Európa árampiacainak összekapcsolása

MSc diplomamunka

Mona András

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető:

Mádi-Nagy Gergely, adjunktus
Operációkutatási Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2018

Köszönetnyilvánítás

A diplomamunka elkészítésében nagy segítségemre volt konzulensem Mádi-Nagy Gergely, akinek ezúton is szeretném megköszönni a téma bemutatását, a hasznos és segítő tanácsait, továbbá, hogy bármikor bármilyen kérdéssel fordulhattam hozzá.

Emellett szeretném megköszönni a családomnak és barátaimnak, hogy bármilyen felmerülő probléma esetén számíthattam rájuk. Külön anyukámnak, hogy átnézte és kijavította nyelvtani hibáimat.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **1**

2. A piaci modell **3**

2.1. Market Coupling 4

2.2. Ajánlattípusok 6

2.3. Célfüggvény 10

2.4. Euphemia 12

3. Matematikai háttér **14**

3.1. Linearizálás 14

3.2. Karush-Kuhn-Tucker tételkör 15

4. Primál-duál felírás **18**

4.1. Input adatok 18

4.2. Indexhalmazok 19

4.3. Változók 20

4.4. Az alapfeladat felírása 21

4.5. Bővített feladat KKT-felírása 24

4.6. Linearizált feltételrendszer 25

4.7. MIC-ajánlatok hozzávétele 28

5. Numerikus Implementáció **31**

5.1. Futtatási környezet 31

5.1.1. Excel 31

5.1.2. Pyomo 33

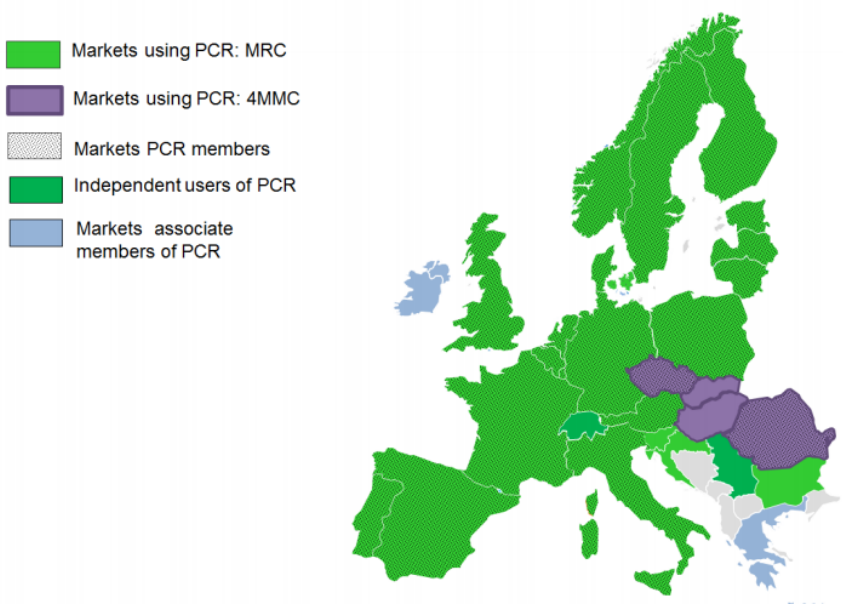
5.2. Példafutások 34

6. Összegzés **40**

1. Bevezetés

A magyar energia- és árampiacon a 2004-es uniós csatlakozás előzményeként elindult a liberalizáció. Ennek keretében a korábban teljes felügyeleti joggal rendelkező MVM Zrt-ből a rendszerirányítási feladatokat az újonnan létrejövő MAVIR Zrt-be (Magyar Villamosenergia-ipari Átviteli Rendszerirányító Zártkörűen Működő Részvénytársaság) szervezték ki. Ez alapot teremtett a teljes piacnyitáshoz, a fogyasztók és energiakereskedők piacra való belépéséhez. A csatlakozás következtében ennek üteme felgyorsult, egyre nagyobb fogyasztói kör tudott versenykörülmények között a piacról venni villamosenergiát. A hazai tényleges teljes piacnyitásra, amióta bárki szabadon választhat magának energiakereskedőt, végül 2008. január elsejével került sor.

Az Európai Parlament és az Európai Tanács 2009-ben elfogadta a harmadik energiacsomagot, és ezzel egy határozatban [12] kiterjesztette és egyben hatálytalanította egy korábbi 2003-as határozatát [11]. Ebben a két dokumentumban fektették le a közös európai árampiac alapjait. A módosításnak egyik lényeges eleme a rendszerirányítási tevékenység termelői, kereskedelmi tevékenységektől történő szétválasztása volt. Előírták a közös, összekapcsolt piacok létrehozásának szükségességét, valamint jogilag szabályozott intézményi kereteket teremtettek ehhez. Ennek megfelelően mára Európa majdnem minden régiójában megvalósult a piac-összekapcsolás. Magyarország a 4M Market Coupling projekten belül a cseh, szlovák és a román piacokkal áll összeköttetésben, ATC-alapú (elérhető határkeresztező kapacitás) kereskedéssel. A hazai villamosenergia kereskedését a HUPX Zrt. felügyeli, és a termékigényeket a MAVIR Zrt. irányításával elégítik ki a magyar gerinchálózaton keresztül.

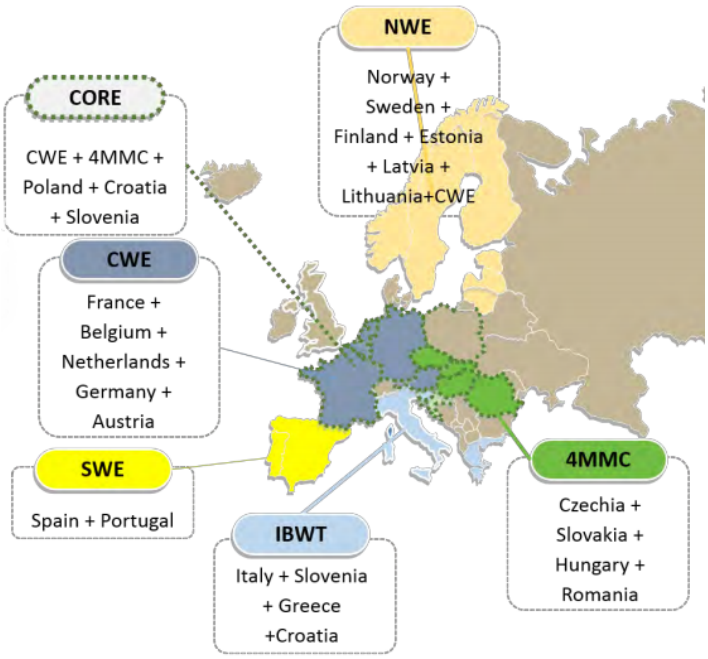


1. ábra. Lilával kiemelve a 4MMC összekapcsolt régió. [3]

A piacösszekapcsolás vélt előnyei többek között a nagyobb versenyképesség, az ellátásbiztonság erősítése, az energiahatékonyság elősegítése, a fogyasztói érdekek hatékony érvényesítése, valamint a nagyobb európai integráció. A végső cél egy egységes algoritmus alkalmazásával végrehajtott, ár-alapú piac-összekapcsolás implicit kapacitásfoglalásokkal egész Európán keresztül.

Több különböző típusú kereskedés is kiépült, a legfontosabb, már teljesen megvalósult magyar lokális másnapi szervezett villamosenergia-piac, azaz DAM (Day-After Market), ahol az $N-1$-edik napon lehet villamosenergia termékekkel kereskedni a következő, N-edik napra. Itt a szokásos tőzsdei kereskedési formáktól eltérően nem megadott vételi és eladási ajánlatok közül lehet válogatni, hanem a legtöbbet kínáló vételi ajánlatokat párosítják össze a legolcsóbb eladási ajánlatokkal, a megfelelő mennyiségekig, majd másnap egy ez alapján kialakuló egységes áron (piactisztító ár) történik minden kereskedés. A másik típusú kereskedés a napon-belüli piac, az IDM (Intra-Day Market), ahol még aznap minden órában lehet venni és eladni áramot.

A dolgozatban csak a DAM piacot vizsgáljuk, ebből is csak a magyar érintettségű 4MMC régiót, ennek matematikai hátterét tisztázzuk, és visszavezetjük a problémát egy MIQP (Mixed Integer Quadratic Programming) feladatra. Ennek megoldására egy Pythonban implementált kódot fogunk használni, amely bármilyen kompatibilis MIQP-solvert meghívva gyorsan meg tudja adni a megoldást. Később mutatunk egy kiterjesztést is, amely olyan villamosenergia termékek bevezetését teszi lehetővé, amelyek itthon még nincsenek.



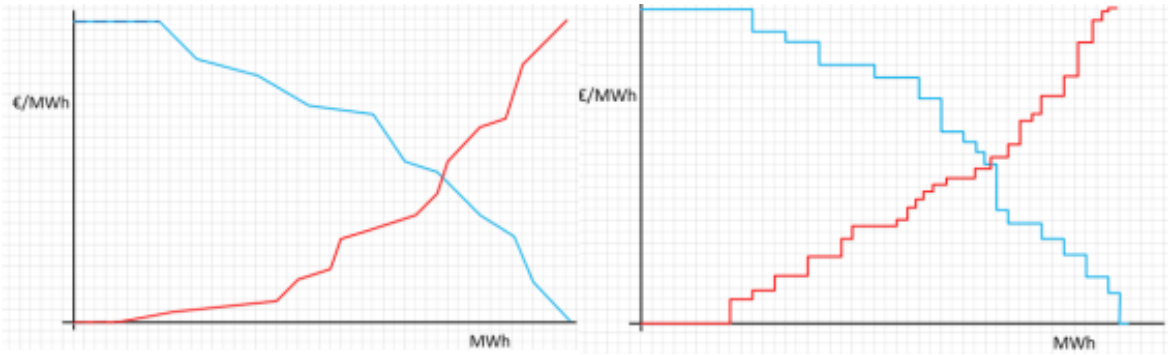
2. ábra. A különböző európai összekapcsolt régiók. [8]

2. A piaci modell

A villamosenergia egy termék, amelynek sajátos piaci jellemzői vannak. Lényegében nem tárolható, viszont kulcsfontosságú, hiszen igen nehezen helyettesíthető. A fogyasztás igen nehezen előrejelezhető és korlátozható, ráadásul napi szinten gyorsan változó, ami a tárolhatósággal együtt komoly nehézség. Ezen kívül az áram szállításának is megvannak a saját problémái. Kötött fizikai hálózat kell a szállításához, amelyiken a kapacitások végesek, így a szállítás igen költséges, ráadásul időhöz kötött. Az időhorizont menti kategorizálással a kereskedés így felosztható több piacra. Mint a bevezetőben korábban említettük, ebből mi csak a day-ahead-markettal (DAM) foglalkozunk.

DAM piac: A kereskedők a $D-1$-edik napon tehetnek vételi és eladási ajánlatokat a D-edik napra vonatkozóan. Ezeket másnap a rendszerirányító óránként összegzi, és a megadott keretek között kiszolgálja.

A DAM piac a uniform price aukció elvén működik. Azaz a vételi és az eladási ajánlatok indukálják a keresleti és a kínálati görbéket, majd ezeknek a görbéknek a metszéspontja alapján kaphatjuk meg a piactisztító árat (ezt az m piacon a h órában $mcp_{m,h}$-val jelöljük). Az így kiszámolt egységáron értékesítenek minden terméket a következő napon. (Persze óránként különböző piactisztító árral.)



3. ábra. Kereslet-kínálati görbe egy órára, lépcsős illetve lineáris ajánlatok esetén. [3]

Így az ajánlatok három kategóriába fognak esni:

1. **In-the-money:** Azok a vételi ajánlatok, melyeknek ára magasabb, valamint azok az eladási ajánlatok, melyeknek ára alacsonyabb a kialakuló piactisztító árnál. Ezeket az ajánlatokat teljesen el kell fogadnunk.

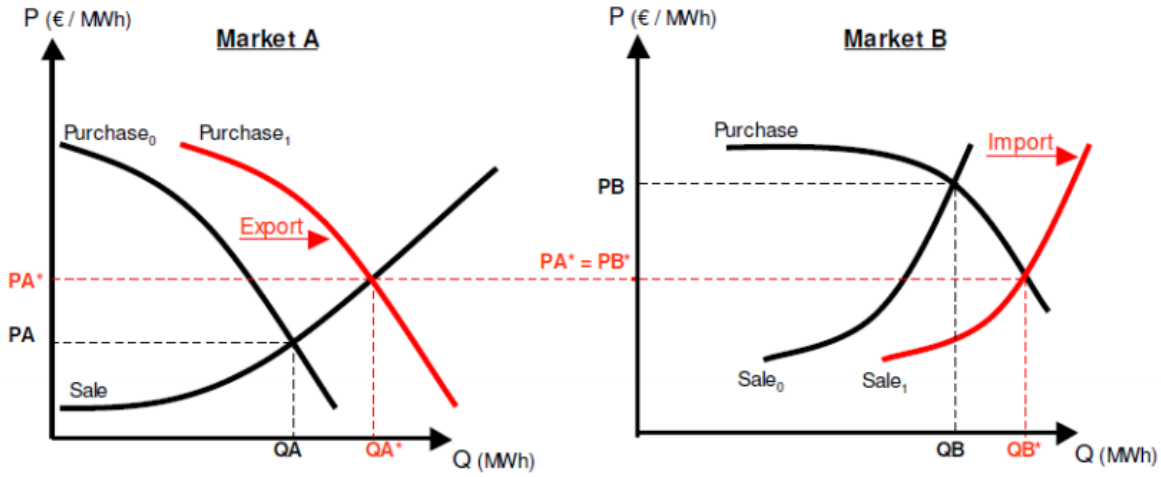
2. **At-the-money:** Azok a vételi és eladási ajánlatok, melyeknek ára megegyezik a piactisztító árral. Ezeket arányosan kell elfogadnunk.

