott a $K(p)$ a teljes sík. Ha egy konkáv csúcsban áll, akkor a csúcshoz tartozó két oldal belső félsíkjainak metszete felé haladhat csak anélkül, hogy barlang alakulna ki, tehát például ilyenkor a $K(p)$ nem a teljes sík.*

5.10. Megjegyzés. *Ha az éket csak egy félsík határolja, akkor speciálisan az ék szöge* $180°$*, aminél nagyobb a szög nem is lehet, ha legalább egy félsíkot metszünk össze.*

Egy p pont $ker(P)$-ben van akkor és csak akkor, ha $G(p)$ a teljes sík, hiszen $p \in ker(P)$ akkor és csak akkor teljesül, ha nincsen áloldala a láthatósági sokszögének és a félsíkok üres halmazának metszete a teljes sík. A másik irányhoz használni kell azt a meggondolást, hogy ha félsíkok halmazának a metszete a teljes sík, akkor szükségszerűen a halmaz üres.

A következő lemma megmutatja, hogy $G(p) \cap K(p)$-be lépnie a robotnak mindig lehetséges, és ezáltal a $vis(p)$ monoton nő.

5.11. Lemma. *Egy p pont elég kicsi környezetében $ker(vis(p)) = G(p) \cap K(p) \neq \emptyset$. Ha p-ből a robot ebbe a halmazba mozog, akkor $vis(p)$ nő, vagy ha p már eddig is a $ker(P)$-ben volt, akkor nem változik.*

Bizonyítás:

A $ker(vis(p))$ háromféle félsík-típus összemetszéséből áll. Az egyik típusba tartoznak a $vis(p)$ áloldalainak belső félsíkjai. A második típushoz tartoznak azok a belső félsíkjai P oldalainak, amelyek tartalmazzák p-t. A harmadik típusú félsíkok olyan oldalakhoz tartoznak, amelyek egyenesei nem metszenek bele u kellően kicsi környezetébe. Ezzel beláttuk, hogy $ker(vis(p)) = G(p) \cap K(p)$.

Az 5.6 lemma alapján $ker(P)$-t tartalmazza $ker(vis(p))$-t, így nem üres.

A $K(p)$ olyan halmaz, hogy $vis(p)$ nem csökken, ha belelép a robot, viszont $vis(p)$ nő $G(p)$-be lépve. Tehát a $G(p) \cap K(p)$ konstrukciója miatt $vis(p)$ nő, hacsak p már nem tartozik $ker(P)$-be, mert akkor nem változik. □

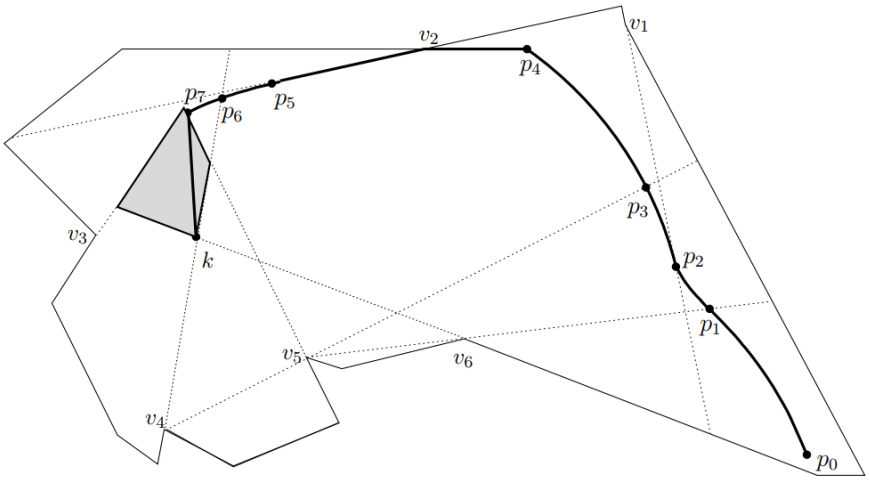
Az 5.6 és 5.11 lemmákat összevetve következik, hogy ha mindig a $G(p) \cap K(p)$ halmazba lépünk, akkor $ker(vis(p))$ folyamatosan csökken és $ker(P)$ mindig benne van, tehát előbb-utóbb $ker(vis(p))$ meg fog egyezni $ker(P)$-vel.

Most már megfogalmazhatjuk az algoritmust.

$p \Leftarrow s$
while $vis(p) \neq P$ **do**
  a $G(p)$ növelő ék kiszámolása
  $m \Leftarrow G(u)$ szögfelező merőleges
  if m kilép a $K(p)$ megtartandó ékből **then**
    m-et vetítsük $K(p)$-ra és haladjunk amentén
  else
    haladjunk m mentén
menjünk az s-hez legközelebbi $k \in ker(P)$ ponthoz

Az 5.3 ábrán az algoritmus által generált út látható egy sokszögben. Az ábra a [3] cikkből van.

