A tengelyszimmetrikus centrális négytest-probléma lineáris stabilitásvizsgálata

Diplomamunka

Készítette:

Kővári Emese

alkalmazott matematikus MSc

Témavezető:

Dr. Érdi Bálint

professor emeritus

ELTE TTK Csillagászati Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Matematikai Intézet, Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2019

Kivonat

A centrális négytest-probléma tengelyszimmetrikus esetében a rendszer szimmetriatengelyét definiáló két tömegpont tetszőleges tömegekkel rendelkezik, a tengelyre szimmetrikusan elhelyezkedő további két test tömege egyenlő. A négy test és a tömegközéppont viszonya alapján megkülönböztetünk konvex és konkáv konfigurációkat, ezek mindegyike két adattal (nevezetesen szögkoordinátával) egyértelműen jellemezhető.

Dolgozatom témája a fenti problémára vonatkozó lineáris stabilitásvizsgálat elvégzése, kiindulópontnak tekintve a közelmúltbeli, korszakalkotó jelentőségű analitikus eredményeket.

Első lépésben az ún. korlátozott esetekkel foglalkozom, vagyis azon speciális konfigurációkra koncentrálok, amikor a négy tömegpontból egynek elhanyagolhatóan kicsi a tömege. A feltevés következtében a stabilitásvizsgálat kimenetele megfogalmazható mint az egyik szögkoordináta függvénye. A stabil megoldást eredményező feltételeket és azok szögkoordináta-függését analitikusan számítom, majd a kapott függvényeket numerikus módszerrel vizsgálom.

A korlátozott esetek általánosításaképpen a tömegekre vonatkozó megszorító feltételt elhagyva végzek további, lineáris stabilitásvizsgálatot. A szögtér numerikus feltérképezésének tanulsága szerint mind a konvex, mind a konkáv esetek szolgálnak stabil megoldásokkal. Ezek körülbelül néhány tizedszer néhány tíz fok kiterjedésű hosszúkás tartományok pontjai, a kezdeti feltételek alkalmas megválasztása azonban az előbbieknél egy nagyságrenddel nagyobb kiterjedésű feltételesen stabil régiókat eredményez a konkáv szögtérben.

A stabil megoldások létezése azt sejteti, hogy akár valós égitest-rendszerek között is találhatunk tengelyszimmetrikus centrális négytest-problémában résztvevőket. Ilyenformán kitekintésképpen eredményeimet hipotetikus két bolygós kettőscsillag-rendszerekkel és exo-Trójai égitestekkel hozom kapcsolatba.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Történetileg a klasszikus égi mechanika nehezen választható el a matematikától. Fejlődésük sokáig kéz a kézben haladt, számos matematikai tétel égi mechanikai alkalmazások során született meg, és a két tudományterület 17-18. századi művelői is nagy átfedést mutatnak. Napjainkban az égi mechanika önálló tudománnyá nőtte ki magát, problémáinak megoldása azonban széles matematikai apparátust igényel. E szép alkalmazási terület adja dolgozatom témáját.

A klasszikus égi mechanika alapfeladata az n-test probléma, mely n darab tömegpont mozgását vizsgálja, feltételezve, hogy közöttük csak a kölcsönös Newton-féle gravitációs vonzóerők hatnak. A probléma komplexitását mutatja, hogy általános megoldás mindössze az $n = 2$ esetre, vagyis a kéttest-problémára létezik, melyet Isaac Newton munkássága óta ismerünk. Heinrich Bruns és Henri Poincaré látta be az 1880-as években, hogy $n \geq 3$-ra az egzakt megoldások nem csak ismeretlenek: nem is léteznek. Éppen ezért már három test esetén is jelentős megszorítást kell tennünk, hogy analitikus megoldást remélhessünk. Nevezetesen, feltesszük, hogy a konfiguráció centrális, azaz az eredő erők a rendszer tömegközéppontjába mutatnak. A centrális háromtest-problémának öt megoldása létezik, közülük kettő a Lagrange-féle szabályos háromszög-megoldás, három pedig az Euler-féle kollineáris megoldás. Tovább növelve a testek számát, $n > 3$-ra már a megoldások száma, $n > 5$-re pedig azok végessége is kérdéses.

A közelmúltban azonban áttörő eredmény született az $n = 4$ esetben. Érdi és Czirják (2016) a tengelyszimmetrikus centrális négytest-probléma teljes, analitikus megoldását adta meg zárt alakban. Természetes a gondolat, hogy eredményüknek csillagászati vonatkozást adva, az egyes tömegpontok helyébe sztelláris vagy planetáris testeket helyettesítünk. Realisztikus tömegarányokat venni azonban nem elegendő ahhoz, hogy a konfigurációkat valós csillag- vagy bolygórendszerekkel kössük össze, Univerzumbeli előfordulásukhoz ugyanis az is szükséges, hogy az adott konfiguráció stabilnak bizonyuljon. Analitikus eredmények hiányában a négytest-

probléma stabilitásvizsgálata mindeddig az égi mechanika megoldatlan problémái közé tartozott - meglehetősen speciális esetekkel foglalkozó részeredményektől eltekintve. A fentiek nyújtotta inspiráció vezet el dolgozatom témájához: a tengelyszimmetrikus centrális négytest-probléma lineáris stabilitásvizsgálatának elvégzése, a közelmúltbeli analitikus eredményekből kiindulva.

A dolgozat felosztása a következő. Az 1. fejezetben a témakör előzményeinek áttekintését nyújtom, röviden vázolva a centrális konfigurációk elméletét, bemutatva Érdi és Czirják (2016) megoldását, majd kitérve a négytest-probléma stabilitásvizsgálatának irodalmára. Saját eredményeim a 2. fejezetben következnek: először az ún. korlátozott esetek lineáris stabilitásvizsgálatával foglalkozom, majd innen ötletet merítve, a 3. fejezetben általánosabb esetekben is elvégzem a számításokat. Eredményeim alkalmazhatóságának lehetőségeit érinti a 4. fejezet: a stabil konfigurációkat speciális rendszerekkel hozom kapcsolatba, így például két bolygót tartalmazó kettőscsillag-rendszerekkel, illetve exo-Trójai égitestekkel. Végül, az 5. fejezetben összegzem a munkát.

1. fejezet

Előzmények

1.1. A centrális konfigurációkról

Tekintsük az n-test probléma Newton-féle mozgásegyenleteit:

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = k^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \left(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i \right), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

ahol $k = 0.01720209895$ a Gauss-féle gravitációs konstans égi mechanikai egységekben, m_i az i-edik tömegpont tömege, $\boldsymbol{r}_i$ az i-edik tömegponthoz mutató baricentrikus helyvektor, $r_{ij} := \|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\|_2$ pedig az i-edik és j-edik test közötti euklideszi távolság. (1.1)-nek $n \geq 3$ számú testre általános megoldása nem létezik, érdemes tehát megszorító feltételt tenni. A centrális konfigurációk elméletéhez jutunk, amennyiben a feltételt úgy választjuk meg, hogy az egyes testekre ható eredő erők a rendszer közös tömegközéppontjába mutassanak.

1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy (1.1) centrális, ha létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, hogy $\ddot{\boldsymbol{r}}_i = -\lambda \boldsymbol{r}_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$, azaz (1.1)

$$k^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{m_j}{r_{ij}^3} \left(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i \right) = -\lambda \boldsymbol{r}_i, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

alakú.

Megjegyzés. Az 1.1. definícióban szereplő $\lambda > 0$ időtől függő paraméter, mely minden időpillanatban egyenlő az összes testre. Akkor (és csak akkor) vehető konstansnak, ha bármely test mozgása egyenletes körmozgás ugyanazon szögsebességgel.

A centrális konfigurációk fontos tulajdonsága az eltolás-, forgatás- és nagyítás-invariancia. Itt érdemes kiemelni az ún. *relatív egyensúlyi megoldás* fogalmát.

1.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy centrális konfiguráció relatív egyensúlyi megoldást valósít meg, ha bármely tömegpont azonos szögsebességgel végez egyenletes körmozgást a rendszer tömegközéppontja körül, mely egyben a mozgás vizsgálatára kitűzött koordináta-rendszer origója.

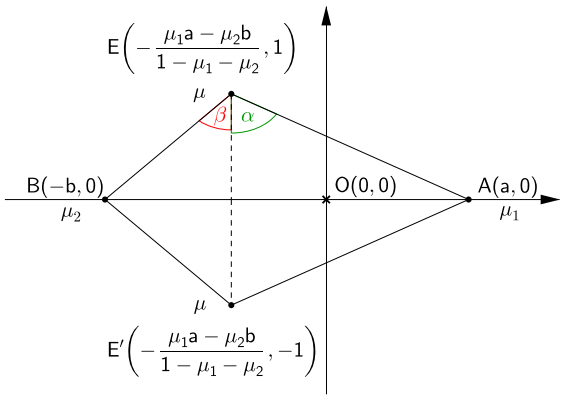
Látjuk tehát, hogy relatív egyensúlyi konfigurációnak tetszőleges két időpontbeli helyzete forgatással egymásba vihető.

Megjegyzés. Az elnevezés onnan származik, hogy amennyiben a testekkel együtt-forgó vonatkoztatási rendszerbe térünk át, minden tömegpont nyugalomban marad mozgása során, a konfiguráció tehát egyensúlyi megoldás. A fogalom a későbbiekben fontos lesz.

1.2. Tengelyszimmetrikus eset

A centralitás bevezetésével az (1.1) másodrendű differenciálegyenlet-rendszerből az (1.2) algebrai egyenletrendszert kaptuk, nagyszámú testre azonban az analitikus megoldás továbbra is komoly kihívás. Az $n = 3$ esetre Leonhard Euler és Joseph-Louis Lagrange kínált teljes megoldást a 18. században, $n = 4$-re (és > 4-re) azonban egészen a közelmúltig csupán meglehetősen speciális részeredményeket ismertünk, úgy, mint például a három egyenlő tömeg esete (Palmore, 1975; Simo, 1978; Meyer és Schmidt, 1988; Bernat és mtsai., 2009; Long és Sun, 2002; Shi és Xie, 2010) vagy a négy egyenlő tömegé (Albouy, 1996); a deltoid és rombusz alakú konfigurációk két-két egyenlő szemközti tömeggel (Long és Sun, 2002; Perez-Chavela és Santoprete, 2007); vagy a Lagrange- és Euler-megoldások kiterjesztése egy nulla tömegű test hozzáadásával a rendszerhez. 2016-ban azonban korszakalkotó eredmény született: Érdi és Czirják (2016) a centrális négytest-probléma egy jelentős alosztályára, nevezetesen a tengelyszimmetrikus esetre adott teljes, analitikus megoldást explicit alakban. Eredményüket a következőkben foglalom össze.

Tekintsünk egy síkbeli derékszögű koordináta-rendszert O középponttal, benne pedig négy tömegpontot. Jelölje ezeket A, B, E és E'. A rendszer tömegközéppontját rögzítsük O-ban, továbbá tegyük fel, hogy A-t és B-t szimmetriatengely köti össze (amely egyben a koordináta-rendszer vízszintes tengelye), E és E' pedig erre szimmetrikusan helyezkedik el. A dimenziótlan (1-re normált) tömegek legyenek



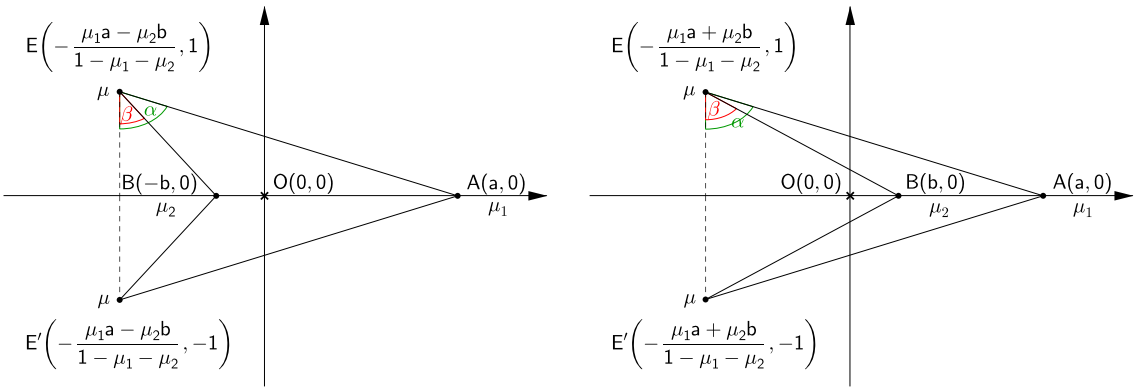
1.1. ábra. A konvex tengelyszimmetrikus centrális konfigurációk. Az A, B, E, E' jelű tömegpontok koordinátáit a nevük mögötti zárójelekben látjuk feltüntetve, tömegüket μ_1, μ_2, μ és μ jelöli. A rendszer tömegközéppontja az O origó. A konfigurációt az α, β szögpárral adjuk meg.

rendre μ_1, μ_2, μ és μ. Három megoldáscsaládot különíthetünk el. A *konvex* esetben a négy test konvex deltoidot formáz (lásd: 1.1. ábra). Itt feltehető, hogy $\mu_2 \leq \mu_1$. A konkáv deltoidot meghatározó *konkáv* esetekben megkülönböztetjük az *első konkáv* esetet, ahol a tömegközéppont a deltoidon belül helyezkedik el (1.2. ábra bal oldala), illetve a *második konkáv* esetet, ahol O a négyszögön kívülre esik (1.2. ábra jobb oldala). A szimmetriának köszönhetően a konfigurációk két adattal egyértelműen jellemezhetőek. Ezek lehetnének az 1.1., illetve 1.2. ábrákon szereplő a, b koordináták, vagy az a, b-nek egyértelműen megfeleltethető α, β szögek is. Érdi és Czirják (2016) nyomán válasszuk ismeretlennek az α, β szögpárt. A két ismeretlen mellett szerepel még két független paraméter is a probléma leírásában, ezek a μ_1, μ_2 dimenziótlan tömegek (mivel a harmadik tömegparaméter a $\mu = (1-\mu_1-\mu_2)/2$ összefüggésből nyerhető). Az ismeretlenek és paraméterek szerepének felcserélhetőségét szem előtt tartva az alábbi tétel formájában fogalmazható meg Érdi és Czirják (2016) számításainak legfőbb eredménye.

1.2.1. Tétel. *A fenti jelölésekkel, a tengelyszimmetrikus centrális négytest-probléma μ_1 és μ_2 változója, valamint α és β paramétere között fennáll a*

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{(b_1 + a_0 - b_0)\, b_0}{a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1}, \\ \mu_2 &= \frac{(a_1 + b_0 - a_0)\, a_0}{a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1} \end{aligned} \tag{1.3}$$

összefüggés, ahol az a_0, a_1, b_0 és b_1 együtthatók az α, β szögeket tartalmazó trigono-



1.2. ábra. A konkáv tengelyszimmetrikus centrális konfigurációk. A jelölések az 1.1. ábrához hasonlóak. Bal oldal: az O tömegközéppont a deltoidon belül helyezkedik el (első konkáv eset). Jobb oldal: O a deltoidon kívülre esik (második konkáv eset).

metrikus összefüggések. A konvex esetben

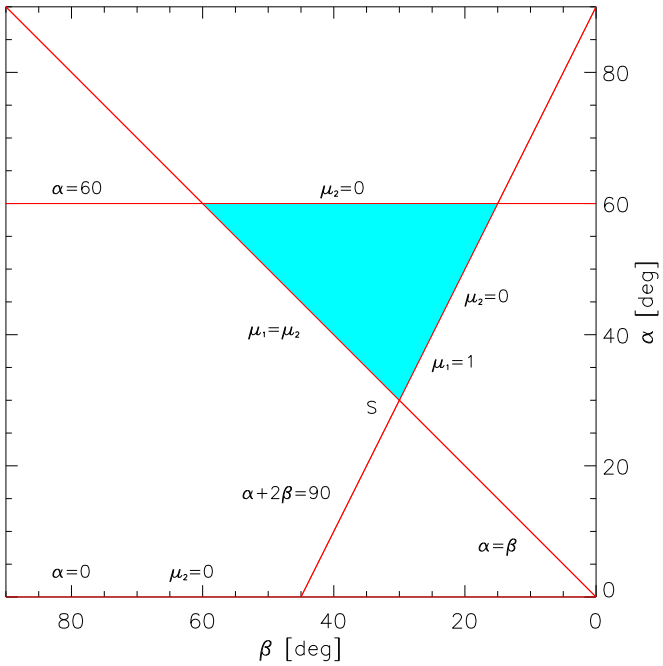
$$\begin{aligned}
a_0 &:= \left(\cos^3\alpha - \frac{1}{8}\right)\operatorname{tg}\alpha,\\
a_1 &:= \frac{1}{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^2} + \left(\frac{1}{8} - \cos^3\alpha - \cos^3\beta\right)\operatorname{tg}\beta - \frac{1}{8}\operatorname{tg}\alpha,\\
b_0 &:= \left(\cos^3\beta - \frac{1}{8}\right)\operatorname{tg}\beta,\\
b_1 &:= \frac{1}{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^2} + \left(\frac{1}{8} - \cos^3\alpha - \cos^3\beta\right)\operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{8}\operatorname{tg}\beta,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

a konkáv esetekben

$$\begin{aligned}
a_0 &:= \left(\cos^3\alpha - \frac{1}{8}\right)\operatorname{tg}\alpha,\\
a_1 &:= \frac{1}{(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)^2} - \left(\frac{1}{8} - \cos^3\alpha - \cos^3\beta\right)\operatorname{tg}\beta - \frac{1}{8}\operatorname{tg}\alpha,\\
b_0 &:= -\left(\cos^3\beta - \frac{1}{8}\right)\operatorname{tg}\beta,\\
b_1 &:= \frac{1}{(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)^2} + \left(\frac{1}{8} - \cos^3\alpha - \cos^3\beta\right)\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\beta.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Megjegyzés. A két konkáv eset megkülönböztetésére szolgáló feltétel szerint

$$\operatorname{tg}\beta < \frac{\mu_1}{1-\mu_2}\operatorname{tg}\alpha \tag{1.6}$$



1.3. ábra. A konvex konfigurációk lehetséges tartománya (színezett terület) és az ezt határoló kritikus egyenesek. (Forrás: Érdi és Czirják (2016).)

az első konkáv esetben, és

$$\operatorname{tg}\beta > \frac{\mu_1}{1-\mu_2}\operatorname{tg}\alpha \tag{1.7}$$

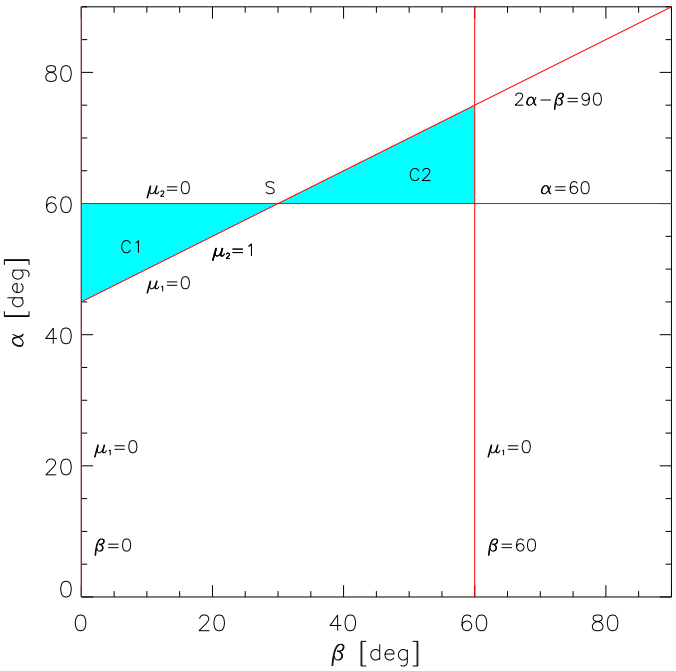
a másodikban.

