# NYILATKOZAT

**Név:** Paulovics Zoltán

**ELTE Természettudományi Kar, szak:** Alkalmazott matematikus MSc

**NEPTUN azonosító:** MXDMOG

**Szakdolgozat címe:**
Általánosított Turán-tételek

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020. 05. 26.

Paulovics Zoltán

*a hallgató aláírása*

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

# Általánosított Turán-tételek

Paulovics Zoltán

Alkalmazott matematikus MSc, Operációkutatás szakirány

- szakdolgozat -

Témavezető:

Nagy Zoltán Lóránt

Geometriai Tanszék

Budapest, 2020

# Köszönetnyilvánítás

Hiszem, hogy az egyetem célja messze nem merül ki az előírt lexikális tudás megértésében, megtanulásában, sőt a szakterületre jellemző készségek elsajátításában sem. Az egyetem - amellett, hogy ezeket biztosította - megajándékozott rengeteg boldog pillanattal, és lehetőséget teremtett arra, hogy a kihívások és a nagyszerű emberek által a személyiségem is fejlődjön. Hálával gondolok vissza az elmúlt öt évre, mely során az oktatóimtól, szaktársaimtól rengeteg tanulhattam. Örülök, hogy az első pillanatoktól kezdve otthon érezhettem magam az épületben és a Matematika Intézetben.

Hálásan köszönöm témavezetőmnek, Nagy Zoltán Lórántnak, Zolinak, hogy elvállalt és vezetett az elmúlt két félév folyamán!

Köszönöm neki, hogy matematikusként mindig minden kérdésemre megtalálta a választ. Sőt, a kérdéseimet is megtalálta a kevésbé precíz mondataim között. Kiemelten sokat jelentett, hogy nem ragaszkodott a saját gondolatmenetéhez, megfogalmazásához, hanem mindig a lehető legnagyobb szabadságot hagyta nekem: ha kerülőutakon is, de magam fedezhettem fel a matematikát.

Köszönöm neki, hogy témavezetőként valóban témavezetőm volt: nem olyan, mint amilyet elképzeltem, hanem olyan, amilyenre leginkább szükségem volt. Sosem kínált tálcán megoldásokat, de mindig segített tisztán látni a lehetőségeket. Mindig vette a fáradtságot, hogy valamit sokadjára, újra, türelmesen elmagyarázzon. Rengeteget jelentett nekem, hogy a közös munkánk középpontja nem a kutatás, nem a matematika volt, hanem az én aktuális problémám: a rövidke és egyszerű szakdolgozatomhoz szükséges világ megismerése, melyben ő mindig otthonos házigazdaként kalauzolt.

Köszönöm neki, hogy emberként mindig megértett és elsősorban, mint ember, nem pedig mint szakdolgozó vagy hallgató tekintett rám. Nem csak a matematikáról, hanem az emberi értékekről is rengeteget tanultam általa.

„Omnia ad maiorem Dei gloriam!”

# Tartalomjegyzék

**1. Bevezetés, a szakdolgozat célja és felépítése** **6**

**2. A Turán-kérdéskör és különböző általánosításai** **8**

2.1. Turán-tételkör . . . . . 9

2.1.1. Az extremális szám bevezetése . . . . . 9

2.1.2. Speciális páros gráfokra vonatkozó esetek . . . . . 10

2.1.3. Utakra és fákra vonatkozó speciális esetek . . . . . 10

2.2. Stabilitás . . . . . 12

2.3. Szuperszaturálás . . . . . 13

2.4. Az Alon-Shikelman-féle általánosítás . . . . . 14

2.4.1. Általános eredmények . . . . . 14

2.4.2. Fákra vonatkozó speciális esetek . . . . . 16

2.5. Gráfok homomorfizmusai . . . . . 17

2.5.1. Alapvető megfigyelések . . . . . 18

2.5.2. Homomorfizmusok száma . . . . . 18

2.5.3. Algoritmikus akalmazások . . . . . 20

**3. Néhány jellemző módszer** **22**

3.1. Valószínűségi módszerek . . . . . 22

3.2. Dependent random choice . . . . . 23

3.3. Konténermódszer . . . . . 25

3.4. Szemerédi-féle regularitási lemma . . . . . 26

3.5. Algebrai, véges geometriai konstrukciók . . . . . 27

**4. Néhány eredmény feldolgozása és új tételek** **28**

4.1. Szuperszaturálás és a Dependent random choice . . . . . 28

4.2. Véletlen séták, utak száma . . . . . 33

**5. Lezárás** **35**

# 1. fejezet

# Bevezetés, a szakdolgozat célja és felépítése

A szakdolgozat célja összegyűjteni és bemutatni a Turán-tételkörhöz szorosan kapcsolódó legfontosabb eredményeket, általánosításokat, változatokat és módszereket, illetve röviden ismertetni néhány ide tartozó megfigyelést és új eredményt.

## Jelölések

A gráfokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat, definíciókat ismertnek tekintjük, a legalapvetőbb gráfelméleti ismeretekben [1] és [2] jelöléseire és felépítésére támaszkodunk. [3]-ban új témakörökkel és módszerekkel ismerkedhet meg az érdeklődő, [4] bő áttekintést ad a legfontosabb eredményekről.

Egy gráfon végig egyszerű, véges gráfot értünk, továbbá használjuk az alábbi néhány definíciót és jelölést.

$T[r]$ szokásosan a $T$ gráf $r$-felfújtját jelöli, azaz azt a gráfot, melyet úgy kapunk $T$-ből, hogy minden csúcsát egy $r$ elemű független halmazzal helyettesítjük, továbbá ha $(u, v)$ él volt $T$-ben, akkor az $u$ és $v$ csúcsokat helyettesítő független halmazok között a $K_{r,r}$ teljes páros gráfot vesszük. Ha nem egységesen $r$ méretű független halmazokkal helyettesítjük, hanem (akár különböző) tetszőleges méretűekkel, akkor a kapott gráfot felfújtnak nevezzük.

A teljes $r$-osztályú $n$ csúcsú gráfot $T_r(n)$ jelöli és Turán-gráfnak hívjuk. Vegyük

észre, hogy a Turán gráf a $K_r$ felfújtja.

Rendre $P_k$, $T_k$, $S_k$ jelöli a $k$ csúcsú utat, fát és csillagot.

## A dolgozat felépítése

A 2. fejezetben bevezetjük a Turán-kérdéskört és annak egy természetes általánosítását, az extremális számot, illetve az ezt részben megválaszoló Erdős-Stone-Simonovits-tételt. Külön részben foglalkozunk a speciális páros gráfokra, utakra, fákra vonatkozó eredményekkel. Az extremális számhoz szorosan kapcsolódó stabilitás és szuperszaturálás fogalmainak és főbb eredményeinek áttekintése után részletesebben vizsgáljuk az Alon-Shikhelman-féle általánosítást, és a gráfok homomorfizmusainak rokon problémáját.

A 3. fejezetben röviden utalunk a témakör jellemző módszereire, és kiemelten foglalkozunk azokkal, melyek számomra a kutatásban szerepet játszottak.

A 4. fejezetben vázolunk néhány új tételt, melyek a Dependent random choice és a szuperszaturálás, illetve a véletlen séták és a Blakley-Roy-egyenlőtlenség kapcsolatából születtek.

# 2. fejezet

# A Turán-kérdéskör és különböző általánosításai

Ebben a fejezetben bemutatjuk a Turán-tételt, számos általánosítását, illetve néhány hozzá szorosan kapcsolódó témakört.

Turán Pál meghatározta, hogy egy gráfnak legfeljebb mennyi éle lehet akkor, ha nem tartalmaz $r+1$ csúcsú klikket. Ennek természetes általánosításaként vizsgálható, hogy egy a gráfnak legfeljebb mennyi éle lehet, ha nem tartalmaz valamilyen előre adott $H$ gráfot részgráfként. A páros gráfok esetétől eltekintve ezen értéknek nem csak a nagyságrendje, hanem a főtagja is következik az Erdős-Stone-Simonovits-tételből, így részletesebben foglalkozunk a páros gráfok esetével, különösen a fákkal és az utakkal. Nem csak a maximális élszám meghatározása fontos, hanem az is, hogy ez a maximum melyik gráfon, gráfokon vétetik fel. Sőt, az is érdekes, hogy milyen struktúrájúak azok a gráfok, melyknek az élszáma közel van a maximálishoz. Ha egy gráf túllépi ezt a maximális élszámot, akkor persze a tiltott $H$ részgráfot tartalmazni fogja, hasznos lehet tudni, hogy „kis mértékű” túllépés esetén legalább hányszor jelenik meg $H$.

Részletesebben tárgyaljuk az Alon-Shikelman-féle általánosítás, mely a Turán-kérdéskör egy nagyon természetes általánosítása. Itt nem csak egy részgráf jelenlétét tiltjuk meg, hanem többét is, továbbá nem az éleket, hanem valamilyen előre adott gráffal izomorf részgráfokat számoljuk meg a gráfban.

A fejezet végén foglalkozunk a gráfok homomorfizmuszámával, mint egy érdekes és szorosan kapcsolódó témakörrel, melynek számos alkalmazása ismert a Turán-tételkörben. Az alapfogalmak bevezetése és néhány példa ismertetése után részletesen írunk az algoritmikus alkalmazási lehetőségekről.

## 2.1. Turán-tételkör

Ebben a részben kimondjuk az extremális gráfelmélet kezdetét jelentő Turán-tételt, bevezetjük annak a teljes részgráfokról tetszőleges $H$ tiltott gráfokra történő általánosítását, majd az ezt (részben) megválaszoló, azaz az extremális szám nagyságrendjét meghatározó Erdős-Stone-Simonovits-tételt mutatjuk be. Ezen bevezető után írunk a legfontosabb eredményekről, végül részletesen tárgyaljuk az utakra és a fákra vonatkozó speciális eseteket.

### 2.1.1. Az extremális szám bevezetése

Az extremális gráfelmélet kezdetét Mantel 1907-es [5] és Turán 1941-es [6], a Mantel-tételt általánosító eredményeihez kötik.

**2.1.1. Tétel** (Mantel [5]). *Ha a $G = (V, E)$ gráf háromszögmentes, akkor $|E(G)| \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. Továbbá az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $G$ a $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ teljes páros gráf.*

**2.1.2. Tétel** (Turán [6]). *Ha a $G = (V, E)$ gráf $K_{r+1}$-mentes, akkor $|E(G)| \leq \frac{r-1}{2r} n^2$. Továbbá az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $n$ osztható $r$-rel és $G = T_r(n)$, ahol $T_r(n)$ a teljes $r$-osztályú $n$ csúcsú Turán-gráfot jelöli.*

A Turán-tétel tehát azt mondja, hogy ha egy gráf éleinek száma elér egy kritikus határt $n$ függvényében, akkor biztosan találunk $K_{r+1}$ részgráfot, és ez a határ a $T_r(n)$ Turán-gráf élszáma.

A teljes részgráfok helyett más gráfokat létezését is megtilthatjuk, így adódik a természetes általánosítás: jelölje $ex(n, H)$ a maximális élszám értékét az $n$ csúcsú $H$-mentes gráfok között. $ex(n, H)$-t $H$ extremális számának nevezzük. Két évtizeden belül megszületett az $ex(n, H)$ értékét aszimptotikusan meghatározó tétel.

**2.1.3. Tétel** (Erdős-Stone-Simonovits [7, 8]). *Ha $\chi(H) > 1$, akkor*

$$ex(n, H) = (1 - \frac{1}{\chi(H) - 1}) \binom{n}{2} + o(n^2).$$

Ebből következik, hogy ha a $H$ gráf nem páros, akkor $ex(n, H)$-nak nemcsak a nagyságrendje adható meg, hanem a főtagja is, ezzel szemben a páros esetről annyi derül csak ki, hogy az exponens nem éri el a 2-t. Az extremális függvények meghatározása

általában a főtagig történik. Bizonyos esetekben ennél többet is tudunk; ha még az extremális struktúrát is ismerjük, akkor azt a struktúra megjelölésével tesszük meg.

