EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Somogyi Roland

Gráfpolinomok: A kromatikus polinom

MSc alkalmazott matematikus szakdolgozat

Témavezető:

Csikvári Péter
ELTE, Számítástudományi Tanszék

Budapest, 2019

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **2**

2. A kromatikus polinom **3**

2.1. A színezés fogalma 3

2.2. Az kromatikus polinomok alaptétele 4

2.3. A kromatikus polinom tulajdonságai 7

2.4. A kromatikus polinom együtthatóinak jelentése 11

2.5. Módszerek a kromatikus polinom kiszámításának gyorsítására 14

2.6. A kromatikus polinom gyökei 16

3. Gráfpolinomok **18**

3.1. Tutte-polinom 18

3.2. Kromatikus polinom 19

3.3. További gráfpolinomok 19

4. Dobrushin-lemma **20**

5. Exponenciális típusú gráfpolinomok **22**

6. Sokal tételének bizonyítása **27**

1. Bevezetés

A kromatikus szám a gráfelmélet egyik legismertebb fogalma, ami azt mondja meg egy G gráfról, hogy legalább hány színt kell használnunk, hogy azt "jól" ki tudjuk színezni. Ezt $\chi(G)$-vel szokás jelölni.

Ennek a fogalomnak a kiterjesztése a kromatikus polinom, mely azt mondja meg egy G gráfról, hogy adott számú színnel, hányféleképpen színezhető ki "jól" a gráf. Ezt a polinomot $M_G(\lambda)$-val fogjuk jelölni.

Ebből már láthatjuk, hogy mi a két fogalom közötti kapcsolat: a kromatikus szám az a legkisebb pozitív egész szám, melyre a kromatikus polinom 0-nál nagyobb értéket vesz fel egy pozitív egész helyen. Formálisan: $\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{Z}^+ | M_G(k) > 0\}$.

Ezen szakdolgozatban a kromatikus polinomot fogjuk górcső alá venni. A 2. fejezetben a kromatikus polinommal, annak tulajdonságaival, meghatározásával fogunk foglalkozni. Bizonyos speciális gráfcsaládokra explicit képletet is adunk, hogy mi az ő kromatikus polinomjuk (pl. fák, körök). Végül meg fogjuk vizsgálni, hogy mit tudunk mondani a kromatikus polinom gyökeiről, illetve azokból a gráf milyen tulajdonságaira következtethetünk.

A további fejezetekben A. D. Sokal tételét fogjuk bebizonyítani, mely a következőképpen szól:

1.1. Tétel (Sokal [5]). *Legyen G véges gráf, melynek maximális fokszáma legfeljebb D. Ekkor a G gráf kromatikus polinomjának a gyökeinek abszolút értéke legfeljebb $C \cdot D$, ahol C G-től és D-től független konstans, melynek értéke maximum 8.*

Itt egy kisebb kitérőt fogunk tenni, hogy a kromatikus polinomon kívül más gráfpolinomokkal is megismerkedjünk.

A 4. fejezetben bebizonyítjuk a Dobrushin-lemmát és annak néhány következményét.

Az 5. fejezetben definiáljuk, hogy mit jelent az, ha egy gráfpolinom exponenciális típusú. Megmutatjuk, hogy a szakdolgozatban ismertetett polinomok ilyen típusúak és mutatunk példát, hogy ezen polinomok zérushelyeire milyen korlátot tudunk adni a Dobrushin-lemmát használva.

Végül a 6. fejezetben bebizonyítjuk az előző két fejezet alapján Sokal tételét.

2. A kromatikus polinom

Az alapvető kérdésünk az, hogy λ különböző színnel egy adott G gráf csúcsait hányféleképpen színezhetünk ki jól. Ezt a mennyiséget $M_G(\lambda)$-val fogjuk jelölni.

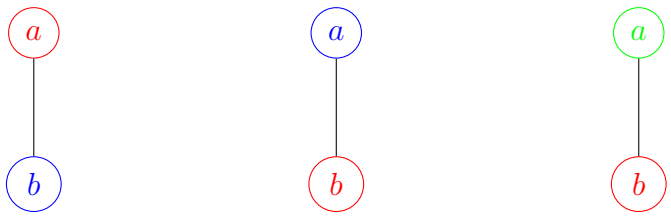
Ebben a fejezetben a [4] cikket dolgoztam fel.

2.1. A színezés fogalma

2.1. Definíció. *Egy gráf színezésén egy $M : V(G) \to C$ leképezést értünk, ahol C színek egy halmazát jelöli.*

Felmerül a kérdés, hogy két színezést mikor tartunk megegyezőnek, vagyis ha két színezés átvihető egymásba a csúcsok, és/vagy a színek egy permutációjával, akkor ezeket különböző színezésnek tekintjük-e vagy sem.

Nézzük a következő példát: $C = \{piros, kék, zöld\}$ és G egyszerűen két csúcs összekötve, akkor az alábbi három színezés megegyezik-e vagy sem?



Az első és második színezés a csúcsok (a, b) vagy a színek $(kék, piros)$ permutációjával átvihetők egymásba.

A második és harmadik színezés a színek $(kék, zöld)$ permutációjával átvehetők egymásba.

Míg az első ás harmadik színezés a csúcsok (a, b) és a színek $(kék, zöld)$ (az előző kettő), vagy a színek $(kék, piros, zöld)$ permutációjával átvihetők egymásba.

Jelen szakdolgozat során ezeket a színezéseket különbözőnek fogjuk tekinteni (kivéve, ha ezt máshogy feltüntetjük).

2.2. Definíció. *Egy gráf színezését jónak nevezzük, ha $\forall (u, v) \in E(G) : M(u) \neq M(v)$.*

Nézzünk meg két egyszerű esetet:

Legyen a G gráfunk az n csúcsú üres gráf ($E(G) = \emptyset$). Ezt a gráfot λ színnel λ^n-féleképpen színezhetjük ki jól, mivel ha nincsenek élek nincsenek megkötéseink, így bármelyik csúcs bármilyen színű lehet. Vagyis $M_{\overline{K}_n}(\lambda) = \lambda^n$.

Most nézzünk egy n csúcsú teljes gráfot (K_n). Ezt a gráfot λ színnel csak akkor tudjuk kiszínezni, ha $n \leq \lambda$ (mivel minden csúcsnak különböző színűnek kell lennie). Ha

ez teljesül akkor a jó színezések száma $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)...(\lambda-n+1)$. Hogy ne kelljen ezt a szorzatot mindig így kiírnunk jelöljük ezt $\lambda^{(n)}$-nel. Vagyis $M_{K_n}(\lambda) = \lambda^{(n)}$. $\lambda < n$ esetén lesz a szorzatnak 0-s tagja, tehát ebből is láthatjuk, hogy ekkor nem lehet a gráfot kiszínezni.

A többszörös éleket most elhagyhatjuk, mivel színezést tekintve mindegy hogy két csúcs között hány él fut. Hurokéleket nem engedünk meg, mert ekkor egy csúcshoz legalább két színt kellene társítani, ami nem lehetséges.

Mivel a későbbiekben csak jó színezésekkel fogunk foglalkozni, ezért a jó jelzőt az egyszerűség kedvéért nem fogjuk kiírni.

2.2. Az kromatikus polinomok alaptétele

2.3. Definíció. *$G-e$: az a gráf amit úgy kapunk, hogy G gráfból elhagyjuk az e élet.*

2.4. Definíció. *$G+e$: az a gráf amit úgy kapunk, hogy G gráfhoz hozzáadjuk az e élet.*

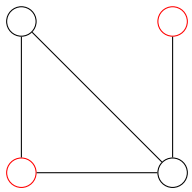
2.5. Definíció. *G/e: az a gráf amit úgy kapunk, hogy G gráf e élének két végpontját összehúzzuk. Az új csúcsból azon csúcsokba fut él, ahova legalább eredeti csúcsok egyikéből ment él.*

2.6. Tétel (Alaptétel). $\forall e \in E$:

$$M_G(\lambda) = M_{G+e}(\lambda) + M_{G/e}(\lambda) \tag{1}$$

$$M_G(\lambda) = M_{G-e}(\lambda) - M_{G/e}(\lambda). \tag{2}$$

Bizonyítás:
Kezdjük azzal, hogy a tétel második alakja, csak az első sor átfogalmazása: ha levonunk az elsőből $M_{G/e}(\lambda)$-t akkor $M_{G+e}(\lambda) = M_G(\lambda) - M_{G/e}(\lambda)$ kapjuk és ha $G+e$-t jelöljük G'-vel, akkor $M_{G'}(\lambda) = M_{G'-e}(\lambda) - M_{G'/e}(\lambda)$ megkapjuk a második alakot.
Emiatt elég az elsőt bizonyítanunk. A szemléletesség kedvéért nézzük a következő G gráfot:

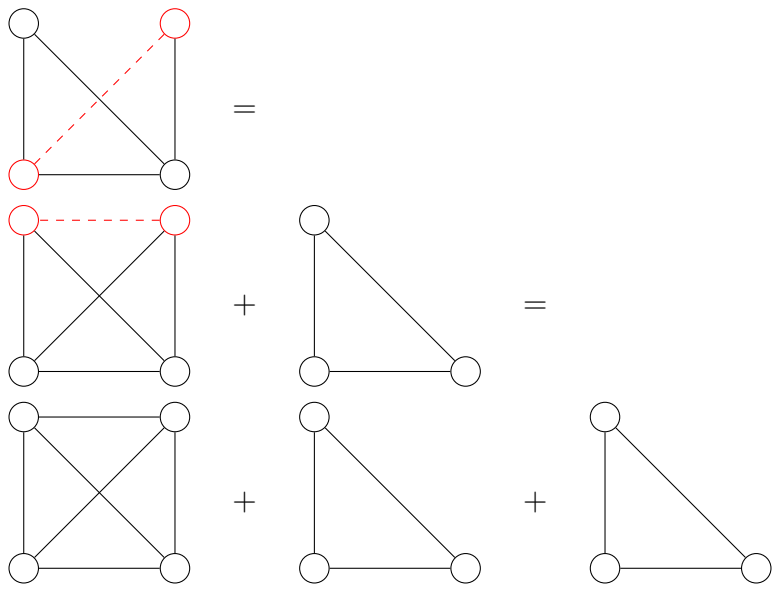


Vegyük a gráf két olyan csúcsát amelyek nem szomszédosak. Bármely színezésben két eset lehetséges: a két csúcs vagy azonos, vagy különböző színű. Ha azonos színű, akkor a két csúcsot egymásba húzhatjuk (G/e), a színezések számát ez nem befolyásolja. Ha különböző színűek, akkor ezt jelezhetjük egy él behúzásával ($G+e$), ami szintén nem változtatja a lehetséges színezések számát. Vagyis G-t pontosan annyiféleképpen színezhetjük ki, mint G/e és $G+e$ gráfokat együtt. A tétel első alakja pont ezt jelenti.

