NYILATKOZAT

Név: Windisch Anita

ELTE Természettudományi Kar, szak: alkalmazott matematikus

NEPTUN azonosító: ZECBGT

Szakdolgozat címe:
Bifurkációk neurális hálózatok Hopfield-modelljében

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020. május 30.

Windisch Anita

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Windisch Anita

Bifurkációk neurális hálózatok Hopfield-modelljében

Szakdolgozat

Alkalmazott matematikus MSc

Témavezető:

Dr. Simon L. Péter
egyetemi tanár

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2020

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Simon L. Péternek a dolgozat készülése és az egész mesterképzés során nyújtott segítségéért. Köszönettel tartozom a konzultációkért, tanácsaiért, bátorító szavaiért, valamint, hogy kérdéseimmel bármikor fordulhattam hozzá.

Hálás vagyok szüleimnek, hogy tanulmányaim során mindvégig támogattak engem. Köszönöm férjemnek, hogy végig mellettem állt, biztatott, és segített túljutni a nehezebb időszakokon.

Végül, de nem utolsó sorban hálával tartozom a Mindenhatónak, aki erőt adott, és akinek kegyelméből létrejöhetett a dolgozatom.

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg (EFOP-3.6.3-VEKOP-16-2017-00002).

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az utóbbi időben egyre jobban elterjedté vált a mesterséges intelligencia, azon belül a gépi tanulás használata mind ipari, mind tudományos célból. A mesterséges neurális hálózatok számos probléma esetén jóval hatékonyabb számolásra képesek a hagyományos algoritmikus számítási rendszereknél. Az idegrendszer működésének megismerése és a biológiai neuronhálózatok felépítése motiválta megalkotásukat. Nagy előnyük, hogy párhuzamos működésre, valamint tanulásra is képesek. A visszacsatolt, más néven rekurrens neurális hálózatok hatékonyan alkalmazhatók autoasszociatív memóriaként, melyet kép-, illetve hangfelismerésre, valamint ezek feldolgozására használnak leginkább.

A dolgozat során az egyik legegyszerűbb autoasszociatív memóriát megvalósító hálózat vizsgálatával, a Hopfield-modellel foglalkozunk. Célunk egy választott speciális esetben a modell dinamikájának meghatározása analitikus és numerikus eszközöket egyaránt felhasználva. Először áttekintjük a biológiai neuronhálózatok felépítését és működését, majd áttérünk a mesterséges neurális hálók jellemzőire és memóriaként való alkalmazhatóságukra. Ezután bemutatjuk a Hopfield-modell általános alakját, valamint a munkánkhoz legközelebb álló, az irodalomból már ismert eredményeket. Kiválasztjuk az általunk vizsgálni kívánt speciális esetet, majd ismertetjük a vizsgálat során szükséges bifurkációelméleti fogalmakat és eszközöket. A modellt ezután visszavezetjük alacsonyabb dimenziós rendszerre, melynek dinamikája már egyszerűbben meghatározható. Analitikus eszközökkel megadjuk a nyereg-csomó, illetve az Andronov-Hopf-bifurkációs görbéket, melyek az egyensúlyi pontok számának, valamint stabilitásának változását adják. Periodikus megoldások születésére szükséges feltételt bizonyítunk, majd az analitikus vizsgálatot kiegészítjük numerikus eszközökkel is. Ehhez MatCont bifurkációkereső programcsomagot használunk, melynek segítségével meghatározzuk a homoklinikus pálya bifurkációját, illetve a határciklusok összeolvadását is. A bifurkációs görbék által felosztott paramétersíkon ismertetjük a modell lehetséges viselkedéseit.

1. fejezet

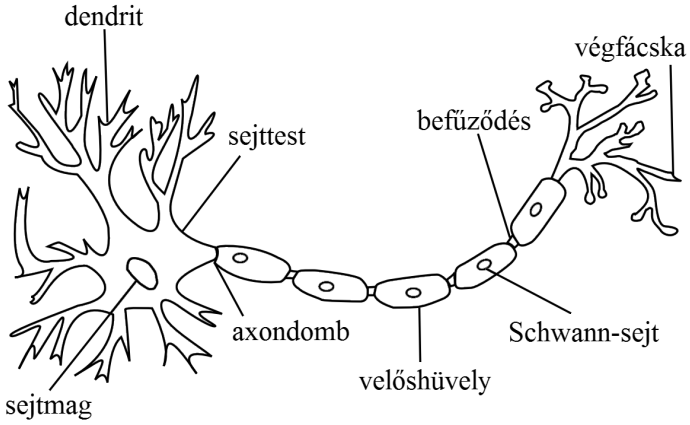
Neurális hálózatok

Ebben a fejezetben először röviden áttekintjük az idegsejtek működését és tulajdonságait, majd áttérünk a biológiai neuronhálózatokból származtatható mesterséges neurális hálókra, azok jellemzőire és felhasználására.

1.1. Biológiai áttekintés

Az idegrendszer legkisebb önállóan működő egységei az idegsejtek, más néven neuronok. Ezek olyan speciális sejtek, melyek ingerfelvételre és idegimpulzusok vezetésére képesek. Ezen ingerületeket a többi idegsejt, valamint az izmok, és más belső szervek számára szállítják. Az idegsejtek méretüket és alakjukat tekintve igen változatosak, de több közös jellegzetességük is van. Mindegyikük rendelkezik egy sejttesttel, melynek felszínéről indul ki az axon, ami egy hosszabb, cső alakú nyúlvány. Az axon felelős az ingerületek sejttesttől távolodó irányba való vezetéséért, vagyis az üzeneteket más idegsejteknek, illetve mirigyeknek továbbítja. Azon rövidebb nyúlványokat, melyek az információfelvételt végzik, és az ingerületet a sejttest felé vezetik, dendriteknek nevezzük. Az idegsejtet nyúlványaival együtt egybefüggő sejtmembrán határolja, mely olyan féligáteresztő-képességgel rendelkezik, ami lehetővé teszi, hogy bizonyos ionok átdiffundáljanak, míg mások átjutását megakadályozza. A sejtmembránon belül található a citoplazma, amelyben sok, csoportokba rendeződött endoplazmatikus retikulum van. Az axon végződésénél található az axondomb, mely nem érintkezik az ingerelt idegsejt dendritjével és sejttestével, van közöttük egy szűk rés, melyet szinaptikus résnek nevezünk. A membránnal borított axon körül rendszerint az idegszövet támasztósejtjei alakítanak ki további réteget, a velőshüvelyt. Az egyes támasztósejtek találkozásánál egy kis részen, a befűződés helyén, az axon velőshüvely nélküli szakasza található. Ezeken a réseken keresztül érintkezik az axon az idegszövet sejtközi állományával [1, 2].

A neuronok nyúlványaik segítségével kapcsolatban lehetnek egymással, létrehozva ezzel egy hálózatot. Kommunikációjuk során az impulzusok az egyik idegsejtről a másikra tevődnek át. Azokat a kapcsolódási helyeket, melyeken keresztül az ingerület átterjed, szinapszisnak nevezzük. Mivel a membrán áteresztőképessége iononként változó, így az ingerület vezetése és továbbadása



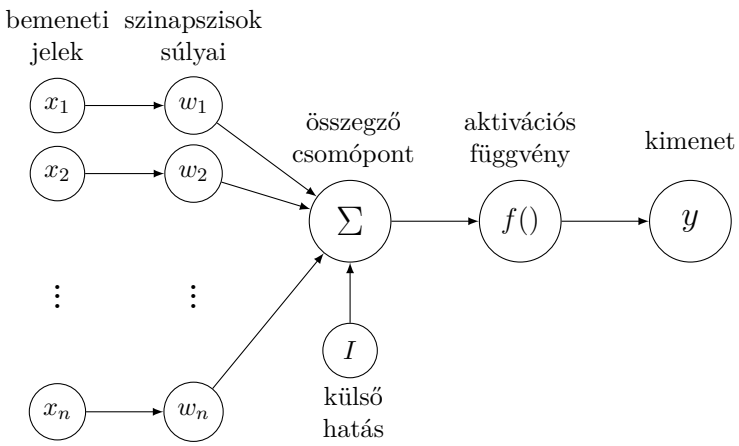
1.1. ábra. Neuron felépítése.

során a sejt belseje és külseje között feszültségkülönbség keletkezik, melyet nyugalmi potenciálnak nevezünk. Ennek során a sejtmembrán polarizált állapotba kerül, azaz külső felszínén pozitív, míg belső felszínén negatív töltésűvé válik. Inger hatására azonban lökésszerű feszültségváltozás jön létre, melynek következtében a membrán áteresztőképessége jelentősen megváltozik, az ingerlés helyén depolarizáció megy végbe, vagyis a polaritás ellenkező előjelűvé válik. Ezt a gyors potenciálváltozást, mely a membrán két oldala között történik, akciós potenciálnak hívjuk. Ezután elkezdődik a repolarizációs folyamat, melyben az idegsejt visszaáll a nyugalmi potenciál állapotába. A depolarizáció azonban átterjed az ingerület keletkezési helyével szomszédos membránterületekre is, így a sorra kiváltott elektromos impulzusok hullámszerűen terjednek a sejttest felől az axonvég felé. A sejtek közti aránylag nagy távolság miatt azonban a potenciálkülönbség közvetlenül nem tud egyik sejtről a másikra terjedni, így az ingerület átadására a szinapszis szolgál. Az információt ingerületátvivő anyagok szállítják egyik sejtről a másikra a szinaptikus résen keresztül, melyek hatása alapján a szinaptikus kapcsolatokat két csoportra oszthatjuk. Az egyik a serkentő szinapszis, melyben az ingerületátvivő anyag molekulái depolarizálják a szinapszist követő neuron membránját, ami tovább vezeti a keletkező elektromos impulzust. A másik típus a gátló szinapszis, melyben a molekulák hatására megnő a sejten belüli negatív töltések aránya. Ekkor az idegsejt membránpotenciálja a nyugalmi szinthez közeli értéken marad, így nem alakul ki akciós potenciál. A gátló szinapszisok tehát a neuronokhoz kapcsolódva csökkentik vagy közömbösítik az oda érkező serkentő ingerületet [3].

1.2. Mesterséges neurális hálók

Az idegsejtek, valamint az általuk alkotott hálózatok működésének modellezése által születtek meg a mesterséges neurális hálók, melyek szintén információfeldolgozó egységekből, neuronokból épülnek fel. A köztük lévő kapcsolódásokat, vagyis a szinapszisok mindegyikét egy-egy súly

jellemzi. A mesterséges neuronok több bemeneti jelet is kapnak, viszont csak egyetlen kimenetük van. A bemeneti jelek a hozzájuk tartozó szinapszissal súlyozva egy csomópontban összegződnek, belső potenciálként. Az aktivációs függvény ezt a belső potenciált alakítja tüzelési rátává, tehát a neuron kimenetévé. Leggyakrabban a $(0, 1)$ intervallumba képező lépcsős, szakaszonként lineáris, vagy logisztikus függvényt szokás aktivációs függvényként használni, de találhatunk példát ezek $(-1, 1)$ intervallumba képező változatának alkalmazására is. A neuront érheti külső hatás is, mely szintén módosítja a annak belső potenciálját. A mesterséges neuron ezen felépítését, mely az 1.2. ábrán is látható, McCulloch-Pitts modellnek szokás nevezni [4, 5].



1.2. ábra. Mesterséges neuron felépítése a McCulloch-Pitts modell alapján.

Neurális hálózatnak nevezzük azon párhuzamos és elosztott működésre képes információfeldolgozó eszközt, mely neuronok nagymértékben összekapcsolt rendszeréből épül fel, valamint rendelkezik tanulási és előhívási algoritmussal. A tanulási fázis során jön létre a hálózat, melyben eltárolódik a rendelkezésre álló mintákból ismert információ. Az előhívási fázisban kerül sor a kapott rendszer használatára, mely általában jelentősen gyorsabb folyamat a tanulásnál. A neurális hálókat két fő csoportba sorolhatjuk a neuronok közti kapcsolódási rendszer alapján. Beszélhetünk előrecsatolt hálózatokról, melyek esetében az egyes neuronokból induló jelek nem juthatnak vissza, tehát a hálózatot reprezentáló irányított gráfban nincs kör. Ellenkező esetben visszacsatolt, vagyis rekurrens hálózatról beszélünk [6].

Neurális hálózatok használata igen elterjedt tudományos, műszaki és gazdasági feladatok megoldására egyaránt. Hatékonyan alkalmazhatók olyan összetett problémák esetében, amelyek visszavezethetők két alapvető feladatra, a szeparálásra és a függvényközelítésre. Legismertebb felhasználásukra példák az autóiparban az önvezető autók, az orvostudományban a rákos sejtek vizsgálata és a transzplantációs idő optimalizálása, telekommunikációban az automatizált információs szolgáltatások, valamint a beszélt nyelv fordítása valós időben. Pénzügyi ágazatokban is egyre gyakrabban használnak neurális hálókat, így ingatlanok értékbecslésére, hiteltanácsadásra,

csalások felderítésére és tőzsdei előrejelzésekre egyaránt [6, 7].

Speciális memóriaként is felfoghatók a neuronhálók, melyekbe a tanulás során információt írunk be, majd ezt az előhívás során visszaolvassuk. Az egyik ilyen memóriatípus az adattal címezhető memória, amikor a hálózat bemenetére a tanítási adathalmaz elemeit kapcsoljuk. Ekkor a neuronháló az összetartozó adatokat igyekszik azonos címhez rendelni. Az előhívási fázis során szintén adatokat adunk bemenetként, majd eredményként kapjuk, hogy a megtanult címek közül melyiket adja vissza a hálózat. Osztályozási feladat során tehát eredményes tanulás esetén azonos osztályba tartozó bemenetre egyező, vagy egymáshoz közeli címeket kapunk, míg különböző osztályba tartozó minták távoli címeket eredményeznek. A másik elterjedt memóriafajta az asszociatív memória, melynél összetartozó adatpárokat használunk, és a hálózatot arra tanítjuk, hogy az adott bemeneti adathoz a megfelelő kimeneti adatot rendelje hozzá. Az előhívási fázisban bemenetként szintén adatokat használunk, és válaszként megkapjuk, amit a hálózat a bemenethez kapcsolt. Megemlíthetjük itt a képfeldolgozási feladatokat, ahol a bemenet lehet hibás vagy hiányos, és kimenetként a korrigált vagy kiegészített képet várjuk [6].