Természetesen speciális gráfosztályokra ennél jobb becslést is lehet adni, néhány páros gráf esetén túl külön alfejezetben foglalkozunk az utakra és a fákra vonatkozó eredményekkel.

### 2.1.2. Speciális páros gráfokra vonatkozó esetek

**2.1.4. Tétel** (Kővári-Sós-Turán [9]). $ex(n, K_{s,t}) \leq \frac{1}{2}\sqrt[s]{t-1}n^{2-(1/s)} + \mathcal{O}(n)$.

A fenti tételt a kettős leszámlálás módszerével nem nehéz bizonyítani. Egyrészt a $G = (V, E)$ $K_{s,t}$-mentes gráfban az $s$-ágú csillagok száma $\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{s}$, másrészt legfeljebb $(t-1)\binom{n}{s}$. A Jensen-egyenlőtlenség alkalmazása és rövid számolás után adódik is a felső becslés.

**2.1.5. Tétel** (Erdős, Bondy-Simonovits [10]). $ex(n, C_{2k}) \leq 100kn^{1+(1/k)}$.

Ebből következik, hogy $ex(n, C_{2k}) \leq \mathcal{O}(n^{1+(1/k)})$, viszont csak néhány $k$-ra ismert, hogy konstans erejéig ez a valódi nagyságrend. Az alsó becslések geometriai illeszkedési struktúrákból, máshonnan nézve algebrai módszerekből jönnek.

**2.1.6. Tétel** (Erdős-Rényi-T. Sós [11], Brown [12]). $ex(n, C_4) = \Theta(n^{\frac{3}{2}})$.

**2.1.7. Tétel** (Benson [13], Singleton [14]). $ex(n, C_6) = \Theta(n^{\frac{4}{3}})$.

**2.1.8. Tétel** (Benson [13]). $ex(n, C_{10}) = \Theta(n^{\frac{6}{5}})$.

Az eredményekről bővebben például a [15, 16] cikkekben lehet olvasni.

### 2.1.3. Utakra és fákra vonatkozó speciális esetek

Ebben az alfejezetben részletesebben tárgyalunk néhány utakra és fákra vonatkozó, illetve azokkal kapcsolatos eredményt.

**2.1.9. Tétel** (Erdős-Gallai [17]). $ex(n, P_k) \leq \frac{k-2}{2}n$, *ahol* $P_k$ *a* $k$ *csúcsú utat jelöli. Továbbá az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha* $n$ *oszható* $(k-1)$*-gyel és a gráf* $K_{k-1}$*-es klikkek diszjunkt uniója.*

Legyen $T_k$ egy tetszőleges $k$-csúcsú fa, ekkor $ex(n, T_k)$-ra könnyen adhatunk alsó becslést a fenti tétel extremális gráfjának segítségével: $K_{k-1}$ gráfok diszjunkt unióját véve adódik, hogy $ex(n, T_k) \geq \frac{n}{k-1}\binom{k-1}{2} - \frac{3}{2}k^2$. Erdős és Sós sejtették [18], hogy $ex(n, T_k) \leq \frac{k-2}{2}n$; hivatalosan még csak approximált változatát bizonyították [19, 20], illetve egy vázlat jelent meg [16]-ban Ajtai, Komlós, Simonovits és Szemerédi szerzőktől.

Továbbá annak igazolása, hogy tetszőleges $T_k$ fa esetén az $ex(n, T_k)$ extremális szám $n$-ben lineáris könnyen meggondolható, hiszen indirekt például elég belátni hozzá, hogy különben létezne egy $k-1$ minimum-fokszámú részgráf, melybe mohó módon bármely $k$ csúcsú fát bele tudnánk ágyazni. A fenti részgráf létezése pedig adódik abból a megfigyelésből, hogy ha a gráf élszáma több, mint $2(k-1)n$, akkor a minimális-fokú csúcsokat törölve nő az átlagfokszám. Tehát ha mindig töröljük a $(k-1)$-nél kisebb fokú csúcsokat, akkor nem jutunk az üres gráfhoz, és valamikor megtaláljuk a keresett részgráfot.

A következő tételek nemcsak azért érdekesek, mert „faszerű" struktúrával rendelkező gráfok Turán-számára adnak felső becslést, hanem mert néhány speciális esetben bizonyítják Erdős $r$-degenerált páros gráfokról szóló máig nyitott sejtését. Akkor hívunk egy páros gráfot $r$-degeneráltnak, ha a gráf bármely részgráfjának minimális foka legfeljebb $r$.

**2.1.10. Sejtés** (Erdős [21]). *Ha $F$ $r$-degenerált páros gráf, akkor $ex(n, F) = \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{r}})$.*

Jegyezzük meg, hogy ez a sejtés $r = 1$-re éppen azt mondja ki, hogy a fák extremális száma lineáris $n$-ben. Ennek az általános Erdős-sejtésnek néhány speciális esete ismert, köztük egy, amit majd a Dependent random choice módszer ismertetésénél említeni fogunk (3.2.2. Tétel). Az eddig ismert speciális esetek közös általánosításait foglalja össze az alábbi néhány eredmény.

**2.1.11. Tétel** (Grzesik-Janzer-Nagy [22]). *$ex(n, T[r]) = \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{r}})$, ahol $T[r]$ szokásosan a $T$ gráf $r$-felfújtját jelöli.*

Kiderült, hogy ha a csúcsokat nem egységesen $r$ méretű független halmazokkal helyettesítjük, hanem (akár különböző) tetszőleges méretűekkel (ilyenkor a kapott gráfot felfújtnak nevezzük), akkor is igaz marad az állítás feltéve, hogy a kapott gráf még $r$-degenerált marad.

**2.1.12. Tétel** (Grzesik-Janzer-Nagy [22]). *Ha $F$ $r$-degenerált és egy fa felfújtja, akkor $ex(n, F) = \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{r}})$.*

Sőt, még ennél általánosabbat is lehet bizonyítani, de ehhez szükségünk van a $k$ méretű $(r, t)$-fafelfújt definícióra. Legyen $r \leq t$, $k$ pozitív egész, $X_1 = Y_0, Y_1, \ldots, Y_k$ páronként olyan diszjunkt halmazok, melyekre $|X_1| = r$, $|Y_1| = \ldots = |Y_k| = t$. Továbbá legyen minden $2 \leq i \leq k$-ra $X_i$ része néhány olyan $Y_j$-nek, melyekre $j < i$ úgy, hogy $|X_i| = r$. Ekkor az $Y_0 \cup Y_1 \cup \ldots \cup Y_k$ csúcshalmazzal és $\cup_{1 \leq i \leq k}\{xy \mid x \in X_i, y \in Y_i\}$ élhalmazzal létrejövő $L$ gráfot $k$ **méretű** $(r, t)$**-fafelfújtnak** nevezzük.

Könnyen látható, hogy egy $(r, t)$-fafelfújt $r$-degenerált, hiszen az $r$-degeneráltság azzal ekvivalens, hogy a csúcsokat sorban törölve mindig marad legfeljeb $r$ fokú csúcs (azaz mindig legfeljebb $r$ fokú csúcsot törlünk), az $(r, t)$-fafelfújt „leveleitől" indulva ez persze mindig teljesülni fog.

**2.1.13. Tétel** (Grzesik-Janzer-Nagy [22]). *Ha $L$ egy tetszőleges méretű $(r, t)$-fafelfújt, akkor $ex(n, L) = \mathcal{O}(n^{2-\frac{1}{r}})$.*

## 2.2. Stabilitás

Az $ex(n, H)$ érték meghatározásán túl érdekes kérdés, hogy hogyan „néznek ki" azok a gráfok, melyeknek közel $ex(n, H)$ élük van. Akár nagyon különböző is lehet a struktúrájuk, vagy „hasonlítanak" egymásra?

Informálisan megfogalmazva egy extremális problémát stabilnak nevezünk, ha minden közel optimális példa hasonlóan néz ki, mint az (egyik) optimális struktúra. A Turán-tételre specializálva ez azt jelentené, hogy minden $K_{r+1}$-mentes közel $|E(T_r(n))|$ éllel rendelkező gráf $r$-osztályú gráffá alakítható „néhány" él törlésével. Erdős és Simonovits egymástól függetlenül megmutatták, hogy az $ex(n, K_{r+1})$ probléma stabil, mely tehát precízen az alábbi módon fogalmazható meg.

**2.2.1. Tétel** (Erdős-Simonovits stabilitás [21, 23]). *Bármely $\epsilon$ pozitív számhoz létezik $\delta$ pozitív szám, hogy ha $G$ egy $n$ csúcsú $K_{r+1}$-mentes gráf több, mint $\left(1 - \frac{1}{r} - \delta\right)\binom{n}{2}$ éllel, akkor $G$ $r$-osztályú gráffá tehető legfeljebb $\epsilon n^2$ él törlésével.*

A stabilitási eredmények nem csak azért érdekesek, mert az extremális és közelextremális struktúrák szerkezetét feltárják, hanem nagyon gyakran segédeszközt jelentenek más problémák megoldásában is.

## 2.3. Szuperszaturálás

Ha egy $n$-csúcsú $G = (V, E)$ gráfra $|E(G)| > ex(n, H)$, akkor persze $H \subseteq G$. Ekkor $G$-t $H$-túltelítettnek, vagy röviden túltelítettnek (szuperszaturáltnak) nevezzük. Természetesen $H$ nem feltétlenül csak egyszer fordul elő $G$-ben, hanem akár nagyon sokszor is. Tekintsük például a $K_{n,n}$ teljes páros gráfot. Ez háromszögmentes, de egy újabb élt behúzva nem egy, hanem rögtön $n$ darab háromszög keletkezik. Tehát izgalmas megvizsgálni, hogy néhány él behúzásával legalább hány darab tiltott részgráfot hozunk létre, illetve általában a Turán-szám feletti tartományban adott élszám mennyi részgráf jelenlétét implikálja.

**2.3.1. Tétel** (Erdős-Simonovits (egyszerűbb alak) [24]). *Legyen a $H$ gráf $h$ csúcsú, a $G$ gráf $n$ csúcsú. Ekkor bármely $\epsilon$ pozitív számhoz létezik olyan $\delta$ pozitív szám, hogyha $|E(G)| > ex(n, H) + \epsilon n^2$, akkor $G$ legalább $\delta n^h$ $H$-val izomorf részgráfot tartalmaz.*

A szuperszaturálás felhasználható gráfok extremális számára adott becslések javítására, de önmagában is érdekes: az alábbiakban kiemelten foglalkozunk az utak, illetve a fák esetével, bemutatjuk Erdős és Simonovits alsó becslését az $n$ csúcsú, $d$ átlagfokszámú gráfban található $t$ hosszú utak számára, majd az ezt megjavító eredményeket.

**2.3.2. Tétel** (Erdős-Simonovits [25]). *Ha $G$ $n$ csúcsú és $d$ átlagfokszámú, akkor $G$-ben a $t$ hosszú utak száma legalább $(1-\delta)nd(d-1)\dots(d-t+1)$, ahol $\delta = (\log d)^{-1/2+o(1)}$, ha $d \to \infty$.*

Nem nehéz látni, hogy a tétel aszimptotikusan éles: vegyük azt a $G$ gráfot, mely $n/t$ darab diszjunkt $t$ csúcsú klikkből áll. Ekkor $n$ féleképpen választhatjuk ki a $t$ hosszú út kezdőcsúcsát, onnan $d$ $(= t-1)$ csúcsba léphetünk át, majd már csak $d-1$ csúcs valamelyikébe, és így tovább, az $i$. lépésben $n-(i-1)$ szomszéd közül választhatunk, tehát nagyságrendileg összesen $nd(d-1)\dots(d-t+1)$ darab $t$ hosszú utat számoltunk meg.

A fenti eredményt általánosította Dellamonica és társai [26]-ban, majd ezt javította tovább és általánosította fákra Mubayi és Verstraëte [27]-ben.