3. **Out-the-money:** Azok a vételi ajánlatok, melyeknek ára alacsonyabb, valamint azok az eladási ajánlatok, melyeknek ára magasabb a piactisztító árnál. Ezeket az ajánlatokat teljesen el kell utasítanunk.

Ugyanakkor országonként igen eltérő lehet a kialakuló piactisztító ár. Célunk a piacok összekapcsolásával pontosan az, hogy ez minél kevésbé fordulhasson elő.

2.1. Market Coupling

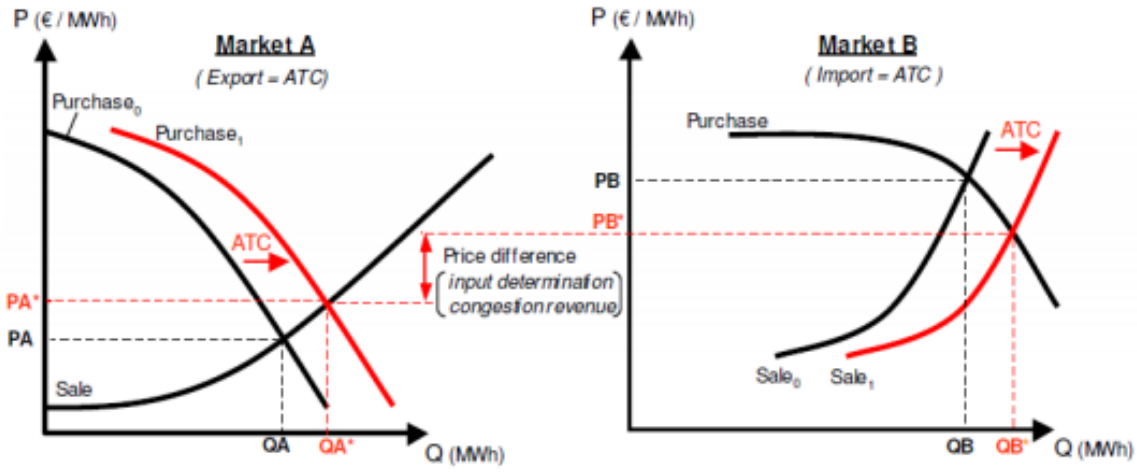
Általában a határmetszék két oldalán levő piacok nagy áreltérését az okozza, hogy míg az egyiken vételi ajánlatokból van többlet, a másikon eladásiból. Ennek megfelelően ha a magasabb árú piacról exportálunk az alacsonyabb árú felé, akkor az export-import hatására a keresleti és kínálati görbék eltolódnak, és nagyobb árkonvergencia alakul ki, ez a kapacitások függvényében lehet teljes, vagy csak részleges árkonvergencia. Azaz a piac-összekapcsolási folyamat, figyelembe véve az elérhető határkeresztező kapacitások mennyiségét, maximális energiaáramlást céloz meg az alacsonyabb árú területről a magasabb árú terület felé, hogy ennek következtében az árak konvergenciája is erősödjön az egyes területek között.



4. ábra. Teljes árkonvergencia kialakulása az export-import hatására. [2]

Feltehető, hogy egy országon belül a gerinchálózat kellően nagy kapacitású ahhoz, hogy ne okozzon problémát a másnapi piac kapacitásallokációja. Ugyanakkor az országok közötti kapacitások gyakorlatban nem elég nagyok. Ennek kezelésére két modell van használatban.

1. **ATC modell:** Az ATC (avaliable transfer capacity) modellben nem közvetlenül a hálózati elemek korlátozzák a kereskedelmet, hanem a szomszédos piacok közti kereskedelem van korlátozva. Az elérhető kapacitáskorlátokat minden órára előre közli a rendszerirányító, így a modellben az l élre a h órában elérhető kapacitást $Capacity_{l,h}$-val jelöljük. Ez az úgynevezett ATC kapacitáskorlát függ az államközi szerződésekben, illetve az előre lefixált, határidős szállítási szerződésekben



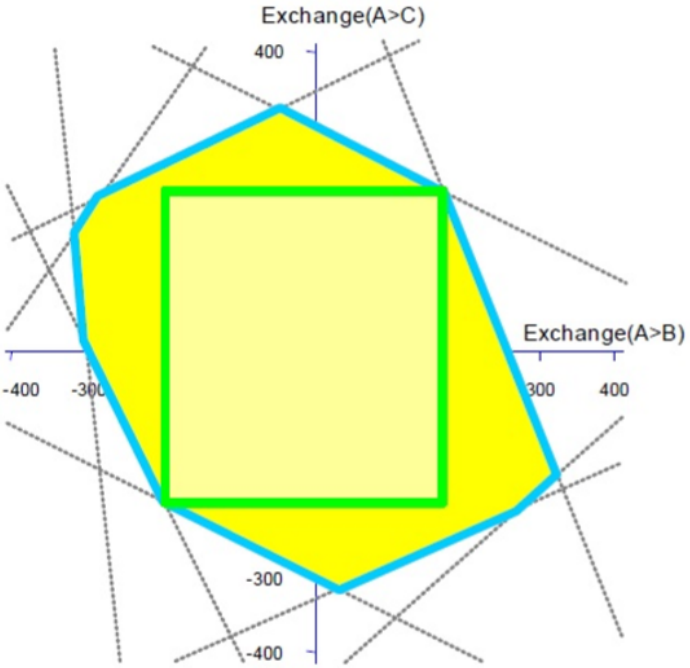
5. ábra. Részleges árkonvergencia kialakulása az export-import hatására. [2]

kijelölt átviteli mennyiségektől. Ha egy ATC él telítődik, torlódási árat kell érte fizetni. Az ATC modellben úgy kezeljük az áramot, mint egy hétköznapi piaci terméket, vagyis feltesszük, hogy a két ország közti összekötő hálózaton tudunk a megfelelő irányba (de csak az egyikbe) előre meghatározott mennyiségű áramot átküldeni. A modell egyszerű és könnyen átlátható, viszont a legnagyobb hiányossága, hogy nem veszi figyelembe az áram fizikai tulajdonságait. Ennek kiküszöbölésére kezdett el elterjedni a másik úgynevezett flow-based modell.

2. **Flow-Based modell:** Ebben az esetben az előzővel ellentétben a hálózati elemek korlátozzák a kereskedelmet. A modell részletei a *CWE Enhanced Flow-Based MC feasibility report* című tanulmányban [1] olvashatóak, mi csak egy vázlatos áttekintést adunk róla. Kritikus elemnek nevezünk egy olyan ötöst, amelyben szerepel maga az elem, egy állapot, mely tartalmazza a további elemeket, melyek kiesésével számolhatunk, a kritikus órát, valamint az elem előjeles terhelhetőségét a feltételek mellett. Itt is, ha egy kritikus elem telítődik, torlódási árat kell érte fizetnünk. A modell feltételeiből nettó pozíciókra (nex vector) a következő egyenlőtlenség írható fel.

$$PTDF\ nex \leq RAM$$

Itt RAM (Remaining Available Margin) az import-exportra elérhető energia mennyiségvektora, $PTDF$ pedig egy a hálózati feltételeket kódoló mátrix. Ellentétben az ATC modellel itt nem elvárás, hogy az olcsóbb piacról a drágább piac irányába folyassuk az áramot, hanem a nettó pozíciók egyensúlyba hozása a fontosabb. Ez a modell közelebb áll a valósághoz, valamint nagyobb árkonvergenciát tud eredményezni, viszont sokkal bonyolultabban kezelhető.



6. ábra. Az ATC és a Flow-Based modellek megengedett tartományai egy fiktív feladat esetében. [1]

Mint korábban említettük, mi csak az ATC-modellben fogunk dolgozni, a Flow-Based modellt csak nagy vonalakban említettük meg, a továbbiakban nem foglalkozunk vele.

2.2. Ajánlattípusok

A DAM piaci kereskedésben sokféle megengedett ajánlattípus létezik, amiket most részletesebben végigveszünk. Ezek között vannak standard ajánlattípusok, amelyek minden régióban megtalálhatóak (órásajánlatok, blokkajánlatok), továbbá komplex ajánlatok, amelyek csak némely régióban engedélyezettek (MIC, PUN), ugyanakkor jelentősen növelik a megoldandó feladat bonyolultságát. Mivel a MIC-ajánlatok kivételével később nem használunk komplex ajánlatokat, ezért azokat csak vázlatosan foglaljuk össze.

A standard, mindenhol fellelhető ajánlatok a következőek:

- **Órásajánlatok:** Egy o órásajánlat olyan $o = (Q_o, P_o^0, P_o^1, m_o, h_o)$ ötöst jelent, amelyben $Q_o \in \mathbb{R}$ a felajánlott mennyiség (megegyezés alapján $Q_o < 0$, ha o vételi ajánlat és $Q_o > 0$, ha o eladási ajánlat), $P_o^0 \in \mathbb{R}$ az ajánlat elfogadásának kezdeti ára, $P_o^1 \in \mathbb{R}$ az ajánlat teljes elfogadásának ára, m_o a piac ahol az ajánlatot közzétették, h_o az óra amire az ajánlat vonatkozik. Ehhez tartozik egy $x_o \in [0, 1]$ változó, mely az elfogadottságot mutatja. Egy ajánlatot lépcsősnek nevezünk, ha $P_o^0 = P_o^1$, különben lineárisnak hívjuk. Az ilyen lineáris ajánlatokra speciális

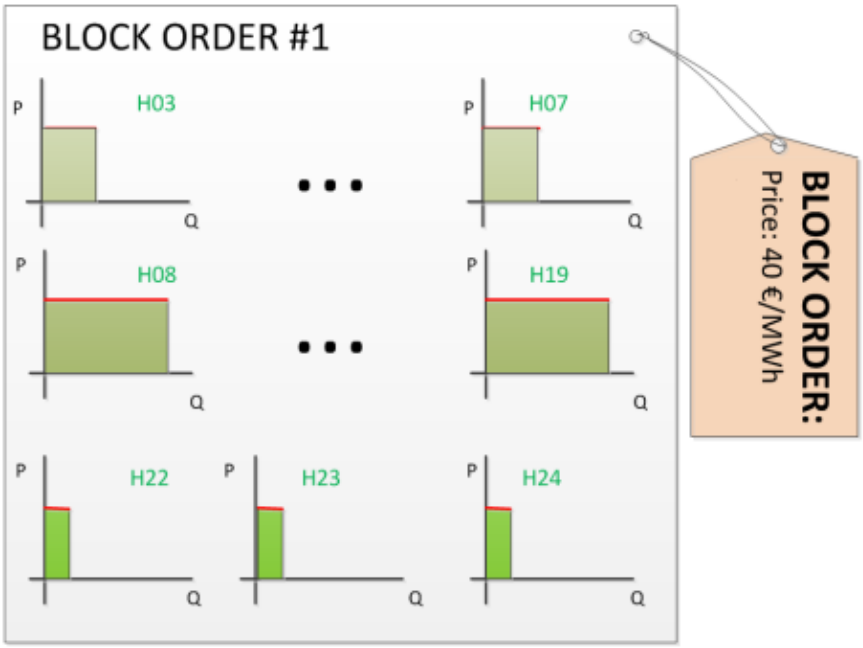
elfogadási feltételek vonatkoznak. Itt *at-the-money* ajánlatnak nevezünk egyet, ha a piactisztító ár a két megadott véglet között van, vagyis $P_o^0 \leq mcp_{m_o,h_o} \leq P_o^1$. A $P_o^0 = mcp_{m_o,h_o} = P_o^1$ esetben csak annyi a feltételünk, hogy $x_o \in [0,1]$, ezen kívül minden esetben:

$$x_o = \begin{cases} 1, & \text{ha } P_o^1 \leq mcp_{m_o,h_o} \\ \frac{P_o^1 - mcp_{m_o,h_o}}{P_o^1 - P_o^0}, & \text{ha } P_o^0 \leq mcp_{m_o,h_o} < P_o^1 \\ 0, & \text{ha } mcp_{m_o,h_o} \leq P_o^0 \end{cases}$$

A később hasznos feltételes alakban felírva ugyanezt a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} 0 < x_o &\Longrightarrow 0 \leq Q_o(mcp_{m_o,h_o} - P_o^0) \\ 0 < Q_o(P_o^1 - mcp_{m_o,h_o}) &\Longrightarrow x_o = 0 \\ 0 < x_o < 1 &\Longrightarrow mcp_{m_o,h_o} = P_o^0 + (P_o^1 - P_o^0)x_o \\ Q_o(P_o^1 - mcp_{m_o,h_o}) < 0 &\Longrightarrow x_o = 1 \end{aligned}$$

- **Blokkajánlatok:** Egy b blokkajánlat jelentése olyan $b = (\{Q_{b,h}\}_{h \in H}, P_b, m_b, Hours_b)$ négyes, ahol $Q_{b,h} \in \mathbb{R}$ a $h \in Hours_b$ órára felajánlott mennyiség, $P_b \in \mathbb{R}$ a blokkajánlat egységára, m_b a piac ahol az ajánlatot közzétették, $Hours_b$ pedig azoknak az óráknak a halmaza, amelyekre az ajánlat vonatkozik.

