NYILATKOZAT

Név: Kovács Márton

ELTE Természettudományi Kar, szak: Alkalmazott Matematikus MSc

NEPTUN azonosító: NSWG8R

Szakdolgozat címe:
Diszkrét konvex optimalizálás

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020.12.29.

Kovács Márton

a hallgató aláírása

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Kovács Márton

Diszkrét konvex optimalizálás

MSc Diplomamunka

Témavezető: Frank András

Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2020

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék őszinte köszönetet mondani témavezetőmnek, Frank Andrásnak, aki az évek során mindvégig segített abban, hogy a témában minél jobban elmélyedhessek. Megannyi konzultáció során számtalan ötletet adott és rengeteg olyan hasznos dologra hívta fel a figyelmem, amelyet egyedül talán nem vettem volna észre. Ötletei, gondolatai, tanácsai végigkísérték a szakdolgozat létrejöttét. Ezen diplomamunka témája az egész mesterszak alatt jelen volt az életemben és hálás vagyok azért, hogy lehetőségem volt alaposabban megismerni a matematika ezen területét.

Köszönettel tartozom a barátaimnak és ismerőseimnek, akik egy-egy beszélgetés során érdeklődve meghallgattak, valamint olykor értékes és hasznos tanácsokkal láttak el.

Végül, de nem utolsó sorban pedig szeretném megköszönni az egész családomnak, hogy egy világjárvány alatt is biztosították nekem azt a nyugodt környezetet illetve biztonságos családi hátteret, amely elengedhetetlen volt e diplomamunka elkészüléséhez.

Bevezető

Az optimalizálás fogalma az egész világon mindenütt jelen van. Gondoljunk csak bele, hogy minden folyamat, amely valaha létrejött, abban a pillanatban megváltozott, amint kiderült, hogy jobban is lehet csinálni. Olcsóbb, gyorsabb, precízebb, egyszerűbb, stb... Sorolhatnék még ilyen jelzőket, ezek mind kulcsfontosságú szerepet játszanak a világ különböző területein. Ahogy az ipari gyártásoknál, úgy a pénzügyeknél, vagy az informatikai szektorban is szerepet kap az optimalizálás. De ha csak a hétköznapokra gondolunk, ott is jelen van.

Ezen szakdolgozat témája is egyfajta optimalizálás, egészen pontosan diszkrét konvex optimalizálásról lesz szó. Az elmúlt évtizedekben rengeteg eredményt értek el a konvex optimalizálás területén, melynek alapja az, hogy egy konvex függvény minimumát szeretnénk megtalálni bizonyos feltételek mellett. A feltételek típusa közel végtelen, s így a módszerek tárháza is hatalmas. Természetes gondolat azonban az, hogy a konvex analízis elemeit valahogyan általánosítsuk diszkrét esetben is, azaz egész pontokon értelmezett függvényeket vizsgálva, illetve sok esetben még azt is meg lehet (és sokszor meg is fogjuk) követelni, hogy egészértékű függvényeket vizsgáljunk. Az első kérdés, hogy hogyan általánosítsuk a konvex analízisbeli fogalmakat a diszkrét esetben? Ez korántsem egyértelmű, ugyanis kiindulhatnánk a folytonosságból, a konvexitásból, vagy a differenciálhatóságból is, mint alaptulajdonság. Az áttörő eredményeket ebben a témában K. Murota érte el, akinek az észrevétele az volt, hogy a konvex függvényekre jellemző tulajdonságok közül kettőt, nevezetesen a felezőpontos konvexitást és az ekvidisztáns konvexitást, ki lehet terjeszteni a diszkrét esetekre is, használva az alsó, illetve felső egészrész fogalmát. Kiderült, hogy ha ezt az utat követjük, akkor a folytonos esethez nagyon hasonló tételeket lehet megfogalmazni a diszkrét esetekben is. Így került bevezetésre a diszkrét konvex függvények két, talán legnagyobb osztálya, az $L^\natural$-konvex és $M^\natural$-konvex (ejtsd: „El-natural” és „Em-natural”) függvények, melyekre később temérdek tételt lehetett bebizonyítani, mint például a szeparációs tétel, vagy a Fenchel-féle dualitás tétel. Különleges szerepet kapnak

a diszkrét konvex függvények között a szeparábilis diszkrét konvex függvények, amelyek pontosan az imént említett 2 függvényosztály metszetét képzeik. Ismerve ezeket a függvény osztályokat, az elmúlt 3 évben rengeteg új eredmény született, A. Frank és K. Murota közös munkája révén, melyeknek komoly gráfelméleti következményei is vannak és amelyeknek oka a háttérben meghúzódó M-konvex illetve M_2-konvex halmazok.

A dolgozat felépítése ennek megfelelően az alábbiak szerint alakul. Az első fejezetben röviden ismertetjük a (folytonos) konvex analízis elemeit és a legfontosabb kapcsolódó eredményeket, koncentrálva azokra, amelyek később előfordulnak a diszkrét esetben is. A 2. fejezetben bevezetjük a diszkrét konvex függvények fogalmát, ezen belül is fókuszálva az $L^\natural$-konvex és $M^\natural$-konvex függvényekre, illetve közöljük az ezekre vonatkozó eredményeket. A 3. fejezetben az újonnan megismert tételeket fogjuk használni segítségül azért, hogy bázispoliéderekre (M-konvex halmazokra) fogalmazzunk meg tételeket, aminek azonnali következménye lesz számos gráfelméleti tétel, sőt még algoritmus is. A 4. fejezetben tovább mélyedhetünk a diszkrét konvex függvények elméletében és arra fektetjük a hangsúlyt, hogy tisztán kombinatorikai tételeket (min-max tételeket) állítsunk elő, amelyeken (ha csak magát a tételt nézzük) már nem látszik a diszkrét konvex háttér. Ebben a fejezetben ismerkedhetünk meg a box-TDI poliéderekkel és a rájuk vonatkozó eredményekkel. Végül az 5. fejezetben bemutatjuk hogy az inverz kombinatorikus optimalizálási feladatok hogyan kapcsolódnak ehhez a témakörhöz és hogy hogyan lehet egy általános min-max tételt megfogalmazni erre a feladatra a korábbi eredményeket felhasználva. A fejezet végén egy nagyon egyszerű saját ötleten alapuló algoritmus is szerepel egy konkrét inverz optimalizálási probléma megoldására. Minden fejezet elején, illetve közben említésre kerülnek azok a források, amiket felhasználtam az adott fejezetben.

Ezen diplomamunka elkészítése során mindvégig komoly figyelmet fordítottam arra, hogy az olvasó akkor is megérthesse az itt leírtakat, ha a témába ismeretlenül érkezik. Néhány helyen a cikkekben illetve könyvekben említett megjegyzéseket, következményeket én kirészleteztem, illetve bebizonyítottam és ezt is bele is szőttem a szakdolgozatba. Ezen felül az utolsó fejezetben szereplő algoritmus noha rendkívül egyszerű és nem igényel hatalmas ötletet, az is saját eredmény. A szakdolgozat tehát ezekkel az apró eredményekkel egészíti ezt az egyébként szerteágazó és eredményekben gazdag témát.

Tartalomjegyzék

1. A konvex analízis alapjai **6**

1.1. Konvex halmazok 6

1.2. Konvex függvények 7

1.3. Konvex konjugált 9

2. A diszkrét konvex analízis elemei **13**

2.1. Diszkrét konvex függvények 14

2.1.1. Az egyváltozós eset 14

2.1.2. $L^\natural$-konvex függvények 15

2.1.3. $M^\natural$-konvex függvények 17

2.2. Konjugált, szeparáció és dualitás 21

2.3. L és M konvex függvények tulajdonságai 28

3. Optimalizálás bázispoliédereken **30**

3.1. Dec-min elemek és tulajdonságaik 31

3.2. Négyzetösszeg és a dec-min elemek kapcsolata 35

4. Min-Max tétel box-TDI poliéderekre **40**

4.1. Box-TDI poliéderek 40

4.2. A min-max tétel két alakban 42

5. Inverz optimalizálási problémák **47**

5.1. Min-max tétel az általános inverz problémára 47

5.2. Inverz optimalizálás egyetlen matroidon 50

5.3. Inverz optimalizálás két matroidon 52

1. fejezet

A konvex analízis alapjai

Ebben a fejezetben röviden bemutatjuk a konvex analízis elemeit, vagyis most még nem követelünk meg semmilyen egészértékűséget. Ha nem jelezzük más módon, akkor az alaphalmazt S-sel jelöljük, ahol $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Megengedjük továbbá azt a kényelmességet is, hogy a valós számok halmazába beleértjük a $\pm\infty$-t is, ugyanis a legtöbb függvény így értelmezendő, ezt azonban mi nem fogjuk kihangsúlyozni. Ennek ellenére érdemes már most az elején megjegyezni, hogy a háttérben azért alkalmanként ez a tulajdonság is fontos lehet. Több illetve részletesebb információt a [1, 2, 3, 4] könyvekben illetve cikkekben találhat az olvasó, melyekből mi most csak a legfontosabb részleteket emeljük ki.

1.1. Konvex halmazok

Tetszőleges, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n), b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorok esetén, melyrekre $a \leq b$ jelölje $[a, b]$ és (a, b) a **zárt** illetve **nyílt** téglákat, azaz

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, n)\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i \quad (i = 1, \ldots, n)\}$$

Egy S halmazt akkor nevezünk **konvexnek** ha minden $x, y \in S$ és $0 \leq \lambda \leq 1$ esetén $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$, azaz ha az S-beli x, y vektorok tetszőleges konvex kombinációja is benne van S-ben. Az üres halmazt konvexnek tekintjük. Egy konvex poliéder olyan konvex P halmaz, amely véges sok lineáris egyenlőtlenséggel leírható, azaz

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m\}$$

ahol a_{ij} és b_i valós számok.

Véges sok pont konvex kombinációja hasonlóképp definiálható, mint 2 pont esetén, nevezetesen ha $x^1, \ldots, x^m \in S$, akkor ezek konvex kombinációja $\lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_m x^m$, ahol $\lambda_i \geq 0$ és $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Fontos tulajdonsága a konvex halmazoknak, hogy pontjainak bármely konvex kombinációja szintén benne van a halmazban, sőt ennek a megfordítása is igaz, azaz egy halmaz pontosan akkor konvex, ha megegyezik pontjainak összes lehetséges konvex kombinációiból álló ponthalmazzal. Konvex halmazok metszete is konvex. Egy S halmaz konvex burka, $\mathrm{conv}(S)$ az S-et tartalmazó legszűkebb konvex halmaz. Két konvex halmaz Minkowski-összege szintén konvex, azaz ha X, Y konvex, akkor az $X+Y = \{x+y : x \in X, y \in Y\}$ halmaz is konvex.

Egy C halmazt akkor nevezünk **zárt kúpnak**, ha minden $x \in C$ és $\lambda \geq 0$ esetén $\lambda x \in C$. Ha C konvex, akkor konvex kúpról beszélhetünk. Más szóval C akkor és csak akkor konvex zárt kúp, ha $x, y \in C \quad \lambda, \mu > 0$ esetén $\lambda x + \mu y \in C$.

A konvex halmazokra vonatkozó egyik legfontosabb tétel az ún. szeparációs tétel, mely az alábbi:

1.1.1. Tétel. *Ha C és D nemüres, diszjunkt konvex halmazok $\mathbb{R}^n$-ben, akkor létezik egy hipersík, mely elválasztja őket egymástól. Másképp, létezik olyan $a \neq 0$ és b, ahol $a \in \mathbb{R}^n$ és $b \in \mathbb{R}$, hogy $a^T x \leq b \quad (x \in C)$ valamint $a^T x \geq b \quad (x \in D)$. Ekvivalensen, az $a^T x - b$ kifejezés nempozitív C-n és nemnegatív D-n. A szóban forgó hipersík az $\{x : a^T x = b\}$ hipersík.*

Az imént kimondott tételt jól szemlélteti a(z) 1.1 ábra.

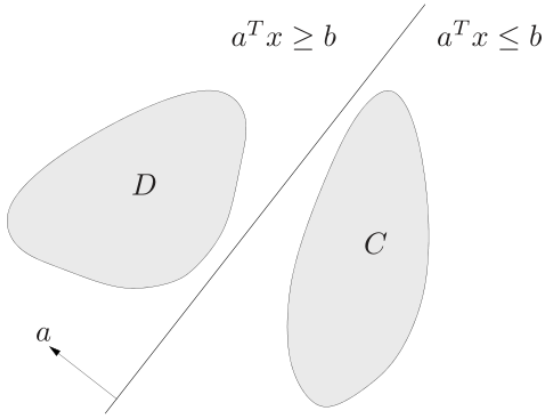
1.2. Konvex függvények

Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ esetén $dom(f)$ jelöli a **valódi értelmezési tartományt**, azaz azon pontokat, melyekre a függvényérték véges.

Egy f függvényt akkor nevezünk **konvexnek**, ha

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n; 0 \leq \lambda \leq 1) \tag{1.1}$$

Azt mondjuk, hogy f szigorúan konvex, ha az egyenlőtlenség szigorú (1.1)-ben. Az f függvény akkor **konkáv**, ha $-f$ konvex. Egy függvény **epigráfja** azon pontok halmaza



1.1. ábra. Az $\{x \mid a^T x = b\}$ hipersík, amely szeparálja a C, D nemüres, diszjunkt, konvex halmazokat.

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$-ben, amelyek a függvény grafikonja felett vannak. Azaz

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} : \alpha \geq f(x)\}$$

Ezzel a terminológiával élve f pontosan akkor konvex függvény, ha $\mathrm{epi}(f)$ konvex halmaz. Két konvex függvény összege és infimális konvolúciója is konvex. Azaz a

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$(f \Box g)(x) = \inf\{f(y) + g(z) : x = y + z, \quad y, z \in \mathbb{R}^n\}$$

függvények konvexek, ha f és g is az. Utóbbi esetben persze csak akkor, ha nem veszi fel a $-\infty$ értéket a konvolúció.
Tetszőleges $p \in \mathbb{R}^n$ esetén legyen $f[-p] := f(x) - \langle p, x\rangle \quad (x \in \mathbb{R}^n)$. Ha f konvex, akkor $f[-p]$ is konvex.
A konvex függvények legfontosabb tulajdonsága, mely a következő fejezetben is fontos lesz, az alábbi tétel:

1.2.1. Tétel. *Egy f konvex függvény valamely pontja akkor és csak akkor lokális minimumhely, ha globális minimumhely.*

Bizonyítás. Az állítás „csak akkor” része triviális. A másik irányhoz legyen x^* egy lokális minimumhelye f-nek. Ekkor az x^* egy U környezetében $f(z) \geq f(x^*)$. Tetszőleges y-hoz

találhatunk olyan $\lambda < 1$ számot, amely esetén $z = \lambda x^* + (1-\lambda)y$ benne van az U-ban. De akkor (1.1) alapján

$$\lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(y) \geq f(\lambda x^* + (1-\lambda)y) = f(z) \geq f(x^*)$$

Átrendezés után ez azzal ekvivalens, hogy $f(y) \geq f(x^*)$ azaz x^* valóban globális minimumhely. $\square$

Jelölje $\operatorname{argmin}(f)$ a minimalizáló helyek halmazát, azaz

$$\operatorname{argmin}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(y) \quad (\forall y \in \mathbb{R}^n)\}$$

Ha f konvex függvény, akkor $\operatorname{argmin}(f)$ konvex halmaz.

1.3. Konvex konjugált

Most röviden ismertetjük a konvex konjugált definícióját amely később kulcsfontosságú szerepet fog kapni a tételekben a folytonos és diszkrét esetekben egyaránt. Ezen felül mutatunk néhány példát konjugált függvényekre.

Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $\operatorname{dom}(f) \neq \emptyset$, **konvex konjugáltja** (röviden: konjugáltja) definíció szerint az alábbi

$$f^\bullet(p) := \sup\{\langle p, x\rangle - f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

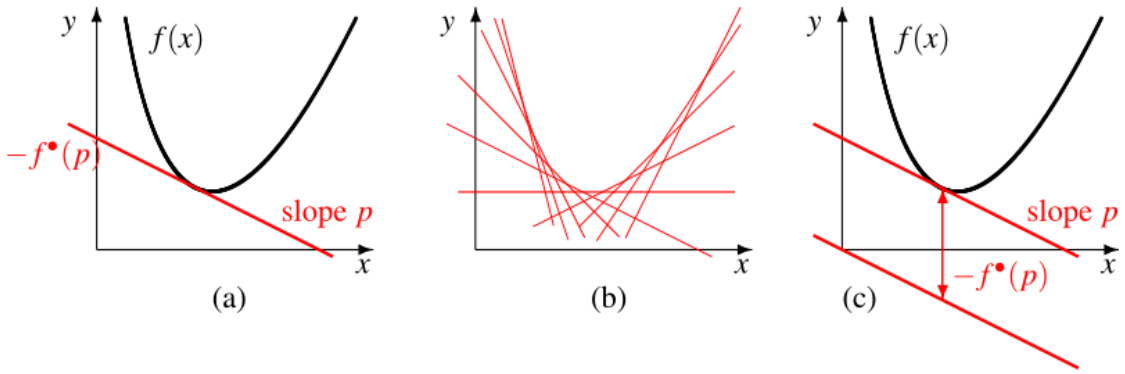
Könnyen látható, hogy $f^\bullet$ még akkor is konvex, ha az eredeti függvény nem volt az, hiszen definíció szerint $f^\bullet$ konvex függvények pontonkénti szuprémuma. Szokták még a konjugáltat *Legendre-Fenchel transzformációnak* is nevezni.

A konjugált függvény koncepciójának alaposabb megértéséhez segítségül szolgálhat a(z) 1.2 ábra.