**2.3.3. Tétel** (Mubayi-Verstraëte [27]). *Ha $T$ $t$ élű fa, $G$ $n$ csúcsú és $d \geq t$ átlagfokszámú gráf, akkor $G$-ben a $T$-vel izomorf számozott részgráfok száma legalább $(1-\epsilon_d)nd(d-1)\dots(d-t+1)$, ahol $\epsilon_d = (4t)^5/d^2$.*

Kis átlagfokszámú gráfokra ennél még jobbat lehet mondani. 4.2.5. Következményben rámutatunk, hogy egy $G = (V, E)$ gráfban legalább

$$2^k e(G)^k n^{1-k} - 2^{k-2} e(G)^{k-1} n^{2-k} k(k+1)$$

darab számozott $k$-hosszú út van, ami $2^{11} \frac{k}{k+1} \geq d$ átlagfokszám esetén megjavítja a fenti eredményt.

## 2.4. Az Alon-Shikelman-féle általánosítás

A Turán-tételkör egy lehetséges általánosítása, hogy egy bizonyos $H$ tiltott részgráfot nem tartalmazó gráfok között nem az élszámot maximalizáljuk, hanem egy előre adott $T$ gráf felbukkanásainak számát, azaz precízen: $ex(n, T, H)$ jelöli a $T$-vel izomorf részgráfok maximális számát az $n$ csúcsú $H$-mentes gráfok között. Ezen kérdés néhány speciális változatát már korábban is vizsgálták (például: [28, 29, 30, 31]), de a jelölést Alon és Shikhelman vezették be a [32] cikkükben. Továbbá mutattak néhány általános tételt [33]-ban (építve [34, 35] cikkekre) és megjavítottak több eddigi eredményt: Bollobás és Győri $ex(n, K_3, C_5)$-re [28], Győri és Li $ex(n, K_3, C_{2k+1})$-re [30] vonatkozó felső korlátaikat.

Az alapvető definíciók és eredmények után áttekintjük az utak és a fák eseteinek eredményeit.

### 2.4.1. Általános eredmények

Alon és Shikhelman [33]-ban igazából egy még általánosabb kérdést vizsgáltak: $ex(G, T, \mathcal{F})$ nagyságrendjét határozták meg kis additív hibával, vagy bizonyították, hogy $NP$-nehéz annál jobban közelíteni, ahol $ex(G, T, \mathcal{F})$ jelöli a $T$-vel izomorf részgráfok maximális számát azon $G$ részgráfjaiban, melyek nem tartalmaznak semmilyen $F \in \mathcal{F}$ részgráfot sem. Ezzel általánosították Alon, Shapira és Sudakov [34] eredményeit.

**2.4.1. Tétel** (Alon-Shapira-Sudakov [34]). *Bármely $\epsilon$ pozitív számra, bármely $\mathcal{F}$ gráfcsaládra, bármely $n$ csúcsú $G$ gráfra létezik egy olyan determinisztikus algoritmus, mely $\epsilon n^2$ additív hibával meghatározza $ex(G, K_2, \mathcal{F})$ értékét $\mathcal{O}(n^2)$ időben.*

**2.4.2. Tétel** (Alon-Shikhelman [33]). *Bármely $\epsilon$ pozitív számra, bármely $\mathcal{F}$ véges gráfcsaládra, bármely $n$ csúcsú $G$ gráfra, bármely $t$ csúcsú $T$ gráfra létezik egy olyan determinisztikus algoritmus, mely $\epsilon n^t$ additív hibával meghatározza $ex(G, T, \mathcal{F})$ értékét polinomiális időben.*

Azaz polinom időben meg tudjuk határozni $ex(G, T, \mathcal{F})$ értékét $\epsilon n^t$ additív hibával. Alon, Shapira és Sudakov bebizonyították, hogyha a tiltott részgráfok között van páros gráf is, akkor létezik olyan algoritmus, mely $n^2$-nél kisebb additív hibával approximálja $ex(G, K_2, \mathcal{F})$ értékét, ha pedig nincs, úgy bármilyen $\epsilon$-ra az $n^{2-\epsilon}$ additív hibával történő approximálás $NP$-nehéz. Ennek analógjaként Alon és Shikhelman belátták, hogy ha a megszámlálandó $T$ gráf valamely $h$-felfújtja tiltott részgráf, akkor tudunk $n^t$-nél kisebb additív hibával approximálni, viszont a másik eset $NP$-be tartozása egyelőre csak sejtés.

**2.4.3. Tétel** (Alon-Shapira-Sudakov [34]). *Bármely $\mathcal{F}$ gráfcsaládra, bármely $G$ $n$ csúcsú gráfra teljesülnek az alábbiak.*

- *Ha létezik olyan $F \in \mathcal{F}$, hogy $F$ páros, akkor létezik olyan $\delta$ pozitív szám, melyhez létezik olyan determinisztikus algoritmus, mely $n^{2-\delta}$ additív hibával meghatározza $ex(G, K_2, \mathcal{F})$ értékét polinomiális időben.*
- *Ha nem létezik olyan $F \in \mathcal{F}$, hogy $F$ páros, akkor bármely $\epsilon$ pozitív számra az $ex(G, K_2, \mathcal{F})$ $n^{2-\epsilon}$ additív hibával történő approximálása $NP$-nehéz.*

**2.4.4. Tétel** (Alon-Shikhelman [33]). *Bármely $\mathcal{F}$ gráfcsaládra, bármely $n$ csúcsú $G$ gráfra, bármely $t$ csúcsú $T$ gráfra teljesül az alábbi.*

- *Ha létezik olyan $F \in \mathcal{F}$, hogy $F \subseteq T[h]$, akkor létezik olyan $\delta := \delta(T, \mathcal{F})$ pozitív szám, melyhez létezik olyan determinisztikus algoritmus, mely $n^{t-\delta}$ additív hibával meghatározza $ex(G, T, \mathcal{F})$ értékét polinomiális időben, ahol $T[h]$ szokásosan a $T$ gráf $h$-felfújtját jelöli.*

A fenti tétel bizonyítása egy korábbi megfigyelésen múlik, mely szerint egy adott $t$ csúcsú $T$ gráfhoz $ex(n, T, F) = \Omega(n^t)$ pontosan akkor teljesül, ha $F$ nem része $T[h]$-nak, valamilyen $h$-ra; különben pedig $ex(n, T, F) \leq n^{t-\epsilon}$ valamilyen $\epsilon := \epsilon(T, F)$ pozitív számra. Könnyen látszik, hogy a fenti esetben a 0 egy triviálisan jó $n^{t-\epsilon}$ additív hibájú approximáció az $ex(G, T, F)$ értékre, hiszen $ex(G, T, \mathcal{F}) \leq ex(G, T, F) \leq ex(K_n, T, F) = ex(n, T, F) \leq n^{t-\epsilon} + 0$.

**2.4.5. Sejtés** (Alon-Shikhelman [33]). *Bármely $\mathcal{F}$ gráfcsaládra, bármely $n$ csúcsú $G$ gráfra, bármely $t$ csúcsú $T$ gráfra teljesül az alábbi.*

- *Ha nem létezik olyan $F \in \mathcal{F}$, hogy $F \subseteq T[h]$, akkor bármely $\epsilon$ pozitív számra az $ex(G, T, \mathcal{F})$ $n^{t-\epsilon}$ additív hibával történő approximálása NP-nehéz.*

### 2.4.2. Fákra vonatkozó speciális esetek

Ha $T$ gráf, $U \subseteq V(T)$, $h$ pozitív egész, akkor jelölje a $T$ **gráf** $(U, h)$**-felfújtját** a következő gráf: fixáljuk az $U$ csúcshalmazt, helyettesítsünk minden $T \setminus U$-beli komponenst a komponens $h$ csúcsdiszjunkt másolatával, majd a másolatokbeli csúcsokat kössük össze az eredetileg velük szomszédos $U$-beli csúcsokkal.

Ha $T$ és $H$ fák, akkor jelölje $m(T, H)$ azt a legnagyobb $m$ egész számot, melyre létezik $T$-nek olyan $(U, |V(H)|)$-felfújtja, mely nem tartalmaz $H$-val izomorf részgráfot és $T \setminus U$-nak $m$ komponense van.

**2.4.6. Tétel** (Alon-Shikhelman [32]). *Ha $H$ és $T$ fák, akkor*

$$ex(n, T, H) = \Theta(n^{m(T,H)}).$$

Letzter [36] megmutatta, hogy ez általánosabban is igaz, azaz $ex(n, T, H)$ nagyságrendje akkor sem változik, ha $H$ nem feltétlenül fa.

**2.4.7. Tétel** (Letzter [36]). *Ha $H$ gráf és $T$ fa, akkor*

$$ex(n, T, H) = \Theta(n^{m(T,H)}).$$

Alon [37]-ben belátta, hogy ha $T$ páros gráf, $H$ fa, akkor $ex(n, T, H) = \mathcal{O}(n^{\alpha(T)})$. [38]-ben Győri, Salia, Tomkins és Zamora megmutatták, hogy ez tetszőleges $T$ gráfra is igaz.

A következő tétel karakterizálja azon $(T, H)$ párokat, melyekre $T$ páros gráf, $H$ fa, és $ex(n, T, H) = \Theta(n^{\alpha(T)})$, de ehhez szükségünk van az alábbi definícióra és megfigyelésre.

$G = (V, E)$ gráf és valamely $\Gamma \subseteq E$ élhalmaz esetén egy $U \subseteq V$ csúcshalmazt $U(\Gamma)$-**halmaznak** nevezünk, ha $G \setminus U$ minden komponense pontosan egy $\Gamma$-beli élt metsz, továbbá ezen komponensek száma $|\Gamma|$.

Könnyen látható, hogyha $\Gamma$ lefogó élhalmaz $G$-ben és $U$ egy $U(\Gamma)$-halmaz, akkor $G \setminus U$ minden komponense vagy egy $\Gamma$-beli él vagy egy izolált csúcs.

**2.4.8. Tétel** (Alon-Shikhelman [32]). *Ha $T$ olyan páros gráf, mely nem tartalaz izolált csúcsot, továbbá $H$ egy $h$ csúcsú fa, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

- $ex(n, T, H) = \Theta(n^{\alpha(T)})$.
- *Bármely $T$-beli $\Gamma$ minimális lefogó élhalmazhoz létezik olyan $U \subseteq V$ $U(\Gamma)$-halmaz, melyre $T$ $(U, h)$-felfújtja nem tartalmaz $H$-val izomorf részgráfot.*
- *$T$-beli $\Gamma$ minimális lefogó élhalmazhoz létezik olyan $U \subseteq V$ $U(\Gamma)$-halmaz, melyre $T$ $(U, h)$-felfújtja nem tartalmaz $H$-val izomorf részgráfot.*

A karakterizáció után természetes kérdés, hogy algoritmikusan eldönthető-e egy $T$ páros gráfról és egy $H$ fáról, hogy $ex(n, T, H) = \Theta(n^{\alpha(T)})$. Sajnos a probléma co-NP-nehéz. A bizonyításban egy egyszerű konstrukcióval visszavezetik a problémát a Hamilton-út problémára.

**2.4.9. Tétel** (Alon-Shikhelman [32]). *Ha $T$ páros gráf, $H$ fa, akkor azon eldöntési probléma, hogy $ex(n, T, H) = \Theta(n^{\alpha(T)})$ co-NP-nehéz.*

## 2.5. Gráfok homomorfizmusai

Ebben a részben azt a rokon problémát vizsgáljuk, amikor nem követeljük meg, hogy a $T$ gráf $G$-be történő beágyazása során minden csúcsnak különböző legyen a képe, de azt igen, hogy a leképezés éltartó legyen.

**2.5.1. Definíció.** Ha $T = (V', E')$, $G = (V, E)$ gráfok és $f : V' \to V$ olyan leképezés, hogy minden $(u, v)$ eleme $E'$ élre $(f(u), f(v))$ eleme $E$-nek, akkor $f$-et homomorfizmusnak nevezzük. A $V(T)$-ről $V(G)$-re menő homomorfizmusok halmazát $Hom(T, G)$-vel, számukat pedig $hom(T, G)$-vel jelöljük. Továbbá, ha $Hom(T, G) \neq \emptyset$, akkor néha „$T \to G$”-t írunk.