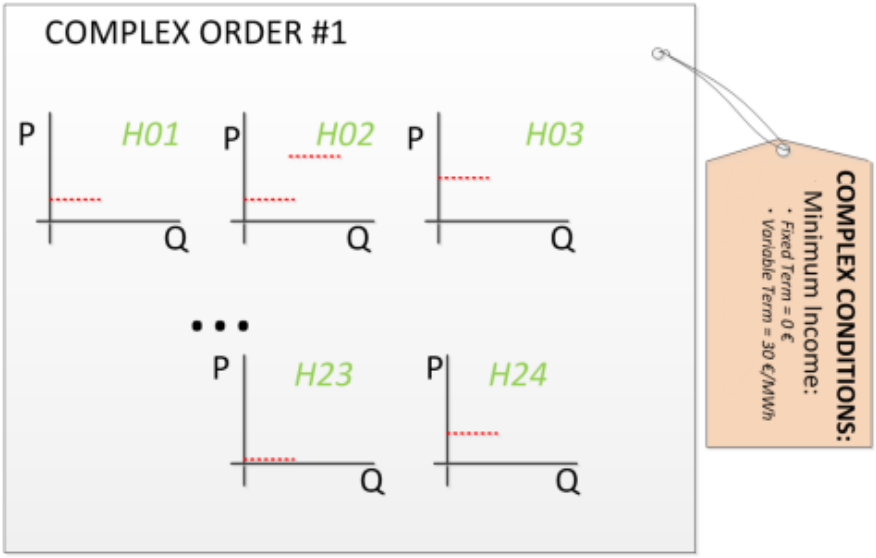


7. ábra. Példa blokkajánlatra. [3]

Ehhez tartozik egy $x_b \in \{0,1\}$ változó, mely az elfogadottságot mutatja. Ebből is látszik, hogy egy ilyen típusú ajánlat *fill-or-kill* tulajdonságú, azaz egy blokknak minden elemi ajánlatát vagy egyszerre teljesen elfogadjuk, vagy egyszerre elutasítjuk. Lineáris ajánlatról itt nincs értelme beszélni, hiszen kötelezően egyféle egységárat lehet csak megadni. Kivételes módon a blokkajánlatokra csak annyit kötünk ki, hogy az *out-the-money* ajánlatokat el kell utasítanunk, azaz felléphet az az eset, hogy egy *in-the-money* blokkajánlatot elutasítunk, ezt PRB-nek fogjuk hívni (paradoxically rejected block). Így az elfogadás feltétele egyszerűen:

$$x_b = 1 \Longrightarrow 0 \leq \sum_{h \in Hours_b} Q_{b,h}(mcp_{m_b,h} - P_b)$$

- **MIC-ajánlatok:** Egy m MIC-ajánlat nem más, mint egy speciális lépcsős eladási órásajánlat halmaz (egy órában több is lehet), amihez megadunk még egy F (fix, indítási költség (EUR)) és egy V (változó, előállítási költség (EUR/MWh)) értéket. Így $m = (\{Q_{oe}\}_{oe \in MIC_m}, \{P_{oe}\}_{oe \in MIC_m}, m_m, MIC_m, F, V)$ egy olyan hatos, ahol $Q_{oe} \in \mathbb{R}$ az $oe \in MIC_m$ órásajánlathoz tartozó felajánlott mennyiség, $P_{oe} \in \mathbb{R}$ az $oe \in MIC_m$ MIC-ajánlatbeli órásajánlat egységára, m_m a piac ahol az ajánlatot közzétették, MIC_m pedig azoknak az óráknak a halmaza, amelyekre az ajánlat vonatkozik (egy óra többször is szerepelhet).



8. ábra. Példa MIC-ajánlatra. [3]

Ehhez tartozik egy $x_{m,h} \in [0,1]$ elfogadási ráta. A MIC feltétel pontosan azt jelenti, hogy az ajánlattevő cégnek megéri, ha elfogadják az ajánlatait. Azaz:

$$\sum_{h \in MIC_m} Q_{m,h} x_{m,h} mcp_{m_m,h} \geq F + V(\sum_{h \in MIC_m} Q_{m,h} x_{m,h}).$$

Ha a feltétel teljesül, a benne lévő ajánlatok sima lépcsős órásajánlatokként viselkednek. Ha nem teljesül a feltétel, az összes jelzett ajánlatot elutasítjuk.

Ezek után vázlatosan nézzük meg, milyen egyéb típusok vannak még Európában. Ezeket jórészt kettéoszthatjuk aszerint, hogy az alapjuk milyen ajánlat. Eszerint vannak speciális órás- és blokkajánlatok. Nézzük először a speciális órásajánlat halmazokat:

- **Ütemezett leállású MIC-ajánlatok:** Egy m MIC-ajánlat esetében megadhatunk ütemezett leállást, ebben az esetben a legolcsóbb MIC-beli órásajánlatot a teljes elutasítás esetén se dobjuk el, hanem normális órásajánlatként kezeljük onnantól.

- **Sávozott ajánlatok:** Egy m sávozott ajánlat szintén egy eladási órásajánlat halmaz, amelynek esetén megadhatunk egy maximális növekményt I_m, és egy maximális csökkenést D_m. Ekkor a h-adik periódusban a párosított értéknek a $[Q_h - D_m; Q_h + I_m]$ intervallumban kell lennie, ahol jelentse most Q_h az m ajánlat h órában párosított mennyiségét. Így a bepárosítható mennyiség függ az előző órában párosítottól. (Ha I_m, D_m közül valamelyik nincs megadva, akkor végtelennek vesszük.)

- **Komplex ajánlatok:** Egy komplex ajánlat pedig olyan eladási órásajánlat halmaz, megy tartalmaz MIC-feltételt (ütemezett leállással vagy anélkül) és sávozási feltételt is.

A speciális blokkajánlatok pedig az egyszerű blokkajánlatoknak a kiterjesztései:

- **Adott minimális elfogadottsági rátájú:** Egy sima blokkajánlatnál megadhatunk egy $R \in [0, 1]$ minimális elfogadottsági rátát. Ekkor egy ilyen blokkajánlat elveszti fill-or-kill jellegét, ehelyett egy részét is elfogadhatjuk, de legalább az R-szeresét, és minden órában pontosan ugyanakkora részét.

- **Láncolt blokkajánlatok:** Egy c blokkajánlat elfogadottságát függővé tehetjük a p blokkajánlattól. (Ekkor a p szülőajánlatnak, a c a gyerekajánlata.) Egy szülő elfogadottsága legalább akkora, mint bármelyik gyerekéé. Speciálisan egy szülő elfogadható akkor is, ha önmaga *out-the-money*, de a gyerekei megmentik, azaz a teljes család hozadéka pozitív, és önmagában nem csökkenti a költségfüggvényt. Összességében egy szülő blokk önmagában is elfogadható, viszont a gyerek elfogadásához szükséges a szülő elfogadása is, valamint egy gyerek megmentheti a szülőjét a többletével, de vica versa nem.

- **Zárt csoport:** Egy zárt csoport olyan blokkajánlat halmazt jelent, amelyben az ajánlatok elfogadottsági rátáinak összege nem haladhatja meg az 1-et (azaz több blokkajánlat, melyek közül legfeljebb egyet fogadhatunk el).

- **Rugalmas órásajánlatok:** Egy rugalmas órásajánlat olyan speciális blokkajánlat, amely egyetlen órára terjed, adott árral, adott mennyiséggel, a minimális elfogadottsági rátája 1 (fill-or-kill), de nincs fixálva, hogy melyik órára vonatkozik, a megoldó algoritmus választhatja ki az órát, a költségfüggvény optimalizálása alapján.

Ezeken kívül létezik még két további használt típus is, mely a korábbiaknál is erőteljesebben kívül esik az órásajánlat/blokkajánlat kategorizáláson:

- **Elsőbbségi ajánlatok:** Minden típusú ajánlathoz hozzárendelhetünk egy prioritási számot. Ha a piactisztító áron több ajánlat is elfogadható egymás ellenében, akkor azt fogadjuk el, amelyiknek a prioritási száma a legalacsonyabb. Persze csak amennyiben semmi más feltétel nem sérül.

- **PUN-ajánlat:** Egy PUN-ajánlat nem a piactisztító ártól függ, hanem a P_{PUN} PUN-ártól, a következő módon:

$$P_{PUN} \sum_m Q_m = \sum_m Q_m mcp_m \pm \Delta$$

  ahol Q_m PUN ajánlatok párosított mennyisége az m piacon, Δ pedig egy kiegyensúlyozó érték.

2.3. Célfüggvény

A modellünkben csak a standard ajánlattípusokkal foglalkozunk. Mivel, mint láttuk, a blokk- és MIC-ajánlatok döntési változói egészértékűek, a sima órásajánlatoké lineáris, valamint jól behatárolt feltételeink vannak, ezért később egy vegyes egészértékű programozási feladatként (MIQP) fogjuk tudni felírni a feltételrendszert. A feltételekben csak lineáris feltételek szerepelnek majd, ugyanakkor a célfüggvényünk kvadratikus lesz. A célfüggvény maga, az ismert social welfare, azaz az összes bepárosított ajánlatmennyiségek termelői és fogyasztói többletének, valamint a torlódási árakból kapott rendszerirányítói bevételeknek az összege. Másképp, ha D a keresleti és S a kínálati görbe, valamint dem a keresleti mennyiség és sup az exporttal eltolt kínálati mennyiség, akkor a következő maximum keresése a feladat.

$$\max \int_0^{dem} D(q)dq + \int_0^{sup} S(q)dq$$

Így ha O, B és MIC rendre az órás-, blokk- és MIC-ajánlataink halmaza, akkor ahogy az alábbi ábra is jól mutatja, a keresleti és kínálati görbék alatti területet kiszámolni, és ezt az összeget maximalizálni az integrálási szabályok miatt ugyanaz, mint

a termelői (PS+) és a fogyasztói (CS+) többletet maximalizálni. Ennek az összegnek a kiszámításából azonban ügyesen kieliminálhatjuk az $mcp_{m,h}$ változóinkat, hogy csak az ajánlatokra vonatkozó döntési változók maradjanak a függvényünkben. Vezessük be az $n_{m,h}$ előjeles változót, mint az $m \in M$ piacnak a $h \in H$ órában lévő nettó exportja. Így a célfüggvényünk a következő maximalizálása:

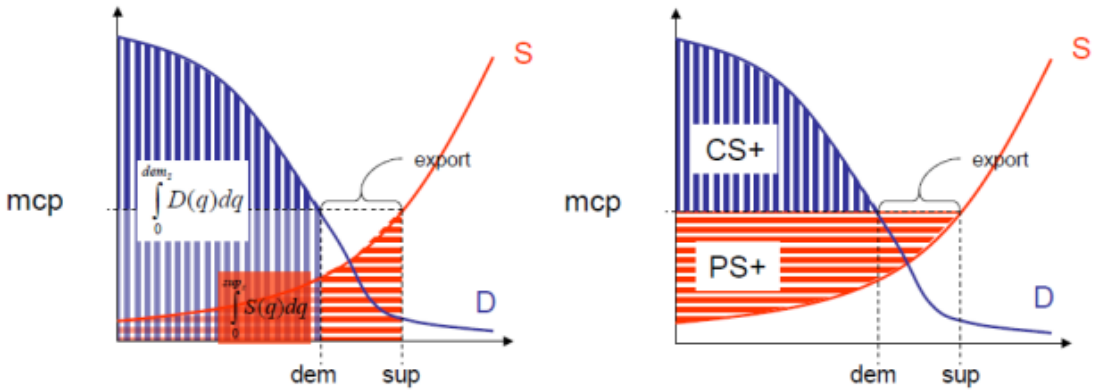
$$\sum_{o \in O} Q_o((mcp_{m_o,h_o} - P_o^0)\ x_o - \frac{P_o^1 - P_o^0}{2} x_o^2) +$$

$$+ \sum_{b \in B} \sum_{h \in Hours_b} (Q_{b,h}\ (mcp_{m_o,h_o} - P_b)\ x_b) +$$

$$+ \sum_{e \in MIC} \sum_{oe \in MIC_e} (Q_{oe}(mcp_{m_{oe},h_{oe}} - P_{oe}) x_{oe}) -$$

$$- \sum_{m \in M} \sum_{h \in H} (mcp_{m,h}\ n_{m,h}) =$$

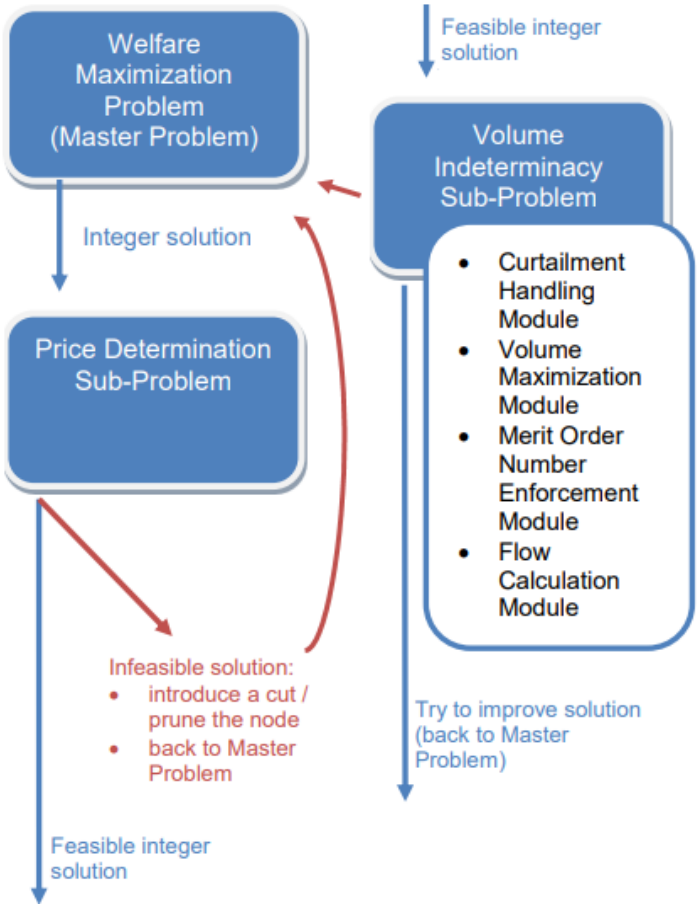
$$= - \sum_{o \in O} Q_o(P_o^0\ x_o + \frac{P_o^1 - P_o^0}{2} x_o^2) - \sum_{b \in B} P_b\ x_b(\sum_{h \in Hours_b} Q_{b,h}) - \sum_{e \in MIC} \sum_{oe \in MIC_e} (Q_{oe} P_{oe} x_{oe})$$