Néhány észrevétel az algoritmushoz:



5.3. ábra. A robot mozgása egy sokszögben az algoritmus alapján. Az ábra a [3] cikkből van.

1. Az IF igaz ágában az m szögfelezőt a $K(p)$-nak arra a határoló félegyenesére vetítjük, amivel kisebb, mint 90°-ot zár be.

2. Az algoritmus végén, amikor a robot már a sokszög kerneljének egy pontjában van, de nem feltétlenül az s-hez legközelebbiben, akkor már ismeri az egész sokszöget, és így ismert algoritmusokkal ki tudja számolni a sokszög kerneljét, így meg tudja határozni a k pontot.

3. Az algoritmus könnyen módosítható nem csillag alakú sokszögekre: minden iterációban ellenőrzi, hogy $G(p) \cap K(p)$ üres-e. Ha igen, akkor az 5.6 és 5.11 lemma alapján tudja, hogy a $ker(P)$ is üres és jelenti, hogy a sokszög nem csillag alakú.

4. Az algoritmusnak folytonosnak kell lennie. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy a robot sebességéhez képest nagyon gyakran kell frissíteni az irányát.

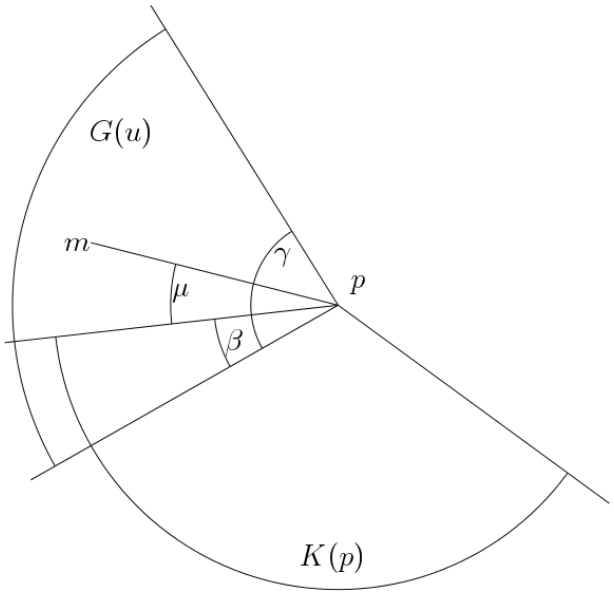
Az 5.4 ábra arra mutat példát, amikor az algoritmusban az IF feltétele teljesül.
A következő lemmában az 5.4 ábrának a jelöléseit használjuk.

5.12. Lemma. *Ha a $G(p)$ m szögfelező merőlegese kilép $K(p)$-ből, akkor m a $K(p)$ ék pontosan egyik támasz félegyenesével $\mu < 90°$ szöget zár be. Ezért a $K(p)$-re való vetítése jól definiált. $G(p) \cap K(p)$ metszete $\beta \leq 90°$ nagyságú ék.*

Bizonyítás: Nyilvánvalóan $\mu = \gamma/2 - \beta \leq 90° - \beta \leq 90°$. Egyenlőség csak akkor teljesülhetne a $K(p)$ mindkét határoló félegyenesére, ha $G(p)$ és $K(p)$ is 180°-os ék lenne és diszjunktak lennének a belsejeik. Mivel $ker(P)$ benne van a metszetükben 5.11 lemma alapján, ezért u már belát azokba a barlangokba, amik belejátszottak a $G(p)$ definiálásába. Ez viszont ellentmond a $G(p)$ definíciójának.

$\beta \leq 90°$, mert $\mu > 0°$, hiszen a feltevés alapján m kilép $K(p)$-ből. □

5.13. Lemma. *Az algoritmus által generált út ellipszisek és hiperbolák részeiből áll.*



5.4. ábra. Az m szögfelező kilép $K(p)$, ezért a $K(p)$ egyik támasz félegyenesén folytatja útját a robot

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy a $G(p)$ éket két maximális megszorító csúcs határozza meg. Ekkor az 5.5 ábrán látható két eset egyike áll fenn. Az első esetben a $G(p)$-t alkotó két félegyenes p-ből indul és áthalad v_1 és v_2 konkáv csúcsokon. Ha a robot tesz egy kis lépést α szögben $\overline{pv_1}$-hez képest, akkor a távolsága v_1-hez képest $cos(\alpha)$ arányban változik. Mivel ez az irányú elmozdulás $\overline{pv_2}$-vel is α szöget zár be, ezért v_2-höz képest is $cos(\alpha)$-t arányban változik a robot távolsága, vagyis a $d(p, v_1) - d(p, v_2)$ mennyiség állandó, tehát a robot egy hiperbola pályán mozog.

