Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematika Intézet

Szakdolgozat

Operátorszeletelési eljárások és alkalmazásai aerodinamikai modellekre

Készítette:
Boda Lívia
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Alkalmazott Matematikus MSc

Témavezetők:
Faragó István
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

és
Kalmár-Nagy Tamás
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Áramlástan Tanszék

Budapest
2019

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Faragó Istvánnak, aki a mesterszakos tanulmányaim alatt mindvégig támogatott, biztatott és segítette az előremenetelemet valamint, hogy precizitásával, szakértelmével és ötleteivel hozzájárult a szakdolgozatom elkészítéséhez.

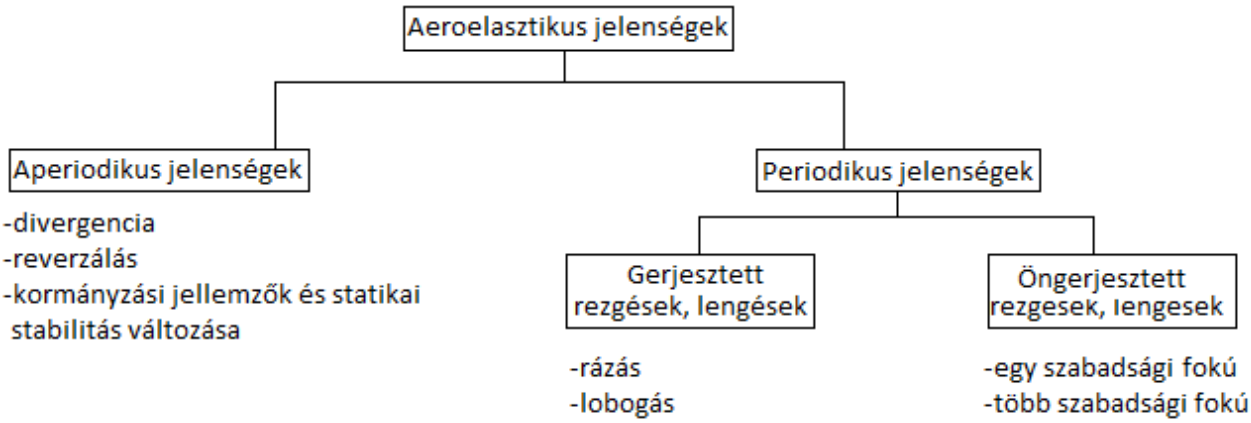
Emellett szeretném megköszönni az Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék összes oktatójának a sok érdekes témát és előadást, melyek segítségével bővíthettem ismereteim.

Végül, de nem utolsó sorban hatalmas köszönettel tartozom szüleimnek és testvéremnek, hogy tanulmányaim során mindvégig mellettem álltak, támogattak és biztattak.

1. Bevezetés

A numerikus analízis a matematika tudományágának egy elengedhetetlen alkotóeleme. A folytonos modellek szintjén számos analitikusan megoldhatatlan probléma merül fel a matematika más ágazataiban, továbbá más tudományokban, a műszaki területtől kezdve a meteorológián át a közgazdaságtanig. Ugyanakkor ezek esetén mégis szükséges valamilyen módon jellemeznünk (kvalitatív és kvantitatív módon egyaránt) a megoldást. Ez a legtöbb esetben nélkülözhetetlen és megkerülhetetlen az adott jelenség viselkedésének megértéséhez, elemzéséhez és sok esetben az optimalizálásához. Az ilyen és ehhez hasonló esetekben a numerikus analízis szolgáltatja a megoldást a problémára.
Mesterszakos tanulmányaim alatt lehetőségem volt közelebbről is megismerkedni az alkalmazott analízis egy széleskörűen elterjedt és eredményesen használt eszközével, az operátorszeleteléssel, amelyről a szakdolgozatom is szól.

A dolgozat négy részből áll, melyek közül az első részben az operátorszeletelés alapgondolata és az alkalmazott operátorszeletelési eljárások mellett a munkánk során megfogalmazott sejtések és ezek bővebb magyarázatai kerülnek bemutatásra.
Az ismertetett operátorszeletelési módszerek alkalmazhatóságát egy aerodinamikai, ezen belül is egy aeroelasztikus modellen vizsgáltuk, mely modellt a dolgozat második részében vezetünk be. Az aeroelsztikus jelenségek értelmezéséhez tekintsünk példaként egy repülőgép szárnyát. A szárny, a rajta ébredő terhelések hatására, általában rugalmasan deformálódik. A deformáció hatására megváltozik a szárny alakja és a deformáció időbeli változása alapján értelmezhetjük a deformáció sebességét is. Ezek a tényezők befolyásolják, megváltoztatják a szóban forgó szárny terhelését. Ezzel egy kölcsönösen összefüggő jelenségcsoportot nyerünk, és a légerők, a tehetetlenségi erők és a rugalmas erők (illetve ezen erők nyomatékai) együttes hatására előálló folyamatot nevezzük aeroelasztikus jelenségnek. Többféle aeroelasztikus jelenség létezik, amelyeket az alábbi rendszerbe foglalhatjuk össze.



1. ábra. Az aeroelasztikus jelenségek csoportosítása

Az aeroelasztikus jelenségek ugyan egyidősek a repüléssel, azonban a jelentőségük az utóbbi időkben folyamatosan nő, mivel a repülési sebesség növekedésével, az egyre karcsúbb szerkezetek alkalmazásával, illetve a modern vezérlési és szabályozási rendszerek elterjedésével válnak egyre fontosabbá ezen jelenségek vizsgálatai.
Az általunk vizsgált aeroelasztikus rendszer, az 1. ábrán látható táblázatban a periodikus jelenségek rész, öngerjesztett rezgések, lengések pontjának több szabadsági fokú esetéhez tartozik.

A vizsgált modell egy szakaszonként lineáris aeroelasztikus jelenséget ír le, amely egy szélcsatornabeli kísérletből származó adathalmazon alapszik. Az adatpontok elhelyezkedéséből kiindulva egy szakaszonként lineáris függvény illeszthető a pontokra, mely függvény három szakaszból áll, ennek következtében az egész aeroelasztikus modell is három szakaszból épül fel.
A dolgozat második részében részletes bemutatásra kerül a modell, a felépítésétől, az egyszerűsítésein át eljutunk a lineáris rendszerekig, amelyek esetén a későbbiekben vizsgáljuk az első részben bemutatott módszerek alkalmazhatóságát.

A jelenséget leíró modell felírása után a dolgozat harmadik részében a különböző szakaszokra kapott rendszerek egyensúlyi helyzeteinek meghatározásai valamint ezek stabilitásvizsgálatai szerepelnek. A folytonos modell stabilitásvizsgálata elengedhetetlen ahhoz, hogy a későbbiekben megértsük, értelmezni tudjuk a felépített diszkretizált modellek viselkedését. A három szakasz közül az első kettő stabilitási vizsgálata már megtalálható az irodalomban, az erre vonatkozó eredmények a [4] cikkben szerepelnek. Az eredményeket adó számításokat rekonstruáltuk, eközben találtunk egy hibát a cikkben, melyet sikerült kijavítanunk, és a szakdolgozatban már a helyes formulák, számítások és eredmények szerepelnek. Ezek után, ennek mintájára végeztük el, a még hiányzó, harmadik szakaszra vonatkozó stabilitási analízist.

A vizsgált modell bemutatása és stabilitásvizsgálata után, a dolgozat utolsó részében erre a modellre alkalmazzuk az első részben taglalt operátorszeletelési eljárásokat, különböző felbontásokat vezetünk be, majd ezeket felhasználva állítjuk elő a diszkretizált modelleket. Az így nyert numerikus eljárások esetén vizsgáljuk a pontossági rend, a lépésköz valamint a futási idő kapcsolatát is. Összehasonlítjuk egyszerűbb numerikus módszerek eredményeivel, ezzel bizonyítva, hogy az operátorszeletelés alkalmazása bizonyos feltételek mellet igen előnyös és gazdaságos lehet.

Munkánk során a számításokat kézzel és szimbolikus programcsomagok (elsősorban Mathematica) segítségével végeztük el. Számításaink alátámasztására számítógépes szimulációkat végeztünk: bifurkációs diagramokat, fázisportrékat, az egyensúlyi pontok elhelyezkedését szemléltető ábrákat készítettünk (A MATLAB programcsomag segítségével). A numerikus megoldásokat saját kódolású numerikus módszerekkel állítottuk elő. (Ehhez főként a MATLAB programcsomagot használtuk.)

2. Operátorszeletelés és realizálása

Az operátorszeletelés (angolul "operator splitting") a numerikus analízis egy széleskörűen elterjedt és sikeresen alkalmazott eszköze, mely segítségével bonyolult felépítésű feladatokat egyszerűbb szerkezetű feladatok sorozatára vezetünk vissza úgy, hogy a kapott részfeladatokat a kezdeti feltételeiken keresztül kapcsoljuk össze. Ezzel lényegesen megkönnyítve az eredeti bonyolult feladat numerikus megoldásának meghatározását.

Az operátorszeletelés elméletéről bővebben a [1] könyvben olvashatunk. A dolgozatban csak az alapgondolatot valamint az alkalmazott módszereket ismertetjük röviden.

2.1. Az operátorszeletelés alapgondolata

Tekintsük a következő, operátoralakban felírt, Cauchy problémát az $\mathbf{X}$ Banach térben

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t)}{\partial t} = Ay(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i y(t) \quad t \in [0,T) \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

ahol $y : [0,T] \to \mathbf{X}$ az ismeretlen függvény, $y_0 \in \mathbf{X}$ adott kezdeti feltétel, $A_i : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ $(i = 1, \ldots, n)$ adott operátorok.
Tekintsük most a véges dimenziós esetet, amikor $\mathbf{X}$ véges dimenziós tér, továbbá legyenek az A_i operátorok speciális alakúak, méghozzá lineáris operátorok. Ami azt jelenti, hogy ez esetben az A_i operátoraink mátrixok. Ebben az esetben az (2.1) Cauchy-feladat pontos megoldása formálisan közvetlenül is felírható:

$$y(t) = \exp(tA)y(0). \tag{2.2}$$

Amely megoldás előállítása többnyire csak formális, ezért kiszámítását a gyakorlatban valamilyen numerikus módszer segítségével végezzük el. Valójában ez azt jelenti, hogy valamilyen racionális függvénnyel approximáljuk az exponenciális függvényt, azaz

$$\exp(z) \sim r(z). \tag{2.3}$$

Ekkor a numerikus módszerünk algoritmusa a következő:

$$y^{n+1} = r(hA)y^n, \tag{2.4}$$

ahol $h > 0$ a diszkretizációs paraméter (lépésköz), az y^n vektor pedig a $t = nh$ időrétegbeli közelítés.

Amikor a (2.3) típusú approximációt alkalmazzuk az (2.1) feladatra, akkor valójában az $\exp\left(\sum_1^d z_i\right)$ függvényt kell közelítenünk. Ennek egy lehetséges módja a (2.3) approximáció, amikor is előbb approximáljuk az exponenciális függvényt, és utána helyettesítjük be összegként az operátort. Ezzel természetesen nem tudjuk kihasználni az operátor speciális alakját.

Az operátorszeletelés alapötlete, hogy a (2.3) approximáció során az $\exp\left(\sum_1^d z_i\right)$ függvényt első lépésben nem racionális, hanem az egyes részoperátorok exponenciálisainak segítségével approximáljuk.

2.2. A felhasznált módszerek

Ebben az alfejezetben bemutatjuk a későbbiekben felhasznált operátorszeletelési eljárásokat, nevezetesen a szekvenciális és Strang-Marcsuk splitting módszereket, melyek a leghagyományosabb és leggyakrabban alkalmazott eljárások közé tartoznak. Ismertetjük a módszerek alapgondolatait valamint felvázoljuk az algoritmusaikat, melyeket példákon keresztül ábrákkal teszünk szemléletessé.

Tekintsük a $(0, T]$ vizsgált intervallum ekvidisztáns felbontását:

$$\omega_h = \left\{ t_n = n \cdot h, h = \frac{T}{N}, n = 0, 1, ..., N \right\}.$$

A szekvenciális splitting egy könnyen realizálható módszer, mely első rendben közelíti az adott probléma pontos megoldását. Tehát adott az (2.1) Cauchy-feladat, amely megoldását a szekvenciális splitting módszer alkalmazásával szeretnénk megkapni az ω_h rácshálón. Ehhez valamennyi rögzített $n = 1, 2, \ldots, N$ értékre rendre megoldjuk a következő d darab Cauchy-feladatot:

$$\begin{cases} \dot{y}_i^n(t) = A_i y_i^n(t), & t \in \big((n-1)h, nh\big], \\ y_i^n\big((n-1)h\big) = y_{i-1}^n(nh), \end{cases} \tag{2.5}$$

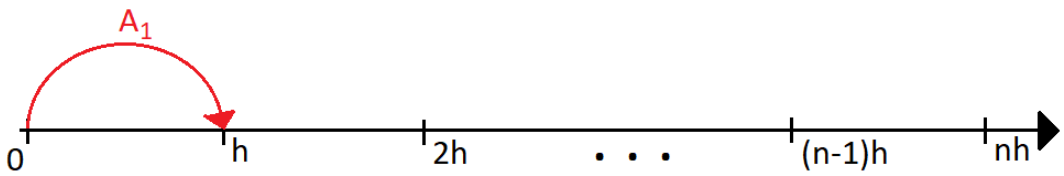
ahol $i = 1, 2, \ldots, d$.
Ekkor a szeletelt megoldás a következő

$$y_{szekv}^N(nh) = y_d^n(nh)$$

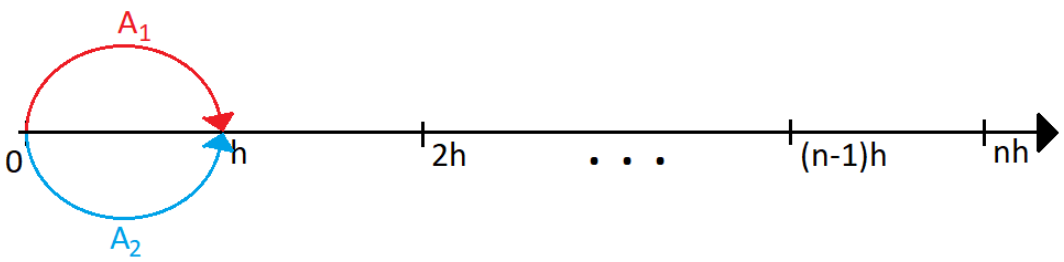
és az algoritmusban $y_0^n(nh) = y_{szekv}^N\big((n-1)h\big)$, valamint $y_{szekv}^N(0) = y(0)$, az (2.1) kezdeti feltételből ismert y_0 vektor.
Az algoritmus ekkor a következő:

$$\underbrace{A_1 \to A_2 \to \ldots A_d}_{1.\,lepes} \Rightarrow \underbrace{A_1 \to A_2 \to \ldots A_d}_{2.\,lepes} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \underbrace{A_1 \to A_2 \to \ldots A_d}_{N.\,lepes}$$

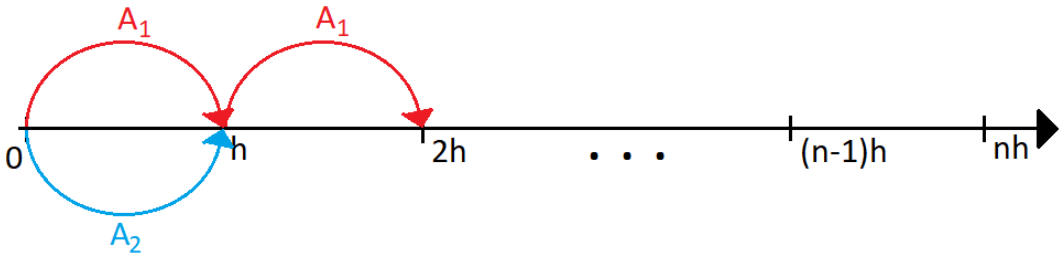
Az algoritmust érdemes egy ábrán szemléltetni a könnyebb megértés érdekében. Legyen $i = 1, 2$, ekkor tehát az eredeti A operátorral felírt (2.1) Cauchy-feladatunkat két másik Cauchy-feladatra bontottuk fel, rendre A_1 és A_2 operátorokkal.
Az algoritmus első lépésében először megoldjuk az első részfeladatot a $(0, h]$ intervallumon, az eredeti (2.1) feladat $y(0)$ kezdeti feltételét felhasználva:



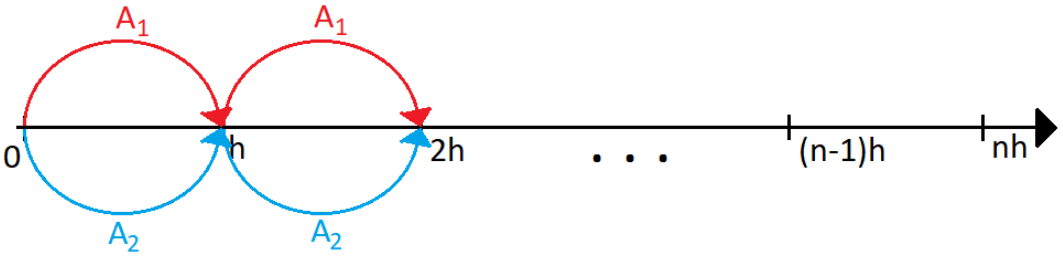
Az így kapott h-beli megoldás, azaz $y_1^1(h)$, lesz a következő részfeladatunk kezdeti feltétele.
A következő lépésben a második feladatot oldjuk meg, szintén a $(0, h]$ intervallumon, az előbb említett kezdeti feltétellel:



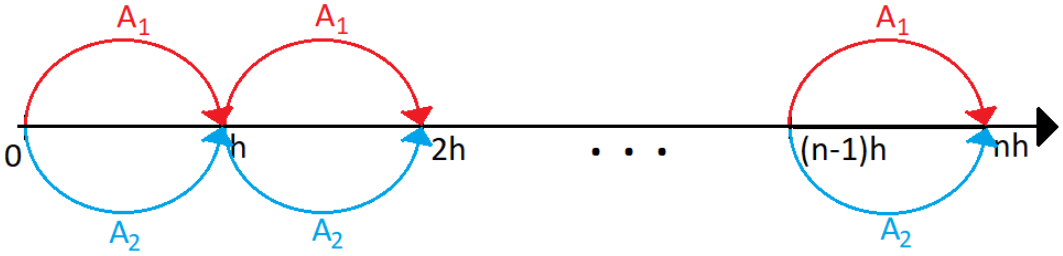
Az így kapott megoldás lesz a h-beli splittingelt megoldás, azaz $y_2^1(h) = y_{szekv}(h)$. Valamint ez a megoldás lesz a következő lépésben megoldott részfeladat kezdeti feltétele.
A második lépésben a $(h, 2h]$ intervallumon oldjuk meg az első részfeladatot, az előbb említett kezdeti feltételt felhasználva:



Az így kapott $y_1^2(2h)$ megoldás lesz a következő feladat kezdeti feltétele.
Ezután megoldjuk szintén a $(h, 2h]$ intervallumon a második részfeladatot, az előbbi kezdeti feltétellel:



Így kapjuk meg a $2h$-beli splittingelt megoldást, azaz $y_2^2(2h) = y_{szekv}(2h)$.
Ezt az eljárást ismételve az egész ω_h rácsháló, kapjuk meg a kívánt közelítő megoldást a $(0, T]$ intervallumon.



A Strang-Marcsuk splitting eljárás annyiban különbözik a szekvenciális splitting módszertől, hogy nem csak az ω_h rácsháló pontjaiban, hanem a részintervallumok felezőpontjaiban is meghatároz értékeket, ezzel másodrendűvé téve a módszert.

A rögzített $n = 1, 2, \ldots N$ értékekre rendre megoldjuk a következő, összességében $2d-1$ darab Cauchy-feladatot. Először $i = 1, 2, \ldots, d-1$ értékekre megoldjuk a

$$\begin{cases} \dot{y}_i^n(t) = A_i y_i^n(t), & t \in \big((n-1)h, (n-0.5)h\big], \\ y_i^n\big((n-1)h\big) = y_{i-1}^n\big((n-0.5)h\big) \end{cases} \tag{2.6}$$

feladatokat. Ezután megoldjuk az alábbi feladatot.

$$\begin{cases} \dot{y}_d^n(t) = A_d y_d^n(t), & t \in \big((n-1)h, nh\big], \\ y_d^n\big((n-1)h\big) = y_{d-1}^n\big((n-0.5)h\big) \end{cases} \tag{2.7}$$

A rögzített n mellett végezetül $i = d+1, d+2, \ldots, 2d-1$ értékekre megoldjuk a következő feladatokat.

$$\begin{cases} \dot{y}_i^n(t) = A_i y_i^n(t), & t \in \big((n-0.5)h, nh\big], \\ y_i^n\big((n-0.5)h\big) = y_{i-1}^n\big(nh\big) \end{cases} \tag{2.8}$$

Ekkor a szeletelt megoldás a következő

$$y_{SM}^N(nh) = y_{2d-1}^n(nh)$$

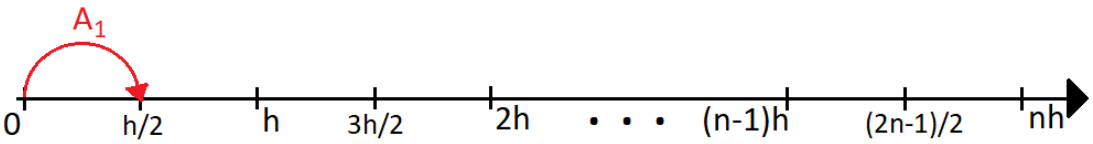
és az algoritmusban $y_0^n\big((n-0.5)h\big) = y_{SM}^N\big((n-1)h\big)$, valamint $y_{SM}^N(0) = y(0)$, az (2.1) kezdeti feltételből ismert y_0 vektor.
Az algoritmus tehát a következő:

$$\underbrace{\frac{1}{2}A_1 \to \frac{1}{2}A_2 \to \ldots \frac{1}{2}A_{d-1}}_{1a.\,lepes} \to \underbrace{A_d}_{1b.\,lepes} \to \underbrace{\frac{1}{2}A_{d-1} \to \frac{1}{2}A_{d-2} \to \ldots \frac{1}{2}A_1}_{1c.\,lepes} \Rightarrow$$

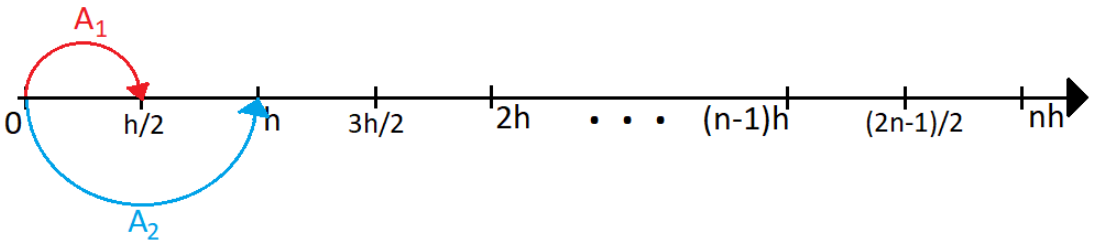
$$\Rightarrow \ldots\ldots\ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}A_1 \to \frac{1}{2}A_2 \to \ldots \frac{1}{2}A_{d-1}}_{Na.\,lepes} \to \underbrace{A_d}_{Nb.\,lepes} \to \underbrace{\frac{1}{2}A_{d-1} \to \frac{1}{2}A_{d-2} \to \ldots \frac{1}{2}A_1}_{Nc.\,lepes}$$