1.3.1. Tétel. *Az imént definiált $f^\bullet$ konjugált egy valódi (azaz $\operatorname{dom}(f) \neq \emptyset$) konvex függvény, tetszőleges f esetén, sőt, $f^{\bullet\bullet} = f$ ha f is valódi konvex függvény volt.*

Ha f, g valódi konvex függvények, akkor az összeg és az infimális konvolúcióra az alábbiak teljesülnek

$$(f \square g)^\bullet = f^\bullet + g^\bullet$$
$$(f + g)^\bullet = f^\bullet \square g^\bullet$$



1.2. ábra. Egy konvex függvény érintőjének meredeksége (slope) és a konjugált közti kapcsolat.

1.3.2. Példa. Alább bemutatunk néhány példát konvex függvények konjugáltjára 1 dimenzióban.

- Lineáris függvény: $f(x) = ax + b$ esetén $f^\bullet(a) = b$. A konjugáltban $\mathrm{dom}(f^\bullet) = \{a\}$ hiszen az $yx - ax - b$ függvény (x-et tekintve változóként) csak akkor korlátos, ha $y = a$.
- Negatív logaritmus: $f(x) = -\log(x)$. Ekkor $\mathrm{dom}(f^\bullet) = \{y \mid y < 0\}$ és $f^\bullet(y) = -\log(-y) - 1$
- Exponenciális függvény: $f(x) = e^x$ esetén $dom(f^\bullet) = \mathbb{R}_+$ és $f^\bullet(y) = y\log(y) - y$ (ha $y = 0$, akkor 0)
- Negatív Entrópia: $f(x) = x\log(x)$ esetén $\mathrm{dom}(f^\bullet) = \mathbb{R}$ és $f^\bullet(y) = e^{y-1}$
- Inverzfüggvény: $f(x) = \frac{1}{x}$ esetén $\mathrm{dom}(f^\bullet) = -\mathbb{R}_+$ és $f^\bullet(y) = -2(-y)^{1/2}$

Hasonlóan a konvex halmazokhoz, a konvex függvények esetében is megfogalmazható egy szeparációs tétel:

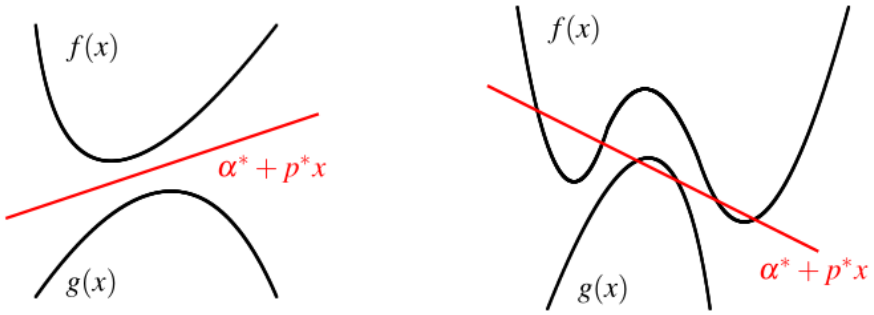
1.3.3. Tétel. *Legyenek $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ valódi konvex illetve konkáv függvények, továbbá*

$$f(x) \geq g(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

Ekkor létezik egy $\alpha^* \in \mathbb{R}$ és $p^* \in \mathbb{R}^n$ melyekre

$$f(x) \geq \alpha^* + \langle p^*, x\rangle \geq g(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

Megjegyezzük, hogy a konvexitási feltételek nem hagyhatók el a tételből, ezt a(z) 1.3 ábra is szemlélteti.



1.3. ábra. Szeparációs tétel konvex-konkáv függvényekre és egy példa, hogy a konvexitási feltételek nem hagyhatók el.

Még egy fontos kapcsolatot szeretnénk kiemelni a konvex és konkáv függvények illetve azok konjugáltjai között, ez pedig egyfajta dualitás tétel.

1.3.4. Tétel. *(Fenchel-dualitás) Legyenek f, g olyanok, mint a szeparációs tételben, ekkor*

$$\inf\{f(x) - g(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \sup\{g^\circ(p) - f^\bullet(p) \mid p \in \mathbb{R}^n\}$$

Ha a szuprémum felvétetik a $p = p^*$ helyen, akkor

$$\operatorname{argmin}(f - g) = \operatorname{argmin}(f\,[-p^*]) \cap \operatorname{argmax}(g\,[-p^*])$$

1.3.5. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy mind a szeparációs, mind a Fenchel-dualitás tétel a fenti alakban igazán szépen mutat, ám ha matematikailag precízek szeretnénk lenni, akkor vannak parányi - de annál fontosabb - feltételek még. A szeparációs tétel esetén az alábbi 2 tulajdonság közül legalább egynek teljesülnie kell:

1) $\operatorname{ri}(\operatorname{dom} f) \cap \operatorname{ri}(\operatorname{dom} g) \neq \emptyset$

2) f, g poliéderes és $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$

ahol az első feltétel egy topológiai fogalmat - a relatív belső pontok fogalmát - használ, a második pedig az f, g poliéderes tulajdonságát, ami egyszerűen csak annyit jelent, hogy f és g epigráfja egy konvex poliéder $\mathbb{R}^n$-ben. A dualitás tételben pedig 4 hasonló feltétel közül kell legalább egynek fennállnia, melyek nevezetesen:

1) $\operatorname{ri}(\operatorname{dom} f) \cap \operatorname{ri}(\operatorname{dom} g) \neq \emptyset$

2) f, g poliéderes és $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$

3) f, g zárt és $\operatorname{ri}(\operatorname{dom} f^\bullet) \cap \operatorname{ri}(\operatorname{dom} g^\circ) \neq \emptyset$

4) f, g poliéderes és $\operatorname{dom} f^\bullet \cap \operatorname{dom} g^\circ \neq \emptyset$

Ezeket a feltételeket azért láttam jobbnak külön megemlíteni, hogy a tétel maga áttekinthető legyen és az olvasó ne vesszen el a részletekben, ezek ugyanis olyan apró, de szükséges feltételek, melyek a tétel érvényességéhez hozzátartoznak ám a gyakorlatban ezeket sosem fogjuk ellenőrizni, mindig feltesszük, hogy csak a létező esetek fordulnak elő. Ha az olvasó további részletekben is érdekelt, akkor például a [2] könyv 3. fejezetében részletesebben tájékozódhat.

1.3.6. Megjegyzés. Az imént kimondott tételt gyakran megesik hogy két konvex függvényre szeretnénk kimondani. Ha f, g mindegyike konvex, akkor a min-max formula az alábbi alakot ölti

$$\inf\{f(x) + g(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \sup\{-f^\bullet(p) - g^\bullet(-p) \mid p \in \mathbb{R}^n\}$$

2. fejezet

A diszkrét konvex analízis elemei

Ebben a fejezetben ismertetjük a diszkrét konvex analízis alapelemeit valamint a legfontosabb tételeket illetve eredményeket ebben a témában. Felhívjuk az olvasó figyelmét az [1, 2, 5, 6] hivatkozásokra, melyek ezen fejezetben foglaltaknál sokkal több és részletesebb eredményt tartalmaznak.

A diszkrét konvex analízis témakörét leginkább úgy jellemezhetjük, ha nem egy, hanem két témakörből gyúrjuk össze. Célja, hogy a folytonos függvények esetében közismert eredményeket valamilyen módon elegyítse a kombinatorikus optimalizálás eszközeivel. A folytonosság oldaláról szemlélve ez nagyjából azt jelenti, hogy az eddigi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények valamilyen kombinatorikus tulajdonsággal is jellemezhetők. A diszkrét oldalról tekintve pedig olyan $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ vagy $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ függvényekről van szó, melyekre a konvexitás (de legalábbis valamiféle ehhez hasonló) tulajdonságai teljesülnek. Szimbolikusan úgy szokták ezt értelmezni, hogy

$$\text{Diszkrét konvex analízis} = \text{Konvex analízis} + \text{Matroidelmélet}$$

A terület nem teljesen ismeretlen, előkerül a játékelméletben illetve gazdasági alkalmazásokban is. Szeretném kiemelni azt a legfontosabb észrevételt, amely K. Murota nevéhez fűződik, hogy a folytonos esetbeli konvexitás **két különböző tulajdonságából** kiindulva fogunk eljutni ahhoz a két függvényosztályhoz ($\mathrm{L}^\natural$-konvex és $\mathrm{M}^\natural$-konvex függvények) amelyekhez a következő fejezetekben szereplő függvények tartoznak. Az alapészrevétel egyáltalán nem nehéz, hiszen ahogyan látni is fogjuk, mintkét esetben csupán egészértékékűségi feltételeket írunk majd elő a folytonos esetbeli feltétel helyébe. Ám ezen apró módosításokkal meglepően különböző és sokoldalú eredmények vezethetők le.

Mielőtt belekezdünk a diszkrét konvex függvények tárgyalásába, idézzük fel, hogy egy f szeparábilis konvex függvény mindig felírható az alábbi alakban:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) \tag{2.1}$$

ahol $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (i = 1, \ldots, n)$ egyváltozós konvex függvények.

2.1. Diszkrét konvex függvények

Alapvetően a konvex függvények jól kezelhetősége két fontos tulajdonságukon múlik, melyeket az előző fejezetből most felelevenítünk:

1) Ha egy lokális optimumot találunk, az egyben globális optimum is. (1.2.1 tétel)

2) Dualitás jellegű tételeket lehet megfogalmazni, például a min-max és szeparációs tételek. (1.3 ill. 1.3.4 tételek)

Ennek megfelelően a következő 3 tulajdonságot fogjuk elvárni egy $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ függvénytől:

1) Az f függvény konvex-kiterjeszthető $\mathbb{R}^n$-re.

2) Lokális optimum egyben globális optimum is.

3) Dualitás jellegű tételek igazak, mint például min-max és szeparációs tételek.

2.1.1. Megjegyzés. Akkor nevezünk egy f függvényt konvex-kiterjeszthetőnek, ha létezik egy olyan $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $\overline{f}(x) = f(x)$ minden $x \in \mathbb{Z}^n$ esetén. A konkáv-kiterjeszthetőség definíciója analóg módon történik.

2.1.1. Az egyváltozós eset

Ha $n = 1$, akkor diszkrét konvex függvénynek tekintünk egy $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ függvényt, ha

$$f(x-1) + f(x+1) \geq 2f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{Z}^n) \tag{2.2}$$

Az alábbi két tétel garantálja, az elvárt 2 tulajdonságot:

2.1.2. Tétel. *Egy $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ pontosan akkor konvex-kiterjeszthető, ha (2.2) teljesül rá.*

2.1.3. Tétel. *Egy $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ függvényre, amely teljesíti (2.2)-et, egy $x \in \mathrm{dom}(f)$ pont akkor és csak akkor globális minimum, ha lokális minimum az alábbi értelemben*

$$f(x) \leq \min\{f(x-1), f(x+1)\}$$

A fenti két tétel könnyedén kiterjeszthető szeparábilis (diszkrét) konvex függvényekre, amelyek előállnak (2.1) alakban, ahol az egyes φ_i függvényekre teljesül (2.2).

2.1.2. L$^\natural$-konvex függvények

Egy f konvex függvényre mindig teljesül, hogy

$$f(x) + f(y) \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Hiszen 1.1 éppen ezt adja $\lambda = 1/2$ esetén. Ezt a speciális alakját a konvexitás feltételének úgy fogjuk nevezni, hogy **felezőpontos konvexitás**. A folytonos esetben azt lehet tudni, hogy a felezőpontos konvexitás ekvivalens a konvexitással. Ennek a formulának diszkrét esetben nem feltétlenül van értelme, hisz a jobb oldalon szereplő kifejezések nem feltétlenül egészek. Ám ebből kiindulva már világos lehet, hogy vajon hogyan kell módosítani a formulát.

2.1.4. Definíció. *A $g : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ függvényre akkor mondjuk, hogy teljesíti a diszkrét felezőpontos konvexitás feltételt, ha*

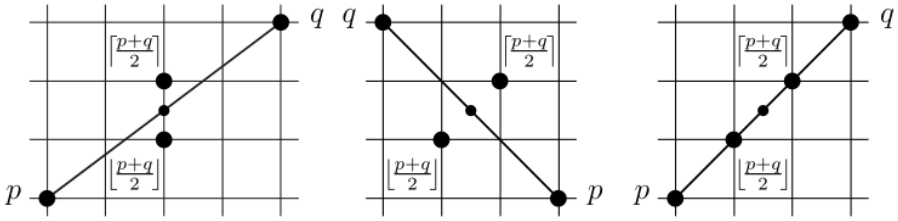
$$g(p) + g(q) \geq f\left(\left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor\right) + f\left(\left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil\right) \quad (\forall p, q \in \mathbb{Z}^n) \tag{2.3}$$

Ezeket a g függvényeket L$^\natural$-konvex (etjsd: „L-natural") függvényeknek hívjuk.

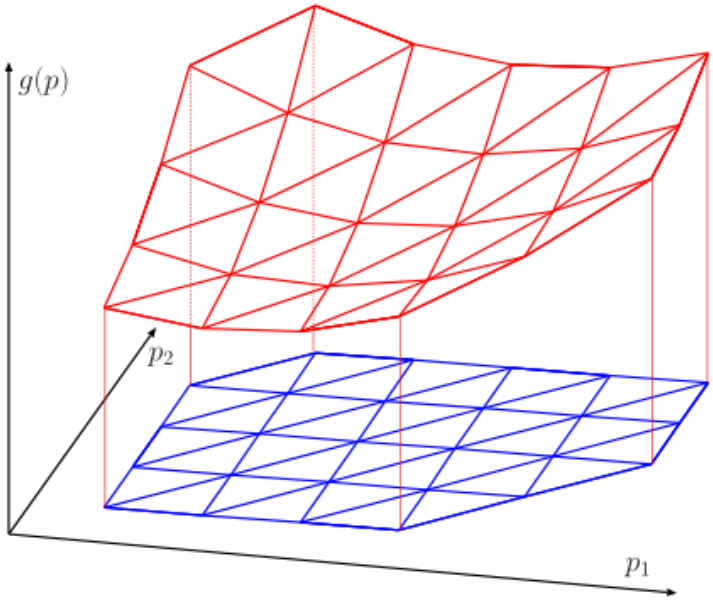
Az L$^\natural$-konvex függvény definícióját megérteni elősegíthet a(z) 2.1 és 2.2 ábra, melyek a diszkrét felezőpontos konvexitás fogalmát és egy L$^\natural$-konvex függvényt mutatnak be $n = 2$ dimenzióban.

Az imént bevezetett definíciókkal megfogalmazhatunk két tételt, az L$^\natural$-konvex függvényekre vonatkozóan.

2.1.5. Tétel. *Egy L$^\natural$-konvex g függvémy konvex-kiterjeszthető.*



2.1. ábra. Diszkrét középpontos konvexitás



2.2. ábra. Egy L$^\natural$-konvex függvény $n = 2$ dimenzióban

2.1.6. Tétel. *Egy L$^\natural$-konvex g függvény esetén egy $p \in \mathrm{dom}(g)$ pont akkor és csak akkor globális minimum, ha lokális minimum az alábbi értelemben:*

$$g(p) \leq \min\{g(p-q), g(p+q)\} \quad (\forall q \in \{0,1\}^n)$$

Ez a tétel tulajdonképpen azt mondja ki, hogyha egy p pontról el akarjuk dönteni, hogy globális minimum-e, akkor elegendő a p körül levő n-dimenziós egységkocka csúcsaiban felvett értékekkel összehasonlítani. Az L$^\natural$-konvex függvények kapcsolatba hozhatók a szubmoduláris függvényekkel, ám ehhez először lássuk azok definícióját általánosságban.

2.1.7. Definíció. *Egy $g : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ függvény **szubmoduláris**, ha*

$$g(p) + g(q) \geq g(p \vee q) + g(p \wedge q) \quad (p, q \in \mathbb{Z}^n)$$

illetve ***eltolt szubmoduláris****, ha*

$$g(p) + g(q) \geq g((p - \alpha\mathbf{1}) \vee q) + g(p \wedge (q + \alpha\mathbf{1})) \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^+, p, q \in \mathbb{Z}^n)$$

ahol $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$.

2.1.8. Megjegyzés. Ha a szubmodularitás definíciójában $\mathbb{Z}^n$ helyett csak $\{0, 1\}^n$-en értelmezett függvényeket vizsgálnánk, akkor megkapnánk a hagyományos értelemben vett, halmazokon értelmezett szubmoduláris függvényeket. További érdekesség, hogy ebben az esetben a szubmodularitás és az L$^\natural$-konvexitás fogalma ekvivalens egymással.

2.1.9. Tétel. *Egy $g : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ függvényre az eltolt szubmodularitás ekvivalens a diszkrét felezőpontos konvexitással.*

Tehát az L$^\natural$-konvex függvények karakterizálhatók a szubmodularitás, vagyis inkább az eltolt szubmodularitás segítségével. Mindezek után az **L-konvex függvényt** úgy definiálhatjuk, mint egy g L$^\natural$-konvex függvény, amelyre teljesül, hogy

$$g(p + \mathbf{1}) = g(p) + r$$

valamilyen $r \in \mathbb{R}$ esetén. Ezzel a definícióval élve tehát látható, hogy az L$^\natural$-konvex és az L-konvex függvények lényegében megegyeznek egymással, hiszen egy L$^\natural$-konvex függvény n dimenzióban megfeleltethető (az r konstans erejéig) egy $(n + 1)$ dimenziós L-konvex függvénnyel, azaz az L$^\natural$-konvex függvények halmaza bővebb, mint az L-konvex függvényeké.

