Koanalitikus transzfinit konstrukciók

szakdolgozat

írta: Vidnyánszky Zoltán
Matematikus MSc

Témavezető: Elekes Márton, egyetemi adjunktus
Analízis Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapest, 2011.

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Elekes Mártonnak, akinek a segítsége nélkül nem készülhetett volna el a dolgozat. Ezen felül köszönettel tartozom mindenkinek, aki szakmailag vagy emberileg hozzájárult a megíráshoz.

1. Bevezetés

A halmazelmélet egyik alapvető eszköze a transzfinit rekurzió, amely a matematika lényegében minden végtelen halmazokkal foglalkozó ágában gyakran előfordul. Az így válogatott halmazok általában meglehetősen bonyolultak, létezésük sokszor ellenkezik a természetes intuícióval.

Ennek segítségével konstruálható például a síknak egy részhalmaza, mely minden egyenest pontosan két pontban metsz, az ilyen tulajdonságú halmazokat 2-pont halmaznak nevezzük. A mai napig megoldatlan kérdés, hogy Borel van-e, ami ismert, hogy F_σ nem létezik. A. W. Miller [11]-ben igazolta, hogy extra halmazelméleti feltevések esetén van koanalitikus (vagyis Borel halmaz vetületének komplementere), sőt egy eljárást talált meg, melynek segítségével bizonyos fajta transzfinit rekurzióval megadott halmazokat koanalitikusnak is meg tudunk választani. Így például azt is igazolta, hogy létezik koanalitikus Hamel-bázis, vagy ω részhalmazainak koanalitikus, maximális majdnem diszjunkt rendszere. A cikkben található bizonyítás meglehetősen nehezen érthető, általános elvet nem is fogalmaz meg. Ilyen jellegű állításokat többen is próbáltak igazolni, hol precízen, hol pedig [11]-re hivatkozva ([2],[4],[5],[7]).

A dolgozatban először felépítjük a bizonyítás eszköztárát, számos jól ismert tételt bizonyítás nélkül vagy csak vázlatos bizonyítással közlünk. Ezután igazoljuk Miller eredményét, a hozzá kapcsolódó tételeket, végül egy jóval általánosabb tételt látunk be, amely használható lehet koanalitikus halmazok konstruálására. Legfontosabb eredményünk talán a következő:

1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $F : [2^\omega]^{\leq\aleph_0} \times 2^\omega \to 2^\omega$ Borel leképezés, $P \subset 2^\omega$ Borel halmaz, $|P| > \aleph_0$. Tegyük fel még, hogy minden $A \in [2^\omega]^{\leq\aleph_0}$, $p \in P$ párra*

$$\text{ha } F(A,p) = s, \text{ akkor } s \text{ egy } B_s \text{ Borel halmaz kódja, és}$$
$$(\forall y \in 2^\omega)(\exists x \in B_s)(x \geq_T y).$$

Ekkor van a halmazelméletnek egy modellje, melyben létezik a P-nek egy $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ felsorolása és egy $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset 2^\omega$ $\mathbf{\Pi^1_1}$, hogy minden $\alpha < \omega_1$-re $x_\alpha \in B_{s_\alpha}$, ahol $s_\alpha = F(\{x_\beta : \beta < \alpha\}, p_\alpha)$.

Ahol $x \geq_T y$ azt jelöli, hogy van egy Turing-gép, amely x ismeretében kiszámítja y-t.

Vagyis lényegében arról van szó, hogy ha a választási szabadság olyan nagy, hogy mindegyik lépésben a "jó" halmaz Turing kofinális, akkor tudunk koanalitikus halmazt választani.

1.1. Jelölések, konvenciók

A dolgozatban igyekszünk standard jelöléseket használni, lényegében [8] és [12] nyomán. Rögzítünk egy rekurzív bijekciót ω és ω^n, $\omega^{<\omega}$, $2^{<\omega}$, stb. között, ezeket így azonosnak fogjuk tekinteni, hasonlóan 2^ω-t és $(2^\omega)^\omega$-t is.

$[A]^{\leq\kappa} = \{B \subset A : |B| \leq \kappa\}$

$(M, R) \models \phi$ az M modellben kiértékelve igaz a ϕ formula. Az R relációt, ha egyértelmű, elhagyjuk. Amennyiben ϕ a halmazelmélet egy konstansmentes formulája, a kifejezés azt jelöli, hogy ϕ-ben minden $\in$-t R-rel helyettesítünk 2.17

xRy, ha R kétváltozós reláció és $R(x, y)$

$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}$, A hatványhalmaza

$\mathcal{D}(A)$ az A-ból definiálható halmazok, lásd 2.6

L, L_α a konstruálható univerzum, konstruálható halmazok szintjei, lásd 2.8

$\mathfrak{o}(x)$ x rendje, lásd 2.9

$<_L$ L jólrendezése, lásd 2.13

$x \leq_T y$ x Turing-gyengébb, mint y, lásd 3.1

π_X egy $X \times \ldots$ szorzattérből az X-re való vetítést

A_x, A^y az $A \subset X \times Y$ halmaz $x \in X$ és $y \in Y$ szekciója, vagyis $\{y' \in Y : (x, y') \in A\}$

$\Sigma^1_1, \Delta^1_1, \ldots$ projektív osztályok, lásd 3.5
$\Sigma^0_\xi(z), \Delta^1_1(z), \ldots$ relatív projektív osztályok, lásd 3.7
$\hat{st}$ jelöli az s és t sorozatok konkatenációját
B_c a c által kódolt Borel halmaz, lásd 3.12
$\mathring{x} \in (\omega, E)$ lásd 4.3
ω_1^x az első x-ben nem rekurzív rendszám, lásd 5.13
S az önkonstruáló valósak halmaza, lásd 6.3

2. A konstruálhatósági axióma és egyéb halmazelméleti tételek

Ebben a fejezetben klasszikus tételeket és definíciókat mondunk ki, lényegében [3],[6],[9] nyomán.

2.1. Fodor-lemma és suvasztási lemma

2.1. Definíció. *Egy $A \subset \omega_1$ halmaz kofzárt, ha kofinális és zárt a rendszámok rendezéstopológiájában. Stacionárius, ha minden kofzártat metsz.*

Kofzárt például a $\{\beta : \beta > \alpha\}$ halmaz minden $\alpha < \omega_1$-re, vagy a limeszrendszámok halmaza.

2.2. Definíció. *Legyen $A \subset \omega_1$, ekkor egy $f : A \to \omega_1$ függvényt regresszívnek nevezünk, ha minden $\alpha \in A$-ra vagy $\alpha = 0$ vagy $f(\alpha) < \alpha$ teljesül.*

2.3. Lemma. *(Fodor-lemma) Stacionárius halmazon regresszív függvény stacionárius halmazon konstans.*

2.4. Definíció. *Egy E reláció X-en jólfundált, ha nem létezik végtelen leszálló lánc, vagyis olyan $x_n \in X$, hogy $\forall n \in \omega$-ra $x_{n+1} E x_n$.*

2.5. Lemma. *(Suvasztási lemma) Tételezzük fel, hogy* (X, E) *adott,* E *jólfundált reláció* M*-en, melyre teljesül, hogy*

$$(\forall u, v \in X)\big(u \neq v \Rightarrow (\exists x \in X)((xEu \wedge \neg(xEv)) \vee (xEv \wedge \neg(xEu)))\big)$$

(E*-re teljesül a meghatározottság). Ekkor van egy egyértelmű* $\pi : X \to M$*, hogy* M *tranzitív és* $xEy \iff \pi(x) \in \pi(y)$*, vagyis* X *suvasztható egy tranzitív izomorf képre.*

A bizonyítás kézenfekvő, az izomorfizmust transzfinit rekurzióval építjük fel.

2.2. Konstruálhatóság

Legyen A tetszőleges halmaz, legyen $\mathcal{D}(A)$ az A-ból formulával definiálható halmazok rendszere:

2.6. Definíció. $\mathcal{D}(A) = \{B \subset A :$ *létezik egy* $\phi(x, y_0, \dots, y_n)$ $n+2$*-változós formula és* $y_0, \dots, y_n \in A$*, hogy* $x \in B \iff (A, \in) \models \phi(x, y_0, \dots, y_n)\}$.

2.7. Állítás. *Nyilván teljesül, hogy* $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{P}(A)$*, ha* A *tranzitív, akkor* $A \subset \mathcal{D}(A)$*.*

2.8. Definíció. *Transzfinit rekurzióval definiáljuk* L_α*-t:*

- $L_0 = \emptyset$
- $L_{\alpha+1} = \mathcal{D}(L_\alpha)$
- $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$*, ha* α *limeszrendszám.*

Legyen $L = \bigcup\{L_\alpha : \alpha$ *rendszám*$\}$*.*

2.9. Definíció. *A konstruálhatósági axióma azt mondja ki, hogy minden halmaz konstruálható, vagyis* $(\forall x)(\exists\alpha)(x \in L_\alpha)$*. Jelölése* $V = L$*.*

2.10. Definíció. *Egy* $x \in L$ *halmazra* $\mathfrak{o}(x)$ *jelöli azt a minimális* α *rendszámot, melyre* $x \in L_\alpha$*, Ezt* x *rendjének nevezzük.*

Indukcióval világos, hogy az L_α-k növő rendszert alkotnak, mindegyik tranzitív, ha $\alpha < \beta$, akkor $\alpha \in L_\beta$. $|L_\alpha| = |\alpha|$, ha $\alpha \geq \omega$. Ezen felül az L_α-k limesz α-ra "elég sokat" tudnak a halmazelméletről. Tekintsük az $(L_\alpha, \in)$ modellt. Ekkor ebben is definiálható L és L_β minden $\beta \in L_\alpha$ rendszámra. Jelölje az így kapott részhalmazt $(L_\beta)^{L_\alpha}$.

2.11. Állítás. *Limesz* α*-ra* $(L_\beta)^{L_\alpha} = L_\beta$.

Tehát az L_β-k ilyen (sőt valójában erősebb) értelemben abszolútak. L létrejöttének eredeti célja az ÁKH és a kiválasztási axióma konzisztenciájának igazolása volt.

2.12. Tétel. *(ZF)*

- $L \models ZF$
- $L \models ÁKH$
- *L-ben igaz a kiválasztási axióma*

Tehát amennyiben ZF-nek van modellje, akkor ZFC-nek és ÁKH-nak is van. Ezek az eredmények lényegesen használják L egyik fontos tulajdonságát, jelesül, hogy jólrendezhető.

2.13. Állítás. *Létezik egy* $\phi(x, y)$ *formula, mely* $x, y \in L$ *elemein jólrendezést ad meg. Azt, hogy* $L \models \phi(x, y)$ $x <_L y$*-nal jelöljük.*

Bizonyítás. Rögzítsük most a halmazelmélet formuláinak egy felsorolását $(\phi_n)_{n\in\omega}$, úgy, hogy, ha ϕ-ben több szabad változó van mint ψ-ben, akkor ψ hamarabb következzen. Transzfinit rekurzióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $\forall x, x' \in L_\alpha$-ra definiáltuk a $<_L$ rendezést. Ha $\mathfrak{o}(y) = \alpha + 1$, akkor legyen $x <_L y$ minden $x \in L_\alpha$-ra. Legyen most $\mathfrak{o}(y') = \alpha + 1$. Ekkor $L_{\alpha+1}$ definíciója miatt vannak $\phi_m, \phi_{m'}$ formulák (rögtön tekintsük a legkisebb indexűeket a felsorolás szerint) és $x_0, \ldots, x_l, x'_0, \ldots, x'_{l'} \in L_\alpha$, hogy $z \in y \iff L_\alpha \models \phi_m(z, x_0, \ldots, x_l)$ és $z \in y' \iff L_\alpha \models \phi_{m'}(z, x'_0, \ldots, x'_{l'})$. Ha $m < m'$, akkor legyen $y <_L y'$. Ha $m = m'$, akkor $l = l'$, tekintsük a lexikografikus rendezést $<_L$ szerint az $(x_0, \ldots, x_l)$ és $(x'_0, \ldots, x'_l)$ közt, y, y'-t rendezzük ennek megfelelően. Ez csak akkor nem áll fenn egyik irányban sem, ha a két sorozat megegyezik. De ekkor $y = y'$.

Limesz α-ra uniózzuk az eddigi rendezéseket. így egy teljes rendezést adtunk meg, amely természetesen jólrendezés. ∎

Világos, hogy az L_α-k a $<_L$ rendezés kezdőszeletei. Érdemes bevezetnünk a következő fogalmat.

2.14. Definíció. *Egy $\phi(\cdot)$ konstansmentes halmazelméleti formuláról azt mondjuk, hogy limesz abszolút, ha minden α limeszrendszámra és $x \in L_\alpha$-ra*

$$L_\alpha \models \phi(x) \iff L \models \phi(x).$$

2.15. Állítás. *Ha $x, y \in L_\alpha$, akkor $x <_L y \iff L_\gamma \models x <_L y$, ahol $\gamma \geq max(\omega, \alpha + 5)$.*

Speciálisan $<_L$ limesz abszolút.

2.16. Állítás. *A következő tulajdonságok definiálhatóak konstansmentes formulával és a definíció limesz abszolút: f függvény, $dom(f)$, $ran(f)$, α rendszám (jelölése $ord(\alpha)$), α limeszrendszám (jel. $lim(\alpha)$), n természetes szám (jel. $\mathring{n}$), ω (jel. $\mathring{\omega}$), $\mathfrak{o}(x)$, L_α (jel. $\mathring{L}_\alpha$, s egy sorozat, $s(n)$ a sorozat n-ik tagja.*

2.17. Megjegyzés. *Az előző állításban minden felsorolt fogalomhoz rögzítünk egy konstansmentes formulát. Ezek után, ha egy formulában valamelyiket használjuk, akkor az alatta azt értjük, hogy $\exists x$, amely teljesíti a neki* *megfelelő formulát és erre az x-re teljesül valami. Például* $(M,R) \models \mathring{n}R\mathring{\omega}$ *jelentse, hogy* $(M,R) \models (\exists x)(\exists y)(\psi_n^R(x) \wedge \psi_\omega^R(y) \wedge xRy)$*, ahol a* ψ^R *azt jelenti, hogy* ψ*-ben minden* $\in$ *helyére* R*-t írunk. A felső indexből a relációt elhagyjuk később.*

Szintén fontos tulajdonsága L-nek, hogy minden tranzitív részmodell, amely "elég sokat tud", megegyezik egy L_β-val.