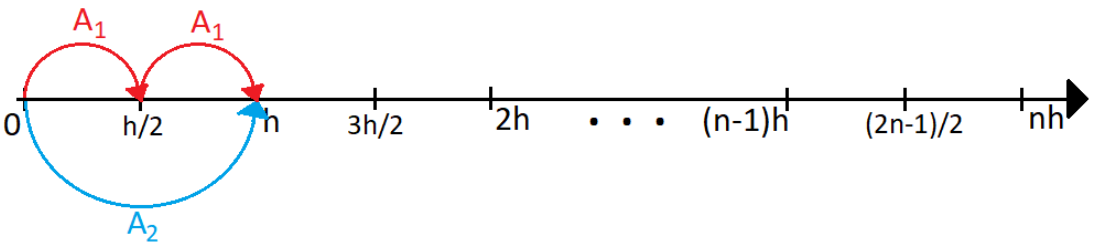
Ismételten érdemes az algoritmust ábrákon szemléltetni a könnyebb megértés érdekében. Legyen újra $i = 1, 2$, ekkor tehát az eredeti A operátorral felírt (2.1) Cauchy-feladatunkat két másik Cauchy-feladatra bontottuk fel, rendre A_1 és A_2 operátorokkal.
Az algoritmus első lépésében először megoldjuk az első részfeladatot a $\big(0, \frac{1}{2}h\big]$ intervallumon, az eredeti (2.1) feladat $y(0)$ kezdeti feltételét felhasználva:



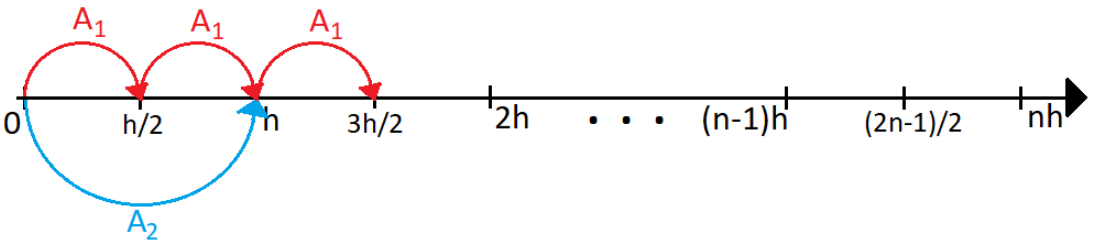
Az így kapott $\frac{1}{2}h$-beli megoldás, azaz $y_1^1\big(\frac{1}{2}h\big)$, lesz a következő részfeladatunk kezdeti feltétele.
A következő lépésben a második feladatot oldjuk meg a $(0, h]$ intervallumon, az előbb említett kezdeti feltétellel:



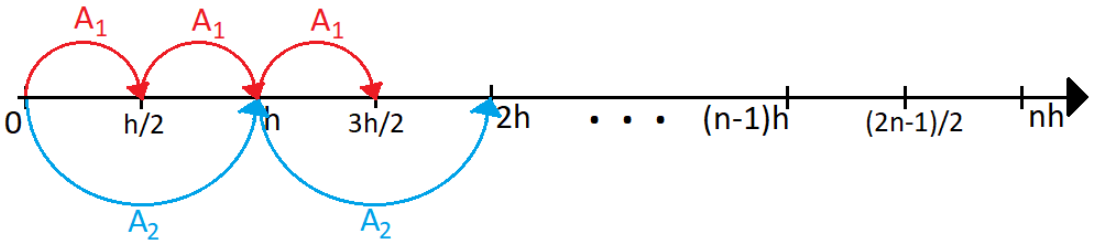
Az így kapott h-beli megoldás, azaz $y_2^1(h)$, lesz a következő részfeladatunk kezdeti feltétele.
A következő lépésben újra az első feladatot oldjuk meg, de most a $\big(\frac{1}{2}h, h\big]$ intervallumon, az előbb említett kezdeti feltétellel:



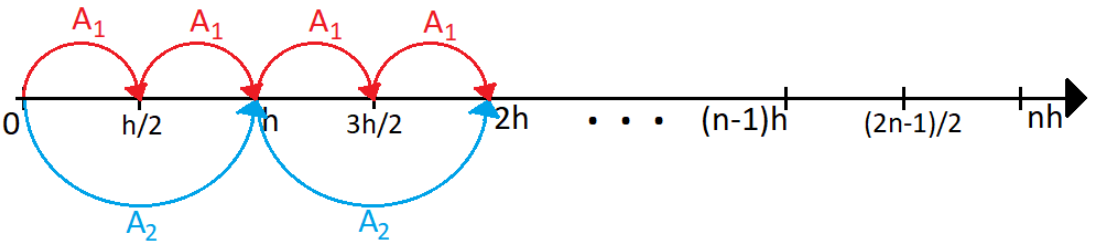
Az így kapott megoldás lesz a h-beli splittingelt megoldás, azaz $y_1^1(h) = y_{SM}(h)$. Valamint ez a megoldás lesz a következő lépésben megoldott részfeladat kezdeti feltétele.
A második lépésben a $(h, \frac{3}{2}h]$ intervallumon oldjuk meg az első részfeladatot, az előbb említett kezdeti feltételt felhasználva:



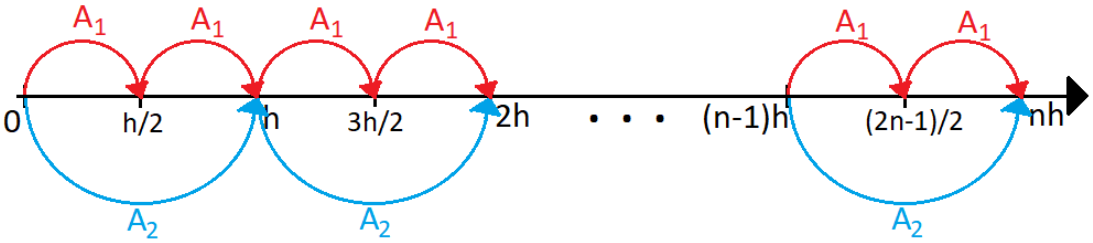
Az így kapott $y_1^2\left(\frac{3}{2}h\right)$ megoldás lesz a következő feladat kezdeti feltétele.
Ezután megoldjuk a második részfeladatot a $(h, 2h]$ intervallumon, az előbbi kezdeti feltétellel:



Így kapjuk meg a $2h$-beli megoldást, ami a következő lépés kezdeti feltétele lesz.
Ezután ezt a kezdeti feltételt felhasználva újra az elő részfeladatot oldjuk meg, azonban most a $\left(\frac{3}{2}h, 2h\right]$ intervallumon.



Így kapjuk meg a $2h$-beli splittingelt megoldást, azaz $y_1^2(2h) = y_{SM}(2h)$.
Ezt az eljárást ismételve az egész ω_h rácsháló n, kapjuk meg a kívánt közelítő megoldást a $(0, T]$ intervallumon.



Megjegyezzük, hogy a bemutatott két szeletelési eljárás mellett még számos egyéb, sikeresen alkalmazott eljárás is létezik.

2.3. Rendfeltételek a szekvenciális szeletelésre

Munkánk során sikerült önálló eredményeket elérnünk az operátorszeletelési eljárások elméletében, melyeket ebben az alfejezetben ismertetünk.

Elsősorban a szekvenciális szeletelésre valamint annak rendjére vonatkozólag fogalmazódott meg néhány sejtésünk a futtatások során, mely sejtéseket később sikerült is bizonyítanunk.

Elsőként tekintsük a következő alapgondolatot: a feladatunkat d részfeladatra bontva, szekvenciális splitting alkalmazásával az összes lehetséges sorrendben (ez összességében $d!$ darab sorrendet jelent) kiszámítva a numerikus megoldásokat, majd azok számtani közepét véve, egy másodrendű módszert kapunk.

Ezt a sejtést fogalmazzuk meg a következő állításban:

2.3.1. Állítás. *Tekintsük az $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0) = x_0$ Cauchy-feladatot, ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix melynek tekintsük a következő felbontását $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_d$, ahol $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $(i = 1, \ldots, d)$. Ezt a feladatot megoldva az összes lehetséges sorrendben szekvenciális splitting alkalmazással, majd az így kapott $d!$ numerikus megoldás átlagát véve a módszer másodrendű, azaz*

$$\exp\big(h(A_1 + \ldots + A_d)\big) = \frac{\exp(hA_1)\cdot\ldots\cdot\exp(hA_d) + \ldots + \exp(hA_d)\cdot\ldots\cdot\exp(hA_1)}{d!} + \mathcal{O}(h^3).$$

Bizonyítás: A 2.3.1. Állítást teljes indukcióval érdemes belátni.
Első lépésként vizsgáljuk meg, hogy $k = 2$-re teljesül-e az állítás.
Ekkor a belátandó a következő:

$$\exp\big(h(A_1 + A_2)\big) = \frac{\exp(hA_1)\cdot\exp(hA_2) + \exp(hA_2)\cdot\exp(hA_1)}{2!} + \mathcal{O}(h^3). \tag{2.9}$$

Az egyenlőséget Taylor-sorfejtések segítségével tudjuk igazolni.
A jobb oldal sorba fejtett alakja a következő alakú:

$$\begin{aligned}\exp\big(h(A_1 + A_2)\big) &= I + h(A_1 + A_2) + \frac{h^2}{2!}(A_1 + A_2)^2 + \mathcal{O}(h^3) = \\ &= I + h(A_1 + A_2) + \frac{h^2}{2!}(A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2 + A_2A_1) + \mathcal{O}(h^3).\end{aligned} \tag{2.10}$$

ahol $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egységmátrix.
A részfeladatok sorba fejtett alakjai pedig az alábbiak:

$$\exp(hA_1) = I + hA_1 + \frac{h^2}{2!}A_1^2 + \mathcal{O}(h^3), \tag{2.11}$$

$$\exp(hA_2) = I + hA_2 + \frac{h^2}{2!}A_2^2 + \mathcal{O}(h^3). \tag{2.12}$$

A bal oldal ekkor:

$$\frac{\exp(hA_1)\cdot\exp(hA_2) + \exp(hA_2)\cdot\exp(hA_1)}{2!} + \mathcal{O}(h^3) =$$

$$= \frac{\left[I + hA_1 + \frac{h^2}{2!}A_1^2\right]\cdot\left[I + hA_2 + \frac{h^2}{2!}A_2^2\right] + \left[I + hA_2 + \frac{h^2}{2!}A_2^2\right]\cdot\left[I + hA_1 + \frac{h^2}{2!}A_1^2\right]}{2!} + \mathcal{O}(h^3) =$$

$$= \frac{\left[I+hA_2+\frac{h^2}{2!}A_2^2+hA_1+h^2A_1A_2+\frac{h^2}{2!}A_1^2\right]+\left[I+hA_1+\frac{h^2}{2!}A_1^2+hA_2+h^2A_2A_1+\frac{h^2}{2!}A_2^2\right]}{2!} + \mathcal{O}(h^3) =$$

$$= \frac{2I + 2h(A_1 + A_2) + h^2(A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2 + A_2A_1)}{2!} + \mathcal{O}(h^3) =$$

$$= I + h(A_1 + A_2) + \frac{h^2}{2!}(A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2 + A_2A_1) + \mathcal{O}(h^3). \tag{2.13}$$

A jobb oldal egyenlő a bal oldallal, azaz (2.10)=(2.13). Ezzel beláttuk, hogy $k = 2$ esetén teljesül a 2.3.1.Állítás.

Az indukciós feltevés: tegyük fel, hogy $k = d$-re teljesül az állítás és bizonyítsuk be $k = d+1$-re. Ekkor a belátandó összefüggés a következő:

$$\exp\big(h(A_1 + A_2 + \ldots + A_d + A_{d+1})\big) =$$
$$= \frac{\exp(hA_1)\cdot\ldots\cdot\exp(hA_{d+1}) + \ldots + \exp(hA_{d+1})\cdot\ldots\cdot\exp(hA_1)}{(d+1)!} + \mathcal{O}(h^3). \tag{2.14}$$

ahol a bal oldal sorba fejtett alakja:

$$\exp\big(h(A_1 + A_2 + \ldots + A_d + A_{d+1})\big) =$$
$$= I + h\sum_{j=1}^{d+1} A_j + \frac{h^2}{2!}\left(\sum_{j=1}^{d+1} A_j^2 + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=i+1}^{d+1} A_iA_j + \sum_{i=2}^{d+1}\sum_{j=1}^{i-1} A_iA_j\right) + \mathcal{O}(h^3). \tag{2.15}$$

Legyen $A_1 + A_2 + \ldots + A_d = B$, ekkor

$$\exp(hB) = \exp\big(h(A_1 + A_2 + \ldots + A_d)\big) =$$
$$= I + h\sum_{j=1}^{d} A_j + \frac{h^2}{2!}\left(\sum_{j=1}^{d} A_j^2 + \sum_{i=1}^{d-1}\sum_{j=i+1}^{d} A_iA_j + \sum_{i=2}^{d}\sum_{j=1}^{i-1} A_iA_j\right) + \mathcal{O}(h^3), \tag{2.16}$$

továbbá

$$\exp(hA_{d+1}) = I + hA_{d+1} + \frac{h^2}{2!}A_{d+1}^2 + \mathcal{O}(h^3). \tag{2.17}$$

(2.16) és (2.17) felhasználásával kapjuk a következőt:

$$\exp\big(h(A_1 + A_2 + \ldots + A_d + A_{d+1})\big) =$$
$$= \exp\big(h(B + A_{d+1})\big) = \frac{\exp(hB)\cdot\exp(hA_{d+1}) + \exp(hA_{d+1})\cdot\exp(hB)}{2!} + \mathcal{O}(h^3) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[I + h\sum_{j=1}^{d} A_j + \frac{h^2}{2!}\left(\sum_{j=1}^{d} A_j^2 + \sum_{i=1}^{d-1}\sum_{j=i+1}^{d} A_iA_j + \sum_{i=2}^{d}\sum_{j=1}^{i-1} A_iA_j\right) + \right.$$
$$\left. + hA_{d+1} + h^2\sum_{j=1}^{d} A_jA_{d+1} + \frac{h^2}{2}A_{d+1}^2\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[I + h\sum_{j=1}^{d} A_j + \frac{h^2}{2!}\left(\sum_{j=1}^{d} A_j^2 + \sum_{i=1}^{d-1}\sum_{j=i+1}^{d} A_iA_j + \sum_{i=2}^{d}\sum_{j=1}^{i-1} A_iA_j\right) + \right.$$
$$\left. + hA_{d+1} + h^2\sum_{j=1}^{d} A_{d+1}A_j + \frac{h^2}{2}A_{d+1}^2\right] + \mathcal{O}(h^3) =$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{2}\Bigg[2I+2h\Bigg(\sum_{j=1}^{d}A_j+A_{d+1}\Bigg)+\\
&+h^2\Bigg(\sum_{j=1}^{d}A_j^2+A_{d+1}^2+\sum_{i=1}^{d-1}\sum_{j=i+1}^{d}A_iA_j+\sum_{i=2}^{d}\sum_{j=1}^{i-1}A_iA_j+\sum_{j=1}^{d}A_{d+1}A_j+A_jA_{d+1}\Bigg)\Bigg]+\mathcal{O}(h^3)=\\
=&\frac{1}{2}\Bigg[2I+2h\sum_{j=1}^{d+1}A_j+h^2\Bigg(\sum_{j=1}^{d+1}A_j^2+\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=i+1}^{d+1}A_iA_j+\sum_{i=2}^{d+1}\sum_{j=1}^{i-1}A_iA_j\Bigg)\Bigg]+\mathcal{O}(h^3)=\\
=&I+h\sum_{j=1}^{d+1}A_j+\frac{h^2}{2}\Bigg(\sum_{j=1}^{d+1}A_j^2+\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=i+1}^{d+1}A_iA_j+\sum_{i=2}^{d+1}\sum_{j=1}^{i-1}A_iA_j\Bigg)+\mathcal{O}(h^3). \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

Ezzel beláttuk a kívánt összefüggést. □

Pozitív eredmény tehát, hogy a viszonylag egyszerűen realizálható, elsőrendű szekvenciális splitting eljárás megfelelő alkalmazásával másodrendben közelítő numerikus módszerhez jutunk.

A belátott állításunk azonban sok részfeladat, azaz nagy d esetén a gyakorlatban meglehetősen nehezen kivitelezhető, hiszen például már $d = 5$ esetén $5! = 120$ féle sorrendben kellene előállítanunk a splittingelt megoldást, hogy elérjük a kívánt másodrendű pontosságot.
Csökkenteni tudjuk a kiszámolandó splittingelt megoldások számát azzal, ha az eredeti feladat mátrixának olyan felbontását adjuk meg, melyben kommutáló mátrixok is szerepelnek. Lássuk egy példán keresztül, hogy ez hogyan is valósul meg.
$d = 2$ esetén nincs értelme erről beszélni, hiszen ha $A = A_1 + A_2$ és $A_1A_2 = A_2A_1$ akkor

$$\exp\big(h(A_1+A_2)\big)=\exp(hA_1)\cdot\exp(hA_2)+\mathcal{O}(h^3).$$

Tekintsük tehát azt az esetet, amikor $d = 3$, azaz $A = A_1 + A_2 + A_3$, és legyenek az A_1 és A_3 egymással kommutáló mátrixok, azaz $A_1A_3 = A_3A_1$, ezt kihasználva ekkor:

$$
\begin{aligned}
&\exp\big(h(A_1+A_2+A_3)\big)=I+h(A_1+A_2+A_3)+\frac{h^2}{2!}(A_1+A_2+A_3)^2+\mathcal{O}(h^3)=\\
&=I+h(A_1+A_2+A_3)+\\
&+\frac{h^2}{2!}(A_1^2+A_2^2+A_3^2+A_1A_2+A_1A_3+A_2A_1+A_2A_3+A_3A_1+A_3A_2)+\mathcal{O}(h^3)=\\
&=I+h(A_1+A_2+A_3)+\tfrac{h^2}{2!}(A_1^2+A_2^2+A_3^2+2A_1A_3+A_1A_2+A_2A_1+A_2A_3+A_3A_2)+\mathcal{O}(h^3).
\end{aligned}
$$

A másodrendhez szükséges $3! = 6$ féle sorrend a következő:

$$
\begin{aligned}
&\exp(hA_1)\exp(hA_2)\exp(hA_3)=\\
&=\Bigg(I+hA_1+\frac{h^2}{2}A_1^2+\mathcal{O}(h^3)\Bigg)\Bigg(I+hA_2+\frac{h^2}{2}A_2^2+\mathcal{O}(h^3)\Bigg)\Bigg(I+hA_3+\frac{h^2}{2}A_3^2+\mathcal{O}(h^3)\Bigg)=\\
&=I+h(A_1+A_2+A_3)+h^2\Bigg(\frac{1}{2}(A_1^2+A_2^2+A_3^2)+A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3\Bigg)+\mathcal{O}(h^3), \quad (2.19)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\exp(hA_1)\exp(hA_3)\exp(hA_2)=\\
&=\Bigg(I+hA_1+\frac{h^2}{2}A_1^2+\mathcal{O}(h^3)\Bigg)\Bigg(I+hA_3+\frac{h^2}{2}A_3^2+\mathcal{O}(h^3)\Bigg)\Bigg(I+hA_2+\frac{h^2}{2}A_2^2+\mathcal{O}(h^3)\Bigg)=\\
&=I+h(A_1+A_2+A_3)+h^2\Bigg(\frac{1}{2}(A_1^2+A_2^2+A_3^2)+A_1A_3+A_1A_2+A_3A_2\Bigg)+\mathcal{O}(h^3), \quad (2.20)
\end{aligned}
$$

$$\exp(hA_3)\exp(hA_1)\exp(hA_2) =$$
$$= \left(I + hA_3 + \frac{h^2}{2}A_3^2 + \mathcal{O}(h^3)\right)\left(I + hA_1 + \frac{h^2}{2}A_1^2 + \mathcal{O}(h^3)\right)\left(I + hA_2 + \frac{h^2}{2}A_2^2 + \mathcal{O}(h^3)\right) =$$
$$= I + h(A_1 + A_2 + A_3) + h^2\left(\frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) + A_3A_1 + A_3A_2 + A_1A_2\right) + \mathcal{O}(h^3), \quad (2.21)$$

$$\exp(hA_3)\exp(hA_2)\exp(hA_1) =$$
$$= \left(I + hA_3 + \frac{h^2}{2}A_3^2 + \mathcal{O}(h^3)\right)\left(I + hA_2 + \frac{h^2}{2}A_2^2 + \mathcal{O}(h^3)\right)\left(I + hA_1 + \frac{h^2}{2}A_1^2 + \mathcal{O}(h^3)\right) =$$
$$= I + h(A_1 + A_2 + A_3) + h^2\left(\frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) + A_3A_2 + A_3A_1 + A_2A_1\right) + \mathcal{O}(h^3), \quad (2.22)$$

$$\exp(hA_2)\exp(hA_3)\exp(hA_1) =$$
$$= \left(I + hA_2 + \frac{h^2}{2}A_2^2 + \mathcal{O}(h^3)\right)\left(I + hA_3 + \frac{h^2}{2}A_3^2 + \mathcal{O}(h^3)\right)\left(I + hA_1 + \frac{h^2}{2}A_1^2 + \mathcal{O}(h^3)\right) =$$
$$= I + h(A_1 + A_2 + A_3) + h^2\left(\frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) + A_2A_3 + A_2A_1 + A_3A_1\right) + \mathcal{O}(h^3), \quad (2.23)$$

$$\exp(hA_2)\exp(hA_1)\exp(hA_3) =$$
$$= \left(I + hA_2 + \frac{h^2}{2}A_2^2 + \mathcal{O}(h^3)\right)\left(I + hA_1 + \frac{h^2}{2}A_1^2 + \mathcal{O}(h^3)\right)\left(I + hA_3 + \frac{h^2}{2}A_3^2 + \mathcal{O}(h^3)\right) =$$
$$= I + h(A_1 + A_2 + A_3) + h^2\left(\frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) + A_2A_1 + A_2A_3 + A_1A_3\right) + \mathcal{O}(h^3). \quad (2.24)$$

Kihasználva a kommutáló mátrixok jelentette egyszerűséget:

$$\exp(hA_1)\exp(hA_3)\exp(hA_2) = \exp\big(h(A_1 + A_3)\big)\exp(hA_2), \quad (2.25)$$
$$\exp(hA_3)\exp(hA_1)\exp(hA_2) = \exp\big(h(A_3 + A_1)\big)\exp(hA_2), \quad (2.26)$$
$$\exp(hA_2)\exp(hA_1)\exp(hA_3) = \exp(hA_2)\exp\big(h(A_1 + A_3)\big), \quad (2.27)$$
$$\exp(hA_2)\exp(hA_3)\exp(hA_1) = \exp(hA_2)\exp\big(h(A_3 + A_1)\big). \quad (2.28)$$

Az összeadás kommutativitását kihasználva vezessük be a következő jelölést:

$$A_4 = A_1 + A_3 = A_3 + A_1.$$

Így (2.25)=(2.26) és (2.27)=(2.28), azaz

$$\exp\big(h(A_1 + A_3)\big)\exp(hA_2) = \exp(hA_4)\exp(hA_2), \quad (2.29)$$
$$\exp(hA_2)\exp\big(h(A_1 + A_3)\big) = \exp(hA_2)\exp(hA_4). \quad (2.30)$$

Ez azt jelenti, hogy a három mátrixos felbontásból adódó 6 féle sorrendben kiszámított splittingelt megoldások közül négyet visszavezettünk két mátrixból álló felbontású feladatra, melyek közül kettő-kettő megegyezik.

