A Greene-Kleitman tétel és általánosításai

Herskovics Dávid

Témavezető: Frank András

Eötvös Lóránd Tudományegyetem

Budapest, 2011 Június

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Frank Andrásnak, hogy megismertette velem ezt a témát, több lehetséges szempontot is megmutatva, ezzel lényegesen hozzájárulva a dolgozat végső formájához.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Előszó

A Dilworth és a poláris Dilworth tétel rámutatott, hogy milyen kapcsolat van a posetek körében a láncok és antiláncok között. Ezeknek általánosításai a Greene és Greene-Kleitman tételek, melyek már nem csak arra adtak min-max tételt, hogy egy lánc vagy egy antilánc legfeljebb mekkora lehet, de arra is, hogy valahány ilyen uniója legfeljebb mekkora lehet. A posetek viszont nem mások, mint speciális (tranzitív és aciklikus) irányított gráfok, amiben a láncok tekinthetők irányított utaknak, az antiláncok pedig ebben a megfogalmazásban stabil halmazok. Így adta magát a kérdés, hogy ha valamivel kevésbé speciális (esetleg teljesen általános) irányított gráfokat nézünk, akkor mennyi marad meg ezekből az összefüggésekből, illetve, hogy milyen egyéb módokon lehet még tovább általánosítani ezeket az eredményeket. Ez nem újkeletű téma, de mind a mai napig tart benne a kutatás, így elég sok cikk, eredmény kötődik szorosabban vagy gyengébben a témakörhöz. Ennek köszönhetően különböző szerzők cikkeiben ugyanazokkal a fogalmakkal más néven, más megközelítésben találkozhat az olvasó.

Ez a dolgozat igyekszik egységesen megfogni ezeket a fogalmakat, megfelelő áttekintést adva az eddigi eredményekről, emellett egy új, matroidelméletes meggondolás és egy korábbi technika továbbgondolásának ötvözésével egy új min-max tételt is közöl, mely legjobb tudomásom szerint eddig még nem fordult elő az irodalomban. Az eredményt a 4. fejezet *Direkt szorzat* c. alfejezete tárgyalja.

A dolgozatban nem törekedtem minden ismert tétel és bizonyítás "bezsúfolására", az jóval túl ment volna egy dolgozat keretein, és nehezítette volna a megfelelő rálátás kialakítását. Ehelyett igyekeztem egy egységesebb és átfogóbb képet adni a témakörről, cserébe azoknál a részeknél, amiket nem teljes részeleteiben vettem be a dolgozatba, megadtam, hogy hol lehet mélyebben utánaolvasni.

2. fejezet

Greene-Kleitman tétel

Amikor külön nincs kiemelve az ellenkezője, végig irányított gráfról (digráfról) lesz szó. A csúcsok számát n fogja jelölni. Egy út mérete alatt a benne lévő csúcsok számát értjük, az egyszerűség kedvéért $|P|$-vel jelöljük a korrektebb $|V(P)|$ jelölés helyett. Az egy pontot is útnak értelmezzük, az ilyet riviális útnak nevezzük. Egy gráf *útpakolása* alatt a csúcsdiszjunkt utak unióját értjük, egy $\mathcal{P}$ útpakolás esetén a $|\bigcup\mathcal{P}|$ egyszerűsített jelölést használjuk a $\left|\{\bigcup V(P) \;:\; P \in \mathcal{P}\}\right|$-re, tehát a benne lévő utak által fedett csúcsok számára. Az $R(\mathcal{P})$ jelöli azokat a csúcsokat, amiket nem fed $\mathcal{P}$. mennyiben azt is szeretnénk kifejezni, hogy az útpakolás k darab diszjunkt útból áll, akkor *k-útpakolást* írunk. Egy *útfelbontás* olyan útpakolás, ami lefedi a gráf egész csúcshalmazát, tehát $|\bigcup\mathcal{P}| = n$, és $R(P) = \emptyset$.

Egy *részleges k-színezés* alatt k darab diszjunkt stabil halmaz unióját értjük (ezeket *színosztályoknak* nevezzük). A gráf egy *k-színezésének* a gráf csúcsainak k darab stabil halmazra való partícionálását nevezzük. Ha csak *színezést* írunk, akkor az annyit tesz, hogy a gráf csúcsait szétosztjuk valamennyi stabil halmazba.

Jelölések. Minden k természetes számra jelölje a legnagyobb k-stabil méretét α_k. A k darab diszjunkt út uniójából álló legnagyobb útpakolás méretét jelölje $\lambda_k(D)$

Definíció. Egy út k-normája alatt a $\min\big\{|P|, k\big\}$ számot értjük, jelölése $|P|_k$. Egy C stabil halmazra ugyanígy definiáljuk a $|C|_k$ k-normát. Egy útfelbontás (/ színezés) k-normája a benne lévő utak (/ színosztályok) k-normájának összegét jelenti, $|\mathcal{P}|_k = \sum_{P\in\mathcal{P}} |P|_k \; \big(/ \; |\mathcal{C}|_k = \sum_{P\in\mathcal{C}} |C|_k\big)$.

Jelölés. A legkisebb k-normát, ami egy útfelbontásnak lehet, $\pi_k(D)$-vel jelöljük, tehát $\pi_k(D) = \min |\mathcal{P}|_k$, ahol $\mathcal{P}$ egy útfelbontás.

Színezéseknél a hasonló minimumot $\chi_k(D)$-vel jelöljük.

Definíció. Egy k-útpakolást / k-stabilt *optimálisnak* nevezünk, ha mérete $\lambda_k(D)$ / $\alpha_k(D)$. Egy útfelbontást / színezést *k-optimálisnak* nevezünk, ha a normája $\pi_k(D)$ / $\chi_k(D)$.

Megjegyzés. Az új fogalmakkal való ismerkedéshez érdemes megnézni, hogy ezek már ismert gráfparaméterek általánosításai: $\alpha_1(D) = \alpha(D)$, a legnagyobb stabil halmaz mérete, $\lambda_1(D) = \lambda(D)$, a leghosszabb út hossza, $\pi_1(D) = \pi(D)$ a legkevesebb diszjunkt út száma, ami szükséges, hogy lefedjük a gráf csúcsait, és $\chi_1(D) = \chi(D)$ a kromatikus szám.

A továbbiakban megnézzük, hogy ezek miért érdekes mennyiségek a posetek körében. A posetek természetes módon megfelelnek az aciklikus tranzitív digráfoknak (ahol az (u, v) irányított él azt jelzi, hogy $u > v$), ezért amikor posetekről és azokban láncokról meg antiláncokról beszélünk, akkor azt nézhetjük úgy is, mint ha egy aciklikus tranzitív digráfban (amit a továbbiakban az egyszerűség kedvéért csak posetnek nevezünk) néznénk az utakat és stabil halmazokat. Ha egy posetben veszünk egy utat, akkor az a tranzitívitás miatt bármely színezésre egy színosztály csak egyszer metszhet. Ebből rögtön adódik egy természetes felső korlát, miszerint k darab (diszjunkt) út bármely színezésre csak maximum annyi csúcsot fedhet le, amennyi a színezés k-normája, ami a fenti jelöléseinkkel leírva egy D posetben $\lambda_k(D) \le \chi_k(D)$. Hasonló logikával egy k-stabil maximum $|\bigcup \mathcal{P}|_k$ csúcsot fedhet, bármely $\mathcal{P}$ útfelbontásra.

Greene és Kleitman azt látták be az alábbi tételekben, hogy ez a felső korlát éles.

2.0.1. Tétel (Greene-Kleitman[2]). *Ha D egy poset, akkor $\alpha_k(D) = \pi_k(D)$*

2.0.2. Tétel (Greene[1]). *Ha D poset, akkor $\lambda_k(D) = \chi_k(D)$*

Az eredeti bizonyítás algebrai, hálóelméleti eszközökkel dolgozott. Ebben a dolgozatban egy a költséges folyam-algoritmust használó módszert mutatunk be ehelyett, melynek az eredeti ötlete [4]-ból származik, és ennek az alapgondolatával még később is fogunk találkozni.

A két fenti tételt egyszerre fogjuk bizonyítani, ehhez szükségünk lesz egy új fogalomra:

Definíció. Egy $\mathcal{P}^k$ k-útpakolás és egy $\mathcal{C}^q$ részleges q-színezés *ortogonális* egymásra, ha minden $P \in \mathcal{P}^k$ útra és $C \in \mathcal{C}^q$ színosztályra a $P \cap C$ nem üres, és $\bigcup \mathcal{P}^k \cup \bigcup \mathcal{C}^q = V$.

Mivel egy posetben minden út és színosztály legfeljebb egyszer metszheti egymást, ezért az első feltétel azt jelenti, hogy $\bigcup \mathcal{P}^k \cap \bigcup \mathcal{C}^q = k \cdot q$. Ezt összerakva a második feltétellel azt kapjuk, hogy $n = |\mathcal{P}^k| + |\mathcal{C}^q| - k \cdot q$.

2.0.3. Következmény. *Ha van egy egymásra ortogonális k-útpakolás és részleges q-színezés, akkor ezek optimálisak. Továbbá a van egy ilyen egymásra ortogonális párunk, akkor bármely optimális k-útpakolás és optimális q-színezés ortogonális.*

Bizonyítás. Mivel minden út és színosztály maximum egy pontban metszi egymást, ezért egy k-útpakolás és egy részleges q-színezés metszete maximum $k \cdot q$. Ha ezek ortogonálisak egymásra, de egyik nem optimális, akkor azt kicserélhetném egy optimálisra, a metszet ez előbbiek alapján továbbra sem nőhetne, tehát több csúcsot fogunk lefedni, de az nem lehet, mert az uniójuk már így is lefedte az összes csúcsot. Tehát akkor ezek optimálisak. Ha tudjuk, hogy van egy egymásra ortogonális párunk, akkor azok optimálisak is lesznek, így bármely másik optimális k-útpakolás vagy részleges q-színezés ugyanekkora lesz, amik viszont a metszetre vonatkozó felső korlát miatt csak úgy férnek el egymás mellett az n csúcson, ha ortogonálisak.

A Greene és Greene-Kleitman tétel bizonyításához azt fogjuk belátni, hogy minden k-útpakolásra van egy rá ortogonális q-színezés valami jó q-ra, és minden optimális q-színezésre van egy rá ortogonális k-útpakolás, valami jó k-ra.

Ez elég lesz nekünk, mert vegyünk egy optimális $\mathcal{P}^k$ k-útpakolást, és egy rá ortogonális $\mathcal{C}^q$ részleges q-színezést. Ekkor $\mathcal{P}^k$-t kiegészítem egy útpakolássá úgy, hogy a hiányzó pontokat triviális utaknak veszem. Az ortogonalitás miatt minden $\mathcal{P}^k$-beli út legalább q hosszú volt, ezért ennek az így kapott $\mathcal{P}$ útfelbontásnak a q-normájára teljesül, hogy $\pi_q(D) \leq |\mathcal{P}|_k = k \dots q + n - |\mathcal{P}^k| = |\mathcal{C}^q| = \alpha_q(D)$, mivel fentebb láttuk már, hogy $\mathcal{C}^q$ optimális.

Hasonlóan vegyünk egy optimális $\mathcal{C}^q$ részleges q-színezést, és egy rá ortogonális $\mathcal{P}^k$ k-útpakolás. $\mathcal{C}^q$-t kiegészítjük egy színezéssé az egész csúcshalmazon úgy, hogy minden kimaradó csúcs egy külön színosztály lesz. Ennek a k-normája $k \cdot q + n - |\mathcal{C}^q| = |\mathcal{P}^k| = \lambda_k(D)$.

Megjegyzés. A Greene és Greene-Kleitman tétel miatt az optimális k-útpakolásból ezen a módon kapott útfelbontás q-optimális lesz, hasonlóan a kapott színezés k-optimális.

Tehát valóban elég lesz azt belátni, hogy minden optimális útpakolásnek / színezésnek van rá ortogonális párja. Ennél egy erősebb tételt is ki tudunk mondani:

2.0.4. Tétel. *Legyen D egy poset. Ekkor létezik rá egy*

$$\mathcal{P}^\alpha|\mathcal{C}^1,\mathcal{C}^2,\ldots,\mathcal{C}^{i_1}|\mathcal{P}^{\alpha-1},\mathcal{P}^{\alpha-2},\ldots,\mathcal{P}^{\alpha-j_1}|\mathcal{C}^{i_1+1},\mathcal{C}^{i_1+2},\ldots,\mathcal{C}^{i_2}|\ldots$$

sorozat, ahol a a $\mathcal{C}^i$ az optimális részleges i-színezések halmazát jelöli, a $\mathcal{P}^j$ pedig az optimális j-útpakolásokét, és a sorozatnak van egy olyan tulajdonsága mindegyik fajta halmaz elemei ortogonálisak az őt megelőző másik fajta halmazok közül a legutolsó elemeire, tehát például a $\mathcal{C}^1,\mathcal{C}^2,\ldots,\mathcal{C}^{i-1}$ elemei mind ortogonálisak a $\mathcal{P}^\alpha$-ra.

Ehhez fogjuk használni Ford és Fulkerson minimális költségű folyam-algoritmusát.

2.1. Ford-Fulkerson minimális költségű folyam algoritmus

Legyen adva egy $D = (V \cup \{s,t\}, E)$ digráfon egy hálózat s forrással és t nyelővel, aminek az élein meg van adva egy g nemnegatív egész kapacitásfüggvény, és egy c nemnegatív egész költségfüggvény. Az algoritmus ebben keres minden $1 \le j \le M$-re minimális költségű j értékű folyamot, ahol az M a maximális folyam mérete. Adott folyam értékét (nagyságát) jelölje $val(f)$, az összköltségét $cost(f)$.

Legyen adva a D csúcsain egy $\rho : V \to \{0,1,2,\ldots\}$ amire teljesül, hogy $0 = \rho(s) \le \rho(v) \le \rho(t)$. Jelölje ρ a $\rho(t)$ értéket, és nevezzük ezt a potenciál értékének.