□

Számoljuk ki a bizonyításban mutatott gráf kromatikus polinomját a tétel mindkét alakjával:

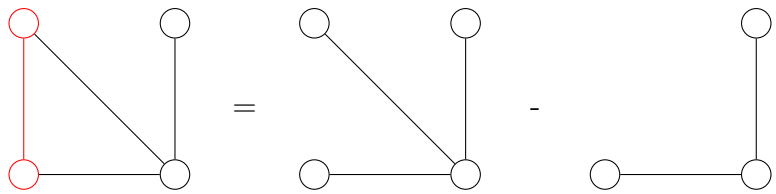
(1)



$$= \lambda^{(4)} + 2\lambda^{(3)}.$$

A kromatikus polinom ilyen módon való felírását faktoriális alaknak hívjuk.

(2)



Ezt a módszert redukciónak fogjuk hívni. Gondoljuk meg, hogy ezt tudjuk addig folytatni, amíg minden ágon el nem fogynak az élek, akkor pedig már csak üres gráfoknak a kromatikus polinomjait kell összeadni.

Ezzel a lépéssel szét tudtuk bontani a gráfot fákra. Azt már láttuk, hogy a teljes, illetve üres gráfok kromatikus polinomjára van képletünk, vajon a fákra is van? Mielőtt ezt a kérdést megválaszolnánk nézzük a következő tételt:

2.7. Tétel. *Ha egy gráf nem összefüggő, akkor a gráf kromatikus polinomja az összefüggő komponensek kromatikus polinomjainak a szorzata.*

Bizonyítás:
Mivel komponensek között nincsen él, ezért a komponensek színezései egymástól függetlenek. Tehát a gráf színezéseinek száma a komponensek színezéseinek a szorzata.

□

2.8. Állítás. *Jelöljük T_n-nel egy tetszőleges n csúcsú fát, ekkor*

$$M_{T_n}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}.$$

Bizonyítás:
Használjuk az alaptételünk második alakját egy levélből induló e élre: $T_n/e = T_{n-1}$, illetve $T_n - e = T_{n-1} \cup T_1$. Azt pedig már tudjuk, hogy $M_{T_1}(\lambda) = \lambda$. Ebből kapjuk a következő rekurziót:

$$\begin{aligned} M_{T_n}(\lambda) &= M_{T_{n-1}}(\lambda) \cdot \lambda - M_{T_{n-1}}(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot M_{T_{n-1}}(\lambda) = \\ &= (\lambda - 1)^2 \cdot M_{T_{n-2}}(\lambda) = ... = (\lambda - 1)^{n-1} \cdot M_{T_1}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Vagyis a második módon számolva a példagráfunk kromatikus polinomja

$$\lambda(\lambda - 1)^3 - \lambda(\lambda - 1)^2 = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2.$$

Míg az első módon számolt kromatikus polinom

$$\begin{aligned} \lambda^{(4)} + 2\lambda^{(3)} &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) + 2\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = \\ &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3 + 2) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Vagyis a ugyanazt a polinomot kaptuk. A szorzatot kifejtve megkapjuk a polinomot a szokásos alakjában:

$$M_G(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda.$$

A fákhoz hasonlóan a köröknek is ki tudjuk fejezni a kromatikus polinomját képlettel:

2.9. Állítás. *Egy n hosszú kör (C_n) kromatikus polinomja*

$$M_{C_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n \cdot (\lambda - 1).$$

Bizonyítás:
Használjuk az alaptételünk második alakját: $M_{C_n}(\lambda) = M_{C_n - e}(\lambda) - M_{C_n/e}(\lambda)$.
Azt kell észrevennünk, hogy $C_n - e$ egy fa (egy körnek elvesszük egy élét), illetve, hogy $C_n/e = C_{n-1}$. Ismét kapunk egy rekurziót:

$$\begin{aligned}
M_{C_n}(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)^{n-1} - M_{C_{n-1}}(\lambda) \\
M_{C_n}(\lambda) &= (\lambda - 1 + 1)(\lambda-1)^{n-1} - M_{C_{n-1}}(\lambda) \\
M_{C_n}(\lambda) - (\lambda-1)^n &= (\lambda-1)^{n-1} - M_{C_{n-1}}(\lambda) \\
M_{C_n}(\lambda) - (\lambda-1)^n &= (-1)\cdot(M_{C_{n-1}}(\lambda) - (\lambda-1)^{n-1}) \\
(-1)^n \cdot (M_{C_n}(\lambda) - (\lambda-1)^n) &= (-1)^{n-1}\cdot(M_{C_{n-1}}(\lambda) - (\lambda-1)^{n-1}).
\end{aligned}$$

Ebből azt kapjuk, hogy ez a kifejezés konstans minden n-re. Vagyis $n = 2$-re ha kiszámoljuk:

$$M_{C_2}(\lambda) - (\lambda-1)^2 = \lambda(\lambda-1) - (\lambda-1)^2 = (\lambda-1)(\lambda-(\lambda-1)) = \lambda - 1.$$

Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(-1)^n \cdot (M_{C_n}(\lambda) - (\lambda-1)^n) &= \lambda - 1 \\
M_{C_n}(\lambda) - (\lambda-1)^n &= (-1)^n \cdot (\lambda-1) \\
M_{C_n}(\lambda) &= (\lambda-1)^n + (-1)^n \cdot (\lambda-1).
\end{aligned}$$

Ez pedig pontosan az amit az állításban kimondtunk.

□

2.3. A kromatikus polinom tulajdonságai

A következőkben nézzünk néhány állítást, amik a kromatikus polinomokat jellemzik.

2.10. Állítás. *$M_G(\lambda)$ foka n.*

Bizonyítás:
Egy redukciós folyamat során mindig van egy n csúcsú gráfunk. A folyamat végén ez pedig egy n csúcsú üres gráfot fog adni, aminek a kromatikus polinomja λ^n.

□

Mivel a folyamat végén ez lesz az egyetlen n csúcs gráf, ebből azt is megkapjuk, hogy:

2.11. Következmény. *$M_G(\lambda)$ főegyütthatója 1.*

2.12. Állítás. *$M_G(\lambda)$ polinomnak nincs konstans együtthatója.*

Bizonyítás:
Ha lenne konstans együtthatója, akkor $M_G(0) \neq 0$, ami azt jelentené, hogy 0 színnel kiszínezhető a gráf. 0 színnel pedig nem tudunk gráfot színezni.

□

2.13. Állítás. *$M_G(\lambda)$ polinomnak együtthatói alternáló előjelűek.*

Bizonyítás:
1-3 csúcsú gráfokra már tudjuk, hogy ez igaz (az eddigi állításainkból ezek könnyen adódnak).
Most tegyük fel, hogy az állítás igaz minden n vagy annál kevesebb csúcsú gráfra. Az $n+1$ csúcsú üres gráfra szintén teljesül az állítás. Most tegyük fel azt is, hogy minden k vagy annál kevesebb élt tartalmazó $n+1$ csúcsú gráfra is igaz az állítás.
Vegyünk egy tetszőleges $n+1$ csúcsú $k+1$ élet tartalmazó G gráfot. Használjuk az alaptételünk második alakját: $M_G(\lambda) = M_{G-e}(\lambda) - M_{G/e}(\lambda)$. $G-e$ és G/e gráfokra igaz az állításunk a feltevéseink szerint. Legyen

$$\begin{aligned} M_G(\lambda) &= \lambda^{n+1} - a_1\lambda^n + a_2\lambda^{n-1} - ... + (-1)^n \quad a_n\lambda \\ M_{G-e}(\lambda) &= \lambda^{n+1} - b_1\lambda^n + b_2\lambda^{n-1} - ... + (-1)^n \quad b_n\lambda \\ M_{G/e}(\lambda) &= \qquad\qquad \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + ... + (-1)^{n-1}c_{n-1}\lambda \end{aligned}$$

ahol $\forall i : a_i, b_i, c_i \geq 0$. Ebből felírható, hogy

$$M_G(\lambda) = \lambda^{n+1} - (b_1+1)\lambda^n + (b_2+c_1)\lambda^{n-1} - ... + (-1)^n(b_n + c_{n-1})\lambda \tag{3}$$

Vagyis $M_G(\lambda)$ is alternáló előjelű.
k-ra vett indukcióval láthatjuk, hogy minden $n+1$ csúcsú gráf kromatikus polinomja alternáló előjelű, majd n-re vett indukcióval azt is, hogy minden gráf kromatikus polinomja is alternáló előjelű.