Az 1.2.1. tétel (1.3) összefüggése explicit formulát kínál adott alakú tengelyszimmetrikus négyszöghöz tartozó, centrális konfigurációt eredményező dimenziótlan tömegek számításához. Az eredmény jelentős rést fedett be az elméleti égi mechanika megoldatlan problémái körében, mindemellett (1.3) egyszerű alakja miatt a gyakorlati alkalmazások terén is számos ablakot nyitott.

Érdi és Czirják (2016) eredményei közül érdemes még két összefoglaló ábrát kiemelni, melyek a $\beta-\alpha$ síkon mutatják a tengelyszimmetrikus centrális konfigurációk lehetséges tartományait, megadva az őket határoló egyenesek sajátságait is.

A konvex esetben vegyük szemügyre az 1.3. ábrát! A színezett háromszögön belül találjuk a konvex tengelyszimmetrikus centrális konfigurációkat megengedő α, β párokat, a határoló egyenesek mentén pedig valamilyen speciális esettel találkozunk:

$\alpha + 2\beta = 90°$: $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$ (egycentrum-probléma az A testtel);



1.4. ábra. A konkáv konfigurációk lehetséges tartományai (színezett területek: $C1$: első konkáv, $C2$: második konkáv eset) és az ezeket határoló kritikus egyenesek. (Forrás: Érdi és Czirják (2016).)

$\alpha = \beta$: $\mu_1 = \mu_2$ (rombusz-megoldás két-két egyenlő tömeggel);

$\alpha = 0°$: $\mu_2 = 0$ (nincs közös pontja a színezett háromszöggel, így nem létezik ilyen feltételeknek eleget tevő centrális konfiguráció a konvex tengelyszimmetrikus esetben);

$\alpha = 60°$: $\mu_2 = 0$ (Lagrange-féle szabályos háromszög A, E, E'-vel);

$\alpha = \beta = 30°$: szinguláris pont, ahol $\mu_1 + \mu_2 = 1$.

A konkáv tengelyszimmetrikus centrális konfigurációkat megengedő α, β párokat az 1.4. ábrán láthatjuk. $C1$ jelöli az első konkáv, $C2$ pedig a második konkáv esethez tartozó tartományt. A kritikus egyenesek:

$2\alpha - \beta = 90°$: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$ (egycentrum-probléma a B testtel);

$\alpha = 60°$: $\mu_2 = 0$ (Lagrange-féle szabályos háromszög A, E, E'-vel);

$\beta = 0°$: $\mu_1 = 0$ (Euler-féle kollineáris megoldás B, E, E'-vel);

$\beta = 60°$: $\mu_1 = 0$ (Lagrange-féle szabályos háromszög B, E, E'-vel);

$\alpha = 60°$, $\beta = 30°$: szinguláris pont, ahol $\mu_2 = 1 - 3\mu_1$.

1.3. Stabilitásvizsgálatok eredményei a négytest-problémában

Valamely rendszer - legyen az élő vagy élettelen, matematikai, csillagászati vagy akár biológiai - esetében felmerülő kérdések között mindig előkelő helyen találjuk a rendszer hosszútávú viselkedésére, fejlődésére, evolúciójára vonatkozóakat. A válaszadás szükségszerűen a stabilitásvizsgálat témaköréhez terel: egyensúlyi pontjából kissé kimozdítva a rendszert vajon az visszatér-e a kiindulási helyre, annak közelében marad, esetleg eltávolodik? Célom, hogy a 2. és 3. fejezetekben választ adjak ezekre a kérdésekre az Érdi és Czirják (2016) által megadott egyensúlyi pontok esetében, a témakör szakirodalmának áttekintése mindennek azonban fontos előzménye. (A fejezetben csak az $n = 4$ esettel foglalkozom.)

Minthogy az általános négytest-probléma analitikusan nem megoldható, annak stabilitására sem tudunk egzakt és végtelen hosszú időre érvényben maradó kritériumokat felírni. A probléma egyfajta „megkerülése", hogy végtelen hosszú helyett csak véges időtartamokkal foglalkozunk. Ezt a fajta megközelítést gyakran alkalmazzák a *hierarchikus rendszerek*[1] esetében: mennyi időbe telne, hogy adott hierarchia felbomoljon? Milani és Nobili (1983) például a lineáris hierarcikus négytest-probléma (összesen három kéttest-poblémából felépíthető formáció) hosszú periódusú és szekuláris perturbációit vizsgálta analitikus módszerekkel és adott meg véges időtartamot a rendszer stabilitására. Roy és mtsai. (1985) statisztikus megközelítést alkalmazott: fiktív, komplanáris, hierarchikus négytest-problémák sokaságát tekintette különböző tömeg- és távolságeloszlásokkal, majd a hierarchiák változásának időskáláját numerikusan modellezte.

A másik út, hogy a „bármely időpillanatban érvényes" terminust megtartjuk ugyan a stabilitásra vonatkozó feltétel konstruálásakor, azonban az általános konfigurációnak egyszerűbb formáit tekintjük. Ezek lehetnek egyrészt autonóm (időfüggetlen) rendszerek - mint az 1.2. definícióból ismert relatív egyensúlyi megoldások. Ide tartoznak a kollineáris elrendezések (Moulton, 1910), a négyzet (Albouy, 1996),

[1]Hierarchikusnak nevezünk egy rendszert, ha az kéttest-problémák szuperpozíciójából felépíthető.

rombusz és deltoid alakú konfigurációk (Long és Sun, 2002), vagy az egyenlőszárú trapéz (MacMillan és Bartky, 1932). Relatív egyensúlyi megoldások részletes stabilitásvizsgálatát végezte el például Brumberg (1957) vagy Simo (1978). Az autonóm mellett természetesen nem-autonóm problémák is tanulmányozhatóak. Ezek szép példáját adja a Steves és Roy (1998) által bevezetett *Caledoniai-probléma* (síkbeli, kezdeti körpályákat feltételező, négy (vagy két-két) egyenlő tömeget tartalmazó négytest-probléma), melynek stabilitását többek között Steves és Roy (1998), illetve Roy és Steves (1998; 2001) vizsgálta és fogalmazott meg a stabilitásra vonatkozó analitikus feltételeket.

Az általános négytest-probléma egyszerűsítésének harmadik módja, hogy feltesszük, a négyből az egyik test elhanyagolható tömeggel rendelkezik. Az ilyenmódon kapott *korlátozott* problémák stabilitásának kérdését jelentős érdeklődés övezi, irodalma is meglehetősen kiterjedt. A nulla tömegű test mozgását olyan koordinátarendszerben vizsgáljuk, melyben a pozitív tömeggel rendelkező másik három test (ún. elsődleges testek) helyzete nyugalmi. Ez úgy lehetséges, hogy azok egyrészt a centrális háromtest-probléma relatív egyensúlyi megoldásait valósítják meg, másrészt a koordináta-rendszert ezekhez rögzítjük, vagyis forgó vonatkoztatási rendszert tekintünk. Mint tudjuk, a centrális háromtest-problémának két megoldáscsaládja létezik, a kollineáris és szabályos háromszög-megoldások. Előbbiek lineárisan instabil viselkedést mutatnak, így a témakör következőkben bemutatott eredményei az utóbbi, vagyis a Lagrange-féle ekvilaterális alrendszerre vonatkoznak (mely abban az esetben stabil, ha a háromból egy tömegpont domináns tömeggel rendelkezik, vagy precízen, ha az m_1, m_2, m_3 tömegek kielégítik a $27(m_1m_2 + m_3m_1 + m_2m_3) < (m_1 + m_2 + m_3)^2$ összefüggést (Gascheau, 1843)).

Baltagiannis és Papadakis (2011) mutatta meg, hogy a fent vázolt korlátozott négytest-problémának legalább 10 egyensúlyi pontja van. Numerikus számítások során jutottak arra a megállapításra, hogy az egyensúlyi pontok létezése és száma az elsődleges testek tömegparaméterétől függ. Azt találták, hogy három tetszőleges (nem egyenlő) tömeg esetén nincs olyan egyensúlyi megoldás, amely a domináns tömeggel kollineáris volna, kettő és három egyenlő tömeg esetén van, összesen 2 vagy 4. Analitikusan végzett lineáris stabilitásvizsgálatot például Majorana (1981) összesen 8 egyensúlyi pont esetében; továbbá Pedersen (1952); illetve Simo (1978) és Leandro (2006). Utóbbi két szerző a „hagyományos" helyett általánosabb, spektrális stabilitásvizsgálatot végzett. Lineárisan instabilnak mutatkozó megoldások természetesen nemlineárisan is instabilak, lineárisan stabil megoldások esetében azonban nemli-

neáris instabilitás még fennállhat. Érdemes ezért a nemlineáris vizsgálatokról is szót ejteni. Az ekvilaterális korlátozott négytest-probléma nemlineáris, negyedrendű stabilitásvizsgálatát Budzko és Prokopenya (2011) végezte el egy egyensúlyi pont és három tetszőleges (nem egyenlő) tömeg esetén. Alvarez-Ramírez és mtsai. (2015) összesen három (egy kollineáris és két nem kollineáris) egyensúlyi pont esetében végzett nemlineáris stabilitásvizsgálatot, hatodrendig bezárólag, két egyenlő tömeget feltételezve.

2. fejezet

Stabilitásvizsgálat a korlátozott esetekben

Az 1.3. fejezetben világossá vált, hogy a négytest-probléma stabilitásvizsgálata - jelentősebb analitikus eredmények híján - mindeddig sok betöltetlen rést hagyó problémakör volt az égi mechanikában. Érdi és Czirják (2016) tengelyszimmetrikus esetre vonatkozó közelmúltbeli egzakt megoldása azonban kiterjedt stabilitásvizsgálatot tesz lehetővé[1]. Eredményük szövevényessége miatt számos esettel kell különkülön foglalkozni, ezek más-más megközelítést igényelnek.

Analitikus vagy szemianalitikus megoldást a korlátozott problémáktól remélhetünk, tegyük fel ezért elsőként, hogy a rendszerben jelen van egy elhanyagolható tömegű test, és ennek mozgása nem zavarja a másik három tömegpontét.

Az 1.3. fejezetből kiderült, hogy a korlátozott négytest-probléma stabilitásvizsgálatának kérdése nem újkeletű probléma az égi mechanikában. Számos megoldást láttunk, a vizsgálat azonban csupán diszkrét pontokra terjedt (és terjedhetett) ki, hiszen Érdi és Czirják (2016) analitikus eredményei ismeretlenek voltak, és így az egyensúlyi megoldások pontos száma (vagy még inkább: tartománya) is. A következőkben Érdi és Czirják (2016) tengelyszimmetrikus esetre vonatkozó analitikus eredményeinek ismeretében megmutatom, hogy a stabilitásvizsgálat az egyensúlyi megoldások - most már ismert - teljes spektrumára elvégezhető.

[1]Itt jegyezném meg, hogy precízen szólva nem a deltoid alakú konfigurációk az egyetlen tengelyszimmetrikus rendszerek, ugyanis az egyenlőszárú trapéz megoldás is az (lásd: MacMillan és Bartky (1932)). Dolgozatomban ezzel nem foglalkozom, a következőkben ezért tengelyszimmetrikus konfigurációkon mindig az Érdi és Czirják (2016)-féle deltoid alakú elrendezéseket értem.

2.1. Definíció. Korlátozott n-test problémáról beszélünk, ha az n darab (az n-test probléma mozgásegyenleteit kielégítő) tömegpont közül pontosan egynek sokkal kisebb (elhanyagolható) a tömege a többi $n-1$ test tömegéhez képest.

A 2.1. definíciót a centrális négytest-probléma tengelyszimmetrikus esetére alkalmazva, és meggondolva, hogy a rendszerben szerepel két egyenlő tömeg (μ), korlátozott problémát csak úgy kaphatunk, ha vagy $\mu_1 = 0$ (miközben $\mu_2 \neq 0$, $\mu \neq 0$), vagy $\mu_2 = 0$ (miközben $\mu_1 \neq 0$, $\mu \neq 0$).

A korlátozott esetek összegyűjtéséhez Érdi és Czirják (2016) 1.3. és 1.4. ábrái nyújtanak segítséget. A konvex esetben egy, a konkáv esetekben pedig két-két egyenest találunk, melyek mentén a fenti feltétel teljesül:
konvex eset:

$$\alpha = 60^\circ \text{ mentén } \mu_2 = 0 \ \forall \beta \in [15^\circ, 60^\circ]; \tag{i}$$

első konkáv eset:

$$\alpha = 60^\circ \text{ mentén } \mu_2 = 0 \ \forall \beta \in [0^\circ, 30^\circ], \tag{ii}$$

$$\beta = 0^\circ \text{ mentén } \mu_1 = 0 \ \forall \alpha \in [45^\circ, 60^\circ]; \tag{iii}$$

második konkáv eset:

$$\alpha = 60^\circ \text{ mentén } \mu_2 = 0 \ \forall \beta \in [30^\circ, 60^\circ), \tag{iv}$$

$$\beta = 60^\circ \text{ mentén } \mu_1 = 0 \ \forall \alpha \in (60^\circ, 75^\circ]. \tag{v}$$

Megjegyzés. (iv)-ben és (v)-ben a β-ra, illetve α-ra vonatkozó intervallum azért nem zárt, mert az $\alpha = \beta = 60^\circ$ esetet, vagyis amikor az A és B test egybeesne, ki kell zárni.

A stabilitásvizsgálat során az elhanyagolható (praktikusan nulla) tömegű testre írjuk fel a mozgásegyenleteket, majd az egyensúlyi helyzethez közeli pontban vizsgáljuk a megoldást. A fenti öt eset kezdetben tárgyalható együtt.

2.1. Mozgásegyenletek

Tekintsünk egy tengelyszimmetrikus centrális konfigurációt, majd rögzítsük az Érdi és Czirják (2016) által bevezett α, β szögváltozók egyikét. Ez a négyből három test helyzetét egyértelműen meghatározza (hiszen dimenziótlan távolságokkal

dolgozunk). Tegyük fel, hogy ezen rögzített helyzetű tömegpontok tömegközéppont körüli mozgásuk során körpályákat futnak be, melyeket a negyedik test - nulla tömege révén - nem perturbál. Így az előbbi hármasrendszer mozgása tárgyalható, mint egy merev test egyenletes forgása a tömegközéppontja körül. Ezt kihasználva, rögzítsünk egy $\boldsymbol{\omega}$ = konst. szögsebességgel forgó koordináta-rendszert a tömegközéppontba. Ebben a forgó vonatkoztatási rendszerben szeretnénk felírni a negyedik, elhanyagolható tömegű testre vonatkozó mozgásegyenleteket. α rögzítése esetén ez a test a B jelű lesz, β rögzítésekor pedig az A. A fenti (i)-(v) eset közös tárgyalása során a $P := \{A, B\}$ és $\widetilde{P} := \{B, A\}$ jelölést fogom alkalmazni, ami arra utal, hogy a P-vel jelölt tömegpont később A vagy B lesz, a $\widetilde{P}$ jelű pedig B vagy A. Hasonlóan, a tömegek esetében vezessük be a $p := \{1, 2\}$ és $\tilde{p} := \{2, 1\}$ jelöléseket.

Jelölje az egyes tömegpontokhoz irányított baricentrikus helyvektorokat $\boldsymbol{r}_P$, $\boldsymbol{r}_{\widetilde{P}}$, $\boldsymbol{r}_E$ és $\boldsymbol{r}_{E'}$. (Itt $\boldsymbol{r}_P$ a másik három vektorral ellentétben a t idő függvénye.) A mozgásegyenletek felírása előtt még elevenítsük fel, hogy forgó koordináta-rendszerben mindig fellépnek fiktív tehetetlenségi erők. Az ezekből származó gyorsulások egyrészt a

$$-2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}_P \tag{2.1}$$

Coriolis-gyorsulás (ponttal jelölve az idő szerinti deriválást), másrészt a

$$-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_P) \tag{2.2}$$

centrifugális gyorsulás. Az előzőek figyelembevételével a P-re vonatkozó mozgásegyenletek az

$$\begin{aligned} &\ddot{\boldsymbol{r}}_P - 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}_P \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_P) - k^2 \mu_{\tilde{p}} \frac{\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_{\widetilde{P}}}{\|\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_{\widetilde{P}}\|_2^3} - k^2 \mu \left(\frac{\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_E}{\|\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_E\|_2^3} + \frac{\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_{E'}}{\|\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_{E'}\|_2^3} \right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

alakot öltik, ahol k a Gauss-állandó, $\|\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_i\|_2$ $(i = \widetilde{P}, E, E')$ pedig P és az i-edik test közötti euklideszi távolságot adja meg.