9. ábra. Fogyasztói és termelői többletek szemléltetése, az export-import hatásával.[5]

2.4. Euphemia

A probléma kezelésére először több lokális algoritmust találtak ki, mint például *COSMOS, SESAM, SIOM és UPPO*, majd 2013 végén ezeket a Price Coupling of Regions (PCR) program keretében egységesítették és a *COSMOS* [2] algoritmus alapján létrehozták a *Euphemia* programot, amely mindenhol ki tudja elégíteni a helyi piacok specialitásait. (A standard ajánlattípusokon kívül lokálisan minden másféle típust is használnak.)



10. ábra. A EUPHEMIA algoritmus iterációinak folyamatábrája [3].

A *Euphemia* [3] egy *branch-and-cut* típusú algoritmus, amelynek fő problémája a közjó maximalizálása, továbbá három alproblémája az ármeghatározás, a PUN ajánlatok és a mennyiség maximalizálásának részproblémái.

Először az órásajánlatokon kívül minden ajánlattól eltekint, ekkor a feladat felírható egy kvadratikus célfüggvényű LP-ként, amiről később lesz szó. Az ezt megoldva kapott kezdeti megoldásból indítjuk a *branch-and-cut* metódust.

Megkeressük a legjobb blokk- és MIC-ajánlat elfogadásokat, a közjó maximalizálásához, tiszteletben tartva, hogy ne legyen elfogadott *out-the-money* ajánlatunk. Ezután meghatározzuk a piactisztító árakat, valamint a határkeresztező áramokat. Ha nem si-

kerül, generálunk egy vágást, és visszatérünk a fő problémához.

Ha az első részproblémát sikeresen megoldottuk, jöhet a második, a PUN-ajánlatok kezelése. Itt ugyanezt a technikát alkalmazzuk, és ha sikerül megoldani, akkor ugrunk az utolsó részproblémára, a mennyiség maximalizálására, és az elsőbbségi ajánlatok prioritásának betartására. Ha ezt is megoldottuk, kész vagyunk, és outputként megadjuk a kiszámolt elfogadási rátákat, piactisztító árakat és határmetszék áramokat.

Ez az algoritmus, ha ugyan nem is látszik a röpke áttekintésből, de az ábráról jól leolvasható, hogy rendkívül számolásigényes, mert egy sok visszalépéses iterációra épül (adott esetben nagyon sok csúcsa is lehet a fának), így általában az időkorlát szab határt a megoldás optimalitásának. Ezért is próbáljuk meg a következő fejezetekben az iteratív algoritmust helyettesíteni, és egy egyszerű, csak lineáris feltételekből álló MIQP feladatként felírni a problémát.

3. Matematikai háttér

Ebben a fejezetben megnézzük, hogyan lehet egy már korábban a 2.2 alfejezetben látott feltételes egyenlőtlenségrendszert bináris segédváltozók bevezetésével egy egyszerű lineáris egyenlőtlenségrendszerré alakítani. Utána tisztázzuk, mi is az a vegyes egészértékű programozási feladat, és milyen háttértudásunk van az ilyen típusú feladatokról, majd egy gyors áttekintést kapunk a Karush-Kuhn-Tucker tételkörről.

3.1. Linearizálás

Legyenek $A \subseteq \mathbb{R}^n$ és $C \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt, nemüres halmazok, valamint $a \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^m$ és $b, d \in \mathbb{R}$. Legyen továbbá

$$m_a = \min \{ax | x \in A\}$$

$$m_c = \min \{cy | y \in C\}$$

$$M_c = \max \{cy | y \in C\}$$

Legyen az implikációnk

$$ax < b \Longrightarrow cy = d$$

alakú. Ekkor bevezetve egy s bináris segédváltozót, három egyszerű egyenlőtlenséggel linearizálhatjuk a következtetést.

$$ax \geq bs + m_a(1 - s) \tag{1}$$

$$cy \geq d(1 - s) + m_c\ s \tag{2}$$

$$cy \leq d(1 - s) + M_c\ s \tag{3}$$

Ha s nulla, akkor az első egyenlőtlenség kiesik, a többi pedig garantálja, hogy $cy = d$, ha pedig $s = 1$, azaz $ax \geq b$, akkor cy-ra nincs érdemi megkötés.

3.2. Karush-Kuhn-Tucker tételkör

Mint már megfigyeltük, a mi feladatunkban vannak egész és folytonos változók is, valamint ahogy a 2.3 alfejezetben láttuk, a célfüggvényünk kvadratikus (és később látni fogjuk, hogy minden feltételünk lineáris). Az ilyen típusú maximalizálási vagy minimalizálási feladatokat *vegyes egészértékű kvadratikus programozási* feladatnak nevezzük (MIQP).

Legyen $C \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ konvex nyílt halmaz, továbbá $x \in \mathbb{R}^n$. Ezenkívül legyenek $f, g_i, h_j : C \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq s,\ 1 \leq j \leq t)$ és nézzük a következő primál feladatot.

$$\min\ f(x) \tag{P1}$$

$$g_i(x) \leq 0 \qquad (1 \leq i \leq s) \tag{P2}$$

$$h_j(x) = 0 \qquad (1 \leq j \leq t) \tag{P3}$$

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}^s$, $\mu \in \mathbb{R}^t$. Ekkor legyen

$$L(x, \lambda, \nu) = f(x) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{t} \nu_j h_j(x),$$

és legyen

$$d(\lambda, \nu) = \inf_{x \in C} L(x, \lambda, \nu).$$

A (P1)-(P3) feladat duálisát d-vel tudjuk megfogalmazni.

$$\max\ d(\lambda, \nu) \tag{D1}$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad (1 \leq i \leq s) \tag{D2}$$

Ha $t = 0$, akkor a primál nemlineáris minimalizálási feladat megoldására már a tizenkilencedik század eleje óta ismert a Lagrange multiplikátor elv [7]. Legyen a továbbiakban $t \neq 0$. A huszadik század közepén Morton Slater egyik cikkében [10] bevezette a következő definíciót

3.1. Definíció. *Egy (P1)-(P3) típusú feladatra azt mondjuk, hogy Slater reguláris, ha létezik olyan $x \in C$ pont, amelyre teljesül az alábbi három feltétel.*

- *x megengedett megoldás,*
- *az x pont C-beli megengedett irányainak kúpja egyenlő $lin(C)$-vel, ahol $lin(C)$ a C által generált lineáris altér,*
- *ha g_i nemlineáris, akkor $g_i(x) < 0$, $(1 \leq i \leq s)$.*

Kuhn és Tucker egy későbbi cikkükben [6] publikálták ehhez kapcsolódó tételüket, viszont nem sokkal ezután kiderült, hogy ugyanezt már Karush is kimondta pár évvel korábban [4], ezért a köznyelvben Karush-Kuhn-Tucker tételként (KKT) terjedt el.

Legyen a továbbiakban $f, g_i : C \to \mathbb{R}$ konvex függvények folytonosan differenciálhatóak C egy nyílt környezetében ($1 \leq i \leq s$), valamint $h_j : C \to \mathbb{R}$ affin függvények ($1 \leq j \leq t$), és legyen a feladat Slater-reguláris (3.1). Ekkor teljesül az erős dualitás, azaz létezik és egyenlő a primál és a duál optimum.

3.2. Tétel. *(Karush-Kuhn-Tucker)*
Ha egy (P1)-(P3) típusú feladat Slater reguláris, akkor egy megengedett x^* megoldás pontosan akkor optimális, ha léteznek $\lambda_i^* \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq s$), $\nu_j^* \in \mathbb{R}$ ($1 \leq j \leq t$) számok, úgy, hogy a következők teljesülnek.

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{t} \nu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0 \tag{7}$$

$$\lambda_i^* \geq 0 \qquad (1 \leq i \leq s) \tag{8}$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0 \qquad (1 \leq i \leq s) \tag{9}$$

$$g_i(x^*) \geq 0 \qquad (1 \leq i \leq s) \tag{10}$$

$$h_j(x^*) = 0 \qquad (1 \leq j \leq t) \tag{11}$$

Bizonyítás. Legyen x^* primál, (λ, ν) duál optimum. (A Slater regularitás miatt ilyenek léteznek.)

$$\begin{aligned} f(x^*) &= d(\lambda^*, \nu^*) \\ &= \min_{x \in C} L(x, \lambda^*, \nu^*) \\ &\leq L(x^*, \lambda^*, \nu^*) \\ &= f(x^*) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^* g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{t} \nu_j^* h_j(x^*) \\ &\leq f(x^*) \end{aligned}$$

Mivel végig egyenlőséggel teljesülnek az egyenlőtlenségek, így egyrészt tejesülnek a komplementaritási feltételek is, azaz

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \ (1 \leq i \leq s).$$

Másrészt x^* minimalizálja $L(x, \lambda^*, \nu^*)$-t, így L gradiensének x^*-ban 0-nak kell lennie, azaz

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{t} \nu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0$$

□

3.3. Megjegyzés. Érdekes észrevétel, hogy (x^*, λ^*, ν^*) az L Lagrange függvénynek nyeregpontja, mert míg rögzített λ^*, ν^* mellett, mint láttuk, x^* minimalizál, ugyanakkor rögzített x^* mellett λ^*, ν^* maximalizál.

$$\begin{aligned} L(x^*, \lambda^*, \nu^*) &= f(x^*) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^* g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{t} \nu_j^* h_j(x^*) \\ &\leq f(x^*) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{t} \nu_j h_j(x^*) \\ &= L(x^*, \lambda, \nu) \end{aligned}$$

4. Primál-duál felírás

Ebben a fejezetben a feladat primál duál típusú felírását végezzük el. Ehhez először is tisztázzuk a később használt input adatokat, indexhalmazokat és változókat (ugyan mindezek közül sokról már esett szó). Ezután a kezdeti legegyszerűbb esetből elindulva építjük fel a feltételrendszert, a bonyolultabbakon át egészen a végső, a megoldó programunkban is használt felírásig.

4.1. Input adatok

Az input adataink két részből állnak, a 2.2 alfejezetben tárgyalt ajánlattípusokból, és a rendszerirányító által előre óránként megadott határmetszék kapacitásokból. Így még egyszer vázlatosan nézzük át az általunk használt ajánlattípusokat is.

- **Órásajánlatok:** Egy o órásajánlat olyan

  $$o = (Q_o, P_o^0, P_o^1, m_o, h_o)$$

  ötöst jelent, amelyben $Q_o \in \mathbb{R}$ a felajánlott mennyiség ($Q_o < 0$, ha o vételi ajánlat és $Q_o > 0$, ha o eladási ajánlat), P_o^0 az ajánlat elfogadásának kezdeti ára, P_o^1 az ajánlat teljes elfogadásának ára ($P_o^0 \geq P_o^1$, ha o vételi ajánlat és $P_o^0 \leq P_o^1$, ha o eladási ajánlat), m_o a piac ahol az ajánlatot közzétették, h_o az óra amire az ajánlat vonatkozik.

- **Blokkajánlatok:** Egy b blokkajánlat jelentése olyan

  $$b = (\{Q_{b,h}\}_{h \in H}, P_b, m_b, Hours_b)$$

  négyes, ahol $Q_{b,h}$ a $h \in Hours_b$ órára felajánlott mennyiség, P_b a blokkajánlat egységára, m_b a piac ahol az ajánlatot közzétették, $Hours_b$ pedig azoknak az óráknak a halmaza, amikre az ajánlat vonatkozik.