□

2.14. Állítás ([3]). *Ha G összefüggő gráf, akkor a kromatikus polinomjának együtthatói nem 0-k, és az előző bizonyításban használt jelölést használva $a_1 < a_2 < ... < a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.*

Bizonyítás:
Ismét kétszeres indukciót alkalmazunk a csúcsok, azon belül pedig az élek számára. De mivel most összefüggő gráfokat vizsgálunk, ezért a kiindulópontunk a fák lesznek. A fákra már beláttuk, hogy $M_{T_n}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$. A binomiális tétel miatt tudjuk, hogy az állítás igaz fákra. Legyen G egy egyszerű összefüggő gráf ami nem fa. Ekkor van olyan e éle, amit kitörölve még $G - e$ összefüggő marad. Természetesen G/e is összefüggő. Az előző állításban már láttuk, hogy $\forall i \geq 2 : a_i = b_i + c_{i-1}$, ahol az indukciós feltevésből $b_i, c_i > 0$ vagyis $a_i \geq b_i > 0$. Szintén az indukciós feltevésből tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} b_1 <& b_2 < b_3 < ... < b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\ c_1 <& c_2 < ... < c_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}. \end{aligned}$$

Amit összeadva kapjuk

$$a_1 = b_1 + 1 < b_2 + c_1 = a_2 < b_3 + c_2 = a_3 < ... < b_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + c_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} = a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

□

2.15. Állítás. *$M_G(\lambda)$ polinom második együtthatójának abszolút értéke megegyezik G éleinek a számával.*

Bizonyítás:
A 2.13 állítás bizonyításában felírt alakot fogjuk tovább-bontani. A (3)-as összefüggésben a második együttható abszolút értéke a_1+1. Az a_1-t $M_{G-e}(\lambda)$-ból, míg az 1-t $M_{G/e}(\lambda)$-ból kaptuk. Most a_1-t kellene kiszámolnunk. Ha $G - e$ gráfra is felírunk egy redukciós lépést, akkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} M_{G-e}(\lambda) =& \lambda^{n+1} - b_1\lambda^n + b_2\lambda^{n-1} - ... \\ M_{(G-e)-e'}(\lambda) =& \lambda^{n+1} - b_1'\lambda^n + b_2'\lambda^{n-1} - ... \\ M_{(G-e)/e'}(\lambda) =& \qquad\qquad \lambda^n - c_1'\lambda^{n-1} + c_2'\lambda^{n-2} - ... \end{aligned}$$

Amiből azt kapjuk, hogy $b_1 = b_1' + 1$. Vagyis minden egyes redukciós lépésnél eggyel kevesebb lesz a második együttható értéke. Ez addig tart amíg az üres gráfig el nem érünk. Mivel minden egyes lépés egy él elvételét jelenti, ezért élszámnyi egyest adtunk össze. Ezzel bizonyítottuk az állítást.

□

2.16. Állítás. *Ha G összefüggő gráf, akkor $M_G(\lambda) \leq \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$.*

Bizonyítás:
Vegyük G-nek egy T feszítő fáját. G egy színezése ekkor T-nek is egy színezése lesz. De nem minden színezése T-nek lesz G-nek is jó színezése. Ebből és a 2.8 állításból következik, hogy $M_G(\lambda) \leq M_T(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$.

□

Megjegyzés: Implicit nem lett kimondva, de az állítás és a bizonyítás is csak a nemnegatív egész helyeken érvényes. Már K_4-nél is az (1,2) intervallum egy részén nem igaz az állítás ha minden valós számra mondanánk ki.

2.17. Állítás. *Ha $M_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1}$, akkor G egy n csúcsú fa.*

Megjegyzés: Ez a 2.8 állításunk megfordítása.
Bizonyítás:
Azon, hogy egy polinom rangja k azt értjük, hogy a polinomnak a k-adfokú tagja a legkisebb fokú olyan tag, aminek az együtthatója nem 0. Máshogy fogalmazva: a polinomnak a 0 k-szoros gyöke.
Legyen G egy olyan gráf, aminek a kromatikus polinomja $\lambda(\lambda-1)^{n-1}$. Ekkor G összefüggő kell hogy legyen, mivel ha nem lenne az, akkor a 2.7 tételünk szerint a komponensek kromatikus polinomjának szorzata lenne, amikre a 2.12 állítás miatt tudjuk, hogy rangjuk legalább 1, így szorzatuk rangja viszont legalább 2 lenne, míg $\lambda(\lambda-1)^{n-1}$ rangja 1.

$$\lambda(\lambda-1)^{n-1} = \lambda^n - \binom{n-1}{1}\lambda^{n-1} + ... + (-1)^k\binom{n-1}{k}\lambda^{n-k} + ...(-1)^{n-1}\lambda \qquad (4)$$

Ebből a kifejtett alakból azt is látjuk, hogy a második együttható abszolút értéke $n-1$, vagyis a 2.15 állításból tudjuk, hogy $n-1$ éle van. Egy összefüggő n csúcsú és $n-1$ élű egyszerű gráf pedig csak fa lehet.

□

2.18. Tétel. *Ha G egy összefüggő gráf, akkor a kromatikus polinomjában az r-edfokú tag együtthatójának abszolút értéke legalább $\binom{n-1}{r-1}$.*

Bizonyítás:
Legyen T G egy feszítő fája. A (3)-as összefüggésből azt is láthatjuk, hogy egy él hozzáadása az együtthatók abszolút értékét nem csökkentheti. G-t pedig megkaphatjuk úgy, hogy T-hez a megfelelő éleket hozzávesszük.

Az előző bizonyításban használt (4)-es összefüggést $r := n - k$ új változó bevezetésével átírjuk, akkor a következőt kapjuk:

$$M_T(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1} = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\binom{n-1}{n-r}\lambda^r = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\binom{n-1}{r-1}\lambda^r.$$

Amiből már következik az állítás.

□

2.19. Következmény. *$M_G(\lambda)$ rangja megegyezik G összefüggő komponenseinek a számával.*

Bizonyítás:
Alkalmazzuk az előző tételt $M_G(\lambda)$ elsőfokú tagjára: az elsőfokú tag együtthatója legalább $\binom{n-1}{1-1} = 1$ minden legalább 1 csúcsú összefüggő gráfra. Ebből és a 2.7 tételből következik a mostani állításunk.

□

2.4. A kromatikus polinom együtthatóinak jelentése

Mint a 2.15 tételben láthattuk a kromatikus polinom második együtthatójához tudtunk jelentést társítani. Vajon a többi együttható is elmond valamit a gráfról?

Mint alább látni fogjuk a kromatikus polinom együtthatóinak a polinom szokásos és faktoriális alakjában is van jelentése. Nézzük először a faktoriális alakot.

Jelölje $I_G(r)$ azt, hogy a G gráfot hányféleképpen bonthatjuk r darab független halmazra. Ebből kifejezhetjük, hogy hányféleképpen színezhető ki a gráf, ha színek között különbséget teszünk. Mindegyik halmazhoz hozzá kell rendelnünk egy, a többitől különböző színt. Ezt $r!$ módon tehetjük meg. Tehát a lehetséges színezések száma pontosan r darab színnel, ha a színek között különbséget teszünk $r! \cdot I_G(r)$.

Ebből pedig már $M_G(\lambda)$ is rekonstruálható. Válasszunk ki a λ darab színből r darabot, ezt $\binom{\lambda}{r}$-féleképpen tehetjük. Ezzel az r színnel pedig $r! \cdot I_G(r)$-féleképpen színezhető a gráf. Összegezve minden r-re:

$$M_G(\lambda) = \sum_{r=1}^{\lambda}\binom{\lambda}{r} \cdot r! \cdot I_G(r) = \sum_{r=1}^{\lambda}\frac{\lambda!}{r!(\lambda-r)!} \cdot r! \cdot I_G(r) =$$
$$= \sum_{r=1}^{\lambda}\frac{\lambda!}{(\lambda-r)!} \cdot I_G(r) = \sum_{r=1}^{\lambda} I_G(r) \cdot \lambda^{(r)}.$$

2.20. Tétel. *A faktoriális alakban felírt kromatikus polinom r-edfokú tagjának együtthatójának értéke megegyezik a gráf pontosan r független halmazra való bontásainak a számával.*

Ahhoz, hogy a szokásos alakban felírt kromatikus polinom együtthatóihoz jelentést társítsunk, először nézzük a következő állítást:

2.21. Állítás ([1]). *A $G = (V, E)$ gráf kromatikus polinomja felírható a következő alakban:*

$$M_G(\lambda) = \sum_{E' \subseteq E(G)} (-1)^{|E'|} \lambda^{c(E')},$$

ahol $c(E')$ a $G' = (V, E')$ gráf összefüggő komponenseinek a számát jelöli.

Bizonyítás:
Mivel az egyenlőséget csak pozitív egészekre kell belátni, ezért használhatunk logikai szitát a következőképpen: Legyen S a G gráf csúcsainak λ színnel való bármilyen színezéseinek a halmaza (jó és rossz egyaránt). Ez azt jelenti, hogy $|S| = \lambda^n$.
Minden $e \in E$ élhez rendeljük hozzá egy A_e halmazt, mely azon rossz színezéseket tartalmazza, ahol az e él két végpontja azonos színűre van színezve. Ekkor egy $E' = \{e_1, e_2, ...e_l\}$ élhalmazra

$$|A_{e_1} \cap A_{e_2} \cap ... \cap A_{e_l}| = \lambda^{c(E')},$$

mivel $G(V, E')$ gráf egy komponensén belül a csúcsok ugyanolyan színűre vannak színezve, és nincs arra megkötés, hogy különböző színűnek kellene lenniük. Ekkor a logikai szitát alkalmazva arra, hogy a jó színezések számát megkapjuk, pontosan a tételben megfogalmazott egyenlőséget adja.

□

Jelöljük $N(k, r)$-rel G gráf k komponensű r élű részgráfjainak a számát. Ezzel a jelöléssel egyszerűbben kifejezhetjük a kromatikus polinom együtthatóit. Ha csoportosítjuk az előző tételben az azonos kitevőjű elemeket, akkor

$$M_G(\lambda) = \sum_{E' \subseteq E(G)} (-1)^{|E'|} \lambda^{c(E')} = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{\substack{E' \subseteq E(G) \\ c(E')=k}} (-1)^{|E'|} \right] \lambda^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{r=0}^{|E|} \sum_{\substack{E' \subseteq E(G) \\ c(E')=k \\ |E'|=r}} (-1)^r \right] \lambda^k = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{r=0}^{|E|} (-1)^r N(k, r) \right] \lambda^k$$

2.22. Tétel. *A szokásos alakban felírt kromatikus polinom k-adfokú tagjának együtthatójának értéke megegyezik*

$$\sum_{r=0}^{|E|}(-1)^r N(k,r)$$

értékével.

Megjegyzés: Ebből a tételből a korábbi 2.10, 2.11, 2.12 és 2.13 állításaink egyszerűen következnek.

2.23. Tétel. *Legyen G gráf n csúcson és $E = \{e_1, ..., e_m\}$ élekkel. Az élek egy halmazát törött körnek nevezzük, ha egy kör legmagasabb indexű élét törölve kaphatjuk meg. Ekkor*

$$M_G(\lambda) = \lambda^n - c_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + (-1)^{n-1}c_1\lambda,$$

ahol c_i az E olyan $n-i$ elemű részhalmazainak száma, amik nem tartalmaznak törött kört.