Megkülönböztetünk az asszociációnak két típusát, az autoasszociációt és a heteroasszociációt. Utóbbi esetében a bemeneti mintákhoz tetszőleges kimeneti vektor kapcsolható. A háló összetartozó párokat tárol, majd egy megadott bemenetre a hozzá párosított kimenetet kell előállítania, vagyis egy bemeneti mintát egy tetszőleges, de ahhoz kapcsolt mintával asszociál. Autoasszociatív hálónál a tanulási fázisban a bemenetként adott jelvektorok tárolódnak abból a célból, hogy az előhívás során a háló a megtanult minták részleges vagy torzított változatai esetén az eredeti, teljes mintát adja vissza válaszként. Ez esetben tehát a háló a bemeneti mintákat önmagukkal asszociálja [6].

2. fejezet

A Hopfield-modell

Az egyik legegyszerűbb, asszociatív memóriát megvalósító hálózat a Hopfield-hálózat, melyet leggyakrabban képalkotásra, képfelismerésre használnak. A modell leírása után áttekintjük annak viselkedésével kapcsolatos, eddig ismert eredményeket, majd feltevéseket teszünk az általunk végzett vizsgálathoz.

2.1. Az általános modell

A Hopfield-hálózat olyan teljes gráfként reprezentálható, ahol a csúcsok az egyes neuronokat jelölik, az élek, és az azokon értelmezett súlyok pedig a neuronok közti kapcsolódást és annak erősségét jelentik. Az eredeti Hopfield-féle hálózatban minden neuron önmagához nulla súllyal kapcsolódik, míg az egymás közötti szinapszisaik szimmetrikus súlyozásúak. Az egyes neuronok állapotváltozásának, és a köztük lévő kommunikációnak leírására J. J. Hopfield először egy diszkrét idejű, sztochasztikus algoritmus alapján működő modellt alkotott meg [8], melyben McCullough és Pitts modelljéhez [4] hasonlóan a neuronoknak két állapota lehet. Az i. neuron $x_i = 0$ esetén nem tüzel, míg az $x_i = 1$ állapotban maximális a tüzelési rátája. Minden neuron véletlenszerűen változtatja a belső potenciálját, valamint mindegyikhez tartozik egy T_i küszöbszám, mely alapján eldől, hogy az egyes neuronok melyik állapotba kerülnek [8].

$$\begin{aligned} x_i &\to 1, \text{ ha } \sum_{j \neq i} w_{ij} x_j > T_i \\ x_i &\to 0, \text{ ha } \sum_{j \neq i} w_{ij} x_j < T_i \end{aligned} \tag{2.1}$$

Kiindulva a (2.1) modellből, valamint megőrizve annak főbb tulajdonságait, J. J. Hopfield megalkotta a következő folytonos idejű, determinisztikus modellt is a neuronok kommunikációjának leírására [9]:

$$\dot{x} = -Dx + Wy + I, \qquad y_i = f(x_i), \tag{2.2}$$

ahol $x(t), y(t), I \in \mathbb{R}^n$, D, $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$, D diagonális. Az f függvény monoton növekedő, valamint véges határértékű. A modellben x a membránpotenciált, y pedig a neuron tüzelési rátáját, vagyis annak kimenetét jelenti. A W mátrix tartalmazza a neuronok súlyozását, I pedig az egyes neuronokat érő külső hatást jelöli. Az f függvényt aktivációs függvénynek nevezzük, mely a belső potenciált alakítja tüzelési rátává. A továbbiakban ezen folytonos idejű, determinisztikus modell vizsgálatával foglalkozunk.

A (2.2) Hopfield-modell dinamikájával kapcsolatban több kérdés is megfogalmazható. Mivel rekurrens neurális hálóról van szó, tehát egy adott csúcsból induló jelek más csúcsokon keresztül visszajuthatnak, így nem egyértelmű, hogy a neuronok állapota egyensúlyi helyzethez tart-e. Felmerül az is, hogy létezhet-e több egyensúlyi helyzet, melyek különböző memóriaállapotot jelentenének az alkalmazás szempontjából. Fontos kérdés az is, hogy megjelenhet-e periodikusság a modellben, illetve, hogy ezeken kívül előfordulhat-e más viselkedés.

2.2. Irodalmi áttekintés

A Hopfield-modellt különböző feltevések mellett több szempontból is vizsgálták már. A modell megalkotója, J. J. Hopfield szimmetrikus súlymátrix esetén egy alkalmas energiafüggvény megkonstruálásának segítségével először a (2.1) diszkrét és sztochasztikus esetben mutatta meg, hogy a neuronok állapota mindig egyensúlyhoz tart, majd ezt kiterjesztette a (2.2) folytonos és determinisztikus modellre is [9].

R. D. Beer 1995-ben $y_i = f(x_i + \theta_i)$-ként módosítva a (2.2) rendszert, egy és két neuronból álló hálózatban keresett lokális bifurkációkat, $f(x) = (1 + \exp(-x))^{-1}$ alakú aktivációs függvényt alkalmazva. Egy neuron esetén a (w, I) paramétersíkon analitikusan és numerikusan is meghatározta a differenciálegyenlet lehetséges viselkedéseit. Két neuron esetén az I_1 és I_2 külső hatások, θ_1 és θ_2 paraméterek, valamint a neuronok önmagukhoz kapcsolódó w_{11} és w_{22} súlyaik függvényében vizsgálta a modellt. Az egymáshoz való kapcsolódások (w_{12}, w_{21}) súlyait rögzítettnek tekintette, de értékeik alapján két esetet különböztetett meg. Megmutatta, hogy $(1, 1)$-nek választva a paraméterpárt a modell egyszerűbb viselkedést, míg $(1, -1)$-nek véve jóval komplexebb dinamikát mutat. Több esetben is igazolta periodikus megoldás létezését, illetve három neuronból álló hálózatra már példát tudott adni kaotikus viselkedésre is [10]. A későbbiekben $\forall$ i-re a θ_i-t tekintette bifurkációs paraméternek, majd n dimenzióban hipersíkokkal közelítette a bifurkációs görbéket. Az így keletkezett tartományok térfogatát meghatározta, majd a paramétertérben vizsgálta az egyes tartományokba esés valószínűségét [11].

G. B. Ermentrout szintén egy és két neuronból álló hálózat esetén vizsgálta a modellt. R. D. Beerhez hasonlóan az $f(x) = (1 + \exp(-x))^{-1}$ aktivációs függvényt alkalmazta, valamint a modellhez hozzávette a neuronok önmagukra gyakorolt hatását, melyet J. J. Hopfield nullának tekintett. Nullklínák, valamint stabil és instabil sokaságok meghatározásával további lehetséges viselkedéseit mutatta meg a (2.2) rendszernek, kiegészítve ezzel R. D. Beer 1995-ben

publikált munkáját. Példát adott két stabil és egy instabil határciklus együttes létezésére, valamint bizonyította, hogy két neuron esetén nem létezhet a rendszernek periodikus megoldása, ha az egymással való kapcsolódásuk súlya azonos előjelű [12, 13, 14].

A modell viselkedésének megismerésére D. Fasoli, A. Cattani és S. Panzeri által olyan megközelítés is született, melyben a neuronokat két populációra osztották súlyozásuk előjele alapján, gátlóra és gerjesztőre. Az egyes populációkon belül teljesen összekapcsolt hálózatot tekintettek, ahol az egyes neuronok tulajdonságai megegyeznek. A két populáció lélekszáma tetszőleges véges, az őket összekötő élek súlyozása nem szimmetrikus. Numerikus eszközök segítségével teljes leírást adtak a modellviselkedésére a két populációt ért külső hatások függvényében (I_E, I_I), meghatározva globális bifurkációkat is. A gátló neuronpopuláció önmagához vett kapcsolódásának súlyát változtatva is találtak lényegi eltérést a fázisképeken. Aktivációs függvénynek az alábbi függvényt választották

$$f(x) = \frac{M}{2}\left[1 + \frac{\frac{S}{2}(x-T)}{\sqrt{1+\frac{S^2}{4}(x-T)^2}}\right], \tag{2.3}$$

ahol M a maximális tüzelési ráta, T a küszöbérték, S pedig a meredekséget meghatározó paraméter [15]. Egy szintén általuk vizsgált speciális eset, mikor a nyolc neuronból álló hálózat egy kockaként reprezentálható, ahol a neuronok a kocka csúcsai, a köztük lévő kapcsolódás pedig a kocka élei. A szinapszisok súlyát azonosnak tekintették, aktivációs függvénynek szintén a (2.3) függvényt választották. A külső hatás és a neuronok súlyának függvényében vizsgálták a modellt analitikus és numerikus eszközöket használva [16].

Az általunk végzett modellvizsgálathoz a fent említett eredmények állnak legközelebb, azonban jelentős számú publikáció olvasható a Hopfield-modell késleltetett [17, 18], illetve sztochasztikus változatáról [19, 20], valamint a hálózat alkalmazásáról egyaránt [21, 22].

2.3. Az általunk vizsgált speciális eset

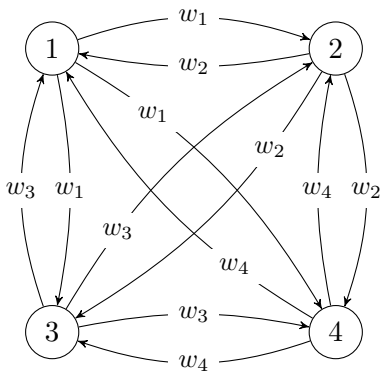
A Hopfield-modell vizsgálatát mi is speciális esetben végezzük. Tegyük fel, hogy egy adott neuron azonos súlyú szinapszissal kapcsolódik az összes többihez, azaz egyforma súllyal továbbít ingerületet a többi neuron felé, tehát $w_{ij} = w_j \; \forall \; i \neq j$-re. Minden neuron önmagához kapcsolódjon nulla súllyal, vagyis legyen $w_{ii} = 0 \; \forall \; i$-re. Ekkor a súlyokat tartalmazó W mátrix a következő alakban írható:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & w_2 & \dots & w_n \\ w_1 & 0 & \dots & w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1 & w_2 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

A (2.2) differenciálegyenlet-rendszerben válasszuk D-nek az egységmátrixot, az I, azaz a neuronokat érő külső hatás legyen 0, és az aktivációs függvény pedig $f(x) = (1 + exp(a - bx))^{-1}$

alakú, ahol a tetszőleges, b pedig pozitív paraméter. Ezen feltevések mellett a (2.2) rendszer a következőképpen írható $i = 1, \ldots, n$ esetén

$$\dot{x_i} = -x_i + \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) - w_i f(x_i). \tag{2.4}$$



2.1. ábra. Az általunk vizsgált speciális súlyozású hálózat 4 neuron esetén.

Mivel az általunk használt súlyozás nem szimmetrikus, így a modell egy olyan gráfon értelmezhető, melyben bármely két csúcs között mindkét irányban vezet irányított, súlyozással ellátott él. A speciálisan választott súlyozás következtében az egy csúcsból induló élek súlya azonos, és a gráf nem tartalmaz hurokélt. Ezen a hálózaton tehát történhet visszacsatolás, egy csúcsból a jelek más csúcsokon keresztül visszajuthatnak. A vizsgált hálózat gráfon való reprezentációjára láthatunk példát négy neuron esetén a 2.1. ábrán.

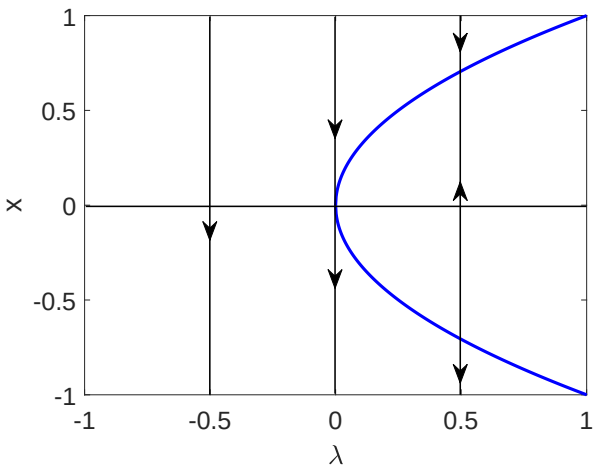
3. fejezet

Bifurkációelméleti eszközök

Ebben a fejezetben áttekintjük a modell vizsgálatához szükséges bifurkációelméleti fogalmakat és eszközöket a [23] és [24] könyvek, valamint a [25] jegyzet alapján.

3.1. Nyereg-csomó (fold) bifurkáció

3.1.1. Definíció. *Tekintsük az $\dot{x}(t) = F(x, \lambda)$ egyenletet, ahol $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, a $\lambda \in \mathbb{R}$ szám pedig paraméter. Azt mondjuk, hogy az (x_0, λ_0) pontban nyereg-csomó bifurkáció van, ha az x_0 pontnak van olyan $U \subset \mathbb{R}$ környezete, valamint létezik $\delta > 0$, hogy ha $\lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0$, akkor U-ban nincs egyensúlyi pont, ha $\lambda = \lambda_0$, akkor 1 darab egyensúlyi pont van, valamint $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \delta$ esetén 2 darab egyensúlyi pont van.*



3.1. ábra. Nyereg-csomó bifurkáció $x_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$ esetén.

Nyereg-csomó bifurkáció esetén tehát két egyensúlyi pont olvad össze, majd eltűnik, ahogy a 3.1. ábrán $\lambda = 0$ esetén is láthatjuk. A bifurkáció megtalálására a következő tétel ad eszközt, mely magasabb dimenziós fázistérben is megfogalmazható és alkalmazható [24].