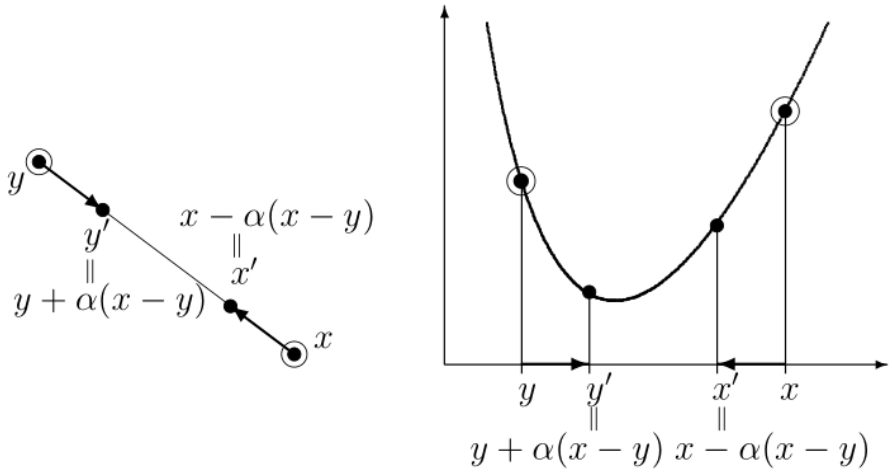
2.1.3. M$^\natural$-konvex függvények

Az előző alfejezetben láttuk, hogy az L-konvex, illetve L$^\natural$-konvex függvényeket hogyan definiáltuk, s amelynek lényege a folytonos esetbeli konvexitás egy bizonyos tulajdonságának megragadása, s megfogalmazása diszkrét esetben. Most ugyanezt fogjuk megtenni, csak a konvexitás egy másik tulajdonságából kiindulva.

Egy f konvex függvény mindig teljesíti az alábbi egyenlőtlenséget, melyet **ekvidisztáns konvexitásnak** hívunk:

$$f(x) + f(y) \geq f(x - \alpha(x - y)) + f(y + \alpha(x - y)) \quad (\forall\ 0 \leq \alpha \leq 1 \in \mathbb{R})$$

A fenti tulajdonság nagyjából azt jelenti, hogy a függvényértékek összege egy x és y pontban nem nő, hogyha az őket összekötő szakaszon ugyanannyit haladunk az egyik pont irányából a másikába és fordítva. A szemléletesség kedvéért tekinthetjük a(z) 2.3 ábrát.



2.3. ábra. Az ekvidisztáns konvexitás

Világos, hogy most csak úgy simán nem terjeszthetjük ki a definíciót az alsó és felső egészrészekkel azért, hogy megkapjuk a diszkrét verzióját a fenti fogalomnak. Ehelyett inkább az lesz a célunk, hogy az x, y pontokból elindulva valamilyen értelemben (a tengelyeken) „egymás felé", ne növekedjen a függvény érték. Ezt az intuíciót most formálisan is megfogalmazzuk.

Legyen tehát $g : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ és vezessük be az ekvidisztáns konvexitás fogalmát a diszkrét esetben is. Egy (x, y) párból (itt x és y most n dimenziós vektorok, avagy pontok) kiindulva el akarunk mozdulni egy (x', y') párba:

$$(x', y') = (x - \chi_i, y + \chi_i) \text{ vagy } (x', y') = (x - \chi_i + \chi_j, y + \chi_i - \chi_j)$$

ahol az i, j indexek olyanok, hogy $x_i > y_i$ és $x_j < y_j$. Tekintsük a(z) 2.4 ábrát a szemléletesség kedvéért.

Összefoglalva tehát tekintsük az alábbi tulajdonságot egy $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ függvény esetén: Minden $x, y \in \mathrm{dom}(f)$ és $i \in \mathrm{supp}^+(x - y)$ esetén létezik $j \in \mathrm{supp}^-(x - y) \cup \{0\}$ úgy,

hogy

$$f(x) + f(y) \geq f(x - \chi_i + \chi_j) + f(y + \chi_i - \chi_j)$$

Ezt úgy fogjuk hívni, hogy **kicserélési tulajdonság**. Az olyan f függvényeket pedig, amelyek rendelkeznek a kicserélési tulajdonsággal, **M$^\natural$-konvex** függvényeknek fogjuk nevezni. Egy konkrét példát M$^\natural$-konvex függvényre a(z) 2.5 ábra mutat.

Akárcsak az L$^\natural$-konvex függvények esetében, itt is meg lehet fogalmazni az alábbi két tételt:

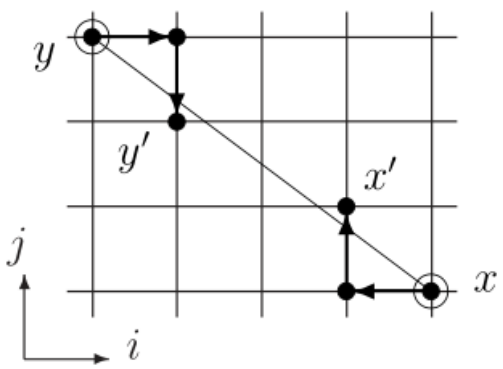
2.1.10. Tétel. *Egy M$^\natural$-konvex f függvény konvex-kiterjeszthető.*

2.1.11. Tétel. *Egy M$^\natural$-konvex f függvény esetében egy $x \in \mathrm{dom}(f)$ pont akkor és csak akkor globális minimum, ha lokális minimum az alábbi értelemben:*

$$f(x) \leq f(x - \chi_i + \chi_j) \quad (\forall i, j \in \{0, 1, \ldots, n\})$$

Mindezek után pedig az M-konvex függvényeket úgy definiálhatjuk, (hasonlóan az L-konvex és L$^\natural$-konvex esetekben látottakhoz) mint olyan M$^\natural$-konvex f függvények, amelyekre $j \in \mathrm{supp}^-(x - y)$. Másképp megfogalmazva ez azt jelenti, hogy f pontosan akkor M-konvex, ha M$^\natural$-konvex és $\mathrm{dom}(f) \subseteq \{x \in \mathbb{Z}^n | \sum_{k=1}^{n} x_k = r\}$ valamilyen konstans $r \in \mathbb{Z}$-re.

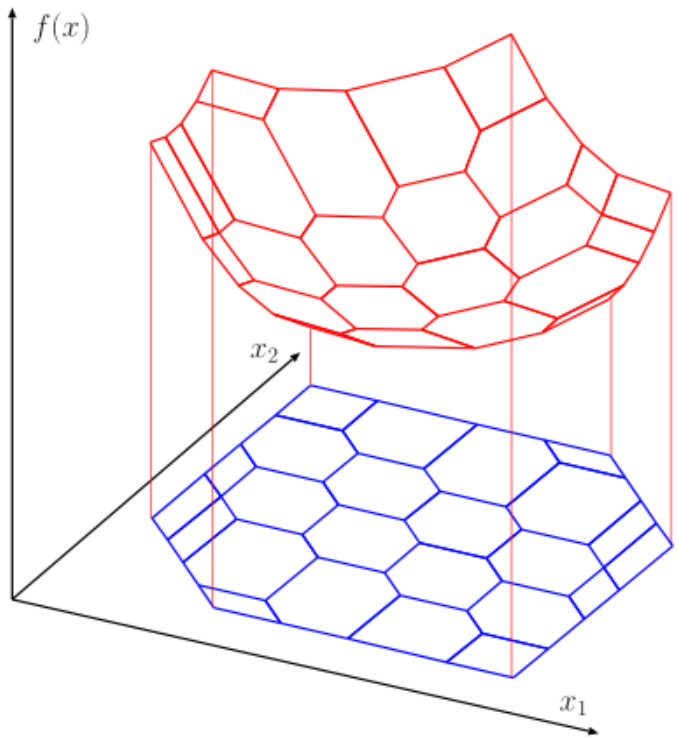
Láthatjuk tehát - hasonlóan az L-konvex és L$^\natural$-konvex függvények esetéhez - hogy az M-konvex és M$^\natural$-konvex függvények lényegében ugyanazok, hiszen egy M$^\natural$-konvex függvény n dimenzióban, megfeleltethető (az r konstans erejéig) egy $(n + 1)$ dimenziós M-konvex függvénynek, azaz az M$^\natural$-konvex függvények halmaza bővebb, mint az M-konvex függvények halmaza.



2.4. ábra. Elmozdulás (x, y)-ból (x', y')-ba a tengelyek mentén

A(z) 2.6 és 2.7 ábrák segítenek összefoglalni az imént megismert fogalmakat és átlátni a kapcsolatokat köztük. Segítségükkel egy kicsit tisztább képet kaphatunk arról, hogy valójában miről is van itt szó. Megemlítjük még ezen a ponton azt az ismert tényt, hogy az $L^\natural$-konvex és $M^\natural$-konvex függvények halmazának metszete pontosan a szeparábilis konvex függvények halmaza. Ez egy koránt sem triviális állítás, viszont később (leginkább a 4. fejezetben) sokszor fogjuk kihasználni, hogy egy szeparábilis diszkrét konvex függvény $L^\natural$-konvex, illetve $M^\natural$-konvex. További részleteket és több a témához kapcsolódó eredményt az olvasó például a [2] könyvben olvashat.

Végszóként megemlíteném még azt is, hogy az imént elmondott tulajdonságokat zökkenőmentesen meg lehet fogalmazni folytonos esetben is, azaz az $M^\natural$ és $L^\natural$-konvex, valamint M és L-konvex függvények fogalma folytonos esetben is létezik. Részleteket ugyancsak a [2] könyvben találhatunk.



2.5. ábra. $M^\natural$-konvex függvény 2 dimenzióban

Folytonos eset		Diszkrét eset
$f : \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$		$f : \mathbf{Z}^n \to \overline{\mathbf{R}}$
Felezőpontos konvexitás	$\xrightarrow{\text{Diszkretizálás}}$	Diszkrét felezőpontos konvexitás ($\mathrm{L}^\natural$-convex)
$\Updownarrow$		
Konvexitás		
$\Updownarrow$		
Ekvidisztáns konvexitás	$\xrightarrow{\text{Diszkretizálás}}$	Kicserélési tulajdonság ($\mathrm{M}^\natural$-convex)
Diszkrét felezőpontos konvexitás	$f(x) + f(y) \geq f\left(\left\lceil \frac{x+y}{2} \right\rceil\right) + f\left(\left\lfloor \frac{x+y}{2} \right\rfloor\right)$	
Felezőpontos konvexitás	$f(x) + f(y) \geq 2\, f\left(\frac{x+y}{2}\right)$	
Konvexitás	$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$	
Ekvidisztáns konvexitás	$f(x) + f(y) \geq f(x - \alpha(x-y)) + f(y + \alpha(x-y))$	
Kicserélési tulajdonság	$f(x) + f(y) \geq \min[f(x - \chi_i) + f(y + \chi_i), \min_{x_j < y_j} \{f(x - \chi_i + \chi_j) + f(y + \chi_i - \chi_j)\}]$	

2.6. ábra. Az $\mathrm{L}^\natural$-konvexitás és $\mathrm{M}^\natural$-konvexitás definíciói és kapcsolatai a hagyományos konvexitással.

2.2. Konjugált, szeparáció és dualitás

Idézzük fel, hogy folytonos esetben a konvex konjugált definíciója úgy hangzott, hogyha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor az f (amely nem feltétlenül konvex) konvex kongjugáltja:

$$f^\bullet(p) := \sup\{\langle p, x\rangle - f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

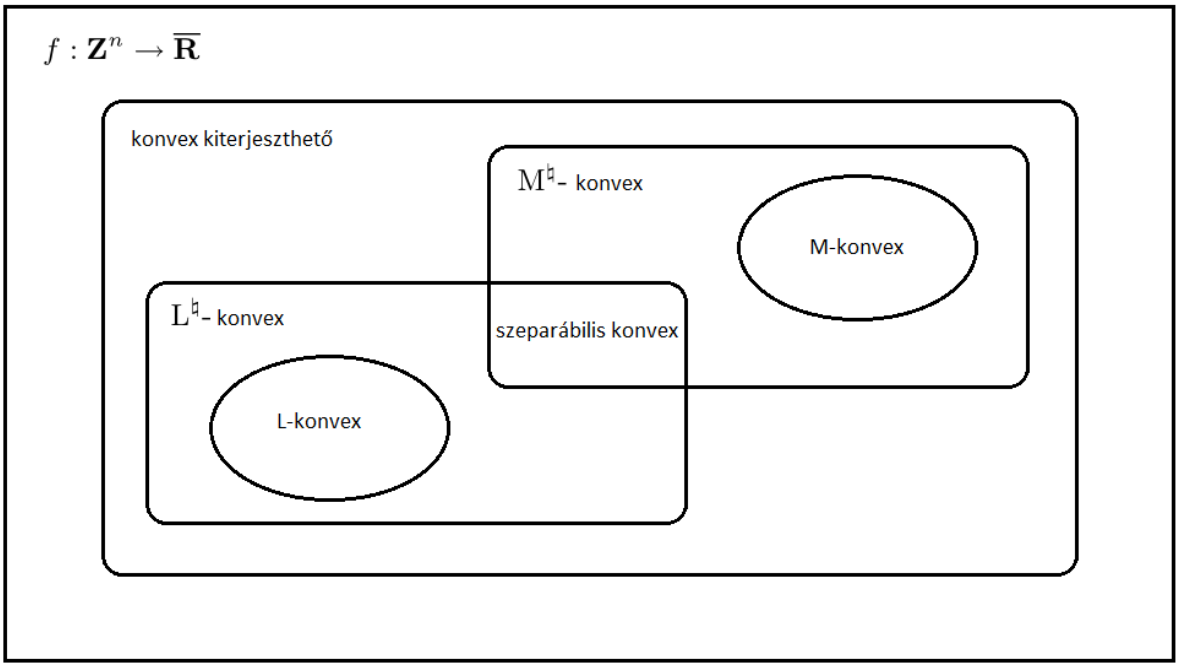
Megemlítjük még a konkáv konjugáltat is, amely hasonló alakot ölt. Legyen $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy függvény, ekkor ennek konkáv konjugáltja:

$$h^\circ(p) := \inf\{\langle p, x\rangle - h(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

Ha most a diszkrét esetre akarunk áttérni, csak annyi a különbség, hogy az f és h értelmezési tartományát kicseréljük $\mathbb{Z}^n$-re. Formálisan, ha $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ és $h : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ függvények akkor ezek diszkrét konvex illetve diszkrét konkáv konjugáltai rendre:

$$f^\bullet(p) := \sup\{\langle p, x\rangle - f(x) \mid x \in \mathbb{Z}^n\} \quad (p \in \mathbb{R}^n) \tag{2.4}$$

$$h^\circ(p) := \inf\{\langle p, x\rangle - h(x) \mid x \in \mathbb{Z}^n\} \quad (p \in \mathbb{R}^n) \tag{2.5}$$



2.7. ábra. A diszkrét konvex függvények osztályai

Itt is használatos a konvex illetve konkáv diszkrét Legendre-transzformáció elnevezés az $f^\bullet$ és h° függvényekre. Megjegyezzük még azt is, hogyha f egészértékű, és p is egész, akkor a konjugált is egész.

A konjugált szerepét, illetve fontosságát az alábbi tételek mutatják be, miszerint az M♮-konvex és L♮-konvex függvények pontosan egymás konjugáltjai.

2.2.1. Tétel. *Egy M♮-konvex f függvény esetén $f^\bullet$ L♮-konvex. Egy L♮-konvex g függvény esetén $g^\bullet$ M♮-konvex. Az előbbi két állítás akkor is igaz, ha M-konvex vagy L-konvex függvényekkel fogalmazzuk meg őket.*

2.2.2. Tétel. *Egész p esetén a diszkrét Legendre-transzformáció (konvex és konkáv konjugáltak) egy-egy értelmű megfeleltetést teremt az egészértékű M♮-konvex és egészértékű L♮-konvex függvények között, ha az értelmezési tartomány $\mathbb{Z}^n$. Hasonló állítás mondható ki M-konvex és L-konvex függvényekre.*

Ugyanezeket a tételeket természetesen meg lehet fogalmazni a folytonos esetben is. Most kimondjuk azokat a szeparációs illetve dualitás jellegű tételeket is, amelyek hasonlítanak a folytonos esetben látottakhoz. A diszkrét szeparációs tétel konvex és konkáv függvényekre tehát így hangzik:

2.2.3. Tétel. *Legyenek $f, h : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ konvex illetve konkáv függvények, továbbá*

$$f(x) \geq h(x)(\forall x \in \mathbb{Z}^n)$$

Ekkor létezik egy $\alpha^* \in \mathbb{R}$ és $p^* \in \mathbb{R}^n$ melyekre

$$f(x) \geq \alpha^* + \langle p^*, x \rangle \geq h(x) \quad (\forall x \in \mathbb{Z}^n)$$

Mi több, ha f és h egészértékű, akkor α^* és p^* is választható annak.

Érdemes még megjegyezni, hogy a tételben minden feltétel erős, ugyanis ha csak kevesebbet követelünk meg, akkor az alábbi állítások érvényesülnek.

1) $f(x) \geq h(x) \quad (\forall x \in \mathbb{Z}^n) \not\Longrightarrow \overline{f}(x) \geq \overline{h}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

2) $f(x) \geq h(x) \quad (\forall x \in \mathbb{Z}^n) \not\Longrightarrow$ létezik $\alpha^* \in \mathbb{R}$ és $p^* \in \mathbb{R}^n$

3) létezik $\alpha^* \in \mathbb{R}$ és $p^* \in \mathbb{R}^n \not\Longrightarrow$ léteznek egészek is

A fenti szeparációs tételhez hasonlóan meg lehet fogalmazni ilyen tételeket M$^\natural$-konvex és L$^\natural$-konvex függvények esetében is. Ezek pedig az alábbiak.