2.1.1. Tétel. *Ha adva van egy j értékű f folyam és egy a fenti megkötést teljesítő $\rho(v)$ potenciálfüggvény, melyre még teljesül, hogy:*

$$\rho(y) - \rho(x) < c(x,y) \Rightarrow f(x,y) = 0 \quad \textit{minden } (x,y) \in E\textit{-re} \tag{2.1}$$
$$\rho(y) - \rho(x) > c(x,y) \Rightarrow f(x,y) = g(x,y) \quad \textit{minden } (x,y) \in E\textit{-re} \tag{2.2}$$

Ekkor f minimális költségű a j értékű folyamok között.

Az algoritmus ezt a tételt fogja kihasználni, végig fenntartva egy f, ρ párt, amire ezek a feltételek teljesülnek, tehát f minimális költségű az azonos értékű folyamok között, és a ρ potenciál egy tanú erre. Az indításakor az $f \equiv 0$ folyamból és a $\rho(v) = 0, \quad \forall v \in V$ potenciálfüggvényből kezdjük az algoritmust (ezekre valóban teljesülnek a feltételek), és minden lépésben az algoritmus ezek közül az egyiket frissíti, míg a végén f egy maximális értékű (és ezen belül minimális költségű) folyam nem lesz.

Az algoritmus egy lépése az alábbi módon néz ki:

1. Az éppen aktuális f folyamhoz és ρ potenciálhoz hozzárendelünk egy $D' = (V, E')$ segédgráfot ugyanazon a V csúcshalmazon, mint a D digráf, de

$$E' = \{(x,y) \ : \ (x,y) \in E, \rho(y) - \rho(x) = c(x,y), f(x,y) < g(x,y)\} \cup$$
$$\{(y,x) \ : \ (x,y) \in E, \rho(y) - \rho(x) = c(x,y), f(x,y) > 0)\}$$

   élhalmazzal. Jelölje S az ebben a segédgráfban az s-ből elérhető csúcsok halmaza

2. (a) Ha $t \in S$, akkor legyen P egy $s \to t$ irányított út ebben a segédgráfban, és ezt javító útnak használva növeljük f-et.
   (b) Ha $t \notin S$, akkor növeljük eggyel minden $v \in V \backslash S$-re a $\rho(v)$ potenciált.

2.1.2. Tétel. *Az algoritmus minden lépésben a korábbi feltételeket kielégítő f folyamot és ρ potenciált ad vissza, tehát f végig minimális költségű az azonos értékűek között, és ρ egy tanú erre. Minden folyam-növelésnél a folyam költsége az éppen aktuális ρ-val nő.*

Az algoritmus folyamán előforduló állapotokra a $(\rho, val(f))$ értékkel hivatkozunk, mivel ezek közül az egyiket minden lépésben frissítjük, így ez egy jó hivatkozás.

Most rátérünk a Greene-Kleitman bizonyítására, amihez ezt az algoritmust fogjuk felhasználni.

2.2. A Greene-Kleitman tétel bizonyítása

Legyen adva egy $D = (V, E)$ posethez, erre akarjuk bizonyítani a 2.0.4 tételt. A D posethez hozzárendelünk egy $N = (E', V', c, g)$ hálózatot: a csúcshalmazt két példányban vesszük, jelölje ezeket $V_1 = \{x_v \ : \ v \in V\}, V_2 =$

$\{y_v \ : \ v \in V\}$, és pontosan akkor húzunk be élt egy $x_v \in V_1$-ből $y_u \in V_2$-be, ha $(u, v) \in E$-ben. Hozzáadunk ehhez még egy s forrást is, amiből minden V_1-beli csúcsba húzunk egy élet, és egy t nyelőt, ahova minden V_2-beli csúcsból húzunk élet. Formálisan:

$$V' = \{s, t\} \cup \{x_v \ : \ v \in V\} \cup \{y_v \ : \ v \in V\}$$

,

$$E' = \{(s, x_v) \ : \ v \in V\} \cup \{(x_v, y_u) \ : \ (u, v) \in E\} \cup \{(y_v, t) \ : \ v \in V\}$$

Minden él kapacitása legyen 1. Az élekre rakunk egy c költségfüggvényt:

$$c(e) = \begin{cases} 1 & ha \ \ e = (x_v, y_v) \\ 0 & \texttt{egyébként} \end{cases}$$

Ebben a hálózatban fogjuk futatni a Ford-Fulkerson féle algoritmust, ami minden lépésben visszaad egy f folyamot és egy ρ potenciált, amik teljesítik az optimalitási feltételeket. Minden ilyen állapotot jelöljünk a $(\rho(t), val(f))$ számpárral. Minden ilyen számpárra megfeleltetünk az f folyamnak egy $\mathcal{P} = \mathcal{P}(f)$ útpakolást, és a ρ potenciálhoz egy $\mathcal{C}$ részleges színezést:

- Jelölje $\overline{V} \subseteq V$ azokat a D-beli csúcsokat, amikhez tartozó x_v, y_v csúcspárra $f(x_v, y_v) = 0$. Ennek a $\overline{V}$-nek adjuk meg egy útfelbontását, úgy, hogy minden olyan (u, v) él szerepeljen egy útban, amire $f(x_u, y_v) = 1$. Ezek az élek összeragadnak utakká (a konstans 1 kapacitás miatt valóban ezek utak lesznek), és az esetleges triviális utakkal ez egy útfelbontását adja $\overline{V}$-nek, ami egy útpakolás lesz az egész V-n. A költségfüggvény választása miatt $|\overline{V}| = n - cost(f)$, és ezt fedjük $val(f) - cost(f)$ darab élből összeálló útfelbontással, emiatt az útfelbontásunk pontosan $(n - cost(f)) - (val(f) - cost(f) = n - val(f)$ útból áll, ezért az így kapott útpakolást jelöljük $\mathcal{P}^{n-val(f)}$-fel.

- Legyen $C_i = \{v \in V \ : \ \rho(x_v) < \rho(y_v) = i\}$ minden $1 \leq i \leq \rho$-ra.

Lemma. A C_i-k tényleg stabilak, tehát a $\mathcal{C}^\rho = \{C_1, C_2, \ldots, C_\rho\}$ egy részleges ρ-színezés.

Bizonyítás. Legyen $u, v \in C_i$. Tegyük fel, hogy $(u, v) \in E$. Ekkor $i = \rho(y_v) > \rho(x_v)$, amiből az optimalitási feltételek miatt $f(x_v, y_u) = 1$. Mivel az azonosan 0 folyamból indultunk ki, ezért az algoritmusban lesz egy pillanat, amikor 1-re változtjuk f értékét ezen az élen. Ekkor $\rho(y_u)-\rho(x_v) = c(x_v, y_u) = 0$. Vegyük a legutolsó olyan folyam-növelést, ahol az $f(x_v, y_u) = 1$ lett, tehát a továbbiakban ez végig fennmarad, így az optimalitási feltételből kapjuk, hogy $\rho(y_u) \geq \rho(x_v)$ végig fennmarad. Viszont a másik irányba is igaz az egyenlőtlenség, tehát $\rho(y_u) \leq \rho(x_v)$, mert ha feltesszük, hogy nem, akkor lesz egy olyan potenciál-növelés, amikor csak a $\rho(y_u)$-t növeljük, a $\rho(x_v)$-t meg nem. De ilyen nem lehet, mert vegyük az első ilyen potenciál-növelést, ez előtt még $\rho(y_u)-\rho(x_v) = c(x_v, y_u)$, ezért a segédgráfban szerepel a (y_u, x_v) él, és a ez lesz az egyetlen él, ami belép x_v-be, így ha y_u nem elérhető s-ből, akkor x_v sem. Ezzel kijött, hogy $\rho(x_v) = \rho(y_u)$, ami ellentmondás.

Lemma. Minden $v \in V$-re $\rho(y_v) \leq \rho(x_v) + 1$.

Bizonyítás. Az algoritmus kezdetén ez fennáll, azt kell belátni, hogy nem is romolhat el. Tegyük fel, hogy mégis, ekkor lesz olyan potenciál-növelés, amikor a növelés előtt $\rho(y_v) = \rho(x_v) + 1$, és csak az y_v-t növeljük, tehát a növelés után $\rho'(y_v) = \rho'(x_v) + 2$. Ekkor viszont az optimalitási feltétel miatt $f(x_v, y_v) = 1$, amiből következik, hogy $f(s, x_v) = 1$, ezért a potenciál-növeléshez használt segédgráfban az (y_v, x_v) volt az egyetlen él ami belépett x_v-be, tehát ha y_v nem elérhető, akkor x_v sem. Ezzel ellentmondásra jutottunk

Lemma. Az algoritmus minden $(\rho, val(f))$ fázisában a $\mathcal{P}^{n-val(f)}$ és a $\mathcal{C}^{\rho}$ ortogonálisak egymásra.

Bionyítás. Legyen $v \in V$ egy olyan csúcs, ami nincsen benne egyetlen útban sem, akkor erről be kell látnunk, hogy benne van az egyik színosztályban. Az, hogy nem fedi le az útpakolásunk, azt jelenti, hogy $f(x_v, y_v) = 1$. Az ortogonalitási feltételek miatt ekkor $\rho(y_v) - \rho(x_v) \geq 1$. Az előbbi lemma pont a másik irányú egyenlőtlenséget mondta ki, így $\rho(y_v) = \rho(x_v) + 1$. Tehát benne lesz az egyik színosztályban.

A másik, amit még bizonyítanunk kell, hogy bármely út és bármely színosztály metszi egymást, jelölje most $P = (v_k, v_{k-1}, \dots, v_1)$ az utat, és legyen C_i a színosztály. Ekkor $f(y_{v_1}, t) = 0$, amiből $\rho(y_{v_1}) \geq \rho(t)$, amiből - kihasználva, hogy $\rho(v) \leq \rho(t)$ minden v-re - $\rho(y_{v_1}) = \rho(t) = \rho$. Hasonlóan $f(s, y_{v_k}) = 0$, ezért $\rho(s) \geq \rho(v_k)$, amiből $\rho(s) = \rho(y_{v_k}) = 0$. Korábban a színosztályok stabilitásának bizonyításánál láttuk, hogy ha $f(x_u, y_v) = 1, u \neq v$, akkor $\rho(x_u) = \rho(y_v)$, ezért a út minden v_{i+1}, v_i élére $\rho(x_{v_{i+1}}) = \rho(y_{v_i})$. Ekkor a v_1 ből kiindulva a végigmenve az út élein azt látjuk, hogy minden (x_v, y_v) típus élen maximum egyet nő a potenciál, csak ilyen típusú éleken nő, és 0 potenciálból elérünk a végére ρ potenciálhoz, ezért biztosan lesz olyan v csúcs az út mentén, amire $\rho(x_v) + 1 = \rho(y_v) = i$.

Ezzel be is láttuk az ortogonalitást.

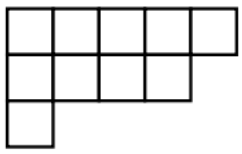
Az algoritmus futása alatt hol a folyamot növeljük, ezzel eggyel kevesebb útból álló útpakolást kapva, hol a potenciált, ezzel pedig mindig eggyel több színosztályból álló részleges színezést, mindegyikre igaz lesz, hogy ortogonális lesz az előző másik fajtával. Ezzel be is láttuk a tételt.

□

2.3. Ferrer diagramok

A fenti algoritmus segítségével minden posethez hozzárendelhetünk egy alakzatot, egy úgynevezett *Ferrer diagramot*, amiről gyorsan leolvasható a a poset $\alpha_k, \lambda_k, \chi_k, \pi_k$ paraméterei és a fenti ortogonalitási tulajdonságok is, hogy ki kivel ortogonális.

Definíció. Egy *Ferrer diagram* n darab négyzetből áll, amik egymás alatt és mellett valahány sorban vannak balra rendezve, és a sorokban található négyzetek száma lefelé haladva gyengén csökken. Egy példa a Ferrer diagramra $n = 10$ esetén:



2.1. ábra. Ferrer diagram

Egy Ferrer diagram lényegében megegyezik az n egy egészekre való felpartícionálásával, ahol a sorokban található négyzetek száma adja a partició osztályait. A fenti példa az $\{5, 4, 1\}$ partíciónak felel meg.

2.3.1. Tétel. *Minden D posethez tartozik egy Ferrer diagram, amire az teljesül, hogy pontosan $\alpha(D)$ darab sora és $\lambda(D)$ darab oszlopa van, és a legfelső i darab sorban lévő négyzetek száma pont $\lambda_i(D)$, míg a balról első j darab oszlopban található négyzetek száma egyenlő $\alpha_j(D)$-vel.*

Ha egy D posethez adva van egy ilyen Ferrer diagram, akkor abból leolvashatjuk a 2.0.4 tételt, mert vegyük a $\mathcal{P}^k$ optimális k-útpakolást, ez pontosan annyi pontot fed le, amennyi négyzet van a Ferrer diagram első i sorában. Legyen az i-edi sorban mondjuk j darab négyzet, akkor egy optimális részleges j-színezés ortogonális lesz $\mathcal{P}^k$-ra, mert a nagyságuk pont akkora, hogy csak akkor férnek el, ha ortogonálisak. Hasonlóan egy $\mathcal{C}^q$ optimális részleges q-színezésnél ha a q-adik oszlopban l darab négyzet van, akkor egy optimális l-útpakolás ortogonális lesz rá.