A következőkben röviden áttekintjük a témakör legfontosabb fogalmait, eredményeit, és bemutatjuk a leghíresebb nyitott kérdés, a Sidorenko-sejtés néhány megoldott esetét. Végül írunk az elméleti eredmények lehetséges algoritmikus alkalmazásairól. Gráfok homomorfizmusaival kapcsolatos további eredményekről például a [39, 40] könyvekben lehet olvasni.

### 2.5.1. Alapvető megfigyelések

#### Kromatikus szám, illetve maximális klikkméret

A homomorf beágyazás tulajdonképpen a csúcsszínezés általánosításának is tekinthető, hiszen ha $T \to K_r$, akkor $K_r$ csúcsaira, mint színosztályokra is gondolhatunk, így $\chi(T) \leq r$, és $\chi(T)$ értéke az a legkisebb $r$ szám, melyre $T \to K_r$. Például $\chi(C_{2k+1}) = 3$, így $C_{2k+1}$ beágyazható $K_3$-ba; természetesen $P_3$-ba már nem feltétlenül, de $k \equiv 0, 1$ modulo 3 esetén igen, azaz $C_{6k+1}$ nem csak 3-színezhető, hanem „$P_3$-színezhető" is.

Továbbá nyilvánvaló, hogy $\omega(G)$, azaz a legnagyobb $G$-beli teljes részgráf mérete az a legnagyobb $k$ szám, melyre $K_k \to G$. Így, mivel homomorfizmusok kompozíciója homomorfizmus, ha $T \to G$, akkor $\omega(T) \leq \omega(G)$ és $\chi(T) \leq (G)$.

#### Homomorfizmus létezésének algoritmikus tesztelése

Rögzített $T$-re $|V(G)|$-ben polinom időben el tudjuk dönteni, hogy $Hom(T, G)$ üreshalmaz-e, hiszen tesztelhetünk minden lehetséges $V(T) \to V(G)$ beágyazást.

Rögzített $G$-re nem ilyen egyszerű a helyzet. Ha $G$-nek nincs éle, akkor persze pontosan akkor létezik homomorfizmus $V(T)$-ről $V(G)$-re, ha $T$ nem feszít élt. Ha $G$ páros gráf, akkor szükséges, hogy $T$ is páros legyen; és elégséges is, hiszen $T \to K_2$ és $K_2 \to G$. Ha $G$-nek van hurokéle, akkor természetesen $T \to G$. Így a fenti három esetben (ami igazából kettő, hiszen az üres gráf is páros) $|V(T)|$-ben polinom időben el tudjuk dönteni, hogy $Hom(T, G)$ üreshalmaz-e. Különben, azaz egy tetszőleges $T$ és egy rögzített, nempáros, hurokél-mentes $G$ gráf esetén NP-teljes probléma eldönteni, hogy $T \xrightarrow{?} G$ [40].

### 2.5.2. Homomorfizmusok száma

Egyetlen homomorfizmus találásán túl érdekes kérdés meghatározni, vagy legalább alsó becslést adni a homomorfizmusok számára. Többek között azért is, mivel felhasználható bizonyos extremális számok becslésében (erre egy vázlatos példát a 3.4. részben láthatunk), sőt, akár a meghatározásában is, hiszen ha a $G$-beli élek száma nagy ($\Omega(n^2)$), akkor $hom(T, G)$ és $\mathcal{N}(G, T)$ nagyságrendje azonos, ahol $\mathcal{N}(G, T)$ jelöli $G$-ben a $T$-vel izomorf részgráfok számát.

Elméletileg akár gráfok közötti izomorfia létezésére is használhatjuk a homomorizmusok számát, ugyanis az is igaz, hogy ha minden $T$ gráfot ugyanannyiszor lehet ho-

momorf módon beágyazni a $G$ gráfba, mint a $G'$ gráfba, akkor $G$ és $G'$ izomorfak.

**2.5.2. Tétel** (Lovász [41]). *Ha $G$ és $G'$ gráfokra teljesül, hogy bármely $T$ gráfra $hom(T, G) = hom(T, G')$, akkor $G$ izomorf $G'$-vel.*

Természetesen a gyakorlatban ez még nagyon hosszadalmas lenne, viszont szerencsére a tesztelendő gráfok száma lényegesen redukálható [39].

### Példák

Röviden bemutatunk néhány példát [42] alapján olyan $T$ és $G$ gráfokra, melyekre $hom(T, G)$ explicit felírható, vagy legalábbis összefüggést mutat valamilyen érdekes gráfelméleti fogalom előfordulásának számosságával.

**2.5.3. Példa.** (Kromatikus szám, illetve maximális klikkméret) A 2.5.1. részben látottak miatt $hom(T, K_r)$ értéke megegyezik $T$ $r$-színezéseinek számával, $hom(K_k, G)$ értéke pedig $k! \cdot \mathcal{N}(K_r, T)$.

**2.5.4. Példa.** (Csillagok és fokszámok) Jelölje $S_k$ a $k$ csúcsú csillagot. Ekkor ha a $G$ gráf fokszámai $d_1, d_2, \ldots, d_n$, akkor

$$hom(S_k, G) = \sum_{i=1}^{n} d_i^{k-1}.$$

**2.5.5. Példa.** (Független halmazok) Legyen $G$ az a gráf, melyet úgy kapunk a $K_2$-ből, hogy az egyik csúcsára ráteszünk egy hurokélt. Ekkor valamely egyszerű $T$ gráf esetén $hom(T, G)$ értéke pontosan $T$ független csúcshalmazainak számával egyenlő.

**2.5.6. Példa.** (Körök és sajátértékek) Jelölje $C_k$ a $k$ csúcsú kört, továbbá $A_G$ a $G$ gráf adjacencia mátrixát, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pedig a mátrix sajátértékeit. Ekkor

$$hom(C_k, G) = tr(A_G^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k.$$

### Sidorenko-sejtés

Erdős és Simonovits 1983-ban fogalmazták meg a témakör legfontosabb nyitott kérdését [24], melyet tőlük függetlenül és más formában 1991-ben Sidorenko is megsejtett [43].

Jelölje $t_T(G)$ a homomorfizmus-sűrűséget, azaz annak a valószínűségét, hogy egy $V(T)$-ról $V(G)$-re menő egyenletes eloszlású, véletlen leképezés homomorfizmus, tehát

$$t_T(G) = \frac{hom(T,G)}{|V(G)|^{|V(T)|}}.$$

A Sidorenko-sejtés azt állítja, hogy ez a homomorfizmus-sűrűség legalább akkora, mintha $T$ éleit egyesével, egymástól függetlenül szeretnénk beágyazni $G$-be.

**2.5.7. Sejtés** (Sidorenko [43], Erdős-Simonovits)**.** *Tetszőleges $G$ és páros $T$ gráfokra teljesül, hogy*

$$t_T(G) \geq t_{K_2}(G)^{|E(T)|}.$$

Sidorenko megmutatta [43], hogy a sejtés igaz néhány egyszerű struktúrájú páros gráfra, mint például a teljes páros gráfokra, fákra, páros körökre. Sok részeredmény után, 2010-ben Conlon, Fox és Sudakov [44]-ben bebizonyították a Dependent random choice módszer segítségével (a technikáról részletesebben a 3.2. részben írunk), hogy minden olyan $T$ páros gráfra igaz a sejtés, melynek van teljes fokú csúcsa. Ahol páros gráf esetén a teljes fokú csúcs azt jelenti, hogy belőle vezet él minden másik osztályban lévő csúcshoz. Majd ebből levezették a Sidorenko-sejtés egy approximált változatát (részletek [44]-ben).

### 2.5.3. Algoritmikus akalmazások

Láttuk, hogy annak eldöntése, hogy egy tetszőleges $T$ és egy rögzített, nempáros, hurokél-mentes $G$ gráf esetén $hom(T,G)$ pozitív-e NP-teljes probléma [40], továbbá azt is, hogy tetszőleges $T$ és $G$ gráfokra $hom(T,G)$ pontos meghatározása (de legalább jó közelítése) hasznos lenne más gráfelméleti problémák esetén. Jelölje $\#G$ azt a leszámlálási problémát, mely bemenetként kap egy $T$ gráfot, és meg kell határoznia $T$ $G$-színezéseinek a számát, azaz $hom(T,G)$-t. Nyilvánvaló, hogy $\#G$ a $\#P$ bonyolultsági osztályban van minden $G$-re. (Bonyolultsági osztályokról részletesebben a [45] könyvben érdemes tájékozódni.) Dyer és Greenhill [46]-ban bebizonyították, hogy ha a rögzített $G$-nek van olyan összefüggőségi komponense, mely nem egy teljes gráf minden csúcson egy további hurokéllel, vagy nem egy hurokél-mentes teljes páros gráf, akkor $\#G$ $\#P$-teljes, különben $P$-ben van.

A fentiek alapján megállapítható, hogy általánosságban $hom(T, G)$ értékének meghatározása nehéz, és nem várható rá polinom idejű algoritmus. Ha mégis használni szeretnénk a $\mathcal{N}(G, T)$ (esetleg $ex(G, T, H)$) érték kiszámítására, akkor valamilyen speciális $T$, $G$ gráfokra érdemes próbálkoznunk. Szerencsére néhány esetben létezik hatékony algoritmus $hom(T, G)$ meghatározására, így ezek lehetőséget teremtenek számos alkalmazásra. Ehhez hasznos segítség a szita-formula egy változata, mely által azon automorfizmusok számát kell megmondanunk, melyeket „könnyebb" meghatározni. Ennek a precíz kimondásához még szükségünk van egy rövidítésre: jelölje $aut(T, T)$ a $V(T)$-ről $V(T)$-re menő automorfizmusok (bijektív homomorfizmusok) számát.

**2.5.8. Tétel** (Amini-Fomin-Saurabh [47]). *Ha $T$ és $G$ olyan gráfok, hogy $|V(T)| = |V(G)|$, akkor*

$$\mathcal{N}(T, G) = \frac{\sum_{W \subseteq V(G)} (-1)^{|V(W)|} hom(T, G[V(G) \setminus W])}{aut(T, T)} = \\ = \frac{\sum_{W \subseteq V(G)} (-1)^{|V(G)|-|V(W)|} hom(T, G[W])}{aut(T, T)}.$$

### Hamilton-körök száma

Jelölje $\#\textsc{Ham}(G)$ a Hamilton-körök számát az $n$ csúcsú $G$ gráfban, továbbá $T$ legyen $C_n$. Ekkor $\mathcal{N}(G, T) = \#\textsc{Ham}(G)$. Meggondolható, hogy $aut(C_n, C_n) = 2n$, illetve már láttuk a 2.5.6. Példában, hogy tetszőleges $G$ gráfra $hom(C_n, G) = tr(A_H^n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n$, ahol $A_G$ a gráf adjacencia-mátrixa és $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a sajátértékei, így az előző tétel segítségével $\#\textsc{Ham}(G)$ értéke $2^n n^{\mathcal{O}(1)}$ időben és polinomiális tárban meghatározható [47].

### $\mathcal{N}(T, G)$ korlátos favastagság esetén

A 2.5.8. Tétel egy általánosabb alakjával eltérő csúcsszámú gráfok $\mathcal{N}(G, T)$ számára is adható egy összegzés, melyből következik az alábbi tétel [47].

**2.5.9. Tétel** (Amini-Fomin-Saurabh [47]). *Adott a $T$ és az $n$ csúcsú $G$ gráfok, továbbá $T$ egy $t$-vastagságú fafelbontása. Ekkor $\mathcal{N}(G, T)$ kiszámítható*

$$\mathcal{O}\Big(\sum_{i=0}^{|V(T)|} \binom{n}{i} \cdot |V(T)| n^{t+1} t\Big)$$

*időben és $\mathcal{O}(\log |V(T)| \cdot n^{t+1})$ tárban.*

# 3. fejezet

# Néhány jellemző módszer

Ebben a fejezetben bemutatjuk a Turán-tételkör és így az extremális gráfelmélet néhány igen fontos és hasznos módszerét. Először az alapvető valószínűségi módszerekről írunk, majd az ezen alapuló Dependent random choice technikát tárgyaljuk részletesebben, ugyanis a 4. fejezet megfigyeléseihez szükséges a bizonyítás ismerete. Röviden összefoglaljuk a friss, 2015-ös konténermódszer lényegét, majd vázoljuk a Szemerédi-féle regularitási lemma elvét, és az algebrai, véges geometriai kontrukciók felhasználhatóságát.