2.2.4. Tétel. (M-szeparációs tétel) *Legyenek $f, h : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ egy M$^\natural$-konvex illetve konkáv függvények, úgy hogy* $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(h) \neq \emptyset$ *vagy pedig* $\mathrm{dom}(f^\bullet) \cap \mathrm{dom}(h^\circ) \neq \emptyset$. *Ha $f(x) \geq h(x) \quad (\forall x \in \mathbb{Z}^n)$ akkor léteznek olyan $\alpha^* \in \mathbb{R}$ és $p^* \in \mathbb{R}^n$, hogy*

$$f(x) \geq \alpha^* + \langle p^*, x \rangle \geq h(x) \quad (\forall x \in \mathbb{Z}^n)$$

Sőt, ha f, h egészértékűek, akkor α^* és p^* is választható annak.

2.2.5. Tétel. (L-szeparációs tétel) *Legyenek $g, k : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ egy M$^\natural$-konvex illetve konkáv függvények, úgy hogy* $\mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{dom}(k) \neq \emptyset$ *vagy pedig* $\mathrm{dom}(g^\bullet) \cap \mathrm{dom}(k^\circ) \neq \emptyset$. *Ha $g(x) \geq k(x)(\forall x \in \mathbb{Z}^n)$ akkor léteznek olyan $\beta^* \in \mathbb{R}$ és $p^* \in \mathbb{R}^n$, hogy*

$$g(x) \geq \beta^* + \langle p^*, x \rangle \geq k(x) \quad (\forall x \in \mathbb{Z}^n)$$

Sőt, ha g, k egészértékűek, akkor β^* és p^* is választható annak.

Az M-szeparációs tétel egyik fontos következménye az alábbi, két M-konvex függvény összegének minimalizálásáról szóló tétel, mely egyben optimalitási feltételeket is a rendelkezésünkre bocsát.

2.2.6. Tétel. (M-konvex metszet tétel) *Ha $f, g : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ $M^\natural$-konvex függvények és $x^* \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$, akkor*

$$f(x^*) + g(x^*) \leq f(x) + g(x) \quad (\forall x \in \mathbb{Z}^n)$$

akkor és csak akkor, ha létezik olyan $p^* \in \mathbb{R}^n$, melyre

$$(f - p^*)(x^*) \leq (f - p^*)(x) \quad (\forall x \in \mathbb{Z}^n)$$
$$(g + p^*)(x^*) \leq (g + p^*)(x) \quad (\forall x \in \mathbb{Z}^n)$$

vagy ekvivalensen

$$(f - p^*)(x^*) \leq (f - p^*)(x^* + \chi_i - \chi_j) \quad (\forall i, j \in \{0, 1, \ldots, n\})$$
$$(g + p^*)(x^*) \leq (g + p^*)(x^* + \chi_i - \chi_j) \quad (\forall i, j \in \{0, 1, \ldots, n\})$$

És egy ilyen p^*-ra

$$\mathrm{argmin}(f + g) = \mathrm{argmin}(f - p^*) \cap \mathrm{argmin}(g + p^*)$$

Sőt, ha f, g egészértékűek, akkor p^* is választható annak.

2.2.7. Megjegyzés. Számos következménye ismert az L és M-szeparációs tételeknek. Hogy megemlítsünk közülük 2 fajsúlyosabbat, Frank András diszkrét szeparációs tétele éppen az L-szeparációs tétel egy speciális esete, a súly-szétvágás (weight-splitting) tétel pedig az M-szeparációs tétel egy speciális esete.

Az imént említett két tételről részletesen a [7, 8] cikkekben lehet olvasni, ám mi most levezetjük ezeket az L illetve M-szeparációs tételekből is, hogy lássuk, valóban speciális eseteik azoknak. Ehhez először is ki kell mondanunk magukat a tételeket, kezdjük a diszkrét szeparációs tétellel.

2.2.8. Tétel. (Frank, 1982) *Legyenek $\varrho, \mu : 2^S \to \mathbb{R}$ szub, - illetve szupermoduláris függvények úgy, hogy $\varrho(X) \geq \mu(X) \quad \forall X \subseteq S$ esetén. Ekkor létezik olyan $\varphi^* : 2^S \to \mathbb{R}$ amelyre*

$$\varrho(X) \geq \varphi^*(X) \geq \mu(X) \quad (\forall X \subseteq S)$$

Sőt, ha ϱ és μ egészértékűek, akkor φ^* is választható annak.

Most pedig megmutatjuk, hogy ez valóban a 2.2.5 speciális esete. Ehhez feleltessük meg a ϱ és μ szub, és szupermoduláris függvényeket a $g, k : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ L$^\natural$-konvex, és konkáv függvényekkel a legegyszerűbb módon, azaz legyenek

$$\varrho(X) = g(\chi_X)$$

$$\mu(X) = k(\chi_X)$$

Ekkor, mivel $g(\mathbf{0}) = k(\mathbf{0}) = 0$, és $g \geq k$ ezért a 2.2.5 tétel alkalmazható, hisz feltételei teljesülnek. Ez azt mondja, hogy létezik olyan $\beta^* \in \mathbb{R}$ és $p^* \in \mathbb{R}^n$ melyekre

$$g(x) \geq \beta^* + \langle p^*, x \rangle \geq k(x) \quad (\forall x \in \mathbb{Z}^n)$$

Mivel $g(\mathbf{0}) = k(\mathbf{0}) = 0$, ezért $\beta^* = 0$ és az $x = \chi_X$ választással (ahol $X \subseteq S$) éppen a diszkrét szeparációs tételt kapjuk vissza. Most nézzük a súly-szétvágás tételt.

2.2.9. Tétel. (Frank, 1981) *Ha azonos alaphalmazon adott két matroid a bázisaival, $M_1 = (S, \mathcal{B}_1)$ és $M_2 = (S, \mathcal{B}_2)$ és $c : S \to \mathbb{Z}$ egészértékű súlyfüggvény, úgy egy $B^* \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ bázis akkor és csak akkor optimális (minimális súlyú) ha léteznek olyan egész c_1^*, c_2^* vektorok, hogy*

i) $c = c_1^* + c_2^*$

ii) *B^* optimális M_i-ben c_i^*-ra nézve ($i = 1, 2$)*

Ahhoz, hogy lássuk, hogy ez tényleg a 2.2.4 speciális esete, vezessük be az alábbi, két kézenfekvő függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} c(B) & \text{ha } x = \chi_B, B \in \mathcal{B}_1 \\ +\infty & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} c(B^*) & \text{ha } x = \chi_B, B \in \mathcal{B}_2 \\ -\infty & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor f M-konvex, h pedig M-konkáv, sőt, h konstans a $\mathcal{B}_2$ elemein. Ekkor nyilván $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(h) \neq \emptyset$ hiszen B^* közös bázis. Könnyen látható az is, hogy $f(x) \geq h(x)$ minden $x \in \mathbb{Z}^S$. Így tehát a(z) 2.2.4 tétel feltételei teljesülnek vagyis alkalmazhatjuk hogy megkapjuk a tételben szereplő α^*-ot és p^*-ot.

Legyen most $c_1^* := c - p^*$ és $c_2^* := p^*$. Ekkor (hasonlóan a diszkrét szeparációs tétel visszavezetésénél látottakhoz) tekintsük az $x = \chi_{B^*}$ helyettesítést, ezzel élve a 2.2.4 tétel szerint

$$c(B^*) \geq \alpha^* + p^*(B^*) \geq c(B^*)$$

Amiből persze $\alpha^* = c(B^*) - p^*(B^*) = c_1^*(B^*)$. Ekkor viszont $c(B) \geq \alpha^* + p^*(B)$ minden $B \in \mathcal{B}_1$ esetén és $\alpha^* + p^*(B) \geq c(B^*)$ minden $B \in \mathcal{B}_2$.

Így tehát láthattuk, hogy mind a diszkrét szeparációs tétel, mind a súly-szétvágás tétel speciális esetei az L-szeparációs, illetve M-szeparációs tételeknek. Most térjünk át a szeparációs tételekről a dualitás típusú eredményekre. A folytonos esetben kimondott Fenchel-dualitáshoz analóg tétel érvényesül a diszkrét esetben, de először lássuk a kapcsolatot tetszőleges (nem feltétlenül konvex és konkáv) függvényekre.

2.2.10. Tétel. *Tetszőleges, $f, g : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség-lánc*

$$\inf\{f(x) - h(x) | x \in \mathbb{Z}^n\} \tag{2.6}$$

$$\vee|$$

$$\inf\{\overline{f}(x) - \overline{h}(x) | x \in \mathbb{R}^n\} \tag{2.7}$$

$$\vee|$$

$$\sup\{\overline{h}^\circ(p) - \overline{f}^\bullet(p) | p \in \mathbb{R}^n\} \tag{2.8}$$

$$\vee|$$

$$\sup\{h^\circ(p) - f^\bullet(p) | p \in \mathbb{Z}^n\} \tag{2.9}$$

Itt a középső egyenlőtlenség valójában egyszerűen a folytonos Fenchel-dualitás esete, újat csak az első és utolsó egyenlőtlenség hozott. Érdemes még megjegyezni, hogy az első és harmadik egyenlőtlenségben akkor van egyenlőség, ha f és h rendre konvex-kiterjeszthetőek. Azt is észrevehetjük, hogy ez utóbbi két egyenlőtlenség valójában M-konvex/konkáv és L-konvex/konkáv függvényekre kimondott egyenlőtlenség is lehetne. Nevezetesen az alábbi tétel fogalmazható meg.

2.2.11. Tétel. (Fenchel-típusú dualitás tétel) .

1) *Legyenek $f, h : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ egészértékű $M^\natural$-konvex illetve konkáv függvények úgy, hogy* $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(h) \neq \emptyset$ *vagy* $\mathrm{dom}(f^\bullet) \cap \mathrm{dom}(h^\circ) \neq \emptyset$. *Ekkor*

$$\inf\{f(x) - h(x) | x \in \mathbb{Z}^n\} = \sup\{h^\circ(p) - f^\bullet(p) | p \in \mathbb{Z}^n\}$$

Ha ez a közös érték véges, akkor az infimum és szuprémum fel is vétetik és így valóban min-max tételhez jutunk.

2) *Legyenek* $g, k : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ *egészértékű* $L^\natural$*-konvex illetve konkáv függvények úgy, hogy* $\mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{dom}(k) \neq \emptyset$ *vagy* $\mathrm{dom}(g^\bullet) \cap \mathrm{dom}(k^\circ) \neq \emptyset$*. Ekkor*

$$\inf\{g(x) - k(x) | x \in \mathbb{Z}^n\} = \sup\{k^\circ(p) - g^\bullet(p) | p \in \mathbb{Z}^n\}$$

Ha ez a közös érték véges, akkor az infimum és szuprémum fel is vétetik és így valóban min-max tételhez jutunk.

2.2.12. Megjegyzés. Ahogy a szeparációs tételeknek, úgy ezen dualitás tételeknek is (egészértékű esetben) azonnali következménye néhány közismert tétel. Ilyen például Edmonds metszet-tétele (1. esetnek következménye), vagy Fujishige Fenchel-típusú dualitás tétele szubmoduláris halmazfüggvényekre (2. eset következménye).

Ezen eredményekről a(z) [9, 10] cikkekben olvashat többet az érdeklődő olvasó. Az Edmonds metszet-tételt azonban alább röviden mi is levezetjük. Ehhez először gyorsan definiáljuk a **szubmoduláris poliéder** fogalmát, amely egy S alaphalmazon értelmezett b szubmoduláris függvény segítségével adott $P(b) := \{x \in \mathbb{R}^S : x(X) \leq b(X) \quad \forall X \subseteq S\}$ poliéder. Ezen fogalom segítségével a metszet-tétel:

2.2.13. Tétel. (Edmonds) *Ha* b_1, b_2 *szubmoduláris függvények* S*-en, akkor*

$$\max\{x(S) : x \in P(b_1) \cap P(b_2)\} = \min\{b_1(X) + b_2(S - X) : X \subseteq S\}$$

Hogy lássuk, ez miért speciális esete a(z) 2.2.11 tételnek, vezessük be az $f(x) = \delta_1(x)$ és $h(x) = \langle \mathbf{1}, x\rangle - \delta_2(x)$ ahol δ_i jelöli a $P(b_i) \cap \mathbb{Z}^n$ indikátorfüggvényeit. $(i = 1, 2)$ Ekkor ugyanis f és h rendre $\mathrm{M}^\natural$-konvex illetve konkáv, úgy, hogy $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(h) \neq \emptyset$ továbbá a konjugáltjaik:

$$f^\bullet(p) = \sup_{x \in P(b_1)} \langle p, x\rangle$$

$$h^\circ(p) = -\sup_{x \in P(b_2)} \langle \mathbf{1} - p, x\rangle$$

Ekkor persze a már látott $p = \chi_X$ helyettesítéssel

$$f^\bullet(p) = b_1(X)$$

$$h^\circ(p) = -b_2(S - X)$$

Ha pedig ezeket beírjuk a 2.2.11 tételbe, akkor éppen az Edmonds metszet-tételt kapjuk.

2.3. L és M konvex függvények tulajdonságai

Az alábbiakban röviden 1-1 konkrét példát fogunk mutatni mindkét típusból, azonban számos további példa található a [2] könyvben illetve a [5] cikkben.

L-konvex függvények

Akár L-konvex, akár $L^\natural$-konvex függvényekről van szó, igazak az alábbi alapvető tulajdonságok:

- Egy $L^\natural$-konvex függvény valódi értelmezési tartománya $L^\natural$-konvex halmaz.
- Egy $L^\natural$-konvex függvény $L^\natural$-konvex marad, ha valódi értelmezési tartományát megszorítjuk egy $L^\natural$-konvex halmazra.
- $L^\natural$-konvex függvények összege is $L^\natural$-konvex.

Legyen $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$ és g egy lineáris függvény, azaz a $g(p) = \alpha + \langle p, x \rangle$ ahol $x \in \mathbb{R}^n$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor a g függvény L-konvex és így persze $L^\natural$-konvex is.

M-konvex függvények

Akár M-konvex, akár $M^\natural$-konvex függvényekről van szó, igazak az alábbi alapvető tulajdonságok:

- Egy $M^\natural$-konvex függvény valódi értelmezési tartománya $M^\natural$-konvex halmaz.
- Egy $M^\natural$-konvex függvény **nem feltétlenül** marad $M^\natural$-konvex, ha valódi értelmezési tartományát megszorítjuk egy $M^\natural$-konvex halmazra.
- $M^\natural$-konvex függvények összege **nem feltétlenül** $M^\natural$-konvex.
- $M^\natural$-konvex függvények infimális konvolúciója $M^\natural$-konvex marad.

Tekintsük ismét az előző g lineáris függvényt. Ez $M^\natural$-konvex. Viszont M-konvex csak akkor, ha $\mathrm{dom}(g)$ egy M-konvex halmaz.

Megragadnám még az alkalmat annak megemlítésére, hogy amennyiben szubmoduláris függvényeket szeretnénk maximalizálni, az általában NP-nehéz feladat, ám számos esetben meg tudjuk oldani ezt a problémát és a megoldhatóság ezen esetek egy részében

arra vezethető vissza, hogy az adott szubmoduláris függvény (vagy szubmoduláris függvények családja, amelyet maximalizálni szeretnénk) valójában $M^\natural$-konkáv, illetve $M^\natural$-konkáv függvények összege. Ha az olvasó érdekelt ebben a témakörben is, akkor a [11] cikkben részletesen tájékozódhat.

3. fejezet

Optimalizálás bázispoliédereken

Most, hogy már van fogalmunk arról, hogy mik azok az L és M-konvex halmazok illetve függvények, továbbá megismerkedtünk a diszkrét konvex analízis alapvető tételeivel, áttérünk egy, az ott megismert eredmények következményeire a gráfelmélet témakörében. A matematika BSc szakdolgozatomban foglalkoztam az ún. egalitárius irányításokkal, melyek egy irányítatlan gráf olyan megirányítását jelentik, ahol a legnagyobb befok a lehető legkisebb, ezen belül a következő legnagyobb befok a lehető legkisebb, és így tovább. Ezt a tulajdonságot nevezhetjük csökkenően minimális, vagy az angol rövidítést használva dec-min irányításnak. A problémát először a [12, 13] cikk szerzői vizsgálták. Nem túl nehéz belátni elemi eszközökkel, hogy ezt az egyszerű esetet meg lehet oldani egy kézenfekvő mohó algoritmussal, amely egy tetszőleges irányításból kiindulva, bizonyos utakat fordít meg egészen addig, amíg a kapott irányítás megfelelő nem lesz. Számos kérdés merült fel a témában, mint például az az egyszerű módosítása a feladatnak, hogy ne csak egalitárius irányítást keressünk, hanem erősen összefüggő egalitárius irányítást, vagy általánosabban, k-élösszefüggő egalitárius irányítást egy $2k$-élösszefüggő gráfban. Ezekre a kérdésekre is működöni látszott ugyanaz a mohó algoritmus, de ezt már nem tudtuk (és azóta sem ismerünk ilyen bizonyítást) elemi gráfelméleti eszközök segítségével bizonyítani. A BSc-s szakdolgozatom megírása után az ún. semi-matchingekre fordítottam nagyobb hangsúlyt mely tulajdonképpen a hozzárendelési feladat speciális verziója. Ott arról volt szó, hogy egy $(S, T; E)$ páros gráfban olyan M élhalmazt keresünk, amelyre teljesül, hogy S-ben minden pont foka 1, T-ben pedig a fenti értelemben egalitárius, azaz dec-min. Hétköznapi értelemben ezt úgy képzelhetjük el, mintha ügyintézőkhöz szeretnénk ügyfeleket rendelni, egyszerre egyet, és az a cél, hogy az ügyfelek össz-várakozási ideje a lehető legkevesebb legyen. Mint kiderült, ez a probléma is megoldható ugyanazzal az útfordító algoritmussal,

mint az irányításos verzió. Mi több, a probléma általánosabb alakjait is megoldotta az algoritmus, ám ezek közül nem mindegyiket lehetett bizonyítani eleinte. Az ebben a témában érdekelt olvasót elirányítanám a [14, 15, 16, 17] cikkekhez, mi most ugyanis rögtön az általános esetet fogjuk vizsgálni.