Ennél több is igaz. Ha adva van egy ilyen Ferrer diagram, akkor annak segítségével felírhatunk egy olyan tulajdonságú sorozatot, mint amilyen a fentebbi 2.0.4 tételben szerepelt. Ehhez a Ferrer diagram alsó határoló törtvonalát kell nézni, ahogy a bal alsó sarokból eljut a jobb felső sarokba, minden lépésben egyet jobbra vagy egyet felfelé lépve, összesen $\alpha(D)$ darabot lépve felfelé és $\lambda(D)$ darabot jobbra. A sorozat a ennek segítsével építjük fel, az első eleme a $\mathcal{P}^\alpha$, aztán azt aszerint folytatjuk, ahogy a bal alsó sarokból egyesével végigmegyünk ezen a törtvonalon: ha az épp aktuális lépés egy jobbra lépés, akkor a sorozathoz a soron következő $\mathcal{C}^i$-t írjuk, ha felfelé lépés, akkor a soron következő $\mathcal{P}^j$-t. Az utolsó lépés mindig felfelé lesz, az a $\mathcal{P}_0$-t adná, azt el is hagyhatjuk. A 2.1 ábrán például ez a következő sorozatot adná:

$$\mathcal{P}^3|\mathcal{C}^1|\mathcal{P}^2|\mathcal{C}^2,\mathcal{C}^3,\mathcal{C}^4|\mathcal{P}^1|\mathcal{C}^5$$

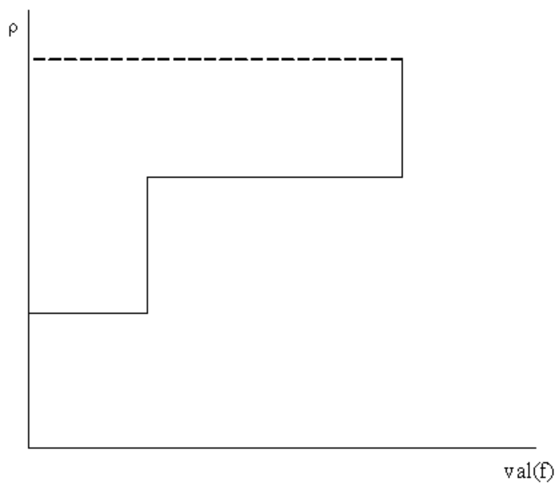
A fenti meggondolás szerint ez valóban teljesíti a 2.0.4 tételben megkövetelt tulajdonságot, hogy mindegyik tagja ortogonális a legutolsó őt megelőző másik fajtával.

Igaziból azt fogjuk belátni, hogy ez fordítva is igaz, ezt megfordítva a 2.0.4 tételben adott sorozat segítségével megrajzolt Ferrer diagram pont ez a Ferrer diagram lesz.

2.3.2. Tétel. *Legyen $s_i = \lambda_i(D) - \lambda_{i-1}(D)$, és $o_j = \alpha_j(D) - \alpha_{j-1}(D)$. Ekkor az $s_1, s_2, \ldots$ sorozat és az $o_1, o_2, \ldots$ sorozat is gyengén csökkenő lesz, és ugyanazt a Ferrer diagramot kapjuk, ha azt csináljuk hogy az i-edik sorban s_i darab négyzet legyen, vagy ha a j-edik oszlopban legyen o_j darab négyzet.*

Az így kapott Ferrer diagram valóban azt tudja, hogy az első i darab sorban szereplő négyzetek száma egyenlő $\lambda_i(D)$-vel, az első j oszlopban szereplők száma pedig $\alpha_j(D)$-vel.

Tétel bizonyítása. Ábrázoljuk az algoritmus minden fázisában kapott $(\rho, val(f))$ pontokat a síkon egy olyan koordinátarendszerben, ahol a ρ lesz a vízszintes tengely és $val(f)$ a függőleges. Ezeket a pontokat kössük össze egy-egy szakasszal időrendi sorrendben, ahogy kijöttek egymás után. Mivel mind ρ, mind $val(f)$ gyengén nő végig az algoritmus futása alatt, ezért a kapott törtvonal meghatároz egy Ferrer diagramot. Azt fogjuk belátni, hogy ez pont az a Ferrer diagram, amit a tételben kimondtunk.



Nézzük az algoritmus egy olyan lépését, amiben a folyam értékét növeli, és a potenciál értéke már nagyobb 0. A növelés előtti állapot legyen $(\rho, val(f))$, az utána lévő ekkor $(\rho, val(f)+1)$. A 2.1.2 tétel szerint az újonnan kapott folyam költsége ρ-val fog nőni, tehát $|\mathcal{P}^{n-val(f)-1}| = |\mathcal{P}^{n-val(f)}| - \rho$. Tudjuk, hogy a $\mathcal{C}^{\rho}$ részleges színezés ortogonális lesz mindkettőjükre. Ebből következik, hogy $\mathcal{P}^{n-val(f)}$ és $\mathcal{P}^{n-val(f)-1}$ is optimális, tehát kijött, hogy $\lambda_{n-val(f)} - \lambda_{n-val(f)} = \rho$. Az algoritmusból kijött, hogy a Ferrer diagram aktuális sora ρ volt, tehát a sorok már stimmelnek.

Most nézzük, amikor olyan lépés van, ami a potenciált növeli. Megint legyen a lépés előtti állapot $(\rho, val(f))$, az utáni akkor meg $(val(f), \rho + 1)$. Ekkor $\mathcal{P}^{n-val(f)}$ ortogonális $\mathcal{C}^{\rho}$-re és $\mathcal{C}^{\rho+1}$-re is, tehát ezek is optimálisak lesznek.

$$o_{\rho+1} = |\bigcup \mathcal{C}^{\rho+1}| - |\mathcal{C}^{\rho}| = |\bigcup \mathcal{C}^{\rho+1}| + |\bigcup \mathcal{P}^{n-val(f)}| - |\mathcal{C}^{\rho}| - |\mathcal{P}^{n-val(f)}|$$

$$= n + (\rho + 1)(n - val(f)) - (n + \rho(n - val(f))) = n - val(f)$$

Mivel az algoritmusból kapott Ferrer diagram el van tolva felfelé addig, hogy a felső határa pont a $val(f) = n)$ egyenesen legyen, így ez pont azt jelenti, hogy ρ-edik oszlop magassága pont o_{ρ}.

□

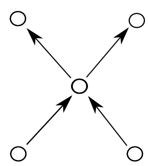
Megjegyzés. Mivel minden digráfnak egyértelmű a hozzárendelt Ferrer diagram, ezért a 2.0.4 tételben szereplő sorrend is egyértelmű, és nem függ attól, hogy a minimális költségű folyam algoritmus során a javító utak választásától.

A Ferrer diagramokok egyrészt elég jó szemléltető eszközök a Greene-Kleitman tételhez, másrészt önmagukban is érdekesek, így lehetőség van a posetes eredményeket, meggondolásokat más témakörökben is felhasználni. Ennek a dolgozatnak nem témája, az érdeklődő olvasó a [15] és [11] cikkekben olvashat erről.

3. fejezet

Nem tranzitív gráfok

Nem posetekre semmi nem garantálja, hogy egy út minden színosztályt maximum csak egyszer érinthet, így könnyű példát találni, ahol $\alpha_k(D) > \pi_k(D)$ vagy $\lambda_k > \chi_k$, például az alábbi ábrán, ahol $\alpha_2(D) = 5$, de $\pi_2(D) = 4$, hasonlóan $\lambda_2(D) = 4$, de $\chi_k(D) = 3$. Tehát a Greene-Kleitman tételhez hasonló egyenlőséget már aciklikus digráfokra sem feltétlenül áll fent. Amit majd megmutatunk, hogy viszont a másik irányú (a poseteknél a nem triviális irányú) egyenlőtlenség viszont több ismert esetre fennáll a poseteken kívül is, és Linial fogalmazta meg azt a sejtést, miszerint bármely D digráfra ezek fennálnak:



3.0.3. Sejtés (Linial[5]). *Egy D digráfra minden k, q pozitív egész számok esetén*

$$\alpha_k(D) \geq \pi_k(D) \tag{3.1}$$
$$\lambda_q(D) \geq \chi_k(D) \tag{3.2}$$

Ennek a sejtésnek fogjuk az erősebb változatait nézni, ehhez megint az ortogonalitást fogjuk használni, de mivel az eddigi ortogonalitási fogalom, amit használtunk, magában hordozza a Greene-Kleitman tételt, ami viszont nem lesz igaz még aciklikus gráfokra sem, ezért itt egy gyengébb ortogonalitás fogalomra lesz szükségünk:

Definíció. Egy $\mathcal{C}^k$ részleges k-színezés ortogonális egy $\mathcal{P}$ útfelbontásra, ha minden $P_i \in \mathcal{P}$ út $\min(\{|P_i|, k\}$ színosztályt metsz. Hasonlóan egy q-útpakolás ortogonális egy $\mathcal{C}$ színezésre, ha minden C_i színosztály $\min\{|C_i|, q\}$ különböző utat metsz.

3.0.4. Sejtés (Berge[8]). *Minden D digráfra bármely k pozitív egész szám és $\mathcal{P}$ k-optimális útfelbontás esetén létezik egy $\mathcal{C}^k$ részleges k-színezés, ami ortogonális $\mathcal{P}$-re.*

3.0.5. Sejtés (Aharoni, Hartman Hoffman[7]). *Minden D digráfra bármely q pozitív egész szám és $\mathcal{P}^q$ optimális q-útpakolásra létezik $\mathcal{C}$ színezés, amely ortogonális $\mathcal{P}^q$-ra.*

Ezekből következik *Linial sejtése* is, ugyanis legyen $\mathcal{P}$ egy k-optimális útfelbontás, $\mathcal{C}^k$ meg egy rá ortogonális részleges k-színezés. Ekkor

$$\alpha_k(D) \geq \mathcal{C}^k = \sum_{C \in \mathcal{C}^k} |C| = \sum_{P \in \mathcal{P}} \sum_{C \in \mathcal{C}} |C \cap P| \geq \sum_{P \in \mathcal{P}} \min\{|P|, k\} = \pi_k(D).$$

Hasonlóan legyen $\mathcal{P}^q$ egy q-optimális útpakolás, $\mathcal{C}$ pedig egy erre ortogonális színezés. Ekkor

$$\lambda_q(D) = \sum_{P \in \mathcal{P}^q} |P| = \sum_{C \in \mathcal{C}} \sum_{P \in \mathcal{P}^q} |C \cap P| \geq \sum_{C \in \mathcal{C}} \min\{|C|, k\} \geq \chi_k(D)$$

A következő szakaszban a minimális költségű folyam-algoritmus egy változatát mutatom be, ami aciklikus gráfokra bizonyítja a Berge-sejtést.

3.1. Aciklikus digráfok

Ebben a szakaszban a korábbi algoritmus egy változatát mutatom be, mellyel aciklikus gráfokra bizonyítom a Berge-sejtést. A módszer előnye, hogy némi módosítással kiterjeszthető bizonyos nem aciklikus esetekre is, erről a dolgozat későbbi részében lesz majd még szó. A fő különbség a két algoritmus között, hogy ez, amit most fogok bemutatni, csak egy előre megadott k-ra ad ki egy k-optimális útfelbontást és egy erre ortogonális részleges k-színezést. Megint definiálunk egy hálózatot, ezúttal a digráf és az előre megadott k szám szerint:

Adott $D = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ aciklikus digráfhoz és egy $k \geq 1$ egész szám. Hozzárendelünk ezekhez egy $N = (\overline{V}, \overline{E}, w, c, s, t)$ élköltséges hálózatot a következő módon:

Jelölje V' és V'' az eredeti V csúcshalmaz két másolatát, és legyen $\overline{V} = \{s, t\} \cup V' \cup V''$, $\overline{E} = \{(s, v_i') \ : \ v_i' \in V'\} \cup \{(v_i'', t) \ : \ v_i'' \in V''\} \cup \{(v_i', v_j'')\} \ : \ (v_i, v_j) \in E) \cup \{(v_i', v_i'') \ : \ i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{(s, t)\}$.

A kapacitás minden élen egységesen 1, a $w(e)$ költségfüggvény pedig:

$$w(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e = (v_i', v_i'') \\ k & \text{ha } e = (s, t) \\ 0 & \texttt{egyébként} \end{cases}$$

Ebben a hálózatban tekintünk egy f megengedett folyamot. A folyam értékét $val(f)$-fel jelöljük, a költségét $cost(f)$-fel. Mivel a kapacitások egészek, feltehető, hogy f 0-1 értéket vesz fel minden élen. *Telítettnek* nevezünk egy folyamot, ha minden $v_i \in V$ csúcsra az (s, v_i'') és a (v_i'', t) élek közül legalább az egyiken egy értéket vesz fel.

Tegyük fel, hogy az f megengedett folyam telített. Ekkor hozzá tudunk rendelni egy $\mathcal{P} = \mathcal{P}(f)$ útfelbontást az eredeti D digráfban: Ha $f(v_i', v_j'') = 1$, $i \neq j$, akkor $(v_i, v_j) \in E[\mathcal{P}]$, ha pedig $f(v_i', v_i'') = 1$, akkor (v_i) egy egy pontból álló út lesz - a két eset nem állhat fent egyszerre, mert $c(s, v_i') = 1$ sérülne különben, ahsonlóan látszik az is, hogy valóban diszjunkt utak unióját kapjuk. Mivel az f folyam telített, ezért valóban minden csúcs le lesz fedve, tehát ez valóban egy útfelbontás.

(Itt érdemes megjegyezni, hogy ha a gráf nem aciklikus, akkor ezzel a módszerrel diszjunkt utakra és körökre bontjuk a gráf csúcshalmazát, az ilyen felbontásokat út-kör felbontásnak fogjuk a későbbiekben nevezni, és még visszatérünk rájuk)

Ha az így kapott $\mathcal{P}$ útfelbontásra teljesül, hogy a benne lévő legkisebb nemtriviális út csúcsszáma is nagyobb vagy egyenlő, mint k, akkor
$|\mathcal{P}|_k = k|\mathcal{P}^{\geq k}| + |\mathcal{P}^1| = k|\mathcal{P}^{>1}| + |\mathcal{P}^1 = k(n - val(f)) + cost(f))$

Erről a megkötésről feltehetjük, hogy teljesül, mert ha a $\mathcal{P}$ útfelbontás maximum k hosszú útjait felbontjuk triviális utakká, az így kapott $\mathcal{P}^*$ k-normája nem változik.

Hasonlóan ezt a megfeleltetést visszafelé is meg tudjuk csinálni, ha adva van egy $\mathcal{P}$ útfelbontása D-nek, akkor ahhoz hozzárendelhetünk egy $f = f_P$ telített folyamot: Ha $(v_i) \in \mathcal{P}^1$, akkor legyen $f(s, v_i') = f(v_i', v_i'') = f(v_i'', t) = 1$. Minden $(v_i, v_j) \in E[\mathcal{P}]$ legyen $f(s, v_i') = f(v_i', v_j'') = f(v_j'', t) = 1$. Mindenhol máshol legyen a folyam értéke 0. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez valóban egy telített folyam, és $val(f) = n - |\mathcal{P}^{>1}|$, $cost(f) = |\mathcal{P}^1|$.