- **MIC-ajánlatok:** Egy e MIC-ajánlat nem más, mint egy speciális lépcsős eladási órásajánlat halmaz (egy órában több is lehet), amihez megadunk még egy F (fix, indítási költség (EUR)) és egy V (változó, előállítási költség (EUR/MWh)) értéket. Így

  $$e = (\{Q_{oe}\}_{oe \in e}, \{P_{oe}\}_{oe \in e}, m_e, MIC_e, F_e, V_e),$$

  ahol MIC_e az órásajánlatok halmaza (csak maga az óra amire vonatkozik), Q_{oe} az $oe \in MIC_e$ órásajánlat eladási vagy vételi felajánlott mennyisége, P_{oe} az

$oe \in MIC_e$ órásajánlat elfogadási ára, m_e a piac amira az ajánlat vonatkozik, F_e és V_e pedig rendre az előbb tárgyalt indítási és előállítási költség.

- **ATC-kapacitáskorlátok:** A rendszerirányító által előre publikált maximális megengedett áram folyamértéke az l ATC-élen a h órában legyen

$$Capacity_{l,h}.$$

Modellünkben az élek irányítottak, és értelemszerűen két különböző piacot kapcsolnak össze, így $l = (m_1, m_2)$, ahol m_1 és m_2 különböző piacok. (A megadott élek halmazát ismertnek vesszük. Mivel mi csak a Csehország, Szlovákia, Magyarország, Románia négyes közti kereskedelmet vizsgáljuk, így a mi esetünkben ez $\{CZ - SK, SK - CZ, SK - HU, HU - SK, HU - RO, RO - HU\}$, ahogy ez földrajzilag is adott.)

4.2. Indexhalmazok

A modellben az alábbi indexhalmazokat, segédhalmazokat és jelöléseket fogjuk használni.

M:	A vizsgált piacok halmaza. (Ez nálunk a Csehország, Szlovákia, Magyarország, Románia négyes.)
H:	A vizsgált órák halmaza. Mivel a DAM piac csak egy napra vonatkozik, így ez legfeljebb [1..24]
O:	A beérkezett órásajánlatok halmaza.
B:	A beérkezett blokkajánlatok halmaza.
MIC:	A beérkezett MIC-ajánlatok halmaza.
L:	A piacok közti irányított ATC élek halmaza, $l = m_1 m_2 \in L \subseteq M \times M$
$O_{m,h} \subseteq O$:	Az $m \in M$ piacra, a $h \in H$ órában beérkező órásajánlatok halmaza. ($\forall\ (m,h) \in (M \times H)$ párra.)
$B_{m,h} \subseteq B$:	Azoknak a blokkajánlatoknak a halmaza, amelyek az $m \in M$ piacra a $h \in H$ órában nem 0 mennyiséget kínálnak vételre/eladásra. ($\forall\ (m,h) \in (M \times H)$ párra.)

$MIC_{m,h} \subseteq MIC$: Azoknak a MIC-ajánlatoknak a halmaza, amelyek az $m \in M$ piacra a $h \in H$ órában nem 0 mennyiséget kínálnak eladásra. ($\forall\ (m,h) \in (M \times H)$ párra.)

$LinesFrom_m \subseteq L$: Azoknak az $l \in L$ ATC éleknek a halmaza, amelyeknek a kezdőpontja az $m \in M$ piac. ($\forall\ m \in M$ piacra.)

$LinesTo_m \subseteq L$: Azoknak az $l \in L$ ATC éleknek a halmaza, amelyeknek a végpontja az $m \in M$ piac. ($\forall\ m \in M$ piacra.)

4.3. Változók

A modell felírásához a következő alapváltozókat fogjuk később használni. (A kellő segédváltozókat majd előfordulásuk idején vezetjük be.)

$0 \leq x_o \leq 1$: Az $o \in O$ órásajánlat párosításának mértéke. ($\forall\ o \in O$ órásajánlatra.)

$0 \leq x_{oe} \leq 1$: Az oe MIC-ajánlatbeli órásajánlat párosításának mértéke. ($\forall oe \in MIC_e\ \forall e \in MIC$ órásajánlatra.)

$x_e \in \{0,1\}$: Az $e \in MIC$ MIC-ajánlat párosításának mértéke. ($\forall\ e \in MIC$ MIC-ajánlatra.)

$x_b \in \{0,1\}$: A $b \in B$ blokkajánlat párosításának mértéke. ($\forall\ b \in B$ blokkajánlatra.)

$0 \leq f_{l,h}$: Az $l \in L$ ATC élen átfolyó tényleges árammennyiség a $h \in H$ órában. ($\forall\ (l,h) \in L \times H$ párra.)

$mcp_{m,h}$: Az $m \in M$ piac piactisztító ára a $h \in H$ órában. ($\forall\ (m,h) \in M \times H$ párra.)

$0 \leq atcp_{l,h}$: Az $l \in L$ ATC él határmetszék torlódási ára a $h \in H$ órában. ($\forall\ (l,h) \in L \times H$ párra.)

4.4. Az alapfeladat felírása

Kezdetben nézzük a feladatunkat csak lépcsős órásajánlatokkal. Ezeknél $P_o^0 = P_o^1$, így ideiglenesen ezek helyett a P_o jelölést használjuk mindkettőre. Célunk a social welfare, azaz a termelői és fogyasztói többlet, valamint a rendszerirányítói bevételek összegének maximalizálása. Ezt a 2.3 alfejezetben látható módon leegyszerűsíthetjük (ráadásul most csak a lépcsős órásajánlatokra vonatkozó részeket tartjuk meg). Így az egyszerűsített célfüggvényünk amelyet maximalizálni szeretnénk:

$$\sum_{\substack{o \in O \\ P_o^0 = P_o^1}} -Q_o \; P_o \; x_o.$$

A primál feladatban a változóinkra tett megkötéseken kívül csak annyit kötünk ki, hogy a betett és a kivett áram mennyisége minden piacra és minden órára megegyezzen. Emiatt a primál feladatunk a következő (a feltételek alatt mindegyiknél jobboldalt zárójelben szerepel a neki megfelelő duál változó).

$$\max \; -\sum_{o \in O} Q_o \; P_o \; x_o \tag{12}$$

$$\sum_{o \in O_{m,h}} Q_o \; x_o = \sum_{l \in LinesFrom_m} f_{l,h} - \sum_{l \in LinesTo_m} f_{l,h} \tag{13}$$

$$\forall (m,h) \in M \times H \qquad (mcp_{m,h})$$

$$0 \leq x_o \leq 1 \tag{14}$$

$$\forall o \in O \qquad (s_o)$$

$$0 \leq f_{l,h} \leq Capacity_{l,h} \tag{15}$$

$$\forall (l,h) \in L \times H \qquad (atcp_{l,h})$$

		0	0			
		$\geq$	$\geq$			
		x	f			
	$y_1 = mcp$	A	B	$=$	0
$0 \leq$	$y_2 = s$	I	0	$\leq$	1
$0 \leq$	$y_3 = atcp$	0	I	$\leq$	Cap
		$\leq$	$\leq$			
		QP	0			

1. táblázat. A feladat dualitástételhez használt mátrixos alakja.

A fenti ábrán az $A \in \mathbb{R}^{|M||H| \times |O|}$ mátrixot definiáljuk elemeivel. Minden sor megfelel egy piac-óra párnak, és minden oszlop egy lépcsős órásajánlatnak. Jelölje $a_{(m,h),o}$ a mátrix (m, h) sorához és o órásajánlathoz tartozó elemét. Legyen ekkor

$$a_{(m,h),o} = \begin{cases} -Q_o, & \text{ha } m = m_o \text{ és } h = h_o \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Ehhez hasonlóan a $B \in \mathbb{R}^{|M||H| \times |L||H|}$ mátrixban minden sor egy piac-óra párnak és minden oszlop egy irányított ATC él-óra párnak felel meg. Jelölje $b_{(m,h_1),(l,h_2)}$ a mátrix (m, h_1) sorához és $l = (m_1, m_2)$ él, h_2 óra párhoz tartozó elemét, ahol az l él az m_1 piacról megy az m_2 piacra. Legyen ekkor

$$b_{(m,h_1),(l,h_2)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } m = m_1 \text{ és } h_1 = h_2 \\ -1, & \text{ha } m = m_2 \text{ és } h_1 = h_2 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Ezen kívül itt a Cap rövidítéssel jelöltük az ATC kapacitások vektorát, amelynek az (l, h) párhoz tartozó eleme $Capacity_{l,h}$. Valamint a $-QP$ jelölést használtuk arra a

vektorra, aminek az o ajánlathoz tartozó eleme $-Q_o\ P_o$. (Az I természetesen a megfelelő méretű identitásmátrixot jelöl.)

Mint az ábráról is leolvasható, ha a duális y megoldásunk (13) feltételekhez tartozó részét $mcp_{m,h}$-val, a (14) részhez tartozóakat s_o-val és a (15) részhez tartozóakat $atcp_{l,h}$-val jelöljük, akkor az alábbi duális feltételeket kapjuk. (Egy feltétel alatt jobboldalt zárójelben szerepel, hogy mi a neki megfelelő primál változó.)

$$\sum_{\substack{m\in M\\ m=m_o\\ h=h_o}} mcp_{m,h}\ -Q_o+s_o \geq -Q_o\ P_o \tag{16}$$

$$\forall o\in O \qquad (x_o)$$

$$\sum_{\substack{m\in M\\ m=m_1}} mcp_{m,h} - \sum_{\substack{m\in M\\ m=m_2}} mcp_{m,h} + atcp_{l,h} \geq 0 \tag{17}$$

$$\forall l=(m_1m_2)\in L,\ \forall h\in H \qquad (f_{l,h})$$

Így kisebb átalakításokkal és egyszerűsítésekkel a duális feladatot a következő formában írhatjuk fel. (Az eddigiekhez hasonlóan szintén minden, a mátrix oszlopaiból kapott feltétel alatt jobboldalt zárójelben szerepel, mi a neki megfelelő primál változó.)

$$\min \sum_{o\in O} s_o + \sum_{\substack{l\in L\\ h\in H}} Capacity_{l,h}\ atcp_{l,h} \tag{18}$$

$$Q_o(mcp_{m_o,h_o}-P_o)\leq s_o \tag{19}$$

$$\forall o\in O \qquad (x_o)$$

$$mcp_{m_2,h}-mcp_{m_1,h}\leq atcp_{l,h} \tag{20}$$

$$\forall l=(m_1m_2)\in L,\ \forall h\in H \qquad (f_{l,h})$$

$$0\leq s_o \tag{21}$$

$$\forall o\in O$$

$$0\leq atcp_{l,h} \tag{22}$$

$$\forall (l,h)\in L\times H$$

Így máris érthető, miért ekképpen neveztük el a duális változónk részeit, hiszen a kapott $mcp_{m,h}$ értékek éppen az m piacon, a h órában kialakuló piactisztító árak, s_o éppen az o órásajánlat árnyékára, azaz a termelői vagy fogyasztói többletben megjelenő haszna, míg $atcp_{l,h}$ éppen az l ATC élnek a h órában lévő torlódási ára, azaz az egységenkénti rendszerirányítói bevétel az adott élen az adott órában.

Mivel mind a primál, mind a duál feladatnak létezik felső korlátja és megoldása, így alkalmazhatjuk a dualitástételt, azaz kiderül, hogy az első, mennyiség maximalizálási

feladat optimuma, melyben csak az ajánlatokhoz tartozó elfogadási döntési változókat és a határmetszék áramokat használtuk, megegyezik a második, minimális árazási feladat optimumával, amiben pedig csak a piactisztító árakat, az ajánlatok árnyékárait és a torlódási árakat használtuk.

A komplementaritási feltételek miatt továbbá, ha (x, f) és $(mcp, s, atcp)$ optimális megoldások, akkor

$$s_o > 0 \Longrightarrow x_o = 1$$

és hasonlóan

$$atcp_{l,h} > 0 \Longrightarrow f_{l,h} = Capacity_{l,h}$$

4.5. Bővített feladat KKT-felírása

Ha belekerülnek a feladatba a blokkajánlatok is, az azokra vonatkozó egészértékűségi megkötés miatt a feladatunk egy vegyes egészértékű programozási feladattá (MIP) válik. Ha viszont a lineáris órásajánlatoktól nem tekintünk el, a célfüggvényünk válik kvadratikussá, így a feladat egy kvadratikus programozási feladatként (QP) lenne felírható. Így ha figyelembe vesszük mind az összes órásajánlatot, mind a blokkajánlatokat, akkor egy vegyes egészértékű kvadratikus programozási feladatként (MIQP) fogalmazhatjuk meg a problémát.