Bizonyítás:
A bizonyítást csak c_1-re fogjuk leírni, a többi indexre hasonlóan néz ki a bizonyítás menete (és nekünk lényegében csak erre az értékre lesz szükségünk).
Jelöljük $\mathcal{T}(G)$-vel a G gráf feszítő részfáit, illetve $T(G')$-vel a G' gráf lexikografikusan legkisebb feszítő részfáját (végigmegyünk az éleken lexikografikus sorrendben és ha az élt bevéve nem zárunk be kört az eddig választott élekkel, akkor ezt az élt is bevesszük, így megkapjuk a lexikografikusan legkisebb feszítő részfát).
A 2.21 állítás alapján, tudjuk, hogy

$$c_1 = \sum_{\substack{E' \subseteq E \\ c(E')=1}} (-1)^{|E'|} = \sum_{T \in \mathcal{T}(G)} \sum_{\substack{E' \subseteq E \\ T(G')=T}} (-1)^{|E'|}$$

Egy rögzített $T \in \mathcal{T}(G)$-re a belső szumma értékét vizsgáljuk. Ha T-ben nincs törött kör, akkor azon részgráfok, amelyeknek ez a lexikografikusan legkisebb feszítő részfája csak T lehet. Ugyanis, ha behúzunk legalább plusz egy élet (jelöljük e_i-vel ezt az élet), akkor keletkezik egy kör. Mivel T-nek nem volt törött köre, ezért ennek a körnek a legnagyobb indexű éle i-nél nagyobb (legyen ez az él e_k, ahol $k > i$). Vagyis $T(T+e_i) = T+e_i-e_k \neq T$. Ekkor tehát a belső szumma értéke $(-1)^{n-1}$.
Ha T tartalmaz törött köröket, akkor ezeket a köröket bezáró éleket még hozzávehetjük a részgráfhoz (de másikakat nem, az előző gondolatmenet itt is érvényes), hogy $T(G') = T$

még igaz maradjon. Ha T-hez k darab ilyen él tartozik, akkor a belső szumma értéke:

$$\sum_{\substack{E' \subseteq E \\ T(G')=T}} (-1)^{|E'|} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{n-1+k} = (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k} = (-1)^{n-1}(1+(-1))^{k} = 0.$$

Vagyis c_1 tényleg G azon feszítő részgráfjainak a száma, amely nem tartalmaz törött kört.

□

2.24. Következmény. *Legyen G gráf kromatikus polinomja*

$$M_G(\lambda) = \lambda^n - c_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + (-1)^{n-1}c_1\lambda.$$

Ekkor $|c_1(G)| \leq \tau(G)$, ahol $\tau(G)$ a G gráf feszítő fáinak számát jelöli.

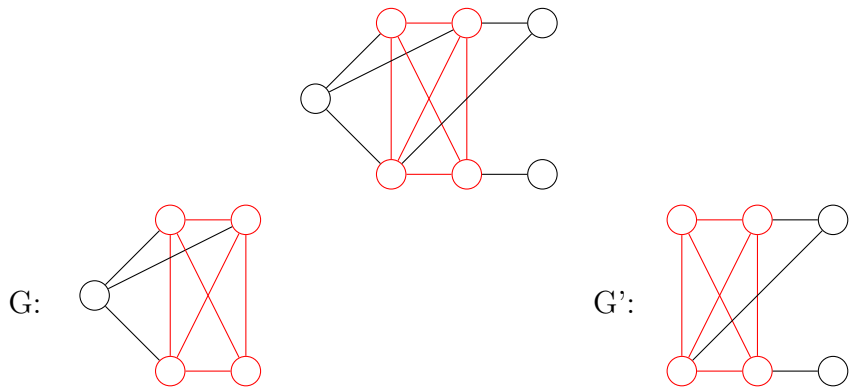
2.5. Módszerek a kromatikus polinom kiszámításának gyorsítására

A kromatikus polinom kiszámolására jelenleg csak az alaptétel áll rendelkezésünkre. Csak ezt használva csak exponenciális futásidejű algoritmust készíthetünk. A következőkben szeretnénk olyan módszereket mutatni, amik speciális esetekben nagy mértékben gyorsíthatják egy gráf kromatikus polinomjának a kiszámítását.

2.25. Tétel. *Ha G és G' gráfok k ponton átfedésben vannak egy teljes gráffal, akkor az általuk alkotott gráf kromatikus polinomja*

$$\frac{M_G(\lambda) \cdot M_{G'}(\lambda)}{\lambda^{(k)}}.$$

Szemléltetésképp nézzük a következő példát:



Itt a G és G' gráf egy K_4-ben vannak átfedve a felső gráfban (pirossal jelölve).

Bizonyítás:
A közös részt $\lambda^{(k)}$-féleképpen színezhető ki. Ha rögzítjük ennek a k csúcsnak a színét, akkor G maradék csúcsait $\dfrac{M_G(\lambda)}{\lambda^{(k)}}$-féleképpen színezhetjük ki, mivel ha az alaptételünk élhozzáadásos formáját futtatva a közös rész mindegyik leszármazott gráfnak is a része lesz. Ugyanezen ok miatt G' maradék csúcsait $\dfrac{M_{G'}(\lambda)}{\lambda^{(k)}}$-féleképpen színezhetjük. Ezért az eredeti gráf színezéseinek száma:

$$\lambda^{(k)} \cdot \frac{M_G(\lambda)}{\lambda^{(k)}} \cdot \frac{M_{G'}(\lambda)}{\lambda^{(k)}} = \frac{M_G(\lambda) \cdot M_{G'}(\lambda)}{\lambda^{(k)}}.$$

□

2.26. Definíció. *G és G' gráf szorzatán azt a gráfot értjük, amit úgy kapunk hogy G minden csúcsát összekötjük G' minden csúcsával. Jelölése: $G \odot G'$.*

2.27. Definíció. *Vezessük be a következő műveletet: $\lambda^{(a)} \odot \lambda^{(b)} = \lambda^{(a+b)}$. Ezen felül legyen*

a) asszociatív: $\lambda^{(a)} \odot (\lambda^{(b)} \odot \lambda^{(c)}) = (\lambda^{(a)} \odot \lambda^{(b)}) \odot \lambda^{(c)}$,

b) kommutatív: $\lambda^{(a)} \odot \lambda^{(b)} = \lambda^{(a+b)} = \lambda^{(b)} \odot \lambda^{(a)}$,

c) disztributív az összeadásra nézve: $\lambda^{(a)} \odot (\lambda^{(b)} + \lambda^{(c)}) = (\lambda^{(a)} \odot \lambda^{(b)}) + (\lambda^{(a)} \odot \lambda^{(c)})$,

d) és legyen $P(\lambda)$ és $Q(\lambda)$ két tetszőleges polinom, ekkor

$$P(\lambda) \odot Q(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda^{(i)}\right) \odot \left(\sum_{j=1}^{m} d_j \lambda^{(j)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i d_j \lambda^{(i+j)}. \tag{5}$$

Példák erre a műveletre:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 \odot \lambda &= (\lambda^{(2)} + \lambda^{(1)}) \odot \lambda^{(1)} = \lambda^{(3)} + \lambda^{(2)} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda(\lambda-1) = \lambda(\lambda-1)^2 \\
\lambda^3 \odot \lambda^2 &= (\lambda^{(3)} + 3\lambda^{(2)} + \lambda^{(1)}) \odot (\lambda^{(2)} + \lambda^{(1)}) = \lambda^{(5)} + 4\lambda^{(4)} + 4\lambda^{(3)} + \lambda^{(2)} = \\
&= \lambda(\lambda-1)(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda - 7) \\
\lambda^4 \odot \lambda &= (\lambda^{(4)} + 6\lambda^{(3)} + 7\lambda^{(2)} + \lambda^{(1)}) \odot \lambda^{(1)} = ... = \lambda(\lambda-1)^4
\end{aligned}$$

Megjegyzés: A két definícióban nem véletlen, hogy ugyanazt a műveleti jelet használtuk. Vegyük példaként a K_i és K_j teljes gráfokat. Azt már tudjuk, hogy $M_{K_i}(\lambda) = \lambda^{(i)}$ és $M_{K_j}(\lambda) = \lambda^{(j)}$. A definícióból adódik, hogy $K_i \odot K_j = K_{i+j}$. Ugyanezt felírva ezeknek a gráfoknak a kromatikus polinomjára: $M_{K_{i+j}}(\lambda) = \lambda^{(i+j)} = \lambda^{(i)} \odot \lambda^{(j)} = M_{K_i}(\lambda) \odot M_{K_j}(\lambda)$. A következő tétel ezt az észrevételt fogja általánosítani.

2.28. Tétel. *Ha G és G' kromatikus polinomjai faktoriális alakban vannak felírva, akkor G és G' gráf szorzatgráfjának a kromatikus polinomját megkaphatjuk a következőképpen: $M_{G\odot G'}(\lambda) = M_G(\lambda) \odot M_{G'}(\lambda)$.*

Bizonyítás:
Az állítás bizonyításához a 2.20 tételben használt felírási módot fogjuk használni, illetve az (5) összefüggést. Ezekből kapjuk, hogy:

$$M_G(\lambda) \odot M_{G'}(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{\lambda} I_G(i)\lambda^{(i)}\right) \odot \left(\sum_{j=1}^{\lambda} I_{G'}(j)\lambda^{(j)}\right) = \sum_{i=1}^{\lambda}\sum_{j=1}^{\lambda} I_G(i)I_{G'}(j)\lambda^{(i+j)} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\lambda}\left(\sum_{r=1}^{k} I_G(r)\cdot I_{G'}(k-r)\right)\lambda^{(k)} = \sum_{k=1}^{\lambda} I_{G\odot G'}(k)\lambda^{(k)} = M_{G\odot G'}(\lambda)$$

□

2.6. A kromatikus polinom gyökei

A továbbiakban a kromatikus polinom gyökeivel fogunk foglalkozni. Kezdjük egy egyszerű állítással.

2.29. Állítás ([3]). *$M_G(\lambda)$ legnagyobb valós gyöke legfeljebb $n-1$.*

Bizonyítás:
Legyen P a $V(G)$ egy partíciója független halmazokra. Ekkor

$$M_G(\lambda) = \sum_P \lambda^{(|P|)} = \sum_P \lambda(\lambda-1)...(\lambda-|P|+1).$$

Ha $\lambda > n-1$ (és $|P| \leq n$) akkor $\lambda - |P| + 1 > n - 1 - n + 1 = 0$ vagyis minden tag pozitív, tehát ezen az intervallumon nem lehet gyöke a kromatikus polinomnak.