2.18. Tétel. *(Kondenzációs lemma) Létezik egy* σ *konstansmentes zárt formula, hogy ha* $(\omega, E) \models \sigma$*, és* E *jólfundált, akkor van egy egyértelmű* $\alpha < \omega_1$ *limesz, hogy* $(\omega, E) \cong (L_\alpha, \in)$*. Sőt az is igaz, hogy* $\forall \alpha < \omega_1$ *limeszre* $L_\alpha \models \sigma$*.*

A bizonyítás azon múlik, hogy egy olyan modellben, amely teljesíti a fenti kritériumokat, meg tudjuk fogalmazni, hogy minden halmaz konstruálható, hasonló okoskodást még fogunk látni.

2.19. Megjegyzés. *Általánosítható a konstruálható halmazok hierarchiája, mégpedig úgy, hogy nem az üreshalmazból indulunk ki, hanem egy* $a \in V$*-ből, tipikusan* $a \in 2^\omega$*. Az így kapott osztályt* $L[a]$ *jelöli, sokban hasonlít* L*-re, részleteket lásd [3]-ban.*

3. Effektív módszerek

3.1. Rekurzióelméleti áttekintés

Az effektív módszer alapgondolata, hogy összeköti a rekurzióelméletet a leíró halmazelmélettel, ezzel a Borel halmazok egy finomabb osztályozását megadva.

3.1. Definíció. *Legyen* $x, y \in 2^\omega$*. Azt mondjuk, hogy* $x \leq_T y$*, ha van egy olyan kétszalagos Turing-gép, amelynek egyik szalagjára bemenetként* y*-t írva a másik szalagra* x*-et írja.*

3.2. Definíció. *Legyen (X, d) metrikus tér. Egy $\{r_i\}_{i\in\omega}$ sorozatot rekurzív prezentációnak nevezünk, ha sűrű X-ben, és a*

$$d(r_i, r_j) \leq \frac{m}{k+1},$$

$$d(r_i, r_j) < \frac{m}{k+1}$$

(4 változós) relációk rekurzívak.

Minden számunkra érdekes térnek van rekurzív prezentációja, így például $\omega, \omega^\omega, 2^\omega$-nak is. Egy adott térhez rögzítsünk egy rekurzív prezentációt. Ekkor egy bázis felsorolását adja meg $\{N(X, n) = B(r_{f_1(n)}, \frac{f_2(n)}{f_3(n)+1}) : n \in \omega\}$, ahol f_i a jól ismert rekurzív $\omega \to \omega^3$ bijekció i-edik koordinátafüggvénye. Jelölje ezt a bázist $\mathcal{B}$. Szorzatterekre a rekurzív prezentáció és bázis értelmezése kézenfekvő.

3.3. Definíció. *Egy $G \subset X$ szemirekurzív, ha $G = \cup_n N(X, f(n))$ valamely f rekurzív függvényre, vagyis egy rekurzív bázis rekurzív uniója.*

3.4. Állítás. *Két szemirekurzív halmaz metszete, uniója is az, ha $A \subset X \times \omega$ halmaz szemirekurzív, akkor $\pi_X(A)$ is az.*

3.5. Definíció. *Jelölje az X-beli szemirekurzív halmazok összességét $\Sigma^0_1(X)$ (ha egyértelmű a tér, akkor csak Σ^0_1). Legyen*

$$\Pi^0_n(X) = \{X \setminus A : A \in \Sigma^0_n\},$$

$$\Sigma^0_{n+1}(X) = \{\pi_X(A) : A \in \Pi^0_n(X \times \omega)\}.$$

Az így definiált halmazok összességét aritmetikus halmazoknak nevezzük, ezek egy lehetséges effektív verziói a Borel halmazoknak. Vezessük be az effektív projektív osztályokat. A klasszikus Borel és projektív osztályokat félkövér $(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Pi}, \mathbf{\Delta})$ betűkkel jelöljük.

3.6. Definíció. *Legyen* $\Sigma^1_1(X) = \{\pi_X(A) : A \in \Pi^0_1(X \times \omega^\omega)\}$,

$$\Pi^1_n(X) = \{X \setminus A : A \in \Sigma^1_n\},$$

$$\Sigma^1_{n+1}(X) = \{\pi_X(A) : A \in \Pi^1_n(X \times \omega^\omega)\}.$$

Ezek után definiáljuk a $\Delta^i_j = \Sigma^i_j \cap \Pi^i_j$, $i = 0, 1$, $j \in \omega$ osztályokat. A továbbiakban halmazosztályon az imént definiált részhalmazrendszerek valamelyikét értjük.

3.2. Relativizáció

3.7. Definíció. *Legyen X, Z két tér rekurzív prezentációval. Ekkor ha Γ halmazosztály, $z \in Z$-re értelmezzük $\Gamma(z)$ relativizáltat úgy mint azon $A \subset X$ halmazokat, melyekre van olyan $B \in \Gamma(X \times Z)$, hogy $B^z = A$, vagyis B z-szekciója épp A. Egy $A \in \Gamma(z)$-halmaz Γ modulo z.*

Egy $x \in X$ pontot rekurzívnak mondunk, ha $\{n : x \in N(X, n)\}$ rekurzív halmaz, vagyis $\Sigma^0_1(\omega)$-beli. $x \in X$ rekurzív modulo z, ha a fenti halmaz $\Sigma^0_1(X)(z)$-beli.

3.8. Állítás. *A $\Sigma^0_i(z)$ osztályok zártak az $X \times \omega$-ból való vetítésre, véges metszetre és unióra. A $\Sigma^1_i(z)$ alakúak zártak továbbá $X \times Y$-ból való vetítésre is, ahol Y tetszőleges rekurzív prezentációval rendelkező tér.*

A relativizációnak értelmet ad a következő egyszerű észrevétel.

3.9. Állítás. *Ha* $\mathbf{\Sigma^i_j} = \cup_{z \in 2^\omega} \Sigma^i_j(z)$, *hasonlóan Π-re és Δ-ra.*

Bizonyítás. (Vázlat) Elég az állítást $\mathbf{\Sigma^1_0}$-ekre látni, hiszen onnan egyszerű indukció. Ha $G \in \mathbf{\Sigma^0_1}(X)$, tekintsük az $U \subset X \times 2^\omega$ halmazt, ahol $(x, t) \in A \iff x \in \cup_{n \in t} N(X, n)$. Ekkor természetesen $\exists t \in 2^\omega$, hogy $G = A^t$. Elég tehát belátni, hogy A egy $\Sigma_1^0(X \times 2^\omega)$ halmaz. A definíciója pedig átírható: $(x,t) \in A \iff (x,t) \in \pi_{X\times 2^\omega}(B)$, ahol

$$B = \{(x,t,n) : x \in N(X,n) \wedge n \in t\} =$$

$$((\cup_n n \times N(X,n)) \times 2^\omega) \cap \{(x,t,n) : n \in t\}.$$

Itt mindkét halmazról látszik, hogy Σ_1^0-beli. ∎

3.10. Megjegyzés. *Az állításban konstruált U halmaz azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy Σ_1^0 és minden $\boldsymbol{\Sigma_1^0}$ halmaz előáll szekciójaként. Az ilyen tulajdonságú halmazokat univerzális Σ_1^0 halmazoknak nevezzük. Komplementerrel és vetítéssel képezhető minden Π és Σ osztályra univerzális halmaz.*

Számos leíró halmazelméleti tételnek létezik verziója a rekurzív osztályokra, ezek pedig sok esetben relativizálhatóak. A klasszikusakhoz hasonlóan adódnak a normálalakok, ez egy szép "dualitást" mutat a formulák kvantorai és a megfelelő osztályok közt.

3.11. Állítás. *A definíciókból világosan látszik, hogy egy $A \subset X$-re*
$A \in \Sigma_1^0(z) \iff$ *létezik egy* $B \in \Sigma_1^0(X \times Z)$ *reláció, hogy* $x \in A \iff B(x,z)$.
$A \in \Sigma_2^0(z) \iff$ *létezik egy* $B \in \Pi_1^0(X \times Z \times \omega)$ *reláció, hogy* $x \in A \iff (\exists n \in \omega)B(x,z,n)$.
$A \in \Sigma_3^0(z) \iff$ *létezik egy* $B \in \Sigma_1^0(X \times Z \times \omega \times \omega)$ *reláció, hogy* $x \in A \iff (\exists n \in \omega)(\forall m \in \omega)B(x,z,n,m)$ *és így tovább.*
Hasonlóan
$A \in \Sigma_1^1(z) \iff$ *létezik egy* $B \in \Pi_1^0(X \times Z \times \omega^\omega)$ *reláció, hogy* $x \in A \iff (\exists s \in \omega^\omega)B(x,z,s)$.
$A \in \Sigma_2^1(z) \iff$ *létezik egy* $B \in \Sigma_1^0(X \times Z \times \omega^\omega \times \omega^\omega)$ *reláció, hogy* $x \in A \iff (\exists s \in \omega^\omega)(\forall t \in \omega^\omega)B(x,z,s,t)$.

3.3. Borel halmazok kódolása

Legyen $T \subset \omega^{<\omega}$ egy jólfundált fa (vagyis nincs végtelen ága), p, q függvények, p T minden levélhez egy $\mathcal{B}$-beli elemet rendel, q pedig minden nem levél ponthoz 0-t vagy 1-et. Definiáljuk rekurzívan egy $s \in T$ pontra a B_s halmazt: ha s levél, akkor legyen $B_s = p(s)$, $B_s := \cap_{t=s\hat{}n, t\in T} B_t$, ha $q(s) = 0$, valamint $B_s := \cup_{t=s\hat{}n, t\in T} B_t$, ha $q(s) = 1$.

3.12. Definíció. *Ha $B = B_{\langle\rangle}$, akkor a (T, p, q) hármas a B egy Borel-kódja. Az így kapható halmazokat Borel (vagy hiperaritmetikus) halmazoknak nevezzük.*

Természetesen ez is relativizálható. Amennyiben B-nek van egy $(T, p, q) \leq_T x$ Borel kódja valamely $x \in 2^\omega$-ra, akkor B rekurzív Borel modulo x. Ha $c \in 2^\omega$ kód, jelölje a kódolt halmazt B_c. Fontos tétel ezzel kapcsolatban a következő:

3.13. Tétel. *Legyen $x \in 2^\omega$, a modulo x rekurzív Borel halmazok rendszere megegyezik $\Delta^1_1(x)$-szel.*

Ebből az látszik, hogy a Δ^1_1 halmazokat "alulról" is felépíthetjük.

4. Miller tétele

4.1. Előkészítés

Most, hogy túl vagyunk a szükséges bevezetésen, végre megvan a megfelelő eszköztárunk ahhoz, hogy elinduljunk a Miller-tétel bizonyításához vezető rögös úton. Az okfejtés során mindig a 2.17. Megjegyzés szerint haladunk.

Tudjuk, hogy L viszonylag egyszerű módon jólrendezhető. Ha a jólrendezés történetesen valamilyen alacsony bonyolultsági osztályba tartozik, akkor ennek segítségével esetleg kapható alacsony bonyolultsági osztályú transzfinit konstrukció.

4.1. Tétel. *(V=L) Van Δ^1_2 jólrendezése 2^ω-nak.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy limeszrendszámokra $x <_L y \iff L_\alpha \models x <_L y$.

4.2. Lemma. *Legyen ϕ tetszőleges formula. Ekkor $\{(E, x_1, \ldots, x_n) \in 2^\omega \times \omega^n : (\omega, E) \models \phi(x_1, \ldots, x_n)\}$ Δ^1_1, sőt valamely $n \in \omega$-ra Σ^0_n.*

Bizonyítás. Formulaindukcióval nyilvánvaló. Prímformulákra $xEy \iff (x, y) \in E$ az kell, hogy $\{(E, x, y) : (x, y) \in E\}$ Δ^1_1, ami igaz. Az $\wedge$ és a $\neg$ metszetnek és komplementernek felel meg.

$$\{(E, x_2, \ldots, x_n) : (\omega, E) \models \forall x_1 \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} =$$

$$\cap_{m\in\omega}\{(E, m, x_2, \ldots, x_n) : (\omega, E) \models \phi(m, x_2 \ldots, x_n)\}.$$

■

4.3. Következmény. *Legyen $E, x \in 2^\omega$, jelölje $\mathring{x} \in (\omega, E)$ a következő formulát:*

$$(\exists s \in \omega)(\forall n \in \omega)\big(((\omega, E) \models s(\mathring{n}) = \mathring{1}) \iff x(n) = 1\big)$$

Ekkor $\{(E, x) : \mathring{x} \in (\omega, E)\}$ Δ^1_1.

2.17-hoz hasonlóan egy $\psi(\mathring{x})$ formula a továbbiakban azt rövidíti, hogy $\exists s$, amely fenn az imént definiált, és erre $\psi(s)$.
Belátjuk, hogy: $x, y \in 2^\omega$-ra $x <_L y \iff \exists E \subset \omega \times \omega$, hogy:

1. E jólfundált,
2. $(\omega, E) \models \sigma$,
3. $\mathring{x} \in (\omega, E)$,
4. $\mathring{y} \in (\omega, E)$,

5. $(\omega, E) \models (\mathring{x} <_L \mathring{y})$.