Az előzőekben bizonyított 2.3.1.Állítás alapján a módszer másodrendű, ha

$$\tfrac{1}{6}\Big[\exp(hA_1)\exp(hA_2)\exp(hA_3) + \exp(hA_1)\exp(hA_3)\exp(hA_2) + \exp(hA_2)\exp(hA_1)\exp(hA_3) +$$

$$+\exp(hA_2)\exp(hA_3)\exp(hA_1)+\exp(hA_3)\exp(hA_1)\exp(hA_2)+\exp(hA_3)\exp(hA_2)\exp(hA_1)\Bigg].$$

Felhasználva a (2.25)-(2.30) összefüggéseket a következő feltételt kapjuk másodrendűségre:

$$\frac{1}{6}\Bigg[\exp(hA_1)\exp(hA_2)\exp(hA_3)+\exp(hA_3)\exp(hA_2)\exp(hA_1)+$$
$$+2\exp(hA_2)\exp(hA_4)+2\exp(hA_4)\exp(hA_2)\Bigg].$$

Tehát kommutáló mátrixok esetén jóval egyszerűbb a másodrend elérése, hiszen ekkor hat helyett csak négyféle sorrendben kell meghatároznunk a splittingelt megoldásokat, és a négyféle sorrendből kettő csak két mátrixból álló felbontásra vonatkozik.

Nézzük, hogy általános esetben mennyire egyszerűsödik a feladatunk.
Legyen $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_d$, és tegyük fel, hogy $A_iA_j = A_jA_i$ ha $i \neq j$. Ekkor az összes $d!$ sorrend helyett $d! - (d-1)! = (d-1)(d-1)!$ sorrendben kell kiszámítanunk a splittingelt megoldásokat és ezek közül $(d-1)!$ esetén csak $(d-1)$ mátrix összegére felbontott feladatot kell megoldanunk, a maradék $(d-1)(d-1)! - (d-1)! = (d-2)(d-1)!$ feladat esetén pedig d mátrix összegére felbontott feladatot kell megoldanunk.
Ez természetesen tovább egyszerűsíthető, ha a felbontásban több kommutáló mátrix is szerepel. Az egyszerűsödés számszerűsítése egy komplexebb kombinatorikai problémára vezethető vissza.

A másodrend elérése után felmerül a kérdés, hogy harmadrend esetleg elérhető-e a számtani közepet alkalmazó módszer esetén.
Tehát legyen $x, y \in \mathbb{R}$, valamint legyen $d = 2$ és a következőt szeretnénk belátni:

$$\exp\big(h(A_1+A_2)\big) = \frac{x\cdot\exp(hA_1)\exp(hA_2)+y\cdot\exp(hA_2)\exp(hA_1)}{x+y}+\mathcal{O}(h^4). \tag{2.31}$$

Ekkor a bal oldal Taylor-sorba fejtve a következő alakú:

$$\exp\big(h(A_1+A_2)\big) = I + h(A_1+A_2) + \frac{h^2}{2!}(A_1+A_2)^2 + \frac{h^3}{3!}(A_1+A_2)^3 + \mathcal{O}(h^4) =$$
$$= I + h(A_1+A_2) + \frac{h^2}{2}\Big(A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2 + A_2A_1\Big) +$$
$$+\frac{h^3}{6}\Big(A_1^3 + A_2^3 + A_1A_2^2 + A_1^2A_2 + A_2A_1^2 + A_2^2A_1 + A_1A_2A_1 + A_2A_1A_2\Big) + \mathcal{O}(h^4). \tag{2.32}$$

A jobb oldal pedig a következőképp alakul:

$$\frac{x\cdot\exp(hA_1)\exp(hA_2)+y\cdot\exp(hA_2)\exp(hA_1)}{x+y}+\mathcal{O}(h^4) =$$
$$= \frac{1}{x+y}\Bigg[x\cdot\Big(I + hA_1 + \frac{h^2}{2!}A_1^2 + \frac{h^3}{3!}A_1^3 + \mathcal{O}(h^4)\Big)\Big(I + hA_2 + \frac{h^2}{2!}A_2^2 + \frac{h^3}{3!}A_2^3 + \mathcal{O}(h^4)\Big)\Bigg] +$$
$$+\frac{1}{x+y}\Bigg[y\cdot\Big(I + hA_2 + \frac{h^2}{2!}A_2^2 + \frac{h^3}{3!}A_2^3 + \mathcal{O}(h^4)\Big)\Big(I + hA_1 + \frac{h^2}{2!}A_1^2 + \frac{h^3}{3!}A_1^3 + \mathcal{O}(h^4)\Big)\Bigg] =$$
$$= \tfrac{1}{x+y}\Bigg[x\cdot\Big(I + h(A_1+A_2) + h^2\Big(\tfrac{1}{2}A_1^2 + \tfrac{1}{2}A_2^2 + A_1A_2\Big) + h^3\Big(\tfrac{1}{6}A_1^3 + \tfrac{1}{6}A_2^3 + \tfrac{1}{2}A_1^2A_2 + \tfrac{1}{2}A_1A_2^2\Big)\Big)\Bigg] +$$
$$+\tfrac{1}{x+y}\Bigg[y\cdot\Big(I + h(A_1+A_2) + h^2\Big(\tfrac{1}{2}A_1^2 + \tfrac{1}{2}A_2^2 + A_2A_1\Big) + h^3\Big(\tfrac{1}{6}A_1^3 + \tfrac{1}{6}A_2^3 + \tfrac{1}{2}A_2^2A_1 + \tfrac{1}{2}A_2A_1^2\Big)\Big)\Bigg] =$$

$$= \tfrac{1}{x+y}\Bigg[(x+y)I + h(x+y)(A_1+A_2) + h^2\Bigg(x\Bigg(\tfrac{1}{2}A_1^2 + \tfrac{1}{2}A_2^2 + A_1A_2\Bigg) + y\Bigg(\tfrac{1}{2}A_1^2 + \tfrac{1}{2}A_2^2 + A_2A_1\Bigg)\Bigg) +$$

$$+ h^3\Bigg(x\Bigg(\frac{1}{6}A_1^3 + \frac{1}{6}A_2^3 + \frac{1}{2}A_1^2A_2 + \frac{1}{2}A_1A_2^2\Bigg) + y\Bigg(\frac{1}{6}A_1^3 + \frac{1}{6}A_2^3 + \frac{1}{2}A_2^2A_1 + \frac{1}{2}A_2A_1^2\Bigg)\Bigg)\Bigg]. \quad (2.33)$$

A bal oldal (2.32) és a jobb oldal (2.33) pontosan akkor egyenlőek, ha az együtthatóik megegyeznek. Nézzük tehát a két oldal együtthatóit!

h^0 együtthatói:

$$\frac{(x+y)I}{(x+y)} = I \Longrightarrow I = I, \quad (2.34)$$

h^1 együtthatói:

$$\frac{(x+y)(A_1+A_2)}{(x+y)} = (A_1+A_2) \Longrightarrow (A_1+A_2) = (A_1+A_2), \quad (2.35)$$

h^2 együtthatói:
A jobb oldalon:

$$x\Bigg(\frac{1}{2}A_1^2 + \frac{1}{2}A_2^2 + A_1A_2\Bigg) + y\Bigg(\frac{1}{2}A_1^2 + \frac{1}{2}A_2^2 + A_2A_1\Bigg) =$$
$$= \frac{1}{x+y}\Bigg(\frac{1}{2}(x+y)\big(A_1^2 + A_2^2\big) + xA_1A_2 + yA_2A_1\Bigg) = \frac{1}{2}\big(A_1+A_2\big) + \frac{xA_1A_2 + yA_2A_1}{x+y},$$

Ekkor:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\big(A_1+A_2\big) + \frac{xA_1A_2 + yA_2A_1}{x+y} &= \frac{1}{2}\big(A_1+A_2\big) + \frac{1}{2}\big(A_1A_2 + A_2A_1\big),\\
\frac{xA_1A_2 + yA_2A_1}{x+y} &= \frac{1}{2}\big(A_1A_2 + A_2A_1\big),\\
xA_1A_2 + yA_2A_1 &= \frac{1}{2}(x+y)A_1A_2 + \frac{1}{2}(x+y)A_2A_1,\\
&\Downarrow\\
x = y &= \frac{1}{2}(x+y),\\
x &= y. \quad (2.36)
\end{aligned}$$

h^3 együtthatói:
A jobb oldalon:

$$\frac{1}{x+y}\Bigg(x\Bigg(\frac{1}{6}A_1^3 + \frac{1}{6}A_2^3 + \frac{1}{2}A_1^2A_2 + \frac{1}{2}A_1A_2^2\Bigg) + y\Bigg(\frac{1}{6}A_1^3 + \frac{1}{6}A_2^3 + \frac{1}{2}A_2^2A_1 + \frac{1}{2}A_2A_1^2\Bigg)\Bigg) =$$
$$= \frac{1}{x+y}\Bigg(\frac{1}{6}(x+y)(A_1^3 + A_2^3) + \frac{1}{2}\Bigg(x\big(A_1^2A_2 + A_1A_2^2\big) + y\big(A_2^2A_1 + A_2A_1^2\big)\Bigg)\Bigg) =$$
$$= \frac{1}{6}(A_1^3 + A_2^3) + \frac{1}{2(x+y)}\Bigg(x\big(A_1^2A_2 + A_1A_2^2\big) + y\big(A_2^2A_1 + A_2A_1^2\big)\Bigg),$$

Ekkor

$$\frac{1}{6}(A_1^3 + A_2^3) + \frac{1}{2(x+y)}\Bigg(x\big(A_1^2A_2 + A_1A_2^2\big) + y\big(A_2^2A_1 + A_2A_1^2\big)\Bigg) =$$
$$= \frac{1}{6}\Bigg(A_1^3 + A_2^3 + A_1A_2^2 + A_1^2A_2 + A_2A_1^2 + A_2^2A_1 + A_1A_2A_1 + A_2A_1A_2\Bigg),$$

$$\frac{x\big(A_1^2A_2+A_1A_2^2\big)+y\big(A_2^2A_1+A_2A_1^2\big)}{2(x+y)}=\frac{A_1A_2^2+A_1^2A_2+A_2A_1^2+A_2^2A_1+A_1A_2A_1+A_2A_1A_2}{6},$$

Kihasználva a másodrendűségre kapott feltételt, azaz $x=y$ esetén a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{x\big(A_1^2A_2+A_1A_2^2+A_2^2A_1+A_2A_1^2\big)}{4x}&=\frac{A_1A_2^2+A_1^2A_2+A_2A_1^2+A_2^2A_1+A_1A_2A_1+A_2A_1A_2}{6},\\
\frac{A_1^2A_2+A_1A_2^2+A_2^2A_1+A_2A_1^2}{4}&=\frac{A_1A_2^2+A_1^2A_2+A_2A_1^2+A_2^2A_1+A_1A_2A_1+A_2A_1A_2}{6},\\
A_1^2A_2+A_1A_2^2+A_2^2A_1+A_2A_1^2&=2A_1A_2A_1+2A_2A_1A_2,
\end{aligned}$$

Átrendezésekkel és kiemelésekkel kapjuk meg végül a harmadrendűségre vonatkozó feltételeket.

$$\begin{aligned}
A_1^2A_2-A_1A_2A_1+A_2A_1^2-A_1A_2A_1+A_2^2A_1-A_2A_1A_2+A_1A_2^2-A_2A_1A_2&=0,\\
A_1\big(A_1A_2-A_2A_1\big)+\big(A_2A_1-A_1A_2\big)A_1+A_2\big(A_2A_1-A_1A_2\big)+\big(A_1A_2-A_2A_1\big)A_2&=0,\\
A_1\big[A_1,\,A_2\big]+\big[A_2,\,A_1\big]A_1+A_2\big[A_2,\,A_1\big]+\big[A_1,\,A_2\big]A_2&=0,
\end{aligned}$$

Felhasználva a kommutátorokra vonatkozó következő összefüggést $\big[A,\,B\big]=-\big[B,\,A\big]$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
A_1\big[A_1,\,A_2\big]-\big[A_1,\,A_2\big]A_1-A_2\big[A_1,\,A_2\big]+\big[A_1,\,A_2\big]A_2&=0,\\
\Big[A_1,\,\big[A_1,A_2\big]\Big]+\Big[\big[A_1,\,A_2\big],\,A_2\Big]&=0,\\
\Big[A_1,\,\big[A_1,A_2\big]\Big]-\Big[A_2,\,\big[A_1,\,A_2\big]\Big]&=0,
\end{aligned}$$

A harmadrendűség feltétele tehát:

$$\Big[A_1,\,\big[A_1,A_2\big]\Big]=\Big[A_2,\,\big[A_1,\,A_2\big]\Big]. \tag{2.37}$$

Ami azt jelenti, hogy olyan két mátrixból álló felbontás esetén lesz harmadrendben pontos a módszer, melyben a két mátrix kommutátorának első mátrixszal vett kommutátora megegyezik a másik mátrixszal vett kommutátorával.

3. A vizsgált aerodinamikai modell bemutatása

Az előző fejezetben ismertetett operátorszeletelési eljárások hatékonyságát egy, a műszaki területről vett, aerodinamikai modellen vizsgáltuk. A dolgozat ezen részében bemutatjuk a modellt, valamint ismertetjük azt az alakot, amelyre a későbbiekben az operátorszeletelési eljárásokat alkalmazzuk.

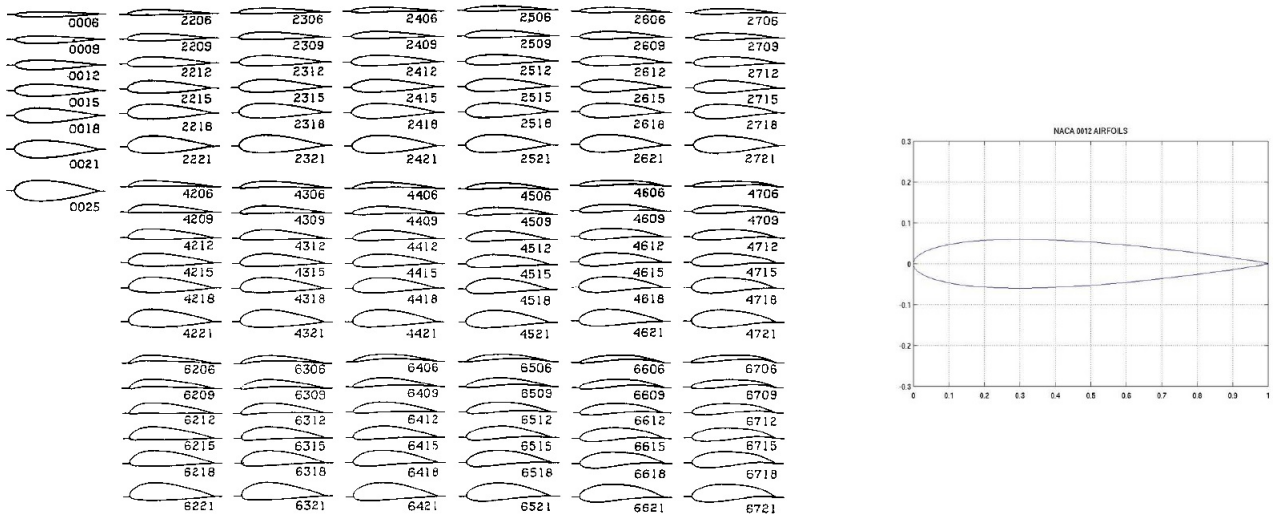
3.1. A kiindulás

A vizsgált modell alapjául egy konkrét szélcsatornabeli kísérletből származó adathalmaz szolgált, melyben egy repülőgép szárnyára ható felhajtóerőt (C_l) vizsgálták a szárny dőlésszögének (α_{eff}) függvényében.

A kísérletben a NACA-0012-es kódú szárnyprofiljának viselkedését vizsgálták.

A NACA-szárnyprofilok a Nemzeti Repülésügyi Tanácsadó Testület (National Advisory Committee for Aeronautics [2] - NACA = a NASA elődje az amerikai repülési és űrkutatási kutatómunkákban) által fejlesztett szárnyprofilok. A szárnyprofilok alakját a "NACA" szó után álló számjegyek sorozatával írják le.

Az alábbi 2. ábrán a különböző alakú NACA-szárnyprofilok, valamint a jobb oldalon a vizsgált NACA-0012-es profil látható kinagyítva:



2. ábra. Bal oldalon: NACA-szárnyprofilok, Jobb oldalon: NACA-0012 szárnyprofil

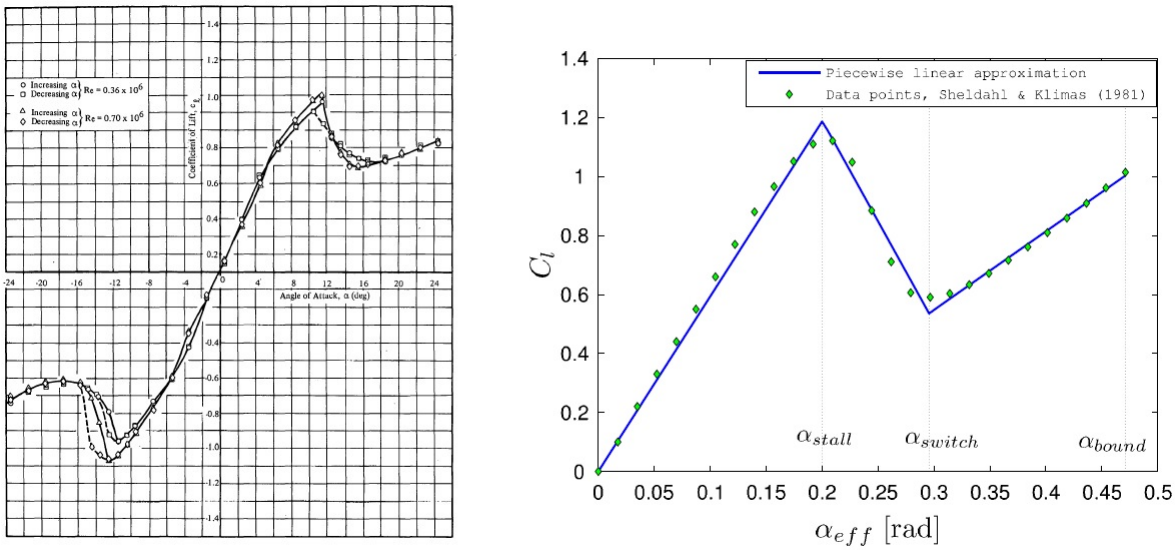
A különböző szárnyszelvényeket különböző repülési követelményekhez választják. A szimmetrikus szelvényeket például a műrepülő gépeken célszerű alkalmazni, amelyeknél gyakori a háton repülés. Az ívelt szárnyprofilokat pedig a kis sebességre tervezett repülőgépek esetében használják, hogy ne legyen szükség túlságosan nagy felületű szárnyra , hiszen minél íveltebb a szárnyszelvény, annál nagyobb felhajtóerő ébred rajta.

A kísérletben szereplő NACA-0012-es szárnyprofil a szimmetrikus profilok közé tartozik és többek között Cessna, Burns és Boeing típusú gépeken is használják.

A szárnyakat a Wichitai Állami Egyetemen (USA) található szélcsatornában (Walter H. Beech Memorial Wind Tunnel) tesztelték. A kísérletből származó adatok, mérési eredmények a [3] cikkben vannak bővebben leírva. Ebből a cikkből származik az általunk vizsgált modell alapjául szolgáló adathalmaz is.

3.2. A modell

A mérési adathalmaz azt sugallja, hogy egy szakaszonként lineáris modell felel meg a valóságnak, hiszen az adatpontok elhelyezkedéséből kiindulva egy szakaszonként lineáris függvény illeszthető a pontokra, ez látható a 3. ábrán.



3. ábra. Bal oldalon: Az [3] cikkben szereplő ábra, Jobb oldalon: A kísérletből származó adatpontok, és a szakaszonként lineáris approximáció a [4] cikkből

A szakaszonként lineáris modell három kitüntetett pontot tartalmaz, melyekre az α_{stall}, α_{switch} és α_{bound} jelöléseket vezették be. Az α_{stall} jelenti azt a dőlésszöget, ahol a felhajtóerő növekvőből csökkenőbe megy át, miközben a hajlásszög tovább növekszik, α_{switch} az a pont, ahonnét kezdve a felhajtóerő újra növekedni kezd, és végül az α_{bound} a modell érvényességi tartományának végét adja meg. Szokatlannak tűnhet az α_{stall} és α_{switch} között intervallumon látható felhajtóerő csökkenés, látva, hogy a dőlésszög egyre növekszik. Ennek fizikai magyarázata a következő: a felhajtóerő az α_{stall} dőlésszög fölött csökken mert az áramlás leválik, a későbbi újbóli növekedés az $[\alpha_{switch}, \alpha_{bound}]$ intervallumon az áramlás részleges visszatapadása miatt történik.
Ekkor az így kapott szakaszonként lineáris függvényt az alábbi módon definiálhatjuk:

$$C_l(\alpha_{eff}) = \begin{cases} c_0\alpha_{eff} & \text{ha } |\alpha_{eff}| \leq \alpha_{stall} \\ c_1\alpha_{eff} + sgn(\alpha_{eff})d_1 & \text{ha } \alpha_{stall} \leq |\alpha_{eff}| \leq \alpha_{switch} \\ c_2\alpha_{eff} + sgn(\alpha_{eff})d_2 & \text{ha } \alpha_{switch} \leq |\alpha_{eff}| \leq \alpha_{bound} \end{cases} \tag{3.1}$$

A modellben szereplő paraméterek értékei az alábbi táblázatban láthatóak:

Paraméter	c_0	c_1	c_2	d_1	d_2	α_{stall}	α_{switch}	α_{bound}
Érték	5.932	-6.846	2.662	2.56	-0.2515	0.2 rad	0.2957 rad	0.4712 rad

A vizsgált aeroelasztikus rendszert leíró differenciálegyenlet-rendszer:

$$m\ddot{y} + c_y\dot{y} + k_y y = -L\big(C_l(\alpha_{eff})\big), \tag{3.2}$$

$$I_{cg}\ddot{\alpha} + c_\alpha\dot{\alpha} + k_\alpha\alpha = M\big(C_l(\alpha_{eff})\big), \tag{3.3}$$

ahol y jelöli a függőleges elmozdulást, α pedig a szög megváltozását.
Figyelembe véve a rendszer pillanatnyi mozgását az α_{eff} szög a következőképpen számítható:

$$\alpha_{eff} = \alpha + \frac{\dot{y}}{U}, \tag{3.4}$$

ahol U a szélcsatornában lévő áramlás sebességét, avagy a valóságban a vizsgált repülőgép sebességét jelenti.