Adott f folyamhoz definiálunk egy $N_f = (\overline{V}, \overline{E_f}, w_f, c_f, s, t)$ segédhálózatot: $\overline{E_f} = \{e \in \overline{E}\ :\ f(e) < c(e)\} \cup \{\overleftarrow{e}\ :\ e \in \overline{E}\ \texttt{és}\ f(e) > 0\}$,

Ahol $e = (u, v)$ esetén az $\overleftarrow{e} = (v, u)$, tehát a megfordítása. Az eredeti hálózatban is szereplő éleket *előre-éleknek* fogjuk nevezni, a régi élek megfordításával keletkező új éleket *hátra-éleknek*. A kapacitások továbbra is 1 minden élen, a súlyfüggvény az előre-éleken ugyanaz, mint az eredeti hálózatban, a hátra-éleken az eredeti él súlyának a mínusz egyszerese.

Lemma. Ha f egy megengedett egész folyam N-ben, g pedig egy megengedett egész folyam N_f-ben, akkor a következőképpen definiált $f+g$ folyam is megengedett N-ben: $(f+g)(e) = f(e) + g(e) - g(\overleftarrow{e})$ minden $e \in \overline{E}$-re (ha $e \notin \overline{E_f}$ vagy $\overleftarrow{e} \notin \overline{E_f}$, akkor a hozzájuk tartozó g érték 0). Továbbá $val(f+g) = val(f) + val(g)$, és $cost(f+g) = cost(f) + cost(g)$.

Adott N_f segédhálózathoz definiálunk egy $\rho : \overline{V} \to \mathbb{N}$ potenciált:

$$\rho(v) = \min\{cost(Q)\ :\ Q\ egy\ s \to v\ \texttt{út}\ N_f\texttt{-ben}\}$$

Ez jól definiált potenciál, amennyiben N_f-ben nincsen kör. Ha esetleg lenne, arra az esetre (is) szolgál a következő fogalom:

Definíció. Adott f N-beli folyamra és ρ potenciálra azt mondjuk, hogy *áttörés* történik, ha $\rho(t) < k$ vagy N_f-ben van negatív költségű kör.

3.1.1. Állítás. *Legyen f egy N-beli folyam, és ρ a hozzátartozó potenciál. Ha áttörés van ezekre, akkor létezik egy g folyam az N_f segédhálózatban, amivel "javítható" f, tehát amire $\mathcal{P}' = \mathcal{P}(f+g)$ útfelbontásra $|\mathcal{P}'|_k < |\mathcal{P}|_k$*

Bizonyítás. Ha $\rho(t) < k$, akkor N_f-ben létezik egy kevesebb, mint k költségű $s \to t$ út, amit jelöljünk Q-val. A g folyam legyen az, amelyik ennek az útnak minden élére egyet vesz fel, mindenhol máshol 0-t. Ekkor $val(g) = 1, cost(g) < k$, ezért

$$|\mathcal{P}'|_k = k(n - val(f+g)) + cost(f+g) < k(n - val(f) - 1) + cost(f) + k = |\mathcal{P}|_k$$

Ha van egy negatív költségű kör N_f-ben, akkor annak meg hasonlóan megfelel egy g folyam, amire $val(g) = 0, cost(g) < 0$, amiből hasonló számolással

kijön, hogy $|\mathcal{P}'|_k < |\mathcal{P}|_k$.
Amennyiben nem lett volna kikötve, hogy D aciklikus, tehát N szintén nem lenne feltétlenül aciklikus, akkor $\mathcal{P}'$ nem lesz feltétlenül útfelbontás, így csak annyi mondható, hogy $kval(g) - cost(g) > 0$. Ezt majd később használni fogjuk az általánosabb esetekben.

Amennyiben nincsen áttörés, akkor (tehát nincsen negatív költségű kör N_f-ben - és így a ρ potenciálfüggvény értelmezhető -, és $\rho(t) = k$, akkor az alábbi módon definiálunk $C_1, C_2, \dots, C_k$ színosztályokat D-ben:

$$C_i = \{v_j \ : \ i = \rho(v'_j) + 1 = \rho(v''_j)\}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

Megfigyelés. A ρ potenciálfüggvény és az N_f segédhálózat definíciója miatt teljesül, hogy

$$f(u,v) = 1 \Rightarrow \rho(v) - \rho(u) \geq w(u,v) \tag{3.3}$$
$$f(u,v) = 0 \Rightarrow \rho(v) - \rho(u) \leq w(u,v) \tag{3.4}$$

Ha $f(u,v) = 1$, akkor ráadásul a konstans 1 kapacitások miatt az (u,v) él lesz az egyetlen, amely belép v-be, így ott egyenlőség áll fent.

Ennek segítségével belátjuk, hogy a kapott $\mathcal{C}^k = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ részleges k-színezés ortogonális a $\mathcal{P}(f)$ útfelbontásra.

Lemma 1. A C_i-k valóban stabil halmazok.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $u, v \in C_i$, és (u,v) él. Ekkor $\rho(u') + 1 = \rho(v') + 1 = \rho(u'') = \rho(v'') = i$. Ha $f(u,v) = 0$, akkor 3.4 miatt $\rho(v'') \leq \rho(u')$, ami nem lehet. Ha $f(u,v) = 1$, akkor 3.3 és az utána jövő megjegyzés miatt $\rho(v'') = \rho(u')$, ami megint ellentmondás

Lemma 2. Minden $P^{>k}$ minden színosztállyal találkozik.

Bizonyítás. Legyen $P = (v_1 v_2 \dots v_t)$, $t > k$, egy út $\mathcal{P}(f)$-ben. Ekkor $f(v'_i, v''_{i+1}) = 1, \ \ i = 1, 2, \dots, t-1$, $f(v'_i, v''_i) = 0, \ \ i = 1, 2, \dots, t$, és $f(s, v'_t) = f(v''_1, t) = 0$. Ez utóbbiból következik, hogy $\rho(v'_t) = 0$, és hasonlóan, mivel

$\rho(t) = k$ és $f(v_1'', t) = 0$, ezért $\rho(v_1'') \geq k$. Továbbá, mivel $f(v_i', v_i'') = 0$, $\;i = 1, 2, \ldots, t$, ezért 3.4 miatt $\rho(v_i'') \leq 1 + \rho(v_i')$. Hasonlóan mivel $(f(v_i', v_i'') = 1$, ezért 3.3 miatt $\rho(v_i') \leq \rho(v_{i+1''}$. Viszont mivel a (v_{i+1}'', v_i') az egyetlen él N_f-ben, ami belép v_i'-be, ezért $\rho(v_i') = \rho(v_{i+1''})$.

Ezekből pedig már következik, hogy minden $1 \leq j \leq k$-ra lesz olyan i, hogy $\rho(v_i') + 1 = \rho_i(v_i'') = j$, tehát, $v_i \in C_j$, más szóval minden színosztályt metsz az út.

Lemma 3. A triviális utak mind benne vannak egy színosztályban (és korábban feltettük, hogy minden legfeljebb k hosszú utat feltördeltünk triviális utakra, így ezzel majd be is látjuk az ortogonalitást)

Bizonyítás. Legyen $\{v\}$ egy triviális út, ekkor $f(s, v') = f(v', v'') = f(v'', t) = 1$. Mivel $\rho(t) = k$, ezért $\rho(v'') \leq k$, és mivel $f(v', v'') = 1$, ezért $\rho(v') + 1 \geq \rho(v'')$. Azt is tudjuk, hogy (v'', v') az egyetlen él N_f-ben, ami v'-be megy, ezért itt egyenlőség lesz, tehát $\rho(v') + 1 = \rho(v'')$. Ezekből következik, hogy létezik olyan $1 \leq j \leq k$, melyre $j = \rho(v'') = \rho(v') + 1$, tehát $v \in C_j$.

Tehát a fentiekből a következő algoritmus valóban jól működik:

1. Veszünk egy $\mathcal{P}$ útfelbontást.
2. A legfeljebb k hosszú utakat széttördeljük triviális utakká, kapunk egy $\mathcal{P}^*$ útfelbontást, melynek ugyanananannyi a k-normája.
3. Megcsináljuk a hozzátartozó $f(\mathcal{P}^*)$ folyamot, és a hozzátartozó ρ potenciált.
4. Ha áttörés van, akkor kapunk egy kisebb k-normájú útfelbontást, erre újrakezdjük az első lépéstől.
5. Ha nincs áttörés, akkor kapunk egy $\mathcal{P}^*$-ra (és ezáltal $\mathcal{P}$-re is) ortogonális részleges k-színezést.

Ezzel aciklikus digráfokra beláttuk a Berge-sejtést. Az eljárás erősségét az adja, hogy némi módosítással néhány nem aciklikus digráfra is bizonyítható vele a Berge-sejtés, így van esélye, hogy valamikor ennek egy továbbfejlesztése egységes bizonyítást fog majd adni az összes gráfosztályra, amire igaz a Berge-sejtés

A következő fejezetben egy más megközelítést mutatok be. Ennek hátránya, hogy nem aciklikus gráfokra nem mond sokat, viszont előnye, hogy egy új fogalom bevezetésével minden digráfra mond ki egységes tételeket, és ezek a tételek aciklikus gráfokra pont a Berge illetve az Aharoni-Hartmann-Hoffman sejtést adja.

4. fejezet

Út/kör-felbontások és pakolások

4.1. Bevezetés

Definíció. *út/kör-pakolásnak* nevezzük egy digráfban az utak és körök diszjunkt unióját. Egy *út/kör-felbontás* olyan út/kör-pakolás, amibe azt is beleértjük még, hogy ezek lefedik az egész csúcshalmazt. Ha *k-út/kör-pakolásról* beszélünk, akkor abba beleértjük azt is, hogy az utak száma k, a körök száma akármennyi lehet. Egy út/kör-felbontásban az utak halmazát jelölje $\mathcal{P}_{\texttt{út}}$, a körök halmazát $\mathcal{P}_{\texttt{kör}}$

Ezek a fogalmak az aciklikus digráfokra megegyeznek az útpakolással és útfelbontással, így tekinthetőek ezek általánosításainak is nem csak aciklikus esetben. Ennek az lesz az előnye, hogy ezek a fogalmak valamivel jobban kezelhetőek általános esetben, mint ha sima útpakolásokkal és -felbontásokkal próbálkoznánk, így általánosabb tételeket tudunk megfogalmazni, melyek az aciklikus esetben pont az útpakolásokra és -felbontásokra mondanak ki dolgokat. Az egyik ilyen példa lesz rögtön a 4.2.1 állítás is, de előtte még szükségünk lesz az útpakolások és -felbontások körében megismert fogalmakat kicsit általánosítani, hogy azokat az út/kör-pakolásokra és -felbontásokra is használni tudjuk.

Definíció. Legyen $\mathcal{P}^c$ egy út/kör-pakolás. Ekkor egy $P \in \mathcal{P}^c$ *k-normája*:

$$|P|_k = \begin{cases} min\{|P|, k\} & \texttt{ha } P \texttt{ egy út} \\ 0 & \texttt{ha egy kör} \end{cases}$$

Definíció. Egy $\mathcal{P}^c$ út/kör-felbontásnak *k-normája* $|\mathcal{P}^c|_k = \sum_{P_i \in \mathcal{P}^c} |P_i|_k$. A legkisebb ilyen értéket, amit egy út/kör felbontás k-normájaként kijöhet, jelölje π_k^c.

Definíció. Egy $\mathcal{P}_k^c$ k-út/kör-pakolás *mérete* az általa lefedett csúcsok száma. A legnagyobb értéket, amit ez egy k-út/kör-pakolás méreteként felvehet, jelölje λ_k^c.

4.2. Direkt szorzat

Ebben a szakaszban az út/kör-felbontások k-normájára vezetek le egy min-max tételt. Első lépésben egy matroidelméletes megközelítést mutatok be, amivel a $k = 1$ esetre jön ki a min-max tétel, később pedig digráfok direkt szorzatának segítségével azt az eredmény minden k-ra általánosítom.

A min-max tételben tehát az egyenlőség egyik oldalán az összes út/kör-felbontás k-normájának a minimuma, tehát π_k^c szerepel majd. Poseteknél ez a Green-Kleitman tétel szerint egyenlő volt a legnagyobb stabil méretével, de már aciklikus gráfokra is könnyű példát találni arra, ahogy a legnagyobb stabil mérete nagyobb, mint a $\pi_k = \pi_k^c$. Ezért egy kicsit módosítanunk kell azt a mennyiséget, amit maximalizálni szeretnénk:

Jelölés. Egy A stabil halmazra jelölje $\langle A \rangle$ a következő mennyiséget: $|A| - \min(|Z| : Z \subseteq V$ lefogja az összes A-ból A-ba menő utat). Legyen $\alpha_k^*(D) = \max\big\{\langle A_1 \rangle, \dots, \langle A_k \rangle \ : \ A_i - k \text{ diszjunkt stabilak}\big\}$.

Megjegyzés. Egy posetben a tranzitivitás miatt egy antilánc két elem között nem megy irányított út, ezért ott $\alpha_k = \alpha_k^*$

4.2.1. Állítás. *Egy D digráfban $\pi_1^c(D) = \alpha_1^*(D)$*

Bizonyítás. A D digráf élhalmazán definiálunk két matroidot:
$M_1 : \{F \subseteq E \text{ független} \Leftrightarrow \varrho_E(v) \leq 1 \ \forall v \in V\}$
$M_2 : \{F \subseteq E \text{ független} \Leftrightarrow \delta_E(v) \leq 1 \ \forall v \in V\}$
Ennek a két matroidnak a metszete egy olyan élhalmaz, amire nézve minden csúcsnak maximum egy a kifoka és a befoka is. Ez nem jelent mást, mint hogy az élek csúcsdiszjunkt utak és körök uniójának az élhalmaza. Tehát minden közös fügetlen halmaz egy út/kör-felbontását adja a digráfnak, és viszont. Egy ilyen út/kör-felbontás egy C köre $|V(C)|$ darab élet ad a matroid metszetbe, egy P út meg $(|V(P)| - 1)$-et. Ebből látszik, hogy a közös független

mérete $|V|-$ *az utak száma az út/kör-felbontásban*,tehát a legnagyobb közös független mérete pont $|V| - \pi_1^c(D)$.