Vegyük észre, hogy (2.3) jobb oldala nem más, mint a mozgás $U(\boldsymbol{r}_P)$ effektív potenciáljának gradiense. Legyenek $\boldsymbol{r}_P$ komponensei $x(\equiv x(t))$ és $y(\equiv y(t))$, és vezessük be a $\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) =: U_x(x, y)$ és $\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) =: U_y(x, y)$ rövidítéseket. Ekkor a

(2.3) mozgásegyenlet komponenseiben kiírva az

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} &= U_x(x, y), \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} &= U_y(x, y) \end{aligned} \tag{2.4}$$

differenciálegyenlet-rendszerhez vezet.

2.2. Lineáris variációs egyenletek

A (2.4) rendszer Érdi és Czirják (2016) eredményeiből ismert egyensúlyi megoldását jelölje (x_0, y_0). A lineáris stabilitásvizsgálat során a P tömegpontot egyensúlyi helyzetéből kissé kimozdítjuk, vagyis a megoldást az

$$\begin{aligned} x &:= x_0 + \xi, \\ y &:= y_0 + \eta \end{aligned} \tag{2.5}$$

alakban keressük, ahol ξ és η kis mennyiségek (perturbációk), melyek négyzetét és szorzatát is elhanyagoljuk. (2.5)-öt (2.4)-be helyettesítve és a jobb oldalakat elsőrendig (x_0, y_0) körüli Taylor-sorba fejtve a

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} &= U_{xx}(x_0, y_0)\xi + U_{xy}(x_0, y_0)\eta, \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} &= U_{yx}(x_0, y_0)\xi + U_{yy}(x_0, y_0)\eta \end{aligned} \tag{2.6}$$

ún. *lineáris variációs egyenletek*hez jutunk. ($U_{ij} := \frac{\partial U_i}{\partial j}$, $i, j = x$ vagy y.)

Belátható, hogy az $U_{xy}(x_0, y_0) = U_{yx}(x_0, y_0) = 0$ egyenlőség a későbbi öt eset mindegyikében teljesül (a bizonyításokat lásd később). Így (2.6) az egyszerűbb

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} &= U_{xx}(x_0, y_0)\xi, \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} &= U_{yy}(x_0, y_0)\eta \end{aligned} \tag{2.7}$$

alakba írható.

2.3. Karakterisztikus egyenlet

(2.7) állandó együtthatós, homogén, lineáris differenciálegyenlet-rendszer, így a partikuláris megoldást

$$\begin{aligned} \xi &:= A\mathrm{e}^{\gamma t}, \\ \eta &:= B\mathrm{e}^{\gamma t} \end{aligned} \tag{2.8}$$

alakban keressük ($A \neq 0$, $B \neq 0$). A feladat az A, B, γ konstansok meghatározása. Ehhez helyettesítsük vissza a (2.8) megoldást (2.7)-be. Az eredmény (alkalmazva az $U_{ii}(x_0, y_0) =: U_{ii}$, $i = x, y$ rövidítéseket) az

$$\begin{aligned} A(\gamma^2 - U_{xx}) - 2\omega B\gamma &= 0, \\ B(\gamma^2 - U_{yy}) + 2\omega A\gamma &= 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

homogén lineáris algebrai egyenletrendszer A, B-re, melynek - mint lineáris algebrából ismeretes - akkor és csak akkor létezik nemtriviális megoldása, ha az együtthatómátrix determinánsa nulla, azaz

$$\begin{vmatrix} \gamma^2 - U_{xx} & -2\omega\gamma \\ 2\omega\gamma & \gamma^2 - U_{yy} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.10}$$

A determinánst kifejtve, a

$$\gamma^4 + \gamma^2(-U_{xx} - U_{yy} + 4\omega^2) + U_{xx}Uyy = 0 \tag{2.11}$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk γ-ra.

Vezessük be a $\Gamma := \gamma^2$ jelölést. Ezzel (2.11) a

$$\Gamma^2 + \Gamma(-U_{xx} - U_{yy} + 4\omega^2) + U_{xx}Uyy = 0 \tag{2.12}$$

másodfokú egyenlet formájában írható fel, melynek megoldásait a megoldóképlet adja:

$$\Gamma_{1,2} = \frac{1}{2}(U_{xx} + U_{yy} - 4\omega^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(-U_{xx} - U_{yy} + 4\omega^2\right)^2 - U_{xx}U_{yy}}. \tag{2.13}$$

2.4. A stabilitás feltételei

Emlékeztető. A (2.7) rendszert stabilnak [aszimptotikusan stabilnak] nevezzük az (x_0, y_0) egyensúlyi pontban, ha a (2.8)-ban szereplő γ kitevőkre: $\mathrm{Re}(\gamma_i) \leq 0\ \forall i$ [$\mathrm{Re}(\gamma_i) < 0\ \forall i$]. Ha $\exists i : \mathrm{Re}(\gamma_i) > 0$, a megoldás instabil.

Itt $\gamma_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\Gamma_{1,2}}$, ezért maximálisan négy különböző gyök lehet. Annak eldöntésére, hogy ezen gyökök képzetesek vagy valósak, valós esetben pozitívak vagy nempozitívak, valamint hogy léteznek-e többszörös gyökök, $\Gamma_{1,2}$-t, illetve annak megoldóképletében a $D := \frac{1}{4}\left(-U_{xx} - U_{yy} + 4\omega^2\right)^2 - U_{xx}U_{yy}$ diszkriminánsa előjelét kell megvizsgálni.

1. eset: $D < 0$. Ez esetben $\Gamma_{1,2}$ komplex értékű és nemegyenlő, $\varphi \pm i\psi$ alakú. Következésképpen a $\gamma_{1,2,3,4}$ gyökök valósrészei közül kettő-kettő egyenlő és ellenkező előjelű. Ezek valamelyike biztosan pozitív, így a megoldás instabil.

2. eset: $D = 0$. Ekkor a $\Gamma_1 = \Gamma_2 =: \Gamma$ többszörös és valós, és $\gamma_{1,2,3,4}$ közül is kettő-kettő egyenlő: legyen $\gamma_1 := \gamma_{1,3} = \sqrt{\Gamma}$ és $\gamma_2 := \gamma_{2,4} = -\sqrt{\Gamma}$ a két különböző gyök. Ha $\Gamma > 0$, akkor $\gamma_1 > 0$, a megoldás megint csak instabil. Ha $\Gamma < 0$, akkor $\gamma_{1,2}$ ugyan tisztán képzetes, stabil megoldást azonban mégsem kapunk annak

$$\begin{aligned} \xi &= A_1 \mathrm{e}^{\gamma_1 t} + A_2 t \mathrm{e}^{\gamma_2 t}, \\ \eta &= B_1 \mathrm{e}^{\gamma_1 t} + B_2 t \mathrm{e}^{\gamma_2 t} \end{aligned} \tag{2.14}$$

alakja miatt. (Megmutatható ugyanis, hogy többszörös gyökök esetén a megoldás (2.8)-tól eltérően szekuláris tagokat is tartalmaz.)

3. eset: $D > 0$. Pozitív diszkriminánsa valós és nemegyenlő $\Gamma_{1,2}$-t eredményez. Ha közülük legalább az egyik pozitív, akkor szükségszerűen létezik olyan $i = \{1, 2, 3, 4\}$, melyre $\gamma_i > 0$, a megoldás instabil. Azonban ha mind Γ_1, mind Γ_2 nempozitív, $\gamma_{1,2,3,4}$ mindegyike tisztán képzetes és a megoldás stabil (vagy aszimptotikusan stabil) lesz.

Összefoglalva: stabil egyensúlyi megoldáshoz a

$$\begin{aligned} D &> 0, \\ \Gamma_{1,2} &\leq 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

feltételek együttes teljesülése szükséges (és ez elégséges is).

D és $\Gamma_{1,2}$ meghatározásához az U_{xx}, U_{yy} és ω^2 mennyiségeket kell ismerni. Ezek azonban különbözőek lesznek a vizsgálandó (i)-(v) esetben, ezért ezen a ponton az összevont tárgyalás nem folytatható.

2.5. Konvex eset, $\alpha = 60^\circ$

Tekintsük a konvex konfigurációt (1.1. ábra) $\alpha = 60^\circ$ esetén. Ekkor A, E és E' egy szabályos háromszög csúcsaiban foglal helyet, B pedig a háromszögön kívül helyezkedik el nulla tömeggel. Utóbbi mozgását vizsgáljuk, ezért a (2.3) mozgásegyenletben P helyett B-t, $\widetilde{P}$ helyett A-t, $\tilde{p}$ helyett pedig 1-et kell venni. A rögzített helyzetű A, E és E' testek Érdi és Czirják (2016) eredményeiből ismert és az 1.1. ábrán látott koordinátái:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_A &= (a, 0)\,, \\ \boldsymbol{r}_E &= \left(-\frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}, 1\right), \\ \boldsymbol{r}_{E'} &= \left(-\frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}, -1\right), \end{aligned} \tag{2.16}$$

amivel az euklideszi távolságok az alábbi módon írhatóak:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A\|_2 &= \left[(x-a)^2 + (y-0)^2\right]^{1/2}, \\ \|\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_E\|_2 &= \left[\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2 + (y-1)^2\right]^{1/2}, \\ \|\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_{E'}\|_2 &= \left[\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2 + (y+1)^2\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

(2.16) és (2.17) figyelembevételével felírhatjuk a (2.3) mozgásegyenlet komponenseit:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \omega^2 x - k^2\mu_1 \frac{x-a}{\left[(x-a)^2 + y^2\right]^{3/2}} - k^2\mu\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right) \cdot \\ \cdot \left(\frac{1}{\left[\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_1 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2 + (y-1)^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_1 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2 + (y+1)^2\right]^{3/2}}\right), \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \omega^2 y - k^2\mu_1 \frac{y}{\left[(x-a)^2 + y^2\right]^{3/2}} - k^2\mu \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{y-1}{\left[\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_1 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2 + (y-1)^2\right]^{3/2}} + \frac{y+1}{\left[\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_1 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2 + (y+1)^2\right]^{3/2}} \right). \quad (2.19)$$

(2.18) és (2.19) jobb oldala adja meg $U_x(x,y)$-t és $U_y(x,y)$-t, melyekből már számíthatóak a második deriváltak az $(x_0, y_0) = (-b, 0)$ egyensúlyi pontban.

Először a 2.2. fejezetben tett, a vegyes parciális deriváltakra vonatkozó megjegyzést látjuk be.

2.5.1. Állítás. *A konvex esetben $\alpha = 60°$ mellett*

$$U_{xy}(-b,0) = U_{yx}(-b,0) = 0. \quad (2.20)$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy mivel $U_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $U_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények, ezért az $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ potenciálfüggvény kétszer folytonosan differenciálható. Ez elégséges feltételt ad a vegyes parciális deriváltak felcserélhetőségéről szóló Young-tételhez. Utóbbit alkalmazva: $U_{xy}(x,y) = U_{yx}(x,y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, így az egyenlőség $(-b,0)$-ban is fennáll. Elég tehát például $U_{xy}(-b,0)$-ról megmutatni, hogy nulla. Ehhez deriváljuk $U_x(x,y)$-t y szerint:

$$\begin{aligned} U_{xy}(x,y) \equiv & \frac{\partial U_x(x,y)}{\partial y} = 3k^2\mu_1(x-a)\left[(x-a)^2 + y^2\right]^{-5/2} y \\ & - k^2\mu\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right) \cdot \\ & \cdot \left\{ -3\left[\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2 + (y-1)^2\right]^{-5/2} (y-1) \right. \\ & \left. - 3\left[\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2 + (y+1)^2\right]^{-5/2} (y+1) \right\}, \end{aligned}$$

amibe $(x,y) = (-b,0)$-t helyettesítve adódik a kívánt eredmény.

□

Ezt követően rátérhetünk U_{xx} és U_{yy} számítására.

$$
\begin{aligned}
U_{xx}(x,y) \equiv & \frac{\partial U_x(x,y)}{\partial x} \\
= & \omega^2 - k^2\mu_1 \cdot \\
& \cdot \left\{ \left[(x-a)^2+y^2\right]^{-3/2} - 3(x-a)^2\left[(x-a)^2+y^2\right]^{-5/2} \right\} \\
& - k^2\mu \Bigg\{ \left[\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2} \right)^2 + (y-1)^2 \right]^{-3/2} \\
& \quad + \left[\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2} \right)^2 + (y+1)^2 \right]^{-3/2} \\
& \quad - 3\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2} \right)^2 \cdot \\
& \quad \cdot \Bigg(\left[\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2} \right)^2 + (y-1) \right]^{-5/2} \\
& \quad + \left[\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2} \right)^2 + (y+1) \right]^{-5/2} \Bigg) \Bigg\},
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

így

$$
\begin{aligned}
U_{xx} \equiv & U_{xx}(-b,0) \\
= & \omega^2 + \frac{2k^2\mu_1}{(a+b)^3} \\
& - \frac{2k^2\mu}{\left[\left(-b + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2} \right)^2 + 1 \right]^{3/2}} \left(1 - \frac{3\left(-b + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2} \right)^2}{\left(-b + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2} \right)^2 + 1} \right).
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Hasonló számítással kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
U_{yy}(x,y) &\equiv \frac{\partial U_y(x,y)}{\partial y} \\
&= \omega^2 - k^2\mu_1 \left\{ \left[(x-a)^2+y^2\right]^{-3/2} - 3y^2\left[(x-a)^2+y^2\right]^{-5/2} \right\} \\
&\quad - k^2\mu \Bigg\{ \left[\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2} \right)^2 + (y-1)^2 \right]^{-3/2} \\
&\qquad - 3(y-1)^2 \left[\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2} \right)^2 + (y-1)^2 \right]^{-5/2} \\
&\qquad + \left[\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2} \right)^2 + (y+1)^2 \right]^{-3/2} \\
&\qquad - 3(y+1)^2 \left[\left(x + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2} \right)^2 + (y+1)^2 \right]^{-5/2} \Bigg\},
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

amiből

$$
\begin{aligned}
U_{yy} &\equiv U_{yy}(-b,0) \\
&= \omega^2 - \frac{2k^2\mu_1}{(a+b)^3} \\
&\quad - \frac{2k^2\mu}{\left[\left(-b + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2} \right)^2 + 1 \right]^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{\left(-b + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2} \right)^2 + 1} \right)
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

adódik.

Meggondolható, hogy esetünkben a koordináta-rendszer forgási sebességének négyzete, vagyis ω^2 éppen az 1.1. definícióbeli λ-val egyezik meg. Utóbbit Érdi és Czirják (2016) (40) egyenlete adja meg:

$$
\omega^2 \equiv \lambda = \frac{k^2(m_1+m_2+2m)}{y^3} \left(\frac{\mu_1}{d_1^3} + \frac{\mu_2}{d_2^3} + \frac{1-\mu_1-\mu_2}{8} \right), \tag{2.25}
$$

ahol d_1 és d_2 rendre az A és E, illetve B és E testek közötti dimenziótlan (egyensúlyi)

távolság, vagyis

$$
\begin{aligned}
d_1 &:= \|\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_E\|_{2,0} = \left[\left(a + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2 + 1\right]^{1/2}, \\
d_2 &:= \|\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_E\|_{2,0} = \left[\left(-b + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2 + 1\right]^{1/2}
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

(a 0 alsóindex az „egyensúlyi" jelzőre utal); y az E, E' testek fizikai (hosszdimenziójú) távolsága a vízszintes tengelytől; m_1, m_2 és m pedig a fizikai, mértékegységgel rendelkező tömegek. Mivel Érdi és Czirják (2016) a mennyiségek dimenziótlanítását az y távolság, valamint az $m_1 + m_2 + 2m$ összetömeg 1-nek választásával tette meg, ezért (2.25) valójában nem más, mint

$$
\begin{aligned}
\omega^2 =& \frac{k^2\mu_1}{\left[\left(a + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2 + 1\right]^{3/2}} \\
&+ \frac{k^2\mu_2}{\left[\left(-b + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2 + 1\right]^{3/2}} + \frac{k^2(1-\mu_1-\mu_2)}{8}.
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

U_{xx}, U_{yy} és ω^2 fenti felírásában az a, b, valamint μ_1, μ_2 és μ mennyiségek szerepelnek. Célunk azonban az, hogy a D diszkriminánst és a $\Gamma_{1,2}$ gyököket, majd rajtuk keresztül a $\gamma_{1,2,3,4}$ mennyiségeket egyetlen ismeretlen függvényében vizsgálhassuk. Ez megtehető, ugyanis egyrészt a, b-ről áttérhetünk az α, β szögpárra, másrészt (1.3) értelmében μ_1 és μ_2 az α, β függvénye (μ pedig nem független tőlük). Így az eredeti öt (valójában négy) helyett két mennyiség marad, melyek egyikét a kiinduló feltételből ismerjük: $\alpha = 60°$. Következésképpen a konvex korlátozott eset stabilitása β függvénye.