Egyrészt, ha $x <_L y$, akkor tekintsünk egy α limeszt, hogy $x, y \in L_\alpha$. Ekkor van egy $E \subset \omega \times \omega$, hogy $(\omega, E) \cong (L_\alpha, \in)$. E nyilván megfelel, hisz, mivel E jólfundált, és σ teljesül. x és y képére a 3. és 4. teljesül, és mivel $<_L$-t formulával definiáltuk, a képekre is igaz kell hogy legyen.

Visszafelé, ha van egy E teljesítve ezeket a feltételeket, az automatikusan egy limesz α-ra L_α-val izomorf a suvasztási lemma miatt. Továbbá $\mathring{x}$ és $\mathring{y}$ képe x és y lesz, így szükségképp $x <_L y$.

Az első feltételt kielégítő E-k halmaza Π^1_1 ([8]). A többi pedig (használva az előző lemmát) világos módon Δ^1_1. Összességében tehát látjuk, hogy Σ^1_2. Innen kétféleképp fejezhető be a bizonyítás.

Az egyszerűbb út azt észrevenni, hogy egy $(2^\omega, <)$ Σ^1_2 rendezés szükségképp Π^1_2 is, hisz $x < y \iff (x \neq y \wedge \neg(y < x))$. A hasznosabb út pedig igazolni, hogy: $x, y \in 2^\omega$-ra $x <_L y \iff \forall E \subset \omega \times \omega\ 1, 2, 3, 4 \Rightarrow 5$. Erről látszik, hogy Π^1_2. Ha $x <_L y$ akkor persze tetszőleges E-re, melyre igaz $1, 2, 3, 4$ az előző indoklás miatt 5 is teljesül. Másrészt, ha minden E-re igaz $1, 2, 3, 4 \Rightarrow 5$ implikáció, akkor ha van olyan, amelyre $1, 2, 3, 4, 5$ teljesül is, akkor $x <_L y$. De az nyilvánvaló, hisz ha E olyan, hogy $(\omega, E) \cong (L_\alpha, \in)$ és α elég nagy limesz, akkor $1, 2, 3, 4$ teljesül. ■

A második befejezést azért volt értelme mégis végiggondolni, mert használni fogjuk a későbbiekben.

4.4. Definíció. *Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazt Luzin-halmaznak nevezünk, ha nem megszámlálható és minden első kategóriájú halmazzal vett metszete megszámlálható.*

(CH) esetén könnyen konstruálhatunk transzfinit rekurzióval Luzin-halmazt. Ennél viszont L-ben jóval több is igaz.

4.5. Tétel. $(V = L)$ *Létezik Luzin-halmaz, amely Δ^1_2.*

Bizonyítás. (Vázlat) A bizonyítás sokban hasonlít majd az előzőre. Legyen ugyanis $\{T_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ a sehol sem sűrű zárt részhalmazokat meghatározó fák halmazának $<_L$ növő felsorolása. Transzfinit rekurzióval definiáljuk X-et, tegyük fel, hogy $\alpha' < \alpha$-ra készen vagyunk, ekkor legyen x_α a $<_L$ minimális olyan, amely $\in 2^\omega \setminus (\cup_{\alpha'<\alpha}[T'_\alpha] \cup \{x_{\gamma'} : \gamma' < \gamma\})$. Jelöljük a rekurziót megadó formulát $\phi(f, x)$-szel, ahol f egy rendszámról képező függvény, amely felsorolja az eddig választott elemeket. Világos, hogy a rekurziót definiáló formula limesz β-kra L_β-ban pontosan akkor igaz, mikor L-ben is (feltéve, hogy L_β-beli paramétereket használunk). Ekkor igaz, hogy

$x \in X \iff \exists E \subset \omega \times \omega$, hogy E jólfundált, $(\omega, E) \models \sigma$, $\mathring{x} \in (\omega, E)$, valamint $(\omega, E) \models \exists f(\forall \alpha' E dom(f) \phi(f|\alpha', f(\alpha')) \wedge \phi(f, x))$.

Ezzel igazoltuk a Σ^1_2-séget. Másrészt az előző bizonyításhoz hasonlóan az is teljesül, hogy $x \in X \iff \forall E \subset \omega \times \omega$, ha E jólfundált, $(\omega, E) \models \sigma$, $\mathring{x} \in (\omega, E)$, akkor $(\omega, E) \models \exists f(\forall \alpha' E dom(f) \phi(f|\alpha', f(\alpha')) \wedge \phi(f, x))$.

Ennek oka, hogy tetszőleges L_β-ra, ha $x \in L_\beta$, β limesz, akkor definiálható benne a rekurzió, és az L-ben kapott halmaz kezdőszeletét adja. ∎

4.2. A Miller-módszer

4.6. Tétel. *(Miller) ($V = L$) Van olyan Π^1_1 halmaz a síkon, amely minden egyenest pontosan két pontban metsz.*

A bizonyításhoz felhasználunk néhany lemmát. Maga a bizonyítás inkább szemléletes, mint percíz lesz, a módszert módosítva precízebben lásd a 6.8. Tétel bizonyításában.

4.7. Lemma. *Azon $\alpha < \omega_1$ limeszrendszámok halmaza, melyekre $L_{\alpha+\omega} \models$ "$\exists f : \omega \to L_\alpha$ bijektív" kofinális.*

Mostantól egy ilyen bijekció alatt mindig a $<_L$ minimálisat értjük.

4.8. Lemma. *Legyen $\alpha < \omega_1$ rendszám, $(\omega, E_\alpha) \cong (L_\alpha, \in)$, ekkor van olyan $E_{\alpha+\omega 2} \subset \omega \times \omega$, $E_{\alpha+\omega 2} \in \Delta^1_1(E_\alpha)$ és $(\omega, E_{\alpha+2\omega}) \cong (L_{\alpha+\omega 2}, \in)$.*

4.9. Lemma. *(Spector-Gandy) Tegyük fel, hogy $\theta(x, y, z)$ egy Π^1_1 formula (vagyis $\{(x, y, z) : \theta(x, y, z)\}$ Π^1_1). Ekkor $\psi(y, z) = \exists x \in \Delta^1_1(y)\theta(x, y, z)$ szintén Π^1_1 formula.*

4.10. Lemma. *(Kódolási lemma) Létezik egy F rekurzív úgy, hogy adott síkbeli pontok egy megszámlálható $\{x_n : n \in \omega\}$ halmazához, melyek közül semmelyik 3 sincs egy egyenesen, egy l egyeneshez, melyen legfeljebb csak egy pont van, valamint egy $z \in 2^\omega$-hoz egy olyan $y \in \mathbb{R}^2$ pontot rendel, melyre $z \leq_T y$, $y \in l$ valamint $\{y\} \cup \{x_n : n \in \omega\}$ semelyik három pontja sincs egy egyenesen.*

4.11. Megjegyzés. *Ekkor F kódolható egy T Turing-gép leírásával is, ezért $T \in L_\omega$ automatikusan teljesül. Ha $\{x_n : n \in \omega\}, l, z \in L_\alpha$, akkor $y \in L_{\alpha+1}$.*

Bizonyítás. (Miller tétele) Legyen l_α az α-adik egyenes az L-beli jólrendezés szerint. Transzfinit rekurzióval konstruálunk egy X halmazt, majd erről belátjuk, hogy Π^1_1. Minden lépésben legfeljebb két új pontot választunk majd. Tegyük fel, hogy $\gamma < \alpha$-ra megválasztottuk x_γ, x'_γ-t, $X_\alpha = \{x_\gamma, x'_\gamma : \gamma < \alpha\}$. Legyen β_α a minimális olyan limeszrendszám, hogy $l_\alpha, X_\alpha \in L_{\beta_\alpha}$ és $L_{\beta_\alpha+\omega} \models$ "$\exists f : \omega \to L_{\beta_\alpha}$ bijektív" (a 4.7. Lemma miatt ilyen van). Akkor jelölje E_{β_α} azt a relációt ω-n, melyre $nE_{\beta_\alpha}m \iff f(n) \in f(m)$.

Ha most $|l_\alpha \cap X_\alpha| < 2$, akkor alkalmazzuk F-et az $l = l_\alpha$-ra, $z = E_{\beta_\alpha}$-ra és az eddigi pontok egy $<_L$ minimális felsorolására $\{x_n : n \in \omega\}$-ként, megadva x_α-t (véges sok pont esetén ismételjük meg az első pontot végtelen sokszor). Ha ezek után l_α-n csak egy pont van, akkor hasonlóan konstruáljuk meg x'_α-t l_α-ra és az $X'_\alpha = \{x_\alpha\} \cup X_\alpha$ halmazra. A kapott $x_\alpha, x'_\alpha \in L_{\beta_\alpha+\omega}$, hisz $E_{\beta_\alpha} \in L_{\beta_\alpha+\omega}$, azaz valamely $n \in \omega$-ra $E_{\beta_\alpha} \in L_{\beta_\alpha+n}$, így a következőben már x_α is benne van.

Az indukció végigvihető ω_1 lépesben. Elég tehát megmutatni, hogy az így kapott X halmaz Π^1_1. Belátjuk, hogy

$$x \in X \iff \exists E \subset \omega \times \omega, \text{ hogy } E \in \Delta^1_1(x),\ E \text{ jólfundált, } (\omega, E) \models \sigma,$$
$$\mathring{x} \in (\omega, E), \text{ valamint } (\omega, E) \models \phi(\mathring{x})$$

teljesül, ahol:

$\phi(x)$ egy formula mely eldönti x-ről, hogy az (ω, E)-ben konstruált X-ben van-e. Precízebben: legyen $\phi'(x, g)$ a rekurzió következő lépését definiáló formula (ezt megadtuk, fel lehet írni konstansok nélkül, úgy értve, hogy ha nincs megfelelő β_α, akkor megáll), ahol g az eddig választottak felsorolása. Legyen $\phi(x) \iff (\exists g)((\forall \beta E dom(g))\phi'(g(\beta), g|\beta) \wedge \phi'(x, g))$.

($\Rightarrow$) Legyen $x \in X$. Ekkor volt olyan lépés melynek során x-et beválasztottuk, azaz van olyan $\beta_\alpha < \omega_1$, hogy $x \in L_{\beta_\alpha+\omega}$ és $E_{\beta_\alpha} \leq_T x$, hogy $(\omega, E_{\beta_\alpha}) \cong (L_{\beta_\alpha}, \in)$, akkor a 4.8. Lemma szerint van olyan $E_{\beta_\alpha+\omega 2} \in \Delta^1_1(E_{\beta_\alpha})$, hogy $(\omega, E_{\beta_\alpha+\omega 2}) \cong (L_{\beta_\alpha+\omega 2}, \in)$-nel. Ekkor $E_{\beta_\alpha+\omega 2}$ teljesíti a jobboldali azonosságot, ugyanis ha $E_{\beta_\alpha} \leq_T x$, és $E_{\beta_\alpha+\omega 2} \in \Delta^1_1(E_{\beta_\alpha})$, akkor $E_{\beta_\alpha+\omega 2} \in \Delta^1_1(x)$. Továbbá, x képét tekintve világos, hogy $\mathring{x} \in (\omega, E_{\beta_\alpha})$ szintén teljesül, az egyetlen kérdés, hogy miért igaz, hogy $(\omega, E_{\beta_\alpha+\omega 2}) \models \phi(\mathring{x})$. Ehhez vegyük észre, hogy $\phi(x)$, vagyis a rekurzió következő lépését megadó formula, minden $x \in L_{\beta_\alpha}$-ra pontosan akkor teljesül $L_{\alpha'}$-ben $\alpha' \geq \beta_\alpha + \omega 2$ limeszre, ha L-ben is. De $L \models \phi(x)$, hisz $x \in X$, tehát $(\omega, E_{\beta_\alpha+\omega 2}) \models \phi(\mathring{x})$.

($\Leftarrow$) Tegyük fel, hogy $\exists\ E$, amely teljesíti a fenti feltételeket. Akkor a kondenzációs lemma miatt van egy egyértelmű γ limesz, hogy $(\omega, E) \cong (L_\gamma, \in)$. Tudjuk, hogy $(\omega, E) \models \phi(\mathring{x})$, ekkor $L_\gamma \models \phi(x)$. A konstrukció jellegét tekintve viszont (minden limesz abszolút volt), ha valamely $x \in L_\gamma$-ra $L_\gamma \models \phi(x)$, akkor $L \models \phi(x)$, amiből következik, hogy $x \in X$.

Most igazoljuk, hogy a fenti formula Π^1_1 halmazt határoz meg. Az 4.9. Lemma miatt elég belátni, hogy a $\exists E \in \Delta^1_1(x)$ után következő formula Π^1_1. A jólfundáltság Π^1_1 tulajdonság, a maradék rész pedig 4.2. Lemma miatt Borel. ■

5. A Miller-tétel lemmái

5.1. Kódolási lemmák

Az előző fejezetben látott bizonyítás természetesen nem csak a Π^1_1 2-pont halmazok létezésének igazolására alkalmas. Lássuk be a kódolási lemmát!