A differenciálegyenlet-rendszer jobb oldalán szereplő függvények a következőképpen adhatóak meg:

$$L(C_l(\alpha_{eff})) = \rho U^2 b S C_l(\alpha_{eff}), \tag{3.5}$$
$$M(C_l(\alpha_{eff})) = \rho U^2 b^2 S C_l(\alpha_{eff}). \tag{3.6}$$

A (3.2)(3.3) rendszerben megjelenő paraméterek az alábbi táblázatban láthatóak:

Paraméter	**Magyarázat**	**Érték/Mértékegység**
b	a szárny-keresztmetszet hosszának fele	0.1064 m
S	a szárny fesztávolsága	0.6 m
m	a szárny tömege	12 kg
k_y	lineáris rugóállandó	2844.4 N/m
k_α	torziós rugóállandó	2.82 N/rad
c_y	az y csillapító együtthatója	27.43 kg/s
$c_{I\alpha}$	az α csillapító együtthatója	0.036 kg m^2/s
I_{cg}	a tömegközéppont tehetetlenségi nyomatéka	0.0433 kgm^2
ρ	a levegő sűrűsége	1.2 kg/m^3
M	aerodinamikai nyomaték	Nm
L	aerodinamikai felhajtóerő	N
U	a repülő sebessége	m/s

3.3. A dimenziótlan modell

Ezek után az előzőekben megadott egyenleteket dimenziótlanítjuk az L hosszúság, a T idő mértékek, valamint a dimenziótlan $\mu > 0$ áramlási sebesség segítségével, melyeket a következőképp írhatjuk fel:

$$L^2 = \frac{I_{cg}}{\rho b^2 S}, \qquad T^2 = \frac{m}{k_y}, \qquad \mu = \frac{U}{L/T}.$$

Az (3.2) egyenlet dimenziótlanítása:

Tekintsük a következő transzformációt: $y = L\tilde{y}$ és $t = \tau T$, ekkor:

$$m\frac{\partial L\tilde{y}}{\partial(\tau T)^2} + c_y\frac{\partial L\tilde{y}}{\partial(\tau T)} + k_y L\tilde{y} = -L(C_l(\alpha_{eff})),$$

ahonnan

$$\tilde{y}'' + \frac{c_y T}{m}\tilde{y}' + \frac{k_y T^2}{m}\tilde{y} = -\frac{T^2}{mL}L(C_l(\alpha_{eff})).$$

Az együtthatók:

$$\begin{aligned}
\frac{c_y T}{m} =& \frac{c_y \sqrt{\frac{m}{k_y}}}{m} = c_y \sqrt{\frac{\frac{m}{k_y}}{m^2}} = \frac{c_y}{\sqrt{k_y m}} := p_1, \\
\frac{k_y T^2}{m} =& \frac{k_y \frac{m}{k_y}}{m} = 1, \\
-\frac{T^2}{mL} \rho U^2 b S C_l(\alpha_{eff}) =& -\frac{T^2 U^2}{\frac{L^2}{\sqrt{\frac{I_{cg}}{\rho b^2 S}}}} \cdot \frac{1}{m} \cdot \rho b S C_l(\alpha_{eff}) = -\mu^2 \cdot \sqrt{\frac{I_{cg}}{\rho b^2 S}} \cdot \frac{1}{m} \rho b S C_l(\alpha_{eff}) = \\
=& -\mu^2 \sqrt{\frac{I_{cg} \rho^2 b^2 S^2}{\rho b^2 S}} \cdot \frac{1}{m} C_l(\alpha_{eff}) = -\mu^2 C_l(\alpha_{eff}) \cdot \frac{\sqrt{I_{cg} \rho S}}{m}, \\
\frac{\sqrt{I_{cg} \rho S}}{m} &:= p_2.
\end{aligned}$$

Így megkaptuk a (3.2) egyenlet dimenziótlanított alakját:

$$\tilde{y}'' + p_1 \tilde{y}' + \tilde{y} = -p_2 \mu^2 C_l(\alpha_{eff}).$$

A (3.3) egyenlet dimenziótlanítása:

Tekintsük az $\alpha = L\alpha$ és $t = \tau T$ transzformációt, ekkor a (3.3) egyenlet a következő alakú lesz:

$$I_{cg} \frac{\partial \alpha L}{\partial (\tau T)^2} + c_\alpha \frac{\partial \alpha L}{\partial (\tau T)} + k_\alpha \alpha L = M(C_l(\alpha_{eff})),$$

ahonnan

$$\alpha'' + \frac{c_\alpha T}{I_{cg}} \alpha' + \frac{k_\alpha T^2}{I_{cg}} \alpha = \frac{T^2}{I_{cg} L} M(C_l(\alpha_{eff})).$$

Az együtthatók:

$$\begin{aligned}
\frac{c_\alpha T}{I_{cg}} &= \frac{c_\alpha \sqrt{\frac{m}{k_y}}}{I_{cg}} = \frac{c_\alpha}{I_{cg}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_y}} := p_3, \\
\frac{k_\alpha T^2}{I_{cg} L} &= \frac{k_\alpha \frac{m}{k_y}}{I_{cg}} = \frac{k_\alpha m}{I_{cg} k_y} := p_4, \\
\frac{T^2}{I_{cg} L} \cdot M(C_l(\alpha_{eff})) &= \frac{T^2}{I_{cg} L} \cdot \rho U^2 b^2 S C_l(\alpha_{eff}) = \frac{T^2 U^2}{L} \cdot \frac{1}{I_{cg}} \cdot \rho b^2 S C_l(\alpha_{eff}) = \\
&= \frac{T^2 U^2}{L} \cdot \frac{1}{L} \cdot C_l(\alpha_{eff}) = \mu^2 C_l(\alpha_{eff}).
\end{aligned}$$

Így megkaptuk a (3.3) egyenlet dimenziótlanított alakját:

$$\alpha'' + p_3 \alpha' + p_4 \alpha = \mu^2 C_l(\alpha_{eff}).$$

Ekkor (3.2)(3.3) egyenletrendszer dimenziótlan alakja:

$$\tilde{y}'' + p_1\tilde{y}' + \tilde{y} = -p_2\mu^2 C_l(\alpha_{eff}), \quad (3.7) \qquad \alpha_{eff} = \alpha + \frac{1}{\mu}\tilde{y}'. \quad (3.9)$$
$$\alpha'' + p_3\alpha' + p_4\alpha = \mu^2 C_l(\alpha_{eff}), \quad (3.8)$$

Az előbb kiszámolt p_1, p_2, p_3, p_4 paraméterek összefoglalva:

$$p_1 = \frac{c_y}{\sqrt{mk_y}}, \qquad p_2 = \frac{\sqrt{\rho I_{cg} S}}{m}, \qquad p_3 = \frac{c_\alpha}{I_{cg}}\sqrt{\frac{m}{k_y}}, \qquad p_4 = \frac{k_\alpha m}{I_{cg} k_y}.$$

Ezek után már egyszerű behelyettesítésekkel megadhatóak a három különböző szakaszra vonatkozó dimenziótlanított differenciálegyenlet-rendszerek.

Az első szakasz, azaz $-\alpha_{stall} \leq \alpha_{eff} \leq \alpha_{stall}$ esetén:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}'' + p_1\tilde{y}' + \tilde{y} &= -\,p_2\mu^2 c_0\alpha_{eff} = -p_2\mu^2 c_0\left(\alpha + \frac{1}{\mu}\tilde{y}'\right) = -p_2\mu^2 c_0\alpha - p_2\mu c_0\tilde{y}', \\
\alpha'' + p_3\alpha' + p_4\alpha &= \mu^2 c_0\alpha_{eff} = \mu^2 c_0\left(\alpha + \frac{1}{\mu}\tilde{y}'\right) = \mu^2 c_0\alpha + \mu c_0\tilde{y}'.
\end{aligned}$$

Tehát az alábbi egyenletrendszert kaptuk erre a szakaszra:

$$\tilde{y}'' + \big(p_1 + p_2\mu c_0\big)\tilde{y}' + \tilde{y} + p_2\mu^2 c_0\alpha = 0, \quad (3.10)$$
$$\alpha'' + p_3\alpha' + \big(p_4 - \mu^2 c_0\big)\alpha - \mu c_0\tilde{y}' = 0. \quad (3.11)$$

A második szakasz, azaz $\alpha_{stall} \leq |\alpha_{eff}| \leq \alpha_{switch}$ esetén:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}'' + p_1\tilde{y}' + \tilde{y} &= -\,p_2\mu^2\big(c_1\alpha_{eff} + \operatorname{sgn}(\alpha_{eff})d_1\big) = -p_2\mu^2 c_1\left(\alpha + \frac{1}{\mu}\tilde{y}'\right) - p_2\mu^2 d_1\operatorname{sgn}(\alpha_{eff}) = \\
&= -\,p_2\mu^2 c_1\alpha - p_2\mu c_1\tilde{y}' - p_2\mu^2 d_1\operatorname{sgn}(\alpha_{eff}), \\
\alpha'' + p_3\alpha' + p_4\alpha &= \mu^2\big(c_1\alpha_{eff} + \operatorname{sgn}(\alpha_{eff})d_1\big) = \mu^2 c_1\left(\alpha + \frac{1}{\mu}\tilde{y}'\right) + \mu^2 d_1\operatorname{sgn}(\alpha_{eff}) = \\
&= \mu^2 c_1\alpha + \mu c_1\tilde{y}' + \mu^2 d_1\operatorname{sgn}(\alpha_{eff}).
\end{aligned}$$

Erre a szakaszra az alábbi egyenletrendszert kaptuk:

$$\tilde{y}'' + \big(p_1 + p_2\mu c_1\big)\tilde{y}' + \tilde{y} + p_2\mu^2 c_1\alpha = -p_2\mu^2 d_1\operatorname{sgn}(\alpha_{eff}), \quad (3.12)$$
$$\alpha'' + p_3\alpha' + \big(p_4 - \mu^2 c_1\big)\alpha - \mu c_1\tilde{y}' = \mu^2 d_1\operatorname{sgn}(\alpha_{eff}). \quad (3.13)$$

Végül a harmadik szakasz, azaz $\alpha_{switch} \leq |\alpha_{eff}| \leq \alpha_{bound}$ esetén:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}'' + p_1\tilde{y}' + \tilde{y} &= -\,p_2\mu^2\big(c_2\alpha_{eff} + \operatorname{sgn}(\alpha_{eff})d_2\big) = -p_2\mu^2 c_2\left(\alpha + \frac{1}{\mu}\tilde{y}'\right) - p_2\mu^2 d_2\operatorname{sgn}(\alpha_{eff}) = \\
&= -\,p_2\mu^2 c_2\alpha - p_2\mu c_2\tilde{y}' - p_2\mu^2 d_2\operatorname{sgn}(\alpha_{eff}), \\
\alpha'' + p_3\alpha' + p_4\alpha &= \mu^2\big(c_2\alpha_{eff} + \operatorname{sgn}(\alpha_{eff})d_2\big) = \mu^2 c_2\left(\alpha + \frac{1}{\mu}\tilde{y}'\right) + \mu^2 d_2\operatorname{sgn}(\alpha_{eff}) = \\
&= \mu^2 c_2\alpha + \mu c_2\tilde{y}' + \mu^2 d_2\operatorname{sgn}(\alpha_{eff}).
\end{aligned}$$

Tehát erre a szakaszra az alábbi egyenletrendszert kaptuk:

$$\tilde{y}'' + \big(p_1 + p_2\mu c_2\big)\tilde{y}' + \tilde{y} + p_2\mu^2 c_2\alpha = -p_2\mu^2 d_2\operatorname{sgn}(\alpha_{eff}), \quad (3.14)$$
$$\alpha'' + p_3\alpha' + \big(p_4 - \mu^2 c_2\big)\alpha - \mu c_2\tilde{y}' = \mu^2 d_2\operatorname{sgn}(\alpha_{eff}). \quad (3.15)$$

3.4. A linearizált modell

Alkalmazzuk az átviteli elvet a dimenziótlanított modellre:
Legyenek az új ismeretlen függvények:

$$x_1 = \tilde{y}, \qquad x_2 = \tilde{y}', \qquad x_3 = \alpha, \qquad x_4 = \alpha'.$$

Ezek alapján az $\mathbf{x}$ vektor a következő:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T.$$

Így kapjuk meg általánosan a három szakaszra az alábbi lineáris rendszereket, melyek részletes levezetése alább látható:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= A_0\mathbf{x} && \mathbf{x} \in \Sigma_1^- \cup \Omega^0 \cup \Sigma_1^+, && (3.16)\\
\dot{\mathbf{x}} &= A_1\mathbf{x} - B_1 && \mathbf{x} \in \Omega_1^- \cup \Sigma_1^-, && (3.17)\\
\dot{\mathbf{x}} &= A_1\mathbf{x} + B_1 && \mathbf{x} \in \Sigma_1^+ \cup \Omega_1^+, && (3.18)\\
\dot{\mathbf{x}} &= A_2\mathbf{x} - B_2 && \mathbf{x} \in \Omega_2^- \cup \Sigma_2^-, && (3.19)\\
\dot{\mathbf{x}} &= A_2\mathbf{x} + B_2 && \mathbf{x} \in \Sigma_2^+ \cup \Omega_2^+. && (3.20)
\end{aligned}$$

ahol $k = 0, 1, 2$ és $l = 1, 2$ esetén:

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -(p_1 + p_2\mu c_k) & -\mu^2 c_k p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c_k\mu & -(p_4 - c_k\mu^2) & -p_3 \end{pmatrix}, \qquad B_l = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_2\mu^2 d_l \\ 0 \\ \mu^2 d_l \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Tehát akkor részletesen, először nézzük az első szakaszra vonatkozó modellt, azaz a (3.10)(3.11) rendszert:
Ekkor:

$$\begin{aligned}
x_1' &= \tilde{y}' = x_2,\\
x_2' &= \tilde{y}'' = -(p_1 + p_2\mu c_0)x_2 - x_1 - p_2\mu^2 c_0 x_3,\\
x_3' &= \alpha' = x_4,\\
x_4' &= \alpha'' = -p_3 x_4 - (p_1 - \mu^2 c_0)x_3 + \mu c_0 x_2.
\end{aligned}$$

Így kapjuk az alábbi lineáris rendszert az első szakaszra:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -(p_1 + p_2\mu c_0) & -\mu^2 c_0 p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c_0\mu & -(p_4 - c_0\mu^2) & -p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Ezután nézzük a második szakaszra vonatkozó modellt, azaz a (3.12)(3.13) rendszert:

$$\begin{aligned}
x_1' &= \tilde{y}' = x_2,\\
x_2' &= \tilde{y}'' = -(p_1 + p_2\mu c_1)x_2 - x_1 - p_2\mu^2 c_1 x_3 - p_2\mu^2 d_1 \operatorname{sgn}(\alpha_{eff}),\\
x_3' &= \alpha' = x_4,\\
x_4' &= \alpha'' = -p_3 x_4 - (p_1 - \mu^2 c_1)x_3 + \mu c_1 x_2 + \mu^2 d_1 \operatorname{sgn}(\alpha_{eff}).
\end{aligned}$$

Így kapjuk meg az alábbi inhomogén lineáris rendszereket a második szakaszra:
Ha $\operatorname{sgn}(\alpha_{eff}) = -1$:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -(p_1 + p_2\mu c_1) & -\mu^2 c_1 p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c_1\mu & -(p_4 - c_1\mu^2) & -p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -p_2\mu^2 d_1 \\ 0 \\ \mu^2 d_1 \end{pmatrix},$$

Ha $\operatorname{sgn}(\alpha_{eff}) = 1$:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -(p_1 + p_2\mu c_1) & -\mu^2 c_1 p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c_1\mu & -(p_4 - c_1\mu^2) & -p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -p_2\mu^2 d_1 \\ 0 \\ \mu^2 d_1 \end{pmatrix}.$$

Végül nézzük a harmadik szakaszra vonatkozó modell, azaz a (3.14)(3.15) rendszer linearizálását:

$$\begin{aligned} x_1' &= \tilde{y}' = x_2, \\ x_2' &= \tilde{y}'' = -(p_1 + p_2\mu c_2)x_2 - x_1 - p_2\mu^2 c_2 x_3 - p_2\mu^2 d_2 \operatorname{sgn}(\alpha_{eff}), \\ x_3' &= \alpha' = x_4, \\ x_4' &= \alpha'' = -p_3 x_4 - (p_4 - \mu^2 c_2)x_3 + \mu c_2 x_2 + \mu^2 d_2 \operatorname{sgn}(\alpha_{eff}). \end{aligned}$$

Így kapjuk meg az alábbi inhomogén lineáris rendszereket a harmadik szakaszra:
Ha $\operatorname{sgn}(\alpha_{eff}) = -1$:

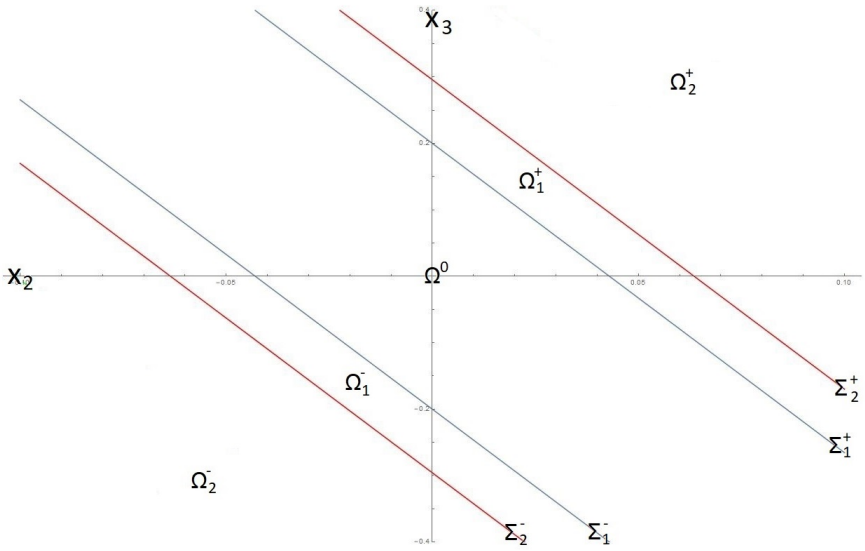
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -(p_1 + p_2\mu c_2) & -\mu^2 c_2 p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c_2\mu & -(p_4 - c_2\mu^2) & -p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -p_2\mu^2 d_2 \\ 0 \\ \mu^2 d_2 \end{pmatrix},$$

Ha $\operatorname{sgn}(\alpha_{eff}) = 1$:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -(p_1 + p_2\mu c_2) & -\mu^2 c_2 p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c_2\mu & -(p_4 - c_2\mu^2) & -p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -p_2\mu^2 d_2 \\ 0 \\ \mu^2 d_2 \end{pmatrix}.$$

A (3.16)-(3.20) képletekkel megadott rendszerek értelmezési tartományai a következőképpen definiálhatóak:

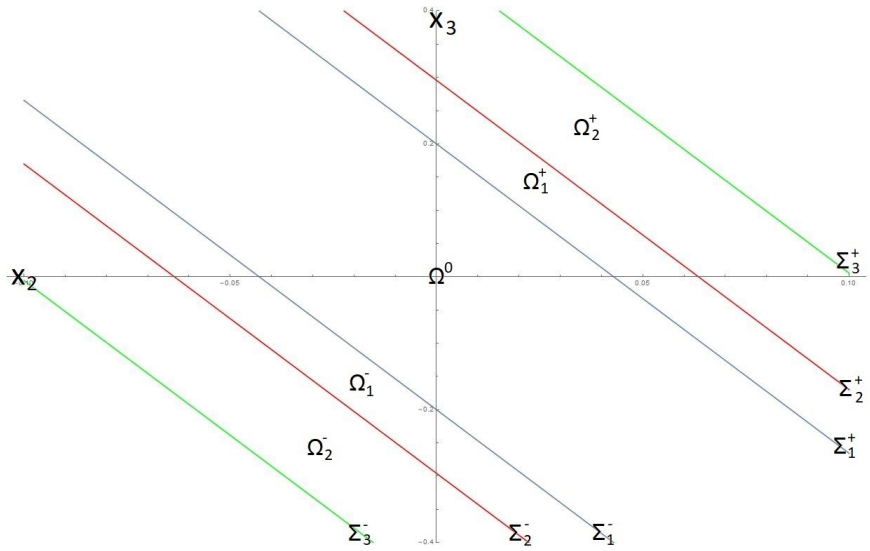
$$\begin{aligned} \Omega^0 &:= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : |x_3 + x_2/\mu| < \alpha_{stall}\right\}, \\ \Sigma_1^{\pm} &:= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_3 + x_2/\mu = \pm\alpha_{stall}\right\}, \\ \Omega_1^{-} &:= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : -\alpha_{stall} > x_3 + x_2/\mu > -\alpha_{switch}\right\}, \\ \Omega_1^{+} &:= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \alpha_{stall} < x_3 + x_2/\mu < \alpha_{switch}\right\}, \\ \Sigma_2^{\pm} &:= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_3 + x_2/\mu = \pm\alpha_{switch}\right\}, \\ \Omega_2^{-} &:= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_3 + x_2/\mu < -\alpha_{switch}\right\}, \\ \Omega_2^{+} &:= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_3 + x_2/\mu > \alpha_{switch}\right\}. \end{aligned}$$



4. ábra. A felbontás az x_2x_3 síkon

Az 1. ábrán láthatjuk, hogy a kísérletből származó adathalmaz utolsó pontja az α_{bound} adatpont. Az ehhez tartozó tartomány a következő:

$$\Sigma_3^{\pm} := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_3 + x_2/\mu = \pm\alpha_{bound}\right\}.$$



5. ábra. A felbontás az x_2x_3 síkon a $\Sigma_3^{\pm}$ határokkal kiegészítve

A vizsgálat során az $\Omega_2^{\pm}$ tartományokat nem korlátozzuk, így a $\Sigma_3^{\pm}$ határokat egyelőre nem vesszük figyelembe.

4. A modell egyensúlyi helyzetei és stabilitásvizsgálata

4.1. A stabilitási kritérium

A rendszer leegyszerűsítése és leszűkítése után vizsgálhatóak az egyensúlyi helyzetek és ezek viselkedései. Első lépésként keresnünk kell valamilyen stabilitási kritériumot:
Az egyensúlyi pontok stabilitásának meghatározására a Liénard-Chipart stabilitási kritériumot [5] alkalmazzuk.