Fejezzük ki U_{xx}-et, U_{yy}-t és ω^2-et α-val és β-val (a tömegeket egyelőre hagyjuk változatlanul)! A felhasználandó transzformációs egyenletek és összefüggések (lásd: Érdi és Czirják (2016)):

$$
\begin{aligned}
a &= (1-\mu_1)\operatorname{tg}\alpha + \mu_2 \operatorname{tg}\beta, \\
b &= \mu_1 \operatorname{tg}\alpha + (1-\mu_2)\operatorname{tg}\beta, \\
a + b &= \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1 - \mu_1 - \mu_2} = \operatorname{tg}\alpha, \\
&-b + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1 - \mu_1 - \mu_2} = -\operatorname{tg}\beta, \\
&\left(a + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1 - \mu_1 - \mu_2}\right)^2 + 1 = \operatorname{tg}^2\alpha + 1 \equiv \frac{1}{\cos^2\alpha}, \\
&\left(-b + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1 - \mu_1 - \mu_2}\right)^2 + 1 = \operatorname{tg}^2\beta + 1 \equiv \frac{1}{\cos^2\beta}.
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

Ezekkel

$$
U_{xx} = \omega^2 + \frac{2k^2\mu_1}{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)^3} - 2k^2\mu\cos^3\beta\left(1 - 3\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\beta\right), \tag{2.29}
$$

$$
U_{yy} = \omega^2 - \frac{k^2\mu_1}{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)^3} - 2k^2\mu\cos^3\beta\left(1 - 3\cos^2\beta\right), \tag{2.30}
$$

$$
\omega^2 = k^2\mu_1\cos^3\alpha + k^2\mu_2\cos^3\beta + \frac{1}{8}k^2(1 - \mu_1 - \mu_2). \tag{2.31}
$$

Vegyük k^2-et 1-nek (ez a mértékegységek alkalmas megválasztásával megtehető), és használjuk fel az $\alpha = 60°$ megszorítást ($\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\cos\alpha = 1/2$), aminek következtében $\mu_2 = 0$, illetve $\mu = 1/2(1 - \mu_1)$:

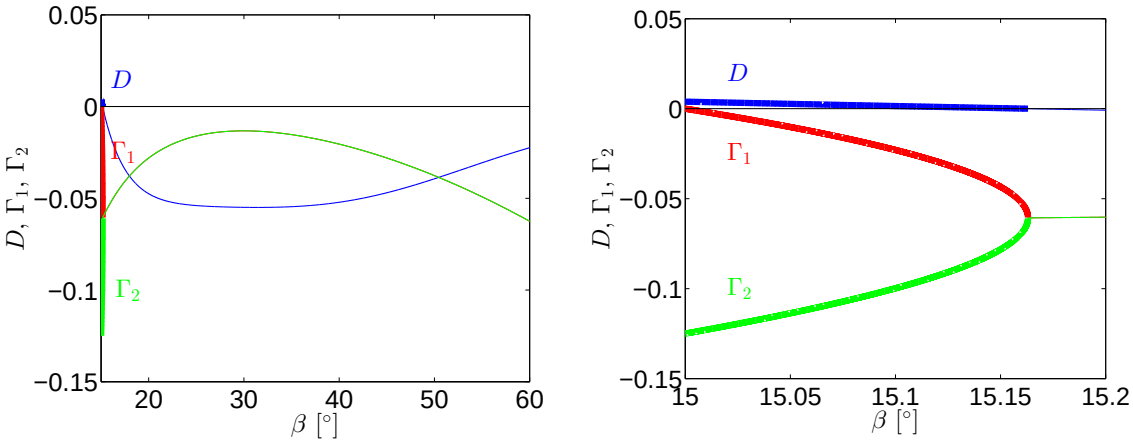
$$
U_{xx} = \omega^2 + \frac{2\mu_1}{\left(\sqrt{3} + \operatorname{tg}\beta\right)^3} - (1 - \mu_1)\cos^3\beta\left(1 - 3\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\beta\right), \tag{2.32}
$$

$$
U_{yy} = \omega^2 - \frac{\mu_1}{\left(\sqrt{3} + \operatorname{tg}\beta\right)^3} - (1 - \mu_1)\cos^3\beta\left(1 - 3\cos^2\beta\right), \tag{2.33}
$$

$$
\omega^2 = \frac{1}{8}. \tag{2.34}
$$

Végül adjuk meg μ_1 alakját az $\alpha = 60°$, $\mu_2 = 0$ esetben! A μ_1 kifejezésében szereplő (1.4)-ben definiált a_0, a_1, b_0, b_1 együtthatók most:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0, \\
a_1 &= \frac{1}{\left(\sqrt{3} + \operatorname{tg}\beta\right)^2} - \cos^3\beta\operatorname{tg}\beta - \frac{\sqrt{3}}{8}, \\
b_0 &= \left(\cos^3\beta - \frac{1}{8}\right)\operatorname{tg}\beta, \\
b_1 &= \frac{1}{\left(\sqrt{3} + \operatorname{tg}\beta\right)^2} - \sqrt{3}\cos^3\beta - \frac{1}{8}\operatorname{tg}\beta,
\end{aligned} \tag{2.35}
$$



2.1. ábra. Konvex eset, $\alpha = 60°$. A D és $\Gamma_{1,2}$ mennyiségek a β szögváltozó függvényében. (A $D < 0$ tartományban $\Gamma_{1,2}$ valósrészét látjuk.) A megvastagított görbeszakaszok az $S_1 = \{15° \leq \beta < 15.°1631\}$ stabil tartományt emelik ki. Jobb oldal: a bal oldali ábra kinagyítása az S_1-et tartalmazó $15° \leq \beta \leq 15.°2$ tartományban.

amivel

$$\mu_1 = -\frac{b_0}{a_1} = \frac{\left(\frac{1}{8} - \cos^3\beta\right)\operatorname{tg}\beta}{\frac{1}{\left(\sqrt{3}+\operatorname{tg}\beta\right)^2} - \cos^3\beta\operatorname{tg}\beta - \frac{\sqrt{3}}{8}}. \tag{2.36}$$

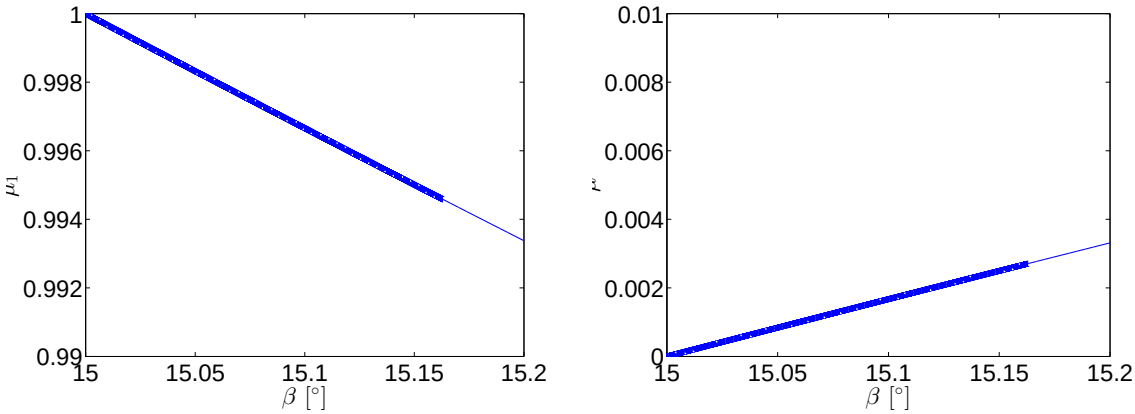
μ_1-et U_{xx} és U_{yy} (2.32) és (2.33) kifejezésébe helyettesítve, majd ezeket és az $\omega^2 = 1/8$-ot felhasználva D és $\Gamma_{1,2}$ számításakor, a kívánt eredményhez jutunk: a konvex eset stabilitását β függvényében vizsgálhatjuk.

A 2.1. ábrán látjuk a $\beta \mapsto D(\beta)$, $\beta \mapsto \Gamma_1(\beta)$ és $\beta \mapsto \Gamma_2(\beta)$ függvényeket (a $D < 0$ tartományban értelemszerűen $\mathrm{Re}(\Gamma_1)$-et és $\mathrm{Re}(\Gamma_2)$-t). Alkalmazva a (2.15) feltételt, stabil megoldást az

$$S_1 := \{\beta \in [15°, 60°] : D(\beta) > 0, \Gamma_{1,2}(\beta) \leq 0\} \tag{2.37}$$

halmazon belül remélhetünk, mely jelen esetben a mindössze tizedfok széles $15° \leq \beta < 15.°1631$ intervallum (lásd: a 2.1. ábra megvastagított görbéi). Érdemes kiszámolni az S_1-beli β-khoz tartozó tömegértékeket is: μ_1 1 és 0.9946 között változik (2.2. ábra bal oldala), ami alapján μ szélsőértékére (maximumára) $(1-0.9946)/2 = 0.0027$ adódik (2.2. ábra jobb oldala).

Mindez azt jelenti, hogy ha az (A, E, E')-rendszerben a három test által meghatározott egyenlőoldalú háromszögön kívül, de annak szimmetriatengelyén elhelyezünk egy elhanyagolható tömegű testet (B-t), akkor az így kapott négyesrendszer csak a koorbitálishoz nagyon közeli konfiguráció esetén lesz stabil, vagyis amikor a



2.2. ábra. Konvex eset, $\alpha = 60°$. Az A (bal oldal) és E, E' (jobb oldal) testek dimenziótlan tömege β függvényében. A megvastagított szakaszok az S_1 stabil tartományt emelik ki, ahol $\mu_1 \in [1, 0.9946)$, $\mu \in [0, 0.0027)$.

nulla tömegű B, E, E' az egységtömegű A köré írt kör megfelelő pontjaiban foglal helyet. Sztelláris-planetáris interpretációban úgy képzelhetjük el, hogy ($\beta = 15°$ esetén) egy központi (naptömegűre skálázott) csillag körül a -60, $+60$ foknál lévő L_4 és L_5 Lagrange-pontokban és a körpálya mentén azok között félúton kis- (vagy maximum földméretű) bolygók keringenek. Ha az L_4, L_5 között lévő B jelű kisbolygót az előbbi körpályáról kissé eltávolítjuk (maximum $\sim 0.^\circ16$-kal), akkor a még mindig stabil egyensúlyi konfigurációban az L_4, L_5-ben keringő E, E' körülbelül két és fél Jupiter-tömegűre nőhet. Az eredmények megértését a 2.3. ábra segíti.

Térjünk vissza röviden a megoldás alakjára! A stabil tartományban négy tisztán képzetes γ gyököt kapunk. Használjuk a

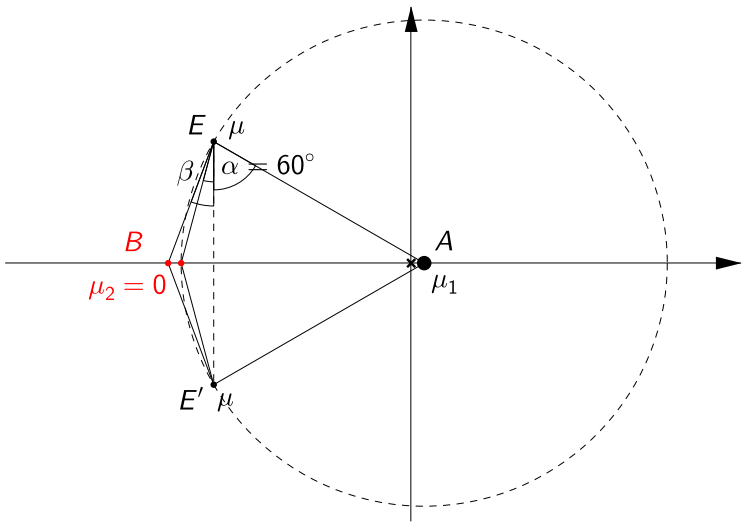
$$\begin{aligned} \gamma_{1,2} &= \pm\sqrt{\Gamma_1} = \pm i\sqrt{|\Gamma_1|} =: \pm i\nu_1, \\ \gamma_{3,4} &= \pm\sqrt{\Gamma_2} = \pm i\sqrt{|\Gamma_2|} =: \pm i\nu_2 \end{aligned} \tag{2.38}$$

jelöléseket, és írjuk át a

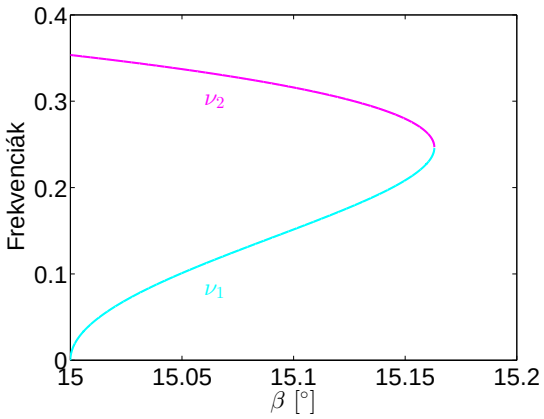
$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{i=1}^{4} A_i \mathrm{e}^{\gamma_i t}, \\ \eta &= \sum_{i=1}^{4} B_i \mathrm{e}^{\gamma_i t} \end{aligned} \tag{2.39}$$

alakú általános megoldást az Euler-formula segítségével a trigonometrikus

$$\begin{aligned} \xi &= C_1 \cos(\nu_1 t) + D_1 \sin(\nu_1 t) + C_2 \cos(\nu_2 t) + D_2 \sin(\nu_2 t), \\ \eta &= \widetilde{C_1} \cos(\nu_1 t) + \widetilde{D_1} \sin(\nu_1 t) + \widetilde{C_2} \cos(\nu_2 t) + \widetilde{D_2} \sin(\nu_2 t) \end{aligned} \tag{2.40}$$



2.3. ábra. Konvex eset, $\alpha = 60°$. Szemléltető ábra az S_1 stabil tartományhoz tartozó konfigurációkról. A három pozitív tömegű testet fekete pont jelöli, a nulla tömegűt piros. Az A testhez tartozó nagyobb méretű pont A-nak az E, E'-höz viszonyított nagyobb tömegére utal. A B-t jelképező két pont S_1 határpontjait adja meg, ezek közötti β-kra az egyensúlyi megoldás stabil.



2.4. ábra. Konvex eset, $\alpha = 60°$. Az elhanyagolható tömegű, egyensúlyi pontjából kimozdított B test kváziperiodikus mozgását jellemző $\nu_{1,2}$ frekvenciák β függvényében.

alakra, ahol C_i, D_i, $\widetilde{C}_i$, $\widetilde{D}_i$ $(i = 1, 2)$ állandók ($\widetilde{C}_i$, $\widetilde{D}_i$ kifejezhető C_i, D_i-vel, így a megoldásban összesen négy tetszőleges állandó szerepel). (2.40) úgy értelmezhető, hogy a ξ, η kis kitérések ν_1, ν_2 frekvenciájú rezgésekből állnak. Vagyis az egyensúlyi helyzetéből kitérített B test ν_1, ν_2 frekvenciájú kváziperiodikus mozgást végez $(-b, 0)$ körül (ami természetesen β-val is kifejezhető: $-b$-nek a $-(\operatorname{tg}\beta + \sqrt{3}\mu_1)$ koordináta feleltethető meg). A frekvenciákat a 2.4. ábra mutatja β függvényében.

Látjuk, hogy $\nu_2 > \nu_1$ minden β-ra, így az előbbinek rövidebb, utóbbinak hosszabb periódusidejű keringés felel meg. Észrevehetjük továbbá azt is, hogy ν_2 maximuma $\sqrt{1/8} \approx 0.3536$, ami (2.34) miatt éppen a koordináta-rendszer forgásának frekvenciája, vagyis az (A, E, E')-rendszernek mint merev testnek a forgási szögsebessége.

2.6. Első konkáv eset, $\alpha = 60°$

A következő négy eset analitikus számításai a konvex problémában látottakéval analóg módon történnek, ezért ezekben csak U_{xx}, U_{yy} és ω^2 végső alakját közlöm.

$\alpha = 60°$ rögzítésével az első konkáv eset konfigurációja (1.2. ábra, bal oldal) a 2.5. fejezetben megismert konvexéhez nagyon hasonló: A, E, E' ugyanúgy egy egyenlőoldalú háromszög csúcsaiban fekszik, mindössze a nulla tömegű B testet kell most a háromszög belsejébe helyezni (a tömegközépponttól balra), ellentétben a konvex esettel, ahol az a háromszögön kívül volt.

A stabilitást meghatározó mennyiségek jelen esetben:

$$U_{xx} = \omega^2 + \frac{2\mu_1}{\left(\sqrt{3} - \operatorname{tg}\beta\right)^3} - (1-\mu_1)\cos^3\beta\left(1 - 3\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\beta\right), \tag{2.41}$$

$$U_{yy} = \omega^2 - \frac{\mu_1}{\left(\sqrt{3} - \operatorname{tg}\beta\right)^3} - (1-\mu_1)\cos^3\beta\left(1 - 3\cos^2\beta\right), \tag{2.42}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{8}, \tag{2.43}$$

ahol

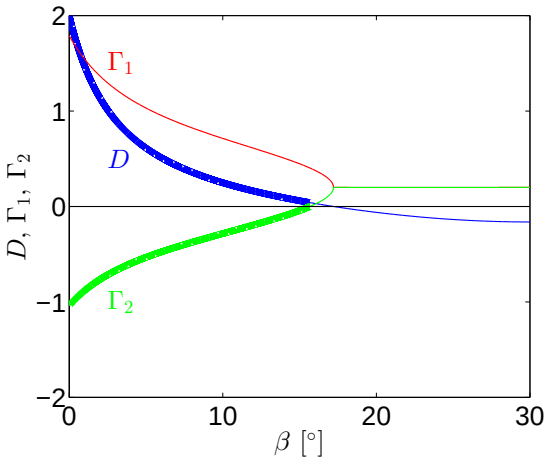
$$\mu_1 = \frac{\left(\cos^3\beta - \frac{1}{8}\right)\operatorname{tg}\beta}{\frac{1}{\left(\sqrt{3}-\operatorname{tg}\beta\right)^2} + \cos^3\beta\operatorname{tg}\beta - \frac{\sqrt{3}}{8}}. \tag{2.44}$$

(Vegyük észre, hogy (2.41)-ben, (2.42)-ben, (2.43)-ban és (2.44)-ben mindössze a $\operatorname{tg}\beta$-t tartalmazó tagok előjele változott a konvex esethez képest.)