5.1. Lemma. *Létezik egy F rekurzív függvény, úgy, hogy adott síkbeli pontok egy megszámlálható $\{x_n : n \in \omega\}$ halmazához, melyek közül semelyik 3 sincs egy egyenesen, egy l egyeneshez, melyen legfeljebb csak egy pont van, valamint egy $z \in 2^\omega$-hoz egy olyan $y \in \mathbb{R}^2$ pontot rendel, melyre $z \leq_T y$, $y \in l$ valamint $\{y\} \cup \{x_n : n \in \omega\}$ semelyik három pontja sincs egy egyenesen.*

Bizonyítás. Egy egyenest el tudunk úgy kódolni 3 adattal, hogy az első 0 vagy 1 attól függően, hogy az egyenes függőleges-e, a másik két adat pedig 2 különböző pontja. Feltehető, hogy nem függőleges egyenesről van szó, egyébként az algoritmus ugyanaz, megcserélve a két koordináta szerepét. A rekurzív függvény megad egy pontot az egyenesen, amely semmelyik eddig meghatározott egyenesen sincs rajta. Ezt úgy érjük el, hogy olyan x_1 koordinátát választunk, mely fölött nincs metszéspont (ez megtehető a 2n-edik számjegyekben), míg a páratlan jegyek kódolják z jegyeit, x_2-t pedig úgy, hogy $(x_1, x_2) \in l$ teljesüljön. ∎

Most igazolunk még ilyen jellegű lemmákat.

5.2. Definíció. *Egy $\mathcal{A} \subset \omega^\omega$ majdnem diszjunkt (AD), ha $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $|A \cap B| < \aleph_0$. Maximális (MAD), ha nem bővíthető tovább.*

5.3. Lemma. *Ha $P \subset \omega^\omega$ megszámlálható majdnem diszjunkt halmazrendszer, $z \in 2^\omega$ tetszőleges, P tartalmaz egy rekurzív ω partíciót amely végtelen halmazokból áll, a majdnem diszjunkt minden P-beli elemtől. Akkor van egy x, hogy $z \leq_T x$, x P minden elemétől majdnem diszjunkt, $a \subset x$, sőt x a kezdeti adatokból rekurzív eljárással kapható meg.*

BIZONYÍTÁS. Legyen A_n a rekurzív partíció. Ekkor legyen $\{B_n : n \in \omega\}$ a maradék P-beli halmazok felsorolása. Válasszunk egy olyan $F_n \subset A_n$ véges halmazokból álló rendszert, hogy ha $m \leq n$ F_n diszjunkt B_m-től, válasszuk továbbá meg F_n-t úgy, hogy $x = a \cup \bigcup_n F_n$-re minden $n \in \omega$-ra $|x \cap A_n|$ páros $\iff$ $z(n) = 0$, ez megtehető, az így kapott x-re, $z \leq_T x$, mivel az előre rögzített partíció. ∎

5.4. Következmény. *(V=L) Létezik* Π^1_1 *maximális majdnem diszjunkt halmazrendszer.*

A következmény bizonyítása teljesen analóg a Miller-tételnél végiggondolt okoskodással.

Ha $X \subset \mathbb{R}$, jelölje $\mathbb{Q}[X]$ az X által generált racionális számok feletti alteret.

5.5. Lemma. *Legyen* $X \subset \mathbb{R}$ *lineárisan független,* $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}[X]$, $w \in 2^\omega$ *tetszőleges. Ekkor van olyan* y_1, y_2, *hogy* $w \leq_T y_1$ *és* $w \leq_T y_2$, $X \cup \{y_1, y_2\}$ *még mindig lineárisan független,* $z \in \mathbb{Q}[\{y_1, y_2\}]$, *sőt* y_1 *és* y_2 *a kezdeti adatokból rekurzív eljárással kapható meg.*

BIZONYÍTÁS. Feltehető, hogy w semelyik $X \cup \{z\}$ véges részhalmazában nem rekurzív, hiszen egyébként lecserélhető bonyolultabbra. Most legyen

$$v = 0, w(0)w(0)w(1)w(1)...$$

Ekkor válasszuk $r \in \mathbb{Q}$-t olyannak, hogy $1 > rz > \frac{1}{9}$, $u = rz - v$. Legyen most

$$y_1 = 0, w(0)u(1)w(1)u(3)...$$

$$y_2 = 0, u(0)w(0)u(2)w(1)...$$

Ekkor persze $y_1 + y_2 = rz$, $y_1 \notin \mathbb{Q}[X]$, hisz egyébként w rekurzív volna azokban az X-beliekben, melyek racionális kombinációjaként y_1 előáll. Másrészt $y_2 \notin \mathbb{Q}[X \cup \{y_1\}]$, ugyanis $y_1 \in \mathbb{Q}[X \cup \{z\}]$ volna, ami ellentmond a w-re tett bonyolultsági feltételnek. ∎

5.6. Következmény. *(V=L) Létezik* Π^1_1 *Hamel-bázis.*

Végül igazoljuk a következő lemmát. A Sard-lemma miatt egy $\mathcal{C}^1$ függvény csak nullmértékű sok értéket vehet fel végtelen sokszor.

5.7. Lemma. *Ha adott megszámlálható sok* $\mathcal{C}^1$ *függvény vagy annak inverze, úgy, hogy a racionális* r*-ekre ismerjük* $f(r)$*-t, valamint* $z \in 2^\omega$ *tetszőleges, akkor van egy olyan* $x \in \mathbb{R}^2$*, hogy* $x \leq_T z$*, valamint a megszámlálható sok függvény mindegyikének grafikonját elkerüli, ráadásul megadható a bemeneti adatokban rekurzívan.*

Bizonyítás. Elegendő rekurzívan választani egy vízszintes egyenest, amelyet minden grafikon csak egy pontban metsz (hisz abból mindegyik grafikoninverz csak egy pontot zárhat ki), egy ilyen halmazba, ahogy már láttuk, tudunk kódolni egy tetszőleges valóst. Ez pedig egyszerűen megtehető. Tekintsük a függvények egy felsorolását. A derivált korlátos intervallumon egyenletes folytonossága miatt a $\mathbb{Q}$ helyeken felvett értékekből meg tudunk határozni egy $z \in \mathbb{R}$ pontot, hogy $f_0'(z) \neq 0$, ekkor ez igaz z egy báziskörnyezetére is, ahol f_1 injektív (pl. az implicitfüggvény-tétel miatt), vegyünk az intervallum képében egy bázisnyíltat. Most f_1-re található ennek egy nyílt része, mely vagy nem áll elő képként, vagy injektív képkent áll élő stb. ∎

5.8. Következmény. *(V=L) Létezik nem megszámlálható* Π^1_1 *halmaz, mely minden* $\mathcal{C}^1$ *függvényt, vagy annak inverzét* $\leq \aleph_0$ *pontban metsz.*

5.2. Lemma a kofinalitásról

5.9. Lemma. *Azon* $\alpha < \omega_1$ *limeszek, melyekre* $L_{\alpha+\omega} \models$ *"*$\exists f : \omega \to L_\alpha$ *bijektív" kofinális.*

5.10. Definíció. *Rögzítsük a két szabadváltozós konstansmentes formulák egy* $\{\phi_i : i \in \omega\}$ *felsorolását. Legyen* L_α *adott. Azt mondjuk, hogy* $h(i, x)$

Skolem függvény, ha minden két szabadváltozós $\phi_i(x, y)$ formulához, minden $x \in L_\alpha$-ra $L_\alpha \models \exists y \phi_i(x, y)$, akkor $h(i, x)$ épp egy, a formulát kielégítő y.

Ezzel parciális függvényt definiáltunk $\omega \times L_\alpha$-n. A következő állításra szükségünk van a lemma igazolásához.

5.11. Állítás. *Legyen $\alpha > \omega$ limeszrendszám. Ekkor van egy $\Theta(i, j, x, y)$ formula és h_α Skolem-függvény, hogy*

$$y = h_\alpha(i, x) \Leftrightarrow L_\alpha \models \Theta(i, x, y)$$

Sőt, ha $x \in L_\alpha$ tetszőleges, akkor $h_\alpha(\omega \times \{x\}) \prec L_\alpha$.

Az állítás jelentősége abban van, hogy egy definiálható Skolem-függvényt ad meg.

Bizonyítás. Most $h_\alpha(i, x) = y \iff L_\alpha \models$ "y a$<_L$ minimális olyan, hogy $\phi_i(y, x)$". A jobboldal megadja a Θ formulát, (persze a formulák felsorolása megadható rekurzívan).

A második részhez használjuk a Tarski-Vaught-kritériumot. Legyen $\psi(x_1, ..., x_n, y)$ tetszőleges, feltehető, (a paraméterek összevonásával) hogy $\psi(x, y)$ alakú, legyen $p = h_\alpha(i, x)$ paraméter. Be kell látnunk, hogy ha $L_\alpha \models \exists y \psi(y, p)$ akkor $\exists y \in h_\alpha(\omega \times \{x\})$ is, hogy $L_\alpha \models \psi(y, p)$. h_α definíciója miatt van egy i, hogy $L_\alpha \models \Theta(i, x, p)$. Ekkor $L_\alpha \models \exists y(\exists p(\Theta(i, x, p) \wedge \psi(y, p)))$, persze ekkor $\exists i'$, hogy $L_\alpha \models \psi(h_\alpha(i', x), p)$. ■

Most pedig belátjuk a lemmát. Legyen $\delta < \omega_1$, olyan, hogy $L_\delta \prec L_{\omega_1}$ és α minimális, hogy $L_\alpha \models |L_\delta| = \omega$. Tegyük fel, hogy $X \prec L_\alpha$. Ekkor $X \cong L_\gamma$ valamely γ-ra (limeszre α-ra már tudjuk, a maradékra lásd [3],[1]). Mivel α a minimális ilyen, ezért α szükségképp rákövetkező. L_δ elemi részsége miatt $L_\delta \models$"minden rendszám megszámlálható", tehát igaz, hogy $L_{\alpha-1} \models$ "δ az első nem megszámlálható rendszám", azaz δ definiálható L_α-ban, akkor $\delta \subset L_\gamma$, sőt L_δ megszámlálható L_γ-ban is. Vagyis $L_\gamma \supset L_\alpha$, de akkor $L_\gamma = L_\alpha$, ugyanis a suvasztás során minden elem rangja csökken. így beláttuk, hogy L_α tetszőleges elemi része L_α-val izomorf.

Igazoljuk, hogy L_α-nak nincs olyan valódi elemi részhalmaza, mely izomorf volna vele. Tegyük fel, hogy mégis van. Legyen az izomorfizmus $I : L_\alpha \to A$, legyen $a \in L_\alpha \setminus A <_L$ minimális. Vegyük észre, hogy a és $I(a)$ közt ($<_L$) nincs A-beli elem. Ekkor van egy $a_1, \dots, a_n \in A$ paraméterhalmaz és ϕ_a formula, mely definiálja a-t L_α-ban. Persze az is igaz, hogy $L_\alpha \models \exists b \in (I(a) \setminus a) \cup (a \setminus I(A))$. Ekkor szükségképp $(A, \in) \models \exists b \in (I(a) \setminus \bar{a}) \cup (\bar{a} \setminus I(A))$, ahol $\bar{a}$ jelöli a ϕ_a által definiált formulát. Node ez A-ban épp $I(a)$. Ellentmondás.

Tudjuk viszont, hogy $h_\alpha(\omega \times \{x\}) \prec L_\alpha$ tetszőleges $x \in L_\alpha$-ra. Vagyis $h_\alpha(\omega \times \{x\}) = L_\alpha$, az előz ő állítás miatt $h_\alpha \in L_{\alpha+1}$, vagyis ilyen α-kra van $f \in L_{\alpha+\omega}$ $f : \omega \to L_\alpha$ bijektív. A δ-k halmaza kofinális, ezzel beláttuk a lemmát. ■

5.3. Δ^1_1 reláció létezése

5.12. Állítás. *Ha $\omega \leq \alpha < \omega_1$-re és $(\omega, E_\alpha) \cong (L_\alpha, \in)$, $E_\alpha \in L_\beta$, akkor van egy $E_{\alpha+1} \in L_{\beta+1}$, hogy $(\omega, E_{\alpha+1}) \cong (L_{\alpha+1}, \in)$, sőt $E_{\alpha+1} \in \Delta^1_1(E_\alpha)$.*

Bizonyítás. Most $E_{\alpha+1}$ legyen a következő: $m, n \in \omega$

- n, m párosak, akkor $nE_{\alpha+1}m \iff \frac{n}{2} E_\alpha \frac{m}{2}$
- n páros, m páratlan, akkor $nE_{\alpha+1}m \iff \exists i\ \zeta_i$ k változós formula, $\exists l_1, \dots l_k \in \omega$, hogy $(\omega, E) \models \zeta_i(\frac{n}{2}, l_1, \dots, l_k)$ valamint a $\zeta(\cdot, l_1, \dots, l_k)$ által definiált halmaz új, és épp az $\frac{m+1}{2}$-edik új
- páratlan és páratlan nem áll relációban

Ezzel világos módon egy E_α felhasználásával $E_{\alpha+1}$-et definiáltunk, világos az is, hogy $E_{\alpha+1} \in L_{\beta+1}$. ■

Ebből az is látszik, hogy létezik $E_{\alpha+\omega 2} \in \Delta^1_1(E_\alpha)$, hogy $(\omega, E_{\alpha+2\omega})$, hisz $\alpha+n$-ek megkaphatóak az előzőből a fent látott módon, limeszre pedig bontsuk ω-t végtelen sok diszjunkt rekurzív végtelen halmazra, ezeken vegyük az $E_{\alpha+k}$-k uniója által megadott relációt. Kimondhatunk egy jóval erősebb állítást is.

5.13. Definíció. *$\omega_1^x = min\{\alpha : \nexists(W_\alpha \leq_T x)((\omega, W_\alpha) \cong (\alpha, \in))\}$, a legkisebb nem rekurzív rendszám x-ben.*

Könnyen meggondolható, hogy ez megegyezik az x-ben rekurzív rendszámok sup-jával.