Később kiderült, hogy ez a két probléma (és számos másik) szorosan kapcsolódik egymáshoz. Ami pedig összeköti őket, az nem más, mint az M-konvex halmazok, pontosabban fogalmazva, bázispoliéderek egész pontjainak halmaza. Tudniillik, mind az egalitárius irányítások, mind a semi-matchingek megfeleltethetők egy bázispoliéder egész pontjainak, így felmerült a kérdés, hogy vajon az a mohó algoritmus, amely az egyszerű esetben megoldotta a problémát, nem bizonyítható-e ebben az általánosabb elméletben. A válasz pedig pozitív eredményt hozott, az általános alakú tételt könnyen be lehetett bizonyítani és így hirtelen rengeteg - a témába illő - gráfelméleti sejtés bizonyítást nyert. Ennek a fejezetnek a célja, hogy ezeket az eredményeket összefoglalja a bázispoliéderek nyelvezetén. Kiemelném újból, hogy a kapcsolat a diszkrét konvex analízissel ott jön be, hogy egy bázispoliéder egész pontjainak halmazáról ismert, hogy M-konvex halmaz. Ebben a témakörben minden jelentős új eredmény A. Frank és K. Murota nevéhez fűződik, alább pedig a [18, 19] cikkek jelentősebb eredményeit szeretném összefoglalni.

3.1. Dec-min elemek és tulajdonságaik

Egy általános bázispoliéder az S alaphalmazon adott egészértékű b szubmoduláris függvény segítségével:

$$B := B(b) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(S) = b(S), x(Z) \leq b(Z) \quad \forall Z \subseteq S\}$$

Jegyezzük meg, hogy B megadható a b szubmoduláris függvény komplementer függvényével (amely szupermoduláris), a következő módon:

$$B := B'(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(S) = p(S), x(Z) \geq p(Z) \quad \forall Z \subseteq S\}$$

Jelölje $\ddot{B}$ az egész pontok halmazát és legyen $m \in \ddot{B}$. Jelölje $T_m(s; b)$ azt az egyértelmű legszűkebb halmazt, amely tartalmazza $s \in S$-et. Azt mondjuk, hogy egy $X \subseteq S$ halmaz m-**pontos**, ha a bázispoliéder definíciójában megadott egyenlőtlenség, rá egyenlőséggel teljesül. Világos, hogy X pontosan akkor m-pontos b-re nézve, ha, $S - X$ m-pontos p-re nézve.

3.1.1. Állítás. *Legyen $s, t \in S$ és $m' := m - \chi_t + \chi_s$. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1) $m' \in \ddot{B}$.

2a) *Nem létezik $t\bar{s}$-halmaz, amely m-pontos p-re nézve.*

2b) $s \in T_m(t; p)$.

3a) *Nem létezik $s\bar{t}$-halmaz, amely m-pontos b-re nézve.*

3b) $t \in T_m(s; p)$.

Ekkor egy $m \in \ddot{B}$ pontra a lokális javítás azt jelenti, hogy $m(t) \geq m(s) + 2$ esetén az $m' := m - \chi_t + \chi_s \in \ddot{B}$ olyan elem, amelyre $m' << m$ ahol a „<<" jelölés értelemszerűen a lexikografikusan rendezett vektorra értendő. Egy $m \in \ddot{B}$ elemre azt mondjuk, hogy **lokálisan csökkenően minimális**, (a továbbiakban dec-min), ha nem létezik olyan $s, t \in S$, amelyre az előbb említett lokális javítás elvégezhető lenne. Hasonlóan definiálhatjuk az $m \in \ddot{B}$ **lokálisan növekvően maximális** (továbbiakban inc-max) elemet. Az alábbi állítás összefoglalja ezen két tulajdonság, valamint a lokális javítások kapcsolatát:

3.1.2. Állítás. *Legyen m egy egész eleme a $B = B(b) = B'(p)$ bázispoliédernek. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1a) *Nem létezik lokális javítás m-re nézve.*

1b) *m dec-min.*

1c) *m inc-max.*

2a) $m(s) \geq m(t) - 1 \quad \forall t \in S, s \in T_m(t; p)$

2b) *Ha $m(t) \geq m(s) + 2$, akkor létezik egy $t\bar{s}$-halmaz amely m-pontos p-re nézve.*

3a) $m(s) \geq m(t) - 1 \quad \forall s \in S, t \in T_m(s; b)$

3b) *Ha $m(t) \geq m(s) + 2$, akkor létezik egy $s\bar{t}$-halmaz amely m-pontos b-re nézve.*

Jegyezzük meg, hogy ennek a tételnek a tartalma nagyon egyszerű: Feltételezve, hogy van egy kiinduló megoldásunk - amely tehát nem feltétlen optimális - egy apró lokális javítással (útfordítás, alternáló út mentén az élek irányításának felcserélése, stb...) vagy

kaphatunk egy jobb megoldást, vagy ha már nem létezik ilyen javítás, akkor az aktuális megoldás biztosan optimális.

Nevezzünk egy X halmazt **m-top-halmaznak**, ha $m(u) \geq m(v)$, minden $u \in X, v \in S - X$ esetén. Ha az egyenlőtlenség szigorú, akkor **szigorú m-top-halmazokról** beszélhetünk. Nevezzünk továbbá egy m vektort **közel-uniformnak**, ha minden koordinátája legfeljebb egy értékben különbözik a többitől. Az igazi eredmény a korábbi két állítás következményeként, az alábbi tételben rejlik:

3.1.3. Tétel. *Legyen b egy egészértékű szubmoduláris függvény S-en, p a komplementer (szupermoduláris) függvénye. Jelölje továbbá $B = B(b) = B'(p)$ a b által definiált bázispoliédert. Ha m egy egész pontja B-nek, akkor az alábbiak ekvivalensek:*

1) *Nem létezik lokális javítás m-re nézve.*

2) *Léteznek $(\emptyset \subset) C_1 \subset C_2 \subset \ldots C_l = S$ m-tető-halmazok, amelyek m-pontosak p-re nézve. Sőt, hogyha tekintjük az $m_i = m|_{S_i}$ m megszorítását S_i-re nézve, akkor m_i közel-uniform minden i-re, ahol $S_1 := C_1$ és $S_i := C_i - C_{i-1}$.*

3a) *m globálisan dec-min.*

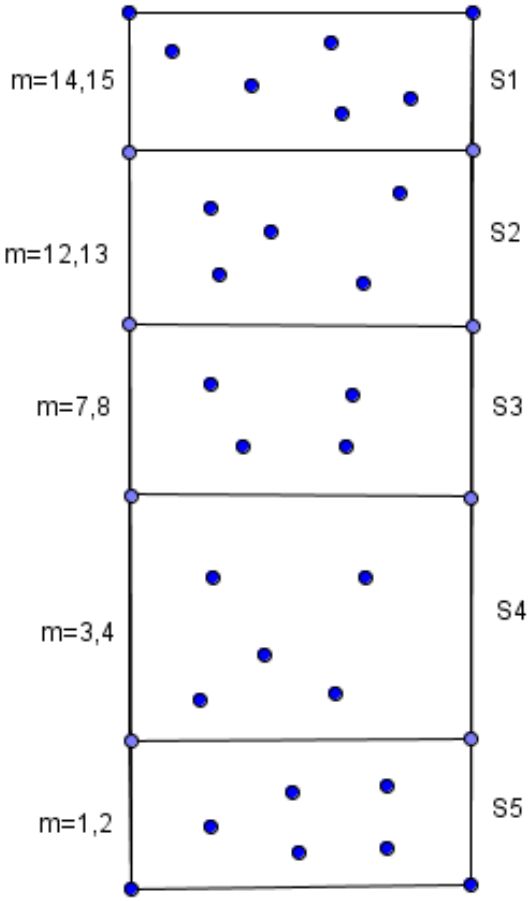
3b) *m globálisan inc-max.*

Vagyis ennek a tételnek az a tartalma, hogy a megadott feltételek mellett (egészértékű szubmoduláris függvény segítségével adott bázispoliéder egész pontjain lépkedve) a lokális optimum egybeesik a globális optimummal, sőt, az inc-max és dec-min optimumok is egybeesnek. A tétel tartalmának megértését elősegítheti a(z) 3.1 ábra, amely megmutatja, hogy a dec-min elemek milyen alakot öltenek.

Megjegyezném még azt is, hogy egy dec-min elem kiszámítása a fenti lokális javító algoritmussal ugyan polinomiális, de nem feltétlenül erősen polinomiális. Ennek ellenére erősen polinomiális algoritmus is létezik egy dec-min elem kiszámítására, ennek részleteit megtalálhatjuk a bevezetőben említett két cikkben.

3.1.4. Megjegyzés. Ha két bázispoliéder metszetéről beszélünk, akkor a dec-min optimum nem feltétlen esik egybe az inc-max optimummal.

Tekintsük ugyanis az alábbi példát. Legyen $S = s_1, s_2, s_3, s_4$ közös alaphalmaza két 2 rangú matroidnak, M_1-nek és M_2-nek. Legyen $\{s_1, s_4\}, \{s_2, s_3\}$ az M_1 körei, az M_2 körei pedig $\{s_1, s_3\}, \{s_2, s_4\}$. Ekkor mindkét matroidnak 4 bázisa van:



3.1. ábra. Egy bázispoliéder dec-min elemeinek alakja

$$\mathcal{B}_1 = \{\{s_1, s_2\}, \{s_1, s_3\}, \{s_2, s_4\}, \{s_3, s_4\}\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{\{s_1, s_2\}, \{s_1, s_4\}, \{s_2, s_3\}, \{s_3, s_4\}\}$$

Legyen B_1 és B_2 a két matroid bázispoliédere, azaz a konvex burkai a $\mathcal{B}_i$ incidencia vektorainak. Legyen

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_\in = \{\{s_1, s_2\}, \{s_3, s_4\}\}$$

és jelölje B a $\mathcal{B}$ két elemének konvex burkát, azaz B az $(1, 1, 0, 0)$ és $(0, 0, 1, 1)$ pontokat összekötő szakasz. Ekkor $B = B_1 \cap B_2$ (Edmonds, 1970). Legyen B_i', illetve B', az a bázispoliéder, amelyet B_i-ből, illetve B-ből, úgy kapunk, hogy az $(1, -1, 0, 0)$ vektort hozzávesszük B_i-hez. Ekkor:

$$\ddddot{B}'_1 = \{(2,0,0,0),(1,-1,1,1),(2,-1,1,0),(1,0,0,1)\}$$
$$\ddddot{B}'_2 = \{(2,0,0,0),(1,-1,1,1),(2,1,0,1),(1,0,1,0)\}$$
$$\ddddot{B}' = \{(2,0,0,0),(1,-1,1,1)\}$$

Ekkor az $x = (2,0,0,0)$ egy inc-max eleme $\ddddot{B}'$-nek, míg az $y = (1,-1,1,1)$ elem dec-min.

3.2. Négyzetösszeg és a dec-min elemek kapcsolata

Ha azon gondolkodunk, hogy milyen tartalmat hordozhat magában egy dec-min elem, könnyen eljuthatunk arra a pontra, hogy azt higgyük, egy vektor dec-min tulajdonsága egybeesik azzal a tulajdonsággal, hogy koordinátáinak négyzetösszege minimális. A négyzetösszeg ugyanis egy lokális javítás során mindig szigorúan csökken, így teljesen természetes gondolat, hogyha sehogy sem lehet csökkenteni lokális értelemben a négyzetösszeget, akkor talán igaz lehet, hogy globálisan sem. A precíz választ a következő tétel biztosítja:

3.2.1. Tétel. *Egy $\ddddot{B}$ M-konvex halmaz esetén az $m \in \ddddot{B}$ elem akkor és csak akkor minimális koordináta-négyzetösszegű, ha dec-min.*

3.2.2. Megjegyzés. Ha két M-konvex halmaz metszetéről beszélünk, akkor egy dec-min elem nem feltétlenül esik egybe egy négyzetösszeget minimalizáló elemmel.

A dec-min és inc-max elemeknél levő példához hasonlóan a B'_i vektorokat most úgy vegyük, hogy a $(2,2,3,0)$ vektort adjuk hozzá B_i-hez. Ekkor

$$\ddddot{B}'_1 = \{(3,3,3,0),(2,2,4,1),(2,3,3,1),(3,2,4,0)\}$$
$$\ddddot{B}'_2 = \{(3,3,3,0),(2,2,4,1),(3,2,3,1),(2,3,4,0)\}$$
$$\ddddot{B}' = \{(3,3,3,0,2,2,4,1)\}$$

Itt az $x = (3,3,3,0)$ a dec-min elem és az $y = (2,2,4,1)$ a négyzetösszeget minimalizáló elem.

Jelölje $W(z) := \sum z(s)^2 : s \in S$ a $z \in \mathbb{R}^S$ vektor koordinátáinak négyzetösszegét. A fentiek szerint, hogyha $m \in \ddddot{B}$ dec-min és $z \in \ddddot{B}$ tetszőleges, akkor $W(m) \leq W(z)$. Azt már tudjuk tehát, hogy a W mikor veszi fel minimum értékét, de azt is meg lehetne

kérdezni, hogy létezik-e min-max tétel és ha igen mi az? A válasz korántsem magától értetődő, de még ha tudjuk, hogy igen a válasz, magára a tételre rájönni akkor sem egyszerű. A 4. fejezetben azonban látni fogjuk, hogy miért is olyan nehéz kitalálni magát a min-max tételt, ha nem ismerjük a diszkrét konvex analízisbeli hátteret.

Legyen p tetszőleges halmazfüggvény S-en. Legyen $\pi \in \mathbb{R}^S$ olyan, hogy $\pi(s_1) \geq \pi(s_2) \geq \ldots \geq \pi(s_n)$ és jelölje $I_j = \{s_1, \ldots, s_j\}$ halmazt minden $j = 1, \ldots, n$-re. Ismeretes, hogy ekkor p lineáris kiterjesztése az alábbi

$$\hat{p}(\pi) = p(I_n)\pi(s_n) + \sum_{j=1}^{n-1} p(I_j)\left[\pi(s_j) - \pi(s_{j+1})\right]$$

3.2.3. Állítás. *Ha $m, \pi \in \mathbb{Z}^S$, akkor*

$$\sum_{s \in S} \left\lfloor \frac{\pi(s)}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{\pi(s)}{2} \right\rceil \geq \sum_{s \in S} m(s)\left[\pi(s) - m(s)\right]$$

Ahol egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $m(s) \in \left\{ \left\lfloor \frac{\pi(s)}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{\pi(s)}{2} \right\rceil \right\}$ minden $s \in S$ esetén.

3.2.4. Állítás. *Ha $m \in \ddot{B}$ és $\pi \in \mathbb{Z}^S$, akkor*

$$\hat{p}(\pi) \leq \sum_{s \in S} m(s)\pi(s)$$

Ahol egyenlőség akkor és csak akkor állhat, ha minden szigorú π-top-halmaz m-pontos.

Ezek alapján már ki lehet találni az optimalitási feltételeket és a min-max tétel triviális irányát.

3.2.5. Következmény. Legyen p tetszőleges halmazfüggvény S-en, amelyre $p(\emptyset) = 0$, továbbá m egy egész pontja a $B = B'(p)$ poliédernek. Ekkor minden $\pi \in \mathbb{Z}^S$ esetén

$$\sum_{s \in S} m(s)^2 \geq \hat{p}(\pi) - \sum_{s \in S} \left\lfloor \frac{\pi(s)}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{\pi(s)}{2} \right\rceil$$

Ahol egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha az alábbi két **optimalitási feltétel** teljesül

$O1)$ $m(s) \in \left\{ \left\lfloor \frac{\pi(s)}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{\pi(s)}{2} \right\rceil \right\}$ minden $s \in S$ esetén.

$O2)$ Minden szigorú π-top-halmaz m-pontos p-re nézve.

Mindezek után pedig már megmondható az általános min-max tétel is:

3.2.6. Tétel. *Legyen $B = B'(p)$ egy bázispoliéder a teljesen szupermoduláris p halmazfüggvény által definiálva. Ekkor*

$$\min\left\{\sum_{s\in S} m(s)^2 : m \in \ddot{B}\right\} = \max\left\{\hat{p}(\pi) - \sum_{s\in S}\left\lfloor\frac{\pi(s)}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{\pi(s)}{2}\right\rceil : \pi \in \mathbb{Z}^S\right\}$$

A következő érdekes kérdés lehet annak vizsgálata, hogyha nem a koordináták négyzetösszegét akarjuk minimalizálni, hanem a $\sum_{s\in S} c(s)m^2(s)$ kifejezés, valamely $c \in \mathbb{Z}^S$ és $m \in \ddot{B}$ esetén. Erre is tudjuk a választ:

3.2.7. Tétel. *Legyen $B = B'(p)$ egy bázispoliéder a teljesen szupermoduláris p halmazfüggvény által definiálva, valamint $c \in \mathbb{Z}^S, c \geq 1$ tetszőleges. Ekkor*

$$\min\left\{\sum_{s\in S} c(s)m(s)^2 : m \in \ddot{B}\right\}$$

$$= \max\left\{\hat{p}(\pi) - \sum_{s\in S}\left\lfloor\frac{1}{2}\left(\frac{\pi(s)}{c(s)}+1\right)\right\rfloor\left(\pi(s) - c(s)\left\lceil\frac{1}{2}\left(\frac{\pi(s)}{c(s)}+1\right)\right\rceil\right) : \pi \in \mathbb{Z}^S\right\}$$

Korábban láttuk, hogy, mivel két bázispoliéder metszete nem feltétlen bázispoliéder, (vagy ekvivalensen: két M-konvex halmaz metszete nem feltétlenül M-konvex) ezért a metszet esetében az inc-max és dec-min tulajdonságok nem esnek egybe. Azt viszont megkérdezhetjük, hogy mi a helyzet akkor, ha adottak a B_1 és B_2 bázispoliéderek és olyan $m \in \ddot{B}_1 \cap \ddot{B}_2$ pontot keresünk, amely esetén a $\sum_{s\in S} m^2(s)$ kifejezés, vagy rögtön a $\sum_{s\in S} c(s)m^2(s)$ kifejezés mikor minimális. Ezt a kérdést meg lehet válaszolni, hasonló alakú min-max tételek segítségével. Nevezetesen az alábbiak igazak.