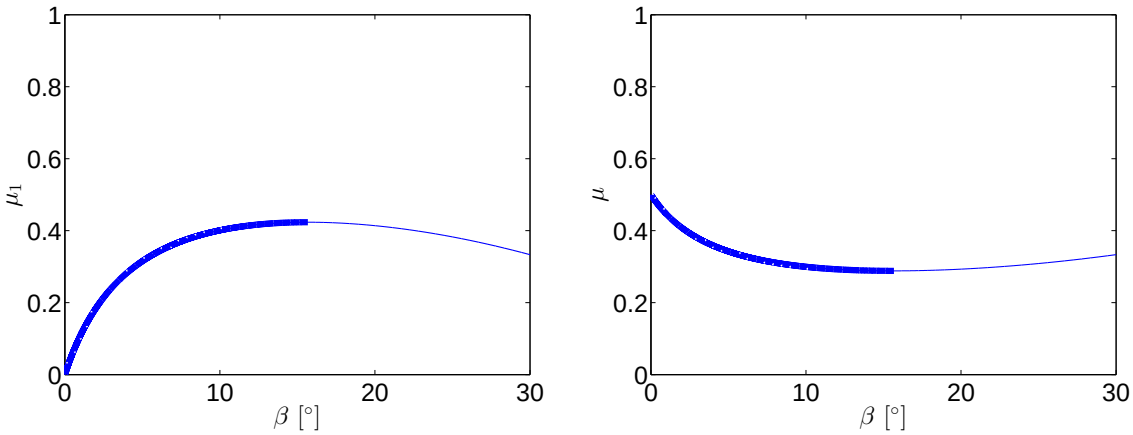
A numerikus eredmények alapján a stabilitási tartomány most

$$S_2 := \{\beta \in [0°, 30°] : D(\beta) > 0, \Gamma_{1,2}(\beta) \leq 0\} = \emptyset, \tag{2.45}$$

mint azt a 2.5. ábrán is megfigyelhetjük. Mielőtt azonban stabilitás hiányában ezt az esetet teljesen kizárnánk a további vizsgálatokból és a gyakorlati alkalmazás lehetőségét is elvetnénk, jegyezzük meg, hogy a kezdeti feltételek „jó" megválasztásával ún. *feltételes stabilitás* elérhető. Itt a gondot Γ_1 pozitív volta (2.5. ábra, piros gör-



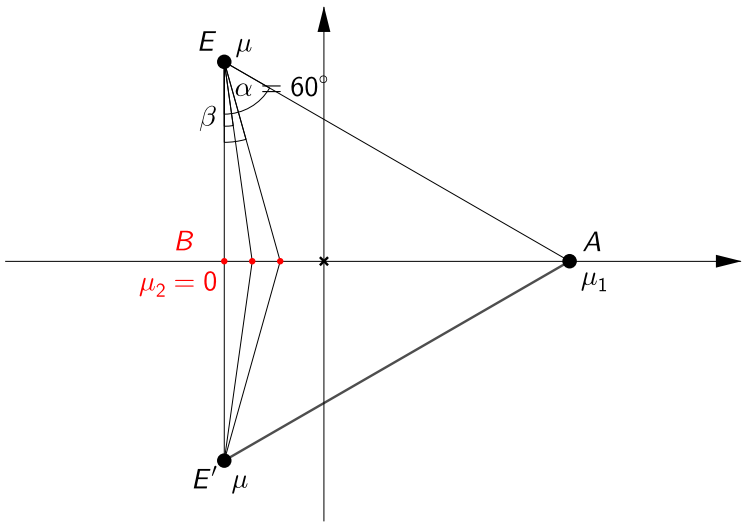
2.5. ábra. Első konkáv eset, $\alpha = 60°$. A D és $\Gamma_{1,2}$ mennyiségek a β szögváltozó függvényében. (A $D < 0$ tartományban $\Gamma_{1,2}$ valósrészét látjuk.) A megvastagított görbeszakaszok az $S_2^{\text{felt}} = \{0° \leq \beta < 15.°6725\}$ feltételesen stabil tartományt emelik ki.



2.6. ábra. Első konkáv eset, $\alpha = 60°$. Az A (bal oldal) és E, E' (jobb oldal) testek dimenziótlan tömege β függvényében. A megvastagított szakaszok az S_2^{felt} feltételesen stabil tartományt emelik ki, ahol $\mu_1 \in [0, 0.4234)$, $\mu \in [0.5, 0.2883)$.

be) és így $\text{Re}(\gamma_1) > 0$ okozza. Ha tehát a (2.39) alakú megoldásban a γ_1-hez tartozó A_1-et nullának választjuk, úgy a problémás tag nem jelenik meg és stabil megoldást kaphatunk. Ha a γ_2-höz tartozó A_2-t is nullának választjuk, akkor a megoldás nem csak stabil, hanem periodikus is lesz. ($A_1 = A_2 = 0$ a kezdőfeltételek megfelelő megválasztásával elérhető.)

Ennek szellemében a 2.5. ábrán a megvastagított, a feltételeket teljesítő görbeszakaszok jelölik a feltételes stabilitás tartományát: $S_2^{\text{felt}} := \{0° \leq \beta < 15.°6725\}$, melyen belül $\mu_1 \in [0, 0.4234)$, $\mu \in [0.5, 0.2883)$ (2.6. ábra).

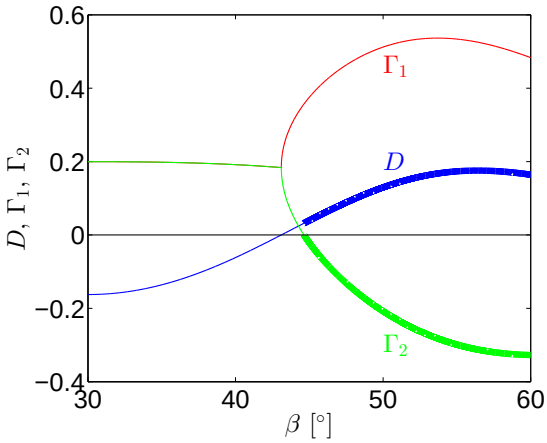


2.7. ábra. Első konkáv eset, $\alpha = 60°$. Szemléltető ábra az S_2^{felt} feltételesen stabil tartományhoz tartozó konfigurációkról. A három pozitív tömegű testet fekete pont jelöli, a nulla tömegűt piros. A B-t jelképező három pont közül a két szélső S_2^{felt} határpontjait adja meg, ezek közötti β-kra az egyensúlyi megoldás feltételesen stabil.

A 2.7. szemléltető ábrát segítségül hívva, azt mondhatjuk, hogy az A, E, E' tömegpontok által kijelölt és rögzített szabályos háromszöget tartalmazó első konkáv esetben a B test $(-b, 0)$ egyensúlyi pontjához tartozó megoldás instabil. Azonban alkalmas kezdeti feltételekkel indítva B-t, az egy több mint 15° fok széles tartományban (feltételesen) stabil mozgást végezhet az egyensúlyi helyzet körül, infinitezimális amplitúdóval.

A normált tömegeket is figyelembe véve, $\beta = 0°$-nál (B a szabályos háromszög E, E' közötti oldalfelező pontjában) az A test is nulla tömegű, az össztömeg tehát E, E'-ben koncentrálódik (1/2, 1/2). Ez a konfiguráció egy kettőscsillag-rendszerrel hozható kapcsolatba, ahol A és B elhanyagolható tömegű planetáris testek.

β-t növelve, vagyis B-t a szimmetriatengely mentén A irányába mozgatva, μ_1 egyre nagyobb, μ pedig egyre kisebb lesz, és hamar azonos nagyságrendbe jutnak. Ekkor tehát három nagy- és egy nulla tömegű test alkotja a konfigurációt. Az alkalmazást illetően a következő rendszerek juthatnak eszünkbe: hármascsillag + planetáris test, vagy óriásbolygók + aszteroida.



2.8. ábra. Második konkáv eset, $\alpha = 60°$. A D és $\Gamma_{1,2}$ mennyiségek a β szögváltozó függvényében. (A $D < 0$ tartományban $\Gamma_{1,2}$ valósrészét látjuk.) A megvastagított görbeszakaszok az $S_3^{\text{felt}} = \{44.°6367 < \beta < 60°\}$ feltételesen stabil tartományt emelik ki.

2.7. Második konkáv eset, $\alpha = 60°$

Az előző fejezetbelivel való rokon volta miatt érdemes a stabilitásvizsgálatot a második konkáv esettel folytatni $\alpha = 60°$ esetében. Ismét a B test kerül az A, E, E' által kifeszített egyenlőoldalú háromszög belsejébe, azzal a különbséggel, hogy most a tömegközépponttól (vagyis a koordináta-rendszer origójától) jobbra helyezendő el (1.2. ábra, jobb oldal).

A kérdéses U_{xx}, U_{yy} és ω^2 végső alakja:

$$U_{xx} = \omega^2 - \frac{2\mu_1}{\left(\operatorname{tg}\beta - \sqrt{3}\right)^3} - (1-\mu_1)\cos^3\beta\left(1 - 3\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\beta\right), \tag{2.46}$$

$$U_{yy} = \omega^2 + \frac{\mu_1}{\left(\operatorname{tg}\beta - \sqrt{3}\right)^3} - (1-\mu_1)\cos^3\beta\left(1 - 3\cos^2\beta\right), \tag{2.47}$$

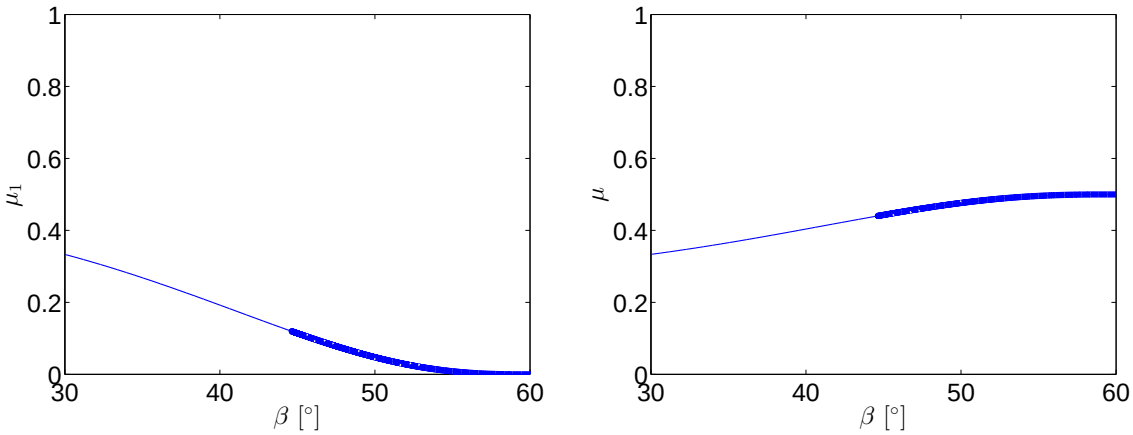
$$\omega^2 = \frac{1}{8}, \tag{2.48}$$

ahol (az első konkáv esettel megegyezően)

$$\mu_1 = \frac{\left(\cos^3\beta - \frac{1}{8}\right)\operatorname{tg}\beta}{\frac{1}{\left(\sqrt{3}-\operatorname{tg}\beta\right)^2} + \cos^3\beta\operatorname{tg}\beta - \frac{\sqrt{3}}{8}}. \tag{2.49}$$

Az

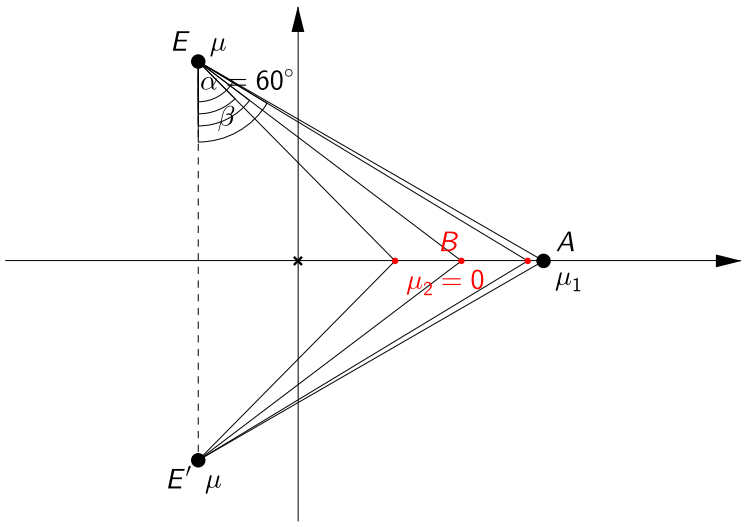
$$S_3 := \{\beta \in [30°, 60°) : D(\beta) > 0, \Gamma_{1,2}(\beta) \leq 0\} = \emptyset, \tag{2.50}$$



2.9. ábra. Második konkáv eset, $\alpha = 60°$. Az A (bal oldal) és E, E' (jobb oldal) testek dimenziótlan tömege β függvényében. A megvastagított szakaszok az S_3^{felt} feltételesen stabil tartományt emelik ki, ahol $\mu_1 \in (0.1196, 0)$, $\mu \in (0.4402, 1)$.

akárcsak az első konkáv esetben. Van remény azonban feltételes stabilitásra, ugyanis a 2.8. ábra szerint a stabilitást ismét a Γ_1 gyök rontja el γ_1-en keresztül. A kezdeti feltételek alkalmas megválasztásával elérhető, hogy $A_1 = 0$ legyen. Ekkor az instabilitást eredményező, γ_1-hez tartozó partikuláris megoldás eltűnik. Ha $A_2 = 0$ is teljesül, úgy periodikus megoldást kapunk. A feltételesen stabil tartomány most - mintegy az első konkáv eset origóra vett tükörképe - az $S_3^{\text{felt}} := \{44.°6367 < \beta < 60°\}$ halmaz (lásd: 2.8. ábra megvastagított görbékkel kiemelt része). A tömegek itt $\mu_1 \in (0.1196, 0)$ és $\mu \in (0.4402, 1)$ (2.9. ábra).

Az összegzést kövessük a 2.10. ábrán: $\alpha = 60°$ esetén a második konkáv konfigurációban részt vevő B test mozgása a $(b, 0)$ egyensúlyi pontjából kitérítve instabil. Megfelelő kezdeti feltételekkel azonban egy több mint 15° széles tartományban kapunk feltételesen stabil megoldást. Ennek a tartománynak a bal oldali végpontjában ($\beta = 44.°6367$) az A test tömege nagyjából negyede E, E' tömegének. Ez az arány nem elegendően nagy ahhoz, hogy A-t planetáris testnek tekintsük, a konfigurációt ezért inkább egy kettő nagyobb és egy kisebb tömegű csillagot, valamint egy közel nulla tömegű bolygót tartalmazó rendszernek képzelhetjük. β növelésével B egyre közelebb kerül A-hoz, közben utóbbi tömege nullához tart, E, E'-é pedig 1/2, 1/2-hez. Itt már két planetáris és két sztelláris testről beszélhetünk.



2.10. ábra. Második konkáv eset, $\alpha = 60°$. Szemléltető ábra az S_3^{felt} feltételesen stabil tartományhoz tartozó konfigurációkról. A három pozitív tömegű testet fekete pont jelöli, a nulla tömegűt piros. A B-t jelképező három pont közül a két szélső S_3^{felt} határpontjait adja meg (a jobb oldali csak formális), ezek közötti β-kra az egyensúlyi megoldás feltételesen stabil.

2.8. Első konkáv eset, $\beta = 0°$

A hátralévő két esetben az eddigiekkel ellentétben nem α-t, hanem β-t rögzítjük, így A lesz a vizsgálandó, nulla tömegű test, a stabilitásvizsgálat kimenetele pedig α-tól függ.

Kezdjük az első konkáv esettel, és tegyük fel, hogy $\beta = 0°$. A konfiguráció rögzített alrendszere így az E, B, E' által meghatározott egyenes, vagyis az Euler-megoldás. A tömegközéppont - és így a koordináta-rendszer origója is - épp B-vel esik egybe. A az $\alpha \in [45°, 60°]$ tartományban mozoghat.

U_{xx}-re, U_{yy}-ra és ω^2-re a következőket kapjuk:

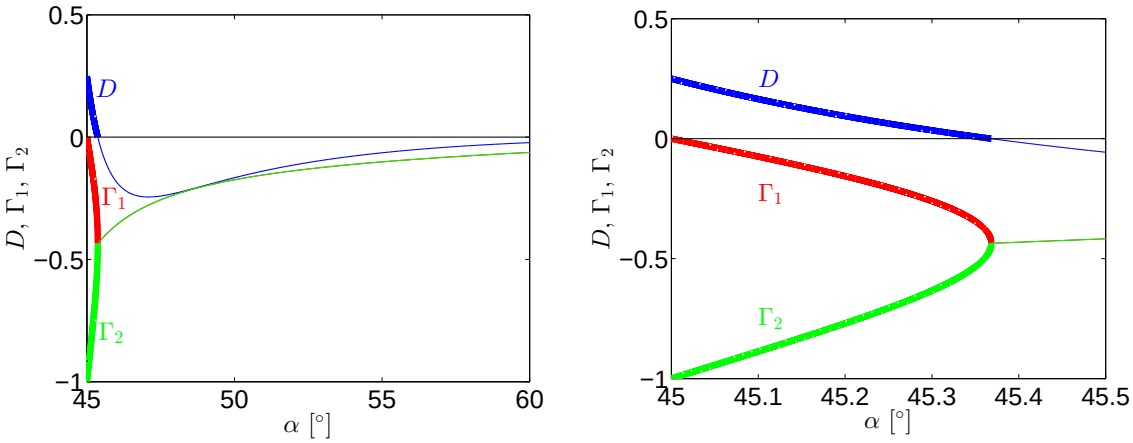
$$U_{xx} = \omega^2 + \frac{2\mu_2}{\operatorname{tg}^3\alpha} - (1-\mu_2)\cos^3\alpha\left(1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha\right), \tag{2.51}$$

$$U_{yy} = \omega^2 - \frac{\mu_2}{\operatorname{tg}^3\alpha} - (1-\mu_2)\cos^3\alpha\left(1 - 3\cos^2\alpha\right), \tag{2.52}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}\mu_2, \tag{2.53}$$

ahol

$$\mu_2 = \frac{\frac{1}{8} - \cos^3\alpha}{\operatorname{tg}^{-3}\alpha - \frac{7}{8} - \cos^3\alpha}. \tag{2.54}$$



2.11. ábra. Első konkáv eset, $\beta = 0°$. A D és $\Gamma_{1,2}$ mennyiségek az α szögváltozó függvényében. (A $D < 0$ tartományban $\Gamma_{1,2}$ valósrészét látjuk.) A megvastagított görbeszakaszok az $S_4 = \{45° \leq \alpha < 45.°3684\}$ stabil tartományt emelik ki. Jobb oldal: a bal oldali ábra kinagyítása az S_4-et tartalmazó $45° \leq \beta \leq 45.°5$ tartományban.