## 3.1. Valószínűségi módszerek

Egy $H$ gráf $ex(n, H)$ extremális számára adott $g(n, H)$ alsó becslés esetében jellemző módszer, hogy megmutatjuk: egy megfelelően választott valószínűségi térben pozitív valószínűséggel létezik egy olyan $H$-mentes $G$ gráf, melynek legalább $g(n, H)$ éle van. Előfordul, hogy a véletlenül választott $G$ gráf még nem megfelelő tulajdonságú, azaz például a mi esetünkben nem $H$-mentes, de meg tudjuk javítani. Ha a $H$ részgráfok darabszámának várható értékére adott $f(p, n, H)$ felső becsléssel csökkentve a gráfunk élszámának várható értékét még mindig elegendően sok élünk maradt, azaz $\mathbb{E}(e(G)) - f(p, n, H) \geq g(n, H)$, akkor pozitív valószínűséggel létezik egy olyan gráf, mely $H$-mentes és legalább $g(n, H)$ éle van.

A módszer részletesebb leírása, és rengeteg kidolgozott példa megtalálható Noga Alon és Joel H. Spencer The Probabilistic Method című könyvében [48].

## 3.2. Dependent random choice

A Dependent random choice lemma szemléletesen azt állítja, hogy minden sűrű gráf tartalmaz egy olyan $U$ csúcshalmazt, melynek minden „kicsi” $R$ részhalmaza nagy $N^*(R)$ közös szomszédhalmazzal rendelkezik, ahol tehát $N^*(R) = \bigcap_{u \in U} N(u)$.

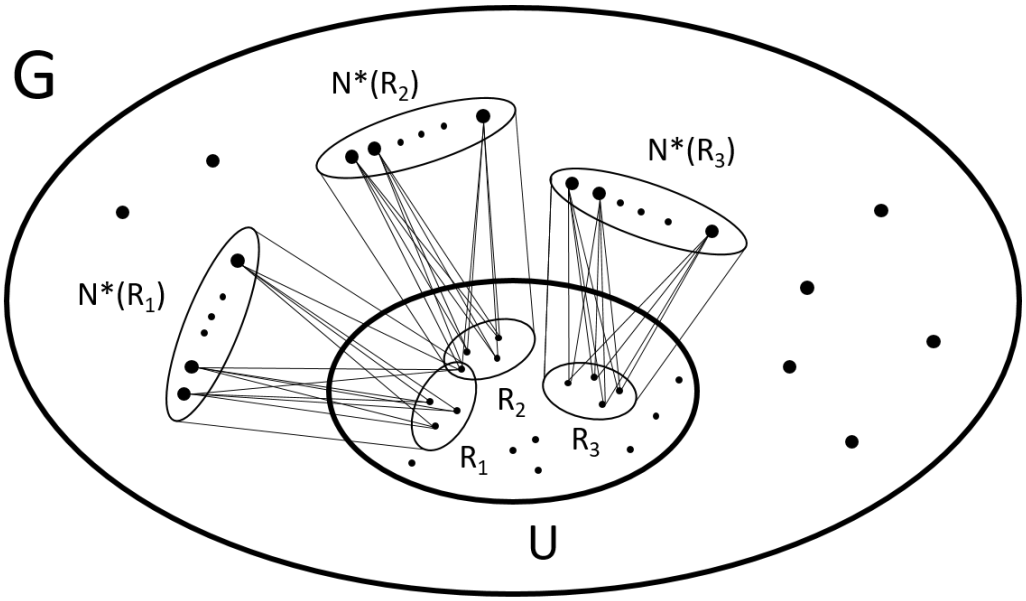
Számos alkalmazása ismert, például a 2.5.6. részben említettük, hogy [44]-ben bebizonyították a módszer segítségével, hogy minden olyan $T$ páros gráfra igaz a Sidorenko-sejtés, melynek van teljes fokú csúcsa, és ebből következett a Sidorenko-sejtés egy approximált változata.

Az alábbiakban részletesebben foglalkozunk a módszerrel, ugyanis a 4. fejezetben mind a lemmát, mind a bizonyítás módszerét alkalmazni fogjuk néhány új észrevétel bizonyításához.

**3.2.1. Lemma** (Dependent random choice [49, 50, 51]). *Legyenek $a, d, m, n, r$ pozitív egészek, és $G = (V, E)$ pedig egy $n$ csúcsú, $d$ átlagfokszámú gráf. Ha létezik $t$ pozitív egész, hogy*

$$\frac{d^t}{n^{t-1}} - \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^t \geq a,$$

*akkor $G$-ben létezik egy olyan legalább $a$ méretű $U$ csúcshalmaz, hogy $U$ bármely $r$ csúcsának legalább $m$ közös szomszédja van.*




*Bizonyítás [52] alapján.* Válasszuk ki a csúcsok egy $t$ elemű $T$ halmazát $V$-ből uniform véletlen módon ismétléssel. Legyen $A = N^*(T)$, továbbá jelölje $X$ az $A$ halmaz

elemszámát. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{v \in V(G)} \left(\frac{|N(v)|}{n}\right)^t = n^{-t} \sum_{v \in V(G)} |N(v)|^t \geq n^{1-t} \left(\frac{\sum_{v \in V(G)} |N(v)|}{n}\right)^t = \frac{d^t}{n^{t-1}},$$

ahol az első egyenlőség a várható érték linearitása, az egyenlőtlenség pedig az $f(x) = x^t$ függvény konvexitása miatt teljesül.

Jelölje az $Y$ valószínűségi változó a „rossz" részhalmazok számát, vagyis azon $S \subset A$ részhalmazok számát, melyek $r$ eleműek, de $m$-nél kevesebb közös szomszédjuk van. Egy adott $S$-re $\left(\frac{|N^*(S)|}{n}\right)^t$ a valószínűsége, hogy része $A$-nak, így mivel legfeljebb $\binom{n}{r}$ olyan $r$ méretű $S$ részhalmaza van $A$-nak, melyre $|N^*(S)| < m$, így a várható érték linearitása miatt

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{\substack{s \subset A \\ |S|=r}} \left(\frac{|N^*(S)|}{n}\right)^t < \binom{n}{r} \left(\frac{m}{n}\right)^t.$$

Így megint csak a várható érték linearitását kihasználva kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X - Y) \geq \frac{d^t}{n^{t-1}} - \binom{n}{r} \left(\frac{m}{n}\right)^t \geq a.$$

Ekkor tehát létezik egy olyan $T$ halmaz, melyet „kijavítva", azaz minden olyan $r$ méretű $S \subset A$ halmazból, melynek kevesebb, mint $m$ szomszédja van, kidobva egy elemet a kapott $A' = N^*(T')$ halmaz elemszáma legalább $X - Y \geq a$ lesz, és persze minden $r$ méretű részhalmazának legalább $m$ közös szomszédja van. □

A fenti lemma felhasználásával igazolható a következő tétel is, mely a 2.1.10. Sejtés egy speciális esetét is bizonyítja. Mint látni fogjuk, az általunk vizsgált alkalmazásokban érdemes a $t = r$ értéket választani, így innentől ezzel dolgozunk.

**3.2.2. Tétel** (Alon-Krivelevich-Sudakov [51]). *Ha $H = (A \cup B, E)$ olyan páros gráf, hogy minden $B$-beli csúcs foka legfeljebb $r$, akkor $ex(n, H) \leq cn^{2-1/r}$, ahol $c$ valamilyen csak $H$-tól függő konstans.*

*Bizonyítás.* ( [52] alapján) Legyen $a = |A|$, $b = |B|$, $m = a + b$, $t = r$ és $c = \max\left(a^{1/r}, \frac{3(a+b)}{r}\right)$, továbbá tegyük fel, hogy $G$ egy $n$ csúcsú és legalább $cn^{2-1/r}$ élű gráf. Így a $G$-beli $d$ átlagfokszám legalább $2cn^{1-1/r}$. Megmutatjuk, hogy ekkor $H$ beágyazható $G$-be, azaz létezik olyan $f : A \cup B \to V(G)$ injektív függvény, hogy minden $H$-beli él képe $G$-ben él lesz.

Ehhez először belátjuk, hogy az $a, d, m, n, r, t$ pozitív egészek kielégítik a 3.2.1. Lemma feltételét, így létezik $G$-ben egy olyan legalább $a$ méretű $U$ csúcshalmaz, hogy $U$ bármely $r$ csúcsának legalább $m = a + b$ közös szomszédja van. Felhasználva az $r! \geq (r/e)^r$ összefüggést adódik, hogy

$$\frac{d^r}{n^{r-1}} - \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^r \geq (2c)^r - \frac{n^r}{r!}\left(\frac{a+b}{n}\right)^r \geq (2c)^r - \left(\frac{e(a+b)}{r}\right)^r \geq c^r \geq a.$$

Az $f$ megadásával zárjuk a bizonyítást. Legyen $f : A \to U$ tetszőleges. Jelölje $B$ csúcsait $v_1, v_2, \ldots, v_b$, melyeket egyesével ágyazunk be $G$-be. Az aktuálisan beágyazandó csúcs legyen $v_i$, $N_i \subset A$ pedig azok a $H$-beli csúcsok, melyek szomszédosak $v_i$-vel, így $|N_i| \geq r$. Mivel $f(N_i)$ egy legfeljebb $r$ elemű részhalmaza $U$-nak, így létezik legalább $a + b$ közös szomszédja $f(N_i)$-nek. Mivel eddig összesen kevesebb, mint $a + b$ csúcsot ágyaztunk be, ezért létezik egy még nem használt $w \in V(G)$ csúcs $f(N_i)$ közös szomszédai között. Tehát minden $v_i$-hez találhatunk egy $w$ csúcsot, így az $f(v_i) = w$ választás meghatározza $f$-et. □

## 3.3. Konténermódszer

A hipergráf konténermódszert, mely bizonyos részstruktúrák megszámolására alkalmas, explicit alakban 2015-ben egymástól függetlenül Saxton and Thomason [53], illetve Balogh, Morris és Samotij [54,55] fedezték fel; legkorábbi megjelenése az 1980-as években Kleitman és Winston nevéhez köthető [56, 57].

A konténermódszer fő gondolata, hogy egy gráf, vagy hipergráf független halmazai „szép” struktúrát alkotnak, azaz mindig tudunk találni a csúcsoknak néhány olyan részhalmazát (ezek a konténerek), melyekre teljesül, hogy minden független csúcshalmaz benne van valamelyik konténerben, továbbá a konténerek száma ($t$) és mérete (általuk feszített élek száma) is kicsi.

Sok konténerrel könnyű lenne a feladat, hiszen minden független csúcshalmazt beválaszthatnánk, hasonlóan a nagy méret esetén, amikor is a teljes csúcshalmazt bepakolhatnánk az egyetlen (vagy néhány) konténerbe. Ezen két paramétert egymás rovására változtathatjuk, ezzel minél jobb felső becslést adva a független csúcshalmazok számára. Ügyesen definiálva egy gráfot, vagy hipergráfot, a megszámlálandó struktúráink éppen a független halmazok lesznek, melyek száma tehát legfeljebb $\sum_{i=1}^{t} 2^{|C_i|} \leq t \cdot 2^{max|C_i|}$.

## 3.4. Szemerédi-féle regularitási lemma

Szemerédi Endre 1975-ben igazolta a Regularitási Lemmát [58], mely lehetőséget ad nagy csúcsszám esetén annak a kihasználására, hogy a gráf rendelkezik valamilyen kvázirandom struktúrával. Azaz nagy gráfok esetén a csúcsoknak létezik olyan korlátos számú osztályból álló partíciója, hogy az élek az osztályok között közel véletlenszerűen menjenek.