3.1.2. Tétel. *Legyen $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F \in C^2$, és tekintsük az $\dot{x}(t) = F(x, \lambda)$ egyenletet. Tegyük fel, hogy teljesülnek a lokális bifurkáció feltételei, azaz $F(x_0, \lambda_0) = 0$ és $\partial_x F(x_0, \lambda_0) = 0$. Ha ezen kívül még az is igaz, hogy $\partial_\lambda F(x_0, v_0) \neq 0$ és $\partial_{xx} F(x_0, \lambda_0) \neq 0$, akkor az (x_0, λ_0) pontban nyereg-csomó bifurkáció van.*

3.2. Andronov-Hopf-bifurkáció

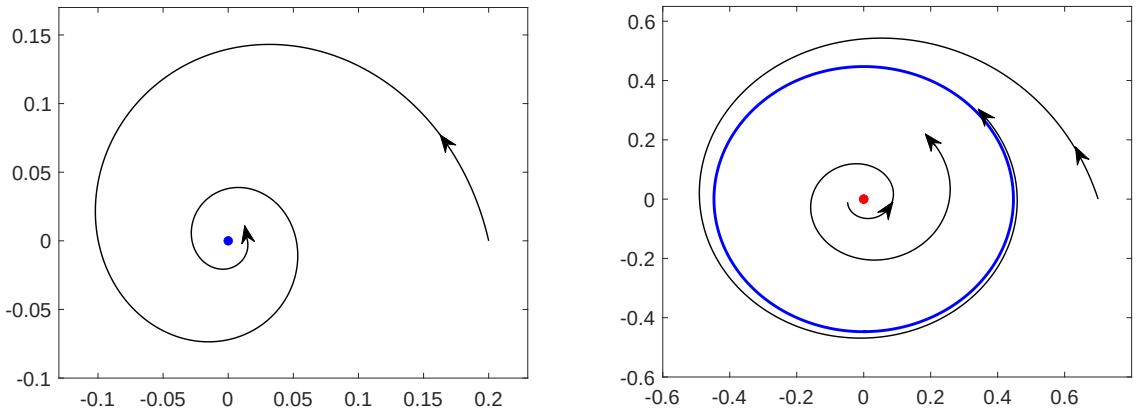
Andronov-Hopf-bifurkáció esetén valamely egyensúlyi pont stabilitása megváltozik, és körülötte határciklus születik, vagy tűnik el. Erre láthatunk példát a 3.2. ábrán az

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(\mu - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(\mu - x^2 - y^2) \end{aligned} \tag{3.1}$$

kétdimenziós rendszer esetén, ahol $\mu \in \mathbb{R}$ paraméter.

3.2.1. Definíció. *Az x_0 pontban λ_0 paraméterértéknél szuperkritikus Andronov-Hopf-bifurkáció van, ha létezik x_0-nak olyan U környezete, és $\delta > 0$, hogy $\lambda_0 - \delta < \lambda \leq \lambda_0$ (vagy $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_0 + \delta$) esetén U-ban egy stabil egyensúlyi pont van és nincs határciklus, és $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_0 + \delta$ (vagy $\lambda_0 - \delta < \lambda \leq \lambda_0$) esetén U-ban egy instabil egyensúlyi pont van és egy stabil határciklus.*

3.2.2. Definíció. *Az x_0 pontban λ_0 paraméterértéknél szubkritikus Andronov-Hopf-bifurkáció van, ha létezik x_0-nak olyan U környezete, és $\delta > 0$, hogy $\lambda_0 - \delta < \lambda \leq \lambda_0$ (vagy $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_0 + \delta$) esetén U-ban egy stabil egyensúlyi pont van és egy instabil határciklus, és $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_0 + \delta$ (vagy $\lambda_0 - \delta < \lambda \leq \lambda_0$) esetén U-ban egy instabil egyensúlyi pont van és nincs határciklus.*



(a) Stabil egyensúlyi pont.

(b) Stabil periodikus pálya és instabil egyensúlyi pont.

3.2. ábra. Szuperkritikus Andronov-Hopf-bifurkáció a (3.1) rendszerben, az origó elveszíti stabilitását, stabil periodikus pálya születik.

Az Andronov-Hopf-bifurkáció létezésére az úgynevezett Ljapunov-együttható segítségével adható elégséges feltétel, mely megtalálható a [25] jegyzetben. Ennek kiszámolása helyett azonban érdemesebb egy egyszerűbb módszert alkalmazni. A bifurkáció létezésére kétdimenziós rendszer esetén szükséges feltétel adható a Jacobi-mátrix nyomának és determinánsának segítségével. Annak ellenére, hogy ez a feltétel nem elégséges, mégis az így kapott görbét nevezik az Andronov-Hopf-bifurkáció görbéjének.

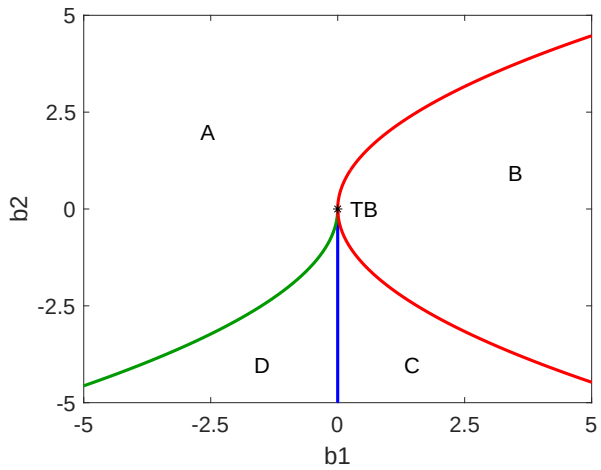
3.2.3. Állítás. *Kétdimenziós rendszer esetén azon paraméterértékekre, melyekre Andronov-Hopf-bifurkáció történik, a rendszer Jacobi-mátrixára teljesül, hogy* $\operatorname{tr} J = 0$ *és* $\det J > 0$.

3.3. Takens-Bogdanov-bifurkáció

3.3.1. Definíció. *Tekintsük az* $\dot{x}(t) = F(x, \lambda)$ *egyenletet, ahol* $x \in \mathbb{R}^2$ *és* $\lambda \in \mathbb{R}^2$*, valamint* F *kellően sima függvény. Tegyük fel, hogy* $\lambda = 0$ *esetén* $x_0 = 0$ *egyensúlyi pontja a rendszernek, illetve a Jacobi-mátrixának sajátértékei* x_0*-ban* $\mu_{1,2} = 0$*. Ekkor azt mondjuk, hogy az* (x_0, λ) *pontban Takens-Bogdanov-bifurkáció történik.*

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= b_1 + b_2 x_1 + x_1^2 - x_1 x_2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

A 3.3. ábrán a Takens-Bogdanov-bifurkáció (3.2) normálformája esetén láthatjuk a bifurkációs pontot csillaggal jelölve, valamint a hozzá kapcsolódó nyereg-csomó (piros), Andronov-Hopf- (kék), és homoklinikus (zöld) bifurkációs görbéket. Takens-Bogdanov-bifurkációs ponthoz közeli

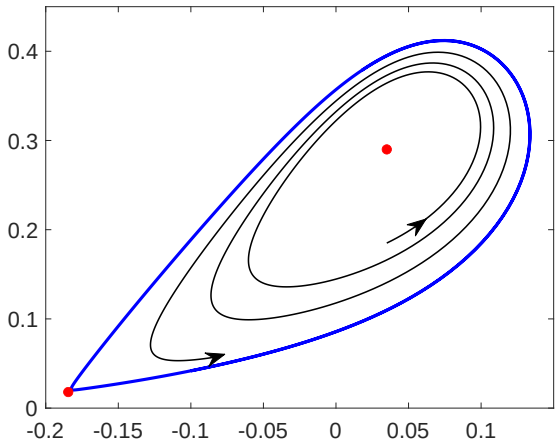


3.3. ábra. Takens-Bogdanov-bifurkációs pont és a hozzá csatlakozó bifurkációs görbék a (3.2) rendszerben: pirossal a nyereg-csomó, kékkel az Andrnov-Hopf-, zölddel a homoklinikus bifurkációs görbe.

paraméterértékek esetén a rendszernek van két olyan egyensúlyi pontja, melyek egybeolvadnak és eltűnnek nyereg-csomó bifurkáció következtében. Ennek megfelelően a 3.3. ábrán az A tartományból választott paraméterértékekre a (3.2) rendszernek két egyensúlyi pontja van, melyek közül az egyik nyereg, míg a másik nem. Átlépve a B tartományba a két egyensúlyi pont összeolvad és eltűnik, a rendszernek nincs egyensúlyi pontja. Azonban ismét átlépve a nyereg-csomó görbét, a C tartományban újra két egyensúlyi pontot találunk. Egyikük stabilitása megváltozik Andronov-Hopf-bifurkáció által, valamint periodikus pálya is születik, ahogy átlépünk a C tartományba. Ez a határciklus homoklinikus pályává alakul, majd eltűnik a homoklinikus bifurkációs görbén. Látható tehát, hogy Takens-Bogdanov-bifurkáció a nyereg-csomó és az Andronov-Hopf-bifurkációs görbék találkozási pontjában lehet, melyből egy homoklinikus bifurkációs görbe is kiindul.

3.4. Homoklinikus pálya bifurkációja

3.4.1. Definíció. *Legyen $\dot{x} = f(x)$, ahol $x \in \mathbb{R}^2$ és f sima függvény, valamint x_0 a rendszer egyensúlyi pontja. Ekkor a $p \in \mathbb{R}^2$ pontból induló $\phi(t,p)$ megoldást az x_0 egyensúlyi ponthoz tartozó homoklinikus pályának nevezzük, ha $\phi(t,p) \to x_0$, ha $t \to \pm\infty$.*

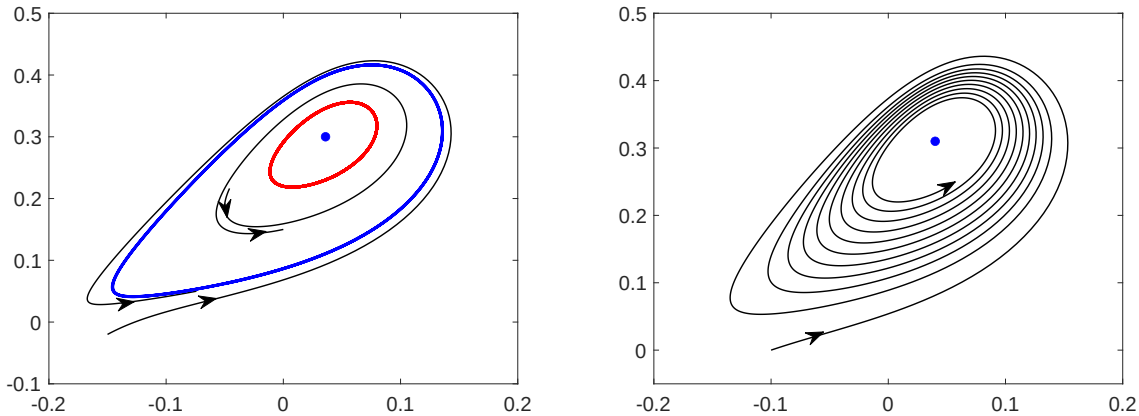


3.4. ábra. Homoklinikus pálya.

A homoklinikus pálya része az x_0 nyeregponthoz tartozó stabil és instabil sokaságnak egyaránt, azok egy-egy ága válik zárt görbévé. Homoklinikus bifurkáció történésekor egy periodikus pálya érintkezik egy nyeregponttal, így homoklinikussá válik, majd eltűnik. A 3.4. ábrán egy stabil határciklusból lett homoklinikus pályát láthatunk. Ahogy a 3.3. részben már láttuk, a Takens-Bogdanov-bifurkációs pontban egy periodikus pálya homoklinikussá válik, így innen minden esetben egy homoklinikus bifurkációs görbének kell kiindulnia.

3.5. Periodikus pályák fold bifurkációja

Láthattuk, hogy homoklinikus, valamint Andronov-Hopf-bifurkáció történésekor is születhetnek vagy eltűnhetnek határciklusok. A periodikus pályák egy másik lehetséges bifurkációja a fold bifurkáció. Ennek környezetében egy stabil és egy instabil határciklus található egymás körül, melyek a $\lambda_0 \in \mathbb{R}^2$ bifurkációs paraméterértéknél összeolvadnak és eltűnnek. A 3.5a. ábrán láthatjuk, hogy $\lambda < \lambda_0$ esetén a stabil egyensúlyi pont körül találunk egy instabil határciklust, melyet egy stabil periodikus pálya vesz körül. Közeledve λ_0-hoz a határciklusok egyre közelebb vannak egymáshoz, míg λ_0-nál összeolvadnak. Ennek megfelelően a 3.5b. ábrán $\lambda > \lambda_0$ paraméterértéknél már csak egy stabil egyensúlyi pontot találunk a fázisképen.



(a) $\lambda < \lambda_0$, stabil egyensúlyi pont, instabil és stabil határciklus.

(b) $\lambda > \lambda_0$, stabil egyensúlyi pont.

3.5. ábra. Periodikus pályák fold bifurkációja λ_0 paraméterértéknél. A stabil és instabil határciklusok összeolvadnak és eltűnnek.

4. fejezet

A Hopfield-modell azonos súlyokkal

A Hopfield-modell vizsgálatát a 2.3. részben már ismertetett feltevések mellett végezzük. További feltételek bevezetésével alacsonyabb dimenziós rendszerre vezetjük vissza a modellt, majd megvizsgáljuk az azonos súlyozással rendelkező hálózat esetét.

4.1. A modell visszavezetése alacsonyabb dimenziós rendszerre

Megmutatjuk, hogy azonos súlyú neuronok jelenlétekor a (2.4) rendszer aszimptotikus viselkedésének leírásához elegendő egy jóval egyszerűbb, a feltételeknek megfelelően választott egyenletrendszert vizsgálnunk.

4.1.1. Állítás. *Ha i és j indexekre teljesül, hogy $w_i = w_j > 0$, akkor $t \mapsto |x_i(t) - x_j(t)|$ szigorúan csökken, és $\lim_{t\to+\infty} |x_i(t) - x_j(t)| = 0$, azaz egyensúlyi pontban és periodikus megoldáson $x_i = x_j$.*

Bizonyítás. A kezdeti feltétel alapján két esetet különböztethetünk meg. Tekintsük először azt, amikor minden $w > 0$ súlyú neuron kezdeti feltétele azonos. Ekkor a hozzájuk tartozó megoldások is megegyeznek. Ha viszont a kezdeti feltételek különböznek, akkor belátjuk, hogy két megoldás különbsége 0-hoz tart $t \to +\infty$ esetén.