A numerikus számítások azt mutatják, hogy az

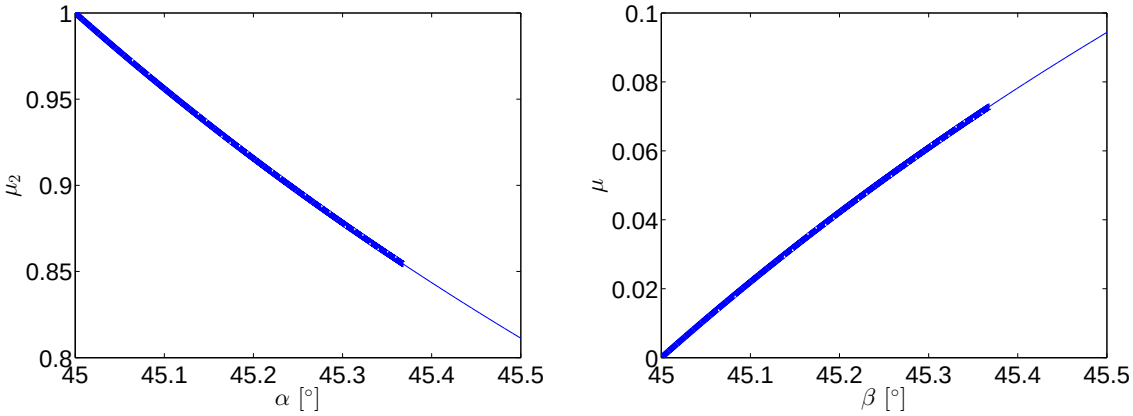
$$S_4 := \{\alpha \in [45°, 60°] : D(\alpha) > 0, \Gamma_{1,2}(\alpha) \leq 0\} \tag{2.55}$$

stabilitási tartomány most nem üreshalmaz: $45° \leq \alpha < 45.°3684$ esetén az $(a, 0)$ egyensúlyi pont stabil (2.11. ábra, megvastagított görbék). A vonatkozó $\mu_2 \in [1, 0.8542)$ és $\mu \in [0, 0.0729)$ tömegeket a 2.12. ábra mutatja.

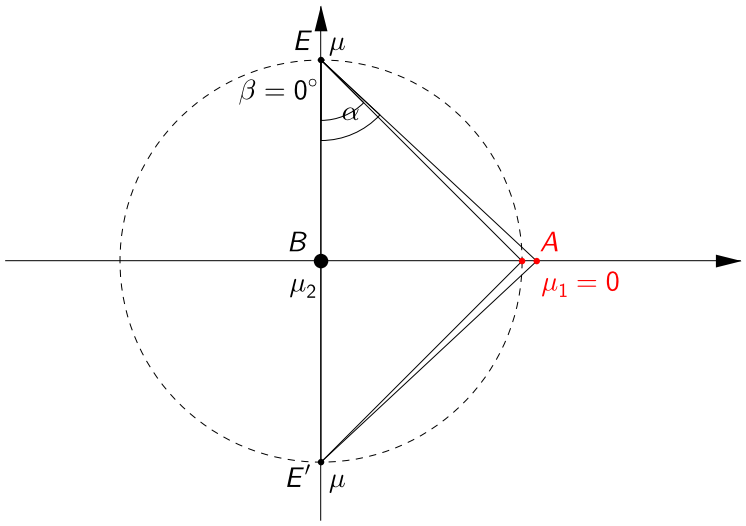
Az eredmények értelmezését a 2.13. ábra segíti. A stabil tartomány $\alpha = 45°$ végpontja a konkáv koorbitális kofigurációra utal: a rendszer középpontjában B ül egységtömeggel, körülötte egy $\overline{BE}$ sugarú kör mentén találjuk a másik három, nulla tömegű testet (E-t és E'-t a kör két átellenes pontjában, közöttük a félkör mentén félúton A-t). B ebben az esetben sztelláris, a többi test planetáris tömegű.

α-t maximum nagyjából 3 tizedfoknyit növelve, a továbbra is a körön elhelyezkedő E és E' tömeget nyer a centrumbeli B rovására. A határesetben ($\alpha = 45.°3684$) a B jelű, naptömegűnek tekintett csillag körüli E és E' körülbelül 0.085 naptömegű barnatörpékké híznak, a tömeg nélküli A továbbra is kisméretű planetáris test (kőzetbolygó, törpebolygó vagy aszteroida).

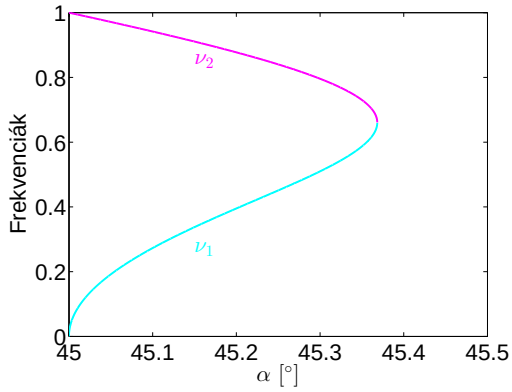
S_4-en belül $\gamma_{1,2,3,4}$ tisztán képzetes, így az egyensúlyi helyzetéből kitérített A $\nu_1 < \nu_2$ frekvenciákkal jellemzett, infinitezimális amplitúdójú kváziperiodikus mozgást végez $(a, 0)$ körül, ahol $\nu_{1,2}$-t (2.38) definiálja és a 2.14. ábra mutatja.



2.12. ábra. Első konkáv eset, $\beta = 0°$. A B (bal oldal) és E, E' (jobb oldal) testek dimenziótlan tömege α függvényében. A megvastagított szakaszok az S_4 stabil tartományt emelik ki, ahol $\mu_2 \in [1, 0.8542)$, $\mu \in [0, 0.0729)$.



2.13. ábra. Első konkáv eset, $\beta = 0°$. Szemléltető ábra az S_4 stabil tartományhoz tartozó konfigurációkról. A három pozitív tömegű testet fekete pont jelöli, a nulla tömegűt piros. A B testhez tartozó nagyobb méretű pont B-nek az E, E'-höz viszonyított nagyobb tömegére utal. Az A-t jelképező két pont S_4 határpontjait adja meg, ezek közötti α-kra az egyensúlyi megoldás stabil.



2.14. ábra. Első konkáv eset, $\beta = 0°$. Az elhanyagolható tömegű, egyensúlyi pontjából kimozdított A test kváziperiodikus mozgását jellemző $\nu_{1,2}$ frekvenciák α függvényében.

2.9. Második konkáv eset, $\beta = 60°$

Végül tekintsük a második konkáv esetet a $\beta = 60°$ feltétel mellet! A konfiguráció tömeggel rendelkező alrendszere a már sokszor látott Lagrange-féle szabályos háromszög, azonban ezt most a B, E, E' testek alkotják. A háromszögön kívül, attól a B-t tartalmazó szimmetriatengely mentén jobbra találjuk az elhanyagolható tömegű A testet, $60° < \alpha \leq 75°$ közé szorítva. Egyensúlyi pontja $(a, 0)$, ennek stabilitása α-tól függ.

Írjuk fel U_{xx}, U_{yy}, ω^2 végső alakját!

$$U_{xx} = \omega^2 + \frac{2\mu_2}{\left(\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{3}\right)^3} - (1-\mu_2)\cos^3\alpha\left(1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha\right), \tag{2.56}$$

$$U_{yy} = \omega^2 - \frac{\mu_2}{\left(\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{3}\right)^3} - (1-\mu_2)\cos^3\alpha\left(1 - 3\cos^2\alpha\right), \tag{2.57}$$

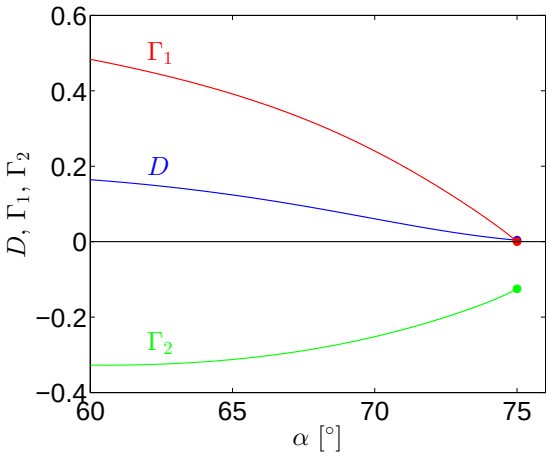
$$\omega^2 = \frac{1}{8}, \tag{2.58}$$

ahol

$$\mu_2 = \frac{\left(\frac{1}{8} - \cos^3\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha}{\frac{1}{\left(\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{3}\right)^2} - \cos^3\alpha\operatorname{tg}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{8}}. \tag{2.59}$$

Ebben az esetben

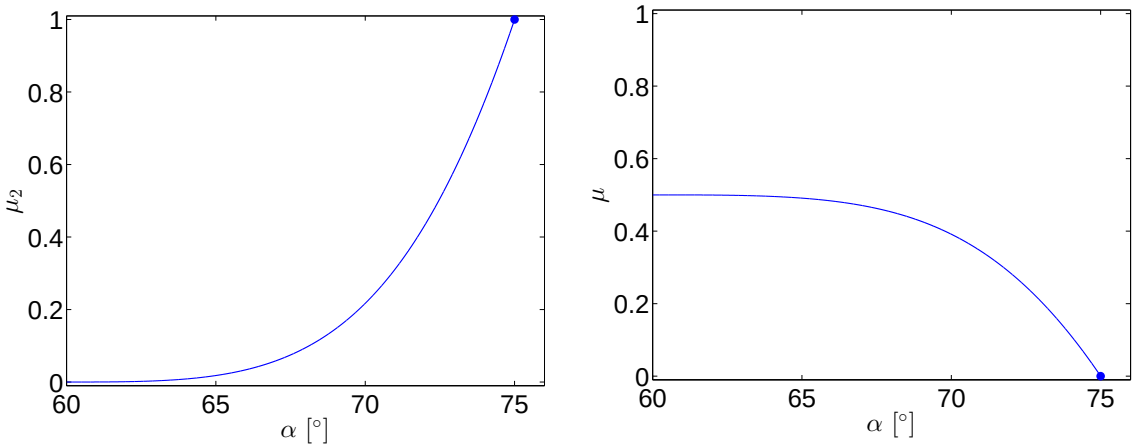
$$S_5 := \{\alpha \in (60°, 75°] : D(\alpha) > 0, \Gamma_{1,2}(\alpha) \leq 0\} = \{75°\}, \tag{2.60}$$



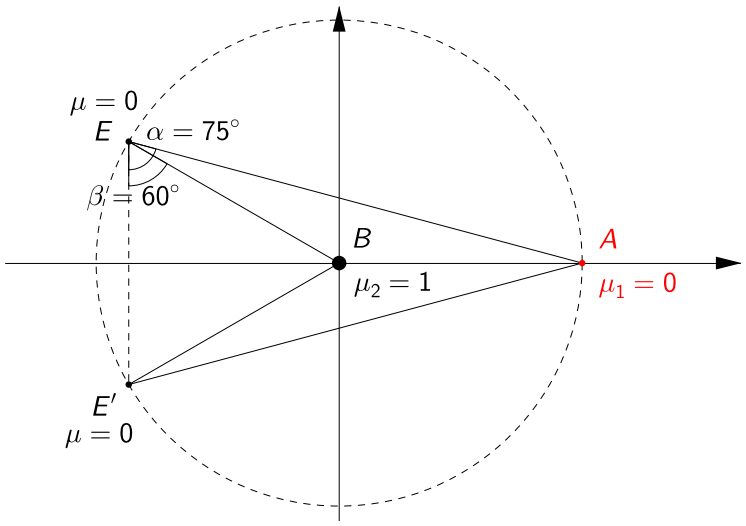
2.15. ábra. Második konkáv eset, $\beta = 60°$. A D és $\Gamma_{1,2}$ mennyiségek az α szögváltozó függvényében. Az $\alpha = 75°$-nál lévő színes pontok az egyetlen pontot tartalmazó S_5 stabil „halmazra" utalnak. (Feltételes stabilitás bármely $\alpha \in (60°, 75°]$-ra elérhető.)

vagyis a teljes $(60°, 75°]$ intervallumnak egyedül a jobb oldali végpontja, $\alpha = 75°$ biztosítja az $(a, 0)$ egyensúlyi megoldás stabil viselkedését (2.15. ábra). Itt $\mu_2 = 1$, $\mu = 0$ (2.16. ábra), a konfiguráció ismét konkáv koorbitális: a csillagtömegű B körüli körpálya L_4 és L_5 pontjaiban találjuk a bolygó- vagy kisbolygó-tömegű E, E'-t, az L_3 Lagrange-pontban pedig a hasonlóan kisméretű A-t (2.17. ábra). Utóbbinak az egyensúlyi pont körüli mozgása periodikus, azonban most csak egyféle frekvencia van jelen: ez a vártnak megfelelően $\nu \approx 0.3536$, vagyis a rendszer forgási szögsebessége.

A stabil tartomány tehát egyetlen pont, azonban vegyük észre, hogy az általános megoldásból a kezdőfeltételek megfelelő megválasztásával a γ_1-et tartalmazó tagot eliminálva, a $(60°, 75°]$ intervallum egészében elérhető feltételes stabilitás. Ha a γ_2-t tartalmazó tag sem jelenik meg, a megoldás periodikus lesz.



2.16. ábra. Második konkáv eset, $\beta = 60°$. A B (bal oldal) és E, E' (jobb oldal) testek dimenziótlan tömege α függvényében. A görbék $\mu_2 = 1$ és $\mu = 0$ végpontja $\alpha = 75°$-nál az S_5 stabil pontra utal.



2.17. ábra. Második konkáv eset, $\beta = 60°$. Szemléltető ábra az egyetlen, $\alpha = 75°$-hoz tartozó stabil konfigurációról. A három elsődleges testet fekete pont jelöli, az elhanyagolható tömegűt piros. Jelen esetben azonban mind A, mind E és E' nulla tömegű.

3. fejezet

A korlátozott esetek stabilitásvizsgálatának általánosítása

A korlátozott esetek stabilitásvizsgálata izgalmas eredményeket adott, azonban a teljes vizsgálatnak csupán egy szelete. Érdemes elgondolkozni tehát a 2. fejezetbeli számítások általánosításán.

A korlátozott esetekben az 1.3. és 1.4. ábrák háromszög alakú színezett tartományainak egy-egy kitüntetett egyenesére koncentrálva kerestük a (2.15) feltételeket kielégítő szögpárokat. Jelen fejezet alapgondolata, hogy numerikusan a háromszögek tetszőlegesen nagy számú egyenese bejárható, és ilyenformán a tengelyszimmetrikus centrális négytest-probléma általánosabb stabilitásvizsgálata is elvégezhető.

Megjegyzés. A korlátozott esetekben kihasználtuk, hogy az egyensúlyi helyzetéből kitérített test nem perturbálja a másik három tömegpont mozgását, hiszen tömege nulla. A továbbiakban ez szigorúan ugyan nem áll fenn (a vizsgált test tetszőleges tömeggel rendelkezhet), azonban mivel a kitérítés infinitezimális és a stabilitásvizsgálat továbbra is elsőrendű, ezért körpályákat feltételezve jó közelítéssel rögzíthetünk ismét egy forgó koordináta-rendszert a másik három testhez.

A megjegyzés értelmében a mozgásegyenletek továbbra is a (2.3) alakot öltik, a stabilitás (2.15) feltételei is érvényben maradnak, illetve az $U(x, y)$ potenciálfüggvény is megegyező a 2. fejezetben látottakkal, mindössze azt kell szem előtt tartani, hogy most nem használhatjuk ki a korlátozott esetek adta egyszerűsítéseket, mint például az $\alpha = 60°$, $\mu_2 = 0$ feltételt.

A numerikus vizsgálat során a konvex, az első és második konkáv esetekben is

rögzíthetjük α-t és β-t is[1], ezért összesen 6 esettel kell foglalkozni. A két konkáv esetet összevonva tárgyalom.

3.1. Konvex eset, α rögzített

Tekintsük a konvex konfigurációt, és vizsgáljuk a B test lineáris stabilitását, vagyis rögzítsük az α szögváltozót! Az előzőek alapján ekkor érvényes a (2.18) - (2.19) mozgásegyenlet, illetve U_{xx}-nek, U_{yy}-nak és ω^2-nek a (2.29), (2.30) és (2.31) alakja. k-t ismét vehetjük 1-nek, azonban μ_1 és μ_2 helyére az (1.3) összefüggést kell helyettesíteni, μ pedig jelen esetben $1/2(1-\mu_1-\mu_2)$-vel egyezik meg. A stabilitás így β függvénye, α paraméterként kezelendő.