3.2.8. Tétel. *Legyen $B_1 = B_1'(p_1)$ és $B_2 = B_2'(p_2)$ két bázispoliéder a teljesen szupermoduláris p_1 és p_2 halmazfüggvények által definiálva. Ekkor*

$$\min\left\{\sum_{s\in S} m(s)^2 : m \in \ddot{B}_1 \cap \ddot{B}_2\right\}$$

$$= \max\left\{\hat{p_1}(\pi_1) + \hat{p_2}(\pi_2) - \sum_{s\in S}\left\lfloor\frac{\pi_1(s)+\pi_2(s)}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{\pi_1(s)+\pi_2(s)}{2}\right\rceil : \pi_1, \pi_2 \in \mathbb{Z}^S\right\}$$

Ha pedig a $c(s)m^2(s)$-re vagyunk kíváncsiak, akkor az alábbi tétel érvényes.

3.2.9. Tétel. *Legyen $B_1 = B_1'(p_1)$ és $B_2 = B_2'(p_2)$ két bázispoliéder a teljesen szupermoduláris p_1 és p_2 halmazfüggvények által definiálva, valamint $c \in \mathbb{Z}^S, c \geq 1$ tetszőleges. Ekkor:*

$$\min\left\{\sum_{s\in S} c(s)m(s)^2 : m \in \ddot{B}_1 \cap \ddot{B}_2\right\}$$

$$= \max\left\{\hat{p_1}(\pi_1) + \hat{p_2}(\pi_2) - \sum_{s\in S}\left\lfloor\frac{1}{2}\left(\frac{\pi(s)}{c(s)}+1\right)\right\rfloor\left(\pi(s) - c(s)\left\lceil\frac{1}{2}\left(\frac{\pi(s)}{c(s)}+1\right)\right\rceil\right)\right\}$$

Ahol $\pi = \pi_1 + \pi_2, \pi_1, \pi_2 \in \mathbb{Z}^S$.

Az imént látott összes min-max tétel kiolvasható a Fenchel-féle dualitás tételből, azaz a(z) 2.2.11 tételből, miután a konjugáltat az egyes esetekben konkrétan kiszámoljuk és behelyettesítjük az ottani képletbe. Néhány példát a konjugált függvények kiszámítására most meg is említenék, legfőképpen azokat, amelyek az iménti tételek szempontjából fontosak. Megjegyezzük, hogy ezek a függvények az alábbi példában mindig egészértékűek, mi több, példaképp az egyváltozós eseteket mutatjuk be.

A jelölések megegyeznek azokkal a jelölésekkel, amelyeket a következő fejezetben fogunk használni. Ha valamilyen jelölés ezek közül e pillanatban nem volna egyértelmű, akkor a 4. fejezet elejére lapozva tisztázhatjuk az adott jelölés jelentését. Azért említjük meg mégis most ezeket a példákat és nem pedig később, mert - az egész dolgozat elolvasása után - jobban érezhető hogy a konjugáltak kiszámításának fontossága már ezekben a konkrét (még kevésbé általános) esetekben is elengedhetetlen.

3.2.10. Példa. (konkrét diszkrét konvex konjugáltak)

- $\varphi(k) \equiv c$ esetén

$$\varphi^\bullet(l) = \begin{cases} -c, & \text{ha } l = 0 \\ +\infty, & \text{egyébként} \end{cases}$$

- $\varphi(k) = ck$ esetén

$$\varphi^\bullet(l) = \begin{cases} 0, & \text{ha } l = c \\ +\infty, & \text{egyébként} \end{cases}$$

- $\varphi(k) = k^2$ esetén

$$\varphi^\bullet(l) = \left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{l}{2}\right\rceil$$

- $\varphi(k) = ck^2$ esetén
$$\varphi^\bullet(l) = \left\lfloor \frac{l+c}{2c} \right\rfloor \left(l - \left\lfloor \frac{l+c}{2c} \right\rfloor \right)$$
- $\varphi_0(k) := \varphi(k - k_0)$ esetén
$$\varphi_0^\bullet(l) = \varphi^\bullet(l) + k_0 l$$
- $\varphi := \varphi_1 + \varphi_2$ esetén
$$\varphi^\bullet(l) = \min\{\varphi_1^\bullet(l_1) + \varphi_2^\bullet(l_2) \quad | \, l_1 + l_2 = l, l_i \in \mathbb{Z}\}$$
- Ha, $A \leq B$ egészek és $I := [A, B]_\mathbb{Z}$ jelöli az A és B közötti egészek halmazát, akkor a φ diszkrét konvex függvény megszorítása az I-re:
$$\varphi_I(k) = \begin{cases} \varphi(k) & \text{ha } A \leq k \leq B \\ +\infty, & \text{egyébként} \end{cases}$$
és a konjugáltja:
$$\varphi_I^\bullet(l) = \min\{\varphi(l_1) + \max\{Al_2, Bl_2\} : l_1 + l_2 = l, l_i \text{ egész}\}$$

A $\varphi(k) = ck^2$ esetet ki is részletezzük. A konjugált definíciója alapján ki kell számolnunk a $\varphi^\bullet(l) = \max\{kl - \varphi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ értéket. Világos, hogy $\varphi'(k) = \varphi(k+1) - \varphi(k) = c(k+1)^2 - ck^2 = c(2k+1)$. A $kl - \varphi(k)$ akkor maximális k mellett, ha $\varphi'(k) \geq l \geq \varphi'(k-1)$ azaz $c(2k+1) \geq l \geq c(2k-1)$, amely átrendezve $\frac{l-c}{2c} \leq k \leq \frac{l+c}{2c}$, innen pedig már nincs más dolgunk, mint alsó egészrészt venni és beírni a konjugált definíciójába.

3.2.11. Megjegyzés. Az utolsó példa arra jó, hogyha alsó és felső korlátokat szeretnénk bevezetni a korábbi tételekben, akkor is tudjuk kezelni a konjugált függvényt, s így a min-max tételt is fel lehet írni ezekben az esetekben.

4. fejezet

Min-Max tétel box-TDI poliéderekre

Az előző fejezetben már több min-max tételt is láthattunk, amelyek M-konvex, illetve M_2-konvex (azaz két M-konvex halmaz metszete) halmazok egész pontjai között kerestek valamilyen értelemben minimális tulajdonságút. Az összes ottani tétel annak volt köszönhető, hogy az általános esetbeli Fenchel-féle dualitás tételben a konjugált függvényt konkrétan ki lehetett számolni és beírni az általános formulába a konkrét kiszámolt függvényt. Ha nem ismernénk a konjugált fogalmát, azt hihetnénk, hogy ezeket a min-max tételeket nem is lehet, de legalábbis nagyon nehéz volna kitalálni. A szóban forgó tételekben ugyanis már „nyoma sincs" a konjugáltnak, mindegyik tétel olyan alakot ölt, mint a kombinatorikus optimalizálásban jól ismert, szokványos min-max tételek, mint például Kőnig, Egerváry, Dilworth, stb.. tételei. Természetesen merülhet fel a kérdés, hogy a konjugált fogalma nélkül vajon hogy lehet kitalálni illetve levezetni ezeket a tételeket? A válasz abban rejlik, hogy az M-konvex és M_2-konvex halmazok szerepe ezekben a tételekben közös: mindkettő diszkrét box-TDI rendszer. A cél tehát a következő: az előző fejezetben látott tételekhez hasonló alakú tételeket szeretnénk kimondani box-TDI poliéderekre.

4.1. Box-TDI poliéderek

Az előző fejezetben használt jelöléseket továbbra is használni fogjuk, ezen felül legyen Q egy egész mátrix, p pedig egész vektor, az alaphalmaz elemeit S-el jelöljük, ahol most $S \subseteq \mathbb{Z}^n$. Egy $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvény diszkrét konvex, ha

$$\varphi(k-1) + \varphi(k+1) \geq 2\varphi(k)$$

Legyen továbbá $\varphi'(k) := \varphi(k+1) - \varphi(k)$. Ezen felül, ha az S minden s eleméhez adott egy φ_s diszkrét konvex függvény, akkor bevezetjük még a $\Phi : \mathbb{Z}^S \to \mathbb{Z}$ és $\Phi' : \mathbb{Z}^S \to \mathbb{Z}$ függvényeket, melyek rendre

$$\Phi(z) := \sum_{s \in S} \varphi_s(z(s)) \qquad \Phi'(z) := \sum_{s \in S} \varphi'_s(z(s))$$

Ha a φ_s minden s-re diszkrét konvex, akkor Φ szeparábilis diszkrét konvex. A diszkrét konjugáltak rendre

$$\varphi^\bullet(l) := \max\{kl - \varphi(k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Phi^\bullet(w) := \sum_{s \in S} \varphi^\bullet_s(w(s)) = \max\{wz - \Phi(z) : z \in \mathbb{Z}^S\}$$

Mindenezen jelölések bevezetése illetve átismétlése után tekintsünk egy $\{x : Qx \geq p\}$ primál rendszert. Erre a dualitás tétel azt mondja, hogy:

$$\min\{cx : Qx \geq p\} = \max\{yp : y \geq 0, yQ = c\}$$

Az $\{x : Qx \geq p\}$ rendszert akkor nevezzük **teljesen duálisan egészértékűnek**, vagy röviden TDI-nak (a TDI rövidítés az angol „totally dual integral" kifejezésből ered), ha minden olyan **egész** c-re, melyre az optimum korlátos, a duális feladat optimuma egész y vektoron is felvétetik.

Ugyanez a rendszer **box-TDI**, ha a kibővített $\{Qx \geq p, f \leq x \leq g\}$ rendszer TDI minden **racionális** f és g korlátozó vektor esetén. Egy poliédert akkor nevezünk **box-TDI poliédernek**, ha leírható box-TDI rendszerrel. Ezek a definíciók kiterjeszthetők arra az esetre is, amikor a rendszerünk $\{Q_1x \geq p_1, Q_2x = p_2\}$ alakban van megadva, tehát amikor nem csak egyenlőtlenségek, hanem egyenlőségek is szerepelnek benne. Jelölje R a $\{Qx \geq p\}$ poliédert.

A box-TDI poliéderekkel először Edmonds és Giles foglalkoztak, később Cook [20] illetve egy meglepően friss, 2020-as cikk fűződik a témában Chervet, Grappe és Robert nevéhez [21]. A legfrissebb eredmények és a min-max tétel pedig A. Frank és K. Murota munkájának köszönhető [22].

4.1.1. Állítás. *Egy $\{Q_1x \geq p_1, Q_2x = p_2\}$ rendszer pontosan akkor box-TDI, ha a $\{Q_1x \geq p_1, Q_2x \geq p_2, -Q_2x \geq -p_2\}$ rendszer box-TDI.*

4.1.2. Állítás. *Egy box-TDI rendszer mindig TDI.*

4.1.3. Állítás. *Egy TDI rendszer, amely definiál egy box-TDI poliédert, mindig box-TDI.*

4.1.4. Állítás. *Ha a $\{Qx \geq p\}$ rendszer box-TDI, akkor Q egy oszlopának negálásával, törlésével, vagy megkettőzésével box-TDI rendszert kapunk.*

4.1.5. Állítás. *Ha a $\{Qx \geq p\}$ rendszer box-TDI, akkor egy $z^* \in \ddot{R}$ elemre a $p_0 := p - Qz^*$. segítségével definiált $\{Qx \geq p_0\}$ rendszer is box-TDI.*

4.2. A min-max tétel két alakban

Legyen $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tetszőleges egészértékű függvény. Azt mondjuk, hogy az egészekből álló $\{k^*, l^*\}$ rendezett pár **φ-re illeszkedő**, ha

$$\varphi(k^*) - \varphi(k^* - 1) \leq l^* \leq \varphi(k^* + 1) - \varphi(k^*)$$

azaz

$$\varphi'(k^* - 1) \leq l^* \leq \varphi'(k^*)$$

Legyen $\Phi : \mathbb{Z}^S \to \mathbb{Z}$ tetszőleges szeparábilis függvény, melyet az egyváltozós φ_s függvények definiálnak. Azt mondjuk, hogy az egész vektorokból álló $\{z^*, w^*\}$ rendezett pár **Φ-re illeszkedő**, ha $\{z^*(s), w^*(s)\}$ φ-re illeszkedő minden $s \in S$ esetén, azaz

$$\varphi_s(z^*(s)) - \varphi_s(z^*(s) - 1) \leq w^*(s) \leq \varphi_s(z^*(s) + 1) - \varphi_s(z^*(s)) \quad \forall s \in S$$

azaz

$$\Phi'(z^* - \mathbf{1}) \leq w^*(s) \leq \Phi'(z^*)$$

4.2.1. Állítás. *A fenti jelölésekkel élve*

$$l^* k^* - \varphi(k^*) \geq l^* k - \varphi(k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Vagyis tulajdonképpen $\varphi^\bullet(l^*) = l^* k^* - \varphi(k^*)$

Legyen most $R \subseteq \mathbb{R}^S$ tetszőleges egész poliéder és $z^* \in \ddot{R}$, továbbá y^* olyan vektor, melynek komponensei megfelelnek a Q oszlopainak. Azt mondjuk, hogy a rendezett egész vektorokból álló $\{z^*, y^*\}$ pár **Φ-kompatibilis**, ha $\{z^*, w^*\}$ Φ-illeszkedő $w^* := y^* Q$ esetén. Formálisan

$$\Phi'(z^* - \mathbf{1}) \leq y^* Q \leq \Phi'(z^*)$$

4.2.2. Megjegyzés. Ha Φ egy lineáris függvény, azaz $\Phi(z) = cz$ valamely $c \in \mathbb{Z}^S$ vektorra, akkor $\Phi'(z) = c$ minden $z \in \mathbb{Z}^S$-re, ezért a Φ-kompatibilitás ekvivalens azzal, hogy $c \leq y^*Q \leq c$ vagyis hogy $c = y^*Q$.

4.2.3. Állítás. *Legyen Φ szeparábilis diszkrét konvex függvény $\mathbb{Z}^S$-en és tegyük fel, hogy $z^* \in \ddot{R}$, továbbá $y^* \geq 0$ úgy, hogy $\{z^*, y^*\}$ Φ-kompatibilis. Ekkor*

$$\Phi(z) \geq \Phi(z^*) - y^*(Qz^* - p) \quad \forall z \in \ddot{R}$$

Az eddig megfogalmazott definíciók és állítások, megjegyzések szükségesek ahhoz, hogy bizonyítani tudjuk az általános min-max tételt, mely esetben tehát R nem akármilyen poliéder, hanem box-TDI poliéder. Ez a tétel nevezetesen:

4.2.4. Tétel. (Frank+Murota, 2020) *Legyen $\varphi_s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ egészértékű diszkrét konvex függvény $\mathbb{Z}$-n minden $s \in S$-re, továbbá Φ az ezek által definiált szeparábilis diszkrét konvex függvény $\mathbb{Z}^S$-en. Tegyük fel, hogy az egész Q mátrixra és p vektorra a $\{Qx \geq p\}$ rendszer box-TDI, amely definiálja a nemüres $R := \{x : Qx \geq p\} \subseteq \mathbb{R}^S$ box-TDI poliédert úgy, hogy Φ véges $\ddot{R}$-en. Ekkor Φ pontosan akkor alulról korlátos $\ddot{R}$-en, ha létezik egy $z \in \ddot{R}$ elem és $y \geq 0$ egész vektor, amelyekre $\{z, y\}$ Φ-kompatibilis.*
Továbbá, ha Φ alulról korlátos $\ddot{R}$-en, akkor az alábbi min-max tétel áll fenn:

$$\min\{\Phi(z) : z \in \ddot{R}\} = \max\{\Phi(z) - y(Qz - p) : z \in \ddot{R}, y \geq 0 \text{ egész, } \{z, y\} \ \Phi\text{-kompatibilis}\}$$

Sőt, egy optimális y^* vektor választható úgy is, hogy pozitív komponenseinek száma legfeljebb $2|S|$.

A tételből kiolvashatjuk az optimalitási feltételeket is:

O1) $y^*(Qz^* - p) = 0)$

O2) $\Phi'(z^* - \mathbf{1} \leq y^*Q \leq \Phi'(z^*))$

A min-max tétel tehát ebben a formában nem tartalmazza a diszkrét konjugáltat és általánosítja, az előző fejezetben látott tételeket. Fel lehet azonban írni ugyanezt a min-max tételt úgy, hogy szerepeljen benne a konjugált, a teljesség kedvéért most ezt is megtesszük. Ehhez azonban néhány dolgot meg kell jegyeznünk először. Az első észrevétel, hogy a 4.2.1 állítás megfordítása is igaz, azaz:

4.2.5. Állítás. *Ha φ olyan diszkrét konvex függvény, melyre $\varphi^\bullet(l^*) = l^*k^* - \varphi(k^*)$ akkor a $\{k^*, l^*\}$ pár φ-re illeszkedő.*

4.2.6. Következmény. Legyen $R = \{x : Qx \geq p\} \subseteq \mathbb{R}^S$ tetszőleges egész poliéder, φ és Φ pedig mint korábban. Ekkor minden $z \in \ddot{R}$ elemre és egész $y \geq 0$ vektorra

$$\Phi(z) \geq yp - \Phi^\bullet(yQ)$$

Ha itt egyenlőség áll fenn valamilyen z^* és y^* esetén, akkor z^* minimális elem Φ-re nézve $\ddot{R}$-en és a $\{z^*, y^*\}$ pár Φ-kompatibilis.