Tekintsük tehát a (2.4) rendszer két egyenletét

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -x_i + w_j f(x_j) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} w_k f(x_k), \\ \dot{x}_j &= -x_j + w_i f(x_i) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} w_k f(x_k). \end{aligned} \tag{4.1}$$

A (4.1) második egyenletét kivonva az elsőből kapjuk, hogy

$$\dot{x}_i - \dot{x}_j = -x_i + x_j - w_i f(x_i) + w_j f(x_j).$$

Legyen $u(t) = (x_i(t) - x_j(t))^2$, ekkor

$$\dot{u} = 2(x_i - x_j)(\dot{x}_i - \dot{x}_j) = -2(x_i - x_j)^2 + 2(x_i - x_j)(w_j f(x_j) - w_i f(x_i)). \tag{4.2}$$

A feltétel szerint $w := w_i = w_j > 0$, tehát

$$\dot{u} = -2u + 2w(x_i - x_j)(f(x_j) - f(x_i)). \tag{4.3}$$

Mivel az f függvény szigorúan monoton növekedő, ezért az $(x_i - x_j)(f(x_j) - f(x_i))$ szorzat negatív, ha $i \neq j$. Továbbá w pozitivitása miatt $\dot{u}(t) \leq -2u(t)$, így a Gronwall-lemma szerint $u(t) < e^{-2t}u(0)$, vagyis $t \to +\infty$ esetén $u(t) \to 0$. Ekkor $\lim\limits_{t\to\infty} |x_i(t) - x_j(t)| = 0$, tehát egyensúlyi pontban és periodikus pályán $x_i(t) = x_j(t)$ $\forall t$-re. □

4.2. A modell vizsgálata egyforma pozitív súlyok esetén

Vizsgáljuk először azt a speciális esetet, mikor a neuronok azonos pozitív súllyal kapcsolódnak egymáshoz, vagyis legyen $w_j = w > 0$ $\forall$ j-re. A W súlymátrix minden főátlóbeli eleme legyen továbbra is 0, tehát a neuronok önmagukhoz ne kapcsolódjanak direkt módon. Ekkor a 4.1. rész alapján a (2.4) modell helyett vizsgálhatunk egy egyszerűbb rendszert.

Ha létezik $w = w_i > 0$ $\forall$ i-re, akkor a 4.1.1. Állítás szerint két megoldás különbségének határértéke $t \to +\infty$ esetén 0, azaz a megoldások aszimptotikusan egyenlővé válnak. Ekkor az $x_i = x$ minden i-re teljesíti a (2.4) egyenletet, és az azonos súlyok miatt $\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)$ egyszerűbb alakban $nwf(x)$-ként írható fel.

4.2.1. Állítás. *Ha van olyan $w > 0$, melyre $w = w_i$ minden i esetén, akkor a* (2.4) *rendszer aszimptotikus viselkedését az*

$$\dot{x} = -x + (n-1)wf(x) \tag{4.4}$$

egyenlet meghatározza.

R. D. Beer hasonló hálózat vizsgálatát írta le a [10] cikkben. Az általa választott bifurkációs paraméterekkel ellentétben mi a w súly mellett az aktivációs függvény a paraméterét változtatjuk, az I külső hatást pedig 0-nak tekintjük. Ez egyrészt nehezebb, mert a nemlineárisan van benne az egyenletben, másrészt fontos, mert meghatározza, hogy az f függvény hol konvex.

4.2.1. Nyereg-csomó bifurkáció

Rögzítsük a neuronok számát (n), és az aktivációs függvény b paraméterét, majd a választott (w, a) paraméterpár függvényében vizsgáljuk meg, hogy a (4.4) differenciálegyenletnek hány egyensúlyi pontja lehet. Ahhoz, hogy egyensúlyi pontot kapjunk, tegyük a (4.4) egyenlet jobboldalát 0-val egyenlővé. Vegyük ehhez hozzá a kapott egyenlet x szerinti deriváltját is az egyensúlyi pontok számának megváltozásához, azaz a 3.1.2. Tételt alkalmazzuk

$$
\begin{aligned}
F(x,w) &= -x + (n-1)wf(x), \\
F'(x,w) &= 1 + (n-1)wf'(x)
\end{aligned}
$$

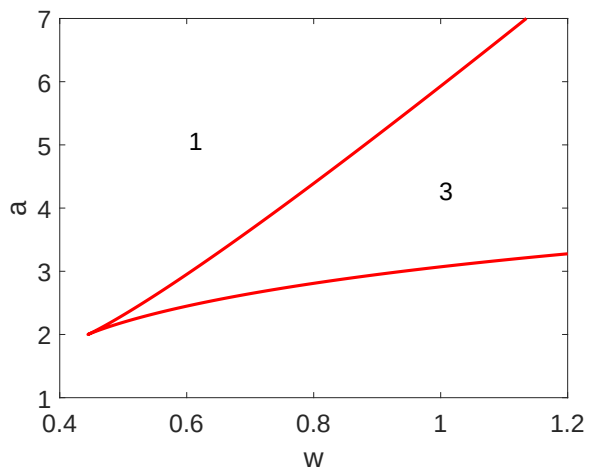
esetén, melyből

$$
\begin{aligned}
-x + (n-1)wf(x) &= 0, \\
-1 + (n-1)wf'(x) &= 0
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

adódik. Ekkor a (4.5) egyenletrendszerbe az általunk használt $f(x) = (1 + exp(a - bx))^{-1}$ aktivációs függvényt behelyettesítve, az első egyenletből w-t kifejezve, majd a másodikba beírva a következőt kapjuk:

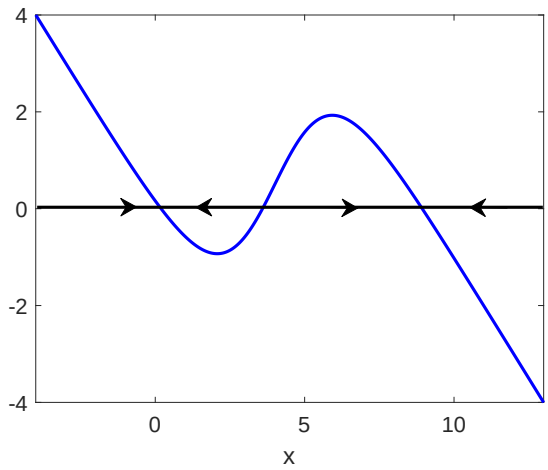
$$
\begin{aligned}
w &= \frac{x\left(1 + e^{a-xb}\right)}{n-1}, \\
a &= xb - \ln\left(xb - 1\right), \qquad \text{ahol} \qquad x > \frac{1}{b}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

A (w, a) paramétersíkon (4.6) alapján a 4.1. ábrán látható bifurkációs görbe rajzolható meg x-szel paraméterezve, mely két tartományra osztja fel a síkot. Az ábrán a számok az egyensúlyi pontok számát jelölik az egyes tartományokban. Ezek alapján a (4.4) egyenletnek egy vagy három egyensúlyi pontja lehet. Stabilitásuk eldöntéséhez tekintsük a (4.4) egyenlet jobboldalának deriváltját, és vizsgáljuk meg annak előjelét, mely egyensúlyi pont egy környezetében megadja a



4.1. ábra. A (4.4) egyenlethez tartozó nyereg-csomó bifurkációs görbe és az egyensúlyi pontok száma (4.6) alapján $b = 1$ és $n = 10$ esetén.

trajektóriák irányát, így a stabilitást is. Egyetlen egyensúlyi pont esetén a derivált negatív, így az globálisan stabil, míg három egyensúlyi pont közül a középsőre pozitív a derivált, az elsőre és harmadikra viszont negatív. Ez esetben tehát két stabil és egy instabil egyensúlyi pont van, melyeket a 4.2. ábrán láthatunk.



4.2. ábra. A (4.4) egyenlet jobboldala és az egyensúlyi pontok stabilitása $a = 4$, $b = 1$, $n = 10$ és $w = 1$ paraméterértékek esetén.

5. fejezet

A Hopfield-modell analitikus vizsgálata kétféle súllyal

A következőkben vizsgáljuk meg azt az esetet, mikor n darab neuronból megengedünk egyetlen, a többitől eltérő súlyút. Ez már negatív értéket is felvehet, vagyis a hálózatban megjelenhet egy gátló neuron. R. D. Beer a [10] cikkben hasonló esetben vizsgálta a modellt, azonban épp az általunk változtatott súlyok értékét rögzítette, melyek a neuronok egymáshoz való kapcsolódásának erősségét jelzik, valamint a rendszer leírását két neuronból álló hálózatra végezte. G. B. Ermentrout ugyanebben az esetben további viselkedéseit mutatta meg a rendszernek fázisképek és nullklínák segítségével, a súlyok által kifeszített paramétersíkon azonban a bifurkációs görbéket ő sem határozta meg.

5.1. Visszavezetés kétdimenziós rendszerre

Tegyük fel most, hogy $(n-1)$ darab neuron $w > 0$ súllyal kapcsolódik a többihez, és van egy eltérő, w_1 súlyú neuron, ahol w_1 negatív is lehet. A vizsgálat során tekintsük bifurkációs paraméternek a w és w_1 súlyokat, a többi paraméter értékét pedig rögzítsük. Ekkor a 4.1.1. Állítást felhasználva megmutatjuk, hogy a (2.4) modell dinamikájának leírásához elég egy kétdimenziós differenciálegyenlet-rendszert vizsgálnunk.

Ha létezik $w = w_i > 0$ $\forall i = 2, \ldots, n$, akkor a 4.1.1. Állítás szerint a megoldások aszimptotikusan egyenlőek lesznek, tehát a $w > 0$ súlyhoz tartozó oszlopok összevonhatóak W-ben. Az (x_1, x_2) szintén megoldása a (2.4) egyenletnek, ahol $x_2 = x_i$ $\forall$ $i = 2, ..., n$ és az x_1-hez tartozó w_1 súly pedig tetszőleges.

5.1.1. Állítás. *Ha van olyan $w > 0$, melyre $w = w_i$ bármely $i = 2, \ldots, n$ esetén, és w_1 tetszőleges, akkor a (2.4) rendszer aszimptotikus viselkedésének leírásához elég a következő rendszer*

megoldásait vizsgálnunk

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + (n-1)wf(x_2), \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + w_1 f(x_1) + (n-2)wf(x_2). \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.2. Nyereg-csomó bifurkáció

Határozzuk meg először, hogy w és w_1 értékeitől függően a modellnek hány egyensúlyi pontja lehet. Ehhez először is az (5.1) rendszer mindkét egyenletének jobboldalát tegyük 0-val egyenlővé, majd az első egyenletből fejezzük ki x_1-et

$$x_1 = (n-1)wf(x_2). \tag{5.2}$$

A második egyenletbe ezt beírva a rendszer egy egyenletre redukálható, mely a paraméterektől függően már megadja az (5.1) rendszer egyensúlyi pontjait

$$-x_2 + w_1 f\left((n-1)\,wf\left(x_2\right)\right) + (n-2)\,wf\left(x_2\right) = 0. \tag{5.3}$$

Az egyensúlyi pontok számának megváltozásához használjuk az egyváltozós esethez hasonlóan a 3.1.2. Tételt, vagyis deriváljuk x_2 szerint a kapott (5.3) egyenletet

$$-1 + w_1 f'\left((n-1)\,wf\left(x_2\right)\right)(n-1)\,wf'\left(x_2\right) + (n-2)\,wf'\left(x_2\right) = 0. \tag{5.4}$$

Az (5.3) egyenletből fejezzük ki w_1-et

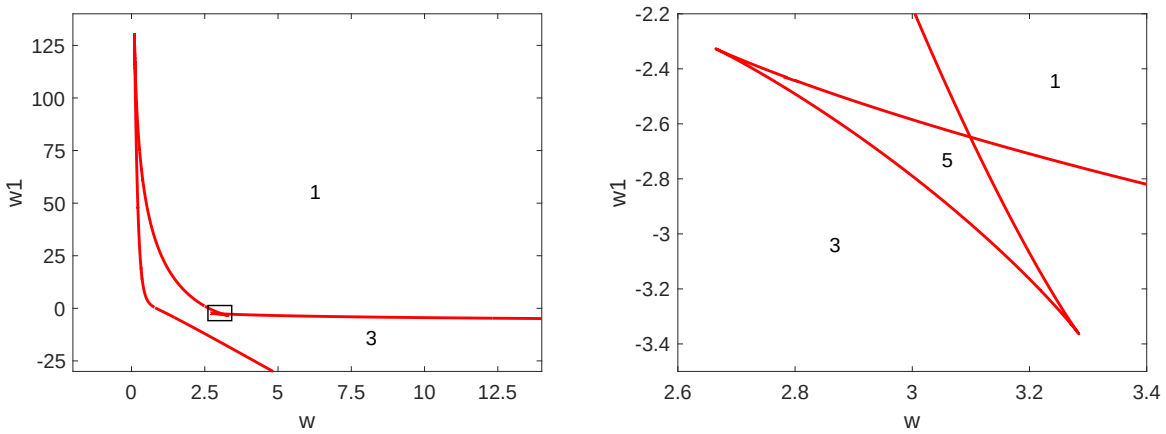
$$w_1 = \frac{x_2 - (n-2)\,wf\left(x_2\right)}{f\left((n-1)\,wf\left(x_2\right)\right)}, \tag{5.5}$$

majd a w_1-re kapott értéket helyettesítsük az (5.4) egyenletbe

$$-1 + \frac{x_2 - (n-2)\,wf\left(x_2\right)}{f\left((n-1)\,wf\left(x_2\right)\right)} f'\left((n-1)\,wf\left(x_2\right)\right)(n-1)\,wf'\left(x_2\right) + (n-2)\,wf'\left(x_2\right) = 0. \tag{5.6}$$