□

A korábbi 2.19 állításunkat átfogalmazva a következőt kapjuk:

2.30. Következmény ([3]). *$M_G(\lambda)$ 0 gyökének multiplicitása megegyezik a G komponenseinek számával.*

2.31. Állítás ([3]). *$M_G(\lambda)$-nak nincs gyöke a $(0,1)$ intervallumban.*

Bizonyítás:
Legyen G egy összefüggő gráf, ami nem fa. Ekkor van olyan e éle melyet ha elhagyunk a gráf még összefüggő marad.
Azt fogjuk belátni, hogy $\forall\lambda \in (0,1) : (-1)^{n-1}M_G(\lambda) > 0$.
Fákra igaz ez az állítás:

$$\forall\lambda \in (0,1) : (-1)^{n-1}\lambda(\lambda-1)^{n-1} = \lambda(1-\lambda)^{n-1} > 0.$$

A 2.13 állításban használt kettős indukcióhoz hasonlóan fogunk most is eljárni. Tegyük fel, hogy igaz az állítás minden legfeljebb $n-1$ csúcsú összefüggő gráfra és minden n csúcsú összefüggő gráfra aminek legfeljebb $|E(G)|-1$ éle van.
Alkalmazzuk G-re az e él szerinti redukciós lépést: $M_G(\lambda) = M_{G-e}(\lambda) - M_{G/e}(\lambda)$.
$G-e$ gráf n csúcsú és $|E(G)|-1$ élű vagyis teljesül rá az állítás.
G/e gráf mivel $n-1$ csúcsú szintén teljesül rá az állítás: $\forall\lambda \in (0,1) : (-1)^{n-2}M_{G/e}(\lambda) > 0$.
Ezekből kapjuk, hogy $\forall\lambda \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} 0 &< (-1)^{n-1}M_{G-e}(\lambda) + (-1)^{n-2}M_{G/e}(\lambda) = \\ &= (-1)^{n-1}M_{G-e}(\lambda) - (-1)^{n-1}M_{G/e}(\lambda) = \\ &= (-1)^{n-1}[M_{G-e}(\lambda) - M_{G/e}(\lambda)] = (-1)^{n-1}M_G(\lambda). \end{aligned}$$

Ha G nem lenne összefüggő, akkor a fentiekből és a 2.7 tételből következik az állítás.

□

2.32. Állítás ([3]). *Ha $M_G(\lambda)$-nak az 1 egyszerű gyöke, akkor G gráf 2-szeresen pontösszefüggő.*

Bizonyítás:
Ha G-nek van legalább egy éle, akkor az 1 biztos hogy gyöke (legalább két szín kell, hogy ki tudjuk színezni az él két csúcsát).
Picit erősebb állítást fogunk bizonyítani, mint amit kimondtunk: ha G kétszeresen pontösszefüggő, akkor

$$(-1)^n \frac{M_G(\lambda)}{\lambda-1}\bigg|_{\lambda=1} > 0.$$

Használjunk indukciót az élszámra nézve. Ha G összefüggő, de nem 2-szeresen pontösszefüggő és $G \neq K_2$, akkor az, hogy $M_G(\lambda)$-nak 1 többszörös gyöke, következik 2.25 tételből, ha azt a vágócsúcsra írjuk fel.
Legyen tehát G 2-szeresen pontösszefüggő, ekkor $\forall e \in E(G)$:

$$(-1)^n \frac{M_{G-e}(\lambda)}{\lambda-1}\bigg|_{\lambda=1} \geq 0, (-1)^n \frac{M_{G/e}(\lambda)}{\lambda-1}\bigg|_{\lambda=1} \geq 0$$

teljesül, mivel ha $G - e$ és/vagy G/e 2-szeresen pontösszefüggő, akkor az indukciós feltevésünk miatt igaz, különben pedig 1 gyöke a bal oldalon álló polinomnak vagyis az értéke 0.
A $|V(G)| \leq 3$ esetekre igaz az állítás, ezért tegyük fel, hogy $|V(G)| > 3$. Azt mutatjuk meg, hogy $G - e$ és G/e gráfok közül legalább az egyik 2-szeresen pontösszefüggő.
Ha G/e nem 2-szeresen pontösszefüggő, akkor a vágópont csak az e él összehúzásával keletkezett pont lehet. Jelöljük e két végpontját a-val és b-vel. Legyenek P_1, P_2 a $G - a - b$ két komponensében haladó $a - b$ utak. Ekkor $P_1 \cup P_2$ egy kör, e pedig ennek egy húrja. Ebből viszont az következik, hogy $G - e$ 2-szeresen összefüggő.

□

3. Gráfpolinomok

A továbbiakban az [1] cikk alapján fogok haladni.

3.1. Definíció. *Egy gráfpolinom egy f leképezés, ami minden G gráfhoz hozzárendel egy polinomot: $f : \mathcal{G} \to \mathbb{C}[x]$, $G \mapsto f(G, x)$. Azt mondjuk, hogy egy gráfpolinom 1-főegyütthatós, ha minden G gráfra $f(G, x)$ 1-főegyütthatós $|V(G)|$-fokú polinom.*

A következőkben néhány 1-főegyütthatós gráfpolinomot fogok mutatni.

3.1. Tutte-polinom

3.2. Definíció. *Egy $G = (V, E)$ gráf Tutte-polinomja a következőképpen van definiálva:*

$$T(G, x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x - 1)^{c(A) - c(E)} (y - 1)^{c(A) + |A| - |V|},$$

ahol $c(A)$ a (V, A) gráf komponenseinek a számát jelöli.

Statisztikai fizikában ettől eltérő

$$Z_G(q, v) = \sum_{A \subseteq E} q^{c(A)} v^{|A|},$$

de tulajdonképpen ekvivalens formát használnak:

$$T(G, x, y) = (x - 1)^{-c(E)} (y - 1)^{-|V|} Z_G((x - 1)(y - 1), y - 1). \tag{6}$$

Ennek a második formának az az előnye, hogy könnyedén tudjuk vele definiálni a többváltozós Tutte-polinomot:

3.3. Definíció. *Rendeljünk minden élhez egy v_e értéket (az ezekből álló vektort jelölje $\underline{v}$). Ekkor G gráf többváltozós Tutte-polinomja $\underline{v}$ élsúlyokkal:*

$$Z_G(q, \underline{v}) = \sum_{A \subseteq E} q^{c(A)} \prod_{e \in A} v_e.$$

A későbbiekben ezt a második alakot fogjuk használni, mivel az első változó szerinti foka ennek a polinomnak $|V(G)|$ ($A = \emptyset$ esetén $c(A) = |V(G)|$).

Ha a Tutte-polinom egy változóját rögzítjük, akkor megkaphatunk más nevezetes gráfpolinomokat is.

3.2. Kromatikus polinom

A kromatikus polinomot megkaphatjuk a Tutte-polinomból, ha v-t (-1)-nek választjuk: az (6) egyenletet transzformáljuk a következő módon: legyen $\lambda := (x-1)(y-1)$ és $y - 1 = -1$. Ekkor $\lambda = 1 - x$ és $y = 0$. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
T(G, 1-\lambda, 0) &= \lambda^{-c(E)}(-1)^{-|V|-c(E)} Z_G(\lambda, -1) \\
Z_G(\lambda, -1) &= (-1)^{|V|+c(E)} \lambda^{c(E)} T(G, 1-\lambda, 0) = \\
&= (-1)^{|V|+c(E)} \lambda^{c(E)} \sum_{A \subseteq E} (-\lambda)^{c(A)-c(E)} (-1)^{c(A)+|A|-|V|} = \\
&= \sum_{A \subseteq E} \lambda^{c(A)-c(E)+c(E)} (-1)^{c(A)-c(E)+c(A)+|A|-|V|+|V|+c(E)} = \\
&= \sum_{A \subseteq E} (-1)^{|A|} \lambda^{c(A)} = M_G(\lambda)
\end{aligned}$$

Itt az utolsó egyenlőség a 2.21 állításból származik.

3.3. További gráfpolinomok

3.4. Definíció. *Jelöljük m_k-val G gráf k élű párosításainak a számát. Ekkor G párosítási polinomja:*

$$m_G(x) = \sum_{k=0}^{n} m_k x^k.$$

Ezt szokás módosítani például a következőképpen:

$$\tilde{m}_G(x) = x^n m_G(-x^{-1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k m_k x^{n-k}. \tag{7}$$

3.5. Definíció. *Jelöljük h_k-val azt, hogy a G gráfot hányféleképpen tudjuk k diszjunkt klikkre particionálni. Ekkor G adjoint polinomja:*

$$h_G(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} h_k x^k. \tag{8}$$

4. Dobrushin-lemma

4.1. Definíció. *Legyen $\omega : V(G) \to \mathbb{C}$. Ekkor G többváltozós függetlenségi polinomja:*

$$I_G(\underline{\omega}) = \sum_{\substack{S \subseteq V(G) \\ S \text{ független}}} \left(\prod_{u \in S} \omega_u \right).$$

4.2. Tétel (Dobrushin-lemma). *Tegyük fel, hogy az $r : V(G) \to (0,1)$ és $\omega : V(G) \to \mathbb{C}$ függvényekre*

$$|\omega_v| \leq (1 - r(v)) \prod_{(v,v') \in E(G)} r(v')$$

egyenlőtlenség teljesül, minden $v \in V(G)$. Ekkor

a) $I_A(\underline{\omega}) \neq 0$ minden $A \subseteq V(G)$,

b)

$$\left| \frac{I_B(\underline{\omega})}{I_A(\underline{\omega})} \right| \leq \left(\prod_{u \in A \setminus B} r(u) \right)^{-1}$$

minden $B \subseteq A \subseteq V(G)$.