A módszert vázlatosan a 2.4.1. Tétel élekről tetszőleges $T$ gráfokra történő általánosításának bizonyításán keresztül mutatjuk be, mely a Szemerédi-féle regularitási lemma több változatát [35, 58, 59], és következményét (például a Beágyazási lemmát [60]) is használja.

**3.4.1. Definíció.** Ha $G = (V, E)$ egy gráf, $A, B \subset V$ diszjunkt csúcshalmazok és $e(A, B)$ jelöli az $A$ és $B$ halmazok között futó élek számát, akkor a

$$d(A, B) = \frac{e(A, B)}{|A||B|}$$

hányadost az $A$ és $B$ közötti élsűrűségnek nevezzük.

**3.4.2. Definíció.** Ha minden $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ olyan részhalmazpárra, melyekre teljesül $\epsilon|A| \leq |A'|$ és $\epsilon|B| \leq |B'|$ fennáll, hogy $|d(A', B') - d(A, B)| \leq \epsilon$, akkor az $(A, B)$ párt $\epsilon$-regulárisnak nevezzük.

**3.4.3. Definíció.** Ha egy gráf csúcshalmazának $\mathcal{P} = \{V_i\}_{i=0}^k$ partíciójára teljesül, hogy $0 \leq |V_0| \leq \epsilon n, |V_1| = \ldots = |V_k|$, továbbá legfeljebb $\epsilon k^2$ pár kivételével minden $(V_i, V_j)$ pár $\epsilon$-reguláris, akkor a $\{V_i\}_{i=0}^k$ partíciót $\epsilon$-regulárisnak nevezzük.

**3.4.4. Definíció.** Adott egy $G = (V, E)$ gráf, $V$-nek egy $\mathcal{P} = \{V_i\}_{i=0}^k$ partíciója, továbbá $\epsilon$ és $d$ pozitív számok. Ekkor $(\epsilon, d)$-partíciós gráfnak nevezzük azt a $W$ gráfot, melynek csúcshalmaza $\{v_1, \ldots, v_k\}$, illetve $v_i$ és $v_j$ között pedig pontosan akkor fut él, ha $(V_i, V_j)$ $\epsilon$-reguláris pár legalább $d$ élsűrűséggel.

Nagyon nagy vonalakban azon múlik a 2.4.2. Tételben kívánt approximációs faktor, hogy egy $d$ élsűrűséghez és a gráf egy $\mathcal{P}$ $\epsilon$-reguláris partíciójához definiált $W$ súlyozott, $(\epsilon, d)$-partíciós gráfnak tudunk olyan $\mathcal{F}$-homomorfizmus-mentes részgráfját találni (azaz olyan $W'$ részgráfot, melyhez semmilyen $F \in \mathcal{F}$-re nem létezik homomorfizmus $F$-ről $W'$-re), melyben maximális a $T$-vel izomorf részgráfok száma, és a $W$-re történő

„áttérés”, illetve a „visszafújás” nem módosítja lényegesen a $T$-vel izomorf részgráfok számát.

## 3.5. Algebrai, véges geometriai konstrukciók

Egy $H$ gráf $ex(n, H)$ extremális számának (vagy nagyságrendjének) meghatározása általában úgy történik, hogy valamilyen módszerrel adunk egy felső becslést rá, majd mutatunk egy „éles” példát, azaz találunk egy gráfosztályt, mely élszáma jól megközelíti vagy eléri a becslésünket, ezzel általánosságban meghatározva $ex(n, H)$ nagyságrendjét vagy aszimptotikus értékét.

A példák sokszor algebrai, vagy véges geometriai konstrukciókból jönnek, mint például az $ex(n, C_4)$ esetében is: az éles példa a véges síkok polaritási gráfja, nagyságrendileg éles példa pedig az illeszkedési gráfja volt [11, 12]. A 2.1.2. részben látott speciális páros gráfokra vonatkozó többi tétel alsó becslései is algebrai, véges geometriai technikákkal jöttek ki, de sokszor az általánosabb szuperszaturálási kérdésekben is hatékony eszközt adnak alsó korlátok meghatározására.

További példák [16, 61] összefoglalókban találhatók.

# 4. fejezet

# Néhány eredmény feldolgozása és új tételek

A fejezet első részében feldolgozunk néhány eredményt: számos észrevételt teszünk a Dependent random choice lemma kapcsán, majd a szuperszaturálás technikájával összekapcsolva bizonyítunk pár új állítást. A második részben alsó becslést szeretnénk adni egy gráf számozott $k$-hosszú útjainak a számára, ezért a véletlen sétákkal foglalkozunk részletesebben: megbecsülve a séták számát, és azt, hogy egy séta mekkora valószínűséggel út, könnyen adódik, hogy legalább mennyi számozott $k$-hosszú utat tartalmaz a gráf.

## 4.1. Szuperszaturálás és a Dependent random choice

Ebben a részben néhány egyszerű megfigyelést teszünk a Dependent random choice módszer kapcsán. A szuperszaturálás technikáját használva feltesszük, hogy valamilyen $n$ csúcsú $d$ átlagfokszámú $G$ gráf (és a szükséges paraméterek) teljesítik a 3.2.1. Lemma feltételét, így ha egy tetszőleges $n$ csúcsú $c \cdot d$ átlagfokszámú $G'$ gráfot tekintünk, akkor a lemma által garantáltnál erősebbet is bizonyíthatunk.

Az alábbi két állítás lényegében azt mondja, hogy $c \cdot d$ átlagfokszám esetén, vagy létezik egy $c \cdot a$ méretű $U$ halmaz, vagy az $a$ méretű $U$ halmaz minden $r$ elemű részhalmazának a közös szomszédsága legalább $c \cdot m$ méretű.

**4.1.1. Állítás.** *Legyenek az $a, d, m, n, r$ pozitív egészek, és a $G = (V, E)$ $n$ csúcsú, $d$*

*átlagfokszámú gráf olyanok, melyek teljesítik a 3.2.1. Lemma feltételét, továbbá legyen $c$ egy 1-nél nagyobb valós szám. Ekkor bármely $G' = (V', E')$ $n$ csúcsú, $cd$ átlagfokszámú gráfban létezik egy olyan legalább $c^r a$ méretű $U$ csúcshalmaz, hogy $U$ bármely $r$ csúcsának legalább $m$ közös szomszédja van.*

*Bizonyítás.* Megmutatjuk, hogy a kívánt paraméterek kielégítik a 3.2.1. Lemma feltételét. Felhasználva, hogy $G$-re teljesül a feltétel és $c > 1$, adódik, hogy

$$\frac{(cd)^r}{n^{r-1}} - \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^r \geq \frac{d^r}{n^{r-1}} - \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^r + (c^r - 1)\frac{d^r}{n^{r-1}} \geq a + (c^r - 1)a \geq c^r a.$$

Tehát a 3.2.1. Lemma miatt létezik egy legalább $c^r a$ méretű $U$ csúcshalmaz, hogy $U$ bármely $r$ csúcsának legalább $m$ közös szomszédja van. □

**4.1.2. Állítás.** *Legyenek az $a, d, m, n, r$ pozitív egészek, és a $G = (V, E)$ $n$ csúcsú, $d$ átlagfokszámú gráf olyanok, melyek teljesítik a 3.2.1. Lemma feltételét, továbbá legyen $c$ egy 1-nél nagyobb valós szám. Ekkor bármely $G' = (V', E')$ $n$ csúcsú, $cd$ átlagfokszámú gráfban létezik egy olyan legalább $a$ méretű $U$ csúcshalmaz, hogy $U$ bármely $r$ csúcsának legalább $\lfloor cm \rfloor$ közös szomszédja van.*

*Bizonyítás.* Megmutatjuk, hogy a kívánt paraméterek kielégítik a 3.2.1. Lemma feltételét, azaz (átrendezve):

$$\frac{(cd)^r}{n^{r-1}} - a \geq \binom{n}{r}\left(\frac{cm}{n}\right)^r.$$

Felhasználva, hogy $G$-re teljesül a feltétel és $c > 1$, adódik, hogy

$$\frac{(cd)^r}{n^{r-1}} - a = \frac{d^r}{n^{r-1}} - a + (c^r - 1)\frac{d^r}{n^{r-1}} \geq \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^r + (c^r - 1)\binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^r =$$

$$= c^r\binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^r = \binom{n}{r}\left(\frac{cm}{n}\right)^r.$$

Ebből átrendezés után kapjuk az egyenlőtlenséget. Így a 3.2.1. Lemma miatt létezik egy legalább $a$ méretű $U$ csúcshalmaz, hogy $U$ bármely $r$ csúcsának legalább $\lfloor cm \rfloor$ közös szomszédja van. □

A fenti két megfigyelés egyszerű, közös általánosítása, hogy ha az átlagfokszám $c_1 \cdot c_2 \cdot d$, akkor létezik egy legalább $c_1^r a$ méretű $U$ csúcshalmaz és $U$ bármely $r$ csúcsának legalább $\lfloor c_2 m \rfloor$ közös szomszédja van.

**4.1.3. Következmény.** *Legyenek az $a, d, m, n, r$ pozitív egészek, és a $G = (V, E)$ $n$ csúcsú, $d$ átlagfokszámú gráf olyanok, melyek teljesítik a 3.2.1. Lemma feltételét, továbbá legyenek $c_1, c_2$ 1-nél nagyobb valós számok. Ekkor bármely $G' = (V', E')$ $n$ csúcsú, $c_1c_2d$ átlagfokszámú gráfban létezik egy olyan legalább $c_1^r a$ méretű $U$ csúcshalmaz, hogy $U$ bármely $r$ csúcsának legalább $\lfloor c_2 m \rfloor$ közös szomszédja van.*

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk tetszőleges sorrendben a 4.1.1. és a 4.1.2. Állításokat. □

A 3.2.2. Tétel bizonyításában láttuk, hogyan lehet mohó módon beágyazni egy $H$ páros gráfot egy sűrű (a 3.2.1. Lemma feltételeit kielégítő) gráfba a Dependent random choice lemma segítségével. Ha a $H = (A \cup B, F)$ páros gráfot egy $c_1c_2d$ átlagfokszámú gráfba ágyazzuk be mohó módon, akkor az előző következmény miatt az $A$ csúcsosztály elemeit a $c_1a$ méretű $U$ halmazból választhajuk ki, a $B$ csúcsosztály elemeit pedig a $c_2m$ méretű közös szomszédságból.

**4.1.4. Következmény.** *Legyenek az $a, d, m, n, r$ pozitív egészek, és a $G = (V, E)$ $n$ csúcsú, $d$ átlagfokszámú gráf olyanok, melyek teljesítik a 3.2.1. Lemma feltételét, továbbá legyenek $c_1, c_2$ 1-nél nagyobb valós számok, $H = (A \cup B, F)$ pedig egy olyan páros gráf, mely $B$-beli csúcsainak foka legfeljebb $r$ és $|A| = a, |B| = b$. Ekkor bármely $G' = (V', E')$ $n$ csúcsú, $c_1c_2d$ átlagfokszámú gráfban legalább $\binom{c_1a}{a}\binom{c_2m}{b}$-szer előfordul $H$.*

*Bizonyítás.* Rögtön következik a 3.2.2. Tétel bizonyításából és a 4.1.3. Következményből. □

A Dependent random choice lemma biztosította, hogy $U$-ban minden $r$ elemű halmaznak legalább $m$ közös szomszédja legyen; ekkor természetesen minden $r - 1$ elemű halmaznak is lesz legalább $m$ közös szomszédja. Ennél többet szeretnénk mondani, így a Dependent random choice lemma bizonyításához hasonlóan járunk el, de az $r - 1$ méretű „rossz” halmazokból is kidobunk egy-egy elemet. Ekkor egy árnyalatnyival erősebb feltételt kell teljesítenünk, de már nem csak az $r$ elemű halmazok szomszédságának „gazdagsága”, hanem az $r - 1$ elemű halmazok szomszédságának még sokkal nagyobb mérete is megkapható.