5.14. Tétel. *$A \in \Delta^1_1(E_\alpha)$ pontosan akkor teljesül, ha $A \in L_{\alpha+\omega_1^{E_\alpha}}$.*

A fejezetbeli eddigi eredmények csak olyan jellegű dolgot állítanak, hogy ha egy adott $E_\alpha \in L_\beta$, akkor ez szükségképp behoz újabb E_β-kat. Kérdés viszont, hogy rögzített α-ra mikor jön be E_α. Azt láthattuk, hogy bizonyos speciális $\beta < \omega_1$ sorozatra (a kofinális részsorozatról szóló lemmában megadottra) könnyen adódik $E_\beta \in L_{\beta+\omega}$. Azonban ennél jóval több is igaz.

5.15. Állítás. *Legyen $\omega \leq \alpha < \omega_1$ rendszám, melyre van $B \in L_{\alpha+1} \setminus L_\alpha$, $B \subset \omega$, ekkor van egy olyan $E_\alpha \subset \omega \times \omega$, hogy $(\omega, E_\alpha) \cong (L_\alpha, \in)$ és $E_\alpha \in L_{\alpha+1}$.*

5.16. Lemma. *$\alpha < \omega_1$ olyan mint előbb, akkor létezik egy $A \in L_{\alpha+1} \setminus L_\alpha$, $A \subset \omega$, mely konstansmentes formulával definiálható L_α-ból.*

Bizonyítás. Legyen ugyanis $\phi(x, p)$ $L_{\alpha+1}$-beli ω részhalmazt definiáló formula. Tekintsük a "$\exists y \phi(x, y)$ és $y <_L$ minimális olyan, amely nem L_α-beli részhalmazát definiálja ω-nak ϕ által". Az így kapott formula nyilván új részhalmazt definiál és paraméternélküli. ∎

Bizonyítás. (5.15) Természetesen E_α tekinthető ω részhalmazának. Csak limesz α-kra bizonyítunk. Megjegyezzük, hogy kis munkával igazolható az állítás teljes általánosságban, használva azt a tényt, hogy minden n-re van egy σ formula, melyre, ha $(\omega, E) \models \sigma_n$ és természetesen E jólfundált, akkor $(\omega, E) \cong (L_{\beta+n}, \in)$, ahol β limesz.

Most csak egy σ konstansmentes formula létezéset használjuk, hogy $(X, \in) \models \sigma \Leftrightarrow X \cong L_\gamma$ valamely limesz γ-ra. Legyen A pedig az állításban garantált halmaz, hozzá $\phi(x)$ a megfelelő formula (itt ϕ-ről feltehető, hogy csak természetesek elégítik ki). Tekintsük az S halmazt, mely ω lezártja a $\sigma, \phi, \neg\phi$-hez tartozó Skolem függvényekre. Ekkor persze $(S, \in) \models \sigma$, így $(S, \in) \cong L_\beta$ valamely $\beta \leq \alpha$-ra. Ekkor $A \in L_{\beta+1}$, hisz $A = \{x : L_\alpha \models \phi(x)\} = \{x : L_\beta \models \phi(x)\}$, tehát $\beta = \alpha$. Mivel $S \in L_{\alpha+1}$, van egy ψ formula, hogy $S = \{x : L_\alpha \models \psi(x)\}$. Most legyen $nE_\alpha m \iff \exists x \exists y(\psi(x) \wedge \psi(y) \wedge x \in y \wedge Code(n, x) \wedge Code(m, y))$, ahol $Code(n, x)$ egy L_α-beli formula, amely kódolja, hogyan jutott x S-be: $Code(n, x) \iff$ "van egy sorozata a σ, ϕ, $\neg\phi$-hez tartozó Skolem-függvények alkalmazásának, korábbiakból pedig nem származik x, valamint, kódoljuk a páros számkkal ω elemeit." így még csak ω egy részhalmazán definiáltuk a relációt, ez persze könnyen átvihető az egészre. ∎

5.4. A Spector-Gandy-tétel

[10]-ben található a Spector-Gandy-tétel alábbi bizonyítása. Ehhez be kell vezetnünk a Δ^1_1 kódolás fogalmát. Legyen $X = \omega$ vagy 2^ω.

5.17. Definíció. *Tegyük fel, hogy van $C \subset \omega \times 2^\omega$, valamint $P, S \subset \omega \times 2^\omega \times X$, hogy C, P Π^1_1, S pedig Σ^1_1, úgy, hogy:*

- *minden (e, u)-ra $\{x \in X : (e, u, x) \in P\} = \{x \in X : (e, u, x) \in S\}$*
- *minden $u \in 2^\omega$-ra és $D \in \Delta^1_1(u)(X)$-re van olyan $(e, u) \in C$, hogy az előző pontbeli szekció épp D,*

ekkor e-t D egy $\Delta^1_1(u)$ kódjának mondjuk.

Használjuk a jól ismert Π^1_1 redukciós tétel relatív változatát.

5.18. Tétel. *(Π^1_1 redukció) Legyen A, B Π^1_1-ek. Ekkor van egy A_0, B_0 Π^1_1 diszjunkt pár, hogy $A \cup B = A_0 \cup B_0$ és $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$.*

5.19. Tétel. *(Spector-Gandy) Létezik a definícióban megadott tulajdonságokkal C, S, P halmazhármas.*

Bizonyítás. Szükségünk van az univerzális Π^1_1 halmazra, vagyis egy $U \subset \omega \times 2^\omega \times X$, hogy tetszőleges $u \in 2^\omega$-ra és $D \in \Delta^1_1(x)$-re van olyan $e \in \omega$, hogy $D = \{y \in X : (e, u, y)\}$. Ilyen U könnyen megadható, ha ismerjük univerzális nyílt konstrukcióját.

Rendeljük $e \in \omega$-hoz egy (e_0, e_1) párt a természetes bijekcióval. Legyen

$$U_0 = \{(e, u, x) : (e_0, u, x) \in U\},$$

$$U_1 = \{(e, u, x) : (e_1, u, x) \in U\}.$$

Ekkor U_0 és U_1 Π^1_1 univerzális pár, azaz minden $A, B \in \Pi^1_1(u)$ van e, hogy a két halmaz szekciói épp ezek. A legyen a redukciós tételből adódó két halmaz $P_0 \subset U_0$, $P_1 \subset U_1$. Definiáljuk $P = P_0$-nak, $S = P_1^c$, C pedig azon (e, u)-k halmaza, hogy $\forall x \in X$-re $(x, e, u) \in P_0 \cup P_1$, ez nyilván Π^1_1, és minden $(e, u) \in C$ feletti szekciója P-nek és S-nek megegyezik. Legyen $u \in 2^\omega$, $D \in \Delta^1_1(u)$ tetszőleges. Ekkor van egy (e, u), hogy U_0 és U_1^c (e, u) szekciója is D. ∎

5.20. Következmény. *Amennyiben $x, y, z \in 2^\omega$, $\theta(x, y, z)$ Π^1_1 formula, akkor $\psi(y, z) = \exists x \in \Delta^1_1(y)\theta(x, y, z)$ is az.*

Bizonyítás. $\psi(y, z)$ pontosan akkor teljesül, ha $\exists e \in \omega$

1. e egy $\Delta^1_1(y)$ kód

2. $\forall x$, ha x az (e, y) szekciója S-nek (vagy P-nek), akkor $\theta(x, y, z)$.

Ahhoz, hogy a formula Π^1_1 legyen, az implikáció első felének Σ^1_1-nek (x az (e, y) szekciója S-nek (vagy P-nek)) kell lennie. Node ez igaz, (sőt Δ^1_1-ség is) hisz x az (e, y) szekciója S-nek (vagy P-nek) $\iff \forall n \in \omega$

1. ha $n \in x$, akkor $(e, y, n) \in S$,
2. ha $(e, y, n) \in P$, akkor $n \in x$.

Világos, hogy mindkét feltétel Σ^1_1. ∎

5.21. Megjegyzés. *A következmény igaz $x \in \Delta^1_1(y)$ helyett $D \subset 2^\omega$-ra $D \in \Delta^1_1(y)$-re is.*

6. Az általános eljárás

Ezek után megfogalmazhatunk egy kritériumot, amely általánosítja az eddigi eredményeket. Legyen $F : 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ függvény olyan, hogy tetszőleges $z \in 2^\omega$, $s, t \in 2^{<\omega}$-ra

- $s \subset t \Rightarrow F(s) \subset F(t)$,
- $s_n \subset s_{n+1}$, és $l(s_n) \to \infty \Rightarrow l(F(s_n)) \to \infty$,
- ha $\forall n \in \omega$-re $s_n \subset s_{n+1}$ és $\forall k \leq l(s_n)/2$-re $s_n(2k) = z(2k)$, akkor $z \leq_T \bigcup_{n\in\omega} F(s_n)$.

Kódoljuk a függvényt egy $F \subset \omega$ valóssal. Legyen β_α egy, a 4.7. Lemmában garantált sorozat eleme, úgy, hogy $F \in L_{\beta_\alpha}$, valamint $\beta_{\alpha+1} > \beta_\alpha + 2\omega$. Egy $\{a_\alpha \in 2^\omega : \alpha < \beta\}$ megszámlálható sorozatra jelölje a $<_L$ szerint első felsorolást a_n. Rögzítsük továbbá a_n koordinátáinak egy a páratlan, z koordinátáinak a páros koordinátákba való beírását. Az ezen valós megszorításait az első n koordinátára jelöljük s_n-nel, $\bar{F}(z, \{a_\alpha\}_{\alpha<\beta}) = \bigcup_{n\in\omega} F(s_n)$.

6.1. Állítás. $(V = L)$ *Amennyiben* $z_\alpha = E_{\beta_\alpha}$ *(*E_{β_α} *a Miller-tétel bizonyításához hasonlóan konstruált reláció),* $a_\beta = \bar{F}(z, \{a_\alpha\}_{\alpha<\beta})$*, akkor az* $\{a_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ *halmaz* $\Pi^1_1(F)$*.*

Bizonyítás. Analóg a 4.6. Tételnél már végiggondolt bizonyítással. ■

Természetesen F ilyenkor megad egy $2^\omega \to 2^\omega$ függvényt, amely folytonos is, másrészt tetszőleges $G : (2^\omega)^\omega \times 2^\omega \to 2^\omega$ folytonos függvény, melyre $G(x, z) \geq_T z$ minden z-re, jó leképezés, persze a Turing-nagyobbság cserélhető Δ^1_1-ségre is. Ezt összefoglalva:

6.2. Állítás. $(V = L)$ *Ha az eljárás olyan, hogy megszámlálható sok ponthoz választunk egy következőt, és ez megtehető egy* $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény segítségével, melyre igaz, hogy* $\forall(\langle x, \bar{y}\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\omega)(F(x, \bar{y}) \geq_T z)$ *(vagy* z *aritmetikus* $F(x, \bar{y})$*-ben) akkor az eljárás folytatható* ω_1 *lépésben és a kapott értékek halmaza* $\mathbf{\Pi^1_1}$ *lesz.*

6.1. Elegendően abszolútság

További kérdés, hogy milyen "nagy választási szabadság" esetén választható meg $\mathbf{\Pi^1_1}$-belinek. Megfogalmazunk egy általános elvet, majd azt bizonyítjuk is. Felhasználjuk a következő tételt.

6.3. Definíció. *Az* $S = \{x \in 2^\omega : x \in L_{\omega_1^x}\}$ *halmaz elemeit önkonstruáló valósaknak nevezik.*

6.4. Tétel. *([13])* S Π^1_1 *halmaz, továbbá egy önkonstruáló* $x \in 2^\omega$*-ra és* $z \subset \omega$*-ra* $z \in \Delta^1_1(x) \iff z \in L_{\omega_1^x}$*.*

6.5. Definíció. *Legyen* $\phi(x, \dots)$ *formula. Ekkor azt mondjuk, hogy* ϕ *elegendően abszolút az első változóban (*x*-ben), ha minden* $x \in S$*-re van egy* $\alpha_0(\phi, x) < \omega_1^x$*, hogy* $\forall y_1, \dots, y_n <_L x$*-re és* $\forall \alpha > \alpha_0$ *limeszre*

$$L_\alpha \models \phi(x, y_1, \dots, y_n) \iff L \models \phi(x, y_1, \dots, y_n).$$

Tegyünk néhány észrevételt az elegendően abszolútságról. Nyilvánvaló, hogy ϕ, ψ elegendően abszolút formulákra $\phi \wedge \psi$ és $\neg\phi$ is elegendően abszolút. Hasonlóan világos, hogy egy $\phi(x, y_1, \ldots, y_n)$ formula elegendően abszolútságán nem változtat, ha ϕ helyett a $\Phi(x, y_1, \ldots, y_n) = \phi(x, y_1, \ldots, y_n) \wedge_{i \leq n} (y_i < x)$ formulát tekintjük.

6.6. Állítás. *Tegyük fel, hogy $\phi(x, y_1, y_2, \ldots)$ elegendően abszolút x-ben, akkor a $(\forall y_1 <_L x)\phi(x, y_1, y_2, \ldots)$ és a $(\forall y_2 <_L y_1)\phi(x, y_1, y_2, \ldots)$ formulák is elegendően abszolútak x-ben.*

Bizonyítás. Ha ugyanis $\alpha > \alpha_0$ limesz és $L_\alpha \models (\forall y <_L x)\phi(x, y, \ldots)$ $x \in L_\alpha$, így, mivel L_α $<_L$ szerinti kezdőszelet és $<_L$ limeszekre abszolút, ez pontosan akkor teljesül, ha$(\forall y <_L x) L_\alpha \models \phi(x, y, \ldots) \iff (\forall y <_L x) L \models \phi(x, y, \ldots) \iff L \models (\forall y <_L x)\phi(x, y, \ldots)$. A második állítás is ugyanígy igazolható. ■

6.7. Következmény. *Az első változóban elegendően abszolút formulák megfelelő (nem az első változót korlátozó) korlátos kvantorokra zártak.*

Nyilvánvaló, hisz pl. $\exists y \in z\phi(x, y, z)$ átírható $\exists y <_L z(y \in z \wedge \phi(x, y, z)$ alakba.