Felírva a matroidmetszet-tételt azt kapjuk, hogy $\min\big\{r_1(X_1) + r_2(X_2) \ : \ X_1, X_2 \subseteq E,\ X_1 \cup X_2 = E\big\} = |V| - \pi_1^c(D)$, ahol r_i az M_i matroid rangfüggvénye.

Feltehető, hogy X_1, X_2 zártak, ami azt jelenti, hogy $\exists Z_1, Z_2 \subseteq V$, melyekre $X_1 = \{e \in E \ : \ e$ egy Z_1-beli csúcsba lép be$\}$, és $X_2 = \{e \in E \ : \ e$ egy Z_2-beli csúcsból lép ki$\}$. Ekkor $r_i(X_i) = |Z_i|$. Ebből következik, hogy

$$\min_{\forall(u,v)\in E-re\ u\in Z_2\ vagy\ v\in Z_1} \big\{|Z_1| + |Z_2|\big\} = |V| - \pi_1^c(D). \tag{4.1}$$

Vegyünk egy $Z_1, Z_2 \subseteq V$ párt, amire fennáll az egyenlőség. Mivel $Z_1 \cup Z_2$ lefogja az összes élt, így $A = V - (Z_1 \cup Z_2)$ stabil, ráadásul olyan, hogy $Z_1 \cap Z_2$ lefogja az összes A-ból A-ba menő utat, mert egy ilyen útnak egyik végpontja sincs benne $Z_1 \cup Z_2$-ben, ezért hogy minden éle le legyen fogva az útnak, kell lennie az úton egy $Z_1 \cap Z_2$-beli csúcsnak is. Tehát kijött, hogy $\langle A\rangle \geq |A| - |Z_1 \cap Z_2| = |V| - (|Z_1| + |Z_2|) = \pi_1^c(D)$.

A másik irányt könnyű látni, vegyünk egy tetszőleges A stabil halmazt, és egy $\mathcal{P}_c$ 1-optimális út/kör-felbontást. Jelölje A_{lefog} az egyik olyan minimális elemszámú csúcshalmazt, ami lefogja az összes A-ból A-ba menő utat. Ha egy $P \in \mathcal{P}_{\texttt{út}}$ útra $|A \cap V(P)| = k$, akkor $V(P) \cap A_{lefog} \geq (k-1)$, ezért $|A| \leq |A \cap V(P)| \leq |\mathcal{P}_{\texttt{út}}| + |A_{lefog}|$, amiből $< A >= |A| - |A_{lefog}| \leq |\mathcal{P}_{\texttt{út}}| = \pi_1^c(D)$.

♣

4.2.2. Tétel. *Egy D digráfban $\alpha_k^*(D) = \pi_k^c(D)$*

Bizonyítás. A bizonyítás apró módosításokkal használja Saks módszerét, amivel **??**-ben bizonyította a Greene-Kleitman tételt, és a fenti állítást.

Legyen $D_k = (V_k, E_k)$, ahol $V_k = \{i, j) \ : \ i \in V, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, és $E_k = \big\{\big((u,i),(v,i)\big) \ : \ (u,v) \in E\big\} \cup \big\{\big((u,i),(u,j)\big) \ : \ i < j\big\}$. Szintnek nevezem azoknak a csúcsoknak a halmazát, amelyeknek a második koordinátája megegyezik, ezek a D egy-egy másolatát feszítik. Egy $S \subseteq V_k$ halmazra jelölje $(S)_i$ az i-edik szinttel vett metszetet, tehát $(S)_i = \{(u,i) \in S\}$. Egy $\mathcal{P}$ út/kör-felbontásban egy v csúcs fedi a u csúcsot, ha (u,v) él szerepel az egyik útban.

A bizonyítás három lépésből fog állni:

1. Belátjuk, hogy $\alpha_k^*(D) \geq \alpha_1^*(D_k)$

2. Definiáljuk a D_k út/kör-felbontásainak egy speciális osztályát (nevezzük ezeket az egyszerűség kedvéért speciális út/kör-felbontásnak), hogy minden $\mathcal{P}$ speciális út/kör-felbontás D_k-nak meghatároz egy $\mathcal{P}'$ út/kör-felbontását D-nek, melyre a $\mathcal{P}$ 1-normája nagyobbegyenlő a $\mathcal{P}'$ k-normájánál.

3. Belátjuk, hogy D_k-nak létezik 1-optimális speciális út/kör-felbontás.

Ha ezek mind megvannak, akkor a 2. és 3. pontból tudjuk, hogy $\pi_1^c(D_k) \geq \pi_k^c(D)$, az az előző 4.2.1 állításból tudjuk, hogy $\alpha_1^*(D) = \pi_1^c(D)$, és ha ehhez még hozzávesszük az 1. pontot, akkor azt kapjuk, hogy:

$$\alpha_k^*(D) \geq \alpha_1^*(D_k) = \pi_1^c(D_k) \geq \pi_k^c(D)$$

Azt a korábbiakhoz hasonlóan könnyen lehet látni, hogy $\pi_k^c(D) \geq \alpha_k^*(D)$, így a fenti egyenlőtlenségben mindenhol egyenlőség szerepel, ezzel be is látjuk a tételt.

1. lépés: $\alpha_k^*(D) \geq \alpha_1^*(D_k)$. Legyen A egy stabil D_k-ban, melyre $< A >= \alpha_1(D_k)$. Jelölje A_{lefog} az A-ból A-ba menő utak egy minimális lefogó ponthalmazát. Ekkor $(A)_i$ is satbil minden $1 \leq i \leq k$-ra, és mivel a szintek között csak felfelé megy él, így az $(A)_i$-ből $(A)_i$-be menő utak végig az $i - edik$ szinten maradnak, ezért $(A_{lefog})_i$ lefogja az összes ilyen utat. D_k felépítése miatt az $(A)_i$-k vetülete az 1. szintre diszjunktak, így $\alpha_k^*(D) \geq \sum_{i=1}^k |(A)_i| - |(A_{lefog})_i| = |A| - |A_{lefog}| = \alpha_1^*(D_k)$.

2. lépés: speciális út/kör-felbontások. Egy $\mathcal{P}^c$ út/kör-felbontásra jelölje $ini(\mathcal{P}^c)$ a benne lévő utak kezdőpontjait, $ter(\mathcal{P}^c)$ pedig a végpontjaikat. A $\mathcal{P}$ út/kör-felbontásra jelölje $ter_i(\mathcal{P})$ a $(ter(\mathcal{P}))_i$ vetületét a legfelső szintre, tehát hogy az i-edik szinten lévő végpontok mely csúcsoknak felelnek meg az eredeti D digráfban. Egy $\mathcal{P}$ út/kör-felbontás *speciális*, ha:

(S1) $ter_1(\mathcal{P}) \supseteq ter_2(\mathcal{P}) \supseteq \cdots \supseteq ter_{k-1}(\mathcal{P})$

(S2) Ha $a \in ter_k(\mathcal{P})$ és $a \notin ter_{k-1}(\mathcal{P})$, akkor (a, k) fedi $(a, k-1)$-et. Az ilyeneket jelölje $ter_k'(\mathcal{P})$, a többit meg (amik $ter_{k-1}(\mathcal{P})$-ben is benne vannak) jelölje $ter_k^*(\mathcal{P})$.

Ha egy $\mathcal{P}$ út/kör-felbontás speciális, akkor vegyük a k-adik szintre való meszorítását, ez egy $\mathcal{P}'$ út/kör-felbontását adja az eredeti D digráfnak. Mivel minden úthoz pontosan 1 végpont tartozik, így $|ter_k(\mathcal{P})|$ útból áll ez az út/kör-felbontás.

Lemma. $|\mathcal{P}|_1 \geq |\mathcal{P}'|_k$.

Bizonyítás.

$$|(\mathcal{P})|_1 = \texttt{ az utak száma } = |ter(\mathcal{P})| = \sum_{i=1}^{k} |ter_i(\mathcal{P})| \geq k|ter^*(\mathcal{P})| + |ter'(\mathcal{P})|$$

, mivel $|ter_i(\mathcal{P})| \geq |ter_k^*(\mathcal{P})|$ minden $i \geq k-1$-re, és $|ter_k(\mathcal{P})| = |ter_k^*(\mathcal{P})| + |ter_k^*(\mathcal{P})|$.

Most nézzük k-adik szintre való megszorítással kapott $\mathcal{P}'$ út/kör-felbontását D-nek. Azok az utak, melyek végpontja $ter_k'(\mathcal{P})$-ben van, egy hosszúak lesznek, a többi meg legfeljebb k-t ad az út/kör-felbontás k-normájához, így kapjuk a felsőbecslést: $|\mathcal{P}'|_k \leq k|ter^*(\mathcal{P})| + |ter'(\mathcal{P}) \leq |\mathcal{P}|_1$

3. lépés: van 1-optimális speciális. Ha adva van egy $\mathcal{P}$ út/kör-felbontás, egy (a,i) végpont és (b,j) csúcs benne, hogy $\big((a,i),(b,j)\big)$ egy él D_k-ban, akkor *cserének* nevezzük azt a lépést, hogy a (b,j)-t tartalmazó utat vagy kört elvágjuk a (b,j) csúcsba bemenő él kitörlésével (ha van ilyen), és berakjuk az $\big((a,i),(b,j)\big)$ élt, ezzel az (a,i)-t tartalmazó utat továbbfűzzük a (b,j)-től kezdődő szelettel. Ez az eljárás okozhatja azt, hogy (a,i) és (b,j) ekkor egy körön lesz, viszont ami nekünk fontos megfigyelés, hogy az utak száma ezáltal nem nőhet.

Vegyük D_k egy 1-optimális út/kör-felbontását. Ha egy $(a,i+1)$ végpontra (a,i) nem végpont, hanem fedi őt valami (b,j) csúcs, ahol $j < k$, akkor csinálunk egy cserét, hogy $(b,j+1)$ fedje az $(a,i+1)$-et. Ezt megtehetjük, mert $(b,j) = (b,i)$ *vagy* (a,j), mindkét esetben $(a,i+1)$-ből meg él $(b,j+1)$-be. Ezt addig csináljuk, amíg a végén már nem marad ilyen felállás. Ha ez az eljárás véges idő alatt véget ér, akkor egy speciális út/kör-felbontását kapjuk a D_k-nak, és mivel egyik lépésben sem nőtt az utak száma, így ez is egy 1-optimális út/kör-felbontás lesz.

Így már csak annyi maradt, hogy belássuk, hogy ez az eljárás véges sok idő alatt véget ér. Jelölje v_i minden $1 \leq i \leq k-1$ -re azoknak az i-edik szinten lévő (a,i) elemek számát, melyre teljesül, hogy ő egy (b,j)-csúccsal van fedve, az $(a,i+1)$ pedig $(b,j+1)$-gyel. Minden cserénél, mikor egy i-edik szinten lévő végponthoz fűzünk hozzá további csúcskat, eggyel nő a v_{i-1}, és minden $j \leq j-1$-re v_j ugyanaz marad. Tehát ha nézzük a $\mathbf{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ vektort, akkor az minden cserénél lexikografikusan nő, viszont csak véges sok értéket vehet fel, így az eljárás véges sok lépésben véget ér.

$\square$

4.3. Lineáris programozásos megközelítés

Definíció. Egy $\mathcal{C}^k$ részleges k-színezés és egy $\mathcal{P}^c$ út/kör-felbontás *ortogonális*, ha minden $P_i \in \mathcal{P}^c$ legalább $|P_i|_k$ különböző színosztályt metsz.

Definíció. egy $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ színezése a gráfnak és egy $\mathcal{P}^c_k$ k-út/kör-pakolása *ortogonálisak*, ha minden $C_i \in \mathcal{C}$ színosztály legalább $\min\{|C_i|, k\}$ $\mathcal{P}^c_k$-beli utat metsz.

Jelölés. Szükségünk lesz majd a k-nál hosszabb illetve rövidebb utak megkülönböztetésére, így $\mathcal{P}^c$ út/kör-felbontásra jelölje $\mathcal{P}^c_{\leq k}$ a k-nál nem hosszabb utakat, $\mathcal{P}^c_{>k}$ meg a hosszabbakat.

4.3.1. Tétel. *[13] Legyen $D = (V, E)$ egy digráf és k egy pozitív egész. Ekkor létezik egy $\mathcal{C}^k$ részleges k-színezése a gráfnak, hogy az minden k-optimális út/kör felbontásra ortogonális.*

A könnyebb jelölés érdekében a csúcsokat megszámozzuk 1-től n-ig. Legyen az I indexhalmaz a következő:

$$I = \{(i, j) \ : \ 0 \leq i, \ j \leq n, \ i = 0 \ vagy \ j = 0 \ vagy \ (i, j) \in E\}$$

.