Bizonyítás:
Használjunk teljes indukciót $|A|$ szerint. $|A| = 0$-ra $I_\emptyset(\underline{\omega}) = 1 \neq 0$, ebből pedig kapjuk $1 \leq 1$ a b)-re. Tegyük fel, hogy mindkét állítást bizonyítottuk $|A|$-nál kisebb elemszámú halmazokra. Bizonyítsuk akkor most be A-ra is.
Jelöljük $N(v)$-vel v szomszédait és legyen $N[v] := N(v)+v$. Ezekkel a jelölésekkel felírható a következő összefüggés $\forall v \in A$ (ez abból adódik, hogy v a független halmaz eleme-e vagy sem):

$$I_A(\underline{\omega}) = I_{A-v}(\underline{\omega}) + \omega_v I_{A-N[v]}(\underline{\omega}) = I_{A-v}(\underline{\omega}) \left(1 + \omega_v \frac{I_{A-N[v]}(\underline{\omega})}{I_{A-v}(\underline{\omega})} \right).$$

Az indukciós feltevésből tudjuk, hogy $I_{A-v}(\underline{\omega}) \neq 0$, szóval tényleg szabad osztanunk vele, illetve a törtre felírható a b) rész:

$$\left| \omega_v \frac{I_{A-N[v]}(\underline{\omega})}{I_{A-v}(\underline{\omega})} \right| \leq |\omega_v| \left(\prod_{u \in (A-v) \setminus (A-N[v])} r(u) \right)^{-1} \leq$$

Mivel $(A-v)\backslash(A-N[v]) = N(v) = \{v'|(v,v') \in E(A)\}$, ha felhasználjuk $|\omega_v|$-re teljesülő feltételünket a következőt kapjuk:

$$\leq (1-r(v)) \prod_{v' \in N(v)} r(v') \left(\prod_{u \in N(v)} r(u) \right)^{-1} = 1 - r(v).$$

Ezekből pedig következik, hogy

$$|I_A(\underline{\omega})| = |I_{A-v}(\underline{\omega})| \left| 1 + \omega_v \frac{I_{A-N[v]}(\underline{\omega})}{I_{A-v}(\underline{\omega})} \right| \geq |I_{A-v}(\underline{\omega})| \left(1 - \left| \omega_v \frac{I_{A-N[v]}(\underline{\omega})}{I_{A-v}(\underline{\omega})} \right| \right) \geq |I_{A-v}(\underline{\omega})| r(v).$$

Vagyis megkaptuk, hogy $I_A(\underline{\omega}) \neq 0$ (és többet is $I_A(\underline{\omega}) > 0$).
A b) részre pedig, ha $B \subset A$, akkor minden $v \in A\backslash B$-re $B \subseteq A - v$, amiből

$$\left| \frac{I_B(\underline{\omega})}{I_A(\underline{\omega})} \right| = \left| \frac{I_B(\underline{\omega})}{I_{A-v}(\underline{\omega})} \right| \left| \frac{I_{A-v}(\underline{\omega})}{I_A(\underline{\omega})} \right| \leq \left(\prod_{u \in (A-v)\backslash B} r(u) \right)^{-1} r(v)^{-1} = \left(\prod_{u \in A\backslash B} r(u) \right)^{-1}.$$

□

A Dobrushin-lemma következő változata jobban használható lesz a számunkra:

4.3. Következmény. *Ha az $a : V(G) \to \mathbb{R}^+$ függvényre teljesül a*

$$\sum_{u \in N[v]} \log(1 + |\omega_u| e^{a(u)}) \leq a(v)$$

egyenlőtlenség minden $v \in V(G)$-re, akkor $I_G(\underline{\omega}) \neq 0$.
Illetve ha az $a : V(G) \to \mathbb{R}^+$ függvényre teljesül a

$$\sum_{u \in N[v]} |\omega_u| e^{a(u)} \leq a(v)$$

egyenlőtlenség minden $v \in V(G)$-re, akkor $I_G(\underline{\omega}) \neq 0$.

Bizonyítás:
Legyen a Dobrushin-lemmában szereplő $r(v) := (1 + |\omega_v| e^{a(v)})^{-1}$. Ekkor az ottani

$$|\omega_v| \leq (1 - r(v)) \prod_{(v,v') \in E(G)} r(v') =$$

feltétel átírható

$$= \left(1 - \frac{1}{1 + |\omega_v| e^{a(v)}} \right) \prod_{u \in N(v)} \frac{1}{1 + |\omega_u| e^{a(u)}} =$$

$$\left(\frac{1 + |\omega_v| e^{a(v)} - 1}{1 + |\omega_v| e^{a(v)}} \right) \prod_{u \in N(v)} \frac{1}{1 + |\omega_u| e^{a(u)}} =$$

$$|\omega_v| e^{a(v)} \prod_{u \in N[v]} \frac{1}{1 + |\omega_u| e^{a(u)}}$$

alakba. Ebből

$$
\begin{aligned}
|\omega_v| &\leq |\omega_v| e^{a(v)} \prod_{u \in N[v]} \frac{1}{1 + |\omega_u| e^{a(u)}} \\
e^{-a(v)} &\leq \prod_{u \in N[v]} \left(\frac{1}{1 + |\omega_u| e^{a(u)}} \right) \\
e^{a(v)} &\geq \prod_{u \in N[v]} \left(1 + |\omega_u| e^{a(u)} \right) \\
\log(e^{a(v)}) &\geq \log \left(\prod_{u \in N[v]} \left(1 + |\omega_u| e^{a(u)} \right) \right) \\
a(v) &\geq \sum_{u \in N[v]} \log(1 + |\omega_u| e^{a(u)}).
\end{aligned}
$$

Vagyis a Dobrushin-lemmában szereplő feltétel és az itteni feltétel ekvivalensek.
A tétel második fele következik a $\log(1+s) \leq s \ \forall s \geq 0$ összefüggésből.

□

5. Exponenciális típusú gráfpolinomok

Ebben a részben ki szeretnénk fejezni G kromatikus polinomját, mint egy annál nagyobb gráf többváltozójú függetlenségi polinomja. Ehhez szükségünk lesz a következő definícióra.

5.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy f gráfpolinom exponenciális típusú, ha $f(\emptyset, x) = 1$ és minden G gráfra*

$$\sum_{S \subseteq V(G)} f(G[S], x) f(G[V(G) \backslash S], y) = f(G, x + y).$$

Ha G egyértelmű a kontextusból, akkor $f(G[S], x)$ és $f(G[V(G) \backslash S], y)$ helyett használjuk majd a $f(S, x)$ illetve a $f(G - S, y)$ jelöléseket.

5.2. Állítás. *A kromatikus polinom exponenciális típusú. Vagyis*

$$\sum_{S \subseteq V(G)} M_S(x) M_{G-S}(y) = f(G, x + y).$$

Bizonyítás:
Mivel az egyenlőség mindkét oldalán polinom áll elég pozitív egész x, y-okra bizonyítani

az egyenlőséget.

Vegyük G gráf egy $(x+y)$ színnel való színezését. Ekkor ha S-t úgy választjuk meg, hogy azok a csúcsok kerülnek bele, amiket az első x színnel színeztünk (ekkor természetesen $G-S$-be az utolsó y színnel színezett csúcsok kerülnek), akkor ez pontosan egy $M_S(x)M_{G-S}(y)$ tagot fog adni a másik oldalon.

□

5.3. Tétel. *Legyen $b : G \to \mathbb{C}$ függvény. Definiáljuk az f_b gráfpolinomot a következőképpen:*

$$f_b(G,x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(G)x^k,$$

ahol $n = |V(G)|$ és

$$a_k(G) = \sum_{\{S_1,\dots,S_k\}\in\mathcal{P}_k(G)} \prod_{i=1}^{k} b(S_i),$$

ahol $\mathcal{P}_k(G)$ a $V(G)$ halmaz pontosan k elemű nem üres halmazú partícióit jelöli. Ekkor

a) minden b függvényre $f_b(G,x)$ exponenciális típusú,

b) minden exponenciális típusú f gráfpolinomhoz létezik olyan b gráffüggvény, hogy $f(G,x) = f_b(G,x)$. Konkrétabban: ha $f(G,x)$ elsőfokú tagjának együtthatójának értéke megegyezik $b(G)$ értékével, akkor $f = f_b$

Bizonyítás:

a) Egyszerűen végigszámoljuk, hogy tényleg exponenciális típusú:

$$\sum_{S\subseteq V(G)} f_b(S,x)f_b(G-S,y) = \sum_{S\subseteq V(G)} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k(S)x^k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} a_l(G-S)y^l\right) =$$

$$= \sum_{S\subseteq V(G)} \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\{R_1,\dots,R_k\}\in\mathcal{P}_k(S)} \prod_{i=1}^{k} b(R_i)\right)x^k\right)\left(\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{\{T_1,\dots,T_l\}\in\mathcal{P}_l(G-S)} \prod_{i=1}^{l} b(T_i)\right)y^l\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{\{Q_1,\dots,Q_r\}\in\mathcal{P}_r(G)} \prod_{i=1}^{r} b(Q_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{r}\binom{r}{i}x^i y^{r-i}\right) = \sum_{r=1}^{n} a_r(G)(x+y)^r = f_b(G,x+y)$$

b) Használjunk teljes indukciót a gráf csúcsainak száma szerint. Üres gráfokra igaz az állítás.

$$f(G,x+y) - f(G,x) - f(G,y) = \sum_{\substack{S\subseteq V(G)\\ S\notin\{\emptyset,G\}}} f(S,x)f(G-S,y) =$$

$$= \sum_{\substack{S\subseteq V(G)\\ S\notin\{\emptyset,G\}}} f_b(S,x)f_b(G-S,y) = f_b(G,x+y) - f_b(G,x) - f_b(G,y)$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy f_b exponenciális típusú (ezt az a) részben bizonyítottuk).
A $g(x) = f(G,x) - f_b(G,x)$ jelöléssel ebből azt kapjuk, hogy $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Vagyis g lineáris ($g(x) = cx$). f_b definíciójából tudjuk, hogy az elsőfokú tagjának az együtthatója $a_1(G) = b(G)$. Vagyis ha f elsőfokú tagjának az együtthatója szintén $b(G)$, akkor $g(x) = 0$, amiből következik, hogy $f = f_b$.

□

A kromatikus polinomon kívül a korábban definiált gráfpolinomok jelentős része is exponenciális típusú. Nézzük meg, hogy milyen b függvények tartoznak ezekhez.

a) Az $\tilde{m}_G(x)$ párosítási polinomhoz tartozó b_m függvény a következő:
$b_m(K_1) = 1$, $b_m(K_2) = -1$, különben $b_m(H) = 0$.

b) Az $h_G(x)$ adjoint polinomhoz tartozó b_h függvény a következő:
$b_h(K_i) = (-1)^{i-1}$ $\forall i \in \mathbb{Z}^+$, különben $b_h(H) = 0$.