6.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy $p \in 2^\omega$ rögzített paraméter, $\phi(x, f, p)$ elegendően abszolút x-ben, $L \models \forall f \exists^{\leq 1} x \phi(x, f, p)$. Tegyük fel még, hogy van egy $\bar{f} : \omega_1 \to 2^\omega$, $X = ran(\bar{f}) \subset S$, valamint minden $\alpha < \omega_1$-re $L \models \phi(\bar{f}(\alpha), \bar{f}|\alpha, p)$ és $\bar{f}|\alpha, p <_L \bar{f}(\alpha)$. Ekkor X $\Pi^1_1(p)$.*

Bizonyítás.

Legyen $\Phi(x, f, p) = \phi(x, f, p) \wedge f, p <_L x$, Φ persze szintén elegendően abszolút. Belátjuk, hogy $x \in X \iff \forall T$ Turing gépre $\exists E \in \Delta^1_1(x)$, hogy

1. $\mathring{p} \in (\omega, E)$,

2. E jólfundált,

3. $(\omega, E) \models \sigma$,

4. $\mathring{x}, T(\mathring{x}) \in (\omega, E)$,

5. $(\omega, E) \models$ "ha $T(\mathring{x})$ jólrendezés $\mathring{\omega}$-n, akkor $\exists\beta\exists g(ord(\beta) \wedge g$ izomorfizmus $(\mathring{\omega}, T(\mathring{x}))$ és (β, E) közt)",

6. $(\omega, E) \models \exists f(\Phi(\mathring{x}, f, \mathring{p}) \wedge (\forall\beta E dom(f))\Phi(f(\beta), f|\beta, \mathring{p})$.

Ez elég, ugyanis: Turing gépből megszámlálható sok van, így, használva a Spector-Gandy tételt azt kell bizonyítani, hogy $\{(E, x, p) \in 2^\omega \times 2^\omega \times 2^\omega : (E, x, p)$-re $1-6\}$ Π^1_1 halmaz. Ezt pedig már meggondoltuk 4.3-ben.

5-ben még meg kell adnunk mit értünk a jólrendezés alatt. Azt mondjuk, hogy az $A \in 2^{\omega\times\omega}$ jólrendezés ω-n, ha rendezés (a klasszikus definíció szerint), és nincs egy $f : \omega \to \omega$ leképezés, melyre $\forall n, m \in \omega(n > m \Rightarrow f(n)Af(m))$. A felírt definícióban csak az ω-t használtuk konstansként, de ez limesz abszolút, azaz van egy formula, amely konstansmentes és definiálja, ezt használjuk (ω, E)-ben (lásd 2.17-t).

Miért kell az $5, 6$ feltétel? Ezek biztosítják, hogy minden elég nagy $\alpha < \omega_1^x$ limeszre L_α-ban már igaz ϕ, ahogy majd látni fogjuk.

6.9. Lemma. *Tegyük fel, hogy adott egy α_0, β, ψ formula, hogy minden $\alpha > \alpha_0$ limeszre*

$$(\forall x, y \in L_\alpha)(L_\alpha \models \phi(x, y) \iff L \models \phi(x, y)),$$

ψ olyan formula, melynél egy x-hez legfeljebb egy y tartozik L-ben, valamint teljesüléséhez x-nek egy rendszámról kell függvénynek lennie, továbbá $\exists f \in L$, hogy $f : \beta \to L_{\alpha_0}$ és $\forall\gamma < \beta$ $L \models \psi(f|\gamma, f(\gamma))$. Akkor $f \in L_{\alpha_0+\beta\omega2+\omega+1}$.

BIZONYÍTÁS. Transzfinit rekurzióval bizonyítunk. Világos, hogy f egyértelmű minden kezdőszeleten, azaz minden β-ra és $\alpha_0 < \alpha$ limeszre legfeljebb egy olyan $f : \beta \to L_{\alpha_0}$ létezhet, hogy $L_\alpha \models (\forall \beta' < \beta)\psi(f|\beta', f(\beta'))$, persze ezek is egymás kiterjesztései.

Tegyük fel, hogy $\beta' < \beta$-ra beláttuk. Ha β limesz, legyen $\langle \xi, x\rangle \in f_\beta \iff$

$$L_{\alpha_0+\beta\omega 2+\omega} \models (\exists f, \beta' < \beta)(f : \beta' \to L_{\alpha_0} \wedge \langle \xi, x\rangle \in f \wedge (\forall \beta'' < \beta')\psi(f|\beta'', f(\beta'))).$$

Persze $f_\beta \in L_{\alpha_0+\beta\omega 2+\omega+1}$. Belátjuk, hogy az így definiált f_β függvény, ez következik egyértelműségből. $dom(f_\beta = \beta)$, hisz, ha $\beta' < \beta$, akkor az indukciós feltevés miatt $\beta' + 1$-re van egy $f_{\beta'+1} \in L_{\alpha_0+(\beta'+1)\omega 2+\omega+1} \subset L_{\alpha_0+\beta\omega 2+\omega}$.

Ha β rákövetkező, legyen $\langle \xi, x\rangle \in f_\beta \iff$

$$L_{\alpha_0+\beta\omega 2+\omega} \models \langle \xi, x\rangle \in f_{\beta-1} \vee \psi(f_{\beta-1}, x).$$

Ehhez persze elég, hogy $\alpha_0 + (\beta - 1)\omega 2 + \omega + 1 < \alpha_0 + \beta\omega 2 + \omega$. ■

A következő fontos tételt csak vázlatosan bizonyítjuk, ehhez felhasználjuk az alábbi, nem túl nehéz állítást:

6.10. Állítás. *Legyen $x, y \in 2^\omega$. Ha $x \in L_{\omega_1^y}$, akkor $\omega_1^x \leq \omega_1^y$. ([13])*

6.11. Tétel. *Ha $x \in S$, akkor minden $\beta < \omega_1^x$-re van $E_\beta \in L_{\omega_1^x}$, hogy $(\omega, E_\beta) \cong (L_\beta, \in)$.*

BIZONYÍTÁS. (Vázlat, a részleteket lásd [1]-ben.)

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{o}(x) = \iota + 1$. Ekkor, mivel $x \in S$, $\iota < \omega_1^x$. Az 5.15. Állítás miatt kapjuk, hogy van egy $E_\iota \in L_{\omega_1^x}$, hogy $(\omega, E_\iota) \cong (L_\iota, \in)$.

Könnyű látni, hogy $E_\iota \in S$. Ekkor minden $\beta < \omega_1^{E_\iota}$-re létezik $E_{\iota+\beta} \in \Delta_1^1(E_\iota)$, melyre $(\omega, E_{\iota+\beta}) \cong (L_{\iota+\beta}, \in)$. Ugyanis 5.12-ban láttuk, hogy $\Delta_1^1(E_\iota)$-ban van $E_{\iota+1}$ (sőt $E_{\iota+\omega}$). 6.9 segítségével felépíthetjük hasonlóan az $E_{\iota+\beta}$-kat $\beta < \omega_1^{E_\iota}$-ra.

Továbbá, $x \in L_{\omega_1^{E_\iota}}$, akkor $\omega_1^x \leq \omega_1^{E_\iota}$, azaz minden $\iota \leq \beta < \omega_1^x$-re igazoltuk az állítast. De, ha $\beta < \iota + \omega < \omega_1^x$, akkor van $E_\beta \in L_{\omega_1^x}$, jelesül tudjuk, hogy van egy $\phi(\beta)$ formula mely definiálja $L_{\iota+\omega}$-ban L_β-t, azaz meg tudjuk adni ω egy H részhalmazát, amely $(\omega, E_{\iota+\omega})$-ban épp L_β, és erre megszorítjuk $E_{\iota+\omega}$-t. Ebből könnyen megkapható E_β. ■

6.12. Lemma. *Ha $x \in S$, $\alpha < \omega_1^x$ limesz, akkor létezik egy $g, W_\alpha \in L_{\alpha+\omega 2\alpha+\omega+1} \subset L_{\omega_1^x}$ pár, hogy $g : (\alpha, \in) \cong (\omega, W_\alpha)$.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy minden ilyen α-hoz van egy $E_\alpha \in L_{\omega_1^x}$, hogy $(L_\alpha, \in) \cong (\omega, E_\alpha)$. Ekkor legyen $H = \{x \in \omega : (\omega, E_\alpha) \models ord(x)\}$, $H \in L_{\omega_1^x}$, hisz formulával definiálható. Tekintsük az $E_\alpha|_H$, ez izomorf $(\alpha, \in)$-nel. Akkor egyszerűen felsorolva H-t ω-ra áthúzható a rendezés, így kapjuk W_α-t.

Felépítjük a g izomorfizmust. Legyen $\psi(g, y) \iff g : \beta \to \omega$ valamely $\beta < \alpha$-ra, $y \in \omega$ a W_α minimális $\omega \setminus ran(g)$-beli. Tekintsük a 6.9 lemmában (amely itt nyilván használható) megadott küszöböt, ez azt adja, hogy $g \in L_{\alpha_0+2+\omega 2\alpha+\omega+1}$, valamely $\alpha_0 < \omega_1^x$-re, tehát speciálisan $\in L_{\omega_1^x}$. ■

6.13. Lemma. *Tegyük fel, hogy $R \in L_\alpha$ rendezés ω-n, amely nem jólrendezés. Ekkor van egy $r : \omega \to \omega$ leképezés, amely tanúsítja ezt, és $r \in L_{\alpha+3}$*

Bizonyítás. Valamely $\alpha < \omega_1^x$ limeszre $R \in L_\alpha$. Legyen $x \in H \iff L_\alpha \models (\exists n)((xRn) \wedge (\forall m)(xRm \Rightarrow (\exists k)(xRk \wedge kRn)))$ azaz azon elemek halmaza, amelyeknél nincs R nagyobb R minimális. Ha R nem jólrendezés, a csökkenő láncot pedig kiválogathatjuk H elemei közül, például mindig a minimális H beli választásával, amely kisebb az eddigieknél. ■

Most rátérhetünk a 6.8. Tétel bizonyítására. Tegyük fel először, hogy $x \in X$, legyen T rögzített, ekkor persze $T(x) \in L_{\omega_1^x}$. Amennyiben $T(x)$ ω egy jólrendezése, akkor az a rendszám, amellyel izomorf nyilván $< \omega_1^x$. A 6.12. Lemma miatt van tehát egy $g \in L_{\omega_1^x}$ izomorfizmus. Valamely α-ra $x = \bar{f}(\alpha)$, a feltételek miatt van egy $\delta < \omega_1^x$ limesz, hogy $p, \bar{f}|\alpha, x, T(x), g \in L_\delta$, és $\delta > \alpha_0(\Phi, x)$. így, használva 6.11-t kapjuk, hogy van egy $E_\delta \in \Delta_1^1(x)$, hogy

$(\omega, E_\delta) \cong (L_\delta, \in)$. Azt állítjuk, hogy ekkor az E_δ kielégíti az $1-5$ feltételeket. $1-3$ nyilván teljesül, hisz legyen például $\mathring{x}$ az x izomorfizmusnál vett képe.

Ha $T(x)$ L-ben nem jólrendezés, akkor vagy nem rendezés (ekkor persze L_δ-ban sem) vagy nem jólfundált. Ezt egy leszálló csökkenő lánc tanúsítja, ez benne volna L_δ-ban, így ekkor $L_\delta \models$ "$T(x)$ nem jólrendezés". Tehát 4 teljesül.

Másrészt δ megválasztása miatt, ha $T(x)$ jólrendezés, akkor L_δ-ban van azt tanúsító izomorfizmus.

Tudjuk, hogy $\delta > \alpha_0(\Phi, x)$ és Φ első változóban elegendően abszolút. Ezen felül az is igaz, hogy

$$L \models (\forall\beta \in dom(\bar{f}|\alpha))(\Phi(x, \bar{f}|\alpha, p) \wedge \Phi(x, \bar{f}|\alpha, p)$$

$$\iff L_\delta \models (\forall\beta \in dom(\bar{f}|\alpha))(\Phi(\bar{f}|\alpha(\beta), (\bar{f}|\alpha)|\beta, p) \wedge \Phi(x, \bar{f}|\alpha, p)$$

$$\Rightarrow (\omega, E_\delta \models (\exists f)((\forall\beta E_\delta dom(f))(\Phi(f(\beta), f|\beta, \mathring{p}) \wedge \Phi(\mathring{x}, f, \mathring{p})),$$

hisz $\bar{f}|\alpha, p <_L x$. Az " $\iff$ " rész azért teljesül, mert a ϕ formula elegendően abszolút, ekkor a $\Phi'(x, f, p, \beta) = \Phi(f(\beta), f|\beta, p)$ is az, ebből pedig egy $(\forall\beta <_L f)(ord(\beta) \wedge \beta \in dom(f) \wedge \Phi'(x, f, p, \beta))$, ami szintén elegendően abszolút (6.6). Azaz 5 is teljesül.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy x-re teljesül a jobb oldal. Belátjuk, hogy ekkor $x \in S$. T-t tetszőlegesen választva, mivel $E \in \Delta^1_1(x)$, és $\mathring{x} \in (\omega, E)$, E-re teljesül 2, ezért $x \in L_\beta$ valamely β-ra, hogy $(\omega, E) \cong (L_\beta, \in)$. Node ekkor persze $\beta < \omega_1^{E_\beta} \leq \omega_1^x$ (6.10. Állítás miatt). Azaz $x \in L_{\omega_1^x}$.