Minden $(i, j) \in I$-hez hozzárendelünk egy $x_{i,j}$ változót.
A $C = (c_{i,j})$ költségfüggvény legyen a következő:

$$\begin{aligned} c_{i,0} = 0 &\quad minden \ 0 \leq i \leq n - re \\ c_{0,j} = k &\quad minden \ 1 \leq j \leq n - re \\ c_{i,i} = 1 &\quad minden \ 1 \leq i \leq n - re \\ c_{i,j} = 0 &\quad ha \ i, j > 0 \ \ i \neq j \ \texttt{és} \ (i, j) \in E \end{aligned}$$

Tekintsük a következő lineáris programot:

$$min \sum_{i,j=0}^{n} c_{i,j} x_{i,j}$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_{0,j} = \sum_{i=0}^{n} x_{0,i} = n \tag{4.2}$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_{i,j} = 1 \quad \forall i > 0\texttt{-ra}; \quad \sum_{i=0}^{n} x_{i,j} = 1 \quad \forall j > 0\texttt{-ra} \tag{4.3}$$

$$x_{i,j} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in I \texttt{ esetén} \tag{4.4}$$

Vegyünk egy $\mathcal{P}^c$ út/kör felbontást. Jelölje ebben a legalább k hosszú utak halmazát $\mathcal{P}^c_{\geq k}$, és $\mathcal{P}^c_{<k}$ a k-nál rövidebb utakat. A köröket jelölje $\mathcal{P}^c_{\texttt{kör}}$. Egy $\mathcal{P}$ úthalamzra jelölje $ini[\mathcal{P}]$ és $ter[\mathcal{P}]$ a benne lévő utak kezdő- ill. végpontjainak halmazát. Minden ilyen $\mathcal{P}^c$ út/kör felbontáshoz hozzá tudunk rendelni egy $X(\mathcal{P}^c) = (x_{i,j})$ megoldását az LP feladatnak:

$$x_{0,0} = n - \left|\mathcal{P}^c_{\geq k}\right|$$

$$\text{minden } j > 0\text{-ra } x_{0,j} = \begin{cases} 1 & ha\ j \in ini[\mathcal{P}^c_{\geq k}] \\ 0 & \texttt{egyébként} \end{cases}$$

$$\text{minden } i > 0\text{-ra } x_{i,0} = \begin{cases} 1 & ha\ i \in ter[\mathcal{P}^c_{\geq k}] \\ 0 & \texttt{egyébként} \end{cases}$$

$$\text{minden } i > 0\text{-ra } x_{i,i} = \begin{cases} 1 & \texttt{ha } i \in V(P) \ : \ P \in \mathcal{P}^c_{<k} \\ 0 & \texttt{egyébként} \end{cases}$$

$$\forall i,j > 0,\ i \neq j\text{-re } x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \texttt{ha } (i,j) \in E(P) \ : \ P \in \mathcal{P}^c_{\geq k} \cup \mathcal{P}^c_{\texttt{kör}} \\ 0 & \texttt{egyébként} \end{cases}$$

Ezt lefordítva, mit is jelent: Ha egy $\mathcal{P}^c$-beli $P = \{x_1, \ldots, x_l\}$ út legalább k hosszú , akkor $x_{0,1} = x_{1,2} = x_{2,3} = ... = x_{l-1,l} = x_{l,0} = 1$. Ha a $P = \{x_1, \ldots, x_t\}$ út kevesebb, mint k hosszúságú, akkor $x_{1,1} = x_{2,2} = x_{3,3} = ... = x_{t,t} = 1$. Egy $C = \{x_1, \ldots, x_r\}$ körre pedig $x_{1,2} = x_{2,3} = ... = x_{r,r} = 1$. Minden más változó 0. Mivel $\mathcal{P}_c$ egy felbontás, így ez valóban teljesíteni fogja a feltételeket.

Ráadásul könnyen ellenőrizhető az is, hogy $\sum c_{i,j} x_{i,j} = |\mathcal{P}^c|_k$. Hasonlóan az LP-fealdat egy egész megoldása megfelel ilyen módon egy út/kör-felbontásnak. Mivel a feltétel-mátrix TU, ezért az optimum egész megoldáson is felvétetik.

Most nézzük a duális problémát:

$$\max \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j + n(u_0 + v_0)$$

ahol

$$u_i + v_j \leq c_{i,j} \texttt{ minden } (i,j) \in I\texttt{-re}. \tag{4.5}$$

Ennek létezik egész optimális megoldása, és feltehető róla, hogy

$$u_0 = v_0 = 0,\ u_i \leq 0 \texttt{ és } 0 \leq v_1 \leq k. \tag{4.6}$$

Ehhez hozzárendelünk egy $\mathcal{C}^k = \{C_1, \ldots, C_k\}$ részleges k-színezést:

$$C_r = \{i > 0 \ : \ u_i + v_i = 1 \texttt{ és } v_i = r\}$$

Lemma1. Ezek valóban stabil halmazok.

Bizonyítás. Legyen $i, j \in C_r$. Ekkor $u_i + v_j = 1$, tehát $(i,j) \notin E$, különben $u_i + v_j \leq c_{i,j} = 0$ lenne, ami ellentmondás.

Lemma2. $\mathcal{C}^k$ ortogonális minden k-optimális út/kör-felbontásra.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{P}^c$ egy k-optimális út/kör-felbontás. Az optimalitási feltételekből tudjuk, hogy

$$x_{i,j} > 0 \Rightarrow u_i + v_j = c_{i,j} \tag{4.7}$$

Nézzük azt az esetet először, amikor P egy "rövid" út, tehát legfeljebb k a hossza. Ekkor a primál megoldásban minden $i \in P$ csúcsra az $x_{i,i} = 1$, ami a 4.7 segítségével azt adja, hogy $u_i + v_i = c_{i,i} = 1$, tehát minden csúcsa benne van az egyik színosztályban. Ráadásul ha $(i,j) \in P$, akkor 4.5 $u_i + v_j \leq c_{i,j} = 0$, amiből $u_i + v_i = 1$-et felhasználva kapjuk, hogy $v_i \geq v_j + 1$, tehát az út mentén haladva a színosztályokkal szigorúan csökkenő sorrendben találkozunk.

Most nézzük azt az esetet, ha P "hosszú", tehát legalább k hosszú. Az egyszerűség kedvéért most tegyük fel, hogy $P = (1, 2, \dots, t)$. Ekkor

$$x_{0,1} = x_{1,2} = ...x_{t-1,t} = x_{t,0} = 1$$

Mivel *(4.7)* miatt $u_t + v_0 = c_{t,0} = 0$, és *(4.6)* miatt $u_t = v_0 = 0$. Hasonlóan *(4.7)* miatt $u_0 + v_1 = c_{0,1} = k$, amiből *(4.6)* miatt következik, hogy $v_1 = k$. Minden $i = 1, 2, \dots, t-1$-re a *(4.7)* miatt $u_i + v_{i+1} = 0$, és minden $i = 1, 2, \dots, t$-re a *(4.5)* miatt $u_i + v_i \leq 1$. Ebből következik, hogy $v_i \geq v_{i+1} + 1$, tehát a v_i mindig maximum egyet csökkenhet, miközben sorban végigmegyünk $i = 1, 2, \dots, t$-n, és amikor csökken, az pontosan akkor történik, mikor $u_i + v_i = 1$, tehát az a csúcs benne van egy színosztályban. Mivel $v_1 = k$ és $v_t = v_t + u_t \geq 1$, ezért valóban P minden színosztályt metszeni fog.

$\square$

4.3.2. Következmény. *Bármilyen D digráfra $\pi_k^c(D) \leq \alpha_k(D)$, bármely k pozitív egészre*

4.3.3. Következmény. *Egy D aciklikus digráfra $\pi_k(D) \leq \alpha_k(D)$*

4.3.4. Tétel. *[13] Legyen $D = (V, E)$ egy digráf és k egy pozitív egész. Ekkor létezik egy $\mathcal{C}$ színezése a gráfnak, hogy az minden optimális részleges k-út/kör-felbontásra ortogonális.*

Bizonyítás. A csúcsokat jelöljük továbbra is 1-től n-ig az egész számokkal. Ha V lefedhető körök és legfeljebb k darab út diszjunkt uniójával, akkor elég minden csúcsot különböző színűre színezni, és ez jó lesz, tehát feltehető, hogy nem ez az eset áll fent. Az index halmaz ugyanaz, mint előbb (emlékeztetőül: $I = \{(i,j) \;:\; 0, \leq i,j \leq n, \quad i = 0 \; vagy \; j = 0 \; vagy \; (i,j) \in E\}$), a c költségfüggvény viszont változik:

$$c_{i,0} = 0 \quad \forall 0 \leq i \leq n$$
$$c_{0,j} = 1 \quad \forall 1 \leq j \leq n$$
$$c_{i,i} = 0 \quad \forall 0 \leq i \leq n$$
$$c_{i,j} = 1 \quad \forall i > 0, j > 0, \; i \neq j, \quad \text{és} \; (i,j) \in E$$

A következő lineáris programot fogjuk nézni:

$$\max \sum_{i,j=0}^{n} c_{i,j} x_{i,j}$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_{0,j} = \sum_{i=0}^{n} x_{0,i} = k \tag{4.8}$$

$$\sum_{j=0}^{n} x_{i,j} = 1 \quad \forall i > 0\texttt{-ra}; \quad \sum_{i=0}^{n} x_{i,j} = 1 \quad \forall j > 0\texttt{-ra} \tag{4.9}$$

$$x_{i,j} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in I \ \texttt{esetén} \tag{4.10}$$

Legyen $\mathcal{P}_k^c = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ egy k-út/kör-pakolás, ahol $P_1, P_2, \ldots, P_t \;\; (t \leq k)$ jelöli az utakat, a többi a körök. Ennek megfeleltethetjük egy $X = (x_{i,j})$ megoldását a fenti LP-feladatnak:

$$x_{0,0} = k - t$$

$$\text{minden } j > 0\text{-ra } x_{0,j} = \begin{cases} 1 & \textit{ha } j \in \textit{ini}[P_1, P_2, \ldots, P_t] \\ 0 & \texttt{egyébként} \end{cases}$$

$$\text{minden } i > 0\text{-ra } x_{i,0} = \begin{cases} 1 & \textit{ha } i \in \textit{ter}[P_1, P_2, \ldots, P_t] \\ 0 & \texttt{egyébként} \end{cases}$$

$$\text{minden } i > 0\text{-ra } x_{i,i} = \begin{cases} 1 & \texttt{ha } \; i \notin V(P_1) \cup ... \cup V(P_t) \\ 0 & \texttt{egyébként} \end{cases}$$

$$\forall i,j > 0, \quad i \neq j\text{-re } x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \texttt{ha } \; (i,j) \in E(P_r) \quad : 1 \leq r \leq m \\ 0 & \texttt{egyébként} \end{cases}$$

Szövegesen megfogalmazva: Ha $P = (1, 2, .., l)$ egy út, akkor az $x_{0,1} = x_{1,2} = \cdots = x_{l-1,l} = x_{l,0} = 1$. Ha $C = (1, 2, .., l)$ egy kör, akkor $x_{1,2} = x_{2,3} = \cdots = x_{l-1,l} = x_{l,1} = 1$.

Ez valóban egy megengedett megoldás lesz, és a $|\bigcup \mathcal{P}_k^c| = \sum_{i,j=0}^{n} c_{i,j} x_{i,j}$. Hasonlóan visszafelé is működik a dolog, egy egész megoldása az LP-feladatnak megfeleltethető így egy részleges k-út/kör-felbontásnak.

Nézzük a duális feladatot:

$$\min \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j + k(u_0 + v_0)$$

ahol

$$u_i + v_j \geq c_{i,j} \texttt{ minden } (i,j) \in I\texttt{-re.} \tag{4.11}$$

Létezik egész optimális megoldás, és feltehető róla, hogy $u_0 = 0$.
A színosztályokat a következőképpen definiáljuk:

$$S_r = \{i > 0 \ : \ v_i = -u_1(r\}$$

$$T_j = \{j\}, \texttt{ ahol } v_j \neq -u_j$$

Lemma. Ez valóban egy színezés

Bizonyítás. Ehhez azt kell megmutatni, hogy az S_r-ek stabilak. Indirekten tegyük fel, hogy $i, j \in S_r, (i,j) \in E$. Ekkor $u_i + v_i = 0$, és $u_i + v_j \geq 1$, amiből $v_j - v_i \geq 1$, tehát nem egyenlőek, ami ellentmondás.

Az optimalitási feltételekből az előző tételhez hasonló logikával következik, hogy minden T_i benne van egy útban, és minden S_r metsz minden utat.

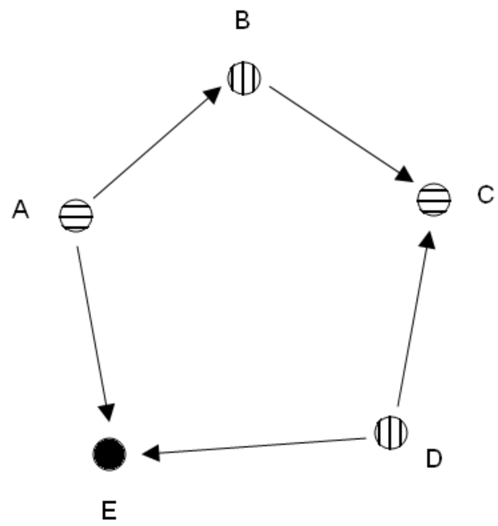
□

4.3.5. Következmény. *Minden digráfra* $\lambda_k^c \geq \chi_k$.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{P}_k^c$ egy optimális k-út/kör-pakolás. A tétel szerint létezik egy $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ színezés, ami ortogonális erre. Ekkor

$$\lambda_k^c = |\mathcal{P}_k^c| = \sum_{i=1}^{m} |C \cap V[\mathcal{P}_k^c] \geq \sum_{i=1}^{m} min\{|C_i|, k\} = |\mathcal{C}|_k \geq \chi_k$$

Ezek után felmerül a kérdés, hogy ezek a tételek a másik irányba is igazak-e, nevezetesen, hogy mindig létezik olyan k-út/kör-pakolás amire minden k-optimális színezés ortogonális illetve hogy létezik-e olyan út/kör-felbontás, ami minden optimális részleges k-színezésre ortogonális. A válasz az, hogy nem, sőt, még csak nem is minden optimálisra létezik egy ortogonális. Ez már aciklikus digráfokra sem teljesül, lásd a$k = 1$ esetre a lenti ábrát: a színezés 1-optimális, viszont semelyik út sem metszi az összes színosztályt. Hasonlóan ha az ábrán kitöröljük az E csúcs színét, akkor egy 2-optimális részleges színezést kapunk, amire egyetlen út/kör-felbontás se lehet ortogonális, mert annak fednie kéne az E csúcsot, ami nincs színezve, akkor viszont egy olyan úttal, ami legalább 3 hosszú, de olyan nincs a digráfban.



5. fejezet

A Berge-sejtés általános gráfokra

Nem feltétlenül aciklikus gráfokra nem ismertek olyan általános tételek, mint aciklikus esetben. Egyes esetekben viszont nem aciklikus gráfokra is tudjuk, hogy a Berge-sejtés megáll. Az egyik legegyszerűbb ilyen, ha a gráfban létezik Hamilton-út, hiszen ekkor minden k-ra ez lesz az optimális útfelbontás, és $\pi_k(D) = k\alpha_k(D)$ automatikusan teljesül, ráadásul bármely olyan részleges k-színezés, aminek nincsen üres színosztálya, ortogonális lesz a Hamilton-útra. Hasonlóan a Hamilton út minden k-ra egy optimális k-útpakolást is ad, így $\lambda_k(D) = n \geq \chi_k(D)$, ráadásul a Hamilton-út ortogonális lesz bármely színezésre.