**4.1.5. Állítás.** *Legyenek az $a, d, m, n, r$ pozitív egészek, a $G = (V, E)$ $n$ csúcsú, $d$ átlagfokszámú gráf olyanok, melyekre teljesül, hogy*

$$\frac{d^r}{n^{r-1}} - \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^r - \binom{n}{r-1}\left(\frac{m'_{r-1}}{n}\right)^r \geq a,$$

*akkor $G$-ben létezik egy olyan legalább $a$ méretű $U$ csúcshalmaz, hogy $U$ bármely $r$ csúcsának legalább $m$ közös szomszédja van, és $U$ bármely $r-1$ csúcsának legalább $m'_{r-1}$ közös szomszédja van, ahol $m'_{r-1} \geq mn^{\frac{1}{a}}$.*

*Bizonyítás (vázlat).* A 3.2.1. Lemma bizonyítását módosítjuk az alábbiak szerint.

Válasszuk ki a csúcsok egy $t$ elemű $T$ halmazát $V$-ből uniform véletlen módon ismétléssel. Legyen $A = N^*(T)$, továbbá jelölje $X$ az $A$ halmaz elemszámát. Ekkor

$$\mathbb{E}(X) \geq \frac{d^r}{n^{r-1}}.$$

Jelölje az $Y$ valószínűségi változó azon $S \subset A$ részhalmazok számát, melyek $r$ eleműek, de $m$-nél kevesebb közös szomszédjuk van. Ekkor

$$\mathbb{E}(Y) < \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^r.$$

Jelölje az $Z$ valószínűségi változó azon $S \subset A$ részhalmazok számát, melyek $r-1$ eleműek, de $m'_{r-1}$-nél kevesebb közös szomszédjuk van. Ekkor

$$\mathbb{E}(Z) < \binom{n}{r-1}\left(\frac{m'_{r-1}}{n}\right)^r.$$

Így a várható érték linearitását kihasználva kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X - Y - Z) \geq \frac{d^r}{n^{r-1}} - \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^r - \binom{n}{r-1}\left(\frac{m'_{r-1}}{n}\right)^r \geq a.$$

Ekkor tehát létezik egy olyan $T$ halmaz, melyet „kijavítva”, azaz minden olyan $r$ méretű $S \subset A$ halmazból, melynek kevesebb, mint $m$ szomszédja van és minden olyan $r-1$ méretű $S' \subset A$ halmazból, melynek kevesebb, mint $m'_{r-1}$ szomszédja van, kidobva egy elemet a kapott $A' = N^*(T')$ halmaz elemszáma legalább $X - Y - Z \geq a$ lesz, és persze minden $r$ méretű részhalmazának legalább $m$, illetve minden $r-1$ méretű részhalmazának legalább $m'_{r-1}$ közös szomszédja van. □

Az előző gondolatmenetet követve a fenti megfigyelésnek kézenfekvő az általánosítása: $U$ bármely $r-i$ csúcsának közös szomszédságáról még több is feltehető, legalább $mn^{\frac{i}{a}}$ méretű lesz.

**4.1.6. Állítás.** *Legyenek az $a, d, m, n, r$ pozitív egészek, $l \in \{1, 2, \ldots, r-1\}$, a $G = (V, E)$ $n$ csúcsú, $d$ átlagfokszámú gráf olyanok, melyekre teljesül, hogy*

$$\frac{d^r}{n^{r-1}} - \binom{n}{r}\left(\frac{m}{n}\right)^r - \sum_{i=1}^{l}\binom{n}{r-i}\left(\frac{m_i'}{n}\right)^r \geq a,$$

*akkor $G$-ben létezik egy olyan legalább $a$ méretű $U$ csúcshalmaz, hogy $U$ bármely $r$ csúcsának legalább $m$ közös szomszédja van, és $U$ bármely $r-i$ csúcsának legalább $m_i'$ közös szomszédja van, ahol $m_i' \geq mn^{\frac{i}{a}}$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, l-1\}$ számra.*

Ezt kihasználva 4.1.4. Következményhez hasonlóan adódik az alábbi, mely azt mutatja, hogyha a páros gráf $B$-ben nem reguláris, akkor nagyságrendileg többet lehet kihozni a Dependent random choice módszerből, mint amennyi az eredeti lemmából látszik. A 4.1.4. Következmény logikáját követjük a $H$-val izomorf részgráfok megszámlálásához, de kihasználjuk, hogy egy $r$-nél kisebb fokú csúcs $A$-beli szomszédainak közös szomszédsága lényegesen nagyobb $m$-nél.

**4.1.7. Állítás.** *Legyenek az $a, d, m, n, r$ pozitív egészek, és a $G = (V, E)$ $n$ csúcsú, $d$ átlagfokszámú gráf olyanok, melyek teljesítik a 3.2.1. Lemma feltételét, továbbá legyenek $c_1, c_2$ 1-nél nagyobb valós számok, $H = (A \cup B, F)$ pedig egy olyan páros gráf, melyben $|A| = a, |B| = b$, és a $B$-beli csúcsok fokszámsorozata $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_b \leq r$. Ha $d_1 = \ldots = d_{j_1} = t_l < d_{j_1+1} = \ldots = d_{j_2} = t_{l-1} < \ldots < d_{j_{l-1}+1} = \ldots = d_{j_l} = t_1 < d_{j_l+1} = \ldots = d_b \leq r$, akkor bármely $G' = (V', E')$ $n$ csúcsú, $c_1c_2d$ átlagfokszámú gráfban legalább*

$$\binom{c_1 a}{a}\prod_{i=1}^{l}\binom{c_2 m_{r-t_i}'}{j_{l-i+1} - j_{l-i}}$$

*-szer előfordul $H$, ahol $m_{r-i}' \geq mn^{\frac{i}{a}}$.*

A konkrét számeredmény onnan származik, hogy először az $A$ halmaz beágyazását végezzük el, majd egymás után a $B$-beli csúcsokat fokszámuk szerint. Ennél a lépésnél kihasználjuk, hogy egy $t$ fokú csúcs beágyazására legalább $mn^{r-t}$ lehetőség adódik.

## 4.2. Véletlen séták, utak száma

Ebben a részben néhány egyszerű észrevételt teszünk véletlen sétákkal kapcsolatosan, majd a Blakley-Roy-egyenlőtlenséget használva alsó becslést adunk a számozott $k$-hosszú utak számára. Végig feltesszük, hogy $G$ összefüggő, így ezt külön nem is jelezzük az állításoknál.

Egy $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n)$ csúcshalmazon felvett összefüggő $G = (V, E)$ gráf egy véletlen sétáján itt egy olyan $(x_0, (x_0, x_1), x_1, (x_1, x_2), x_3, (x_3, x_4), \ldots)$ sétát értünk, melynek csúcsai
az $x_0, x_1, x_2, \ldots$, továbbá ha az $i$. lépésben $x_i = v_k$-ban vagyunk, akkor onnan $v_k$ egyik szomszédjába lépünk $1/d(v_k)$ valószínűséggel, azaz uniform, véletlen módon választunk következő csúcsot.

Az alábbi jól ismert megfigyelés azt állítja, hogy minden $v$ eleme $V$-re ha $\mathbb{P}(x_0 = v) = \frac{d(v)}{2e(G)}$, azaz $v$-t uniform, véletlen valószínűséggel választjuk kezdőcsúcsnak, akkor minden lépés után $\frac{d(v)}{2e(G)}$ valószínűséggel leszünk a $v$ csúcsban.

**4.2.1. Megfigyelés.** *Válasszuk ki a véletlen séta kezdőcsúcsának a $G = (V, E)$ gráf egy csúcsát: minden $v$ eleme $V$-re $\mathbb{P}(x_0 = v) = \frac{d(v)}{2e(G)}$. Innen indítsunk egy véletlen $(x_0, (x_0, x_1), x_1, (x_1, x_2), x_2, \ldots)$ sétát. Ekkor minden lépés után $\frac{d(v)}{2e(G)}$ valószínűséggel vagyunk a $v$ csúcsban (minden $v$ eleme $V$-re).*

*Bizonyítás.* A séta $k$ csúcsszámára menő teljes indukcióval bizonyítunk.

$k = 0$-ra az állítás nyilvánvaló.

Valamely $k \geq 1$-re tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(x_k = v) = \frac{d(v)}{2e(G)}$.
Ekkor

$$\mathbb{P}(x_{k+1} = v) = \sum_{uv \in E(G)} \mathbb{P}(x_k = u) \frac{1}{d(u)} = \sum_{uv \in E(G)} \frac{d(u)}{2e(G)} \frac{1}{d(u)} = \frac{d(v)}{2e(G)}.$$

□

Az utak számára szeretnénk alsó becslést adni, így érdemes meghatároznunk, hogy egy véletlen séta legalább mekkora valószínűséggel lesz út.

**4.2.2. Állítás.** *A 4.2.1. Megfigyelésben definiált véletlen séta legalább* $1 - \frac{n}{2e(G)}\binom{k+1}{2}$ *valószínűséggel út.*

*Bizonyítás.* Becsüljük felülről annak a valószínűségét, hogy egy véletlen séta nem út, ekkor a komplementaritás miatt alsó becslést kapunk a keresett valószínűségre. Ehhez nevezzünk rossznak egy lépést, ha azzal olyan csúcsba lépünk, melyben már jártunk a sétánk során. Ekkor a rossz lépések eseményének valószínűségét becsülhetjük felülről az unió-becsléssel.

$$\mathbb{P}(\text{az } (x_1, (x_1, x_2), x_2, \ldots) \text{ véletlen séta nem út}) \leq \sum_{i \leq k} \mathbb{P}(i. \text{ lépés rossz}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{v \in V} \mathbb{P}(i. \text{ lépés rossz } | x_{i-1} = v) \leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{v \in V} \frac{d(v)}{2e(G)} \frac{i}{d(v)} = \frac{n}{2e(G)} \binom{k+1}{2}.$$

□

A következő mátrix-egyenlőtlenség segítségével majd alsó becslést tudunk adni egy gráf számozott $k$ hosszú sétáinak számára.

**4.2.3. Tétel** (Blakley-Roy [62]). *Legyen* $S \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ *szimmetrikus mátrix,* $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n}$ *vektor, melyre teljesül, hogy* $\langle u; u \rangle = 1$*, továbbá* $k$ *valamilyen pozitív egész. Ekkor* $\langle u, Su \rangle^k \leq \langle u, S^k u \rangle$.

**4.2.4. Következmény.** *Egy* $G = (V, E)$ *gráfban legalább* $\frac{(2e(G))^k}{n^{k-1}}$ *darab számozott* $k$*-hosszú séta van.*

*Bizonyítás.* Alkalmazzuk a 4.2.3. Tételt a $G$ gráf $A$ adjacenciamátrixára, és az $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$ vektorra. Mivel $\langle \mathbf{1}, A^k \mathbf{1} \rangle$ éppen a számozott $k$-hosszú séták számát adja meg, így $\frac{(2e(G))^k}{n^{k-1}} \leq \langle \mathbf{1}, A^k \mathbf{1} \rangle$. □

**4.2.5. Következmény.** *Egy* $G = (V, E)$ *gráfban legalább*

$$2^k e(G)^k n^{1-k} - 2^{k-2} e(G)^{k-1} n^{2-k} k(k+1)$$

*darab számozott* $k$*-hosszú út van.*

**4.2.6. Megjegyzés.** Ha $2^{11} \frac{k}{k+1} \geq d$, akkor a fenti következmény megjavítja 2.3.3. Tétel eredményét.

# 5. fejezet

# Lezárás

Az előző négy fejezetben bevezettük a Turán-tételkört, a legfontosabb általánosításokat és kapcsolódó változatokat, írtunk a jellemző technikákról és azok alkalmazási területeiről, illetve bemutattunk néhány új észrevételt. Lezárásaként itt megfogalmazunk néhány a szakdolgozat keretein túlmutató lehetséges irányt, melyek további vizsgálata érdekes lenne számunkra.

### A Dependent random choice lemma

A 3.2. részben részletesebben megvizsgáltuk a Dependent random choice lemmát és annak egy egyszerű alkalmazását. Ismert a lemma egy változata (részletek [52]-ben találhatók), mely nem követeli meg, hogy minden $U$-beli $r$ elemű halmaznak „sok” közös szomszédja legyen, de a „rossz” halmazok arányát tetszőlegesen kicsire lehet állítani. Érdemes lenne megvizsgálni, hogy az 4.1. részben megfigyelt állítások igazak lesznek-e (esetleg némi módosítás után) az említett változatra is.