Mindezek alapján pedig az előző tétel új formában:

4.2.7. Tétel. (Frank+Murota, 2020 konjugáltas alak) *A 4.2.4 feltételeivel élve az alábbi min-max formulát kaphatjuk:*

$$\min\{\Phi(z) : z \in \ddot{R}\} = \max\{yp - \Phi^\bullet(yQ) : y \geq 0 \text{ egész}\}$$

Az optimális y^* vektor választható úgy is, hogy legfeljebb $2|S|$ komponense legyen pozitív.

Az imént látott tétel mindkét alakját ki lehet mondani akkor is, ha R egy $\{Q'x \geq p', Q^=x = p^=\}$ alakú box-TDI rendszerrel van definiálva. A box-TDI rendszerek tulajdonságai alapján ekkor a $\{Q'x \geq p', Q^=x \geq p^=, -Q^= \geq -p^=\}$ rendszer szintén box-TDI és ugyanazt az R poliédert definiálja.

Nevezzünk egy $(y', y^=)$ vektort **előjel-megengedettnek**, ha $y' \geq 0$ azaz ha a Q' soarihoz tartozó komponensekről nemnegativitást követelünk meg. Ekkor az előbbi tétel (mindkét alak egyszerre) így hangzik:

4.2.8. Tétel. (Frank+Murota, általános alak, 2020) *A 4.2.4 és 4.2.7 tételekben szereplő feltételekkel élve legyen most $R = \{x : Q'x \geq p', Q^=x = p^=\}$ box-TDI poliéder, ahol $Q', Q^=, p', p^=$ mind egészek. Ekkor*

$$\begin{aligned}
&\min\{\Phi(z) : z \in \ddot{R}\} = \\
&= \max\{\Phi(z) - y(Qz - p : z \in \ddot{R}), y \text{ előjel-megengedett és egész és } \{z, y\}\ \Phi\text{-kompatibilis}\} \\
&= \max\{yp - \Phi^\bullet(yQ) : y \text{ előjel-megengedett és egész}\}
\end{aligned}$$

Ahol $Q = (Q', Q^=)^T$ és $p = (p', p^=)^T$. Egy $z^* \in \ddot{R}$ pontosan akkor minimalizálja Φ-t, ha létezik egy előjel-megengedett y^* vektor, amely teljesíti az optimalitási feltételeket:

$$y^*(Qz^* - p) = 0$$

$$\Phi'(z^* - \mathbf{1}) \leq y^*Q \leq \Phi'(z^*)$$

Sőt, y^* választható úgy is, hogy a nemnulla komponenseinek száma legfeljebbe $2|S|$.

A most látott tételek megfogalmazása után nézzük meg, hogy hogyan is lehet megfogalmazni az előző fejezetben látott 3.2.6 és 3.2.7 tételeket, melyek M-konvex halmazokra (bázispoliéder egész pontjaira) voltak kimondva. Most azonban tetszőleges box-TDI poliéderekre mondhatjuk ki őket, melyeknek speciális esetei a korábbi tételek. Tehát az imént említett előző fejezetbeli tételek a most következő 4.2.9 és 4.2.11 tételek speciális esetei.

4.2.9. Tétel. *Legyen $Q = (Q', Q^=)^T$ egész mátrix, $p = (p', p^=)^T$ egész vektor és tegyük fel, hogy a $\{Q'x \geq p', Q^=x = p^=\}$ rendszer box-TDI. Jelölje R ezen rendszer által definiált poliéder (amely szintén box-TDI). Ekkor*

$$\min\{z^2 : z \in \ddot{\ddot{R}}\} = \max\{yp - \left\lfloor \frac{yQ}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{yQ}{2} \right\rceil : y(y', y^=) \text{ előjel-megengedett és egész}\}$$

Továbbá, egy $z^* \in \ddot{\ddot{R}}$ elem akkor és csak akkor minimalizálja a négyzetösszeget, ha létezik olyan előjel-megengedett egész y^* vektor, amelyre az alábbi két optimalitási feltétel teljesül:

$$y^*(Qz^* - p) = 0$$

$$2z^* - \mathbf{1} \leq y^*Q \leq 2z^* + \mathbf{1}$$

Az optimális y^* duális megoldás választható olyannak is, hogy legfeljebb $2|S|$ komponense nemn nulla.

4.2.10. Megjegyzés. A második optimalitási feltétel úgy is írható, hogy

$$\left\lfloor \frac{y^*Q}{2} \right\rfloor \leq z^* \leq \left\lceil \frac{y^*Q}{2} \right\rceil$$

Ha pedig a súlyozott négyzetösszeg minimumára vagyunk kíváncsiak, akkor

4.2.11. Tétel. *Legyen $\{Qx \geq p\}$ box-TDI rendszer, R az általa definiált poliéder, továbbá legyen c egy pozitív egészértékű vektor $\mathbb{Z}^S$-en. Ekkor*

$$\min\{\sum_{s \in S} c(s)z(s)^2 : z \in \ddot{\ddot{R}}\} =$$
$$= \max\{yp - \sum_{s \in S} \left\lfloor \frac{w(s) + c(s)}{2} \right\rfloor \left(w(s) - c(s) \left\lfloor \frac{w(s) + c(s)}{2} \right\rfloor \right) : w = yQ, y \geq 0 \text{ egész}\}$$

Továbbá, egy $z^* \in \ddot{\ddot{R}}$ elem akkor és csak akkor minimalizálja a súlyozott négyzetösszeget, ha létezik olyan egész y^* vektor, amelyre az alábbi két optimalitási feltétel teljesül:

$$y^*(Qz^* - p) = 0$$

$$2c(s)z(s)^* - \mathbf{1} \leq w^*(s) \leq 2c(s)z(s)^* + \mathbf{1} \quad \forall s \in S$$

Ahol $w^* := y^*Q$. *Az optimális* y^* *duális megoldás választható olyannak is, hogy legfeljebb* $2|S|$ *komponense nemn nulla.*

Ezek a formulák tehát azért hasznosak, mert nem használják a konjugált függvényt, noha a háttérben az húzódik meg. Így hasonlítanak azokhoz a kombinatorikai értelemben vett min-max tételekhez, amelyek mindenki számára ismertek. Mindez azért volt megtehető, mert az adott esetekben a konjugált függvényt explicit módon fel lehetett írni, ezért is fontos az, hogy minél több konjugáltat fel tudjunk írni, hogy aztán később azokat a korábbi tételekbe helyettesítve, immár konjugált-mentes - azaz hagyományos értelemben vett - min-max tételeket kaphassunk. Az ilyen tételek ugyanis jó alapot szolgáltatnak ahhoz, hogy a jövőben polinomiális, illetve erősen polinomiális algoritmusok születhessenek az optimum megtalálására.

5. fejezet

Inverz optimalizálási problémák

A kombinatorikus optimalizálás témakörében igencsak ismert és tanulmányozott a legolcsóbb utak, fenyők, párosítások, stb.. keresése és ezen problémákra számos eredmény létezik. Egy inverz optimalizálási problémában előre adott egy w_0 költségfüggvény és egy z_0 objektum (út, fenyő, párosítás, stb..) és célunk a w_0 módosítása w-re oly módon, hogy a keletkező w költségfüggvényre nézve z_0 optimális legyen és a w eltérése w_0-tól a lehető legkisebb legyen. Ezt az eltérést rengeteg féleképpen mérhetjük, a leggyakoribb értelmezések az l_1, l_2 és l_∞ normák. Ha w_0 egészértékű, akkor előírhatjuk azt is hogy w is egészértékű legyen. Az is előfordulhat, hogy az input objektum csupán része kell hogy legyen egy optimálisnak a keletkező w-re nézve, vagy épp ellenkezőleg, hogy egy w-re nézve optimális objektum kerülje el az z_0-t. Egy másik verzióban pedig nem egyetlen z_0, hanem $z_1, \ldots, z_k$ input adott és a cél olyan w keresése, hogy mindegyik z_i optimális legyen w-re nézve, s mindemellett w eltérése minimális legyen w_0-tól. Számos variánsa létezik tehát a problémának, ám ebben a fejezetben mi csak arra koncentrálunk, amikor w_0 és w egészértékű és egyetlen z_0 input adott, az eltérést pedig egy tetszőleges szeparábilis diszkrét konvex függvénnyel fogjuk mérni.

5.1. Min-max tétel az általános inverz problémára

Az előző fejezet jelöléseihez hasonlóan legyen $\{Qx \geq p\}$ box-TDI rendszer, R pedig az általa definiált poliéder. Legyen $z_0 \in \ddot{R}$ egy rögzített elem, φ_s egészértékű diszkrét konvex függvény minden $s \in S$-re és Φ a φ_s függvények által definiált szeparábilis diszkrét konvex függvény. Legyenek továbbá $l, s : S \to \mathbb{Z}$ korlátozó függvények, amelyekre $l \leq u$.

Célunk tehát egy olyan egészértékű w vektor keresése (költség, célfüggvény) S-en,

amelyre z_0 minimális költségű elem, azaz $wz_0 \leq wx \quad \forall x \in \mathbb{R}$ és $l \leq w \leq u$ és w eltérése w_0-tól, azaz $\Phi(w)$ minimális. Az alábbi tétel, illetve annak következménye szükséges és elégséges feltételt nyújt ezekre a feltételekre nézve, leszámítva azt, hogy $\Phi(w)$ minimális.

5.1.1. Tétel. *Legyen Q egész mátrix, p egész vektor, a $\{Qx \geq p\}$ rendszer pedig box-TDI, R az általa definiált poliéder, melynek z^* egy egész eleme, l, u pedig a fenti tulajdonságú korlátozó vektorok. Akkor és csak akkor létezik olyan egészértékű, nemnegatíg y^* vektor, melyre $l \leq y^*Q \leq u$ és $y^*(Qz^* - p) = 0$ ha*

$$\widetilde{l}(S^-) \leq \widetilde{u}(S^+)$$

Fennáll minden $\{S^-, S^+\}$ diszjunkt S-részhalmazokra, amelyekre

$$z' := z^* + \chi_{S^+} - \chi_{S^-} \in \ R$$

Lineáris programozási ismeretek fényében kimonthatjuk, hogy z^* akkor és csak akkor minimális elem egy w^* költségfüggvényre nézve, ha a duális y^* megoldás teljesíti az optimalitási feltételeket, azaz $y^* \geq 0, y^*Q = w^*$ és $y^*(Qz^* - p) = 0$. Ennek alapján az előbbi tétel azonnali következménye, hogy:

5.1.2. Következmény. Legyen Q, p, R, l, u és z^* olyanok, mint az előző tételben. Pontosan akkor létezik egy egészértékű w^* költségfüggvény S-en, amelyre $l \leq w^* \leq u$ és z^* minimális elem w^*-ra nézve, ha a(z) 5.1.1 tételbeli két feltétel fennáll.

Így pedig már láthatjuk, hogy az inverz optimalizálás problémában majdnem minden feltétel teljesül, már csak $\Phi(w)$ minimalizálásáról kell gondoskodnunk valahogyan. Ehhez szükségünk lesz a box-TDI rendszerek egy másik tulajdonságára. Legyen a $\{Kx \geq 0\}$ rendszer box-TDI, amely a $C := \{x : Kx \geq 0\}$ box-TDI kúpot definiálja. Legyen C^* a **duális kúpja** C-nek, azaz $C^* := \{w : yK = w, y \geq 0\}$

5.1.3. Állítás. *Egy C kúp akkor és csak akkor box-TDI, ha a C^* duális kúpja is box-TDI.*

Mindezek után kimonthatjuk a 4.2.8 tételt box-TDI kúpokra, mely az alábbi:

5.1.4. Tétel. *Legyen C box-TDI kúp, melynek C^* a duális kúpja (amely az előző állítás szerint szintén box-TDI), továbbá Φ egy egészértékű szeparábilis diszkrét konvex függvény $\mathbb{Z}^S$-en. Ekkor*

$$\min\{\Phi(z) : z \in \ddot{C}\} = \tag{5.1}$$

$$= \max\{\Phi(z) - wz : z \in \ddot{C}, w \in \ddot{C^*}, \{z, w\} \ \Phi\text{-re illeszkedő}\} \tag{5.2}$$

$$= \max\{-\Phi^\bullet(w) : w \in \ddot{C^*}\} \tag{5.3}$$

Továbbá egy $z^* \in \ddot{C}$ *akkor és csak akkor* Φ*-minimalizáló, ha létezik olyan* $w^* \in \ddot{C}^*$*, amelyre* $z^*w^* = 0$ *és*

$$\Phi'(z^* - \mathbf{1}) \leq w^* \leq \Phi'(z^*)$$

Mivel a tételben sehol sem használtuk ki a C kúp leírását, ezért ugyanezt a tételt kimondhatjuk a C kúp C^* duálisára is, azaz

5.1.5. Tétel. *Legyen* C *box-TDI kúp, melynek* C^* *a duális kúpja (amely az előző állítás szerint szintén box-TDI), továbbá* Φ *egy egészértékű szeparábilis diszkrét konvex függvény* $\mathbb{Z}^S$*-en. Ekkor*

$$\min\{\Phi(z) : z \in \ddot{C}^*\} = \tag{5.4}$$

$$= \max\{\Phi(z) - wz : z \in \ddot{C}^*, w \in \ddot{C}, \{z, w\} \ \Phi\text{-re illeszkedő}\} \tag{5.5}$$

$$= \max\{-\Phi^\bullet(w) : w \in \ddot{C}\} \tag{5.6}$$

Továbbá egy $z^* \in \ddot{C}^*$ *akkor és csak akkor* Φ*-minimalizáló, ha létezik olyan* $w^* \in \ddot{C}$*, amelyre* $z^*w^* = 0$ *és*

$$\Phi'(z^* - \mathbf{1}) \leq w^* \leq \Phi'(z^*)$$

Mindezek ismeretében már kimondhatjuk a min-max tételt az általános inverz optimalizálási feladatra.

5.1.6. Tétel. *Legyen* $\{Qx \geq p\}$ *box-TDI rendszer,* R *az általa definiált egész box-TDI poliéder,* Φ *egy tetszőleges egészértékű szeparábilis diszkrét konvex függvény* $\mathbb{Z}^S$*-en. Legyen továbbá* $z_0 \in \ddot{R}$ *és* $\{Q_0x \geq p_0\}$ *az a részrendszer, mely tartalmazza a* $\{Qx \geq p\}$ *rendszerben a* z_0 *által egyenlőséggel teljesített egyenlőtlenségeket (ezeket szokás aktív soroknak is nevezni). Legyen* $C := \{x : Q_0x \geq 0\}$ *és* $C^* := \{w : yQ_0 = w, y \geq 0\}$ *a duális kúpja. Ekkor*

$$\min\{\Phi(w) : z_0 \ w\text{-minimalizáló elem } \ddot{R}\text{-ben és } w \text{ egészértékű}\} =$$
$$= \max\{\Phi(w) - zw : w \in \ddot{C}^*, z \in \ddot{C}, \{w, z\} \ \Phi\text{-re illeszkedő}\}$$
$$= \max\{-\Phi^\bullet(z) : z \in \ddot{C}\}$$

Továbbá egy egészértékű w^* *költségfüggvény, melyet* z_0 *minimalizál* R*-en akkor és csak akkor minimalizálja* Φ*-t, ha létezik* $z^* \in \ddot{C}$ *amire* $w^*z^* = 0$ *és a* $\{w^*, z^*\}$ *pár* Φ*-re illeszkedő.*

Sok eredményt láthattunk eddig diszkrét konvex függvényekkel kapcsolatban. Temérdek sok min-max tétel fogalmazható meg, mind a konjugált függvény explicit felírásának köszönhetően, ám speciális esetben láttuk, hogy a konjugált fogalma kiküszöbölhető a tételekből és így tisztán kombinatorikai értelemben vett min-max tételeket fogalmazhatunk meg. Ezen tételek ismeretében a következő kérdés mindig az, hogy algoritmikusan hogy lehet megtalálni egy optimális tulajdonságú objektumot. Ha például az inverz legolcsóbb fenyő problémát vesszük alapul, akkor A. Frank és G. Hajdu kifejlesztettek egy egyszerű algoritmust, amely megoldja ezt a problémát. Erről az olvasó G. Hajdu szakdolgozatában (lásd: [26]) illetve A.Frank és G.Hajdu cikkében (lásd: [25]) olvashat. Én most csak annyit emelnék ki ezekből, hogy az algoritmusuk során kiderült, hogy az optimális költségfüggvény megalkotásához elegendő az input fenyő élein csökkenteni a költségeket, a fenyőn kívül nem szükséges növelni. Ezt a tulajdonságot is csak azért jegyeztem meg, mert a következő fejezetben mi is ilyen jellegű algoritmust fogunk bemutatni egy másik problémára.

5.2. Inverz optimalizálás egyetlen matroidon

Ebben a részben feltételezzük, hogy az olvasó matroidelméleti alapokkal rendelkezik. Ezek az alapok megtalálhatók például Frank András Matroidelmélet c. egyetemi jegyzetében, mely elérhető az alábbi linken: https://web.cs.elte.hu/~frank/jegyzet/matroid/.