Bizonyítás:
a) A G gráf egy M párosításhoz rendeljük hozzá a következő partíciót: a párosított csúcsok kételemű halmazok lesznek a partícióban, míg a nem párosított csúcsok önmagukban fognak alkotni egy halmazt a partícióban. Vagyis egy k elemű párosításhoz egy $(n-k)$ elemű partíciót rendelünk hozzá. $f_{b_m}(G,x)$-nél az $(n-k)$ elemű partíciókat az $(n-k)$-adfokú tagnál vizsgáljuk. Ennek a tagnak az együtthatója $a_{n-k}(G)$. Mivel $b_m(H) = 0$ ha $H \neq K_1, K_2$, ezért csak azoknak a partícióknak az értéke lesz nem 0, amiket párosításból származtatunk:

$$a_{n-k}(G) = \sum_{\{S_1,\dots,S_{n-k}\}\in\mathcal{P}_{n-k}(G)} \prod_{i=1}^{n-k} b_m(S_i) = \sum_{M:|M|=k} \prod_{i=1}^{k} b_m(K_2) = (-1)^k m_k$$

Ez pedig pontosan a $\tilde{m}_G(x)$ párosítási polinom $(n-k)$-adfokú tagjához tartozó együttható.
b) Itt még könnyebb dolgunk van: itt alapból partíciókat jelölnek az együtthatók, csak azt kell megmutatni, hogy az előjel valóban jó lesz-e. Jelölje $\mathcal{K} = \{K_i | i \in \mathbb{Z}^+\}$ a teljes gráfok halmazát.

$$a_k(G) = \sum_{\{S_1,\dots,S_k\}\in\mathcal{P}_k(G)} \prod_{i=1}^{k} b_h(S_i) = \sum_{\substack{\{S_1,\dots,S_k\}\in\mathcal{P}_k(G)\\ \forall i: S_i\in\mathcal{K}}} \prod_{i=1}^{k} b_h(K_{|S_i|}) =$$

$$= \sum_{\substack{\{S_1,\dots,S_k\}\in\mathcal{P}_k(G)\\ \forall i: S_i\in\mathcal{K}}} \prod_{i=1}^{k} (-1)^{|S_i|-1} = \sum_{\substack{\{S_1,\dots,S_k\}\in\mathcal{P}_k(G)\\ \forall i: S_i\in\mathcal{K}}} (-1)^{n-k} = (-1)^{n-k} h_k.$$

□

Most megmutatjuk, hogy bármely exponenciális típusú gráfpolinomot ki tudunk fejezni egy másik (annál nagyobb) gráf többváltozós függetlenségi polinomjaként. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $b(K_1) = 1$. Emiatt a következők csak az 1-főegyütthatós gráfpolinomokra lesznek igazak (de az eddigiek amiket említettünk mind azok voltak).

Legyen $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ az a gráf, melyeknek a csúcsai a $G = (V, E)$ gráf csúcshalmazának legalább kételemű részhalmazai: $\mathcal{V} = \{U \subseteq V : |U| \geq 2\}$, az éleket pedig azon részhalmazok között húzzuk be, amelyeknek van közös eleme: $\mathcal{E} = \{(U, U') : U, U' \in \mathcal{V}, U \cap U' \neq \emptyset\}$. Ekkor $U_1, U_2, ..., U_k \in \mathcal{V}$ független $\mathcal{G}$-ben, ha $U_i \cap U_j = \emptyset$ minden $1 \leq i < j \leq k$-ra. Egy ilyen $\{U_1, U_2, ..., U_k\}$ független csúcshalmazt $\mathcal{G}$-ben részpartíciónak fogunk hívni, és ezek halmazát $\mathcal{P}'(G)$-vel fogjuk jelölni.

Ha veszünk egy $\{U_1, U_2, ..., U_k\}$ részpartíciót és a $V(G) \setminus \cup_{i=1}^{k} U_i$ halmazt egyelemű halmazokra bontjuk, akkor kapunk G-nek egy

$$n - \sum_{i=1}^{k} |U_i| + k = n - \sum_{i=1}^{k} (|U_i| - 1)$$

elemű partícióját.

Most definiáljunk egy súlyfüggvényt $\mathcal{G}$ csúcsaira:

$$\omega(U) = \frac{b(U)}{q^{|U|-1}}.$$

Ezzel a súlyfüggvénnyel számolva:

$$I_{\mathcal{G}}(\underline{\omega}) = \sum_{\substack{S \subseteq V(\mathcal{G}) \\ S \text{ független}}} \left(\prod_{u \in S} \omega_u \right) = \sum_{\{U_1, U_2, ..., U_k\} \in \mathcal{P}'(G)} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{b(U_i)}{q^{|U_i|-1}} \right) =$$

$$= q^{-n} \sum_{\{U_1, U_2, ..., U_k\} \in \mathcal{P}'(G)} \left(\prod_{i=1}^{k} b(U_i) \right) q^{n - \sum_{i=1}^{k} (|U_i| - 1)} = q^{-n} f_b(G, q)$$

Itt az utolsó lépésben $\mathcal{G}$ részpartíciójából G egy partícióját csináltuk az előbb leírt módon. $\prod_{i=1}^{k} b(U_i) = a_k(G)$, mivel egyelemű halmazokkal egészítettük ki a részpartíciót és $b(K_1) = 1$ a feltevésünk miatt.

Tehát az $I_{\mathcal{G}}(\underline{\omega})$ függvény zérushelymentes része az $f_b(G, q)$ függvény zérushelymentes része is lesz.

A 4.3 következményt szeretnénk használni egy ilyen zérushelymentes rész megtalálásához. Ezt a következő lemmával fogjuk tudni megtenni.

5.4. Lemma. *Ha az $a \in \mathbb{R}^+$ számra teljesül a*

$$\sum_{\substack{U \in \mathcal{V} \\ v \in U}} |b(U)| \left(\frac{e^a}{|q|} \right)^{|U|-1} \leq a e^{-a}$$

egyenlőtlenség minden $v \in V(G)$-re, akkor $f_b(G, q) \neq 0$.

Bizonyítás:

Ellenőrizzük a második feltételt a 4.3 következményben a korábban definiált $\omega(U) = \frac{b(U)}{q^{|U|-1}}$ súlyfüggvényre, és a $a(U) = a|U|$ függvényre. Ekkor az ottani feltétel (ami a többváltozós függetlenségi polinomra van kimondva) a mostani jelöléseinkkel így néz ki:

$$\sum_{U:(S,U)\in\mathcal{E}} |\omega(U)|e^{a|U|} \leq a|S|$$

minden $S \in \mathcal{V}$-re. Ha $(S,U) \in \mathcal{E}$, akkor $S \cap U \neq \emptyset$. Tehát

$$\sum_{U:(S,U)\in\mathcal{E}} |\omega(U)|e^{a|U|} \leq \sum_{v\in S}\sum_{v\in U} |\omega(U)|e^{a|U|} = \sum_{v\in S}\sum_{v\in U} \left|\frac{b(U)}{q^{|U|-1}}\right| e^{a|U|} =$$

$$= \sum_{v\in S} e^a \sum_{v\in U} |b(U)| \left(\frac{e^a}{q}\right)^{|U|-1} \leq \sum_{v\in S} e^a a e^{-a} = a|S|.$$

Az előző meggondolásunk miatt kész vagyunk.

□

Alkalmazzuk most ezt a lemmát a párosítási és az adjoint polinomra, és számoljuk ki a zérushelyeiknek egy korlátját.

a) Az $\tilde{m}_G(x)$ G gráf párosítási polinomjának nincsen $2eD$-nél nagyobb abszolút értékű gyöke, ahol D a G gráf maximális fokát jelöli.

b) A $h_G(x)$ G gráf adjoint polinomjának nincsen $K_h(a)D$-nél nagyobb abszolút értékű gyöke, ahol D a G gráf maximális fokát jelöli, és

$$K_h(a) = \frac{e^a}{\log(1 + ae^{-a})}.$$

.

Bizonyítás:

a) Mint már korábban láttuk $|b_m(H)| = 1$, ha H K_1 vagy K_2, különben $b_m(H) = 0$. Tehát amit vizsgálnunk kell, az

$$\sum_{\substack{U\in\mathcal{V}\\ v\in U}} |b_m(U)| \left(\frac{e^a}{|q|}\right)^{|U|-1} \leq D\frac{e^a}{|q|} \leq ae^{-a}$$

$$D\frac{e^{2a}}{a} \leq |q|$$

Mely q-kra igaz ez? Ha a-t $\frac{1}{2}$-nek választjuk akkor pontosan a tételben szereplő feltételt kapjuk: $2eD \leq |q|$.

b) Itt is láttuk már, hogy $|b_h(H)| = 1$, ha H teljes gráf, különben $b_h(H) = 0$. Így kapjuk, hogy

$$\sum_{\substack{U\in\mathcal{V}\\ v\in U}} |b_h(U)| \left(\frac{e^a}{|q|}\right)^{|U|-1} = \sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{v\in U, |U|=k} |b_h(U)|\right) \left(\frac{e^a}{|q|}\right)^{k-1} \leq$$

A v-t tartalmazó k elemű klikkek száma legfeljebb $\binom{D}{k-1}$, ezért

$$\leq \sum_{k=2}^{D+1} \binom{D}{k-1} \left(\frac{e^a}{|q|}\right)^{k-1} = \left(1+\frac{e^a}{|q|}\right)^{D} - 1 \leq e^{D\frac{e^a}{|q|}} - 1$$

Tehát azt kell vizsgálnunk, hogy mikor teljesül

$$\begin{aligned} e^{D\frac{e^a}{|q|}} - 1 &\leq ae^{-a} \\ D\frac{e^a}{|q|} &\leq \log(1+ae^{-a}) \\ D\frac{e^a}{\log(1+ae^{-a})} &\leq |q|. \end{aligned}$$

Ez pont a tételben szereplő $K_h(a)D \leq |q|$ feltétel.