A kritérium:
Vegyünk egy valós polinomot:

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n.$$

Ehhez a p polinomhoz tartozó nxn-es H Hurwitz mátrix [5] a következő:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_3 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_0 & a_2 & \ddots & & & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_1 & & \ddots & & a_n & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_0 & & & \ddots & a_{n-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & & & a_{n-2} & a_n & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}$$

Jelölje:

$$\begin{aligned} \Delta_1(p) &= \det(a_1), \\ \Delta_2(p) &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix}, \\ \Delta_3(p) &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Az $\Delta_k(p)$ determinánsokat Hurwitz determinánsoknak nevezzük.
A jelölések felhasználásával a Liénard-Chipart stabilitási kritérium a következőt mondja ki:
Egy p polinom Hurwitz-stabil akkor és csak akkor, ha az alábbi 4 feltétel közül valamelyik teljesül:

1. $a_n > 0, a_{n-2} > 0, \dots, \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots$
2. $a_n > 0, a_{n-2} > 0, \dots, \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots$
3. $a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} > 0 \dots, \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots$
4. $a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} > 0 \dots, \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots$

A stabilitásvizsgálathoz első lépésként határozzuk meg az A_k $(k = 0, 1, 2)$ mátrix karakterisztikus polinomját:

$$R_k(\mu) = \det(A_k - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -(p_1 + p_2\mu c_k) - \lambda & -\mu^2 c_k p_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & c_k\mu & -(p_4 - c_k\mu^2) & -p_3 - \lambda \end{pmatrix} =$$

Az első sor szerint kifejtve a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
&= -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} -c_k\mu p_2 - p_1 - \lambda & -\mu^2 c_k p_2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ c_k\mu & c_k\mu^2 - p_4 & -p_3 - \lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -1 & -\mu^2 c_k p_2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & c_k\mu^2 - p_4 & -p_3 - \lambda \end{pmatrix} = \\
&= -\lambda \Bigg((-c_k\mu p_2 - p_1 - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ c_k\mu^2 - p_4 & -p_3 - \lambda \end{pmatrix} - \mu^2 c_k p_2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_k\mu & -p_3 - \lambda \end{pmatrix} \Bigg) - \\
&\quad - \Bigg(- \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ c_k\mu^2 - p_4 & -p_3 - \lambda \end{pmatrix} + \mu^2 c_k p_2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -p_3 - \lambda \end{pmatrix} \Bigg) = \\
&= -\lambda \Big(\big(- c_k\mu p_2 - p_1 - \lambda \big) \big(- \lambda(-p_3 - \lambda) - (c_k\mu^2 - p_4) + \mu^2 c_k p_2 \cdot c_k\mu \Big) - \\
&\quad - \Big(- \big(- \lambda(-p_3 - \lambda) - (c_k\mu^2 - p_4) \big) \Big) = \\
&= \lambda^4 + \lambda^3(p_1 + p_3 + c_k p_2 \mu) + \lambda^2(1 + p_1 p_3 + p_4 + c_k p_2 p_3 \mu - c_k\mu^2) + \\
&\quad + \lambda(p_3 + p_1 p_4 + c_k p_2 p_4 \mu - c_k p_1 \mu^2) + p_4 - c_k\mu^2. \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\begin{aligned}
a_1(k, \mu) &= p_1 + p_3 + p_2 c_k \mu, \\
a_2(k, \mu) &= 1 + p_1 p_3 + p_4 + c_k p_2 p_3 \mu - c_k\mu^2, \\
a_3(k, \mu) &= p_1 p_4 + p_3 + p_2 p_4 c_k \mu - p_1 c_k \mu^2, \\
a_4(k, \mu) &= p_4 - c_k\mu^2.
\end{aligned}$$

Ezekkel felírva kapjuk meg az A_k mátrix $R_k(\mu)$ karakterisztikus polinomját:

$$R_k(\mu) = \lambda^4 + a_1(k, \mu)\lambda^3 + a_2(k, \mu)\lambda^2 + a_3(k, \mu)\lambda + a_4(k, \mu). \qquad (4.2)$$

Ekkor a Hurwitz mátrixunk a következő lesz:

$$\begin{pmatrix} a_1(k, \mu) & a_3(k, \mu) & 0 & 0 \\ 1 & a_2(k, \mu) & a_4(k, \mu) & 0 \\ 0 & a_1(k, \mu) & a_3(k, \mu) & 0 \\ 0 & 1 & a_2(k, \mu) & a_4(k, \mu) \end{pmatrix}$$

A Liénard-Chipart kritérium első feltételét alkalmazva kapjuk meg a stabilitási feltételeket:

$$
\begin{aligned}
a_2(k,\mu) =& 1 + p_4 + p_1p_3 + p_2p_3c_k\mu - c_k\mu^2 > 0,\\
a_4(k,\mu) =& p_4 - c_k\mu^2 > 0,\\
\Delta_1(k,\mu) =& a_1(k,\mu) = p_1 + p_3 + p_2c_k\mu > 0,\\
\Delta_3(k,\mu) =& \det\begin{pmatrix} a_1(k,\mu) & a_3(k,\mu) & 0\\ 1 & a_2(k,\mu) & a_4(k,\mu)\\ 0 & a_1(k,\mu) & a_3(k,\mu)\end{pmatrix} =\\
=& a_1(k,\mu)\cdot\det\begin{pmatrix} a_2(k,\mu) & a_4(k,\mu)\\ a_1(k,\mu) & a_3(k,\mu)\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} a_3(k,\mu) & 0\\ a_1(k,\mu) & a_3(k,\mu)\end{pmatrix} =\\
=& a_1(k,\mu)a_2(k,\mu)a_3(k,\mu) - a_1^2(k,\mu)a_4(k,\mu) - a_3^2(k,\mu) =\\
=& p_1p_3 + p_1^2p_3^2 + p_1p_3^3 - 2p_1p_3p_4 + p_1^3p_3p_4 + p_1^2p_3^2p_4 + p_1p_3p_4^2 +\\
&+(c_3p_2p_3 + 2c_3p_1p_2p_3^2 + c_3p_2p_3^3 - 2c_3p_2p_3p_4 + 3c_3p_1^2p_2p_3p_4 + 2c_3p_1p_2p_3^2p_4 + c_3p_2p_3p_4^2)\mu +\\
&+(2c_3p_1p_3 - c_3p_1^3p_3 - c_3p_1^2p_3^2 + c_3^2p_2^2p_3^2 - 2c_3p_1p_3p_4 + 3c_3^2p_1p_2^2p_3p_4 + c_3^2p_2^2p_3^2p_4)\mu^2 +\\
&+(c_3^2p_1p_2 + c_3^2p_2p_3 - 2c_3^2p_1^2p_2p_3 - c_3^2p_1p_2p_3^2 - c_3^2p_1p_2p_4 - c_3^2p_2p_3p_4 + c_3^3p_2^3p_3p_4)\mu^3 +\\
&+(c_3^3p_2^2 + c_3^2p_1p_3 - c_3^3p_1p_2^2p_3 - c_3^3p_2^2p_4)\mu^4 + c_3^3p_1p_2\mu^5 > 0.
\end{aligned}
$$

Tehát összefoglalva, a stabilitási feltételek a következők:

$$
\begin{aligned}
a_2(k,\mu) &> 0, && (4.3)\\
a_4(k,\mu) &> 0, && (4.4)\\
\Delta_1(k,\mu) = a_1(k,\mu) &> 0, && (4.5)\\
\Delta_3(k,\mu) = a_1(k,\mu)\big(a_2(k,\mu)a_3(k,\mu) - a_1(k,\mu)a_4(k,\mu)\big) - a_3^2(k,\mu) &> 0. && (4.6)
\end{aligned}
$$

A stabilitási kritérium felírása után, mindhárom szakasz stabilitásvizsgálatát külön-külön tárgyaljuk az alábbiakban.

4.2. Az első szakasz stabilitása

Vizsgáljuk először az első szakasz, azaz a (3.16) rendszer egyensúlyi pontjait.
Mivel (3.16) homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer, ezért az egyensúlyi pontja az origó lesz.

Megfelelően kicsi μ értékek mellett teljesülnek az előzőekben meghatározott stabilitási feltételek (4.3)-(4.6), azaz az origó stabil egyensúlyi pont lesz.

$\mu = 0$ esetén az A_0 mátrix sajátértékei:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 =& -0.0743 + 0.9972i,\\
\lambda_2 =& -0.0743 - 0.9972i,\\
\lambda_3 =& -0.0270 + 0.5235i,\\
\lambda_4 =& -0.0270 - 0.5235i.
\end{aligned}
$$

A μ paraméter értékének növelésével a λ_1 és λ_2 sajátértékek mozgása kicsi és végig a komplex bal félsíkon maradnak. Azonban a λ_3 és λ_4 sajátértékek képzetes részei a 0-ba tartanak, a $\mu = 0.2149$ paraméterértéknél összeütköznek és valós sajátértékekké válnak a komplex bal félsíkon.

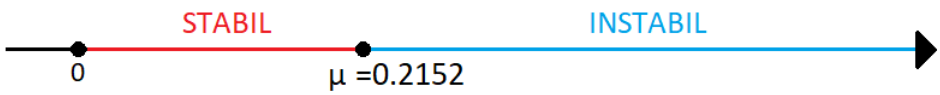
Az origó elveszti a stabilitását, ha egy sajátérték átlép a komplex jobb félsíkra. Ahhoz, hogy megtudjuk, hogy ez mikor következik be, meg kell határoznunk a legkisebb olyan μ paraméterértéket, amelyre a (4.3)-(4.6) feltételben szereplő egyenlőtlenségek közül bármelyik sérül.
Keressük az alábbi egyenletek pozitív gyökei közül a legkisebbet:

$$a_2(0,\mu) = 0, \tag{4.7}$$
$$a_4(0,\mu) = 0, \tag{4.8}$$
$$\Delta_1(0,\mu) = 0, \tag{4.9}$$
$$\Delta_3(0,\mu) = 0. \tag{4.10}$$

A (4.7) egyenlet gyökei: $\mu_1 = -0.4646 < 0$, $\mu_2 = 0.5041 > 0$.
A (4.8) egyenlet gyökei: $\mu_1 = -0.2152 < 0$, $\mu_2 = 0.2152 > 0$.
A (4.9) egyenlet gyöke: $\mu = -81.6278 < 0$.
A (4.10) egyenlet gyökei: egy negatív valós, a többi komplex: $\mu_1 = -0.7504 < 0$, $\mu_{2,3} = -0.0537 \pm 0.3422i$, $\mu_{4,5} = 0.0840 \pm 0.3164i$.

Tehát ezek közül a legkisebb pozitív érték a $\mu = 0.2152$, azaz ennél a paraméterértéknél nem teljesül a (4.4) feltétel, így az origó instabil egyensúlyi ponttá válik.

Az origó stabilitását láthatjuk a μ függvényében az alábbi ábrán:



4.3. A második szakasz stabilitása

Az első szakasz egyensúlyi pontjainak vizsgálata után nézzük a második szakaszt is, azaz a (3.17)(3.18) rendszereket.

Tehát az $\dot{\mathbf{x}} = A_1\mathbf{x} \pm B_1$ rendszerek egyensúlyi pontjai:

$$E^{\pm} = \mp A_1^{-1}B = \mp\frac{d_1\mu^2}{c_1\mu^2 - p_4}\begin{pmatrix} -p_2p_4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

melyek a $\mu_{=}0.2148$ értéknél jelennek meg, mint stabil egyensúlyi pontok.
Hasonlóan az első szakaszhoz, ebben az esetben is az $E^{\pm}$ egyensúlyi pontok elvesztik a stabilitásukat, ha az A_1 mátrix valamely sajátértéke keresztezi a képzetes tengelyt.
Ahhoz hogy lássuk, hogy ez mikor következik be, meg kell találnunk azt a legkisebb pozitív μ paraméterértéket, ahol a (4.3)-(4.6) feltételek valamelyike sérül.
Azaz keressük meg az alábbi egyenletek pozitív gyökei közül a legkisebbet:

$$a_2(1,\mu) = 0, \tag{4.12}$$
$$a_4(1,\mu) = 0, \tag{4.13}$$
$$\Delta_1(1,\mu) = 0, \tag{4.14}$$
$$\Delta_3(1,\mu) = 0. \tag{4.15}$$

A (4.12) egyenlet gyökei komplexek: $\mu_{1,2} = 0.0004 \pm 0.4329i$.
A (4.13) egyenlet gyökei szintén komplexek: $\mu_{1,2} = \pm 0.2003i$.
A (4.14) egyenlet gyöke: $\mu = 2.0122 > 0$.
A (4.15) egyenlet gyökei két negatív valós, egy pozitív valós, a többi komplex: $\mu_1 = -0.7679 < 0$, $\mu_2 = -0.0155$, $\mu_3 = 0.3034$, $\mu_{4,5} = 0.1481 \pm 0.7211i$.

Ezek közül a legkisebb pozitív a $\mu = 0.3034$ érték lesz, ezen paraméterérték mellett már nem teljesül a (4.6) feltétel, azaz itt válnak instabillá az $E^{\pm}$ egyensúlyi pontok.

Az alábbi ábrán az $E^{\pm}$ egyensúlyi pontok stabilitását láthatjuk a μ függvényében:

4.4. A harmadik szakasz stabilitása

Végül vizsgáljuk meg stabilitás szempontjából a harmadik szakasz, azaz a (3.19)(3.20) rendszereket.

Az egyensúlyi pontok kiszámítása:
$\dot{\mathbf{x}} = A_2\mathbf{x} \pm B_2$ rendszerek egyensúlyi pontjai $E_2^{\pm} = \mp A_2^{-1}B_2$, azaz

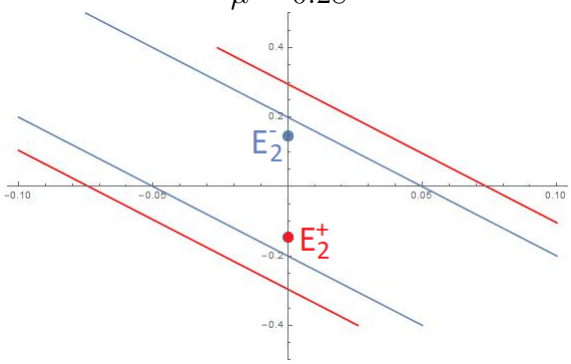
$$E_2^{\pm} = \mp \begin{pmatrix} \frac{-p_1p_4 - c_2p_2p_4\mu + c_2p_1\mu^2}{p_4 - c_2\mu^2} & \frac{-p_4 + c_2\mu^2}{p_4 - c_2\mu^2} & \frac{c_2p_2p_3\mu^2}{p_4 - c_2\mu^2} & \frac{c_2p_2\mu^2}{p_4 - c_2\mu^2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_2\mu}{p_4 - c_2\mu^2} & 0 & -\frac{p_3}{p_4 - c_2\mu^2} & -\frac{1}{p_4 - c_2\mu^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -d_2p_2\mu^2 \\ 0 \\ d_2\mu^2 \end{pmatrix} = \mp \begin{pmatrix} \frac{d_2p_2p_4\mu^2}{p_4 - c_2\mu^2} \\ 0 \\ \frac{-d_2\mu^2}{p_4 - c_2\mu^2} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Az egyensúlyi pontok viselkedése:

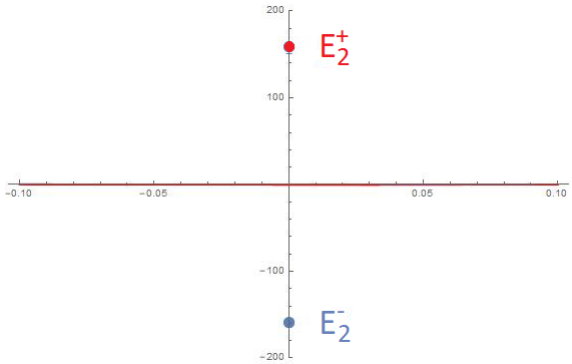
A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy mely μ paraméterértékek esetén esnek a (4.16) képlettel kiszámolt egyensúlyi pontok a 3. szakasz érvényességi tartományába, azaz, hogy mikor teljesül $E_2^+ \in \Sigma_2^+ \cup \Omega_2^+$ és $E_2^- \in \Sigma_2^- \cup \Omega_2^-$.

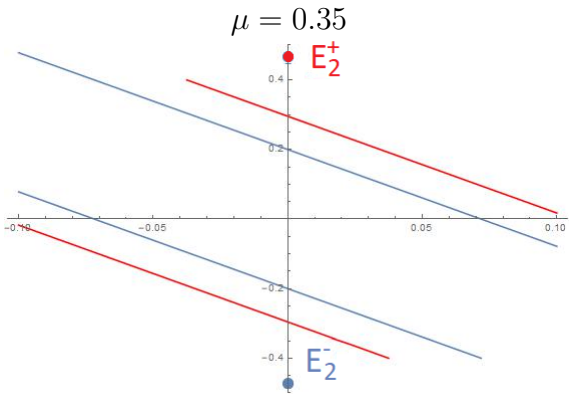
Különböző paraméterértékek esetén vizsgáltuk az $E_2^{\pm}$ egyensúlyi pontok elhelyezkedését az x_2x_3 síkon. Ez látható a következő négy ábrán.

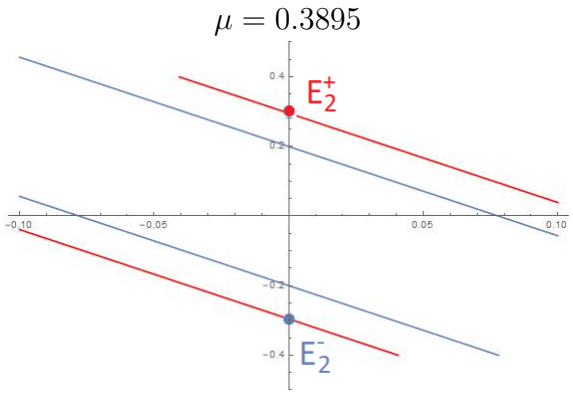
$\mu = 0.28$



$\mu = 0.3212$







A bal felső ábrán $\mu = 0.28$ érték esetén láthatóak az egyensúlyi pontok. Ebben az esetben a két egyensúlyi pont az ellentétes félsíkon tartózkodik. Növelve a μ paraméter értékét $\mu = 0.3212$ esetén az egyensúlyi pontok helyet cserélnek és a saját tartományukba kerülnek, azaz: $E_2^+ \in \Omega_2^+$ és $E_2^- \in \Omega_2^-$. Ettől a paraméterértéktől kezdve, és azt tovább növelve, az egyensúlyi pontok monoton csökkenő sorozatot alkotnak. A bal alsó ábrán $\mu = 0.35$ érték esetén láthatóak az egyensúlyi pontok, a jobb alsó ábrán pedig $\mu = 0.3895$ érték esetén. Látható, hogy ennél a paraméterértéknél érik el a $\Sigma_2^\pm$ egyeneseket, amelyek elválasztják egymástól a második és harmadik szakaszra vonatkozó tartományokat. Ennél nagyobb μ értékek esetén a 3. szakasz egyensúlyi pontjai már nem az erre a szakaszra vonatkozó tartományokban haladnak.

Mindkét egyensúlyi pont a $\mu > 0.3212$ értékek esetén jelenik meg a rájuk vonatkozó tartományokban.

Formálisan is kiszámítható, hogy mely paraméter érték esetén metszik a harmadik szakasz egyensúlyi pontjai a Σ_2^+ és a Σ_2^- egyeneseket:

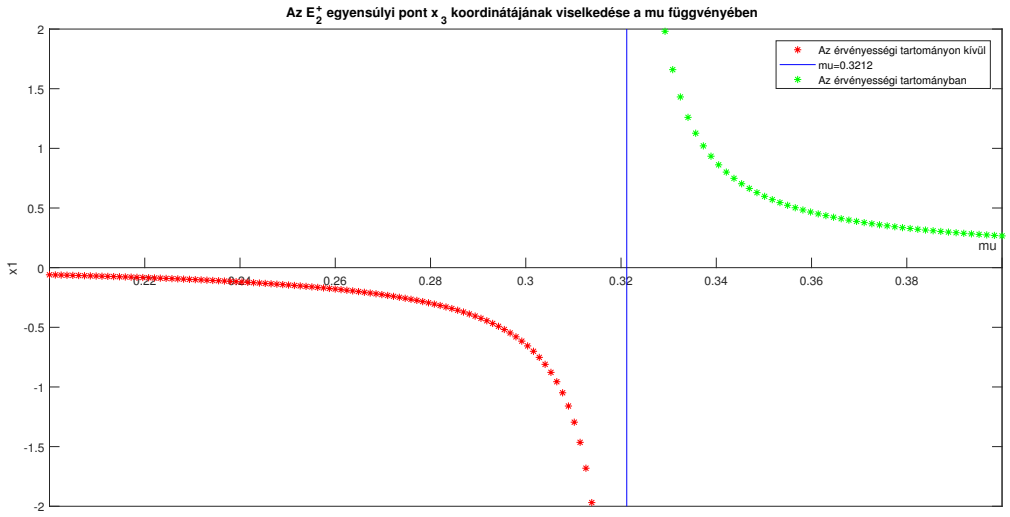
$$\frac{d_2\mu^2}{p_4 - c_2\mu^2} = \alpha_{switch},$$
$$\mu = \sqrt{\frac{\alpha_{switch} p_4}{d_2 + c_2\alpha_{switch}}} \approx 0.3895. \tag{4.17}$$

Ezek alapján tehát a harmadik szakasz egyensúlyi pontjai a $0.3212 \leq \mu \leq 0.3895$ paraméterértékek esetén esnek a rájuk vonatkozó tartományokba (Ω_2^+-ba és Ω_2^--ba).

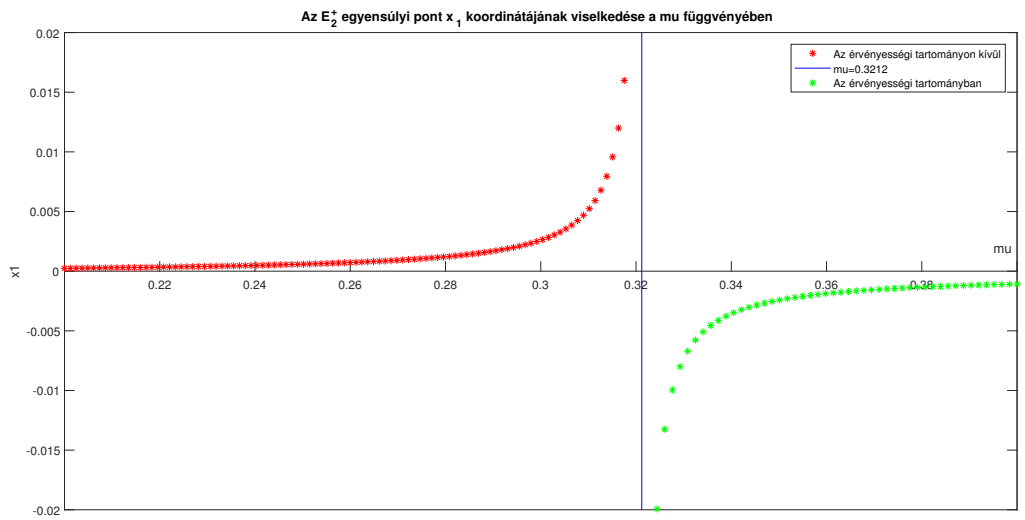
A 6. és 7. ábrán az E_2^+ egyensúlyi pontok x_1 és x_3 koordinátáinak viselkedése látható a μ függvényében.
Megjegyezzük, hogy elegendő csak az egyik egyensúlyi pontot vizsgálni, hiszen a két egyensúlyi pont szimmetrikus egymásra.

A $0.3212 < \mu < 0.3895$ paraméterértékek esetén az E_2^+ egyensúlyi pont x_3 koordinátájának értéke monoton csökkenő, ahogy azt az előzőekben már sejteni véltük. Tehát látható, hogy a $\Sigma_2^+ \cup \Omega_2^+$ tartományban az E_2^+ egyensúlyi pont monoton csökken. A szimmetriából adódóan az E_2^- egyensúlyi pont pedig monoton növekvő sorozatot alkot.

Az E_2^+ egyensúlyi pont x_1 koordinátája az előbb kiszámolt paraméterértékek között monoton növekvő lesz.
Hasonlóan a szimmetria miatt az E_2^- egyensúlyi pont x_1 koordinátája monoton csökkenő lesz.



6. ábra. Az E_2^+ egyensúlyi pont x_3 koordinátájának viselkedése a μ függvényében



7. ábra. Az E_2^+ egyensúlyi pont x_1 koordinátájának viselkedése a μ függvényében

Stabilitásvizsgálat

A (4.3)-(4.6) képletekkel felírt stabilitási feltételt alkalmazzuk ismét. Ha a stabilitási kritériumban szereplő egyenlőtlenségek teljesülnek, akkor az egyensúlyi pontok stabilak. Nézzük, meg, hogy mely paraméterértéknél válnak instabillá, azaz sérül valamelyik egyenlőtlenség. Az alábbi egyenletek gyökei közül keressük a legkisebb pozitív μ-t.

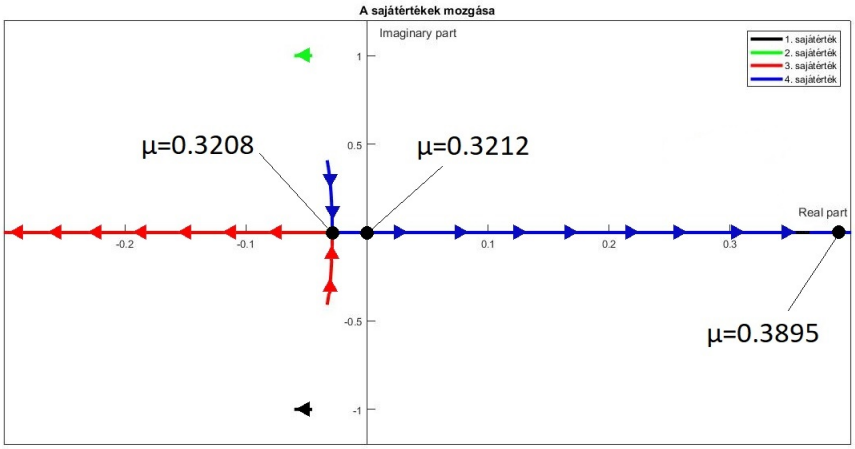
$$a_2(2,\mu) = 0, \tag{4.18}$$
$$a_4(2,\mu) = 0, \tag{4.19}$$
$$\Delta_1(2,\mu) = 0, \tag{4.20}$$
$$\Delta_3(2,\mu) = 0. \tag{4.21}$$

A (4.18) egyenlet gyökei: $\mu_1 = -0.693794$ és $\mu_2 = 0.694588$.