Írjuk fel a bepárosított mennyiségeket maximalizáló feladatot abban az esetben, mikor lineáris órásajánlatok és fill-or-kill tulajdonságú blokkajánlatok is vannak.

$$\max \; -\sum_{o \in O} Q_o (P_o^0 \; x_o + \frac{P_o^1 - P_o^0}{2} x_o^2) - \sum_{b \in B} \sum_{h \in Hours_b} Q_{b,h} \; P_b \; x_b \tag{23}$$

$$\sum_{o \in O_{m,h}} Q_o \; x_o + \sum_{b \in B_{m,h}} Q_{b,h} \; x_b = \sum_{l \in LinesFrom_m} f_{l,h} - \sum_{l \in LinesTo_m} f_{l,h} \tag{24}$$

$$\forall (m,h) \in M \times H$$

$$0 \leq x_o \leq 1 \qquad \forall o \in O \tag{25}$$

$$0 \leq x_b \leq 1 \qquad \forall b \in B \tag{26}$$

$$0 \leq f_{l,h} \leq Capacity_{l,h} \qquad \forall (l,h) \in L \times H \tag{27}$$

$$x_b \in \mathbb{Z} \qquad \forall b \in B \tag{28}$$

Itt a (24) feltételekhez az $mcp_{m,h}$, a (25) feltételekhez az s_o^0, és az s_o^1, a (26) feltételekhez az s_b^0, és az s_b^1 és a (27) feltételekhez az $atcp_{l,h}$ duális változók tartoznak.

Mivel kíváncsiak vagyunk a duális változók értékeire is, írjuk fel az aukció feltételeit is, melyekben azok is szerepelnek. Ez a feltételrendszer megegyezik a Karush-Kuhn-Tucker tétel által adott feltételekkel.

$$Q_o(P_o^0 + (P_o^1 - P_o^0)x_o) - Q_o\ mcp_{m_o,h_o} + (s_o^1 - s_o^0) = 0 \qquad \forall o \in O \qquad (29)$$

$$(1 - x_o)s_o^1 = 0 \qquad \forall o \in O \qquad (30)$$

$$x_o\ s_o^0 = 0 \qquad \forall o \in O \qquad (31)$$

$$\sum_{h \in Hours_b} Q_{b,h}\ P_b - \sum_{h \in Hours_b} Q_{b,h}\ mcp_{m_b,h} + (s_b^1 - s_b^0) = 0 \qquad \forall b \in B \qquad (32)$$

$$(1 - x_b)s_b^1 = 0 \qquad \forall b \in B \qquad (33)$$

$$x_b\ s_b^0 = 0 \qquad \forall b \in B \qquad (34)$$

$$mcp_{m_2,h} - mcp_{m_1,h} = atcp_{l,h} - atcp_{\bar{l},h} \qquad \forall l = m_1m_2 \in L, \forall h \in H \qquad (35)$$

$$atcp_{l,h}(Capacity_{l,h} - f_{l,h}) = 0 \qquad \forall (l,h) \in L \times H \qquad (36)$$

Itt $\bar{l}$-ként hivatkozunk az l él fordítottjára, azaz $l = m_1m_2$ esetén $\bar{l} = m_2m_1$.

A kapott KKT feltételekben szereplő, eddig nem látott s_o^0, s_o^1, s_b^0, s_b^1 változók rendre az órás- és blokkajánlatok pozitív és negatív árnyékárai, vagyis az adott ajánlat elfogadottsága alapján a fogyasztói, termelői többletben megjelenő haszna.

A blokkajánlatok egészértékűsége miatt egyszerű primál duál megoldáspár nem írható fel. Emiatt nézzük az összes feltételt, a primál feladatot és az optimalitási feltételeket egyszerre, a hozzátartozó (23) célfüggvénnyel együtt. Ekkor egy olyan (x^*, f^*), $(mcp^*, atcp^*, s^{0*}, s^{1*})$ megoldáspár, ami teljesíti a (24)-(28) feltételeket, valamint igazak rá a (29)-(36) KKT optimalitási feltételek is, optimális megoldása lesz a feladatnak, a (23) célfüggvény mellett.

Az egyetlen probléma, ami könnyen kiolvasható a fentiekből, hogy ezek nem lineáris feltételek, viszont ezt a problémát könnyen tudjuk kezelni, ha implikáció típusú alakban írjuk fel a feltételeinket.

4.6. Linearizált feltételrendszer

Az előző fejezet észrevétele alapján, a primál feladat feltételeit (24)-(28) és a célfüggvényt (23) megtartva, próbáljuk meg lineáris feltételekkel kezelni az ajánlatok elfogadottságát, valamint a piactisztítóárak és a torlódási árak kapcsolatát.

Az $o \in O$ ajánlathoz tartozó x_o változótól a következőt várjuk el, ha o eladási ajánlat

$$x_o = \begin{cases} 1, & \text{ha } P_o^1 \leq mcp_{m_o,h_o} \\ \frac{P_o^1 - mcp_{m_o,h_o}}{P_o^1 - P_o^0}, & \text{ha } P_o^0 \leq mcp_{m_o,h_o} < P_o^1 \\ 0, & \text{ha } mcp_{m_o,h_o} < P_o^0 \end{cases}$$

és

$$x_o = \begin{cases} 0, & \text{ha } P_o^1 < mcp_{m_o,h_o} \\ \frac{P_o^0 - mcp_{m_o,h_o}}{P_o^0 - P_o^1}, & \text{ha } P_o^1 \leq mcp_{m_o,h_o} < P_o^0 \\ 1, & \text{ha } mcp_{m_o,h_o} \leq P_o^0 \end{cases}$$

ha o vételi ajánlat. Szerencsére a mennyiségi megkötésünkkel ezt a két esetet könnyen egy kalap alá vonhatjuk. Így implikáció típusú alakban felírva ugyanez a kettő:

$$0 < Q_o(P_o^1 - mcp_{m_o,h_o}) \Longrightarrow x_o = 0$$

$$Q_o\ P_o^0 < Q_o\ mcp_{m_o,h_o} < Q_o\ P_o^1 \Longrightarrow x_o = \frac{P_o^1 - mcp_{m_o,h_o}}{P_o^1 - P_o^0}$$

$$Q_o(P_o^1 - mcp_{m_o,h_o}) < 0 \Longrightarrow x_o = 1$$

Ekkor a 3.1 alfejezet alapján minden órásajánlathoz be kell vezetnünk egy s_o^0 és s_o^1 bináris segédváltozót (nem ugyanaz mint a korábbiakban használt pozitív és negatív árnyékárak). Mindezt úgy szeretnénk megtenni, hogy s_o^0 legyen 0, ha az o ajánlatot biztosan el kell utasítani a kialakuló piactisztító árak miatt, hiszen out-the-money, valamint hasonlóan s_o^1 legyen 0, ha az o ajánlatot biztosan el kell fogadni, mert in-the-money. Piaci feltételekkel felírva ez a következőt jelenti

$$s_o^0 = \begin{cases} 0, & \text{ha } Q_o\ mcp_{m_o,h_o} < Q_o\ P_o^0 \\ 1, & \text{különben} \end{cases}$$

Valamint ehhez hasonlóan

$$s_o^1 = \begin{cases} 0, & \text{ha } Q_o\ mcp_{m_o,h_o} > Q_o\ P_o^1 \\ 1, & \text{különben} \end{cases}$$

Ezek után s_o^0-t és s_o^1-et beállítani és az órásajánlatokat linearizálni a következő 6 feltétellel lehet ($\forall o \in O$). (Itt is és innentől mindenütt $MAXINF$ egy kellően nagy pozitív szám.)

$$Q_o\ mcp_{m_o,h_o} \geq Q_o\ P_o^0 s_o^0 - MAXINF(1 - s_o^0) \tag{37}$$

$$x_0 \leq s_o^0 \tag{38}$$

$$Q_o\ mcp_{m_o,h_o} \leq Q_o\ P_o^1 s_o^1 + MAXINF(1 - s_o^1) \tag{39}$$

$$x_0 \geq 1 - s_o^1 \tag{40}$$

$$Q_o\ mcp_{m_o,h_o} \geq Q_o\ P_o^0 + Q_o(P_o^1 - P_o^0)x_o - MAXINF(1 - s_o^0) \tag{41}$$

$$Q_o\ mcp_{m_o,h_o} \leq Q_o\ P_o^0 + Q_o(P_o^1 - P_o^0)x_o + MAXINF(1 - s_o^1) \tag{42}$$

Ezzel a (29)-(31) KKT optimalitási feltételeket lecseréltük.

Hasonlóan egy $b \in B$ blokkajánlatnál azt szeretnénk, hogy az out-the-money ajánlatok legyenek elutasítva. Így egy $b \in B$ blokkajánlatra már összesítve az eladási és a vételi ajánlatokat a következő implikáció írható fel.

$$\sum_{h \in Hours_b} Q_{b,h}\ mcp_{m_b,h} < \sum_{h \in Hours_b} Q_{b,h}\ P_b \Longrightarrow x_b = 0$$

Itt is vezessünk be egy bináris s_b segédváltozót, ami azt jelzi, ha a b blokkajánlat out-the-money, azaz definiáljuk s_b-t a következőképpen

$$s_b = \begin{cases} 0, & \text{ha } \sum_{h \in Hours_b} Q_{b,h} mcp_{m_b,h} < \sum_{h \in Hours_b} Q_{b,h}\ P_b \\ 1, & \text{különben} \end{cases}$$

Ezután a linearizálás és s_b-k beállítása már két feltétellel megoldható ($\forall b \in B$).

$$s_b\ P_b \sum_{h \in Hours_b} Q_{b,h} - MAXINF(1 - s_b) \leq \sum_{h \in Hours_b} Q_{b,h}\ mcp_{m_b,h} \tag{43}$$

$$x_b \leq s_b \tag{44}$$

Így helyettesíthetőek a (32)-(34) kvadratikus KKT feltételek is új lineáris feltételekkel.

A maradék két KKT feltételhez szintén be kell vezetnünk két bináris segédváltozót minden élhez. Legyen $s_{l,h} = 1$, ha $f_{l,h} = Capacity_{l,h}$, különben pedig legyen 0 ($\forall l \in L$), azaz $s_{l,h}$ jelzi, ha az l él a h órában telítődik, és így torlódási árat kell utána fizetnünk. Valamint legyen $s_{l,h}^0 = 1$, ha $l = m_1 m_2$ és az m_1 és m_2 piacok közötti folyásirány l (és nem $\bar{l}$) a h órában, különben legyen $s_{l,h}^0 = 0$. (Azaz ekkor $s_{\bar{l},h} = 0$ és $s_{\bar{l},h}^0 = 1$.) Így tehát $s_{l,h}^0$ és $s_{\bar{l},h}^0$ mutatják, hogy az l, $\bar{l}$ irányított élpár közül melyiken folyik áram. Így a következő 8 lineáris feltétellel a (35)-(36) optimalitási feltételek is helyettesíthetőek.

Először is beállíthatóak a már tárgyalt s_l, s_l^0 segédváltozók. ($\forall l \in L$)

$$f_{l,h} \leq Capacity_{l,h}(1 - s_{l,h}) + MAXINF\ s_{l,h} \tag{45}$$

$$f_{l,h} \geq Capacity_{l,h}\ s_{l,h} \tag{46}$$

$$f_{l,h} \leq Capacity_{l,h}\ s_{l,h}^0 \tag{47}$$

Majd az áram két piac közti oda-vissza folyásának megakadályozása oldható meg három feltétellel: ($\forall l \in L$)

$$s_{l,h} \leq s_{l,h}^0 \tag{48}$$

$$s_{l,h}^0 + s_{\bar{l},h}^0 = 1 \tag{49}$$

$$s_{l,h} + s_{\bar{l},h} \leq 1 \tag{50}$$

Ezután kikényszeríthető a szomszédos piacok közti áregyenlőség és beállíthatóak a határmezsgye büntetőárak, ezzel helyettesítve az utolsó kettő (35)-(36) KKT optimalitási feltételt. ($\forall l = (m_1 m_2) \in L$)

$$mcp_{m_2,h} - mcp_{m_1,h} \leq +MAXINF\ s_{l,h} \tag{51}$$

$$atcp_{l,h} \geq mcp_{m_2,h} - mcp_{m_1,h} \tag{52}$$

Ezzel a alapfeladatot lineáris feltételekkel felírva is meg lehetett fogalmazni. A következő fejezetben rátérünk a MIC-ajánlatok hozzávételére.

4.7. MIC-ajánlatok hozzávétele

Az előző két alfejezetben tárgyalt kvadratikus költségfüggvényű (23) lineáris feltételekkel ((24)-(28) és (37)-(52)) felírt feladathoz vegyük hozzá a lépcsős eladási órás-ajánlathalmazokként definiált MIC-ajánlatokat is.

A MIC-ajánlatokkal van egy nagyobb probléma, hiszen azok elfogadottsága csak egy elkerülendő, kvadratikus feltétellel írható fel:

$$\sum_{oe \in MIC_e} Q_{oe}\ x_{oe}\ mcp_{m_e,h} \geq F + V(\sum_{h \in MIC_e} Q_{oe}\ x_{oe}).$$

Mint a 2.4 alfejezetben már hivatkoztunk rá, a hivatalos és most használt megoldó algoritmus ezt úgy küszöböli ki, hogy az egészértékű programozási feladatot egy branch-and-cut algoritmussal oldja meg, majd egy iterációban a paradox módon elutasított blokk-, és MIC-ajánlatok (PRMIC, PRB) közül párat (annak függvényében, hogy melyik mennyire mélyen *in-the-money* ajánlat) aktivál, majd újrakezdi az piactisztító árak kiszámítását az új fixált egészértékű változókkal. Ezzel szemben a szakirodalomban található Mehdi Madanitól és Mathieu Van Vyve-től egy cikk [9], melynek ötletét

alkalmazva át lehet alakítani az előző kvadratikus feltételt pár lineáris feltétellé. A cikk idevágó fő gondolata, hogy minden MIC-ajánlatbeli órásajánlatra megjegyezzük, hogy mennyi a profitja, majd ebből minden MIC-ajánlatra is kiszámoljuk a profitját, majd ezek segítségével fogalmazzuk meg a feltételt. Kihasználva, hogy egy MIC-ajánlatban minden órásajánlat lépcsős, kieliminálhatjuk az $mcp_{m_e,h}$ változókat.