Most elég igazolni, hogy van olyan δ, melyre létezik egy $E_\delta \in \Delta^1_1(x)$ kielégít az $1-5$ feltételt, $\delta > \alpha_0(\phi, x)$ és $(L_\delta, \in) \cong (\omega, E_\delta)$. Ugyanis amennyiben ilyen δ van, akkor

$$(\omega, E_\delta) \models (\exists f)((\forall\beta E_\delta dom(f))(\Phi(f(\beta), f|\beta, \mathring{p}) \wedge \Phi(\mathring{x}, f, \mathring{p}))$$

ami pontosan akkor, ha

$$L_\delta \models (\exists f)((\forall\beta \in dom(f))(\Phi(f(\beta), f|\beta, p) \wedge \Phi(x, f, p)).$$

Akkor van egy $f \in L_\delta$, hogy

$$L_\delta \models (\forall \beta \in dom(f))(\Phi(f(\beta), f|\beta, p) \wedge \Phi(x, f, p)).$$

Használva az elegendően abszolútságot kapjuk, hogy

$$L \models (\forall \beta \in dom(f))(\Phi(f(\beta), f|\beta, p) \wedge \Phi(x, f, p)),$$

viszont a $\bar{f}$ természetesen egyértelmű, sőt kezdőszeletei is azok, így $\bar{f}|dom(f) = f$, ráadásul $\bar{f}$ következő értéke épp x, vagyis $x \in X$.

Belátjuk, hogy $\exists$ ilyen δ. Legyen $\delta' > \alpha_0(\phi, x)$, $\delta' < \omega_1^x$ tetszőleges, ekkor van egy $W_{\delta'}$ is, hogy $(\omega, W_{\delta'}) \cong (\delta', \in)$. Mármost definíció szerint létezik egy T Turing gép, hogy $T(x) = W_{\delta'}$, erre létezik egy megfelelő E. Akkor (ω, E) természetesen izomorf $(L_\delta, \in)$-nel valamely δ-ra, 4 miatt van egy $g \in L_\delta$ izomorfizmus $g : (\omega, W_{\delta'}) \cong (\delta', \in)$, ekkor persze $\delta' \in L_\delta$, így $\delta > \alpha_0(\Phi, x)$. ■

6.2. Az általános tétel néhány következménye

Szeretnénk belátni a most bizonyított tétel néhány hasznos következményét.

6.14. Tétel. $(V = L)$ *Tegyük fel, hogy* $F : [2^\omega]^{\leq \aleph_0} \times 2^\omega \to 2^\omega$ *Borel leképezés,* $P \subset 2^\omega$, $|P| > \aleph_0$ *szintén Borel. Tegyük fel még, hogy minden* $A \in [2^\omega]^{\leq \aleph_0}$ $p \in P$ *párra*

$F(A, p) = s$*, akkor* s *egy* B_s *halmaz Borel kódja, és erre teljesül, hogy*
$|B_s \cap S| > \aleph_0$.

Legyen $P = \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ $<_L$ *szerinti felsorolása. Ekkor van egy* $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset 2^\omega$ $\mathbf{\Pi^1_1}$ *halmaz, hogy minden* $\alpha < \omega_1$*-re* $x_\alpha \in B_{s_\alpha}$*, ahol* $s_\alpha = F(\{x_\beta : \beta < \alpha\}, p_\alpha)$.

A tétel tulajdonképpen arról szól, hogy ha van egy transzfinit rekurziós eljárásunk (F), amely az előzőek és egy paraméterhalmaz (P) függvényében megmondja a jó választások halmazának Borel kódját, és ez a halmaz megfelelően nagy, akkor az eljárás végigvihető úgy, hogy koanalitikus halmazt kapjunk.

BIZONYÍTÁS. Rögzítsünk egy-egy c_F, c_P kódot, melyekre $F = B_{c_F}, P = B_{c_P}$. A rekurziót elegendően abszolút módon definiáljuk. $\phi(x, f, c_F, c_P) \iff$

x a $<_L$ minimális olyan, melyre $\exists \iota <_L x$, hogy $\mathfrak{o}(x) = \iota + 1$ és $\exists s, g, \alpha, r, p', W \in L_{\mathfrak{o}(x)+2}$,

1. f függvény, $dom(f) = \alpha$, $ord(\alpha)$
2. $f, h, s, p' \in L_\iota$
3. $g : \omega \to ran(f)$ szürjektív
4. $p' \in B_p$, p' $<_L$-szerint α-adik
5. $\langle (ran(g), p'), s \rangle \in B_{c_F}$ és $x \in B_{c_s}$
6. $(\omega, W) \cong (\iota, \in)$ és $W \leq_T x$

$1-3$-ról világos, hogy elegendően abszolút x-ben, $4-5$ pedig következik az alábbi lemmából.

6.15. Lemma. *A $\zeta(x, c) \iff x \in B_c$ formula elegendően abszolút x-ben.*

BIZONYÍTÁS. Ehhez belátjuk a következő állítást.

6.16. Állítás. *Tegyük fel, hogy $T \in L_\alpha$, jólfundált fa $\omega^{<\omega}$-n, α limesz. Ekkor $rk(T) \leq \alpha$.*

BIZONYÍTÁS. T rangja szerinti indukcióval bizonyítunk. Tudjuk, hogy $rk(T) = \sup_{n\in\omega} rk(\{t \in T : t(1) = n\})$. Nyilvánvaló, hogy $\forall n$-re $\{t \in T : t(1) = n\} \in L_\alpha$ szintén. Ekkor az indukciós feltevés miatt $rk(\{t \in T : t(1) = n\}) \leq \alpha$, akkor persze sup-juk is kisebb. ∎

Az elegendően abszolútság igazolásához legyen $c <_L x$. Ha $B = B_c$ bázisnyílt, akkor az $x \in B$ formula nyilván elegendően abszolút. Akkor, ha B_c-hez a T fa tartozik, természetesen $T \in L_{\omega_1^x}$. Ez esetben $rk(T) < \omega_1^x$. Akkor $rk(T)$ hosszú rekurzióval tudunk definiálni egy $b : T \to 2$ leképezést, amely egy csúcsról megmondja, hogy a csúcs által meghatározott részfához tartozó Borel halmaznak elme-e x. Legyen $\zeta(x, c) \iff$

$$(\exists b)\big(b : T \to 2 \wedge b(\emptyset) = 1 \wedge (\forall t \in T)(b(t) = 1 \iff$$

$$((\forall/\exists n \in \omega)(t\!\!\!/n \in T \wedge b(t\!\!\!/n) = 1) \vee (\nexists n)(t\!\!\!/n \in T)(x \in p(t)))$$

$\forall$ vagy $\exists$ attól függően, hogy az adott csúcsnál metszünk vagy uniózunk. Használva a 6.9. Lemmát kapjuk, hogy $b \in L_{\omega_1^x}$. Akkor, ha $b \in L_{\alpha_0}$, akkor nyilvánvaló, hogy minden $\alpha > \alpha_0$ limeszre $L_\alpha \models \zeta(x, c) \iff L \models \zeta(x, c)$. ■

Fejezzük be a 6.19. Tétel bizonyítását. 6 elegendően abszolútsága azon múlik, hogy tudjuk, egy $(\omega, W) \cong (\iota, \in)$ izomorfizmus $\in L_{\iota+\omega2\iota+\omega+1}$-ben van. így, ha $L \models$ "$\exists W \in L_{\iota+1}$, melyre 6", akkor $\beta > \iota + \iota\omega2 + \omega + 1$ limeszre L_β-ban szintén teljesül. Az $1 - 6$ formulák elé csak korlátos kvantorokat írtunk, L_ι limesz abszolút módon definiálható. Innen világos, hogy a felírt ϕ formula elegendően abszolút.

ϕ-nél egy fix f-hez legfeljebb egy x jó, a $<_L$ minimalitás miatt. Ahhoz, hogy tudjuk használni a ϕ-re az előző alfejeztben bizonyított általános tételt, még igazolnunk kell, hogy létezik egy $\bar{f}$ leképezés, amely teljesíti a feltételeket. Transzfinit rekurzióval konstruáljuk meg. Tegyük fel, hogy $\alpha < \omega_1$-ig megvagyunk az $f : \alpha \to 2^\omega$ leképezéssel. Most válasszunk egy x-et, amely S-beli és teljesül rá $\phi(x, f, c_F, c_P)$. Ez a következőképp tehető meg: legyen x a $<_L$ minimális $S \cap F(ran(f), p_\alpha)$-beli, hogy $\exists g : \omega \to ran f$ szürjekció, $g, p_\alpha, c_P, c_F \in L_{\mathfrak{o}(x)}$. Ilyen x választható, hisz nem megszámlálható sok valósra a rendjeik halmaza kofinális ω_1-ben.

Egy előzőekben használt gondolatmenetet ismételve belátjuk, hogy $x \in S \iff \exists W \in L_{\mathfrak{o}+2}$, $(\omega, W) \cong (\iota, \in)$. Ha $x \in S$, akkor $\mathfrak{o}(x) < \omega_1^x$, ekkor van egy $W \leq_T x$, hogy $(\omega, W) \cong (\iota, \in)$, továbbá $T(x) \in L_{\mathfrak{o}(x)+2}$ minden T Turing gépre. Másrészt, ha van ilyen W, akkor $\mathfrak{o}(x) < \omega_1^x$, ekkor persze $\mathfrak{o}(x) + 1 < \omega_1^x$, tehát $x \in S$.

Tehát jelen esetben a $<_L$ minimális elem megegyezik a $<_L$ minimális S-belivel. Ezzel beláttuk, hogy a rekurzióval definiált $\bar{f}$ jó. Akkor 6.8 miatt $ran(\bar{f})$ $\Pi^1_1(c_F, c_P)$. ■

A tétel minden további nélkül átvihető $\mathbf{\Pi^1_1}$-re, ha sikerül a 6.15. Lemmát átültetni. Ez viszont igaz, ugyanis:

6.17. Tétel. *[2] A pontosan akkor $\Pi^1_1(z)$, ha van egy csak korlátos kvantorokkal felírható ψ formula, hogy*

$$y \in A \iff L_{\omega_1^{y,z}}[y, z] \models \exists x \psi(x, y).$$

Tudjuk, hogy van U univerzális Π^1_1 halmaz, azaz olyan, melyre minden A $\mathbf{\Pi^1_1}$-re van egy z, hogy $U_z = A$.

6.18. Következmény. *Tetszőleges $z \in 2^\omega$-ra az $x \in U_z$ formula elegendően abszolút x-ben.*

Bizonyítás. Az előző tétel miatt, ha $x \in S$, $z <_L x$, akkor $(z, x) \in U \iff L_{\omega_1^{z,x}}[z, x] \models \exists y \psi((z, x), y)$. Persze $L_{\omega_1^{z,x}}[z, x] = L_{\omega_1^x}$, van olyan $\alpha_0 < \omega_1^x$, amelyre $y \in L_{\alpha_0}$. Mivel ψ-ben csak korlátos kvantorok vannak, $L_\alpha \models \exists y \psi((z, x), y)$, ha $\alpha > \alpha_0$. ■

6.19. Tétel. $(V = L)$ *Tegyük fel, hogy $F : [2^\omega]^{\leq\aleph_0} \times 2^\omega \to 2^\omega$ $\mathbf{\Pi^1_1}$ grafikonú leképezés, $P \subset 2^\omega$, $|P| > \aleph_0$ szintén $\mathbf{\Pi^1_1}$ halmaz. Tegyük fel még, hogy minden $A \in [2^\omega]^{\leq\aleph_0}$ $p \in P$ párra*

$$F(A, p) = s, \text{ akkor } |U_s \cap S| > \aleph_0$$

Legyen $P = \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ $<_L$ szerinti felsorolása. Ekkor van egy $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset 2^\omega$ $\mathbf{\Pi^1_1}$ halmaz úgy, hogy minden $\alpha < \omega_1$-re $x_\alpha \in U_{s_\alpha}$, ahol $s_\alpha = F(\{x_\beta : \beta < \alpha\}, p_\alpha)$.

6.20. Megjegyzés. *Az, hogy F grafikonja $\mathbf{\Pi}^1_1$ halmaz, nem valódi általánosítás, ugyanis egyszerűen meggondolható, hogy minden ilyen szükségképp Borel is.*

6.21. Állítás. *A megfogalmazott nagysági feltétel ($|U_s \cap S| > \aleph_0$) ekvivalens azzal, hogy minden $x \in 2^\omega$-ra van $y \in U_s$, hogy $x \in \Delta^1_1(y)$.*

Bizonyítás. Az egyik irány világos, most tegyük fel, hogy U_s-ben van tetszőlegesen magas elem. Belátjuk, hogy van S-beli is. Legyen $x \in 2^\omega$ tetszőleges. Létezik egy $t \in S$, hogy $t \leq_T x, s$, tekintsük a $\{y : t \in \Delta^1_1(y)\} \cap U_s$ halmazt. A feltevés szerint ez nemüres, $\in \Pi^1_1(t)$. Ekkor van egy y eleme melyre $y \in L_{\omega_1^{y,t}}[t] = L_{\omega_1^y}$. Mindkét utóbbi állítás (jelesül hogy ez a halmaz $\Pi^1_1(t)$, és hogy van ilyen y) igazolását lásd [13]-ban. ■

6.22. Következmény. *($V = L$) Tegyük fel, hogy $F : [2^\omega]^{\leq\aleph_0} \times 2^\omega \to 2^\omega$ $\mathbf{\Pi}^1_1$ grafikonú leképezés, $P \subset 2^\omega$, $|P| > \aleph_0$ szintén $\mathbf{\Pi}^1_1$ halmaz. Tegyük fel még, hogy minden $A \in [2^\omega]^{\leq\aleph_0}$ $p \in P$ párra*

$$F(A, p) = s, \text{ akkor minden } z \in 2^\omega\text{-ra } \exists y \in U_s, \text{ hogy } z \in \Delta^1_1(y)$$

Legyen $P = \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ $<_L$ szerinti felsorolása. Ekkor van egy $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset 2^\omega$ $\mathbf{\Pi}^1_1$ halmaz úgy, hogy minden $\alpha < \omega_1$-re $x_\alpha \in U_{s_\alpha}$, ahol $s_\alpha = F(\{x_\beta : \beta < \alpha\}, p_\alpha)$.