### A Dependent random choice és a Sidorenko-sejtés kapcsolata

Mint említettük 2010-ben Conlon, Fox és Sudakov [44]-ben bebizonyították a Dependent random choice módszer segítségével, hogy minden olyan $T$ páros gráfra igaz a Sidorenko-sejtés, melynek van teljes fokú csúcsa. Érdekes lenne megérteni, hogy pontosan hogyan működik a módszer a homomorfizmus-sűrűséggel kapcsolatos sejtésnél, hiszen számos más nyitott kérdés ismert a Sidorenko-sejtés környékén, melyekre talán még nem vizsgálták meg a technikát.

### Véletlen séták, utak száma

A 4.2. részben látottakhoz hasonlóan, de a véletlen séta helyett a fát egy kanonikus reprezentációja szerint felépítve a számozott fák számára is adhatnánk alsó becslést.

### Homomorfizmusok száma

Az 2.5.3. részben több példát is megvizsgáltunk, ahol a homomorfizmusszám meghatározása segített az $\mathcal{N}(G,T)$ érték kiszámításában. Érdemes lenne megnézni további speciális gráfokat, melyekre nem ismert $\mathcal{N}(G,T)$ pontos értéke, hogy a 2.5.8. Tétel segítségével legalább a jelenlegi becslésen tudunk-e javítani.

### Konténermódszer

Érdekes lenne alkalmazni a konténermódszert a páros gráf-beágyazásokhoz olyan módon, hogy azokat a halmazokat tekintjük függetlennek, amelyekben minden $r$ elemű részhalmaz közös szomszédsága „nagy”.

# Irodalomjegyzék


[1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *et al.*, *Graph theory with applications*, vol. 290. Macmillan London, 1976.

[2] B. Bollobás, *Extremal graph theory.* Courier Corporation, 2004.

[3] J. H. van Lint and R. M. Wilson, *A course in combinatorics.* Cambridge university press, 2001.

[4] S. Arumugam, A. Brandstädt, T. Nishizeki, *et al.*, *Handbook of graph theory, combinatorial optimization, and algorithms*, vol. 34. CRC Press, 2016.

[5] W. Mantel, „Problem 28," *Wiskundige Opgaven*, vol. 10, no. 60-61, p. 320, 1907.

[6] P. Turán, „On an extremal problem in graph theory," *Mat. Fiz. Lapok*, vol. 48, pp. 436–452, 1941.

[7] P. Erdős, A. H. Stone, *et al.*, „On the structure of linear graphs," *Bull. Amer. Math. Soc*, vol. 52, no. 1087-1091, p. 1, 1946.

[8] P. Erdős and M. Simonovits, „A limit theorem in graph theory," in *Studia Sci. Math. Hung*, Citeseer, 1965.

[9] T. Kővári, V. Sós, and P. Turán, „On a problem of K. Zarankiewicz," in *Colloquium Mathematicum*, vol. 1, pp. 50–57, 1954.

[10] J. A. Bondy and M. Simonovits, „Cycles of even length in graphs," *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 16, no. 2, pp. 97–105, 1974.

[11] P. Erdős, A. Rényi, and V. T. Sós, „On a problem of graph theory," 1966.

[12] W. G. Brown, „On graphs that do not contain a Thomsen graph," *Canadian Mathematical Bulletin*, vol. 9, no. 3, pp. 281–285, 1966.

[13] C. T. Benson, „Minimal regular graphs of girths eight and twelve," *Canadian Journal of Mathematics*, vol. 18, pp. 1091–1094, 1966.

[14] R. Singleton, „On minimal graphs of maximum even girth," *Journal of Combinatorial Theory*, vol. 1, no. 3, pp. 306–332, 1966.

[15] M. Simonovits, „Extremal graph problems, degenerate extremal problems, and supersaturated graphs," *Progress in graph theory (Waterloo, Ont., 1982), Academic Press, Toronto, ON*, pp. 419–437, 1984.

[16] Z. Füredi and M. Simonovits, „The history of degenerate (bipartite) extremal graph problems," in *Erdős Centennial*, pp. 169–264, Springer, 2013.

[17] P. Erdős and T. Gallai, „On maximal paths and circuits of graphs," *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 10, no. 3-4, pp. 337–356, 1959.

[18] P. Erdős and V. T. S., „The tree conjecture," *Mentioned in P. Erdős, Extremal problems in graph, Theory of graphs and its applications, Proc. of the Symposium held in Smolenice theory*, pp. 29–38, 1963.

[19] J. Hladky, D. Piguet, M. Simonovits, M. Stein, and E. Szemerédi, „The approximate Loebl-Komlós-Sós conjecture and embedding trees in sparse graphs," *arXiv preprint arXiv:1406.3935*, 2014.

[20] V. Rozhon, „A local approach to the Erdős–Sós conjecture," *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 33, no. 2, pp. 643–664, 2019.

[21] P. Erdős, „Some recent results on extremal problems in graph theory. results," *Theory of Graphs (Internat. Sympos., Rome, 1966)*, pp. 117–123, 1967.

[22] A. Grzesik, O. Janzer, and Z. L. Nagy, „The Turán number of blow-ups of trees," *arXiv preprint arXiv:1904.07219*, 2019.

[23] M. Simonovits, „A method for solving extremal problems in graph theory, stability problems," in *Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966)*, pp. 279–319, 1968.

[24] P. Erdős and M. Simonovits, „Supersaturated graphs and hypergraphs," *Combinatorica*, vol. 3, no. 2, pp. 181–192, 1983.

[25] P. Erdős and M. Simonovits, „Compactness results in extremal graph theory," *Combinatorica*, vol. 2, no. 3, pp. 275–288, 1982.

[26] D. Dellamonica, P. Haxell, T. Luczak, D. Mubayi, B. Nagle, Y. Person, V. Rödl, and M. Schacht, „Tree-minimal graphs are almost regular," *Journal of Combinatorics*, vol. 3, no. 1, pp. 49–62, 2012.

[27] J. Verstraete and D. Mubayi, „Counting trees in graphs," *The Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 23, no. 3, pp. 3–39, 2016.

[28] B. Bollobás and E. Győri, „Pentagons vs. triangles," *Discrete Mathematics*, vol. 308, no. 19, pp. 4332–4336, 2008.

[29] E. Győri, J. Pach, and M. Simonovits, „On the maximal number of certain subgraphs in $K_r$-free graphs," *Graphs and Combinatorics*, vol. 7, no. 1, pp. 31–37, 1991.

[30] E. Győri and H. Li, „The maximum number of triangles in $C_{2k+1}$-free graphs," *Combinatorics, Probability and Computing*, vol. 21, no. 1-2, pp. 187–191, 2012.

[31] A. Grzesik, „On the maximum number of five-cycles in a triangle-free graph," *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 102, no. 5, pp. 1061–1066, 2012.

[32] N. Alon and C. Shikhelman, „Many $T$ copies in $H$-free graphs," *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 121, pp. 146–172, 2016.

[33] N. Alon and C. Shikhelman, „Additive approximation of generalized Turán questions," *arXiv preprint arXiv:1811.08750*, 2018.

[34] N. Alon, A. Shapira, and B. Sudakov, „Additive approximation for edge-deletion problems," in *46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'05)*, pp. 419–428, IEEE, 2005.

[35] N. Alon, A. Shapira, and U. Stav, „Can a graph have distinct regular partitions?," *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 23, no. 1, pp. 278–287, 2009.

[36] S. Letzter, „Many $H$-copies in graphs with a forbidden tree," *arXiv preprint arXiv:1811.04287*, 2018.

[37] N. Alon, „On the number of subgraphs of prescribed type of graphs with a given number of edges," *Israel Journal of Mathematics*, vol. 38, no. 1-2, pp. 116–130, 1981.

[38] E. Győri, N. Salia, C. Tompkins, and O. Zamora, „The maximum number of $P_l$ copies in $P_k$-free graphs," *arXiv preprint arXiv:1803.03240*, 2018.

[39] L. Lovász, *Large networks and graph limits*, vol. 60. American Mathematical Soc., 2012.

[40] P. Hell and J. Nesetril, *Graphs and homomorphisms.* Oxford University Press, 2004.

[41] L. Lovász, „Operations with structures," *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 18, no. 3-4, pp. 321–328, 1967.

[42] C. Borgs, J. Chayes, L. Lovász, V. T. Sós, and K. Vesztergombi, „Counting graph homomorphisms," in *Topics in discrete mathematics*, pp. 315–371, Springer, 2006.

[43] A. F. Sidorenko, „Inequalities for functionals generated by bipartite graphs," *Diskretnaya Matematika*, vol. 3, no. 3, pp. 50–65, 1991.

[44] D. Conlon, J. Fox, and B. Sudakov, „An approximate version of Sidorenko's conjecture," *Geometric and Functional Analysis*, vol. 20, no. 6, pp. 1354–1366, 2010.

[45] C. H. Papadimitriou, *Computational complexity.* John Wiley and Sons Ltd., 2003.

[46] M. Dyer and C. Greenhill, „The complexity of counting graph homomorphisms," *Random Structures & Algorithms*, vol. 17, no. 3-4, pp. 260–289, 2000.

[47] O. Amini, F. V. Fomin, and S. Saurabh, „Counting subgraphs via homomorphisms," *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 26, no. 2, pp. 695–717, 2012.

[48] N. Alon and J. H. Spencer, *The probabilistic method.* John Wiley & Sons, 2004.

[49] B. Sudakov, „A few remarks on Ramsey−Turán-type problems," *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 88, no. 1, pp. 99–106, 2003.

[50] A. V. Kostochka and V. Rödl, „On graphs with small Ramsey numbers," *Journal of Graph Theory*, vol. 37, no. 4, pp. 198–204, 2001.

[51] N. Alon, M. Krivelevich, and B. Sudakov, „Turán numbers of bipartite graphs and related Ramsey-type questions," *Combinatorics, Probability and Computing*, vol. 12, no. 5+ 6, pp. 477–494, 2003.

[52] J. Fox and B. Sudakov, „Dependent random choice," *Random Structures & Algorithms*, vol. 38, no. 1-2, pp. 68–99, 2011.

[53] D. Saxton and A. Thomason, „Hypergraph containers," *Inventiones mathematicae*, vol. 201, no. 3, pp. 925–992, 2015.

[54] J. Balogh, R. Morris, and W. Samotij, „The method of hypergraph containers," *arXiv preprint arXiv:1801.04584*, 2018.

[55] J. Balogh, R. Morris, and W. Samotij, „Independent sets in hypergraphs," *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 28, no. 3, pp. 669–709, 2015.

[56] D. Kleitman and K. Winston, „The asymptotic number of lattices," *Combinatorical Mathematics, Optimal Designs and their Applications (J. Srivastava, ed.), Ann. Discrete Math*, vol. 6, pp. 243–249, 1980.

[57] D. J. Kleitman and K. J. Winston, „On the number of graphs without 4-cycles," *Discrete Mathematics*, vol. 41, no. 2, pp. 167–172, 1982.

[58] E. Szemerédi, „Regular partitions of graphs," tech. rep., Stanford Univ Calif Dept of Computer Science, 1975.

[59] P. Frankl and V. Rödl, „Extremal problems on set systems," *Random Structures & Algorithms*, vol. 20, no. 2, pp. 131–164, 2002.

[60] J. Komlós, A. Shokoufandeh, M. Simonovits, and E. Szemerédi, „The regularity lemma and its applications in graph theory," in *Summer School on Theoretical Aspects of Computer Science*, pp. 84–112, Springer, 2000.

[61] S. Ball, *Finite geometry and combinatorial applications*, vol. 82. Cambridge University Press, 2015.

[62] G. R. Blakley and P. Roy, „A Hölder type inequality for symmetric matrices with nonnegative entries," in *Proc. Amer. Math. Soc*, vol. 16, p. 29, 1965.