A (4.19) egyenlet gyökei: $\mu_1 = -0.321295$ és $\mu_2 = 0.321295$.
A (4.20) egyenlet gyöke a $\mu = -5.17487$.
A (4.21) egyenlet gyökei: $\mu_1 = -1.53678$ valós és $\mu_{2,3} = -0.0673721 \pm 0.517796i$, $\mu_{4,5} = 0.110283 \pm 0.491108i$ komplexek.

A gyökök közül a legkisebb pozitív a $\mu = 0.321295$.

Az A_2 mátrix sajátértékeinek vizsgálatával is ellenőrizhetjük a stabilitást. Az A_2 mátrix sajátértékeinek mozgása követhető nyomon az alábbi 8. ábrán.



8. ábra. Az A_2 mátrix sajátértékeinek mozgása

A μ paramétert 0 és 0.4 között változtatva vizsgáltuk az A_2 mátrix sajátértékeinek változását. Kezdetben két komplex konjugált pár sajátérték látható, ezek közül az egyik pár (az ábrán fekete és zöld színekkel jelölve) végig a komplex bal félsíkon marad és mozgásuk nem számottevő. A másik pár (az ábrán piros és kék színekkel jelölve) mozgása azonban már jelentősebb, hiszen a μ paraméter növelésével gyorsan közelednek egymáshoz, $\mu = 0.3208$ esetén összeütköznek a valós tengelyen és innen már két különböző valós sajátértékként mozognak tovább. Az egyik (piros színnel jelölve) $-\infty$ felé tart, a másik (kék színnel jelölve) pedig $\mu = 0.3212$ esetén keresztezi a képzetes tengelyt és tovább növelve a paramétert $+\infty$ felé tart.

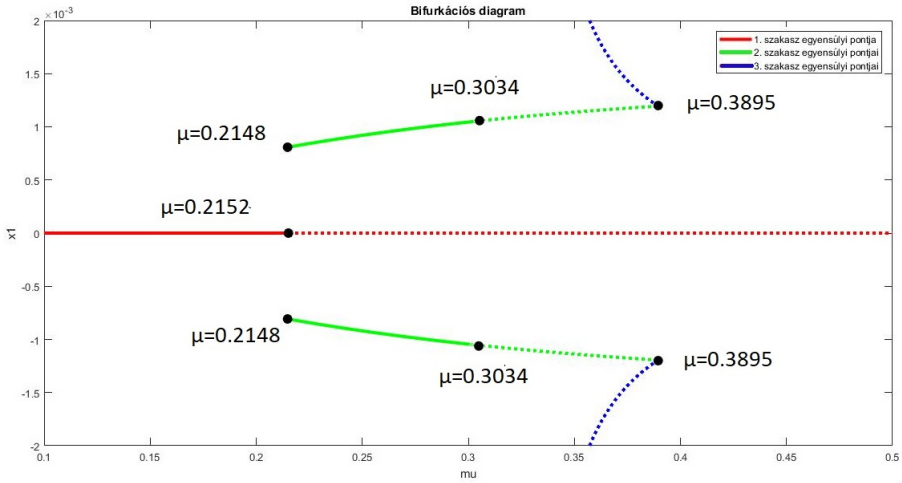
Összegezve tehát azt kaptuk, hogy a szakasz egyensúlyi pontjai a $\mu = 0.3212$ paraméterértéknél jelennek meg a harmadik szakasz érvényességi tartományában, mint instabil egyensúlyi pontok és a $\mu = 0.3895$ paraméterérték eléréséig haladnak az érvényességi tartományban.

Az $E_2^{\pm}$ egyensúlyi pontok stabilitását láthatjuk az alábbi ábrán μ függvényében:

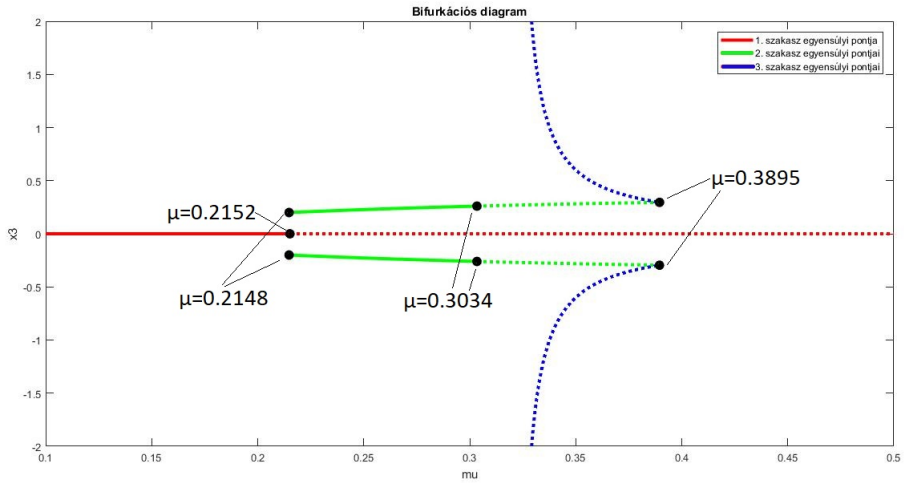
4.5. Bifurkációs diagramok

A folytonos modell három szakaszának együttes stabilitását láthatjuk a következő bifurkációs diagramokon, melyek esetén az egyensúlyi pontok nem nulla koordinátáit (x_1 és x_3) ábrázoltuk a μ paraméter függvényében.

Pirossal színnel látható az első szakasz egyensúlyi pontja, azaz az origó, zöld színnel a második szakasz $E_1^{\pm}$ egyensúlyi pontjai, valamint kék színnel a harmadik szakasz $E_2^{\pm}$ egyensúlyi pontjai.
A folytonos vonal jelöli, hogy azon paraméterértékek esetén az egyensúlyi pont stabil egyensúlyi helyzetű, a szaggatott vonal esetén pedig instabil egyensúlyi helyzetű.



9. ábra. A három szakasz egyensúlyi pontjainak (x_1 koordinátájának) létezése és stabilitása a μ függvényében



10. ábra. A három szakasz egyensúlyi pontjainak (x_3 koordinátájának) létezése és stabilitása a μ függvényében

5. Operátorszeletelés alkalmazása a vizsgált aerodinamikai modellre

5.1. Mátrixfelbontások

Ahogyan az előző fejezetben láthattuk, a linearizált modellt megadó A_k $(k = 0, 1, 2)$ mátrix a következő:

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -(p_1 + p_2\mu c_k) & -\mu^2 c_k p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & c_k\mu & -(p_4 - c_k\mu^2) & -p_3 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

A mátrixok mindhárom szakasz esetén ugyanolyan struktúrájúak, csak az értékek esetén jelentkeznek különbségek. Ennek köszönhetően a mátrixfelbontásokat nem kell külön-külön tárgyalnunk a különböző szakaszok esetén, hanem ezt általánosságban tehetjük meg.
Tekintsük tehát az általunk vizsgált felbontásokat.

Az első és talán a legkézenfekvőbb ötlet, amikor a mátrixot két másik mátrix összegére bontjuk fel a következőképpen:

$$A_k = A_k^1 + A_k^2, \tag{5.2}$$

ahol $k = 0, 1, 2$ esetén

$$A_k^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(p_1 + p_2\mu c_k) & -\mu^2 c_k p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -p_3 \end{pmatrix}, \quad A_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_k\mu & -(p_4 - c_k\mu^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Az A_k^1 mátrix egy felső háromszögmátrix, míg az A_k^2 egy szigorúan alsó háromszögmátrix ez utóbbi egyben nilpotens mátrix, melyre $(A_k^2)^m = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ $\forall m > 2$ esetén. Ez azt eredményezi, hogy a mátrix exponenciálisa pontosan kiszámítható, hiszen a végtelen exponenciális sorban a mátrix négyzetesnél magasabb hatványai eltűnnek. Így a splitting módszerek realizálásakor az A_k^2 mátrixszal megadott részfeladat megoldása minden lépésben pontosan számítható.

Ezek után felmerül a kérdés, hogy lehet-e olyan felbontást adni, melyben minden mátrix exponenciálisa pontosan számítható. Természetesen igen, ha az előző (5.2) felbontásban szereplő A_k^1 felső háromszögmátrixot felbontjuk egy diagonális és egy szigorúan felső háromszögmátrixra, máris eljutottunk egy ilyen felbontáshoz. Ekkor tehát az eredeti mátrixot három másik mátrix összegeként írhatjuk fel a következőképpen:

$$A_k = A_k^1 + A_k^2 + A_k^3, \tag{5.3}$$

ahol $k = 0, 1, 2$ esetén

$$A_k^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^2 c_k p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(p_1 + p_2\mu c_k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_3 \end{pmatrix},$$

$$A_k^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_k\mu & -(p_4 - c_k\mu^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Az A_k^1 és A_k^3 mátrixok nilpotens mátrixok, az előbbi szigorúan felső-, az utóbbi pedig egy szigorúan alsó háromszögmátrix. Mindkét mátrix esetén a négyzetesnél magasabb hatványaik a nullmátrixszal egyeznek meg, így pontosan megadható az exponenciálisuk. Az A_k^2 mátrix pedig egy diagonális mátrix, melynek exponenciális mátrixát egyszerű módon tudjuk megadni, hiszen $\exp\big(\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\big) = \operatorname{diag}\big(\exp(a_1), \exp(a_2), \ldots, \exp(a_n)\big)$.

A munkánk során kitértünk az első fejezetben szereplő 2.3.1 Állítás egyszerűsítésére szolgáló kommutáló mátrixfelbontások vizsgálatára is. Megjegyezzük, hogy a tapasztalataink szerint adott mátrix esetén a gyakorlatban meglehetősen komplikált kommutáló mátrixfelbontást találni.
Elsőként tekintsük a következő felbontást, melyben az eredeti A_k mátrixot három másik mátrix összegére bontottuk fel:

$$A_k = A_k^1 + A_k^2 + A_k^3, \tag{5.4}$$

ahol $k = 0, 1, 2$ esetén

$$A_k^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -(p_1 + p_2\mu c_k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(p_4 - c_k\mu^2) & -p_3 \end{pmatrix},$$

$$A_k^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^2 c_k p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_k\mu & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ebben az esetben A_k^3 egy nilpotens mátrix, melyre $(A_k^3)^m = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ $\forall m > 2$. Tehát az exponenciálisa pontosan megadható. A másik két mátrix esetén $A_k^1 A_k^2 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ és $A_k^2 A_k^1 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, tehát teljesül a következő egyenlőség $\left[A_k^1, A_k^2\right] = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Itt a lineáris algebrában megszokott jelölés $\left[A_k^1, A_k^2\right]$ az A_k^1 és A_k^2 mátrixok kommutátorát jelöli, azaz $\left[A_k^1, A_k^2\right] = A_k^1 A_k^2 - A_k^2 A_k^1$. Szintén a lineáris algebrából ismeretes, hogy két mátrix egymással kommutáló, ha a kommutátoruk megegyezik a nullmátrixszal, azaz $\left[A_k^1, A_k^2\right] = \mathbf{0}$.
Ezek alapján a (5.4) felbontásban szereplő A_k^1 és A_k^2 mátrixok egymással kommutálnak. Ezzel a felbontással egyrészt, az első fejezetben leírtak miatt, előnyre tettünk szert, másrészt viszont elvesztettük, ezen mátrixok esetén, a pontos megoldhatóság tulajdonságát és az ebből adódó előnyt.

A következő felbontás esetén az eredeti A_k mátrixot négy mátrix összegeként írtuk fel, melyek közül két mátrix egymással kommutáló, valamint az összes mátrix rendelkezik a pontos megoldhatóság tulajdonságával. A felbontás tehát a következő alakú:

$$A_k = A_k^1 + A_k^2 + A_k^3 + A_k^4, \tag{5.5}$$

ahol $k = 0, 1, 2$ esetén

$$A_k^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(p_1 + p_2\mu c_k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_3 \end{pmatrix},$$

$$A_k^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^2 c_k p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_k^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_k\mu & -(p_4 - c_k\mu^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Az A_k^1 és A_k^2 diagonális mátrixok, melyek esetén megadható a pontos exponenciális mátrix, hiszen ez esetben is érvényes a (5.3) felbontásnál leírt exponenciális mátrix számításra vonatkozó összefüggés. Emellett teljesül az $\left[A_k^1, A_k^2\right] = \mathbf{0}$ egyenlőség, azaz A_k^1 és A_k^2 kommutáló mátrixok.
Továbbá az A_k^3 és A_k^4 mátrixok nilpotens mátrixok, az előbbi szigorúan felső-, az utóbbi pedig egy szigorúan alsó háromszögmátrix. Mindkét mátrix esetén a négyzetesnél magasabb hatványaik a nullmátrixszal egyeznek meg, így pontosan megadható az exponenciálisuk.

Végül az utolsó vizsgált felbontás, az előzőhöz hasonlóan, szintén négy mátrix összegére vonatkozik:

$$A_k = A_k^1 + A_k^2 + A_k^3 + A_k^4, \tag{5.6}$$

ahol $k = 0, 1, 2$ esetén

$$A_k^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(p_4 - c_k\mu^2) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_k^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(p_1 + p_2\mu c_k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_3 \end{pmatrix}, \qquad A_k^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^2 c_k p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_k\mu & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor A_k^1 és A_k^2 kommutáló mátrixok, továbbá A_k^1 exponenciálisa pontosan számítható és emellett speciális alakú, hiszen egy négydimenziós tengely körüli forgatás mátrixa. Az A_k^3 és A_k^4 mátrixok a korábbi felbontásokban már előforduló diagonális és nilpotens mátrixok.

5.2. A részfeladatok lehetséges megoldási módszerei

Az operátorszeletelés számítógépes realizálása során felmerül a kérdés, hogy a felbontás után kapott rész-Cauchy-feladatok esetén milyen módszerekkel tudjuk és milyen módszerekkel érdemes előállítani a megoldást. A munkánk során erre a problémára három megoldást alkalmaztunk.
Az első és talán legkézenfekvőbb módszer, ha minden lépésben valamilyen, a splitting módszerrel azonos rendben közelítő numerikus módszerrel oldjuk meg a kapott részfeladatokat. Ez a szekvenciális szeletelés esetén valamilyen elsőrendű módszert követel meg, lehet például explicit vagy implicit Euler módszer. Strang-Marcsuk valamint a 2.3.1. Állításban megfogalmazott módszer esetén már másodrendű módszert kell alkalmaznunk. Ez lehet például

többek között javított Euler- vagy trapéz módszer is.
A dolgozat első részében, a splitting eljárások ismertetésénél láthattuk, hogy a (2.1) Cauchy-probléma megoldását formálisan a végtelen exponenciális sor segítségével adhatjuk meg. Innen a második megoldási módszer, miszerint a végtelen exponenciális sor megfelelő rendben való elcsonkolásával is megadható a részfeladatok megoldása. A csonkolás a szekvenciális szeletelés esetén első rendben, míg a Strang-Marcsuk valamint a 2.3.1. Állításban megfogalmazott módszer esetén másodrendben történik.
Végül bizonyos részfeladatok pontos megoldásait is elő tudjuk állítani, ha sikerül az A operátor egy olyan felbontását megadni, mely esetén valamennyi részfeladat megoldása pontosan számítható. Ilyen felbontásokat az előző részben, a mátrixfelbontások bemutatásánál már láthattunk.

5.3. Operátorszeletelés alkalmazása az első szakaszra

Elsőként, a második fejezetben bemutatott, folytonos aerodinamikai modell első szakaszát leíró homogén lineáris rendszer esetén állítottuk elő a rá vonatkozó diszkretizált modellt, az első fejezetben részletezett operátorszeletelési eljárások segítségével.

Tekintsük a (3.16) rendszert Cauchy-feladatként a $[0, T]$ intervallumon.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) & t \in (0, T] \\ x(0) = x_0 \, adott. \end{cases} \tag{3.16'}$$

Ezután tekintsük a $(0, T]$ vizsgált intervallum ekvidisztáns felbontását.

$$\omega_h = \left\{ t_i = i \cdot h, h = \frac{T}{n}, i = 0, 1, ..., n \right\}.$$

Az (5.2) típusú felbontás, valamint a szekvenciális splitting alkalmazásával, az eredeti (3.16') rendszer szeleteléses approximációja a következő Cauchy-feladatok segítségével írható fel.

$$\begin{cases} \dot{y_1}(t) = A_0^1 y_1(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_1(t_i) = x_{sp}(t_i), \end{cases} \tag{5.7} \qquad \begin{cases} \dot{y_2}(t) = A_0^2 y_2(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_2(t_i) = y_1(t_{i+1}). \end{cases} \tag{5.8}$$

ahol $i = 0, \ldots, n-1$, továbbá $x_{sp}(t)$ a splitting módszer alkalmazásával kapott közelítő megoldás, amely a $t = t_{i+1}$ pontban az (5.8) részfeladat megoldásával, azaz $y_2(t_{i+1})$ értékkel egyenlő. Kezdetben a $[0, t_1]$ intervallumon az (5.7) részfeladat kezdeti feltétele az eredeti (3.16') feladat kezdeti feltételével egyezik meg.

Az (5.7)(5.8) feladatok pontos megoldása a következőképpen nyerhető.

$$y_1(t_{i+1}) = \exp(A_0^1(t_{i+1} - t_i)) \cdot x_{sp}(t_i), \tag{5.9}$$
$$y_2(t_{i+1}) = \exp(A_0^2(t_{i+1} - t_i)) \cdot y_1(t_{i+1}). \tag{5.10}$$

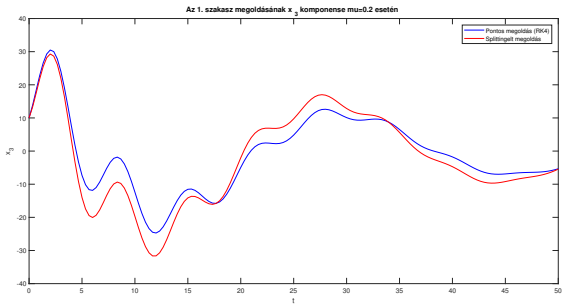
Ahogyan a mátrixfelbontások ismertetésénél említettük, az A_0^1 felső háromszögmátrix exponenciálisa nem számítható ki pontosan, így az (5.7) részfeladat megoldásának meghatározására minden lépésben kétféle lehetőségünk van. Valamilyen megfelelő rendű numerikus módszer, ez esetben, mivel a szekvenciális splitting elsőrendű, valamilyen elsőrendű módszer (például explicit vagy implicit Euler módszer) segítségével. Emellett alkalmazhatjuk a végtelen exponenciális sor megfelelő rendben elcsonkolt alakját is.

Az (5.8) részfeladat pontos megoldása előállítható, hiszen az A_0^2 nilpotens mátrix exponenciálisa könnyedén kiszámítható és a következő alakú:

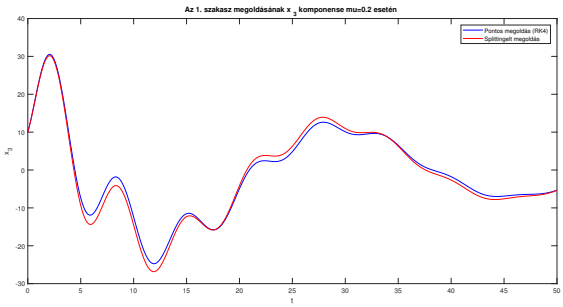
$$\exp(A_0^2 t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}c_0\mu t^2 & c_0\mu t & -(p_4 - c_0\mu^2)t & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Megjegyezzük, hogy bár meg tudjuk határozni az (5.8) részfeladat pontos megoldását, azonban ekkor is alkalmazhatunk megfelelő rendben közelítő numerikus módszert a megoldás előállításához.
A következő ábrákon láthatjuk, hogy a h lépésköz csökkentésével hogyan approximálja a splittingelt megoldás (pirossal jelölve) a pontos megoldást (kékkel jelölve).
Megjegyezzük, hogy mivel a modellünk esetén a pontos megoldás nem adható meg analitikusan, így a pontos megoldást egy magasabb rendben közelítő numerikus módszerrel (negyedrendű Runge-Kutta módszerrel) megoldott numerikus megoldással helyettesítettük.
Az ábrákon a megoldás x_3 komponense látható $\mu = 0.2$ paraméterérték mellett a $[0, 100]$ intervallumon.

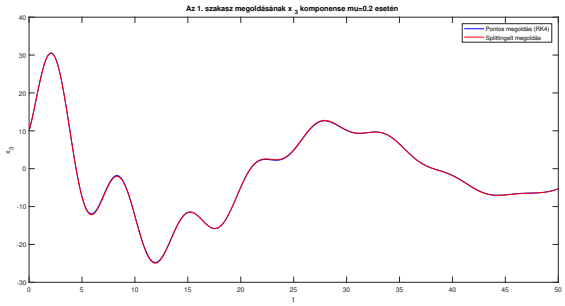
$h = 1$



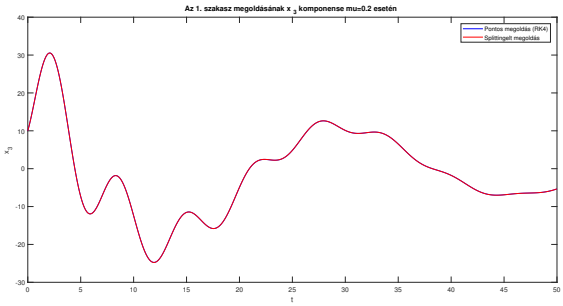
$h = 0.1$



$h = 0.01$



$h = 0.001$



Az második típusú (5.3) felbontás és továbbra is a szekvenciális splitting alkalmazása során a (3.16') rendszer az alábbi részfeladatokra bontható:

$$\begin{cases} \dot{y_1}(t) = A_0^1 y_1(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_1(t_i) = x_{sp}(t_i), \end{cases} \tag{5.12}$$

$$\begin{cases} \dot{y_2}(t) = A_0^2 y_2(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_2(t_i) = y_1(t_{i+1}), \end{cases} \tag{5.13}$$

$$\begin{cases} \dot{y_3}(t) = A_0^3 y_3(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_3(t_i) = y_2(t_{i+1}). \end{cases} \tag{5.14}$$

Itt továbbra is $i = 0, \ldots, n-1$ és $x_{sp}(t)$ ismét a splitting módszer alkalmazásával kapott megoldás, amely a $t = t_{i+1}$ pontban az (5.14) részfeladat megoldásával, azaz $y_3(t_{i+1})$ értékkel

egyenlő. A felbontásból adódóan, az előző alfejezetben leírtak miatt, minden lépésben meghatározhatóak az (5.12)(5.13)(5.14) részfeladatok pontos megoldásai, amelyek a következők.