□

6. Sokal tételének bizonyítása

Jelöljük $b_c(G)$-vel a kromatikus polinomhoz tartozó függvényt. A 2.24 következményből tudjuk, hogy

$$|b_c(G)| = |c_1(G)| \leq \tau(G).$$

A 5.4 lemmával együtt ebből azt kapjuk a $|\lambda| \geq K(a)D$ feltétellel, hogy ha

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{D^{n-1}} \sum_{\substack{|U|=n\\ v\in U}} \tau(U)\right) \left(\frac{e^a}{K(a)}\right)^{n-1} \leq ae^{-a}, \tag{9}$$

akkor $M_G(\lambda) \neq 0$.

Vezessük be a következő jelölést:

$$\tau_n(G,v) = \sum_{\substack{|V(U)|=n\\ v\in V(U)}} \tau(G[U]).$$

Ezzel a jelöléssel a (9) egyenlőtlenség a következőképpen írható fel:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\tau_n(G,v)}{D^{n-1}}\right)\left(\frac{e^a}{K(a)}\right)^{n-1} \leq ae^{-a}.$$

A továbbiakban $\tau_n(G,v)$ értékét próbáljuk megbecsülni.

6.1. Állítás. *Legyen $\mathbb{T}_D$ a végtelen D-reguláris fa, melynek v^* a gyökere. Ha G gráf maximális foka D, akkor*

$$\tau_n(G,v) \leq \tau_n(\mathbb{T}_D, v^*).$$

Bizonyítás:
Legyen $U = (\tilde{V}, \tilde{E})$ gráf a G gráf univerzális fedőfája. Ez azt jelenti, hogy $\tilde{V}$ egy csúcsa megfelel a G gráf egy $v \in G$ csúcsából induló olyan sétáknak, amiben nincs visszalépés (ha az utolsó lépés (u,u') volt, akkor a következő lépés nem lehet (u',u)). Jelöljük $\tilde{v}$-vel az egyelemű v-t tartalmazó sétát. $(\tilde{s},\tilde{t}) \in \tilde{E}$, ha az egyik séta a másiknak egy lépéssel való meghosszabbítása.
Mivel G maximális foka D, ezért U maximális foka is csak D lehet. Mivel U fa is, ezért biztos, hogy $\mathbb{T}_D$ részfája, vagyis

$$\tau_n(U,\tilde{v}) \leq \tau_n(\mathbb{T}_D, v^*).$$

Tehát most már csak azt kellene belátni, hogy

$$\tau_n(G,v) \leq \tau_n(U,\tilde{v}).$$

Ez könnyen látszik: G-ben egy v-t tartalmazó részfa minden csúcsához egyértelműen tartozik egy v-ből induló út. Ezen utak U-beli képe egy U-beli részfa. Illetve egy U-beli részfához is legfeljebb egy G-beli részfa tartozhat.

□

Most már csak $\tau_n(\mathbb{T}_D, v^*)$ értékét kellene kiszámolnunk. Ehhez szükségünk lesz a Lagrange-Bürmann formulára.

6.2. Tétel (Lagrange-Bürmann formula [6]). *Legyen $f(\omega) = \dfrac{\omega}{\phi(\omega)}$ alakú függvény, ahol $\phi(\omega)$ analitikus függvény és $\phi(0) \neq 0$. Ekkor az inverz g függvényére (vagyis az a függvény, ami teljesíti $f(g(z)) \equiv z$ ekvivalenciát) és egy tetszőleges H analitikus függvényre a következő teljesül:*

$$[z^n]H(g(z)) = \frac{1}{n}[\omega^{n-1}](H'(\omega)\phi(\omega)^n),$$

ahol a $[z^n]$ operátor a függvény Taylor-polinomjának a z^n tagjának az együtthatóját adja meg.

6.3. Tétel.

$$t_n^{(D)} = \tau_n(\mathbb{T}_D, v^*) = \frac{D}{n-1}\binom{(D-1)n}{n-2}$$

Bizonyítás:

Jelölje U_D a végtelen v^* gyökerű D-áris fát (bináris, tenáris...) és $u_n^{(D)} = \tau_n(U_D, v^*)$. Vegyük $t_n^{(D)}$ és $u_n^{(D)}$ generátorfüggvényét:

$$T_D(z) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n^{(D)} z^n,$$
$$U_D(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(D)} z^n.$$

Mivel ha U_D bármely csúcsát kiválasztjuk, az és annak a leszármazottai szintén U_D gráfot alkotnak, ezért felírhatjuk a következő egyenlőséget:

$$U_D(z) = z(1 + U_D(z))^{D-1}.$$

Hasonlóan, mivel a $\mathbb{T}_D$ fa gyökerének gyermekei U_D-k, erre a következő összefüggés írható fel:

$$T_D(z) = z(1 + U_D(z))^D.$$

Most szeretnénk használni a Lagrange-Bürmann formulát. A függvények, amelyekre használni fogjuk:

$$H(z) = (1+z)^D,$$
$$\phi(\omega) = (1+\omega)^{D-1},$$

amiből azt kapjuk, hogy $g(z) = z\phi(g(z)) = z(1+g(z))^{D-1} = U_D(z)$ ($f(g(z)) \equiv z$ miatt), valamint $H(g(z)) = H(U_D(z)) = (1+U_D(z))^D = \dfrac{T_D(z)}{z}$. Ekkor teljesülni fog, hogy

$$\begin{aligned}
[z^n]T_D(z) = [z^{n-1}]H(g(z)) &= \frac{1}{n-1}[\omega^{n-2}](H'(\omega)\phi(\omega)^{n-1}) = \\
&= \frac{1}{n-1}[\omega^{n-2}](D(1+\omega)^{D-1}(1+\omega)^{(D-1)(n-1)}) = \\
&= \frac{D}{n-1}[\omega^{n-2}]((1+\omega)^{(D-1)n}) = \frac{D}{n-1}\binom{(D-1)n}{n-2}
\end{aligned}$$

$T_D(z)$ definíciójából pedig tudjuk, hogy $[z^n]T_D(z) = t_n^{(D)}$, vagyis bebizonyítottuk, amit szerettünk volna.

$\square$

6.4. Következmény.

$$t_n^{(D)} \leq \frac{(Dn)^{n-1}}{n!}$$

Bizonyítás:

Egyszerűen következik a binomiális együtthatók triviális felső becsléséből:

$$\frac{D}{n-1}\binom{(D-1)n}{n-2} \leq \frac{D}{n-1} \cdot \frac{((D-1)n)^{n-2}}{(n-2)!} \leq \frac{n}{n} \cdot \frac{D}{(n-1)!}(Dn)^{n-2} = \frac{(Dn)^{n-1}}{n!}$$

□

A 6.1 állítást és 6.4 következményt összerakva, kapjuk, hogy

$$\tau_n(G, v) \leq t_n^{(D)} \leq \frac{(Dn)^{n-1}}{n!}.$$

Ebből és a (9) egyenlőtlenségből kapjuk, hogy a $K(a)$ konstansra

$$K(a) = \inf\left\{K \middle| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{ne^a}{K}\right)^{n-1} \leq 1 + ae^{-a}\right\}$$

a $\{\lambda : |\lambda| \geq K(a)D\}$ részen egy D maximális fokú G gráf kromatikus polinomja gyökmentes. Ahhoz, hogy ebből megkapjuk Sokal tételét, már csak azt kell belátnunk, hogy egy a-ra $K(a) < 8$.

Sokal bebizonyította, hogy $K < 7.963907$ ($a \approx 0.403774$ választással), de itt csak egy ehhez közeli becslést fogok közölni. Legyen $a = 0.4$ és $K = 8$, ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}\left(\frac{e^{0.4}}{8}\right)^{n-1} \leq 1 + 0.4 \cdot e^{-0.4}$$

$$\sum_{n=2}^{32} \frac{n^{n-1}}{n!}\left(\frac{e^{0.4}}{8}\right)^{n-1} + \sum_{n=33}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}\left(\frac{e^{0.4}}{8}\right)^{n-1} \leq 0.4 \cdot e^{-0.4}.$$

A szumma első tagja 1, így ezt levonhatjuk mindkét oldalról. A szummát kettévesszük egy véges tagra, és egy végtelen hosszú tagra. A végtelen hosszú tag becsléséhez szükségünk lesz a következő állításra.

6.5. Állítás.

$$\frac{n^{n-1}}{n!} < \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1}.$$

Bizonyítás:

Az első egyenlőtlenség triviális. A másodikhoz fel kell használnunk, hogy

$$\forall k \in \mathbb{N} : \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e.$$

Ebből felírató, hogy

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1}.$$

A produktum teleszkopikus jellegű: a számlálókat mindig tudjuk egyszerűsíteni a következő tag nevezőjével, de onnan visszamarad egy elsőfokú tag (ebből lesz a faktoriális nevező), a számláló pedig megegyezik az utolsó tag számlálójával.

□

Ezt felhasználva a végtelen szumma becslésére:

$$\sum_{n=33}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{n!}\left(\frac{e^{0.4}}{8}\right)^{n-1} < \sum_{n=33}^{\infty} e^{n-1}\left(\frac{e^{0.4}}{8}\right)^{n-1} = \sum_{n=32}^{\infty}\left(\frac{e^{1.4}}{8}\right)^{n} = \left(\frac{e^{1.4}}{8}\right)^{31}\cdot\frac{1}{1-\frac{e^{1.4}}{8}} \approx 1.44\cdot 10^{-9}.$$

A véges szumma értéke:

$$\sum_{n=2}^{32}\frac{n^{n-1}}{n!}\left(\frac{e^{0.4}}{8}\right)^{n-1} \approx 0.26636$$

A jobb oldalé pedig: $0.4\cdot e^{-0.4} \approx 0.2681$. Ebből látható, hogy ezek az értékek kielégítik az egyenlőtlenséget melyből következik, hogy $K(0.4) \leq 8$.

Hivatkozások

[1] P. Csikvári: *Zero-free region of the chromatic polynomial*, preprint

[2] P. Csikvári and P. E. Frenkel: *Benjamini-Schramm continuity of root moments of graph polynomials*, http://arxiv.org/abs/1204.0463

[3] Lovász László: *Kombinatorikai problémák és feladatok* 9.36-9.46 (2000)

[4] Ronald C. Read: *An Introduction to Chromatic Polynomials.* Journal of Combinatorial Theory 4, 52-71 (1968)

[5] A. D. Sokal: Bounds on the complex zeros of (di)chromatic polynomials and Potts-model partition functions, Combinatorics, Probability and Computing 10 (2001), No. 1, pp. 41-77

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_inversion_theorem