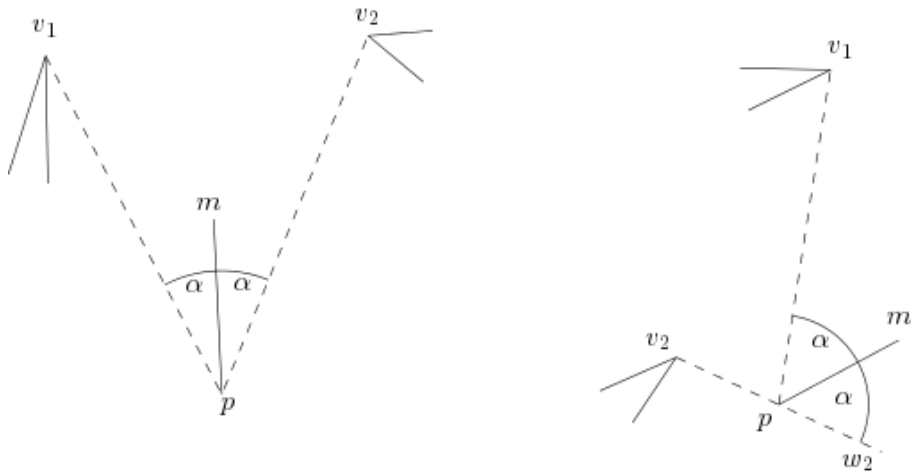
A második esetben a $G(p)$ egyik határoló félegyenese p-ből indul és átmegy v_1-en, a másik v_2-ből és átmegy p-n. Ha v_2-t tükrözzük p-re, akkor az így kapott w_2 pontra és v_1-re teljesül a bizonyítás előző része, miszerint $d(p, v_1) - d(p, w_2)$ állandó, vagyis $d(p, v_1) + d(p, v_2)$ is állandó. Tehát a görbe, amit a robot leír egy ellipszisen van, aminek a fókuszpontja v_1 és v_2.

Ha $G(p)$-t csak egy maximális megszorító csúcs határozza meg, akkor ez speciális esete a fent leírt második esetnek és a robot egy köríven mozog. □

5.14. Lemma. *Az algoritmus által generált út $O(n)$ darab részből áll, ahol n a P csúcsainak a száma.*

Bizonyítás:

Ha az algoritmusban az IF-ben az ELSE ág hajtódik végre, akkor a robot útjának aktuális része, szegmense csak akkor érhet véget, ha valamelyik maximális megszorító csúcs megváltozik. Ez akkor történhet meg, ha láthatóvá válik egy új konkáv csúcs és a hozzátartozó áloldal félsíkja belemetsz a mostani $G(p)$-be, vagy ha a jelenlegi maximális megszorító csúcs megszűnik annak lenni (vagyis amikor a hozzátartozó barlang teljesen láthatóvá válik a robot számára). A sokszög csúcsai számára mindkét esemény csak egyszer-egyszer



5.5. ábra. A szögfelező görbéje vagy hiperbolát vagy ellipszist ír le

tud megtörténni, hiszen a $vis(p)$ monotonon nő, tehát egy csúcs nem tud láthatóvá válni, majd eltűnni, majd megint láthatóvá válni, illetve ha egy barlangba teljesen belát már a robot, akkor ez a későbbiekben sem fog változni.

Ha az algoritmusban a THEN ág hajtódik végre, akkor a robot elérte a P egy oldalának egyenesét és azon mozog tovább. A robot később csak akkor tud újra ugyanannak az oldalnak az egyenesén haladni, ha egy maximális megszorító csúcs megváltozott. Utóbbiról pedig már láttuk, hogy csak egyszer történhet meg. Vagyis az algoritmus által adott út valóban $O(n)$ darab részből áll. □

5.15. Lemma. *Minden $p \in M$ pontra $M(p,k) \subset ker(vis(p))$.*

Bizonyítás:

Tudjuk, hogy az algoritmus mindig $K(p) \cap G(p)$-be lép. Az 5.11 lemmából adódóan a láthatósági sokszög monoton nő, tehát $q \in M(p,k)$-ra $vis(p) \subseteq vis(q)$ és így az 5.6 lemma miatt $ker(vis(q)) \subseteq ker(vis(p))$. A q pont pedig nyilvánvalóan benne van $ker(vis(q))$-ban. □

5.16. Tétel. *Az algoritmus által generált irányított M út s-ből az s-hez legközelebbi k kernelpontba önközelítő út.*

Bizonyítás:

Legyen $p \in M$. Az 5.11 lemma alapján $ker(vis(p))$-t határolja a $K(p) \cap G(p)$ ék. Megmutatjuk, hogy p-ben egy normális M-re nem metszi $K(p) \cap G(p)$-t.