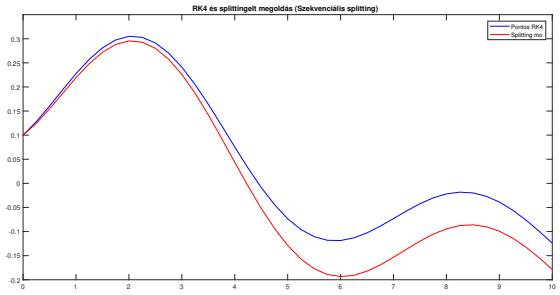
$$y_1(t_{i+1}) = \exp(A_0^1(t_{i+1} - t_i)) \cdot x_{sp}(t_i), \tag{5.15}$$
$$y_2(t_{i+1}) = \exp(A_0^2(t_{i+1} - t_i)) \cdot y_1(t_{i+1}), \tag{5.16}$$
$$y_3(t_{i+1}) = \exp(A_0^3(t_{i+1} - t_i)) \cdot y_2(t_{i+1}). \tag{5.17}$$

Az A_0^1 és A_0^2 mátrixok exponenciális mátrixai a következők.

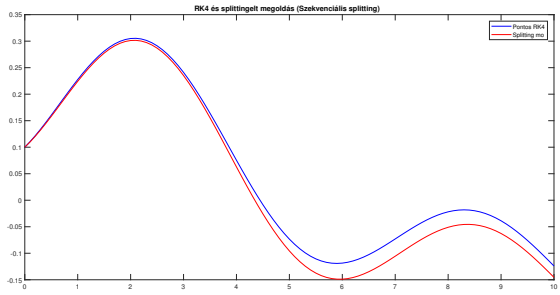
$$\exp(A_0^1 t) = \begin{pmatrix} 1 & t & -\frac{1}{2}c_0p_2\mu^2t^2 & -\frac{1}{6}c_0p_2\mu^2t^3 \\ 0 & 1 & -c_0p_2\mu^2t & -\frac{1}{2}c_0p_2\mu^2t^2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \exp(A_0^2 t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-p_1t-c_0p_2\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-p_3t} \end{pmatrix}.$$

Ebben az esetben az A_0^3 mátrix exponenciálisa megegyezik az (5.11) mátrixszal.
Megjegyezzük, hogy a módszer számítógépes realizálása során kétféle módon járhatunk el, minden részfeladatot numerikusan megoldva, vagy kihasználva azt, hogy pontosan előállítható a kapott részfeladatok megoldása.
A következő ábrákon ismét azt láthatjuk, hogy a h lépésköz csökkentésével hogyan közelíti a splittingelt megoldás a pontos megoldást. Az ábrákon a megoldás x_1 komponense látható $\mu = 0.2$ paraméterérték mellett a $[0, 10]$ intervallumon.

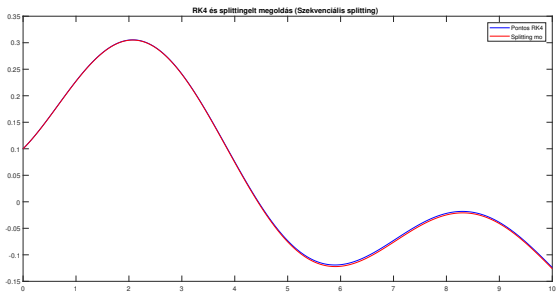
$h = 0.3$



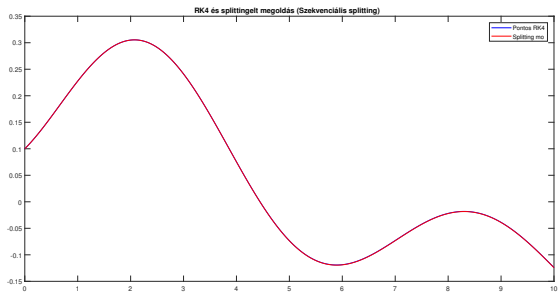
$h = 0.1$



$h = 0.01$



$h = 0.001$



A következő 1. táblázatban láthatjuk, hogy hogyan alakulnak a hibák valamint a futási idők, az (5.2) és az (5.3) felbontások alkalmazása során. Látható, hogy mind a hibák terén, mind a futási idők terén megközelítőleg ugyanúgy teljesít a két módszer.
A futási idők minden esetben másodpercben értendők.

1. táblázat. Az (5.2) és (5.3) felbontás összehasonlítása

h	**Hiba (5.2)**	**Hiba (5.3)**	**Futási idő (s)(5.2)**	**Futási idő (s)(5.3)**
1	$2.5614{\cdot}10^{-1}$	$2.6430{\cdot}10^{-1}$	0.00007	0.00002
0.1	$2.5346{\cdot}10^{-2}$	$2.0965{\cdot}10^{-2}$	0.0008	0.0008
0.01	$2.0922{\cdot}10^{-3}$	$2.0502{\cdot}10^{-3}$	0.0017	0.0081
0.001	$2.0896{\cdot}10^{-4}$	$2.0469{\cdot}10^{-4}$	0.0137	0.0402

Érdemes azt is megvizsgálni, hogy hogyan teljesít a splittinget tartalmazó módszer valamilyen egyszerű, azonos rendben approximáló megoldóhoz képest. Ehhez a (3.16') feladat megoldását előállítottuk egyben, szeletelést nem tartalmazó explicit Euler módszerrel, ami a szekvenciális splittinghez hasonlóan első rendben pontos. A következő 2. táblázat a másodpercben értendő futási időket szemlélteti. Látható, hogy a h lépésközt csökkentve a szeletelést tartalmazó megoldók jóval gyorsabban állítják elő a numerikus megoldást mint az Euler módszer. Ez mindenképpen pozitív eredmény és azt sugallja, hogy érdemes a gyakorlatban alkalmazni az operátorszeletelési eljárásokat.

2. táblázat. A futási idők (s) összehasonlítása a szeleteléses módszerek és az egyben megoldott módszer esetén

h	**Split.+(5.2)felb.**	**Split.+(5.3)felb.**	**explicit Euler**
1	0.00007	0.00002	0.0023
0.1	0.0008	0.0008	0.0053
0.01	0.0017	0.0081	0.0109
0.001	0.0137	0.0402	0.7140

Az első típusú (5.2) felbontás és a Strang-Marcsuk splitting alkalmazása során a (3.16') rendszer az alábbi részfeladatokra bontható:

$$\begin{cases} \dot{y_1}(t) = A_0^1 y_1(t) & t \in [t_i, t_{i+\frac{1}{2}}] \\ y_1(t_i) = x_{sp}(t_i), \end{cases} \quad (5.18) \qquad \begin{cases} \dot{y_2}(t) = A_0^2 y_2(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_2(t_i) = y_1(t_{i+\frac{1}{2}}), \end{cases} \quad (5.19)$$

$$\begin{cases} \dot{y_3}(t) = A_0^1 y_3(t) & t \in [t_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+1}] \\ y_3(t_{i+\frac{1}{2}}) = y_2(t_{i+1}). \end{cases} \quad (5.20)$$

Továbbra is $i = 0, \ldots, n-1$ és $x_{sp}(t)$ ismét a splitting módszer alkalmazásával kapott megoldás, amely a $t = t_{i+1}$ pontban az (5.20) részfeladat megoldásával, azaz $y_3(t_{i+1})$ értékkel egyenlő.

Az (5.18)(5.19)(5.20) feladatok megoldásai a következők:

$$y_1(t_{i+1}) = \exp(A_0^1(t_{i+\frac{1}{2}} - t_i)) \cdot x_{sp}(t_i), \quad (5.21)$$

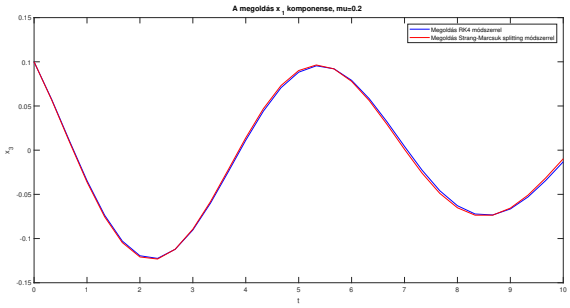
$$y_2(t_{i+1}) = \exp(A_0^2(t_{i+1} - t_i)) \cdot y_1(t_{i+\frac{1}{2}}), \quad (5.22)$$

$$y_3(t_{i+1}) = \exp(A_0^1(t_{i+1} - t_{i+\frac{1}{2}})) \cdot y_2(t_{i+1}). \quad (5.23)$$

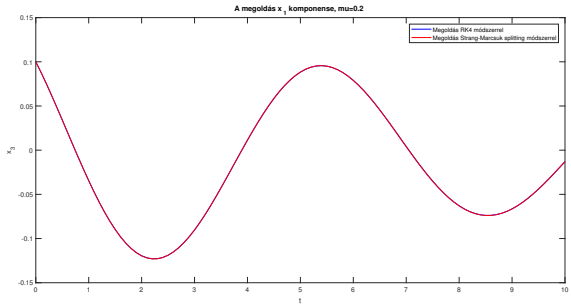
A részfeladatok megoldása, a korábbiakhoz hasonlóan, történhet valamilyen megfelelő rendben approximáló numerikus módszerrel. Ez esetben, mivel a Strang-Marcsuk módszer másodrendű, valamilyen másodrendben pontos módszerrel (például javított Euler vagy trapéz

módszerrel). Az A_0^2 mátrix által meghatározott részfeladat esetén elő tudjuk állítani a pontos megoldást, az exponenciális mátrixát a korábbiakban az (5.11) képlettel definiáltuk. A többi részfeladatot az exponenciális mátrix másodrendű csonkolása segítségével is megoldhatjuk. Ebben az esetben is többféle kombináción teszteltük a numerikus modelljeinket. Mivel a Strang-Marcsuk módszer másodrendben pontos, kisebb h lépésköz megválasztása is elegendő, ahhoz, hogy jól approximáló splittingelt megoldást kapjunk. Erre mutat rá a következő ábrák sorozata, melyeken látható, hogy már $h = 0.3$ esetén is gyakorlatilag együtt haladnak a megoldások. Az ábrákon a megoldás x_1 komponense látható $\mu = 0.2$ paraméterérték mellett a $[0, 10]$ intervallumon.

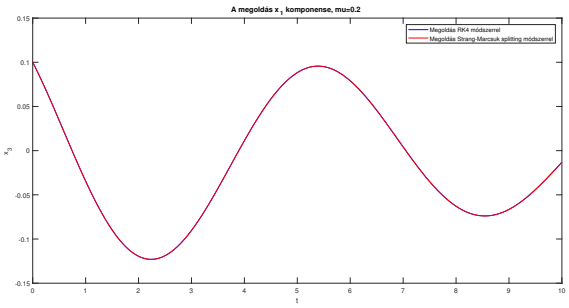
$h = 0.3$



$h = 0.1$



$h = 0.01$



A második típusú (5.3) felbontás és a Strang-Marcsuk splitting alkalmazása során a (3.16') rendszer az alábbi részfeladatokra bontható:

$$\begin{cases} \dot{y_1}(t) = A_0^1 y_1(t) & t \in [t_i, t_{i+\frac{1}{2}}] \\ y_1(t_i) = x_{sp}(t_i), \end{cases} \tag{5.24}$$

$$\begin{cases} \dot{y_2}(t) = A_0^2 y_2(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_2(t_i) = y_1(t_{i+\frac{1}{2}}), \end{cases} \tag{5.25}$$

$$\begin{cases} \dot{y_3}(t) = A_0^3 y_3(t) & t \in [t_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+1}] \\ y_3(t_{i+\frac{1}{2}}) = y_2(t_{i+1}). \end{cases} \tag{5.26}$$

Itt továbbra is $i = 0, \ldots, n-1$ valamint $x_{sp}(t)$ ismét a splitting módszer alkalmazásával kapott megoldás, amely a $t = t_{i+1}$ pontban az (5.26) részfeladat megoldásával, azaz $y_3(t_{i+1})$ értékkel egyenlő.

Az (5.24)(5.25)(5.26) feladatok megoldásai a következők:

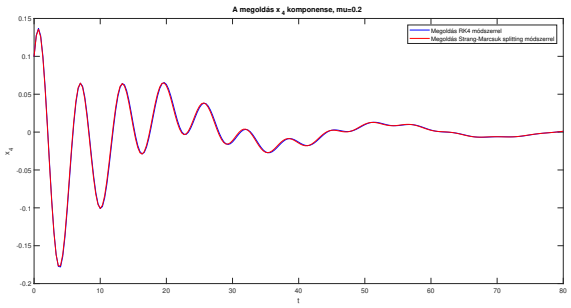
$$y_1(t_{i+1}) = \exp(A_0^1(t_{i+\frac{1}{2}} - t_i)) \cdot x_{sp}(t_i), \tag{5.21}$$

$$y_2(t_{i+1}) = \exp(A_0^2(t_{i+1} - t_i)) \cdot y_1(t_{i+\frac{1}{2}}), \tag{5.22}$$

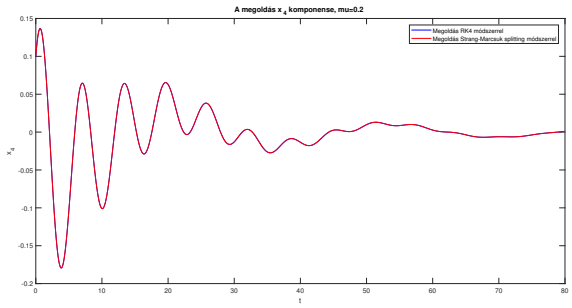
$$y_3(t_{i+1}) = \exp(A_0^3(t_{i+1} - t_{i+\frac{1}{2}})) \cdot y_2(t_{i+1}). \tag{5.23}$$

Az előzőeknek megfelelően ezen felbontás alkalmazása esetén elő tudjuk állítani a részfeladatok pontos megoldását is. A következő ábrákon a h lépésköz csökkentése esetén láthatjuk, hogy miként viselkedik a splittingelt megoldás. Az ábrákon a megoldás x_4 komponense látható $\mu = 0.2$ paraméterérték mellett a $[0, 100]$ intervallumon.

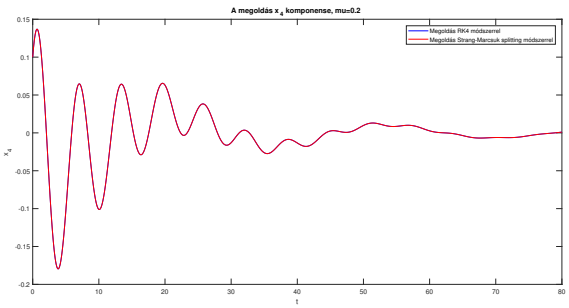
$h = 0.3$



$h = 0.1$



$h = 0.01$



A következő 3. táblázatban vizsgáljuk az így kapott szeleteléses módszer hibáinak illetve másodpercben értendő futási idejeinek összefüggéseit a h lépésközzel. Valamint ezeket összehasonlítjuk a rendszert egyben megoldó, szintén másodrendű javított Euler módszerrel kapott adatokkal. A hibákat tekintve egyértelmű a szeleteléses módszer sikere, hiszen azonos lépésköz esetén két nagyságrenddel pontosabban approximálja a pontos megoldást, mint a javított Euler módszer. A futási időket vizsgálva azonban fordított a helyzet, hiszen a javított Euler módszer jóval gyorsabban előállítja a numerikus megoldást.

3. táblázat. A hibák valamint a futási idők (s) összehasonlítása a Strang-Marcsuk eljárás és az (5.3) felbontás alkalmazásával nyert szeleteléses módszer és az egyben, javított Euler módszerrel megoldó eljárás esetén

h	**Hiba-Split.**	**Hiba-jav.Euler**	**Futási idő-Split.**	**Futási idő-jav.Euler**
1	$7.2063 \cdot 10^{-4}$	$8.2100 \cdot 10^{-2}$	0.0432	0.0018
0.1	$4.9057 \cdot 10^{-7}$	$8.2459 \cdot 10^{-5}$	0.7552	0.0196
0.01	$4.7821 \cdot 10^{-10}$	$7.5218 \cdot 10^{-8}$	5.2053	0.0744
0.001	$4.7601 \cdot 10^{-13}$	$7.4306 \cdot 10^{-11}$	15.3821	1.1344

Ezek után alkalmazzuk az első fejezetben ismertetett 2.3.1. Állítást. Először használjuk az (5.2) típusú felbontást. Ekkor az állítás alapján $2! = 2$ féle numerikus megoldást kell előállítanunk a szekvenciális szeleteléssel, amelyeket a következő részfeladatok segítségével tudunk megadni:
Az első esetben az alábbi két részfeladatot kell megoldanunk minden lépésben:

$$\begin{cases} \dot{y_1}(t) = A_0^1 y_1(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_1(t_i) = x_{sp}^1(t_i), \end{cases} \qquad (5.24) \qquad \begin{cases} \dot{y_2}(t) = A_0^2 y_2(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_2(t_i) = y_1(t_{i+1}). \end{cases} \qquad (5.25)$$

Ennek splittingelt megoldása az alábbi alakú a $t = t_{i+1}$ $(i = 0, \dots n-1)$ pontban.

$$x_{sp}^1(t_{i+1}) = \exp\left(A_0^2(t_{i+1} - t_i)\right) \cdot y_1(t_{i+1}) \cdot \exp\left(A_0^1(t_{i+1} - t_i)\right) \cdot x_{sp}^1(t_i). \qquad (5.26)$$

A második esetben pedig a következő részfeladatokra bontott problémát kell megoldanunk minden lépésben:

$$\begin{cases} \dot{y_1}(t) = A_0^2 y_1(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_1(t_i) = x_{sp}^2(t_i), \end{cases} \qquad (5.27) \qquad \begin{cases} \dot{y_2}(t) = A_0^1 y_2(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_2(t_i) = y_1(t_{i+1}). \end{cases} \qquad (5.28)$$

Ennek splittingelt megoldása pedig az alábbi alakú a $t = t_{i+1}$ $(i = 0, \dots n-1)$ pontban.

$$x_{sp}^2(t_{i+1}) = \exp\left(A_0^1(t_{i+1} - t_i)\right) \cdot y_1(t_{i+1}) \cdot \exp\left(A_0^2(t_{i+1} - t_i)\right) \cdot x_{sp}^2(t_i). \qquad (5.29)$$

A másodrendben közelítő splittingelt megoldást az $x_{sp}^1(t)$ és $x_{sp}^2(t)$ megoldások átlaga adja:

$$x_{sp}(t) = \frac{x_{sp}^1(t) + x_{sp}^2(t)}{2}. \qquad (5.30)$$

Tekintsük most a (4) típusú kommutáló mátrixokat tartalmazó felbontást. Továbbra is alkalmazzuk a 2.3.1. Állítást, eszerint $3! = 6$ féle módon kéne meghatároznunk a feladat splittingelt megoldását, azonban a kommutáló mátrixokból kifolyólag, az első fejezetben ismertetett okok miatt, ez a szám 4-re csökkenthető. Az (5.4) felbontás bemutatásánál láttuk, hogy az $\left[A_0^1, A_0^2\right] = \mathbf{0}$ összefüggés teljesül, emiatt az alkalmazott állítás egyszerűsítésére felírt módszer miatt, amikor az A_0^1 és az A_0^2 mátrixok által meghatározott részfeladatok közvetlenül egymás után következnek, a megoldás visszavezethető $d-1 = 3-1 = 2$ felbontású feladatmegoldásra. Így tehát ezekben az esetekben a felbontás a következő alakú. Legyen

$$A_0^4 := A_0^1 + A_0^2, \qquad (5.31)$$

És ekkor:

$$A_0 = A_0^3 + A_0^4, \qquad (5.32)$$

$$A_0^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^2 c_k p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_k\mu & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -(p_1 + p_2\mu c_k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(p_4 - c_k\mu^2) & -p_3 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a rész-Cauchy-feladatok az előzőekkel analóg módon felírhatóak.
Az első esetben az alábbi három részfeladatot kell lépésenként megoldanunk.

$$\begin{cases} \dot{y_1}(t) = A_0^1 y_1(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_1(t_i) = x_{sp}^1(t_i), \end{cases} \qquad (5.33) \qquad \begin{cases} \dot{y_2}(t) = A_0^3 y_2(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_2(t_i) = y_1(t_{i+1}), \end{cases} \qquad (5.34)$$

$$\begin{cases} \dot{y_3}(t) = A_0^2 y_3(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_3(t_i) = y_2(t_{i+1}). \end{cases} \qquad (5.35)$$

Ennek splittingelt megoldása az alábbi alakú a $t = t_{i+1}$ $(i = 0, \dots n-1)$ pontban.

$$x_{sp}^1(t_{i+1}) = \exp\left(A_0^2(t_{i+1} - t_i)\right) \cdot y_2(t_{i+1}) \cdot \exp\left(A_0^3(t_{i+1} - t_i)\right) \cdot y_1(t_{i+1}) \cdot \exp\left(A_0^1(t_{i+1} - t_i)\right) \cdot x_{sp}^1(t_i) \qquad (5.36)$$

A következő esetben az alábbi három részfeladatot kell lépésenként megoldanunk.

$$\begin{cases} \dot{y_1}(t) = A_0^2 y_1(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_1(t_i) = x_{sp}^2(t_i), \end{cases} \tag{5.37}$$

$$\begin{cases} \dot{y_2}(t) = A_0^3 y_2(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_2(t_i) = y_1(t_{i+1}), \end{cases} \tag{5.38}$$

$$\begin{cases} \dot{y_3}(t) = A_0^1 y_1(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_3(t_i) = y_2(t_{i+1}). \end{cases} \tag{5.39}$$

Ennek splittingelt megoldása az alábbi alakú a $t = t_{i+1}$ $(i = 0, \dots n-1)$ pontban.

$$x_{sp}^2(t_{i+1}) = \exp\left(A_0^1(t_{i+1} - t_i)\right) \cdot y_2(t_{i+1}) \cdot \exp\left(A_0^3(t_{i+1} - t_i)\right) \cdot y_1(t_{i+1}) \cdot \exp\left(A_0^2(t_{i+1} - t_i)\right) \cdot x_{sp}^2(t_i) \tag{5.40}$$

Az egyszerűsítés miatt a további két megoldandó probléma már csak két részfeladatra bomlik fel.

$$\begin{cases} \dot{y_1}(t) = A_0^4 y_1(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_1(t_i) = x_{sp}^3(t_i), \end{cases} \tag{5.41}$$

$$\begin{cases} \dot{y_2}(t) = A_0^3 y_2(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_2(t_i) = y_1(t_{i+1}), \end{cases} \tag{5.42}$$

Ennek splittingelt megoldása az alábbi alakú a $t = t_{i+1}$ $(i = 0, \dots n-1)$ pontban.

$$x_{sp}^3(t_{i+1}) = \exp\left(A_0^3(t_{i+1} - t_i)\right) \cdot y_1(t_{i+1}) \cdot \exp\left(A_0^4(t_{i+1} - t_i)\right) \cdot x_{sp}^3(t_i) \tag{5.43}$$

Végül az utolsó megoldandó feladat a következő.

$$\begin{cases} \dot{y_1}(t) = A_0^3 y_1(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_1(t_i) = x_{sp}^4(t_i), \end{cases} \tag{5.44}$$

$$\begin{cases} \dot{y_2}(t) = A_0^4 y_2(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_2(t_i) = y_1(t_{i+1}), \end{cases} \tag{5.45}$$

Ennek splittingelt megoldása az alábbi alakú a $t = t_{i+1}$ $(i = 0, \dots n-1)$ pontban.