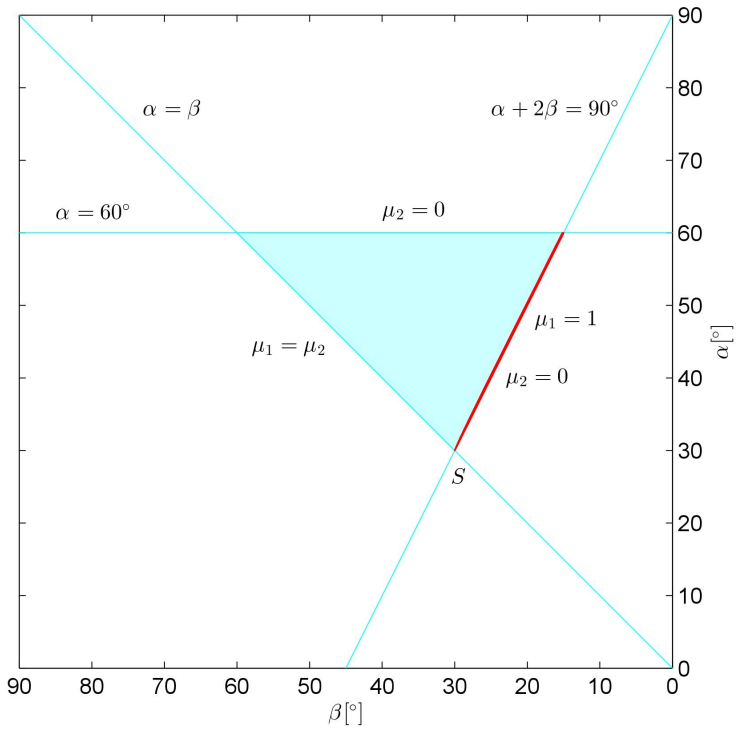
Érdi és Czirják (2016) szerint a konvex konfigurációk egyetlen $\kappa \in [0°, 15°]$ paraméterrel paraméterezhetőek a $\beta-\alpha$ szögtérben a következőképpen: az $\alpha := 30°+2\kappa$ egyenesek mentén a kezdőpont mindig $\beta = 30°-\kappa$, a végpont $\beta = 30°+2\kappa$. (Vegyük észre, hogy $\kappa = 15°$ esetén visszakapjuk a korlátozott esetet.)

A fenti paraméterezéssel az 1.3. ábra színezett területét egy ezred pontossággal térképeztem fel, az eredményt a 3.1. ábra mutatja. Itt piros szín emeli ki a stabil tartományt megadó α, β párokat. Ez a tartomány minden α-ra egy körülbelül tized fok hosszúságú intervallum β-ban, akárcsak a korlátozott esetben. A stabil szögpárokat az $\alpha + 2\beta = 90°$ egyenes közelében találjuk, ahol $\mu_1 = 1$. Azt mondhatjuk tehát, hogy a konvex esetben a B testet egyensúlyi helyzetéből kitérítve a konfiguráció akkor és csak akkor marad stabil, ha az közelítőleg egycentrum-probléma, azaz B, E és E' is kistömegű (planetáris testek a csillagtömegű A körül).

Megjegyzés. A további esetekben hasonló módon számíthatók vagy használhatók fel a 2. fejezetben már látott kifejezések U_{xx}-re és U_{yy}-ra (ω^2 végig megegyezik (2.31)-gyel, $k = 1$ mellett), ezért a számítások részletezésétől eltekintek.

Az 1.3. és 1.4. ábrák centrális konfigurációkat jelentő, színezett tartományainak paraméterezése az előzővel szintén analóg módon valósítható meg egyetlen 0° és 15° közötti paraméterrel mind az öt következő esetben, így a további alfejezetekben csak az eredményeket közlöm.

[1] Az α szögváltozó rögzítése a B test stabilitásának vizsgálatát jelenti, β rögzítésekor pedig az A jelű a kitérítétett test. Ilyenformán természetesen az E, E' infinitezimális kitérítése is lehetséges, ekkor azonban sem α, sem β nem rögzíthető, a vizsgálat bonyolultabb. Ezzel az esettel dolgozatomban nem foglalkozom.



3.1. ábra. Az általános stabilitásvizsgálat eredménye a konvex esetben α rögzítésekor. A piros ponthalmaz a stabil megoldásokat jelenti.

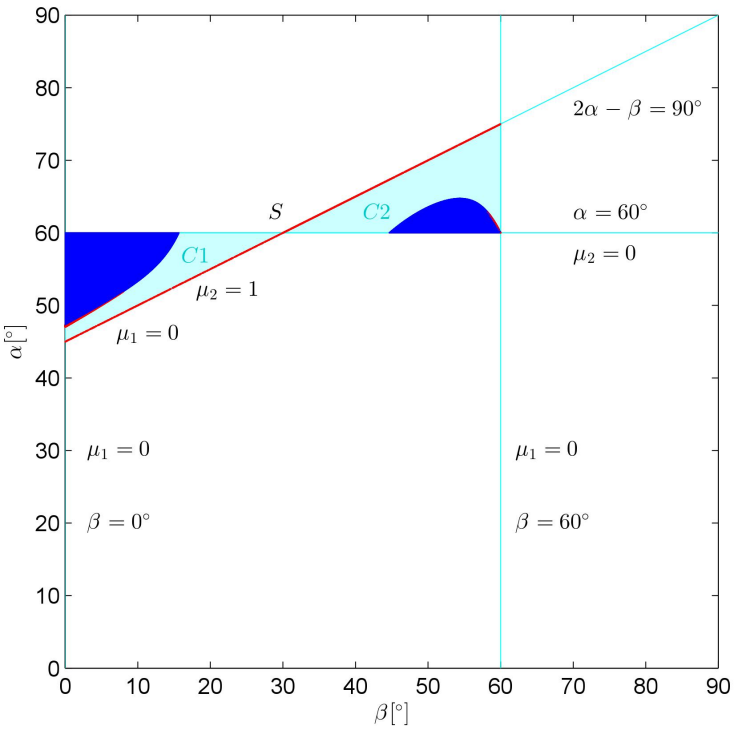
3.2. Konvex eset, β rögzített

A $\mu_2 \leq \mu_1$ feltétel miatt (lásd: 1.2. fejezet) B helyett az A test egyensúlyi pozícióját perturbálva, az előzőtől különböző eredményt várunk. A numerikus számítások azt mutatják, hogy stabil megoldás szigorúan csak az $\alpha + 2\beta = 90°$ egyenes pontjaiban valósul meg, vagyis tényleges egycentrum-probléma esetén.

3.3. Konkáv esetek, α rögzített

Térjünk át a konkáv konfigurációkra, és α rögzítésével tekintsük először a B testre vonatkozó stabilitási problémát.

A 3.2. ábrát szemlélve egyrészt világos, hogy a $2\alpha - \beta = 90°$ egyenes egycentrum-problémákat reprezentáló pontjaiban teljesülnek a stablitás feltételei. Ezen kívül két keskeny tartomány látható még pirossal színezve a konkáv esetekben, melyek a kék színű feltételesen stabil tartományokhoz simulnak egy-egy rövid szakaszon. Kiterjedésük körülbelül 8 fokszor tized fok az első és 3 fokszor tizedfok a második konkáv



3.2. ábra. Az általános stabilitásvizsgálat eredménye a konkáv esetekben α rögzítésekor. A piros ponthalmaz a stabil, a kék színű a feltételesen stabil megoldásokat jelenti.

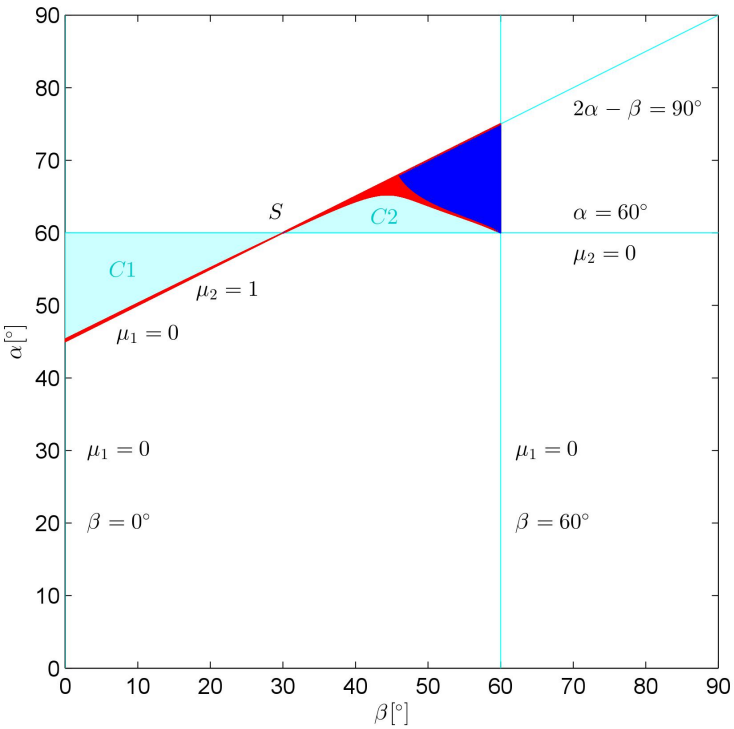
esetben.

Az alkalmazások szempontjából most a feltételesen stabil régiók izgalmasak igazán, hiszen az ábra $C1$ és $C2$ jelű háromszögeinek jelentős részét (majdnem felét) fedik. Azt mondhatjuk tehát, hogy amennyiben az B test a kis perturbációt elszenvedő tömegpont, úgy - kedvező kezdeti feltételek teljesülése esetén - számos különböző alakú és tömeg-összetételű stabil konkáv konfiguráció létezik.

3.4. Konkáv esetek, β rögzített

Végül mozdítsuk ki egyensúlyi helyzetéből egy tetszőleges tengelyszimmetrikus centrális konkáv konfiguráció A tömegpontját, azaz tegyük fel, hogy β rögzített, és vizsgáljuk az előzőekhez hasonlóan a stabilitás feltételeinek teljesülését!

A vártnak megfelelően stabil megoldást (lásd: 3.3. ábra, piros színezések) kapunk egyrészt a $2\alpha - \beta = 90°$ egyenes pontjaiban. Az első konkáv esetben egy ezekhez közeli keskeny (tizedfok szélességű) tartomány szintén stabilitást jelez. Iz-



3.3. ábra. Az általános stabilitásvizsgálat eredménye a konkáv esetekben β rögzítésekor. A piros ponthalmaz a stabil, a kék színű a feltételesen stabil megoldásokat jelenti.

galmas eredményeket ad a második konkáv eset, ugyanis itt az előbbi egyeneshez és a kékkel színezett feltételesen stabil tartományhoz simuló stabil ponthalmaz az első konkáv esetbelinél egy nagyságrenddel nagyobb területet fed. A vonatkozó α, β koordinátákkal megadott nagyszámú konkáv konfiguráció feltétel nélkül stabil!

Megjegyzés. A 3.1 - 3.4. fejezetek szintéziseként érdemes kiemelni, hogy egyrészt - nem meglepő módon - az egycentrum-problémákat jelentő egyenesek pontjai mind a négy (vagy hat) előbbi esetben teljesítik a stabilitás feltételeit, függetlenül az egycentrum-problémában résztvevő egységtömegű test és a perturbált tömegpont viszonyától. Az egyenesektől kissé eltávolodva azonban már nem mindegy, hogy A vagy B a nagytömegű test és közülük melyik az egyensúlyi pozíciójából kimozdított. Mind a konvex, mind a konkáv esetekben azok a közelítőleg egycentrum-problémát mintázó konfigurációk eredményeztek stabilitást, melyekben a perturbált test nem a nagytömegű résztvevője a konfigurációnak: a konvex esetben az egycentrum-probléma A-ra vonatkozik, így ott a közeli α, β pontok B perturbációja esetén jelentenek stabilitást; a konkáv esetekben pedig épp ellenkezőleg, a perturbált

tömegpont csak az A jelű lehet, minthogy az egycentrum-probléma B-vel teljesül.

Mindez az elvárásoknak sem mond ellent, hiszen egy kis test egyensúlyi pozíciójából való kimozdítása nyilvánvalóan kevéssé zavarja meg a konfiguráció egészét és hosszútávú viselkedését, mint azé a testé, melyben közelítőleg a rendszer össztömege koncentrálódik.

4. fejezet

Kitekintés

Kitekintésképpen próbáljunk meg a 2. és 3. fejezetbeli stabil vagy feltételesen stabil megoldásoknak csillagászati vonatkozást adni valós példákon keresztül.

A - főként a 2. fejezetben - látottak fényében kétféle égitest-rendszer rögtön eszünkbe juthat: két bolygós kettőscsillagok és Trójai égitesteket tartalmazó konfigurációk. Előbbi nagyszerűen összekapcsolható Veras (2016) eredményeivel, utóbbihoz pedig az exo-Trójaiak irodalmából érdemes szemezgetni.

4.1. Két bolygóval rendelkező kettőscsillag-rendszerek

Veras (2016) a tengelyszimmetrikus centrális négytest-problémát gyakorlati vonatkozásában közelítette meg. A négy test szerepébe két bolygót és két csillagot helyezett, majd a bolygó-csillag és csillag-csillag tömegarányok realisztikus megkötésével az Érdi és Czirják (2016)-féle α és β szögek lehetséges tartományának leszűkítését célozta. Feltételezései szerint a sztelláris tömegek legalább egy nagyságrenddel meghaladják a planetáris tömegeket, valamint a két csillag tömegének aránya 10-nél nem nagyobb. Eredményei szerint a szimmetriatengellyel rendelkező két bolygós kettőscsillag-rendszerek α-nak és β-nak is mindössze néhány, de inkább néhány tized fok széles tartományában létezhetnek csak, pusztán az égitestek tömegarányait figyelembe véve. Izgalmas kérdés, hogy vajon az előző fejezetekben látott stabil, illetve feltételesen stabil régiók mutatnak-e átfedést Veras (2016) tartományaival.

A 2. fejezet eredményeinek diszkutálásakor a lehetséges alkalmazásokra, szóba jövő égitest-típusokra is volt alkalmam kitérni, minthogy a stabilitást eredményező szögpárokhoz a tömegeket is kiszámítottam. A megoldások tehát közvetlenül összevethetők Veras (2016) eredményeivel. Érdemes ezért a korlátozott esetekkel külön is foglalkozni, mielőtt a 3. fejezet általánosabb vizsgálatának implikációival foglalkozom.

4.1.1. Két bolygós kettőscsillagok a korlátozott esetekben

A jobb áttekinthetőség kedvéért célszerű vázlatosan összefoglalni a korlátozott esetek stabil (/feltételesen stabil) megoldásait az „eset - stabilitási tartomány - dimenziótlan tömeg" szerkezetben:

$$\begin{aligned}&\text{konvex eset}, \alpha = 60^\circ: \\ &\quad S_1 = \{15^\circ \leq \beta < 15\overset{\circ}{.}1631\};\ \mu_1 \in [1, 0.9946),\ \mu \in [0, 0.0027),\end{aligned} \tag{i}$$

$$\begin{aligned}&\text{első konkáv eset}, \alpha = 60^\circ: \\ &\quad S_2^{\text{felt}} = \{0^\circ \leq \beta < 15\overset{\circ}{.}6725\};\ \mu_1 \in [0, 0.4234),\ \mu \in [0.5, 0.2883),\end{aligned} \tag{ii}$$

$$\begin{aligned}&\text{második konkáv eset}, \alpha = 60^\circ: \\ &\quad S_3^{\text{felt}} = \{44\overset{\circ}{.}6367 < \beta < 60^\circ\};\ \mu_1 \in (0.1196, 0),\ \mu \in (0.4402, 1),\end{aligned} \tag{iii}$$

$$\begin{aligned}&\text{első konkáv eset}, \beta = 0^\circ: \\ &\quad S_4 = \{45^\circ \leq \alpha < 45\overset{\circ}{.}3684\};\ \mu_2 \in [1, 0.8542),\ \mu \in [0, 0.0729),\end{aligned} \tag{iv}$$

$$\begin{aligned}&\text{második konkáv eset}, \beta = 60^\circ: \\ &\quad S_5 = \{\alpha = 75^\circ\};\ \mu_2 = 1,\ \mu = 0 \\ &\quad (S_5^{\text{felt}} = \{60^\circ < \alpha \leq 75^\circ\};\ \mu_2 \in (0, 1],\ \mu \in (1, 0]).\end{aligned} \tag{v}$$

(i) eset: a szóba jöhető égitest-összetétel itt: 1 sztelláris objektum, 2 körülbelül Jupiter-tömegű óriásbolygó és 1 kisméretű objektum. Veras (2016) munkájában ilyen kompozíció nem szerepel.

(ii) eset: a feltételesen stabil, nagyjából 0° és 15° közötti tartomány $\beta = 0°$-hoz közeli szélén 2 egyenlő tömegű csillag és 2 nulla tömegű planetáris test vesz részt a konfigurációban. Az összetétel Veras (2016) IV. esetével rokon. β-t akár 15°-ig is növelhetnénk a stabilitásra vonatkozó eredmények szerint, ekkor azonban az egyik

nulla tömegű égitest sztelláris méretűre hízna. A 3 sztelláris objektumot tartalmazó rendszerek Veras (2016) tárgyalásán kívülre esnek. A szerző szerint a tömegarányok mindössze 0° és $\sim 0\overset{\circ}{.}6$ közötti β-k esetén adnak realisztikus tömegarányokkal rendelkező két bolygós kettőscsillag-rendszert.

(iii) eset: a feltételesen stabil tartomány közelítőleg ismét 15° széles. Ennek $\beta = 45°$-hoz közeli határán a két egyenlő tömegű csillagon kívül egy harmadik masszív objektum is jelen van, negyedakkora tömeggel, mint a másik kettőé. Az esetet Veras (2016) nem vizsgálta. β-t azonban $50° - 60°$ közelébe növelve (2 sztelláris és 2 planetáris tömeg), Veras (2016) VI. esetét kapjuk.

(iv) eset: a néhány tized fok széles stabil tartományban az egyenlő tömegű pár 0.085 naptömegű, a másik két test közül az egyik naptömegű, a másik elhanyagolhatóan kicsi. A tömegarányok Veras (2016) feltevéseivel nem férnek össze.

(v) eset: az egyetlen pontot tartalmazó stabil tartomány helyett foglalkozzunk a feltételesen stabillal: β-t 60°-nál rögzítjük, α 60° és 75° között vehet fel értékeket. Ismét Veras (2016) VI. esetével találkozunk, melyben azonban a szerző $\alpha \sim 66°$-nál húzza meg a határt mint a megkötéseit kielégítő tartomány széle.

A bevezető kérdésre tehát pozitív válasz adható: három olyan esetet is találtunk, melyben nem csak a stabilitás, hanem a realisztikus tömegarányok is adottak, és így exo-rendszerek körében létezhetnek. (Fontos azonban észrevennünk, hogy mindhárom esetben csupán a feltételes stabilitás garantált...)