Első körben nézzük a célvüggvény (23) változását. Ez a 2.3 alfejezetben bemutatott módon alakul, így a végső maximalizálandó (53) célfüggvény a következő lesz.

$$\begin{aligned} &-\sum_{o\in O} Q_o(P_o^0\ x_o + \frac{P_o^1 - P_o^0}{2} x_o^2) \\ &-\sum_{b\in B} P_b\ x_b \sum_{h\in Hours_b} Q_{b,h} \\ &-\sum_{e\in MIC} \sum_{oe\in MIC_e} Q_{oe}\ P_{oe}\ x_{oe} \end{aligned} \tag{53}$$

Először is az e MIC-ajánlat órásajánlatait kezeljük úgy, mintha sima órásajánlatok lennének. Ehhez a korábban alkalmazott módszerrel minden $e \in MIC$ MIC-ajánlatnak minden $oe \in MIC_e$ órásajánlatához bevezetünk két bináris segédváltozót, s_{oe}^0-t és s_{oe}^1-et a következőképpen:

$$s_{oe}^0 = \begin{cases} 0, & \text{ha } Q_{oe}\ mcp_{m_{oe},h_{oe}} < Q_{oe}\ P_{oe} \\ 1, & \text{különben} \end{cases}$$

és

$$s_{oe}^1 = \begin{cases} 0, & \text{ha } Q_{oe}\ mcp_{m_{oe},h_{oe}} > Q_{oe}\ P_{oe} \\ 1, & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor beépítve a feltételekbe, hogy egy $oe \in MIC_e$ ajánlatot nem fogadhatunk el, ha a neki megfelelő e MIC-ajánlatot nem fogadtuk el, a következő négy feltétellel elutasítjuk az out-the-money ajánlatokat, valamint ha $x_e = 1$, azaz az e MIC-ajánlatot elfogadjuk, akkor sima órásajánlatként működik tovább az oe ajánlat.

$$Q_{oe}\ mcp_{m_{oe},h_{oe}} \geq Q_{oe}\ P_{oe}\ s_{oe}^0 - MAXINF(1 - s_{oe}^0) - MAXINF(1 - x_e) \tag{54}$$

$$x_{oe} \leq s_{oe}^0 \tag{55}$$

$$Q_{oe}\ mcp_{m_{oe},h_{oe}} \leq Q_{oe}\ P_{oe}\ s_{oe}^1 + MAXINF(1 - s_{oe}^1) + MAXINF(1 - x_e) \tag{56}$$

$$x_{oe} \geq 1 - s_{oe}^1 \tag{57}$$

Vezessünk be továbbá egy valós segédváltozót minden $e \in MIC$ MIC-ajánlat minden $oe \in MIC_e$ órásajánlatához, ami az adott ajánlat profitját méri. Feltételként megfogalmazva ez a következőt jelenti.

$$prof_{oe} = \max\{0, Q_{oe}\ mcp_{m_{oe},h_{oe}}\}$$

Ezt három lineáris feltétellel érhetjük el ($\forall\ oe \in MIC_e,\ \forall e \in MIC$).

$$prof_{oe} \geq Q_{oe}(mcp_{m_{oe},h_{oe}} - P_{oe}) \tag{58}$$

$$prof_{oe} - MAXINF(1 - s^0_{oe}) \leq Q_{oe}(mcp_{m_{oe},h_{oe}} - P_{oe}) \tag{59}$$

$$prof_{oe} \leq MAXINF\ s^0_{oe} \tag{60}$$

Egy e ajánlat profitja a benne lévő órásajánlatok profitjainak összege ($\forall e \in MIC$).

$$prof_e = \sum_{oe \in e} prof_{oe} \tag{61}$$

Emellett egy $oe \in e$ órásajánlatot csak akkor fogadhatunk el, ha a neki megfelelő e MIC-ajánlatot is elfogadtuk ($\forall oe \in MIC_e,\ \forall e \in MIC$).

$$x_{oe} \leq x_e \tag{62}$$

Ezután a bevezetett változókkal már lineáris feltétellel fel lehet írni, hogy mikor kell elfogadni egy MIC-ajánlatot ($\forall e \in MIC$).

$$F_e + V_e(\sum_{oe \in e} Q_{oe}\ x_{oe}) - MAXINF(1 - x_e) \leq \sum_{oe \in e} Q_{oe}\ P_{oe}\ x_{oe} + prof_e \tag{63}$$

Így figyelembe vettük az összes MIC-ajánlatot is.

A teljesség kedvéért meg kell jegyezni, hogy ezzel még nem vagyunk készen, hiszen a (24) feltételt egy kicsit meg kell változtatni, hogy a MIC-ajánlatok oda is bekerüljenek. Logikusan ezt a következő (64) feltétellel tudjuk megfogalmazni ($\forall\ (m, h) \in M \times H$).

$$\sum_{o \in O_{m,h}} Q_o\ x_o + \sum_{b \in B_{m,h}} Q_{b,h}\ x_b + \sum_{\substack{h_{oe}=h \\ oe \in e \\ e \in MIC}} Q_{oe}\ x_{oe} = \tag{64}$$

$$= \sum_{l \in LinesFrom_m} f_{l,h} - \sum_{l \in LinesTo_m} f_{l,h}$$

Így összeségében a (25)-(28), (37)-(52) és (54)-(64) lineáris feltételek a (53) célfüggvény mellett figyelembe veszik az órás-, blokk- és MIC-ajánlatokat és a (29)-(36) KKT feltételek beágyazása miatt, egy optimális megoldása a MIQP feladatnak optimális megoldása a kvadratikus KKT feltételekkel felírt eredeti feladatnak is.

5. Numerikus Implementáció

Miután az előző fejezetekben felírtuk a probléma matematikai modelljét, ebben a fejezetben végigtárgyaljuk az implementáció lépéseit. Először a Pythonban írt kódot és a futtatási környezetet nézzük meg, majd ezek után pár példával teszteljük a programot.

5.1. Futtatási környezet

A Pythonban írt program *main_ optimizer* főprogramja önmagában is futtatható, egy előre megadott példafájl adataival, de a futtatásnál a program neve után paraméterként megadható annak az excelfájlnak a neve is, amelyikből az input adatainkat szeretnénk kiszedni. Ugyanennek a fájlnak az egyik fülére írjuk ki rendezetten a végén az optimális eredményeket.

5.1.1. Excel

Az excel sémában az adataink 5 táblába vannak rendezve, ezek rendre az órásajánlatok, blokkajánlatok, ATC kapacitások, MIC-ajánlatok és Optimalizáló nevű füleken vannak.

Az első fülön minden egyes órásajánlathoz tartozik egy sor, ebben szerepelnek az ajánlat adatai (óra, mennyiség, ár eleje, ár vége, régió). Itt a mennyiség mindenképpen pozitív, vételi ajánlatoknál is. Ezen kívül a többi adatot az ajánlathoz tartozó paraméterötösnek megfelelően kapjuk meg. Ezenkívül szerepel minden sorban még egy azonosító (ID) és egy szám, ami azt jelöli, hogy eladási vagy vételi-e az ajánlat. (Ebben az oszlopban 0-val jelöljük, ha egy ajánlat vételi és 1-el, ha eladási.)

ora	mennyiseg	ar_eleje	ar_vege	ID	Buy=0/Sell=1	region
1	10	11	12	1	1	cz
1	5	16	15	2	0	cz
1	10	16	15	3	0	sk
1	5	11	12	4	1	sk

11. ábra. Órásajánlatok ábrázolása Excel-ben

A második fülön az elsőhöz hasonlóan minden blokkajánlat minden órájához tartozik egy sor, amely az ajánlat paramétereit mutatja (óra, mennyiség, egységár, régió), valamint az előzőhöz hasonlóan egy ID és egy bináris paraméter. (Itt ugyanúgy, mint az előbb 0-val jelöljük, ha egy ajánlat vételi és 1-gyel, ha eladási.)

ora	mennyiseg	ar	Buy=0/Sell=1	region	ID
1	10	11	1	cz	1
2	10	11	1	cz	1
1	10	11	1	cz	2
2	10	11	1	cz	2

12. ábra. Blokkajánlatok ábrázolása Excel-ben

A harmadik fülön található táblázatból minden élnek minden órabeli megengedett maximális ATC-kapacitása olvasható le.

	hu	sk	cz	sk	hu	ro
Orak	sk	hu	sk	cz	ro	hu
1	1414	586	723	2477	971	379
2	1414	586	765	2435	971	379

13. ábra. ATC-kapacitás korlátok ábrázolása Excel-ben

A negyedik fülön az korábbiakhoz hasonlóan minden MIC-ajánlat minden órásajánlatához tartozik egy sor, ami az ajánlat paramétereit mutatja (óra, mennyiség, egységár, régió), valamint minden MIC-ajánlathoz tartozik szintén egy ID és a megfelelő indítási és fenntartási költség.

ora	mennyiseg	ar	ID	region	inditasi_koltseg	uzemi koltseg
1	10	10	1	cz	0	10
3	10	10	1	cz	0	10
6	10	10	1	cz	0	10

14. ábra. MIC-ajánlatok ábrázolása Excel-ben

Az utolsó *Optimalizáló* nevű fülön kezdetben csak egy Optimalizáló feliratú gomb található. Ha erre rákattintunk, lefuttatjuk a *main_optimizer* kódot, az adott fájl bemeneti adataival. A Python kód lefutása után megjelenik minden órás-, blokk- és MIC-ajánlat optimális elfogadottsága és a MIC-ajálatok órás-ajánlatainak elfogadottsága egyesével is. (A korábbi felírásokban ezekre rendre az x_o, x_b, x_e, x_{oe} jelöléseket használtuk.) Ezen kívül megjelenik a célfüggvény optimális értéke, valamint minden más változó, a határmetszék áramok ($f_{l,h}$), a torlódási árak ($atcp_{l,h}$) és a piactisztító árak ($mcp_{m,h}$) is.

Optimalizáló	Optimalis	megoldas erteke:		60
Orasajanlatok	4	2	1	3
Elfogadottsag	1	1	1	1
Blokkajanlatok				
Elfogadottsag				
Hatarokon atfolyo	sk	cz		
aram mennyisege	cz	sk		
1	0	5		
Hatarmezsgye	sk	cz		
buntetoarak	cz	sk		
1	0	0		
Piactisztito ar	sk	cz	ro	hu
1	12	12	0	0

15. ábra. Az *Optimalizáló* fül Excel-ben, a kód lefutása után

Miután a Python kóddal az input adatokat beolvastuk az excelfájlból megfelelő, erre a célra írt adatszerkezetekbe, importálunk egy pyomo nevű Python könyvtárat, amelynek segítségével felállítható és kezelhető a modellünk.

5.1.2. Pyomo

A pyomo egy Python package, amellyel könnyedén írhatóak fel optimalizációs problémák modelljei Python nyelven. A felírt modell ezután átadható egy a pyomoval kompatibilis solvernek, amelynek a pyomo a saját nyelvére átfordítja a modellt. A csomag nagyon sok solverhez biztosít interface-t, köztük a legnépszerűbbekkel: *AMPL, Gurobi, XPRESS, CPLEX, CBC, PICO, GLPK*. A feladat megoldása után a solver a megoldást visszaadja a pyomonak, így innentől könnyen kezelhetőek a kapott eredmények.

A fentiek segítségével könnyen megadhatjuk, milyen elérhető MIQP-solverrel oldjuk meg a feladatot. Ezt a *Gurobi* és az *XPRESS* programokkal teszteltük, a kettő közötti váltás valóban csak egy név átírása volt a kódban.

Végül a solver által megadott eredmények egy szintén Pythonban megírt kóddal írathatóak ki az eredeti excelfájl *Optimalizáló* nevű fülére.

5.2. Példafutások

Az első és legegyszerűbb példában 2-2 órásajánlat van Szlovákiában és Csehországban, nincs blokkajánlat, és a kapacitások tekinthetőek végtelennek.

ora	mennyiseg	ar_eleje	ar_vege	ID	Buy=0/Sell=1	region
1	10	11	12	1	1	cz
1	5	16	15	2	0	cz
1	10	16	15	3	0	sk
1	5	11	12	4	1	sk

16. ábra. 1. példa: ajánlatok

Könnyen látható, hogy ekkor az optimális megoldásban minden ajánlatot teljesen elfogadunk, és átfolyik 5 MWh áram a két piac közt. Az optimalizálás után a program is ezt hozza ki eredményül.