6.23. Megjegyzés. *Vagyis elég, hogy a jó választások halmaza mindig kofinális legyen $\leq_T$-szerint, hisz ha $x \leq_T y$ akkor $x \in \Delta^1_1(x)$.*

6.24. Megjegyzés. *A $F : [2^\omega]^{\leq\aleph_0} \times 2^\omega \to 2^\omega$ cserélhető $F : [\mathbb{R}]^\omega \times 2^\omega \to 2^\omega$-ra, egyszerűen egy valóshoz hozzárendelve a bineáris alakját 2^ω-ból csak megszámlálható sok elem marad ki, ez a leképezés persze rekurzív Borel. Akkor a 2^ω-ban konstruált halmaz őse $\mathbf{\Pi}^1_1$.*

6.25. Megjegyzés. *Ugyanezt a gondolatmenetet végigokoskodva, amennyiben az U_s halmazról csak azt tudjuk, hogy nem üres, $\mathbf{\Sigma}^1_2$ halmaz érhető el.*

7. Alkalmazások

A kimondott általános tétel leginkább használható, a bevezetésben is idézett formája a következő:

7.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $F : [2^\omega]^{\leq\aleph_0} \times 2^\omega \to 2^\omega$ Borel leképezés, $P \subset 2^\omega$ Borel halmaz, $|P| > \aleph_0$. Tegyük fel még, hogy minden $A \in [2^\omega]^{\leq\aleph_0}$, $p \in P$ párra*

$$\text{ha } F(A,p) = s, \text{ akkor } s \text{ egy } B_s \text{ Borel halmaz kódja, és}$$
$$(\forall y \in 2^\omega)(\exists x \in B_s)(x \geq_T y).$$

Ekkor van a halmazelméletnek egy modellje, melyben létezik a P-nek egy $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ felsorolása és egy $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset 2^\omega$ $\mathbf{\Pi^1_1}$, hogy minden $\alpha < \omega_1$-re $x_\alpha \in B_{s_\alpha}$, ahol $s_\alpha = F(\{x_\beta : \beta < \alpha\}, p_\alpha)$.

Az eddig kódolási lemmák és a Miller tétel újra végiggondolása árán bizonyított állításokat most könnyedén igazolhatjuk, ugyanis maguk a kódolási lemmák megadják 2^ω egy beleképezését a "jó" halmazba "Turing erősítő" módon. A módszer egyenes következménye, hogy konzisztensen létezik koanalitkus:

- 2-pont halmaz,
- MAD-család,
- Hamel-bázis,
- nem megszámlálható halmaz, mely minden $\mathcal{C}^1$ síkgörbét megszámlálható sok pontban metsz.

Illusztrációképp igazoljuk a $\mathbf{\Pi^1_1}$ Hamel-bázis létezését, mely talán a legkörülményesebb.

Definiáljuk az $F : [\mathbb{R}^2]^\omega \times 2^\omega \to 2^\omega$ leképezést, $F(\{x_n, y_n : n \in \omega\}, z)$-t adjuk meg:

- ha $\{\bar{z}, x_n, y_n : n \in \omega\}$ lineárisan független, akkor legyen az $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x + y = \bar{z}, \{x, y, x_n, y_n : n \in \omega\}$ lineárisan független$\}$ halmaz egy Borel-kódja, ahol $\bar{z}$ a $z \in 2^\omega$-nak megfelelő valós,

- ha $\{\bar{z}, x_n, y_n : n \in \omega\}$ lineárisan összefüggő, akkor legyen $\{(x', y') : \{x', y', x_n, y_n : n \in \omega\}$ független$\}$ halmaz egy Borel kódja,

- ha $\{x_n, y_n : n \in \omega\}$ lineárisan összefüggő, akkor legyen egy $\mathbb{R}^2$-et kódoló 2^ω-beli elem.

A Borel kódok kiválasztása megadható kanonikusan, így a megadott F nyilván Borel. A "jó", vagyis a kódolt Borel halmazba képezhető 2^ω Turing-fok növelő módon, jelesül, ez a halmaz az első esetben a legszűkebb, ekkor is megszámlálható sok kivétellel minden $s \in \mathbb{R}$ "felett" van jó pont: $z - s$, akkor rendeljük egy 2^ω-beli ponthoz a "felette" levő jó pontot.

Tehát a tétel garantál egy síkbeli $\mathbf{\Pi}^1_1$ halmazt, mely elemeinek koordinátái nyilván páronként különböznek és Hamel-bázist alkotnak. Vetítsük le ezt a halmazt a két tengelyre majd uniózzunk. Az így előállított halmaz koanalitikus injektív vetületeinek uniója tehát koanalitikus (lásd [8]). ■

A bizonyított tételt alkalmazva kaphatjuk meg a következő eredményt is:

7.2. Állítás. *(V=L) Tegyük fel, hogy van egy R $\mathbf{\Pi^1_1}$ reláció 2^ω megszámlálható részhalmazain. Tegyük még fel, hogy minden $H \in [2^\omega]^{\leq\aleph_0}$ és $R(H)$, akkor $\exists f : 2^\omega \to \{H' : R(H \cup H')\}$, amely növeli a Turing-fokot. Ekkor van egy maximális $X \subset 2^\omega$ koanalitikus, hogy $H \in [X]^{\leq\aleph_0}$-ra $R(H)$.*

8. Ellenpéldák

Vonzó elképzelés volna egy általános elv megalkotása, mely minden transzfinit rekurziós eljárást, amely rendelkezik bizonyos tulajdonságokkal, úgy igazít, hogy a kapott halmaz $\mathbf{\Pi}^1_1$ legyen. Erre konstruálunk néhány ellenpéldát.

Világos, hogy egy Bernstein-halmaz (a számegyenes olyan részhalmaza, amely és amelynek komplementere nem tartalmaz perfektet) nem lehet koanalitikus, hiszen ekkor komplementere - mint analitikus halmaz- tartalmazna perfektet.

8.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy $H \subset \mathbb{R}$ olyan nem megszámlálható, hogy minden nem megszámlálható részhalmaza pozitív külső mértékű. Ekkor H nem lehet mérhető, másrészt CH esetén egy ilyen tulajdonságú halmaz konstruálásához van olyan rekurziós eljárás, melyre minden lépésben a nem választható pontok halmaza nullmértékű.*

Bizonyítás. A kézenfekvő transzfinit rekurziós eljárást alkalmazzuk: soroljuk fel a nullmértékű G_δ halmazokat N_α, $\alpha < \omega_1$, tegyük fel, hogy $\alpha < \beta$-ra már megválasztottuk x_α-t, x_β pedig legyen $\in \mathbb{R} \setminus (\bigcup_{\alpha<\beta} N_\alpha \cup \{x_\alpha : \alpha < \beta\})$, a kizárt pontok halmaza ekkor természetesen nullmértékű. ∎

Ebből világos, hogy egy ennyire "szabad" választás esetén sem kapható mindig koanalitikus halmaz, hisz az szükségképp mérhető ([8]).

Most belátunk egy erősebb állítást, hogy egy tetszőleges rekurziós eljárás, amely minden lépésben megszámlálható sok pontot zár ki, nem feltétlenül dolgozható át olyanná, amely $\mathbf{\Pi}^1_1$ halmazt ad.

8.2. Állítás. *(CH) Létezik megszámlálható halmazok egy A_α, $\alpha < \omega_1$ rendszere úgy, hogy ha $X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$-re $x_\gamma \notin A_\alpha$, $\gamma \geq \alpha$, akkor X nem lehet koanalitikus.*

Bizonyítás. Vegyük y_α-k egy rendszerét, úgy, hogy $\alpha < \beta$ esetén $y_\alpha <_T y_\alpha$, valamint a rendszer Turing-teljes, vagyis $\forall x \in \mathbb{R}$-hez található α, hogy $x \leq_T y_\alpha$. Most definiáljuk a megszámlálható halmazokat, A_0 legyen olyan, hogy amennyiben $H \in \Pi^1_1(y_0)$, akkor $H \cap A_0 \neq \emptyset$. Természetesen ez megtehető, hisz megszámlálható sok $\Pi^1_1(y_0)$ halmaz van. Tegyük fel, hogy A_α-t megválasztottuk $\alpha < \beta < \omega_1$ -re. Ekkor A_β teljesítse e következő feltételt: $|H \cap (A_\beta \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha)| \geq 2$ valahányszor $H \in \Pi^1_1(y_\alpha)$, $|H| > \aleph_0$, és $\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha \subset A_\beta$. Ilyen A_β persze létezik, hisz $\aleph_0$ sok pontot dobtunk ki, a H-k halmaza pedig megszámlálható.

Tegyük fel most, hogy mégis volna egy $X \in \mathbf{\Pi^1_1}$ teljesítve a fenti feltételeket. Tehát volna egy α_0, hogy $X \in \Pi^1_1(y_{\alpha_0})$. így $|X \cap (A_\alpha \setminus \cup_{\beta<\alpha} A_\beta)| \geq 2$, ha $\alpha > \alpha_0$. Ekkor rögzített $\alpha > \alpha_0$-hoz rendeljük a legkisebb $X \cap (A_{\alpha+1} \setminus A_\alpha)$-beli indexét. Mivel a metszet nem üres és $\gamma \geq \alpha$-ra $x_\gamma \notin A_\alpha$, ezért az hozzárendelt index kisebb mint α. Node ez a leképezés nyilván injektív és regresszív ω_1 egy végszeletén, ami ellentmond a Fodor-lemmának. ∎

8.3. Megjegyzés. *Az előző tétel ugyanígy bizonyítható tetszőleges projektív osztályra.*

Most belátjuk, hogy a Miller-módszer általánosításai más modellekben nem működnek. Konkrétabban, ha a modell valósai nem mind $L[a]$-beliek valamely $a \in \mathbb{R}$-re, akkor nem vihető végig a bizonyítás. Ugyanis a Miller-féle konstrukció alapvető tulajdonsága, hogy olyan $\mathbf{\Pi^1_1}$ halmazt ad, amelynek bármely x, y elemére $x \in \Delta^1_1(y)$ vagy $y \in \Delta^1_1(x)$ teljesül.

8.4. Állítás. *[13] Ha $P \subset \mathbb{R}$ perfekt, akkor létezik $x, y \in P$, hogy $x \notin \Delta^1_1(y)$ és $y \notin \Delta^1_1(x)$.*

8.5. Következmény. *Ilyen jellegű konstrukciókkal megadott halmazokban nem lehet perfekt.*

Ha most a modellünk olyan, hogy van $x \in \mathbb{R} \setminus L[a]$ minden $a \in \mathbb{R}$-re, akkor az összes tárgyalt (2-pont halmaz, Hamel-bázis, MAD család, $\mathcal{C}^1$ függvények) esetben kell, hogy legyen a konstruált halmazban $L[a]$-n kívüli elem. Ekkor viszont, a következő tétel miatt van perfekt része.

8.6. Tétel. *[6] Ha egy $\Sigma^1_2(a)$ halmazban van $\mathbb{R} \setminus L[a]$-beli elem, akkor van P perfekt része.*

9. További kérdések

Az általunk belátott általános tételnél gyengébb állítást igazolnak [2]-ben. A szerzők eredménye ekvivalens egy konkrét halmazelméleti feltétellel. Ennek alapján feltételezhető, hogy a következő kérdésre pozitív a válasz.

9.1. Kérdés. *Igaz-e, hogy a 6.19. Tétel a $V = L$ feltételt elhagyva pontosan akkor teljesül, ha $\omega_1 = \omega_1^L$?*

Tudjuk, hogy sem a teljes mértékűségből, sem pedig a rezidualitásból nem következik a megkövetelt nagysági feltétel (lásd az előző fejezetben).

9.2. Kérdés. *Van-e valamilyen "jól használható" szükséges P feltétel, hogy ha $P(A)$ valamely A $\mathbf{\Pi^1_1}$-re, akkor minden $x \in 2^\omega$-ra van egy $y \in A$, hogy $x \in \Delta^1_1(y)$?*

Hivatkozások

[1] G. Boolos, H. Putnam, Degrees of unsolvability of constructible sets of integers. *J. Symbolic Logic* 33 (1968), 497-513.

[2] C. T. Chong, L. Yu, A Π^1_1-uniformization principle for reals. *Trans. Amer. Math. Soc.* 361 (2009), no. 8, 4233-4245.

[3] K. J. Devlin, *Constructibility*, Springer-Verlag, 1984.

[4] F. van Engelen, K. Kunen, A. W. Miller, Two remarks about analytic sets. *Set theory and its applications* (Toronto, ON, 1987), 68-72.

[5] P. Erdős, K. Kunen, R. D. Mauldin, Some additive properties of sets of real numbers. *Fund. Math.* 113 (1981), no. 3, 187-199.

[6] T. Jech, *Set Theory. The third milleneum edition, revised and expanded*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[7] B. Kastermans, J. Steprans, Y. Zhang, Analytic and coanalytic families of almost disjoint functions. *J. Symbolic Logic* 73 (2008), no. 4, 1158-1172.

[8] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Texts in Mathematics 156, Springer-Verlag, 1994.

[9] K. Kunen, *Set Theory An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983.

[10] A. W. Miller, *Descriptive Set Theory and Forcing*, Lecture Notes in Logic, Springer-Verlag, 1995.

[11] A. W. Miller, Infinite combinatorics and definability. *Ann. Pure Appl. Logic* 41 (1989), no. 2, 179-203.

[12] Y. N. Moschovakis, *Descriptive set theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 100. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980.

[13] G. E. Sacks, *Higher Recursion Theory*, Springer-Verlag, 1987.