Tekintsük az inverz független halmaz problémát egy matroidban. Ennek is a következő alakját fogjuk vizsgálni. Legyen $M = (S, \mathcal{I})$ egy matroid a függetlenjeivel definiálva és tegyük fel, hogy adott egy w_0 nemnegatív költségfüggvény, egy független I_0 halmaz és az a célunk, hogy találjunk egy w költségfüggvényt, amelyre az I_0 halmaz benne van egy w-re nézve max súlyú bázisban és $||w - w_0||_{l_1} = \sum_{i=1}^{n} |w(i) - w_0(i)|$ minimális. Lesz még ezen felül egy b korlátozó vektor, azaz a végső w-re fenn kell állnia a $0 \leq w(x) - w_0(x) \leq b(x) \quad \forall x \in S$ egyenlőtlenségnek.

Világos, hogyha a w_0-ból indulunk ki, és az I_0 kezdő halmaz nincs benne egyetlen max súlyú bázisban sem, akkor kétféleké művelettel érhetjük el, hogy előbb-utóbb benne legyen. Az egyik, hogy az I_0 valamelyik elemén növeljük a w_0 értékét. A másik pedig, hogy egy I_0-on kívüli elemen csökkenjük a w_0 értékét. Az általános tételben szereplő tartalom alapján elegendő úgy keresni a w költségfüggvényt, hogy csak az első típusú műveletet használjuk, azaz hogy az I_0 halmazon növelünk, s azon kívül sosem csökkentünk. Az

általunk adott algoritmus ezt ki is fogja használni.

Vegyük először észre, hogy tetszőleges I_0 halmaz kiegészíthető egy B_0 bázissá úgy, hogy, hogy $w_0(B_0 \backslash I_0)$ maximális, azaz az újonnan hozzávett elemek a lehető legnagyobbak. Ez egyszerűen a mohó algoritmus azonnali következménye, ám érdemes megjegyezni, hogy maga a B_0 nem feltétlenül maximális súlyú bázis w_0-ra nézve. Viszont könnyen azzá tehető, a w_0 (fenti értelemben - normában - vett) minimális változtatásával, ugyanis csak annyit kell csinálnunk, hogy az I_0 elemein a w_0 értékét megnöveljük, amennyiben ez szükséges. Precízen mondva az $x \in S \backslash I_0$ elemeken nem változtatjuk w_0 értékét, de ha $x \in I_0$ akkor meg kell nézni az összes x helyére B_0-ba becserélhető y elemet, hogy esetleg nincs-e köztük olyan, melyre $w_0(y) > w_0(x)$. Ha van, akkor x súlyát le kell cserélni y súlyára. Formálisan tehát az algoritmusunk a következő lesz:

Algorithm 1 Mohó algoritmus inverz független halmazra

Input: M, w_0, I_0, b

Output: Az optimális w vagy pedig hogy nincs megoldás

1: Keressünk egy B_0 bázist, amely tartalmazza I_0-t és ezen belül w_0-ra nézve maximális súlyú
2: Legyen $w(x) := w_0(x)$ ha $x \in S \backslash I_0$ illetve $w(x) := \max\{w(y) : y \in K(B_0, x)\}$ ha $x \in I_0$
3: **if** létezik $x \in I_0$, amelyre $w(x) - w_0(x) > b(x)$ **then**
4: **return** Nincs megoldás
5: **else**
6: **return** w

Az első lépésben említett B_0 bázis könnyedén megtalálható például a mohó algoritmussal, azaz kiindulunk I_0-ból és egyesével vesszük hozzá azokat az elemeket, amelyekkel kibővítve az aktuális I_0' még független marad és erre a tulajdonságra nézve, a hozzáadott elem w_0 súlya maximális. Az algoritmus helyességéhez elegendő azt az egyetlen tulajdonságot látni, hogy egy B bázis akkor és csak akkor w-maximális, ha

i) Minden $y \in S \backslash B$ és $x \in C(B, y)$ esetén $w(x) \geq w(y)$

Ahol $C(B, x)$ jelöli az x bázison kívüli elem egyértelmű alapkörét, $K(B, x)$ pedig az x bázisbeli elem helyére becserélhető elemek halmazát. Ennek igazolásához tekintsük az alábbi lemmát, mely a fent említett jegyzetben szereplő 1.4.5 lemma.

5.2.1. Lemma. *Adott B_1 és B_2 bázisokhoz létezik olyan $f : B_1 - B_2 \longleftrightarrow B_2 - B_1$ bijekció, hogy $B_1 - x + f(x)$ minden $x \in B_1 - B_2$ esetén bázis.*

Ezt a lemmát felhasználva bizonyítjuk a w-maximális bázisokra vonatkozó imént említett tulajdonságot. Ha B maximális súlyú és x benne van az y alapkörében, akkor nyilván $w(x) \geq w(y)$ így ez az irány triviális.

A másik irányhoz legyen B^* egy maximális súlyú bázis w-re nézve és lássuk be, hogy B is az. Használjuk az előbbi lemmát a $B_1 := B$ és $B_2 := B^*$ választással. A lemma szerint minden $x \in B - B^*$ elemre a $B - x + f(x)$ bázis. A feltétel szerint $w(f(x)) \leq w(x)$ hiszen B^*-ot maximális súlyúnak választottuk. Ezt a két tényt összerakva azt kapjuk, hogy $w(B^*) \leq w(B)$ viszont B^* maximalitása miatt $w(B) \leq w(B^*)$ ebből a kettőből pedig azonnal adódik, hogy $w(B) = w(B^*)$ vagyis B is maximális súlyú bázis, ahogyan azt akartuk.

Ezzel tehát az algoritmusunk helyességét igazoltuk. Azt is láthatjuk, hogy algoritmus futásideje két dolgon múlik, egyrészt azon, hogy milyen gyorsan tudjuk egy adott I_0' halmazról (amelyet tehát úgy kaptunk, hogy I_0-hoz hozzávettünk egy új elemet) eldönteni, hogy független-e, másrészt azon, hogy milyen gyorsan tudjuk megtalálni a $K(B_0, x)$ halmazt. Ezen két mennyiség függvényében az algoritmus könnyen láthatóan polinomiális.

5.3. Inverz optimalizálás két matroidon

Most a probléma úgy változik, hogy adott két matroid, $M_1 = (S, \mathcal{I}_1)$ és $M_2 = (S, \mathcal{I}_2)$, egy I közös független halmaz, valamint egy w_0 súlyfüggvény továbbá egy b korlátozó vektor. A feladat pedig ugyanaz, mint az előbb, módosítani a w_0 súlyfüggvényt w-re úgy, hogy

i) I maximális w súlyú közös független halmaz legyen

ii) $|w - w_0|$ legyen minimális

iii) $|w(x) - w_0(x)| \leq b(x)$ minden $x \in S$ esetén

Ezt a problémát már megoldották, ám a jelenleg ismert algoritmus hosszadalmas és visszavezeti a problémát egy minimális költségű áramfeladatra, majd a keletkező lineáris programozási feladat duálisának megoldásakor használja a Tardos-féle erősen polinomiális algoritmust egy lineáris programozási feladat megoldására. Hiszem, hogy a box-TDI poliéderekre vonatkozó legfrisebb eredmények fényében erre az inverz problémára is adható

sokkal egyszerűbb algoritmus, olyasféle mint az előző részben látott. Sajnos nem maradt idő arra, hogy ezt az esetet kirészletezzük és így nem is találtunk egyelőre egyszerűbb algoritmust, ám ez egy jó alapja lehet jövőbeli kutatások egy részének, mint ahogy az is, hogy az általános alakú tételeket konkrét esetekben felírjuk, s megpróbáljunk rá egy egyszerű algoritmust találni. A. Frank és G. Hajdu például az inverz fenyő problémára adtak egy ilyen algoritmust (lásd: [25]), ám számtalan nyitott kérdés van még ezen problémával kapcsolatban. A teljesség igénye nélkül ezekből most megemlítenék néhányat, amelyek valóban képezhetik az alapját egy terjedelmes kutatásnak, vagy akár egy doktori disszertációnak a jövőben.

5.3.1. Állítás. (Több fenyő) *Legyen $D = (V, A)$ egy irányított gráf, $F_1, \ldots, F_k \subseteq A$ feszítő fenyők, $c : A \to \mathbb{R}$ egy költségfüggvény, és $\ell, u \in \mathbb{R}^A$ alsó, illetve felső korlátok. Keressünk olyan $p \in \mathbb{R}^A$ vektort, amelyre $\|p\|_1$ minimális és $F_i \in \operatorname{argmin}\{c(F') - p(F') \mid F' \subseteq A$ egy fenyő$\}$ $\quad (i = 1, \ldots, k, \quad \ell \leq p \leq u)$.*

5.3.2. Állítás. (Több fenyő és költség) *Legyen $D = (V, A)$ egy irányított digráf, az $F_1, \ldots, F_k$ pedig feszítő fenyők, $c_1, \ldots, c_k : A \to \mathbb{R}$ költségfüggvények, és $\ell, u \in \mathbb{R}^A$ alsó, illetve felső korlátok. Keressünk olyan $p \in \mathbb{R}^A$ vektort, amelyre $\|p\|_1$ minimális és $F_i \in \operatorname{argmin}\{c_i(F') - p(F') \mid F' \subseteq A$ egy fenyő$\}$ $\quad (i = 1, \ldots, k, \quad \ell \leq p \leq u)$.*

5.3.3. Állítás. (Teljes párosítás, több költséggel) *Legyen $G = (S, T; E)$ egy páros gráf és M egy teljes párosítás benne, $c_1, \ldots, c_k : E \to \mathbb{R}$ költségfüggvények. Keressünk olyan $p \in \mathbb{R}^E$ vektort, amelyre $\|p\|_1$ minimális és $M \in \operatorname{argmax}\{c_i(M') - p(M') \mid M' \subseteq E$ egy teljes párosítás$\}$ $\quad (i = 1, \ldots, k)$.*

Ezekről a problémákról - és számos másikról - mind tudjuk, hogy megoldhatóak, hiszen az általános inverz problémákra vonatkozó box-TDI eredmények speciális esetei. A problémák egy lehetséges megközelítése az, hogy először felírjuk explicit alakban a konkrét konjugált függvényt, majd azt behelyettesítjük az általános min-max tételbe és kiolvassuk a konkrét speciális esetet. Ha pedig ez megvan, el lehet indulni azon az úton, mely egy algoritmust szolgáltat az optimális objektum(ok) kiszámítására.

Összefoglalás

Végül röviden összefoglaljuk, hogy miről is szólt ez az egész szakdolgozat. Az elején (1. fejezet) elindultunk a konvex analízis mindenki által ismert elemeitől, majd a 2. fejezetben megnéztük, hogy hogyan lehet ezeket a fogalmakat általánosítani a diszkrét esetben. Erre alapvetően két módszerünk volt, ezek segítségével jutottunk el az $L^\natural$-konvex és $M^\natural$-konvex függvényekhez, melyek az egész dolgozatban meghatározó szerepet kaptak. Szintén ez a fejezet felelős azért, hogy az olvasóval megismertesse a diszkrét konvex függvényekre vonatkozó eredményeket, összehasonlítva azokat a folytonos esetbeli hasonló eredményekkel. Miután ezeket az eredményeket már ismerjük, áttérhetünk a 3. fejezetre, ahol M-konvex halmazokon (bázispoliédereken) fogalmazzuk meg a 2. fejezet tételeit, mint speciális eseteket, ezáltal hozzájutva gráfelméleti tételekhez illetve algoritmusokhoz is. A 4. fejezetben megismerkedhetünk a box-TDI rendszerekkel, amelyekről kiderül, hogy általánosítják a korábbi eredményeket is, így még általánosabb képet kaphatunk arról, hogy miért is működik mindaz, amit korábban láttunk. Ebben a fejezetben meg is említjük, hogy a 3. fejezetbeli tételek hogyan jönnek ki az itteni eredmények segítségével. Végül az 5. fejezetben azt mutatjuk be, hogy a box-TDI rendszerekre vonatkozó tételek segítségével miként lehet egy min-max tételt megfogalmazni az általános inverz kombinatorikus optimalizálási problémákra, s ezen felül egy példát is mutatunk egy konkrét algoritmusra az inverz független halmazok esetén egyetlen matroidban.

Szeretném még kiemelni illetve hangsúlyozni azt, hogy ebben a témában még hatalmas potenciál van. Most, hogy adottak a min-max tételek (főként a tisztán kombinatorikai értelemben vett min-max tételek) a következő lépés a polinomiális, illetve erősen polinomiális algoritmusok keresése. Temérdek új eredmény született az elmúlt néhány évben, de algoritmus még nagyon kevés, ez a jövő lehetősége.

Irodalomjegyzék

[1] K. Murota, *Discrete Convex Analysis*, Mathematical Programming 83, 313-371 (1998). https://doi.org/10.1007/BF02680565

[2] K. Murota, *Discrete Convex Analysis*, the book, (1996). ISBN: 0-89871-540-7

[3] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge: Cambridge University Press, 19-95, (2004) doi:10.1017/CBO9780511804441

[4] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton 3-32, 95-112 (1970). ISBN: 9780691015866

[5] K. Murota, *Recent Developments in Discrete Convex Analysis*, In: Cook W., Lovász L., Vygen J. (eds) Research Trends in Combinatorial Optimization. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-76796-1-11

[6] K. Murota, *Submodular Function Minimization and Maximization in Discrete Convex Analysis*, Mathematical Engineering Technical Reports (2008). METR 2008-32

[7] A. Frank, *A weighted matroid intersection algorithm*, Journal of Algorithms, 2 (1981)

[8] A. Frank, *An algorithm for submodular functions on graphs*, Annals of Discrete Mathematics, 16 (1982)

[9] S. Fujishige, *Theory of submodular programs: A Fenchel-type min-max theorem and subgradients of submodular functions*, Mathematical Programming, 29 (1984)

[10] J. Edmonds, *Submodular functions, matroids and certain polyhedra*, in: R. Guy, H. Hanani, N. Sauer, and J. Schönheim, eds., Combinatorial Structures and Their Applications, Gordon and Breach, New York, (1970)

[11] K. Murota, *Submodular Function Minimization and Maximization in Discrete Convex Analysis*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B23: 193-211 (2010)

[12] G. Borradaile, J. Iglesias, T. Migler, A. Ochoa, G. Wilfong, L. Zhang, *Egalitarian Graph Orientations*, Journal of Graph Algorithms and Applications, Vol. 21, No. 4, 687-708 (2017) (http://jgaa.info/accepted/2017/Borradaile+2017.21.4.pdf)

[13] G. Borradaile, T. Migler, G. Wilfong, *Density decompositions of networks*, 1-5, 15-17 (2017) (https://arxiv.org/pdf/1405.1001.pdf)

[14] Nicholas J. A. Harvey, Richard E. Ladner, László Lovász, and Tami Tamir, *Semi-Matchings for Bipartite Graphs and Load Balancing*, April, 2006 (https://doi.org/10.1016/j.jalgor.2005.01.003).

[15] Yuta Harada, Hirotaka Ono, Kunihiko Sadakane, Masafumi Yamashita, *Optimal Balanced Semi-Matchings for Weighted Bipartite Graphs*, (2007), (https://doi.org/10.11185/imt.2.1103).

[16] Jittat Fakcharoenphol, Bundit Laekhanukit, Danupon Nanongkai, *Faster Algorithms for Semi-Matching Problems* , Jun, 2012, (https://arxiv.org/pdf/1004.3363.pdf).

[17] Ján Katrenic and Gabriel Semanisin, *Maximum Semi-Matching Problem in Bipartite Graphs*, Jul, 2013, (https://doi.org/10.7151/dmgt.1694).

[18] A. Frank, K. Murota, *Discrete Decreasing Minimization, Part I: Base-polyhedra with Applications in Network Optimization* August 2018, May 2019, July 2019 (https://arxiv.org/pdf/1808.07600.pdf).

[19] A. Frank, K. Murota, *Discrete Decreasing Minimization, Part II: Views from Discrete Convex Analysis* August 2018, May 2019, July 2019 (https://arxiv.org/pdf/1808.08477.pdf).

[20] W. Cook, *On box totally dual integral polyhedra* Mathematical Programming, 48-61, (1986)

[21] P. Chervet, R. Grappe, L.-H. Robert, *Box-total dual integrality, box-integrality, and equimodular matrices* Mathematical Programming, Ser. A, published online: 20 May 2020. https://doi.org/10.1007/s10107-020-01514-0

[22] A. Frank, K.Murota, *A discrete convex min-max formula for box-TDI polyhedra* https://arxiv.org/abs/2007.03507, Aug 2020

[23] C. Heuberger, *Inverse combinatorial optimization: A survey on problems, methods, and results*, Journal of Combinatorial Optimization, 8 (2004) 329–361

[24] S. Ahmadian, U. Bhaskar, L. Sanitá, and C. Swamy, *Algorithms for Inverse Optimization*, Problems, in: 26th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2018). Editors: Y. Azar, H. Bast, and G. Herman; Article No. 1; pp. 1:1 – 1:14, Leibniz International Proceedings in Informatics Schloss Dagstuhl, Leibniz-Zentrum für Informatik, Dagstuhl Publishing, Germany

[25] A. Frank, G. Hajdu, *Simple algorithm and min-max formula for the inverse arborescence problem*, Technical Reports: TR-2020-15, Egerváry Research Group, Web site: www.cs.elte.hu/egres, ISSN 1587–4451, September (2020)

[26] G. Hajdu, *Inverz Kombinatorikus Optimalizálási Problémák* in Hungarian, BSC Szakdolgozat, (2020)

[27] R.K. Ahuja, J.B. Orlin, *Inverse Optimization*, Oper. Res. 49, 771-783, (2001)