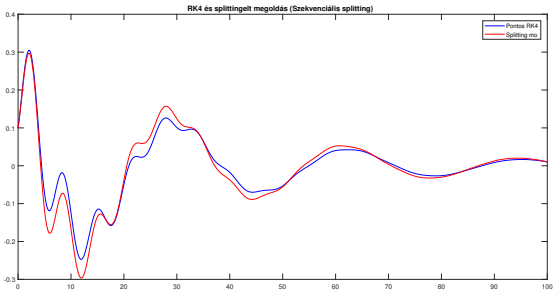
$$x_{sp}^4(t_{i+1}) = \exp\left(A_0^4(t_{i+1} - t_i)\right) \cdot y_1(t_{i+1}) \cdot \exp\left(A_0^3(t_{i+1} - t_i)\right) \cdot x_{sp}^4(t_i) \tag{5.46}$$

Az állítás szerint a végső numerikus megoldást, amely másodrendben approximálja a pontos megoldást, az alábbi módon kapjuk meg.

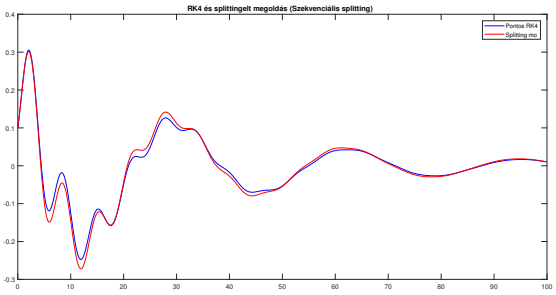
$$x_{sp}(t) = \frac{x_{sp}^1(t) + x_{sp}^2(t) + 2 \cdot x_{sp}^3(t) + 2 \cdot x_{sp}^4(t)}{6} \tag{5.47}$$

Az alábbi ábrákon láthatjuk, hogy hogyan közelíti a splittingelt megoldás a pontos megoldást a h lépésköz csökkentésével. Az ábrákon a megoldás x_4 komponense látható $\mu = 0.2$ paraméterérték mellett a $[0, 100]$ intervallumon.

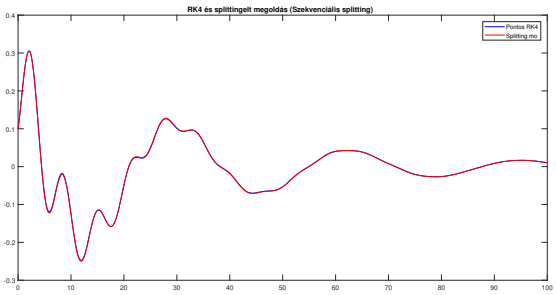
$h = 1$



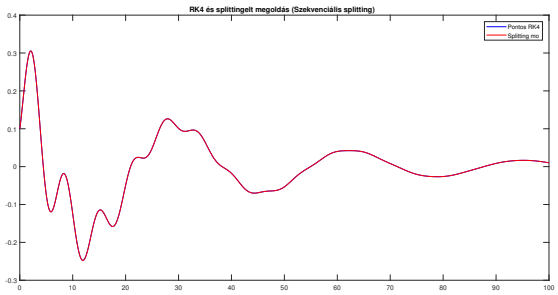
$h = 0.1$



$h = 0.01$



$h = 0.001$



Észrevétel: Fontos észrevétel, hogy a (5.36),(5.40),(5.43) és (5.46) splittingelt megoldások kiszámítása egymástól független módon végezhető, így a módszer párhuzamosítható, ami a futási idők szempontjából rendkívül pozitív eredménynek tekinthető.
Az alábbi 4. táblázatban láthatóak a párhuzamosított futtatás szimulációja során kimért futási idők, melyeket összehasonlítottuk a rendszert egyben megoldó, szintén másodrendű javított Euler módszer futási idejeivel. Láthatjuk, hogy a rész-Cauchy-feladatok függetlenségéből adódóan a szeleteléses megoldó gyorsabban képes előállítani a numerikus megoldást.

4. táblázat. Párhuzamosított futtatás szimulációja során kapott futási idők összehasonlítása a javított Euler módszer futási idejeivel:

h	**Futási idő (s), splitting**	**Futási idő (s), jav.Euler**
1	0.0004	0.0081
0.1	0.0015	0.0038
0.01	0.0078	0.0122
0.001	0.0647	0.0834
0.0001	0.7951	1.1292

5.4. Operátorszeletelés alkalmazása a második és harmadik szakaszra

Megjegyezzük, hogy a második és a harmadik szakaszt leíró rendszerek formailag megegyeznek ezért az egyszerűség kedvéért egyben tárgyaljuk őket, így a továbbiakban leírt módszerek mindkét esetre alkalmazhatóak. Legyen tehát a továbbiakban $k = 1, 2$ és $l = 1, 2$.
Megjegyezzük továbbá, hogy mindkét szakaszhoz két-két rendszer (3.17)(3.18) és (3.19)(3.20) tartozik, azonban a szimmetria miatt elegendő mindkét szakasz esetén csak az egyikkel foglalkozni.

Tekintsünk a (3.18) és (3.20) rendszereket Cauchy-feladatként a $(0, T]$ intervallumon.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_k x(t) + B_l \quad t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \, adott. \end{cases} \tag{5.48}$$

Ez abban különbözik az első szakaszra vonatkozó rendszertől, hogy forrástagot tartalmaz, azaz, a Cauchy-feladat inhomogén, ami azt jelenti, hogy a szeletelés során ezek a B_l forrástagok is felbontandók.
Mivel a B_l $(l = 1, 2)$ mindkét esetben egy négy dimenziós vektor, melynek két koordinátája nulla, így a legésszerűbb felbontás a következő:

$$B_l^1 = \begin{pmatrix} 0 & -p_2 d_l \mu^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad B_l^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_l \mu^2 \end{pmatrix}^T. \tag{5.49}$$

Alkalmazva az (5.2) sorszámmal jelölt két mátrixra való felbontást valamint a szekvenciális szeletelést, a részfeladatok a következők lesznek.

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = A_k^1 y_1(t) + B_l^1 & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_1(t_i) = x_{sp}(t_i), \end{cases} \tag{5.50}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_2(t) = A_k^2 y_2(t) + B_l^2 & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_2(t_i) = y_1(t_{i+1}). \end{cases} \tag{5.51}$$

Az $x_{sp}(t)$ a splitting módszer alkalmazásával kapott megoldás, amely a $t = t_{i+1}$ pontban az (5.51) részfeladat megoldásával, azaz $y_2(t_{i+1})$ értékkel egyenlő.

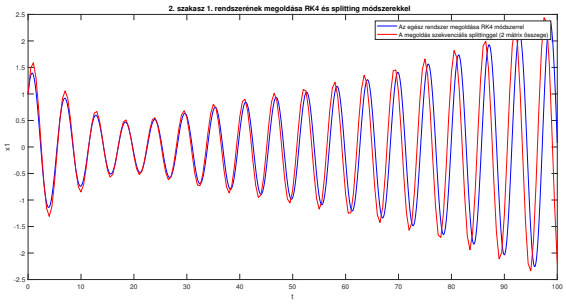
Ekkor az (5.50)(5.51) részfeladatok pontos megoldásai az állandók variálásának elve alapján a következők.

$$y_1(t_{i+1}) = \exp\left(A_k^1(t_{i+1} - t_i)\right) \cdot x_{sp}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{(t-s)A_k^1} B_l^1 \mathrm{d}s, \tag{5.52}$$

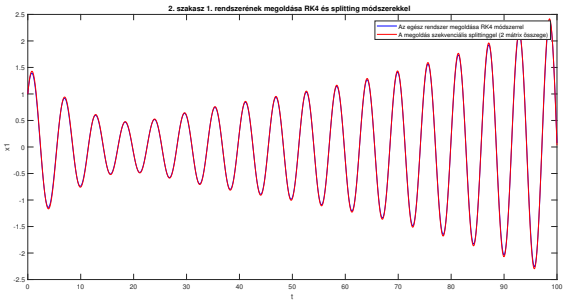
$$y_2(t_{i+1}) = \exp\left(A_1^2(t_{i+1} - t_i)\right) \cdot y_1(t_{i+1}) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{(t-s)A_k^2} B_l^2 \mathrm{d}s. \tag{5.53}$$

Az alábbi ábrákon láthatjuk a megoldás első komponensének közelítését $\mu = 0.35$ paraméterérték mellett, a h lépésközt csökkentve.
Ahogyan a stabilitásvizsgálatnál meghatároztuk, ezen paraméterérték esetén instabil a rendszer, amit ezek az ábrák elég szemléletesen ábrázolnak, hiszen láthatjuk, hogy időben előre haladva a megoldás egyre nagyobb amplitúdóval oszcillál.

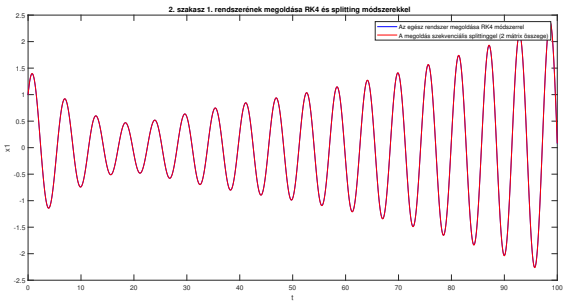
$h = 0.5$



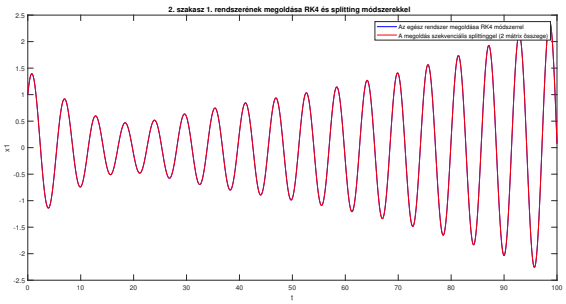
$h = 0.1$



$h = 0.01$



$h = 0.001$



Ezen szakaszok esetén is vizsgáltuk a három mátrixra való (5.3) felbontást is, ekkor a részfeladatok egy lehetséges megadása a következő.

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = A_k^1 y_1(t) + B_l^1 & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_1(t_i) = x_{sp}(t_i), \end{cases} \tag{5.54}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_2(t) = A_k^2 y_2(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_2(t_i) = y_1(t_{i+1}), \end{cases} \tag{5.55}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_3(t) = A_k^3 y_3(t) + B_l^2 & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_3(t_i) = y_2(t_{i+1}). \end{cases} \tag{5.56}$$

Az $x_{sp}(t)$ ismét a splitting módszer alkalmazásával kapott megoldás, amely a $t = t_{i+1}$ pontban az (5.56) részfeladat megoldásával, azaz $y_3(t_{i+1})$ értékkel egyenlő. Ebben az esetben a pontos megoldások:

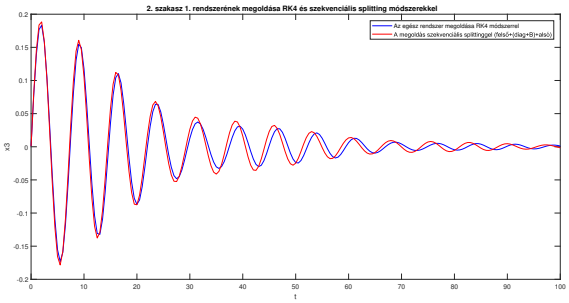
$$y_1(t_{i+1}) = \exp(A_k^1(t_{i+1} - t_i)) \cdot x_{sp}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{(t-s)A_k^1} B_l^1 \mathrm{d}s, \tag{5.57}$$

$$y_2(t_{i+1}) = \exp(A_k^2(t_{i+1} - t_i)) \cdot y_1(t_{i+1}), \tag{5.58}$$

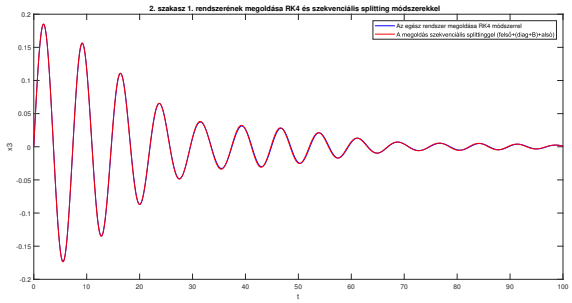
$$y_3(t_{i+1}) = \exp(A_k^3(t_{i+1} - t_i)) \cdot y_2(t_{i+1}) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{(t-s)A_k^3} B_l^2 \mathrm{d}s. \tag{5.59}$$

Az alábbi ábrákon láthatjuk a második szakasz, az (5.3) felbontás és a szekvenciális splittinggel kapott megoldásának negyedik komponensét valamint annak közelítését $\mu = 0.25$ paraméterérték mellett, a h lépésközt csökkentve. Ahogyan a stabilitásvizsgálatnál meghatároztuk, ezen paraméterérték esetén stabil a rendszer, amit az ábrák is alátámasztanak, hiszen láthatjuk, hogy időben előre haladva a megoldás rásimul az egyensúlyi pont egyenesére.

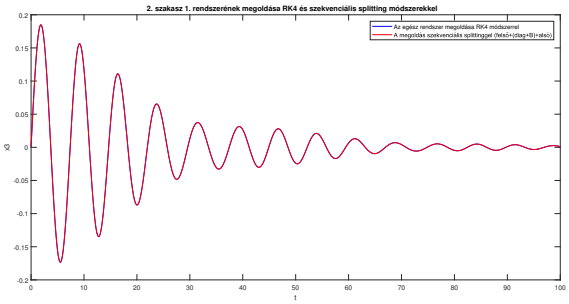
$h = 0.5$



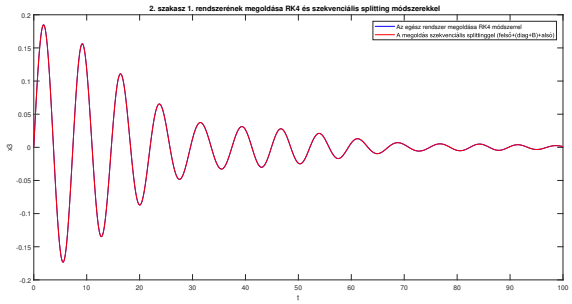
$h = 0.1$



$h = 0.01$



$h = 0.001$



A következő 5. táblázat az (5.2) és (5.3) felbontás jellemzőinek összehasonlítását tartalmazza. A táblázat alapján érezhető, hogy ebben az esetben a két mátrixos felbontás alkalmazása előnyösebb, hiszen a hibákat tekintve megközelítőleg azonosan teljesít mindkét módszer, azonban a futási idők tekintetében az (5.2) felbontást alkalmazó módszer gyorsabb.

5. táblázat. Az (5.2) és (5.3) felbontás összehasonlítása

h	**Hiba (5.2)**	**Hiba (5.3)**	**Futási idő (s)(5.2)**	**Futási idő (s)(5.3)**
1	$1.0962{\cdot}10^{-1}$	$8.1711{\cdot}10^{-2}$	0.0125	0.0277
0.1	$2.3312{\cdot}10^{-3}$	$2.3605{\cdot}10^{-3}$	0.0461	0.2508
0.01	$2.3645{\cdot}10^{-5}$	$2.3605{\cdot}10^{-5}$	0.2891	2.8331
0.001	$2.3646{\cdot}10^{-7}$	$2.3627{\cdot}10^{-7}$	3.4630	12.471

Az első típusú (5.2) felbontás és a Strang-Marcsuk splitting alkalmazása során az (5.48) rendszer az alábbi részfeladatokra bontható:

$$\begin{cases} \dot{y_1}(t) = A_k^1 y_1(t) + B_l^1 & t \in [t_i, t_{i+\frac{1}{2}}] \\ y_1(t_i) = x_{sp}(t_i), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y_2}(t) = A_k^2 y_2(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ y_2(t_i) = y_1(t_{i+\frac{1}{2}}), \end{cases} \tag{5.61}$$

(5.60)

$$\begin{cases} \dot{y_3}(t) = A_k^1 y_3(t) + B_l^2 & t \in [t_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+1}] \\ y_3(t_{i+\frac{1}{2}}) = y_2(t_{i+1}). \end{cases} \tag{5.62}$$

Az $x_{sp}(t)$ ismét a splitting módszer alkalmazásával kapott megoldás, amely a $t = t_{i+1}$ pontban az (5.62) részfeladat megoldásával, azaz $y_3(t_{i+1})$ értékkel egyenlő. Ebben az esetben a pontos megoldások:

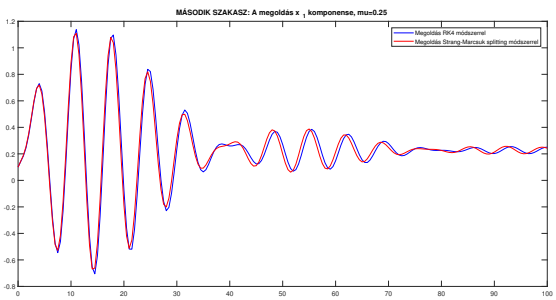
$$y_1(t_{i+1}) = \exp(A_k^1(t_{i+\frac{1}{2}} - t_i)) \cdot x_{sp}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+\frac{1}{2}}} e^{(t-s)A_k^1} B_l^1 \mathrm{d}s, \tag{5.63}$$

$$y_2(t_{i+1}) = \exp(A_k^2(t_{i+1} - t_i)) \cdot y_1(t_{i+\frac{1}{2}}), \tag{5.64}$$

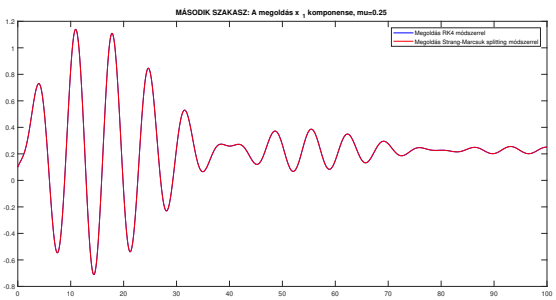
$$y_3(t_{i+1}) = \exp(A_k^1(t_{i+1} - t_{i+\frac{1}{2}})) \cdot y_2(t_{i+1}) + \int_{t_{i+\frac{1}{2}}}^{t_{i+1}} e^{(t-s)A_k^1} B_l^2 \mathrm{d}s. \tag{5.65}$$

A következő ábrákon láthatjuk a második szakasz, az (5.3) felbontás és a Strang-Marcsuk splittinggel kapott megoldásának harmadik komponensét valamint annak közelítését $\mu = 0.25$ paraméterérték mellett, a h lépésközt csökkentve. Ahogyan a stabilitásvizsgálatnál meghatároztuk, ezen paraméterérték esetén stabil a rendszer, amit az ábrák is alátámasztanak, hiszen láthatjuk, hogy időben előre haladva a megoldás rásimul az egyensúlyi pont egyenesére.

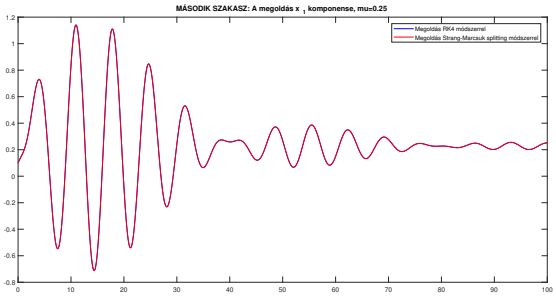
$h = 0.5$



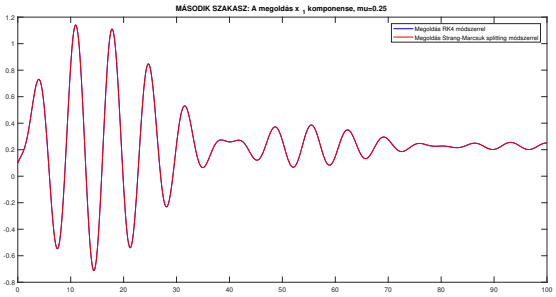
$h = 0.1$



$h = 0.01$



$h = 0.001$



Az alábbi 6. táblázatban láthatjuk, hogy ezen módszer alkalmazása során hogyan változnak a hibák valamint a futási idők, amint a h lépésközt csökkentjük. A második szakasz (5.48) rendszerét emellett megoldottuk splitting nélkül, egyben, javított Euler módszerrel, ami szintén másodrendű, a Strang-Marcsuk módszerhez hasonlóan. A táblázat utolsó két oszlopában az erre vonatkozó adatok szerepelnek. Láthatjuk, hogy a szeleteléses megoldót alkalmazva a hiba már viszonylag nagy h lépésköz esetén is elég kicsi, és számottevően jobban teljesít annál, amikor szeletelés nélkül a javított Euler módszerrel oldjuk meg. Ez mindenképpen egy pozitív eredményként jegyezhető fel.
A futási időket tekintve azonban fordul a kocka, hiszen a javított Euler módszer kevesebb idő alatt képes előállítani a megoldást mint a szeleteléses változat.

6. táblázat. Az (5.3) felbontás + Strang-Marcsuk splitting eljárás és a javított Euler módszer összehasonlítsa

h	**Hiba (Split.)**	**Hiba (jav.E.)**	**Fut. idő (s)(Split.)**	**Fut. idő (s)(jav.E.)**
1	$9.0060 \cdot 10^{-3}$	$3.3234 \cdot 10^{0}$	0.0120	0.0028
0.1	$5.0166 \cdot 10^{-5}$	$2.1685 \cdot 10^{-3}$	0.0654	0.0026
0.01	$4.8692 \cdot 10^{-8}$	$2.7392 \cdot 10^{-6}$	7.2800	0.0169
0.001	$4.8448 \cdot 10^{-11}$	$2.7907 \cdot 10^{-9}$	23.1710	0.9120

6. Összegzés, kitekintés a továbbiakra

A dolgozatban tehát röviden felvázoltuk az operátorszeletelés alapgondolatát, bemutattuk a két leggyakrabban és legeredményesebben alkalmazott operátorszeletelési eljárást, emellett a munkánk során megfogalmazott sejtéseket illetve bizonyításaikat is ismertettük. Majd a módszereket egy, a műszaki világból vett, aerodinamikai modellen teszteltük.
A munka legfőbb eredményének a gyakorlati alkalmazhatóság tekinthető, hiszen sikerült olyan speciális mátrixfelbontásokat megadni, melyek segítségével előállított szeleteléses eljárások felveszik a versenyt a legegyszerűbb numerikus megoldókkal mind a futási idők, mind a numerikus hibák szempontjából.

Munkánk során számtalan kérdés merült fel, melyek egy részét sikeresen megoldottuk, azonban maradtak még megválaszolatlan problémák, melyekkel a továbbiakban mindenképpen foglalkozni szeretnénk. Többek között érdekes kérdésként fogalmazódott meg az, hogy gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából hogyan viselkednek az operátorszeletelési eljárások más szerkezetű aerodinamikai, esetleg teljesen más környezetből vett, például légkörszennyezési, modelleken.
Továbbá érdekes elméleti problémakörnek tűnik a numerikus és a splittingelési hibák közötti kapcsolat vizsgálata. Valamint a részfeladatok numerikus módszerrel történő megoldása során a numerikus módszer τ lépésköze valamint a splitting módszer h lépésköze közötti összefüggések hátterének feltárása.
Emellett szeretnénk további operátorszeletelési eljárásokat is vizsgálni (például súlyozott splitting módszerek) és folytatni a feltételek megfogalmazását a magasabb rendű splitting eljárásokra vonatkozólag.

Hivatkozások

[1] István Faragó, Ágnes Havasi - Operator splittings and their applications, Nova Science Publishers (2009)

[2] https://hu.wikipedia.org/wiki/NACA

[3] Sheldahl, R.E., Klimas, P.C.: Aerodynamic characteristics of seven symmetrical airfoil sections through 180-degree angle of attack for use in aerodynamic analysis of vertical axis wind turbines. Tech. rep., SandiaNational Laboratories. SAND80-2114 (1981)

[4] Tamás Kalmár-Nagy, Rudolf Csikja, Tarek A. Elgohary - Nonlinear analysis of a 2-DOF piecewise linear aeroelastic system (2016)

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/LiénardChipartcriterion