4.1.2. Két bolygós kettőscsillagok és az általános stabilitásvizsgálat eredményei

A korlátozott problémák részletezése után vessük össze az - egyébként a korlátozottakat is magában foglaló - általánosabb stabilitásvizsgálat megoldásait Veras (2016) eredményeivel! A szerző a konvex és konkáv esetekben is egzakt módon megnevezi a saját feltételeinek eleget tevő régiók határait α-ban és β-ban, így nincs más dolgunk, mint ezeket összehasonlítani a 3.1., 3.2. és 3.3. ábrákkal.

Kezdve a konvex esettel, Veras (2016) szerint egyrészt az $\alpha \in [30°, 31\overset{\circ}{.}5]$, $\beta \in [29°, 31°]$ tartomány, másrészt az $\alpha \in [59°, 60°]$, $\beta \in [59°, 60°]$ tartomány szögpárjai reprezentálnak valószerű tömegekkel rendelkező 2 planetáris és 2 sztelláris testből álló konfigurációkat. A 3.1. ábrát szemlélve látjuk, hogy az utóbbi Veras-féle tartományban a stabilitás nem érhető el, előbbi azonban megfelelő célpont az alkalmazá-

sokhoz.

Az első konkáv esetben az $\alpha \in [57°, 60°]$, $\beta \in [0°, 0.°6]$ Veras-féle ponthalmazt kell egybevetni a 3.2. és 3.3. ábrák $C1$ jelű háromszögeivel. A 3.2. ábrán ez kékkel színezett terület, vagyis amennyiben B a perturbációt elszenvedő test, úgy Veras (2016) megoldásai feltételesen stabilak. Az A test egyensúlyi helyzetéből való kimozdítása esetén ez már nem mondható el (lásd: 3.3. ábra).

Végül a második konkáv esetben a vizsgálandó halmaz a következő: $\alpha \in [60°, 66°]$, $\beta \in [50°, 60°]$. Most a 3.2. és 3.3. ábrák $C2$ jelölésű háromszögeire kell szorítkoznunk. Ismét azt találjuk, hogy feltételes (sőt, egy keskeny tartományban feltétel nélküli) stabilitás garantálható, de csak abban az esetben, amikor B-t térítjük ki egyensúlyi helyzetéből (3.2. ábra).

Amennyiben tehát alkalmazásként két bolygóval rendelkező kettőscsillag-rendszerekre gondolunk, a fentiek reményre adnak okot, hiszen feltételes stabilitás, sőt bizonyos konfigurációkra stabilitás is elérhető.

Természetesen más égitest-rendszerek is eszünkbe juthatnak valós példák után kutatva. A következő fejezetben a Trójai rendszerek ötletével foglalkozom.

4.2. Exo-Trójai égitesteket tartalmazó négyesrendszerek

Emlékeztetőül: a Nap–Jupiter rendszer Trójai égitestjeinek mintájára *Trójai rendszer*nek nevezünk minden olyan háromtest-konfigurációt, ahol egy központi égitest körül azonos körpályán kering két másik objektum, egymástól 60° távolságban. A négytest-probléma Trójai konfigurációi ez alapján két Trójai rendszer szuperpozíciójaként értelmezhetőek, ahol a Trójaiak egy kéttest-konfiguráció L_4 és L_5 Lagrange-pontjaiban keringenek.

A 2. fejezet eredményeit és konfigurációkat szemléltető ábráit tanulmányozva azt tapasztaljuk, hogy ezek a rendszerek szinte minden esetben megjelennek a korlátozott problémákban mint stabil megoldások. A következő alkalmazási terület így a Naprendszeren kívüli, vagyis exo-Trójai rendszerekhez kapcsolódik.

A bolygókeletkezési és -fejlődési modellek azt mutatják, hogy a Trójai égitestek nagy száma Naprendszerünkben nem anomália, hanem exobolygó-rendszerekben is gyakori „melléktermékei" lehetnek a keletkezési és evolúciós folyamatoknak. Az exobolygó-vadászat ezért a 2000-es évek óta jelentős mértékben kiterjedt ezen kü-

lönleges dinamikájú égitestekre is. Vegyük sorra, milyen detektálási módszerekkel van remény Trójai égitestek fellelésére!

Az *RV-(radiális sebesség-) módszer* alkalmazhatóságának alapját az adja, hogy a Naprendszerben ugyan az átlagos Trójai/nagybolygó tömegarány csupán $\sim 10^{-7}$, ennél azonban - főként körpályák esetében - jóval masszívabb Trójaiak is stabilak lehetnek (lásd például Laughlin és Chambers (2002) analitikus eredményeit az 1/1-es tömegarányra). Márpedig ha az exo-Trójai elég nagy tömegű, akkor a központi csillag - másik bolygó által már perturbált - radiális sebesség-görbéjét kimutatható mértékben módosítja.

A csillag fénygörbéjének változásait elemző *fotometriai módszerek* szintén lehetőséget adnak exo-Trójaiak keresésére, amennyiben a Trójai elég nagy méretű (lásd Croll és mtsai. (2007) HD 189733 rendszerre irányuló megfigyeléseit).

Kevésbé szerencsés esetekben, amikor a Trójai kisebb mérete és tömege határt szab a fenti módszerek alkalmazásának, szóba jöhet a *TTV-módszer* (Ford és Holman, 2007): egy a rendszerben már ismert fedési exobolygó további megfigyelése alkalmat adhat a csillag előtti átvonulások időpontjaiban egy harmadik égitest hatására bekövetkező változások kimutatására.

Utóbbival némileg rokon a Ford és Gaudi (2006) nevéhez fűződő, kifejezetten exo-Trójai égitestek keresésére alkalmazott *kombinált RV–fotometriai-módszer*. Ennek lényege, hogy egy már ismert fedési exobolygó átvonulási időpontjait összevethetjük az RV-görbéből számított tranzit-időpontokkal. Ha a rendszerben Trójai bolygó is jelen van, akkor annak gravitációs hatása az időpontokat módosítja. A módszert Madhusudhan és Winn (2009) alkalmazta például Trójaiak keresésére összesen 25 fedési exobolygó-rendszerben.

A fentiekben a négy legfontosabb módszert emeltem ki, azonban számos egyéb irány is létezik, köztük néhány egészen extrém, mint például Kislyakova és mtsai. (2016) UV-anomáliát kimutató és azt Trójaiak felszíni kipárolgásaival összekötő megfigyelése a WASP-12 és HD 189733 rendszerekben. Az elméletibb megközelítésekért (mint például rezonáns dinamika, statisztikai vizsgálatok, numerikus modellezés, stb.) lásd például Páez és Efthymiopoulos (2015), Hippke és Angerhausen (2015), Placek és mtsai. (2015), Schwarz és mtsai. (2007), Schwarz és mtsai. (2009a) és Schwarz és mtsai. (2009b) eredményeit.

4.3. Mesterséges égitestek ötlete

Az előző alfejezetekben két nevezetes égitest-családot emeltem ki mint az esetleges jövőbeli alkalmazások tárgya. Mindkettő természetes égitesteket céloz, ne felejtsük el azonban, hogy akár mesterséges égitestekben is gondolkozhatunk.

A tengelyszimmetrikus centrális négytest-probléma Érdi és Czirják (2016) munkájából származó és immár egy stabilitásvizsgálattal kiegészített megoldásai műholdvagy akár űrhajó-rendszerek elrendezéséhez is ötletet adhatnak. Ahogyan a Naprendszerben számos mesterséges égitest foglal el a Lagrange-pontokhoz közeli, minimális energiájú pályát, úgy a négytest-probléma stabil megoldásai is minden bizonnyal kihasználhatóak az űrkutatásban.

5. fejezet

Összegzés

Newton, Lagrange és Euler két- és centrális háromtest-problémára vonatkozó, 17-18. századi eredményeit követően az n-test probléma analitikus ágának fejlődése némileg megtorpant. Nagyon speciális rendszereket illető eredmények természetesen születtek, azonban kérdéses volt, létezik-e egyáltalán olyan jelentősebb osztálya például a centrális négytest-problémának, melynek leírása egzakt formában lehetséges. A válasz 2016-ban érkezett, és új fejezetet nyitott az égi mechanikában. Érdi és Czirják (2016) explicit alakban adta meg a tengelyszimmetrikus centrális négytest-probléma teljes, analitikus megoldását.

Dinamikai rendszerek tekintetében elsődleges probléma a stabilitás kérdésköre, nincs ez máshogyan a négytest-probléma esetében sem. Meggondolva, hogy centrális konfigurációk relatív egyensúlyi megoldásai a rendszerrel együttforgó vonatkoztatási rendszerben a dinamikai rendszer egyensúlyi pontjai, Érdi és Czirják (2016) centrális konfigurációi így egész osztálynyi, stabilitásvizsgálatra váró egyensúlyi pontot kínálnak. Dolgozatom alapötletét ez adta.

(Két tömegponton átmenő) tengelyszimmetrikus centrális konfigurációról beszélünk, ha a négyből két test a rendszer szimmetriatengelyén fekszik, a másik kettő pedig erre szimmetrikusan helyezkedik el egyenlő tömegekkel. A megoldás két családra osztható: konvex és konkáv konfigurációkra, melyek két szögkoordinátával egyértelműen jellemezhetőek.

Első lépésben a korlátozott rendszerekre koncentráltam, azaz feltételeztem, hogy az egyik test tömege elhanyagolhatóan kicsi a másik három tömegpontéhoz képest. Ezen megszorítás eredményeképpen a korlátozott esetek lineáris stabilitása mindössze az egyik szögváltozó függvényeként felírhatónak mutatkozott. Ezt a függést, vagyis a stabilitás feltételeit analitikusan számítottam, majd a feltételeket numeriku-

san vizsgáltam. Stabil és feltételesen stabil megoldások egyaránt születtek, előbbiek néhány tized fok hosszúságú intervallumok a megfelelő szögváltozóban.

Munkám következő állomásaként a korlátozott esetekre vonatkozó számítások alapötletét megtartva egy általánosabb stabilitásvizsgálatot is elvégeztem, elhagyva a tömegekre irányuló korlátozó feltételeket. A szögtér egy ezred pontosságú numerikus feltérképezésének tanulsága a következőképpen foglalható össze: a stabil megoldások nagyrésze az egycentrum-problémát közelítő konfigurációkhoz kapcsolódik, a konvex esetben ez kizárólagos. A konkáv esetekben emellett jelentős (hozzávetőleg tízszer tíz fok) kiterjedésű tartományok adtak feltételes stabilitást, illetve ezen régiókhoz simulva megjelentek még további stabil régiók is, egyikük figyelemre méltó kiterjedéssel.

A stabil megoldások létezése arra ösztönzött, hogy az eredményeknek fizikai jelentést adjak. A korlátozott esetben részletesen foglalkoztam a stabil és feltételesen stabil konfigurációk elemzésével. Ezek jólismert, illetve azokhoz nagyon közeli elrendezéseket mintáznak, kézenfekvő ezért őket nevezetes valós vagy megvalósulhatónak feltételezett égitest-rendszerekkel összekötni. Kitekintésképpen így a két bolygóval rendelkező kettőscsillagok és az exo-Trójai égitestek ötletével foglalkoztam mint a tengelyszimmetrikus centrális négytest-probléma két lehetséges alkalmazási területe.

Irodalomjegyzék

Albouy, A.: The symmetric central configurations of four equal masses, *Communications in Contemporary Mathematics*, **198**, 131–136 (1996)

Alvarez-Ramírez, M., Skea, J. E. F., Stuchi, T. J.: Nonlinear stability analysis in a equilateral restricted four-body problem, *Astrophysics and Space Science*, **358**, 3 (2015)

Baltagiannis, A. N., Papadakis, K. E.: Equilibrium Points and Their Stability in the Restricted Four-Body Problem, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **21**, 2179 (2011)

Bernat, J., Llibre, J., Pérez-Chavela, E.: On the planar central configurations of the 4-body problem with three equal masses, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **16**, 1–13 (2009)

Brumberg, V. A.: Permanent Configurations in the Problem of Four Bodies and their Stability., *Astronomicheskii Zhurnal*, **34**, 55 (1957)

Budzko, D., Prokopenya, A.: On the Stability of Equilibrium Positions in the Circular Restricted Four-Body Problem, *Conference Paper*, **6885**, 88–100 (2011)

Croll, B., Matthews, J. M., Rowe, J. F., Gladman, B., Miller-Ricci, E., Sasselov, D., Walker, G. A. H., Kuschnig, R., Lin, D. N. C., Guenther, D. B., Moffat, A. F. J., Rucinski, S. M., Weiss, W. W.: Looking for Super-Earths in the HD 189733 System: A Search for Transits in MOST Space-based Photometry, *Astrophysical Journal*, **671**, 2129–2138 (2007)

Érdi, B., Czirják, Z.: Central configurations of four bodies with an axis of symmetry, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **125**, 33–70 (2016)

Ford, E. B., Gaudi, B. S.: Observational Constraints on Trojans of Transiting Extrasolar Planets, *Astrophysical Journal, Letters*, **652**, L137–L140 (2006)

Ford, E. B., Holman, M. J.: Using Transit Timing Observations to Search for Trojans of Transiting Extrasolar Planets, *Astrophysical Journal, Letters*, **664**, L51–L54 (2007)

Gascheau, M.: Examen d'une classe d'equations differentielles et application a un cas particulier du probleme des trois corps, *Comptes Rendus Chimie*, **16**, 393–394 (1843)

Hippke, M., Angerhausen, D.: A Statistical Search for a Population of Exo-Trojans in the Kepler Data Set, *Astrophysical Journal*, **811**, 1 (2015)

Kislyakova , K. G., Pilat-Lohinger, E., Funk, B., Lammer, H., Fossati, L., Eggl, S., Schwarz, R., Boudjada, M. Y., Erkaev, N. V.: On the ultraviolet anomalies of the WASP-12 and HD 189733 systems: Trojan satellites as a plasma source, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **461**, 988–999 (2016)

Laughlin, G., Chambers, J. E.: Extrasolar Trojans: The Viability and Detectability of Planets in the 1:1 Resonance, *Astronomical Journal*, **124**, 592–600 (2002)

Leandro, E. S. G.: On the central configurations of the planar restricted four-body problem, *Journal of Differential Equations*, **226**, 323–351 (2006)

Long, Y., Sun, S.: Four-Body Central Configurations with some Equal Masses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **162**, 25–44 (2002)

MacMillan, W. D., Bartky, W.: Permanent Configurations in the Problem of Four Bodies, *Transactions of the American Mathematical Society*, **34**, 838–875 (1932)

Madhusudhan, N., Winn, J. N.: Empirical Constraints on Trojan Companions and Orbital Eccentricities in 25 Transiting Exoplanetary Systems, *Astrophysical Journal*, **693**, 784–793 (2009)

Majorana, A.: On a four-body problem, *Celestial Mechanics*, **25**, 267–270 (1981)

Meyer, K. R., Schmidt, D. S.: Bifurcations of relative equilibria in the 4- and 5-body problem, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **8**, 215–225 (1988)

Milani, A., Nobili, A. M.: On the stability of hierarchical four-body systems, *Celestial Mechanics*, **31**, 241–291 (1983)

Moulton, F. R.: The Straight Line Solutions of the Problem of N Bodies, *Annals of Mathematics*, **12**, 1–17 (1910)

Páez, R. I., Efthymiopoulos, C.: Trojan resonant dynamics, stability, and chaotic diffusion, for parameters relevant to exoplanetary systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **121**, 139–170 (2015)

Palmore, J. I.: Classifying relative equilibria. II, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **81**, 489–491 (1975)

Pedersen, P.: Stabilitätsuntersuchungen im restringierten Vierkörperproblem, *Publikationer og mindre Meddeler fra Kobenhavns Observatorium*, **159**, 1–38 (1952)

Perez-Chavela, E., Santoprete, M.: Convex Four-Body Central Configurations with Some Equal Masses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **185**, 481–494 (2007)

Placek, B., Knuth, K. H., Angerhausen, D., Jenkins, J. M.: Characterization of Kepler-91b and the Investigation of a Potential Trojan Companion Using EXONEST, *Astrophysical Journal*, **814**, 147 (2015)

Roy, A., Steves, B.: Some special restricted four-body problems — II. From Caledonia to Copenhagen, *Planetary and Space Science*, **46**, 1475–1486, Second Italian Meeting on Celestial Mechanics (1998)

Roy, A., Steves, B.: The Caledonian symmetrical double binary four-body problem: surfaces of zero velocity using the energy integral., *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **78**, 299–318 (2001)

Roy, A. E., Walker, I. W., McDonald, A. J. C.: Studies in the stability of hierarchical dynamical systems, in V. G. Szebehely, editor, *NATO Advanced Science Institutes (ASI) Series C*, volume 154 of *NATO Advanced Science Institutes (ASI) Series C*, pages 151–174 (1985)

Schwarz, R., Dvorak, R., Süli, Á., Érdi, B.: Survey of the stability region of hypothetical habitable Trojan planets, *Astronomy and Astrophysics*, **474**, 1023–1029 (2007)

Schwarz, R., Süli, Á., Dvorak, R.: Dynamics of possible Trojan planets in binary systems, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **398**, 2085–2090 (2009a)

Schwarz, R., Süli, Á., Dvorak, R., Pilat-Lohinger, E.: Stability of Trojan planets in multi-planetary systems. Stability of Trojan planets in different dynamical systems, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **104**, 69–84 (2009b)

Shi, J., Xie, Z.: Classification of four-body central configurations with three equal masses, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **363**, 512–524 (2010)

Simo, C.: Relative equilibrium solutions in the four body problem, *Celestial Mechanics*, **18**, 165–184 (1978)

Steves, B., Roy, A.: Some special restricted four-body problems — I. Modelling the Caledonian problem, *Planetary and Space Science*, **46**, 1465–1474, Second Italian Meeting on Celestial Mechanics (1998)

Veras, D.: Relating binary-star planetary systems to central configurations, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **462**, 3368–3375 (2016)