A korábbiakhoz hasonlóan az $f(x) = (1 + exp(a - bx))^{-1}$ aktivációs függvényt alkalmazzuk. Azon pontok halmazát a (w, w_1) síkon, melyek esetén az egyensúlyi pontok száma megváltozik, azaz a nyereg-csomó bifurkációs görbét, az (5.6) egyenlet w-re vett megoldása adja tetszőleges $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ és $n > 1$ paraméterekkel. Azonban w nem fejezhető ki explicit képlettel ebből az egyenletből, így a megoldásokat numerikusan, MATLAB-ban írt program segítségével közelítjük. Előfordulhat, hogy az egyenletnek több w megoldása is van egy rögzített x_2 esetén, vagy egyáltalán nincs gyöke, így először megkeressük azt az intervallumot, melyből x_2-t választva létezik legalább egy megoldás. Ezután x_2-vel bejárva a kapott intervallumot, minden egyes rögzített x_2 értékhez w értékeit mint az (5.6) egyenlet zérushelyeit keressük. Ehhez a w-re vett felosztásból

először kiválasztjuk azon osztópontokat, melyek között előjelváltás történik, majd ezeket véve az intervallumok végpontjainak, intervallumfelezést alkalmazva pontosítjuk w értékeit. A kapott w megoldásokhoz w_1 értéke az (5.5) képlet alapján számolható. Ekkor a kiválasztott intervallumon x_2 értékét változtatva, és a (w, w_1) síkon ábrázolva kapjuk a nyereg-csomó bifurkációs görbét, melyre példát $a = 4$, $b = 1$, és $n = 10$ rögzített paraméterértékek mellett láthatunk az 5.1. ábrán. Jelen esetben ez 3 részre osztja fel a paramétersíkot. Jobb oldalon a görbe úgynevezett fecskefarok részének kinagyítása található, az ábrákon a számok pedig az egyensúlyi pontok számát jelölik az egyes tartományokban. Mivel a paramétersíkon a bifurkációs görbét átlépve változhat csak meg az egyensúlyi pontok száma, így egy-egy tartománybeli értékpár esetén meghatározva azt, az egész tartományban igaz lesz. Ehhez MATLAB programot készítettem, ami tetszőleges (w, w_1) értékpár esetén intervallumfelezéssel határozza meg az egyensúlyi pontok számát és azok helyzetét is a fázisképen. Ezek alapján az (5.1) rendszernek 1, 3 vagy 5 egyensúlyi pontja lehet a fenti paraméterértékek mellett.



(a) Nyereg-csomó bifurkációs görbe. A téglalap a (b) ábrán kinagyított részt jelöli.

(b) Nyereg-csomó bifurkációs görbe fecskefarok része nagyítva.

5.1. ábra. Az (5.1) rendszerhez tartozó nyereg-csomó bifurkációs görbe és egyensúlyi pontok száma $a = 4$, $b = 1$ és $n = 10$ esetén.

5.3. Andronov-Hopf-bifurkáció

Az egyensúlyi pontok számának meghatározása után vizsgáljuk meg azok stabilitását is. Keressünk olyan (w, w_1) értékpárokat, melyekre valamely egyensúlyi pont stabilitása megváltozik, azaz vizsgáljuk meg, milyen paraméterek esetén történik Andronov-Hopf-bifurkáció. Korábban már láttuk, hogy az (5.1) rendszert egyensúlyi pontban egy egyenletre redukálhatjuk, ezt az (5.3)

egyenletben írtuk fel. Jelöljük most az (5.1) rendszer Jacobi-mátrixát J-vel

$$J = \begin{pmatrix} -1 & (n-1)wf'(x_2) \\ w_1 f'((n-1)wf(x_2)) & -1+(n-2)wf'(x_2) \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

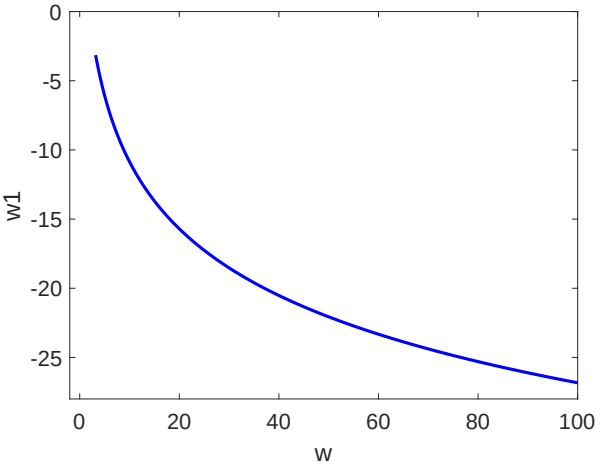
Az (5.3) egyenlethez vegyük még hozzá, hogy $\operatorname{tr} J = 0$, ami a bifurkáció megjelenésének szükséges feltétele a 3.2.3. Állítás alapján

$$-2 + (n-2)wf'(x_2) = 0. \tag{5.8}$$

Ekkor az (5.3) egyenletből w_1-et, majd (5.8)-ból w-t kifejezve, és felhasználva, hogy az aktivációs függvényre teljesül az $f' = bf(1-f)$ összefüggés kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{x_2 - (n-2)\,wf\,(x_2)}{f\,((n-1)\,wf\,(x_2))}, \\ w &= \frac{2}{(n-2)\,f\,(x_2)\,(1-f\,(x_2))\,b}\,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Ezzel explicit képletet kaptunk, mely a (w, w_1) síkon már x_2-vel paraméterezve megad egy görbét, azonban ahhoz, hogy valóban Andronov-Hopf-bifurkáció történjen, további feltételeknek is teljesülnie kell, így a keresett bifurkációs görbe az (5.9) által meghatározott görbének csak egy része lesz. A 3.2.3. Állítás alapján meg kell néznünk azt is, hogy mikor lesz a Jacobi-mátrix determinánsa pozitív, hogy a sajátértékei tisztán képzetesek legyenek. Ellenkező esetben előfordulhat, hogy a $\operatorname{tr} J = 0$ feltétel éppen egy nyeregpontra teljesül, ekkor viszont nem beszélhetünk stabilitásváltozásról. Ennek ellenőrzését numerikusan, MATLAB segítségével végeztem, miután az 5.2. ábrán látható Hopf-bifurkációs görbét kaptam $a = 4$, $b = 1$, és $n = 10$ rögzített paraméterértékek mellett.

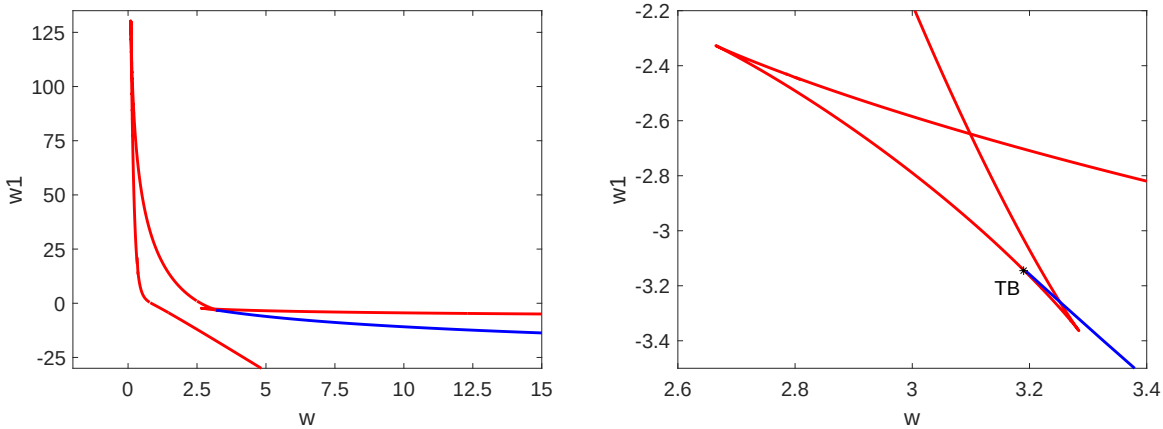


5.2. ábra. Andronov-Hopf-bifurkációs görbe az (5.1) rendszerben $a = 4$, $b = 1$ és $n = 10$ esetén.

Valamely egyensúlyi pont stabilitása tehát megváltozik, ha a paramétersíkon átlépjük ezt a görbét, valamint periodikus pálya is születhet. Mivel azonban ez a görbe önmagában nem osztja tartományokra a (w, w_1) síkot, így a nyereg-csomó bifurkációs görbével együtt létrehozott tartományokon vizsgáljuk majd az (5.1) rendszer fázisképeit.

5.4. Takens-Bogdanov-bifurkáció

Az 5.3. ábrán a nyereg-csomó, illetve az Andronov-Hopf-bifurkáció görbéit egyszerre ábrázolva $a = 4$, $b = 1$ és $n = 10$ esetén látható, hogy a két görbe egy pontban találkozik. Ekkor egyszerre teljesülnek a nyereg-csomó és az Andronov-Hopf-bifurkáció feltételei, a találkozási pont pedig a Takens-Bogdanov-bifurkációs pont, ahogy ezt a 3.3. részben már ismertettük. Ennek meghatározásához az Andronov-Hopf-bifurkációs görbe megtalálásához felírt (5.3) és (5.8) egyenletekhez vegyük hozzá, hogy az (5.1) differenciálegyenlet-rendszer Jacobi-mátrixának determinánsa legyen 0. Ez éppen a 3.3.1. Definíció feltételének felel meg, ezzel pedig x_2-re megkapjuk a Takens-Bogdanov-bifurkációs pontot.



(a) Pirossal a nyereg-csomó, kékkel az Andronov-Hopf-bifurkáció görbéi.

(b) A fecskefarok kinagyítása, csillaggal jelölve a Takens-Bogdanov-bifurkációs pont.

5.3. ábra. Nyereg-csomó és Andronov-Hopf-bifurkáció görbéi, valamint a Takens-Bogdanov-bifurkációs pont az (5.1) rendszerben $a = 4$, $b = 1$ és $n = 10$ esetén.

5.5. Periodikus pálya létezésének szükséges feltétele

Az előző részben láttuk, hogy bizonyos paraméterértékekre az (5.1) rendszerben Andronov-Hopf-bifurkáció történik, aminek következtében periodikus pálya születik. Ebben a részben azt vizsgáljuk, hogy mely paraméterértékek esetén jelenhet meg határciklus, azaz milyen szükséges feltétel mondható periodikus megoldás születésére Andronov-Hopf-bifurkáció által.

Az 5.2. ábrát alaposabban megnézve észrevehető, hogy w_1 végig negatív értéket vesz fel az Andronov-Hopf-bifurkáció görbéje mentén. Ez azt jelenti, hogy periodikus pálya megjelenéséhez szükséges, hogy a hálózatban legyen negatív súlyú, azaz gátló neuron is. Ezt a megfigyelést a következőkben általánosan is megfogalmazzuk, és igazoljuk.

5.5.1. Tétel. *Amennyiben a hálózat $n-1$ darab pozitív w súlyú, és egy tetszőleges w_1 súlyú neuronból áll, akkor a* (2.4) *differenciálegyenlet-rendszerben csak $w_1 < 0$ esetén jöhet létre periodikus pálya Andronov-Hopf-bifurkációval.*

Bizonyítás. A tételt először az (5.1) rendszerre igazoljuk, majd megmutatjuk, hogy a (2.4) modellre is általánosítható.

Az 5.3. részben már meghatároztuk az Andronov-Hopf-bifurkációs görbét a következőképpen. Megadtuk az (5.1) rendszer egyensúlyi pontjait az (5.3) egyenlettel, ehhez hozzávettük a $\operatorname{tr} J = 0$ feltételt az (5.8) egyenletben, és a tisztán képzetes sajátértékekhez numerikusan azt is ellenőriztük, hogy a Jacobi-mátrix determinánsa pozitív legyen. Írjuk most fel ez utóbbi feltételt expliciten is

$$\begin{vmatrix} -1 & (n-1)wf'(x_2) \\ w_1 f'((n-1)wf(x_2)) & -1+(n-2)wf'(x_2) \end{vmatrix} > 0.$$

A determinánst kifejtve kapjuk, hogy

$$(-1)(-1+(n-2)wf'(x_2)) - (n-1)wf'(x_2)w_1 f'((n-1)wf(x_2)) > 0.$$

Az általunk alkalmazott $f(x) = (1+exp(a-bx))^{-1}$ alakú aktivációs függvényre teljesül az $f' = bf(1-f)$ összefüggés, ezt felhasználjuk, és egyszerűsítünk

$$\begin{aligned} 1-(n-2)wbf(x_2)(1-f(x_2)) \quad & - \\ (n-1)ww_1b^2 f(x_2)(1-f(x_2))f((n-1)wf(x_2))(1-f((n-1)wf(x_2))) \quad & > \quad 0. \end{aligned}$$

Behelyettesítjük az $f(x)$ aktivációs függvényt, majd további egyszerűsítés után a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(n-2)\,wb\exp(a-x_2b)}{(1+\exp(a-x_2b))^2} - \frac{(n-1)\,ww_1b^2\exp(a-x_2b)}{(1+\exp(a-x_2b))^2} \quad & \cdot \\ \frac{\exp\left(a-b\,(n-1)\,w\,(1+\exp(a-x_2b))^{-1}\right)}{\left(1+\exp\left(a-b\,(n-1)\,w\,(1+\exp(a-x_2b))^{-1}\right)\right)^2} \quad & > \quad 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

A baloldal közös nevezője

$$(1+\exp(a-x_2b))^2\left(1+\exp\left(a-b\,(n-1)\,w\,(1+\exp(a-x_2b))^{-1}\right)\right)^2. \tag{5.11}$$