Az algoritmusban ha a robot a $G(p)$ m szögfelezőjén halad, akkor egyrészt tudjuk, hogy a $G(p)$ ék legfeljebb 180°-os, másrészt $K(p) \cap G(p) \subseteq G(p)$. Tehát az m-re állított merőleges p-ben nem metszheti $K(p) \cap G(p)$-t.

Ha az algoritmusban a robot a $K(p)$ egyik támasz félegyenesét követi, akkor 5.12 lemma alapján a $K(p) \cap G(p)$ szöge legfeljebb 90°, ezért a normális $K(p) \cap G(p)$ egyik támasz egyenesére nem metsz bele $K(p) \cap G(p)$-be.

Összevetve az 5.15 lemmával az eddigieket azt kapjuk, hogy $M(p,k) \subset ker(vis(p)) \subseteq K(p) \cap G(p)$, és $K(p) \cap G(p)$-ről tudjuk, hogy nem metszi el a p-ben állított normális, így 3.7 lemma miatt M önközelítő. $\square$

5.17. Következmény. *A fent leírt algoritmus 5,48-kompetetív a nem bizonyított 3.25 tétel alapján.*

6. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatban bemutattuk az önközelítő utakat. A 3. fejezetben jellemeztük őket különböző állítások segítségével, beláttuk a félsík-tulajdonság lemmát, ami az önközelítő utaknak egy ekvivalens definícióját biztosította. Bebizonyítottuk, hogy egyszerű sokszögekben két pont között a legrövidebb önközelítő út egyértelmű. A legrövidebb utat karakterizáltuk, beláttuk róla, hogy csak szakaszokból, körívekből, illetve a 2. fejezetben definiált evolvensekből állhat. Röviden leírtuk az algoritmust, amely bizonyos feltételek mellett megtalálja a legrövidebb önközelítő utat egyszerű sokszögben.

A 4. fejezetben olyan sokszögeket tárgyaltunk, amelyekben két tetszőleges pont között létezik önközelítő út. Ezeket hívtuk önközelítő sokszögeknek. Néhány elemi megfigyelés és állítás után bemutattunk egy lineáris futásidejű algoritmust, amely képes eldönteni egy sokszögről, hogy önközelítő-e. Helyességét és futásidejét részletesen megvizsgáltuk. Foglalkoztunk az önközelítő sokszögek problémájával pontszerű tárgyak helyett robotok esetében, illetve tettünk néhány elemi megfigyelést az önközelítő poliéderekkel kapcsolatban.

Az utolsó, 5. fejezetben egy problémát mutattunk be, amelyben egy robotnak egy számára ismeretlen sokszögben kell megtalálni a hozzá legközelebbi pontot, ahonnan az egész sokszöget belátja. A láthatósági sokszög, kernel, növelő és megtartandó ékek definíciói után számos lemmát ismertettünk és bizonyítottunk, amelyek segítségével adtunk a problémára egy megoldást, egy algoritmust. Az algoritmus által generált útról beláttuk, hogy önközelítő út (nem feltétlenül a legrövidebb), ezáltal felső becslést tudtunk adni a robot által megtett út hosszára.

Irodalomjegyzék

[1] S. Alamdari, T. M. Chan, E. Grant, A. Lubiw, and V. Pathak, „Self-approaching graphs," in *Graph Drawing* (W. Didimo and M. Patrignani, eds.), (Berlin, Heidelberg), pp. 260–271, Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[2] P. Bose, I. Kostitsyna, and S. Langerman, „Self-Approaching Paths in Simple Polygons," in *33rd International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2017)* (B. Aronov and M. J. Katz, eds.), vol. 77 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, (Dagstuhl, Germany), pp. 21:1–21:15, Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2017.

[3] C. Icking and R. Klein, „Searching for the kernel of a polygon—a competitive strategy," in *Proceedings of the eleventh annual symposium on Computational geometry*, pp. 258–266, ACM, 1995.

[4] M. Laczkovich, „The removal of π from some undecidable problems involving elementary functions," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 131, pp. 2235–2240, 2002.

[5] D. T. Lee and F. P. Preparata, „An optimal algorithm for finding the kernel of a polygon," *J. ACM*, vol. 26, pp. 415–421, July 1979.

[6] R. Cole and M. T. Goodrich, „Optimal parallel algorithms for polygon and point-set problems," in *Proceedings of the Fourth Annual Symposium on Computational Geometry*, SCG '88, (New York, NY, USA), pp. 201–210, ACM, 1988.