Optimalizáló	Optimalis	megoldas erteke:		60
Orasajanlatok	4	2	1	3
Elfogadottsag	1	1	1	1
Blokkajanlatok				
Elfogadottsag				
Hatarokon atfolyo	sk	cz		
aram mennyisege	cz	sk		
1	0	5		
Hatarmezsgye	sk	cz		
buntetoarak	cz	sk		
1	0	0		
Piactisztito ar	sk	cz	ro	hu
1	12	12	0	0

17. ábra. 1. példa: optimalizált

A második példa azt szemlélteti, mikor betelik a teljes kapacitás. Dolgozzunk ugyanazokkal az ajánlatokkal, mint korábban, de csak $3MWh$ áteresztőképességgel Csehország és Szlovákia közt. (Az előzőekben $5MWh$ áram folyt át.) Ekkor már nehezebben számolható ki az optimum, de a program gyorsan megmondja a legjobb megoldást,

aminek az eléréséhez két ajánlatot teljesen, kettőt pedig csak 0.8 részben kell elfogadnunk.

Optimalizáló	Optimalis	megoldas erteke:		53.6
Orasajanlatok	4	2	1	3
Elfogadottsag	1	1	0.8	0.8
Blokkajanlatok				
Elfogadottsag				
Hatarokon atfolyo	sk	cz		
aram mennyisege	cz	sk		
1	0	3		
Hatarmezsgye	sk	cz		
buntetoarak	cz	sk		
1	0	3.4		
Piactisztito ar	sk	cz	ro	hu
1	15.2	11.8	0	0

18. ábra. 2. példa: kis kapacitás

A harmadik példa egy olyan eshetőséget mutat be, amikor egy in-the-money blokkajánlatot elutasítunk. Itt két órásajánlat van és két blokkajánlat, de már az elsővel kielégíthető mindkét órásajánlat, így a másodikat kénytelenek vagyunk elutasítani.

ora	mennyiseg	ar_eleje	ar_vege	ID	Buy=0/Sell=1	region
1	10	16	15	1	0	cz
2	10	16	15	2	0	cz

ora	mennyiseg	ar	Buy=0/Sell=1	region	ID
1	10	11	1	cz	1
2	10	11	1	cz	1
1	10	11	1	cz	2
2	10	11	1	cz	2

19. ábra. 3. példa: órás- és blokkajánlatok

Mint láthatjuk, a program optimális megoldása valóban ezt adja ki eredményül.

Optimalizáló	Optimalis	megoldas erteke:		90
Orasajanlatok	1	2		
Elfogadottsag	1	1		
Blokkajanlatok	2	1		
Elfogadottsag	0	1		
Hatarokon atfolyo	sk	cz		
aram mennyisege	cz	sk		
1	0	0		
2	0	0		
Hatarmezsgye	sk	cz		
buntetoarak	cz	sk		
1	0	0		
2	0	0		
Piactisztito ar	sk	cz		
1	15	15		
2	7	7		

20. ábra. 3. példa: optimalizált

A negyedik példa két részből áll, amelyek a MIC-ajánlatok feldolgozását hivatottak mutatni. Ebben szerepel 7 órásajánlat, különböző órákra, az első $8MWh$ a többi $10MWh$ felajánlással.

ora	mennyiseg	ar_eleje	ar_vege	ID	Buy=0/Sell=1	region
1	8	12	11	1	0	cz
2	10	12	11	2	0	cz
3	10	12	11	3	0	cz
4	10	12	11	4	0	cz
5	10	12	11	5	0	cz
6	10	12	11	6	0	cz
7	10	12	11	7	0	cz

21. ábra. 4. példa: órásajánlatok

Szerepel továbbá egy blokkajánlat, mely az első órában jobban, a többiben félig tudja kielégíteni az órásajánlatokból adódó igényeket.

ora	mennyiseg	ar	Buy=0/Sell=1	region	ID
1	5	8	1	hu	1
2	5	8	1	hu	1
3	5	8	1	hu	1
4	5	8	1	hu	1
5	5	8	1	hu	1
6	5	8	1	hu	2
7	5	8	1	hu	2

22. ábra. 4. példa: blokkajánlatok

Szerepel még egy MIC-ajánlat is, amely az első 3 órára tartalmaz eladási órásajánlatot, amivel a korábbi különbség a vételi oldal javára eltüntethető. Az első esetben az indítási költség kicsi, így el tudjuk fogadni a teljes ajánlatot. (A kialakuló piactisztító árakat, torlódási büntetőárakat és határmetszék áramokat itt nem részletezzük.)

ora	mennyiseg	ar	ID	region	inditasi_koltseg	uzemi koltseg
1	10	10	1	cz	0	10
2	10	10	1	cz	0	10
3	10	10	1	cz	0	10

23. ábra. 4. példa: MIC-ajánlatok

Optimalizáló	Optimalis megoldas erteke:			147			
Orasajanlatok	6	2	5	4	7	1	3
Elfogadottsag	0.5	1	0.5	0.5	0.5	1	1
Blokkajanlatok	1	2					
Elfogadottsag	1	1					
MICajanlatok	1						
Elfogadottsag	1						
MICorasajanlatok	1	2	3				
Elfogadottsag	0.3	0.5	0.5				

24. ábra. 4. példa: optimalizált

A második esetben, azaz az ötödik és egyben utolsó példában maradjanak ugyanezek az ajánlataink, de a MIC-ajánlat indítási költségét emeljük irreálisan magasra (a fenntartási költséggel hasonlóan járunk).

ora	mennyiseg	ar_eleje	ar_vege	ID	Buy=0/Sell=1	region
1	8	12	11	1	0	cz
2	10	12	11	2	0	cz
3	10	12	11	3	0	cz
4	10	12	11	4	0	cz
5	10	12	11	5	0	cz
6	10	12	11	6	0	cz
7	10	12	11	7	0	cz

ora	mennyiseg	ar	Buy=0/Sell=1	region	ID
1	5	8	1	hu	1
2	5	8	1	hu	1
3	5	8	1	hu	1
4	5	8	1	hu	1
5	5	8	1	hu	1
6	5	8	1	hu	2
7	5	8	1	hu	2

ora	mennyiseg	ar	ID	region	inditasi_koltseg	uzemi koltseg
1	10	10	1	cz	1000	10
2	10	10	1	cz	1000	10
3	10	10	1	cz	1000	10

25. ábra. 5. példa: MIC-ajánlatok

Ekkor persze a MIC-ajánlatot nem tudjuk elfogadni, mert nem teljesül a feltétel, így csak a blokkajánlatot tudjuk elfogadni a párosításnál.

Optimalizáló	Optimalis megoldas erteke:			130.9375			
Orasajanlatok	6	2	5	4	7	1	3
Elfogadottsag	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.625	0.5
Blokkajanlatok	1	2					
Elfogadottsag	1	1					
MICajanlatok	1						
Elfogadottsag	0						
MICorasajanlatok	1	2	3				
Elfogadottsag	0	0	0				

26. ábra. 5. példa: optimalizált

Ezzel a néhány példával a legtöbb kritikus esetre kitértünk, melyekre a program jó eredményt szolgáltatott. A valóságban ezeknél nagyobb példákra is teszteltük, de mivel az összesítő táblázatok emberi szemmel olvashatóan nem férnének el egy oldalon, ezek bemutatását mellőzzük.

A nagyobb példákon való futtatások tapasztalata alapján a program a legtöbb időt az importok behívásával tölti, ugyanakkor ezt több futtatás esetén csak egyszer kell megtenni, vagy akár egy háttérben futó szerverrel ez a probléma kiküszöbölhető. A modell felépítésének és megoldásának, azaz a valós munkának az ideje a leglassabb példákon sem haladta meg az egy másodpercet. Mivel a *Euphemia* algoritmus időkor-

látja tíz másodperc, amit sokszor ki is tölt, ezért mindez azt jelenti, hogy amennyiben csak órás-, blokk- és MIC-ajánlataink vannak, akkor ez a módszer valós alternatívája lehetne a most használt *Euphemia* algoritmusnak.

6. Összegzés

A dolgozatban összeszedtük az európai árampiac elmúlt évekbeli fejlődésének lépéseit matematikai szemszögből. Egy rövid történelmi áttekintés és bevezető után megismerhettük a *Day-After-Market* és a *Market Coupling* fogalmakat. Ezután a piaci modell felírásának keretében végigvettük az európai piacon előforduló ajánlattípusokat, valamint definiáltuk a *Social Welfare*, vagyis a *Társadalmi jólét* fogalmát, amit a továbbiakban általánosan elfogadott módon, mint célfüggvényt használtunk. Belemerültünk kissé a mostani megoldási gyakorlatba is, és átfogóbb képet kaphattunk az Európaszerte használatos *Euphemia* algoritmus működéséről, ugyanakkor ezzel egyidőben a hibáiba is beleláthattunk.

Az algoritmus nem polinomiális futásideje miatt jobb módszerek után kellett nézni. Először egy rövid összefoglalót olvashattunk a számunkra hasznos szakirodalomból, a Karush-Kuhn-Tucker tételkörből. Később észrevettük, hogy az európai árampiac modelljét erősen leegyszerűsíthetjük, és ekkor egy könnyen kezelhető LP-feladathoz juthatunk. Ráadásul később kiderült, hogy az egyszerűsítés nélküli verzió, melyben a célfüggvényünk már kvadratikus, szintén felírható a Karush-Kuhn-Tucker tétel alakjában, azonban ebben a komplementaritási feltételek nem lineárisak, ami elbonyolítja a feladatot. Ezért régi bevett módszerekkel linearizáltuk a feltételrendszerünket, ugyanakkor ekkor még mindig csak az itthon használt ajánlattípusokat (órásajánlatok, blokkajánlatok) voltunk képesek kezelni. Szerencsére egy, a szakirodalom áttekintése során talált módszer átültetésével megoldást találtunk az Európában szintén széleskörűen elterjedt MIC-ajánlatok kezelésére is, úgy, hogy továbbra is a kvadratikus célfüggvényen kívül csak lineáris feltételeink maradtak. Ezzel elértük az eredeti célkitűzésünket, így egy egyszerű implementációval, tesztadatokon keresztül bizonyítottuk a módszer működőképességét.

A Python nyelven írt implementációhoz a nagyobb ismertségű *pandas, numpy* packageeken kívül használtunk egy *Pyomo* nevű csomagot is, amelynek a segítségével több különböző MIQP-solverrel is meg tudtuk oldatni a feladatot. Végigvettük még a bemeneti adatok Excel-tábláinak sémáit. Végül 5, kisebb nehézségek mellett kézzel is megoldható példán keresztül sikeresen teszteltük a program működését abban az esetben, amikor csak órásajánlatokkal, blokkajánlatokkal és MIC-ajánlatokkal kereskedhetünk a DAM árampiacon. A későbbiekben azért, hogy a *Euphemia* algoritmusnak valós versenytársa legyen a mi programunk, elengedhetetlen, hogy az Európában használt összes többi ajánlattípust is az eddigiekhez hasonlóan feldolgozzuk és lineáris feltételekkel kezeljük, amennyiben ez lehetséges.

Ugyanakkor ezen kívül is bőven maradtak kutatási kérdések későbbre. Jó volna

valósidejű, nagy adathalmazokon tesztelni a programot és a futásidejét, valamint az optimális megoldást összehasonlítani a *Euphemia* algoritmus futásidejével és az általa megadott megoldással. Szintén hasznos lenne egy érzékenységvizsgálat elvégzése, és a különböző MIQP-solverek hatékonyságának, megoldásainak vizsgálata.

Hivatkozások

[1] CWE Steering Committee, *CWE Enhanced Flow-Based MC feasibility report*, http://www.elia.be/~/media/files/Elia/Projects/Flow-based%20market%20coupling%20in%20Central%20West%20Europe/CWEFBMCfeasibilityreport2019102011.pdf

[2] R. Djabali, J. Hoeksema, Y. Langer, *COSMOS Description*, https://hupx.hu/uploads/Piacösszekapcsolás/DAM/cosmos_algoritmus.pdf, 2011

[3] EPEX SPOT, GME, Nord Pool, OMIE, OPCOM, OTE, TGE, *Euphemia Public Description*, https://www.epexspot.com/document/37644/Euphemia%20Public%20Description, 2016

[4] W. Karush, *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints, M.Sc. Dissertation, Dept. of Mathematics, Univ. of Chicago*, 1939

[5] Kovács J. V., Mádi-Nagy G, http://math.bme.hu/~gnagy/mmsz/eloadasok/KovacsJozsefViktor2015.pdf, 2015

[6] H.W. Kuhn, A.W. Tucker, *Nonlinear Programming, Proceedings of 2nd Berkeley Symposium*, University of California Press, 481–492, 1951

[7] J.L. Lagrange, *Mécanique Anaytique*, Paris, 1811

[8] J. Lobenwein, http://www.boussiasconferences.gr/files/_boussias_conferences_content/presentations/energy_commodities/2018/conference/julia_lobenwein_ec18.pdf, 2018

[9] M. Madani, M. Van Vyve *A MIP framework for non-convex uniform price day-ahead electricity auctions*, *EURO Journal on Computational Optimization*, 263–284, 2015

[10] M. Slater, *Lagrange Multipliers Revisited, Cowles Commission Discussion Paper: Mathematics 403*, 1950

[11] A villamosenergia- és gázipari szabályozó hatóságok európai csoportjának létrehozásáról, https://eur-lex.europa.eu/legal-content/HU/TXT/PDF/?uri=CELEX:32003D0796&from=HU, 2003

[12] On conditions for access to the network for cross-border exchanges in electricity, https://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2009:211:0015:0035:EN:PDF, 2009