Erről elmondható, hogy mindig pozitív, így az (5.10) egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha a közös nevezőre hozás után a számláló pozitív, azaz

$$\begin{aligned}(1+\exp(a-x_2b))^2\left(1+\exp\left(a-b(n-1)w(1+\exp(a-x_2b))^{-1}\right)\right)^2 &- \\ (n-2)wb\exp(a-x_2b)\left(1+\exp\left(a-b(n-1)w(1+\exp(a-x_2b))^{-1}\right)\right)^2 &- \\ (n-1)ww_1b^2\exp(a-x_2b)\exp\left(a-b(n-1)w(1+\exp(a-x_2b))^{-1}\right) &> 0.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Ekkor (5.12) egyenlőtlenségbe behelyettesítve (5.9) alapján $w=\frac{2}{(n-2)f(x_2)(1-f(x_2))b}$-t, majd egyszerűsítve

$$\begin{aligned}-(1+\exp(a-x_2b))^2\left(1+\exp\left(a-\frac{2(n-1)}{(n-2)\left(1-(1+\exp(a-x_2b))^{-1}\right)}\right)\right)^2 &- \\ \frac{2w_1b(n-1)(1+\exp(a-x_2b))^2}{n-2}\cdot\exp\left(a-\frac{2(n-1)}{(n-2)\left(1-(1+\exp(a-x_2b))^{-1}\right)}\right) &> 0\end{aligned} \tag{5.13}$$

adódik. Ebből kiemelhető $-(1+\exp(a-x_2b))^2$, ami mindig negatív előjelű, így (5.13) azzal ekvivalens, hogy a maradék tag negatív, azaz

$$\begin{aligned}\left(1+\exp\left(a-\frac{2(n-1)}{(n-2)\left(1-(1\exp(a-x_2b))^{-1}\right)}\right)\right)^2 &+ \\ \frac{2(n-1)bw_1}{n-2}\exp\left(a-\frac{2(n-1)}{(n-2)\left(1-(1+\exp(a-x_2b))^{-1}\right)}\right) &< 0.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Átrendezés után w_1-re a következő felső korlátot kapjuk

$$w_1<-\frac{n-2}{2b(n-1)}\cdot\frac{\left(1+\exp\left(a-\frac{2(n-1)}{(n-2)\left(1-(1\exp(a-x_2b))^{-1}\right)}\right)\right)^2}{\exp\left(a-\frac{2(n-1)}{(n-2)\left(1-(1+\exp(a-x_2b))^{-1}\right)}\right)}. \tag{5.15}$$

Mivel az f függvény definíciója szerint $b>0$, és az exponenciális függvény szintén mindig pozitív, így (5.15) jobboldala bármely $n>2$, $a\in\mathbb{R}$ és $b>0$ paraméterértékek esetén negatív lesz. Így w_1 értéke is biztosan negatív, tehát beláttuk, hogy ahhoz, hogy az (5.1) rendszerben Andronov-Hopf-bifurkáció történhessen, szükséges a hálózatban egy gátló neuron jelenléte.

Ez azonban a (2.4) differenciálegyenlet-rendszerben is kizárja a periodikus megoldás létrejöttét Andronov-Hopf-bifurkációval $w_1>0$ esetén, hiszen ha lenne periodikus megoldása, akkor

az egyes koordináták különbsége abban is nullához tartana $t \to \infty$ esetén a 4.1.1. Állítás szerint, vagyis az (5.1) rendszernek is periodikus megoldása lenne. $\square$

Ezzel speciális súlyozás esetén szükséges feltételt adtunk legalább három neuronból álló hálózatban periodikus megoldás születésére Andronov-Hopf-bifurkáció által. Korábban G. B. Ermentrout két neuron esetén már bizonyította, hogy $w_1 > 0$ mellett nem létezhet periodikus megoldás [12].

6. fejezet

A modell numerikus vizsgálata kétféle súllyal

Az eddigiek során olyan változásokat határoztunk meg a fázisképen, melyek egy egyensúlyi pont környezetében történtek, ezeket lokális bifurkációknak nevezzük. Ebben a fejezetben áttérünk az analitikus eszközök segítségével már kevésbé meghatározható, globális bifurkációk detektálására is, amihez a MatCont numerikus bifurkációkereső programcsomagot használjuk. Először röviden áttekintjük az általa alkalmazott numerikus módszereket, majd a lokális és globális bifurkációk meghatározásának lépéseit mutatjuk meg.

6.1. MatCont

A MatCont programcsomag paraméteres dinamikai rendszerek vizsgálatára szolgáló numerikus eszköz. Grafikus felülettel is rendelkezik, de a különálló metódusokat MATLAB parancssorból is futtathatjuk. Számításai a prediktor-korrektor módszeren alapulnak, mely két fő lépésből áll. Először általában egy explicit módszerrel jósolja meg a keresett görbe egy, már ismert pontjából a következőt, majd egy magasabb konvergenciarendű implicit módszerrel javít rajta. A görbék megkereséséhez a feltételeket $F(x) = 0$ alakban fogalmazza meg. Predikció során a már ismert x_i pontból h lépésközzel a v_i érintővektor irányába lép egyet

$$X_0 = x_i + hv_i,$$

majd korrekcióként Newton-módszert alkalmaz x_{i+1} meghatározásához. Annak érdekében, hogy az egyenletek és az ismeretlenek száma megegyezzen, szükséges egy $g(x) = 0$ feltételt is hozzávenni a megoldandó feladathoz

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \\ g(x) &= 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

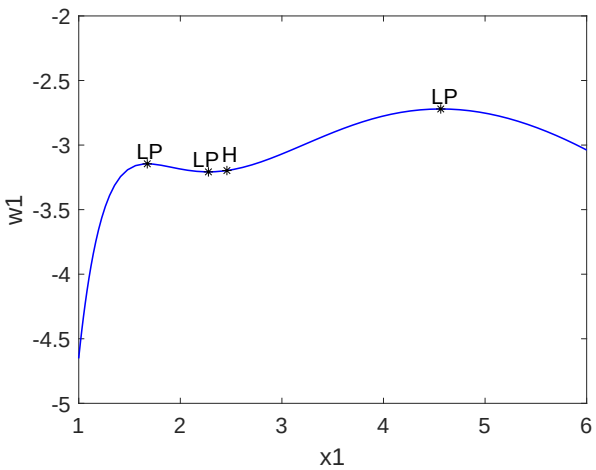
A g függvény megválasztásának egyik lehetősége a pszeudo-ívhossz módszer, mely egy X_0-on átmenő, v_i-re merőleges hipersíkot ad meg

$$g(x) = \langle x - X_0, v_i \rangle \,. \tag{6.2}$$

Az így kapott (6.1) rendszerre belátható, hogy megfelelő lépésköz mellett a Newton-módszer X_0-ból indulva a keresett görbe egy pontjához konvergál [26, 27].

6.2. Lokális bifurkációk meghatározása

Első lépésként a vizsgált (5.1) rendszerben egyensúlyi pontot kell találnunk, hiszen a fázisképen ennek környezetében történhet változás. Ehhez a MatCont felületéről is elérhetőek a MATLAB közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldói is, de külön elvégzett számítás esetén az egyensúlyi pont koordinátáit is megadhatjuk. Ekkor egy paramétert kiválasztva, annak változása mellett követhető az egyensúlyi pont helyzete. Eközben lehetőség van megadni, hogy mely bifurkációk feltételét ellenőrizze a program minden lépésben, így meghatározhatóak azok a paraméterértékek, melyeknél az egyensúlyi pont bifurkáción megy keresztül. Az (5.1) rendszer esetén $a = 4$, $b = 1$, $n = 10$ és $w = 3,22$ mellett, w_1 súlyt változtatva a 6.1. ábrán láthatjuk az egyensúlyi pont követését, valamint a nyereg-csomó (LP) és Andronov-Hopf-bifurkáció (H) pontjait.



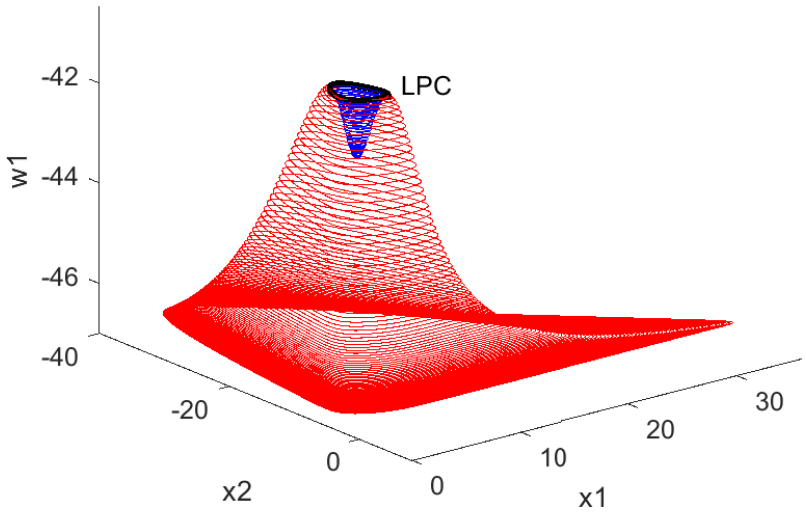
6.1. ábra. Egyensúlyi pont követése $a = 4$, $b = 1$, $n = 10$ és $w = 3,22$ esetén. LP jelöli a nyereg-csomó, H az Andronov-Hopf-bifrukációt.

A már ismert bifurkációs pontokból kiindulva két változó paraméter mellett követhetjük a bifurkációs görbéket is. Ennek során lehetőség van úgynevezett két kodimenziós bifurkációk megkeresésére is, ilyen például a Takens-Bogdanov-bifurkáció. Az (5.1) rendszer esetén bármely ismert bifurkációs pontból indítva a numerikus számolást éppen az analitikus eszközökkel

meghatározott bifurkációs görbéket kapjuk, melyek az 5.3. ábrán láthatók. A numerikus számolásból kapott Andronov-Hopf-bifurkációs görbe esetén figyelnünk kell arra, hogy annak minden ága valódi bifurkációs görbe legyen, ugyanis míg egyensúlyi pont követése közben a MatCont elkülöníti az úgynevezett neutral-saddle esetet, mikor a $\operatorname{tr} J = 0$ feltétel épp egy nyeregpont esetén teljesül, addig a bifurkációs görbe követésekor már nem tesz köztük különbséget.

6.3. Globális bifurkációk meghatározása

A lokális bifurkációkkal ellentétben most a változás nem egy egyensúlyi pontban, hanem egy globális alakzaton, például periodikus pályán vagy homoklinikus pályán történik. A MATLAB beépített *ode* megoldói szintén használhatók periodikus pálya megkeresésére, melyet kiindulásnak választva egy változó paraméter mentén követhetünk is. Amennyiben valamely egyensúlyi pontot követve találtunk Andronov-Hopf-bifurkációs pontot, akkor ez is megadható kezdőpontnak, majd követhetjük a bifurkáció által született határciklust. Ennek során detektálható, ha a periodikus pálya összeolvad egy másikkal, ekkor a MatCont automatikusan áttér a másik határciklus követésére, így annak keletkezéséről is kaphatunk információt [28].



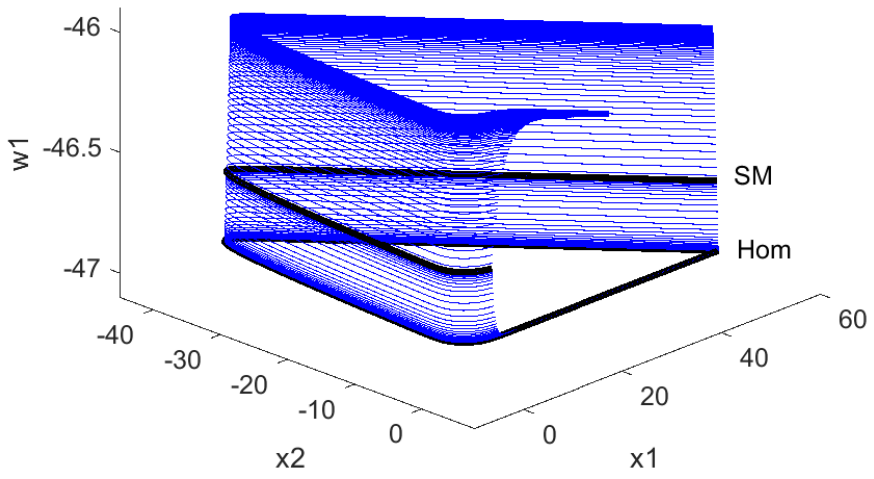
6.2. ábra. Az Andronov-Hopf-bifurkáción születő stabil határciklus (kék), és a homoklinikus bifurkáció által keletkező instabil periodikus pálya (piros) követése. *LPC*-vel jelölve a két periodikus pálya összeolvadása.

A 6.2. ábrán az (5.1) rendszerben $a = 4$, $b = 1$, $n = 10$ és $w = 900$ mellett, w_1 súlyt változtatva az Andronov-Hopf bifurkációs pontból indulva követtük a születő stabil határciklust, ez látható kékkel. *LPC* felirat és vastag fekete görbe jelzi a periodikus pályák fold bifurkációját.

Pirossal az instabil határciklus követését láthatjuk, melynek születését nem jelzi a MatCont, azonban a pálya csúcsos alakjából arra következtethetünk, hogy homoklinikus pálya bifurkációja során jön létre. Ezt a következő lépésben ellenőrizni is tudjuk.

Ha egy periodikus pálya követése során találtunk fold bifurkációt, akkor ebből indulva követhető a bifurkációs görbe a kétdimenziós paramétersíkon. Homoklinikus pálya bifurkációja esetén ez a módszer nem működik, helyette az egyik lehetőség, hogy a nyeregpontot határozzuk meg, és a hozzá tartozó stabil vagy instabil sokaságot közelítjük, majd ezt követjük egy változó paraméter esetén, míg megtaláljuk a homoklinikus pályát. Az ehhez tartozó paraméterértékekből kiindulva pedig meghatározható a bifurkációs görbe is. Egy másik lehetőség MatCont-ban a homoklinikus bifurkáció görbéjének megrajzolására, hogy egy Takens-Bogdanov-bifurkációs ponttal inicializáljuk a keresőt. A 3.3. rész alapján tudjuk, hogy innen minden esetben egy homoklinikus bifurkációs görbének kell kiindulnia [29, 30].