Ezen kívül még ismert, hogy teljesül a Berge-sejtés a $k = 1, 2, \lambda - 1, \lambda$ esetekre. Ezekből a $k = 1$ és $k = \lambda$ két klasszikus tétel, amiket teljes bizonyítással közlünk. A $k = 2$ és $k = \lambda - 1$ két elég firss eredmény. Hartman legújabb, a dolgozat írásának időpontjában még nem megjelent cikkében egységes megközelítési módot javasol, melyről bizonyítja, hogy működik a $k = 1, \lambda - 1$ és λ esetekre. Ennek az eljárásnak lényege szerepel a dolgozatban, a technikai meggondolás mindhárom esetre, hogy ez működik, az eredeti cikkben olvasható, mely Irith Hartman honlapján megtalálható. A $k = 2$ eset kakukktojás ilyen szempontból, ezt (még?) nem sikerült az egységes módszer mentén bizonyítani, mindenesetre a jelenleg ismert bizonyítás nem használ lényegesen más ötletet, mint az egységes módszer, így itt csak említjük, hogy ez is ismert eset, a külön erre érdeklödők a [10] cikkben megnézhetik a bizonyítást.

5.0.6. Tétel (Gallai-Milgram). *Egy D digráf lefedhető maximum $\alpha(D)$ pontdiszjunkt úttal, másképpen $\pi_1(D) \leq \alpha_1(D)$*

A bizonyítás az alábbi, erősebb tételből jön ki:

5.0.7. Tétel. *[3] Ha adva van egy digráf és annak egy* $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ *útpakolás, akkor az alábbi két eset közül legalább az egyik teljesül:*
(1) *Létezik egy* $\mathcal{P}$*-re ortogonális k-stabil halmaz, vagy*
(2) *Létezik egy* $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_{m-1}\}$ *útpakolás, melyre* $ini(\mathcal{Q}) \subset ini(\mathcal{P})$, $ter(\mathcal{Q}) \subset ter(\mathcal{P})$, *és* $|R(\mathcal{Q})| \leq k - 1$.

Bizonyítás. Csúcsszám szerinti indukcióval. Ha az $n = 2$, akkor az állítás igaz. Tegyük fel, hogy adva van egy n csúcsú gráf, és minden $n' < n$-re teljesül a tétel minden k és m esetén.

Első megfigyelés, hogy feltehető minden $P_i \in \mathcal{P}$-re, hogy $|P_i| \geq k$, hiszen különben elég lenne törölni P_i-t $\mathcal{P}$-ből. Jelölje a továbbiakban a_i a P_i út első csúcsát, b_i a másodikat. Két esetet különböztetünk meg:

1. eset:. $ini(\mathcal{P})$ nem stabil, mondjuk az $a_1a_2 \in E$.

Ekkor ha $|P_1| = k$, akkor a_1-et átrakjuk P_2 legelejére - ezzel eggyel meghosszabítva azt -, a P_1 maradékát meg töröljük az útfelbontásból, ezzel meg is kaptunk egy a (2)-t teljesítő részleges út-felbontást.

Tehát feltehetjük, hogy $|P_1| \geq k + 1$. Töröljük a gráfból az a_1 csúcsot, ekkor az indukciós feltevés miatt a maradék $n - 1$ csúcsú gráfra és $\mathcal{P}' = \{P_1 \backslash \{a_1\}, P_2, \ldots, P_m\}$ út-felbontásra már teljesül a tétel. Ha az (1) eset áll fent, akkor - mivel $\mathcal{P}'$ minden eleme legalább k hosszú út - a kapott k-stabil halmaz az eredeti gráfra és $\mathcal{P}$-re is jó lesz. Nézzük, ha a (2) teljesül, és egy $\mathcal{Q}' = \{Q_1, \ldots, Q_{m-1}\}$ útpakolást kapunk, amire $|R(\mathcal{Q}')| \leq k - 1$. Mivel $ini(\mathcal{Q}')$ egy $m-1$ elemű részhalamza az $ini(\mathcal{P}) = \{b_1, a_2, \ldots, a_m\}$ halmaznak, így Q_1-ről feltehető, hogy $ini(Q_1) = b_1$ vagy a_2. Bármely esetben az a_1-et hozzá tudjuk venni a Q_1 úthoz, mint legelső elemet, így kaptunk egy $\mathcal{Q}$ útpakolását D-nek, ami teljesíti (2)-t.

2. eset:. $ini(\mathcal{P})$ stabil. Ekkor vesszük $D' = D - ini(\mathcal{P})$-t, $\mathcal{P}' = \{P_1 \backslash \{a_1\}, \ldots, P_m \backslash \{a_m\}\}$-et és $k' = k-1$-et, az indukciós feltevés szerint erre már teljesül a tétel. Ha az (1) teljesül, akkor $ini(\mathcal{P})$-t hozzácsapva a k'-stabil halmazhoz, egy ortogonális k-stabilt kapunk. Ha a (2) teljesül, akkor legyen $\mathcal{Q}' = \{Q'_1, \ldots, Q'_{m-1}\}$ a kapott útpakolás. Feltehető, hogy $ini(Q'_i) = b_i$ minden $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$-re, és $|R(\mathcal{Q}')| = |V' \backslash (Q'_1 \cup \cdots \cup Q'_{m-1})| \leq k' - 1 = k - 2$.

Legyen $Q_i = Q'_i \cup a_1$ $(i \in \{1, \ldots, m-1\}$. Ekkor $\mathcal{Q}$ egy útpakolása D-nek, $|R(\mathcal{Q})| = |R(\mathcal{Q}')| + 1 \leq k - 1$, és $ini(\mathcal{Q}) \subset ini(\mathcal{P})$, tehát teljesíti a (2)-t.

□

5.0.8. Következmény. *Ha egy digráfban van olyan k-optimális útfelbontás, amiben minden út legalább k hosszú, akkor arra az útfelbontásra létezik ortogonális k-stabil halmaz*

Ez értelemszerűen magában foglalja a Gallai-Milgram tételt is. A következő tétel bizonyos szempontból a másik végletet fogja meg, mikor van egy olyan k-optimális útfelbontás (és ilyenkor az összes ilyen), amelyikben minden út legfeljebb k hosszú. Ekkor a $\pi_k(D) = n$, és ez pontosan akkor lehet, mikor a k nem kisebb, mint a leghosszabb út hossza ($\lambda(D)$), tehát a Berge-sejtés ebben az esetben azt mondja ki, hogy ha $k \geq \lambda(D)$, akkor a gráf csúcsai kiszínezhetőek k színnel. Megint picit másképp megfogalmazva:

5.0.9. Tétel (Gallai-Roy). *Egy D digráfban $\lambda(D) \geq \chi(D)$.*

Bizonyítás. A gráfból kitörlünk néhány élt, hogy egy D' maximális aciklikus gráfot kapjunk. Mivel él törlésével csak romolhat az optimum, így $\pi_k(D') = n$. A 4.2.2 tételből tudjuk, hogy $n = \pi_k(D') = \alpha_k^*(D')$, tehát van olyan k-színezése D'-nek, melyben semelyik színosztályból nem vezet út önmagába. Ekkor viszont az eredeti D gráfban sem lehetett egy színosztályon belül él (mert D' maximális aciklikus részgráfja volt), így ez a színezés D-re nézve is jó.

□

Ezzel a két szélső esetet, a $k = 1$, és $k \geq \lambda$ eseteket végignéztük, két, az eredeti bizonyításokkal lényegében megegyező bizonyításokat adva. A következő részben visszatérnék egy korábban már utalás szintjén szerepelt reményteljes egységes módszerre, amivel több esetet lehet egyszerre kezelni.

Már a 3.1 kapcsán említettük, hogy az aciklikus digráfokra adott algoritmus módosítható úgy, hogy bizonyos nem aciklikus gráfokra is jó alkalmazható legyen. Ami problémát okozhat, ha az eredeti algoritmust szeretnénk nem aciklikus esetekre is használni, hogy semmi nem garantálja, hogy a hálózatban egy telített folyam egy útfelbontásnak felel meg, csak annyit mondhatunk, hogy egy út/kör-felbontásnak. Így nem tudtuk garantálni, hogy $\mathcal{P}(f+g)$ útfelbontás lesz, ha pedig nem, akkor arra nem lesz igaz a képletünk a k-normájára, így az áttöréseknél nem tudjuk garantálni, hogy valóban javítunk. Az általánosítás kulcsa ezért az lesz, hogy biztosítsuk, hogy $\mathcal{P}(f+g)$ útfelbontás lesz. Ehhez azt a módszert fogjuk használni, hogy a segédhálózatnak igyekszünk olyan kicsi részét nézni, amekkora még épp elég, hogy az arra nézve kijövő színezést ne rontsák el a nem nézett élek, de elég pici ahhoz, hogy $\mathcal{P}(f+g)$ aciklikus maradjon, tehát útfelbontás. Ehhez kelleni fog az alábbi fogalom:

Definíció. Ha adva van egy $N = (V(N), E(N), w, c, s, t)$ hálózat és egy $R \subseteq E(N)$ élhalmaz, akkor az $N^R = (V(N), R, w|R, c|R, s, t)$ hálózatot *az R-re megszorított hálózatnak* nevezzük, ahol a $w|R, c|R$ az adott függvények R-re való megszorítását jelöli.

Az aciklikus Az aciklkus digráfokhoz használt eljárás általánosításához a segédhálózat élhalmazának egy kezdeti R részhalmazára fogjk megszorítani a segédhálózatot. Ebben a megszorított segéghálózatban definiáljuk a ρ_R potenciált, és nézzük meg, hogy van-e áttörés vagy sem. Ha lesz áttörés, akkor az megad egy másik út/kör-felbontást, ami ha útfelbontás, akkor jobb (kisebb k-normájú), mint az eddigi, és akkor annak vesszük a hozzátartozó folyamot és segédgráfot és ahhoz egy R élhalmazt, amire megszorítjuk, és ismét megnézzük, hogy van-e áttörés. Az eljárás kulcsa az lesz, hogy biztosítani tudjuk, hogy valóban útfelbontást kapunk. Ha ez sikerül, akkor előbb-utóbb nem lesz több áttörés (ha más nem, ha már egy k-optimális útfelbontásból indultunk ki), ekkor a kapunk az éppen aktuális útfelbontásra ortogonális k-színezést. Az egyetlen probléma az lehet, hogy a maradék eredeti éleket még vissza kell venni, és ezek elronthatják a színosztályokat, mert nem lesznek többé stabilok, ezért ha van ilyen él, amelyik ezt elrontaná, akkor az egyiket hozzávesszük a megszorított segédhálózatunkhoz, és újra keresünk áttörést.

A kiinduló R élhalmaz álljon az összes hátra-élből és azokból az előre-élekből, amelyek $(s, x), (y, t), (s, t)$ vagy $(v'_{i,v}\, i'')$ alakúak, meg még azokból a (v'_i, v''_j) előre-élekből, amelyekre (v'_i, v''_j) egy max k hosszú útnak az éle $(\in E[\mathcal{P}^{\leq k}]$:

$$R_{kezd} = \{(u, v) \in \overline{E_f}\ :\ f(u, v) = 0 \texttt{ és } u = s \texttt{ vagy } v = t\}$$
$$\cup\{(v'_i, v''_i\ :\ f(v'_i, v''_i) = 0\}\cup\{(v, u)\ :\ f(u, v) = 1\}\cup\{(v'_i, v''_j)\ :\ (v'_i, v''_j) \in E[\mathcal{P}^{\leq k}]\}$$

Az így kapott R-re megszorítjuk az N_f segédhálózatot, az így kapott megszorított segédhálózatott jelölje N_f^R. Ebben az N_f^R hálózatban definiáljuk a ρ_R potenciált, ami tehát $\rho_r(v) = \min\{cost(Q)\ :\ Q \texttt{ egy } s \to v \texttt{ út } N_f^R\texttt{-ben}\}$.

Azokat a kihagyott éleket, amik elrontják majd a kijövő k-színezést (ha nincs áttörés), jelölje $\mathcal{A}_{f,\rho}$. Ezek tehát nem másak, mint:

$$\mathcal{A}_{f,\rho} = \{(v'_i, v''_j) \in \overline{E_f}\ :\ i \neq j, f(v'_i, v''_j) = 0, \rho(v''_j) = \rho(v'_j)+1 = \rho(v'_i)+1 = \rho(v''_i) \leq k\}$$

.

Ezekkel a jelölésekkel a fentebb leírt algoritmus formalizálva a következőképpen néz ki:

1. Veszünk egy $\mathcal{P}$ útfelbontást.

2. Megcsináljuk a hozzátartozó $f(\mathcal{P})$ folyamot, a hozzátartozó N_f segédhálózatot. Kiválasztjuk az R-beli éleket, és megszorítjuk erre a segédhálózatot, így megkapva N_f^R-et. Ebben definiáljuk a $\rho = \rho_R$ potenciált.

3. Ha áttörés van, akkor kapunk egy kisebb k-normájú útfelbontást, erre újrakezdjük az első lépéstől erre az útfelbontásra.

4. Amíg nincs áttörés, és $\mathcal{A}_{f,\rho} \neq \emptyset$, addig minden ciklusban hozzáadunk a hálózatunkhoz egy $\mathcal{A}_{f,\rho}$-beli élet, és eszerint frissítjük ρ-t.

   (a) Ha $\mathcal{A}_{f,\rho} = \emptyset$, akkor kapunk egy $\mathcal{P}$-re egy ortogonális k-színezést, az algoritmus leáll, és ezt adja vissza.

   (b) Ha áttörés lesz, akkor javítunk az útfelbontásunkon, és újraindítjuk az algoritmust az új útfelbontással.