A homoklinikus pálya meghatározását a 6.3. ábrán $a = 4$, $b = 1$, $n = 10$ és $w = 900$ mellett végeztük az (5.1) rendszerben. Egy nyeregből induló pályát rajzoltunk meg $w_1 = -46$ esetén, majd ezt követtük w_1 változtatásával a stabil sokaság meghatározásához, melyet az SM felirat jelez. Ezt tovább követve pedig megkaptuk a homoklinikus pályát, melyet Hom felirattal jelöltünk. Ezzel igazolódott a sejtésünk, miszerint a 6.2. ábrán az instabil periodikus pálya homoklinikus bifurkáció által jön létre.



6.3. ábra. A homoklinikus pálya meghatározása (Hom) a stabil sokaság (SM) segítségével $a = 4$, $b = 1$, $n = 10$ és $w = 900$ esetén az (5.1) rendszerben.

7. fejezet

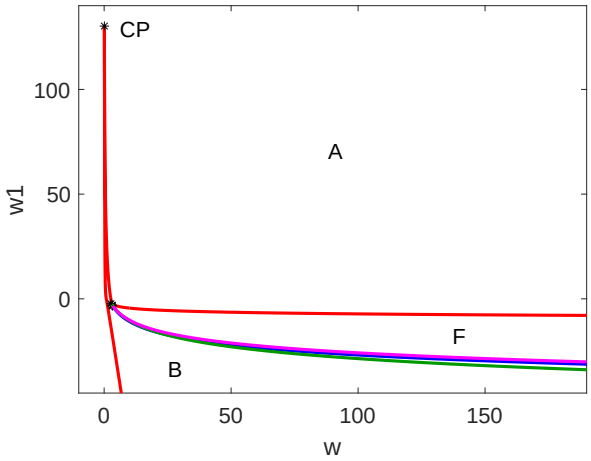
A Hopfield-modell dinamikája kétféle súllyal

Tekintsünk továbbra is egy n neuronból álló hálózatot, melyben $(n-1)$ neuron súlya $w > 0$, és van egy tetszőleges w_1 súlyú neuron is. Az 5. és 6. fejezetekben ismertettük a lokális és globális bifurkációk meghatározási módszereit, valamint analitikus és numerikus eszközök segítségével megadtuk az (5.1) modellben megjelenő bifurkációkat. A (w, w_1) paramétersíkot a bifurkációs görbék számos tartományra osztják fel, melyekben a modell dinamikája jelentősen eltér egymástól. Ebben a fejezetben a rendszer lehetséges viselkedéseit írjuk le az aktivációs függvény a paraméterét kétféleképpen megválasztva.

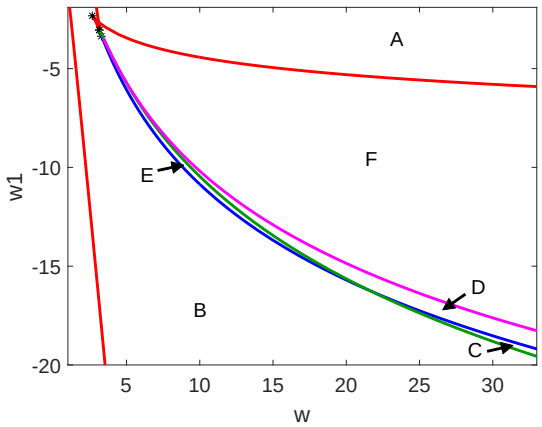
7.1. A Hopfield-modell $a = 4$ esetén

A nyereg-csomó, valamint az Andronov-Hopf-bifurkációs görbéket $a = 4$ esetén az 5.3. ábrán már láthattuk. Ezekhez most hozzávesszük a 6. fejezetben leírtak szerint meghatározott homoklinikus bifurkációs görbét, valamint a periodikus pályák fold bifurkációját is, így a 7.1. ábrát kapjuk, melynek egy-egy nagyított részét láthatjuk a 7.2. ábrán. TB-vel jelölve a Takens-Bogdanov-bifurkációs pont, CP-vel a nyereg-csomó bifurkációs görbe csúcspontjai láthatók. A (w, w_1) paramétersíkot 9 tartományra osztják fel a bifurkációs görbék, melyeket $A-I$ betűkkel jelölünk.

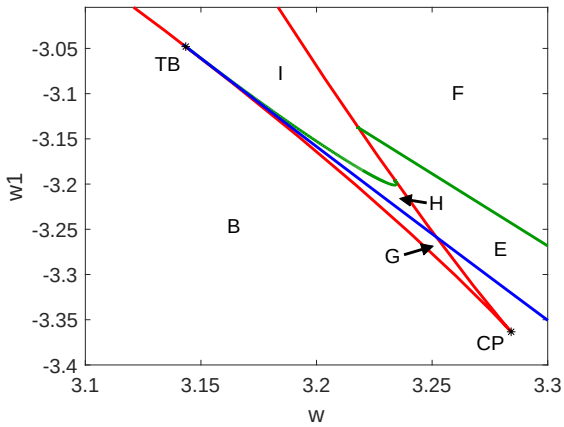
Az (5.1) rendszernek az A tartományban egyetlen egyensúlyi pontja van, mely globálisan stabil. A B tartományba átlépve a nyereg-csomó bifurkáció következtében már 3 egyensúlyi pontot találunk, melyek közül az első és harmadik stabil, a második pedig nyeregpont. A C tartományba áttérve a homoklinikus pálya bifurkációjakor az első egyensúlyi pont körül instabil periodikus pálya születik. A 3.2.1. Definíció szerint a C és D tartományok határán szuperkritikus Andronov-Hopf-bifurkáció történik, melynek következtében az első egyensúlyi pont stabilitása megváltozik, illetve stabil határciklus is születik. Ennek megfelelően a D tartományban az első egyensúlyi pont instabil, körülötte pedig stabil határciklus található, melyet körülvesz az instabil periodikus pálya. A homoklinikus, valamint az Andronov-Hopf-bifurkációs görbe keresztezi



7.1. ábra. Bifurkációs görbék az (5.1) rendszerben: pirossal a nyereg-csomó, kékkel az Andronov-Hopf-, zölddel a homoklinikus, magentával a periodikus pályák fold bifurkációja. CP jelöli a nyereg-csomó görbe csúcsait.



(a) A homoklinikus és az Andronov-Hopf-bifurkációs görbék keresztezik egymást.

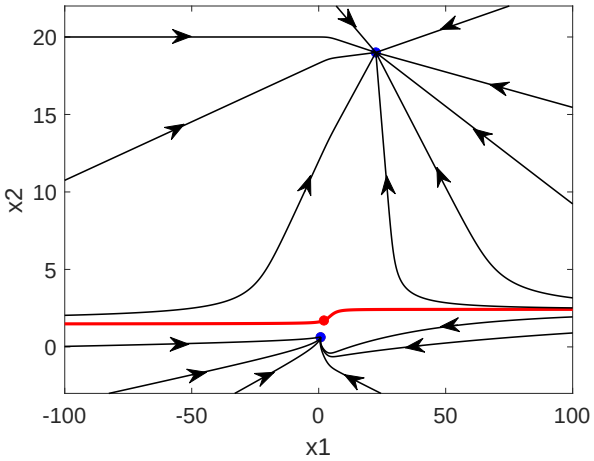


(b) A fecskefarok egy részének nagyítása.

7.2. ábra. Bifurkációs görbék és az általuk létrehozott tartományok nagyítva. TB jelöli a Takens-Bogdanov-bifurkációt, CP a nyereg-csomó görbe csúcsait.

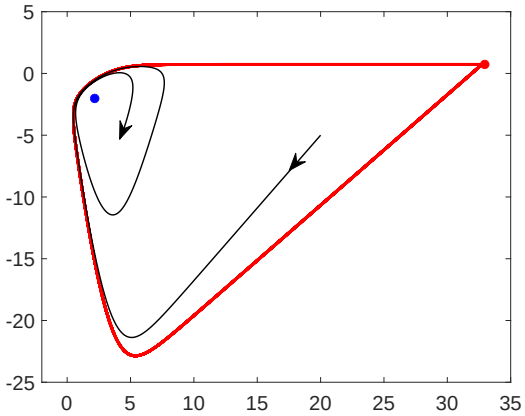
egymást, így az E tartományban az első, instabil egyensúlyi pont körül csak a stabil határciklus figyelhető meg. A D tartományban egyszerre létező stabil és instabil határciklusok a periodikus pályák fold bifurkációjakor összeolvadnak és eltűnnek. Ennek következtében az F tartományban csak a 3 egyensúlyi pontot találjuk, melyek közül az első továbbra is instabil, a második nyereg, a harmadik pedig stabil. A nyereg-csomó bifurkációs görbének $a = 4$ esetén van egy úgynevezett fecskefarok része, melyben a rendszernek 5 egyensúlyi pontja van. Ezek közül az első és ötödik minden esetben stabil, a második és negyedik pedig nyereg. A G tartományban a harmadik egyensúlyi pont stabil, majd az Andronov-Hopf-bifurkáció görbéjét átlépve a H tar-

tományban már instabil, valamint körülötte stabil határciklus is található. A 3.3. rész alapján tudjuk, hogy a Takens-Bogdanov-bifurkációs pontból egy homoklinikus bifurkációs görbének kell kiindulnia. Ennek következtében tűnik el a stabil határciklus, így az I tartományban már csak az 5 egyensúlyi pontot találjuk, melyek közül a harmadik továbbra is instabil.

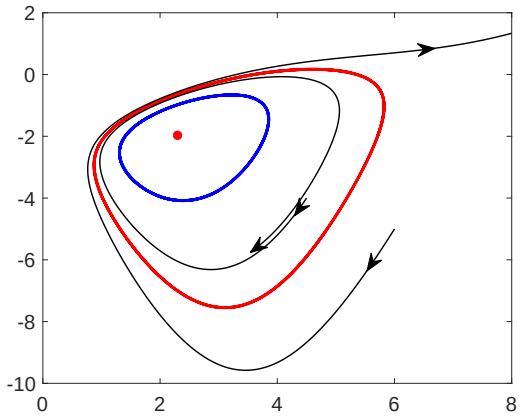


7.3. ábra. A B tartományhoz tartozó fáziskép a stabil sokasággal $a = 4$, $b = 1$ és $n = 10$ esetén.

Nézzünk most meg néhány érdekesebb esetet az (5.1) modell lehetséges fázisképei közül. A 7.3. ábrán a B tartományból választott paraméterértékekhez tartozóan a három egyensúlyi pontot, valamint a nyeregbe befutó pályákat láthatjuk, mely a stabil sokaság. Ez utóbbi adja a két stabil egyensúlyi pont vonzási tartományának határát. Ahogy látjuk, a határ alatti kezdeti értékekre a megoldás az alsó egyensúlyi pontba jut, míg a határtól feljebb induló megoldások a



(a) Homoklinikus pálya a nyeregponttal, belül stabil egyensúlyi pont $w_1 = -28,55$ esetén a B és C tartományok határán.



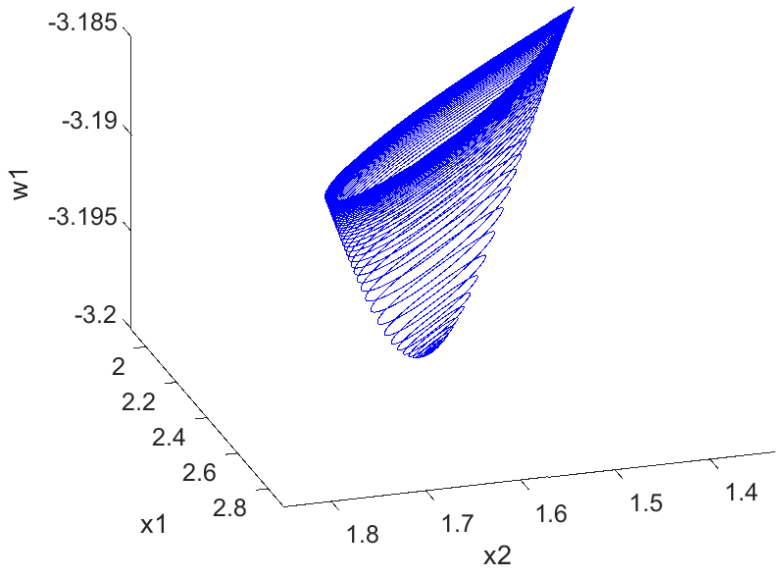
(b) Instabil egyensúlyi pont, körülötte stabil és instabil határciklus $w_1 = -26$ mellett a D tartományból.

7.4. ábra. Az (5.1) modellhez tartozó fázisképek $a = 4$, $b = 1$, $n = 10$ és $w = 100$ esetén.

felsőbe. Autoasszociatív memóriaként alkalmazva ez a határ megmutatja, hogy mennyire lehet zajos vagy hiányos az input ahhoz, hogy visszakapjuk az egyensúlyi állapotot. Látható, hogy az alsó egyensúlyi helyzet nagyon érzékeny a felfelé való elmozdulásra, könnyen hibás választ kapunk ekkor.

A 7.4a. ábrán a B és C tartomány határán található homoklinikus pályát láthatjuk, melyből az instabil periodikus pálya születik. Ez utóbbit a D tartományhoz tartozó 7.4b. ábrán az Andronov-Hopf-bifurkációval létrejövő stabil határciklussal, valamint az instabil egyensúlyi ponttal együtt figyelhetjük meg. Jelen esetben a stabil határciklus vonzási tartományának határát az instabil periodikus pálya jelenti, a kívülről indított megoldások a harmadik egyensúlyi pontba futnak.

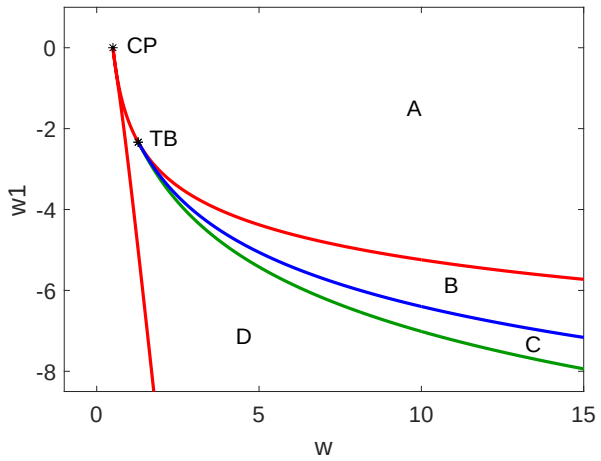
Ahogy már említettük, a fecskefarok belsejében a H tartományban találunk az (5.1) rendszernek periodikus megoldását. Ennek követését láthatjuk a 7.5. ábrán w_1 változása mentén az Andronov-Hopf-bifurkációból indulva. A 7.2b. ábrának megfelelően a határciklus csúcsos alakú lesz, homoklinikussá válik, és eltűnik.