Irith Hartman és Eli Berger legfrissebb cikkükben bebizonyították, hogy ez az algoritmus a $k = 1, \lambda - 1, \lambda$ esetekben garantálja, hogy $\mathcal{P}(f+g)$ valóban aciklikus lesz, tehát az algoritmus működik ezekre az esetekre, egy algoritmikus bizonyítást adva ilyenkor a Berge-sejtésre. A bizonyítás [9]-ban megtalálható.

6. fejezet

Irányítatlan gráfok

Legyen G ezúttal egy *irányítatlan* gráf. Jelölje $\overline{\pi_k(G)}$ a $\pi_k(\overrightarrow{G})$-k maximumát, ahol $\overrightarrow{G}$ végigfut a G összes irányításán.

6.0.10. Sejtés. *Ez a $\overline{\pi_k(G)}$ egy aciklikus irányításon is felvétetik.*

Ez a sejtés ekvivalens a Linial-sejtés első részével, hogy $\alpha_k(G) \geq \pi_k(G)$. Tegyük fel, hogy a fenti sejtés igaz, és vegyünk egy D digráfot. "Felejtsük el" az élek irányítását, így egy G_D irányítatlan gráfot kapunk. A stabil halmazok szempontjából mindegy, hogy van-e irányítás, ezért α_k nem változik. A G_D-nek pedig a sejtés szerint van egy $\overrightarrow{G_D}$ aciklikus irányítása, amelyre a $\overline{\pi_k(G)}$ felvétetik, így $\pi_k(D) \leq \pi_k(\overrightarrow{G_D}) \leq \alpha_k(\overrightarrow{G_D}) = \alpha(D)$.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy a Linial-sejtés első része teljesül, és vegyünk egy G irányítatlan gráfot. Legyen $\mathcal{C}^k = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ egy optimális részleges k-színezése G-nek. Ezt néhány új színosztály bevételével kiterjesztjük egy $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_s\}$teljes színezéssé. A D_G legyen a G-nek az az irányítása, amelyikben minden él egy magasabb sorszámú színosztályból mutat egy alacsonyabba (tehát ha $(y, x) = E(D)$, és $x \in C_i, \quad y \in C_j$, ahol $i > j$, akkor a D_G-ben ennek az élnek az irányítása $x \to y$ lesz). Ez az irányítás aciklikus, és minden P D_G-beli irányított út legfeljebb $\min\{|P|, k\}$ csúcsban metszi a $\mathcal{C}^k$-t. Vegyünk egy $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ k-optimális útfelbontást, ekkor erre felírhatjuk, hogy.

$$\alpha_k(D_G) = |\mathcal{C}^k| = \sum_{i=1}^{m} (P_i \cap \mathcal{C}^k) \leq \sum_{i=1}^{m} \min\{|P_i|, k\} = \pi_k(D_G) \tag{6.1}$$

Most felhasználva a Linial-sejtést, így $\alpha_k(D_G) \geq \pi_k(D_G)$, tehát a fenti egyenlőtlenségben igaziból egyenlőséggel teljesül. Ekkor viszont szintén a Linial-sejtés miatt $\alpha_k(G) = \pi_k(D_G) = \overline{\pi_k(G)}$.

Hasonló módon λ_k-ra is megcsinálhatjuk ezt, egy G irányítatlan gráfra jelölje $\overline{\lambda_k(G)} = \min \lambda_k(\overrightarrow{G})$, ahol $\overrightarrow{G}$ végigmegy a G összes irányításán.

6.0.11. Sejtés. *Ez a $\lambda_k(\overrightarrow{G})$ egy aciklikus irányításon is felvétetik.*

Ez a sejtés ekvivalens a Linial sejtés második részével.

7. fejezet

Erősen összefüggő gráfok

Egy másik általánosítási módja az ilyen jellegű tételeknek, ha erősen összefüggő gráfokat nézünk. Ennek előnye, hogy ha van egy bármilyen digráfunk, akkor egy új csúcs felvételével, amivel oda-vissza minden eredeti csúcsot összekötünk, egy erősen összefüggő digráfot kapunk, aminek a stabilitási száma (a legnagyobb stabil halmaz mérete) ugyanakkora, mint az eredeti digráfé. Emiatt az erősen összefüggő digráfokra kimondott tételek egy részét jól lehet általánosítani általános digráfokra.

7.0.12. Tétel (Camion). *Egy erősen összefüggő irányított turnamentben van Hamilton-kör.*

7.0.13. Tétel (Chen, Manalastas[17]). *Ha egy D erősen összefüggő digráfra $\alpha(D) = 2$, akkor a csúcsok lefedhetőek két irányított körrel, amik vagy diszjunktak, vagy egy útban metszik egymást.*

Ebből következik, hogy ilyenkor is létezik Hamilton-út. Ha pedig létezik Hamilton-út, akkor egyrészt $\pi_k(D) = k \leq \alpha_k(D)$, másrészt $\lambda_k(D) = n \geq \chi_k(D)$. tehát mindkét Linial-sejtés teljesül.

7.0.14. Tétel (Thomassé[16]). *Ha egy D erősen összefüggő digráfra $\alpha(D) \geq 2$, akkor létezik benne egy feszítő fenyves, aminek legfeljebb $\alpha(D) - 1$ darab levele van.*

Minden fenyőt fel tudunk darabolni annyi útra, amennyi levele van, így a fenti tétel egyenes következménye:

7.0.15. Következmény. *Ha egy D erősen összefüggő digráfra $\alpha(D) \geq 2$, akkor $\pi(D) \leq \alpha(D) - 1$.*

Ebből pedig következik a Gallai-Milgram tétel, hiszen ahogy fentebb le volt írva, D digráfhoz felveszünk egy új s csúcsot, azt minden eddigi csúccsal oda-vissza összekötjük, az így kapott D' digráf erősen összefüggő lesz, és $\alpha(D') = \alpha(D)$. Ha vesszük a D' egy útfelbontásá legfeljebb $\alpha(D') - 1$ darab úttal, akkor az s csúcsot elhagyva az eredeti D digráf egy legfeljebb $\alpha(D') = \alpha(D)$ darab útból álló útfelbontását kapjuk.

7.0.16. Tétel (Bondy[18]). *Legyen D egy erősen összefüggő digráf, ekkor létezik benne egy legalább $\chi(D)$ hosszú irányított kör.*

Ebből az előző módszer segítségével következik a Gallai-Roy tétel, annyi megfigyelés kell csak hozzá, hogy az új csúcs hozzávétele a gráfhoz eggyel növeli a kromatikus számot.

Érdemes még megnézni, hogy a Greene-Kleitman tétel is kijön erősen összefüggő digráfok segítségével. Ehhez először kell a következő tétel, és az abból adódó fogalom:

7.0.17. Tétel (Knuth). *Legyen $D = V, E)$ egy erősen összefüggő digráf. Ekkor létezik egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$, amire minden $e \in E$ él benne van egy olyan körben, aminek csak egy* hátra-éle *van*

A *hátra-él* alatt olyan élet $v_i v_j \in E$ értünk, amire $i > j$.

Definíció. Egy ilyen sorrendet nevezzünk *koherens* sorrendnek, a tétel azt mondja ki, hogy ilyen van, szóval vegyünk egyet, és azt rögzítsük. Erre a kiválasztott koherens sorrendre minden C irányított körnek lesz egy értéke (indexe), amit $ind(C)$-vel jelölünk. Ez jelölje a hátra-élek számát a kör élei között. A körök egy $\mathcal{C}$ halmazára is definiálhatjuk az indexet, ez legyen a benne lévő körök indexeinek összege.

Ennek segítségével megadhatjuk a D stabil halmazainak egy részosztályát:

Definíció. Egy adott koherens sorrendre nézve egy S halmazt nevezzünk *ciklikus stabilnak* pontosan akkor, ha

$$|S \cap C| \leq ind(C)$$

minden C irányított körre. Egy ilyen valóban stabil halmaz lesz, hiszen tegyük fel, hogy feszít egy ab élt. ekkor a koherens sorrend tulajdonsága miatt létezik oyan C kör, ami tartalmazza az ab élet, és az indexe egy. Ekkor $|S \cap C| \geq 2 > 1 = ind(C)$, tehát S mégse lehet ciklikus stabil.

Ennek az új fogalomnak a segítségével felírhatunk egy min-max tételt. Körök egy $\mathcal{C}$ halmazára jelölje az $R(\mathcal{C})$ a körök által nem fedett csúcsokat (hasonlóan, mint korábban az útfelbontásoknál).

7.0.18. Tétel. $\max\{|S_1 \cup \dots S_k| \ : \ S_i$ *ciklkikus stabil*$\} = \min\{|R(\mathcal{C})| + k \cdot ind(\mathcal{C}) \ : \ \mathcal{C}$ *körök egy halmaza*$\}$

Ebből következik a Greene-Kleitman tétel nem triviális iránya, hiszen ha adva van egy poset, abból a fent leírt módon erősen összefüggő digráfot csinálunk, erre vesszük a körök egy optimális $\mathcal{C}$ halmazát, amiből ha levágjuk az új csúcsot, akkor csupa utat kapunk, maximum $ind(\mathcal{C})$ darabot, hiszen minden körre az index legalább 1 volt. Mivel tranzitív a digráf, így nem okoz gondot, hogy az így kapott utak nem diszjunktak. Az $R(\mathcal{C})$-beli pontokat tekintsük triviális utaknak. Ekkor a poset egy olyan útfelbontását kapjuk, aminek a k-normája legfeljebb $|R(\mathcal{C})| + k \cdot ind(\mathcal{C})$, amire a tétel kimondja, hogy van ekkora halmaz, ami k darab (ciklikus) stabil uniója.

A fenti tétel bizonyítása és további ennek a min-max tételnek további következményei elolvashatók a [3]-ben.

Az viszont már itt is látszik, hogy mi a hátránya az erősen összefüggő digráfokkal való megközelítésnek: átalában nem tudjuk garantálni, hogy a körök/utak diszjunktak legyenek.

8. fejezet

Összefoglaló

A posetek körében a Greene és a Greene-Kleitman tétel azt mondta ki, hogy minden optimális k-útpakolásra létezik ortogonális (optimális) l-színezés, és minden optimális q-színezésre létezik rá ortogonális (optimális) r-útpakolás. Ezekből, kihasználva a posetek tranzitivitását, két min-max tétel is rögtön következett, az egyik k darab diszjunkt út által lefedett csúcsok maximális számára, a másik az l darab stabil halmaz uniójának maximális méretére.

Ha elhagyjuk a tranzitivitást, akkor az ortogonalitás már csak egyenlőtlenséget garantál az irányított gráfokban, ennél többet viszont nem is remélhetünk. Így az általános esetben a fő kutatási irány, hogy mely esetekben létezik a posetekhez hasonló ortogonalitási tulajdonság. A Berge és az Aharoni-Hartman-Hoffman sejtés azt állítja, hogy minden digráfban. Eddig ezeket az aciklikus digráfok körében sikerült bizonyítani, illetve a Berge-sejtést a $k = 1, 2, \lambda - 1, \lambda$, illetve ha létezik Hamilton-út, vagy olyan k-optimális útfelbontás, amiben minden út legalább k hosszú (ennek speciális esete, ha $k = 1$, mert minden út legalább 1 hosszú), vagy amiben minden út legfeljebb k hosszú (ennek meg speciális esete a $k = \lambda$).

A Greene és Greene-Kleitman tételek egy másik általánosítási lehetősége, ha megengedünk köröket is. Ekkor általános digráfokra is teljesül a két sejtés megfelelően általánosított változata. A másik előnye ennek az iránynak, hogy erre képesek vagyunk min-max tételt felírni.

Irodalomjegyzék

[1] C. Greene: Some partitions associated with a partially ordered set, *J. Combinatorial Theory, Ser. A 20 (1976), 69-79*

[2] C. Greene, D.J. Kleitman: The structure of Sperner k-families, *J. Combinatorial Theory, Ser. A 20 (1976), 41-68*

[3] András Sebő, Path Partitions, Cycle Covers and Integer Decomposition

[4] András Frank: On chain and antichain families of a partially ordered set, *J. Combinatorial Theory, Ser. B 29 (1980), 176-184*

[5] N. Linial, Extending the Greene-Kleitman theorem to directed graphs, *J. Combinatorial Theory, Ser. A 30 (1981), 331-334*

[6] M. Saks, A short proof of the k-saturated partitions, *Adv. In Math. 33 (1979), 207-211*

[7] R. Aharoni, I. Ben-Arroyo Hartman and A. J. Hoffman, Path partitions and packs of acyclic digraphs, *Pacific Journal of Mathematics (2) 118 (1985), 249-259*

[8] C. Berge, k-optimal partitions of a directed graph, *Europ. J. Combinatorics (1982) 3, 97-101*

[9] Eli Berger, Irith Hartman: A Unified Approach to Known and Unknown Cases of Berge's Conjecture, *submitted*

[10] Eli Berger, Irith Hartman: Proof of Berge's Strong Path Partition Conjecture for k=2, *Europ. J. Combinatorics (2007)*

[11] Thomas Britz, Sergey Fomin: Finite Posets and Ferrers Shapes, *Advances in Mathematics, 158, 86-127 (2001)*

[12] Irith Hartman: Berge's conjecture on directed path partitions - a survey, *Discrete Mathematics 306 (2006) 2498-2514*

[13] Irith Hartman: An Extension of the Greene and Greene-Kleitman Theorems to all Digraphs

[14] Irith Hartman: On Path Partitions and Colourings in Digraphs

[15] Timothy Y. Chow, C. Kenneth Fan, Michel X. Goemans and Jan Vondrak: Wide partitions, Latin tableaux, and Rota's basis conjecture, *Advances in Applied Mathematics 31 (2003) 334-358*

[16] Stéphan Tommassé: Covering a Strong Digraph by $\alpha - 1$ Disjoint Paths. A proof of Las Vergnas' Conjecture, *Journal of Combinatorial Theory, vol. 83, no. 2, pp. 331-333, 2001*

[17] C.C. Chen. Manalastas: Every finite strongly connetcted digraph of stability two has a Hamilton path, *Discrete Mathetamtics, 44. (1983) 243-250*

[18] A. Bondy: Disconnected orientations and a conjecture of Lasvergnas, *J. London Math. Soc. 14(2) (1976)*