7.5. ábra. Az Andronov-Hopf-bifurkáción születő stabil határciklus követése w_1 változó paraméterrel $w = 3,22$ esetén a H tartományban.

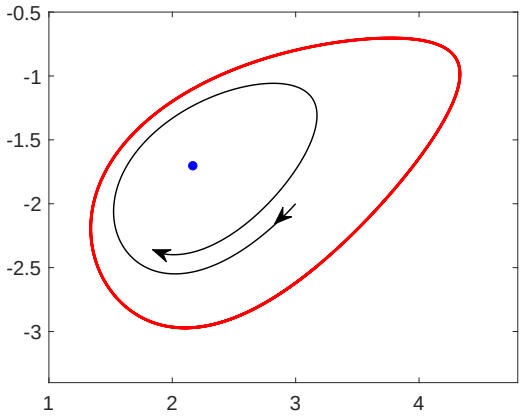
7.2. A Hopfield-modell $a = 2$ esetén

R. D. Beer két neuron esetén a [10] cikkében megmutatta, hogy a modell viselkedése függ az aktivációs függvény a paraméterétől. Ez az általunk vizsgált speciális súlyozású n neuronos hálózatban is elmondható. Megfigyelhető, hogy a értékét növelve a nyereg-csomó bifurkációs görbe

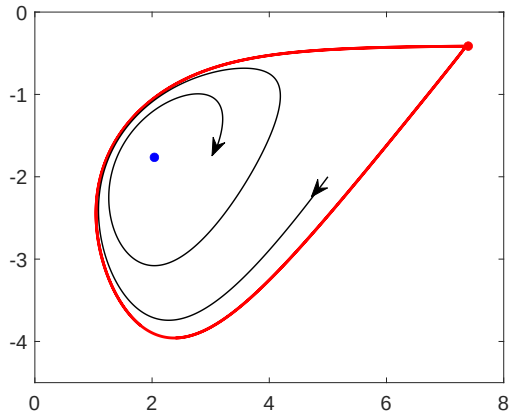


7.6. ábra. Az (5.1) modellhez tartozó bifurkációs görbék $a = 2$, $b = 1$ és $n = 10$ esetén. Pirossal a nyereg-csomó, zölddel a homoklinikus, kékkel az Andronov-Hopf-bifurkációs görbe. TB jelöli a Takens-Bogdanov-bifurkációt, CP a nyereg-csomó görbe csúcsát.

fecskefarok részének mérete nő, míg a-t csökkentve egyre kisebb lesz, majd eltűnik. Ahogy a 7.6. ábrán is látható, $a = 2$ esetén már nincs fecskefarok, ennek megfelelően az (5.1) rendszernek csak 1 vagy 3 egyensúlyi pontja lehet. Az $a = 4$ esethez hasonlóan az 5.3. rész alapján meghatároztuk az Andronov-Hopf-bifurkációs görbét is, valamint numerikus eszközökkel a homoklinikus pálya bifurkációját, melyek közös kiindulópontja a Takens-Bogdanov-bifurkációs pont. A (w, w_1) paramétersíkon így 4 tartományt kapunk, melyeket $A - D$ betűkkel jelölünk, ezek szintén a 7.6. ábrán láthatók.



(a) Stabil egyensúlyi pont és instabil határciklus a C tartományban $w_1 = -6,7$ mellett.



(b) Homoklinikus pálya a nyeregponttal és stabil egyensúyli helyzettel $w_1 = -7,013$ esetén.

7.7. ábra. Az (5.1) modellhez tartozó fázisképek $a = 2$, $b = 1$, $n = 10$ és $w = 10$ esetén.

Az A tartományban az (5.1) rendszernek egy egyensúlyi pontja van, mely globálisan stabil. A B tartományba átlépve a nyereg-csomó bifurkáció következtében már 3 egyensúlyi pontot találunk, melyek közül az első instabil, a második nyereg, a harmadik pedig stabil. Áttérve a C tartományba az Andronov-Hopf-bifurkáció hatására az első egyensúlyi pont stabillá válik, körülötte pedig instabil határciklus jelenik meg. A 3.2.2. Definíció alapján tehát jelen esetben szubkritikus Andronov-Hopf-bifurkáció történik. Az instabil határciklus a C és D tartományok határához érve homoklinikussá válik, és eltűnik, így a D tartományban már csak az (5.1) rendszer 3 egyensúlyi pontja látható a fázisképen, melyek közül az első és harmadik stabil, a második továbbra is nyereg.

A fázisképek közül az Andronov-Hopf-bifurkáción született instabil határciklust, valamint az ebből létrejövő homoklinikus pályát mutatjuk meg. A 7.7a. ábrán az (5.1) rendszer első egyensúlyi pontja látható, mely stabil, körülötte pedig az instabil periodikus pálya $w = 10$, $w_1 = -6,7$ súlyok esetén. A homoklinikus pályát a nyeregponttal a 7.7b. ábrán láthatjuk $w = 10$ és $w_1 = -7,013$ mellett.

Összefoglalás

A dolgozatban a neurális hálózatok Hopfield-féle modelljével foglalkoztunk. Áttekintettük a biológiai neuronhálózatok felépítését és működését, valamint az általuk inspirált mesterséges neurális hálók általános jellemzőit és alkalmazási területeit. Ismertettük a modell vizsgálatához szükséges bifurkációelméleti eszközöket, valamint az irodalomból eddig ismert eredményeket.

A Hopfield-modell vizsgálatát n neuronból álló hálózatban, speciális súlyozás mellett végeztük. Feltettük, hogy egy adott neuron a többihez azonos súllyal, önmagához pedig 0 súllyal kapcsolódik. A neuronokat érő külső hatást 0-nak vettük, aktivációs függvénynek pedig az $f(x) = (1 + exp(a - bx))^{-1}$ függvényt választottuk. Megmutattuk, hogy ha két neuron súlya megegyezik, akkor a hozzájuk tartozó megoldások különbsége 0-hoz tart, így a (2.4) modell aszimptotikus viselkedésének leírásához elég egy alacsonyabb dimenziós rendszert vizsgálni. Ezt felhasználva a [10] irodalomból ismert egyneuronos esetet n darab azonos pozitív súlyú neuronból álló hálózatra általánosítottuk, melyben expliciten meghatároztuk a nyereg-csomó bifurkáció görbéjét. Bifurkációs paraméternek a w súly mellé az aktivációs függvény a paraméterét választottuk az R. D. Beer munkájából ismert I külső hatás helyett. Az így kapott tartományokon meghatároztuk az egyensúlyi pontok számát és stabilitását.

A 4.1.1. Állítást felhasználva a [10, 12, 13] cikkekben is vizsgált kétneuronos hálózatot szintén általánosítottuk n neuron esetére úgy, hogy az azonos pozitív w súlyok mellett megengedtünk egy tetszőleges w_1 súlyt is. Ekkor meghatároztuk a nyereg-csomó és az Andronov-Hopf-bifurkáció görbéit, valamint az általuk létrehozott tartományokon az egyensúlyi pontok számát és stabilitását a (w, w_1) paraméterpártól függően. Az említett irodalomban a modell viselkedésére számos különböző példát látunk, azonban bifurkációs görbét csak az a és I paraméterek, valamint a neuronok önmagukhoz való kapcsolódásának függvényében találunk. Fázisképen példát mutattunk periodikus megoldás megjelenésére, majd szükséges feltételt mondtunk ki és bizonyítottunk határciklus születésére Andronov-Hopf-bifurkáció által.

A modell analitikus vizsgálatát a globális bifurkációk megtalálása érdekében numerikus eszközökkel egészítettük ki, melyhez a MatCont numerikus bifurkációkereső programcsomagot használtuk. Áttekintettük néhány lokális és globális bifurkáció numerikus meghatározásának lépéseit, majd meghatároztuk a homoklinikus pálya, valamint a periodikus pályák fold bifurkációjának görbéit. Az aktivációs függvény a paraméterét kétféleképpen megválasztva ábrázoltuk a kapott bifurkációs görbéket és ismertettük a speciális súlyozású Hopfield-modell viselkedését

az egyes tartományokhoz tartozóan. Fázisképet mutattunk azon esetekre, melyekre a modell komplexebb viselkedést mutat.

További céljaink között szerepel a Hopfield-modell dinamikájának megértése több különböző súlyú neuronok esetén. Egy vagy kétféle súly jelenlétekor a modell visszavezethető volt egy-, illetve kétdimenziós rendszerre, így a fáziskép klasszikus vizsgálati módszerei alkalmazhatók voltak. Autoasszociatív memóriaként való alkalmazás szempontjából ennél érdekesebb probléma egy összetettebb súlymátrixszal rendelkező hálózat dinamikájának megértése. Fontos szerepük van a negatív súlyú, azaz gátló neuronoknak, melyek jelentősen megváltoztatják a modell viselkedését. Ekkor a Hopfield-modell vizsgálatát magasabb dimenziós fázistérben kell elvégezni.

Hivatkozások

[1] Snell, Richard S. (2010). *Clinical Neuroanatomy.* Lippincott Williams & Wilkins.

[2] Réthelyi Miklós, Szentágothai János. (2006). *Funkcionális anatómia I-III.* Medicina Könyvkiadó Zrt.

[3] Dr. Lénárd Gábor. (2011). *Biológia 11.* Nemzeti Tankönyvkiadó.

[4] McCulloch, W. S., & Pitts, W. (1943). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *The bulletin of mathematical biophysics, 5*(4), 115-133.

[5] Fazekas, István. (2003). *Neurális hálózatok.* Debreceni Egyetem, Informatikai Kar.

[6] Altrichter, Márta, et al. (2006). *Neurális hálózatok.* Panem Könyvkiadó Kft., Budapest.

[7] `https://cs.stanford.edu/people/eroberts/courses/soco/projects/neural-networks/Applications/index.html`

[8] Hopfield, J. J. (1982). Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the National Academy of Sciences 79*(8), 2554-2558.

[9] Hopfield, J. J. (1984). Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. *Proceedings of the National Academy of Sciences 81*(10), 3088-3092.

[10] Beer, R. D. (1995). On the Dynamics of Small Continuous-Time Recurrent Neural Networks. *Adaptive Behavior, 3*(4), 469–509.

[11] Beer, R. D. (2006). Parameter Space Structure of Continuous-Time Recurrent Neural Networks. *Neural Computation 18*(12), 3009-3051.

[12] Ermentrout, G. B. (1998). Phase-Plane Analysis of Neural Activity. *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks* (pp.732-738).

[13] Ermentrout, G. B. (1998). Neural Networks as spatio-temporal pattern-forming systems. *Rep. Prog. Phys. 61*(4), 353.

[14] Ermentrout, G. B. (2003) Phase-Plane Analysis of Neural Nets *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks, second edition.* 881-885.

[15] Fasoli D., Cattani A., & Panzeri S. (2016). The Complexity of Dynamics in Small Neural Circuits. *PLoS Computational Biology,12*(8).

[16] Fasoli, D., Cattani, A., & Panzeri, S. (2017). Bifurcation Analysis of a Sparse Neural Network with Cubic Topology. *Mathematical and Theoretical Neuroscience* (pp. 87-98.) Springer, Cham.

[17] Zhang, J., & Jin, X. (2000). Global stability analysis in delayed Hopfield neural network models. *Neural Networks 13*(7), 745-753.

[18] Guo, S., & Huang, L. (2003). Stability analysis of a delayed Hopfield neural network. *Physical Review E, 67*(6), 061902.

[19] Zhou, Q., & Wan, L. (2008). Exponential stability of stochastic delayed Hopfield neural networks. *Applied Mathematics and Computation, 199*(1), 84-89.

[20] Luo, Q. I., Deng, F., Bao, J., Zhao, B., & Fu, Y. (2004). Stabilization of stochastic Hopfield neural network with distributed parameters. *Science in China Series F: Information Sciences, 47*(6), 752.

[21] Gui, R., & Yang, Z. (2006). Application of Hopfield neural network for extracting Doppler spectrum from ocean echo. *Radio science, 41*(04), 1-6.

[22] Jolai, F., & Ghanbari, A. (2010). Integrating data transformation techniques with Hopfield neural networks for solving travelling salesman problem. *Expert Systems with Applications, 37*(7), 5331-5335.

[23] Kuznetsov, Y. A. (2013). *Elements of applied bifurcation theory* (Vol. 112). Springer Science & Business Media.

[24] Perko, L. (2013). *Differential equations and dynamical systems* (Vol. 7). Springer Science & Business Media.

[25] Simon, L. P. (2012). *Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek.* Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar.

[26] Govaerts, W., Kuznetsov, Y. A., Meijer, H. G. E., Al-Hdaibat, B., De Witte, V., Dhooge, A., ... & Sautois, B. (2018). MATCONT: Continuation toolbox for ODEs in Matlab.

[27] Neirynck, N. (2019). *Advances in numerical bifurcation software: MatCont* (Doctoral dissertation, Ghent University).

[28] Kuznetsov, Y. A. & Neirynck, N. (2019). Tutorial III: One-parameter bifurcation analysis of limit cycles with MATCONT.

[29] Neirynck, N. (2019). Tutorial V: Using homotopy to initialize in MATCONT the continuation of orbits homoclinic to hyperbolic equilibria.

[30] Al-Hdaibat, B., Govaerts, W., Kuznetsov, Y. A., & Meijer, H. G. (2016). Initialization of homoclinic solutions near Bogdanov–Takens points: Lindstedt–Poincaré compared with regular perturbation method. *SIAM journal on applied dynamical systems, 15*(2), 952-980.