Egyszeresen összefüggő, magas dimenziós sokaságok osztályozása Browder nyomán

Nagy Csaba
Matematikus MSc.

Szakdolgozat

Témavezető: Szűcs András
Egyetemi tanár
Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2012

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Dolgozatom célja a normál átépítések elméletének, és annak a sokaságok osztályozásában való alkalmazásának bemutatása Browder [2] könyve alapján.

A sokaságok osztályozásának egy alapvető kérdése, hogy egy adott Poincaré-komplexushoz létezik-e vele homotopikusan ekvivalens sima sokaság. Ennek a problémának egy részét vizsgálja az átépítések elmélete: ha adott egy vektornyaláb a Poincaré-komplexus felett, és ki van jelölve egy normál kobordizmus osztály, abban van-e homotopikus ekvivalencia.

A dolgozat felépítése a következő:

A 2. fejezetben szerepel a dolgozatban használt fogalmak és jelölések bevezetése, valamint a fontosabb felhasznált tételek.

A 3. fejezetben mondom ki és bizonyítom be a normál átépítésekre vonatkozó főtételt, ami szükséges és elégséges feltételt ad arra vonatkozóan, hogy egy normál kobordizmus osztályban mikor van homotopikus ekvivalencia. Páratlan dimenziós esetben mindig van, páros dimenziós esetben pedig egy bizonyos, σ-val jelölt obstrukció eltűnése a feltétel.

A 4. fejezetben ismertetem néhány, a sokaságok osztályozására vonatkozó tétel bizonyítását, melyek mind a főtételre alapulnak.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Szűcs Andrásnak a téma részletesebb megismeréséhez és a dolgozat elkészítéséhez nyújtott segítséget.

2. Előkészületek

Bevezetjük az alapvető definíciókat, jelöléseket és áttekintjük a felhasznált tételeket. A dolgozatban minden sokaságról feltesszük, hogy sima (C^∞), kompakt és irányított.

2.1. Leképezések k-összefüggősége

Definíció. Az $f : A \to B$ leképezés cilindere $C_f = A \times [0,1] \cup B$, ahol az unióban az $(a,1)$ és $f(a)$ pontokat azonosítjuk (minden $a \in A$-ra).

$C_f \simeq B$ (mert definiálható egy $r : C_f \to B$ deformációs retrakció: $r(a,t) = f(a)$, ha $(a,t) \in A \times [0,1]$ és $r(b) = b$ ha $b \in B$), és $A \approx A \times \{0\}$ be van ágyazva C_f-be.

Jelölés. $\pi_i(f) = \pi_i(C_f, A)$

$H_i(f) = H_i(C_f, A)$

$H^i(f) = H^i(C_f, A)$

Így a (C_f, A) pár homotopikus egzakt sorozata a következő alakban is felírható:

$$\longrightarrow \pi_i(A) \xrightarrow{f_*} \pi_i(B) \longrightarrow \pi_i(f) \longrightarrow \pi_{i-1}(A) \xrightarrow{f_*}$$

Hasonlóan az f homologikus és kohomologikus egzakt sorozata:

$$\longrightarrow H_i(A) \xrightarrow{f_*} H_i(B) \longrightarrow H_i(f) \longrightarrow H_{i-1}(A) \xrightarrow{f_*}$$

$$\xrightarrow{f^*} H^{i-1}(A) \longrightarrow H^i(f) \longrightarrow H^i(B) \xrightarrow{f^*} H^i(A) \longrightarrow$$

Definíció. Egy $f : A \to B$ leképezés k-összefüggő, ha $\pi_i(f) = 0$ minden $i \leq k$-ra.

Az f homotopikus egzakt sorozatából leolvasható, hogy ez ekvivalens azzal, hogy $f_* : \pi_i(A) \to \pi_i(B)$ minden $0 \leq i < k$ esetén izomorfizmus, és $i = k$ -ra szürjektív. (A 0. homotopikus ,,csoport” a tér útösszefüggőségi komponenseinek halmaza.)

1. Állítás. *Ha M egy n-dimenziós sokaság, $f : M \to X$, $\lambda \in \pi_{p+1}(f)$, $p \leq \frac{n}{2}$, és $n > 4$, akkor λ-t ,,reprezentálhatjuk” egy $\bar{f} : M \underset{\varphi_0}{\cup} D^{p+1} \to X$ leképezéssel, ahol a ragasztó leképezés egy $\varphi_0 : \partial D^{p+1} = S^p \to M$ beágyazás.*

Bizonyítás. Vegyük λ egy $l : (D^{p+1}, S^p) \to (C_f, M)$ reprezentánsát. Ha $p < \frac{n}{2}$, akkor Whitney tétele alapján $l\big|_{S^p}$ approximálható beágyazással. Ha $p = \frac{n}{2}$, akkor $l\big|_{S^p}$-t egy immerzióval közelíthetjük, amiről feltehető, hogy öntranszverzális, tehát csak véges sok kettős pontja van, és a Whitney-trükkel el tudjuk tüntetni ezeket. Tehát ha $p \leq \frac{n}{2}$, akkor $l\big|_{S^p}$ homotóp egy beágyazással. Ennek a homotópiának és l-nek az összeragasztásával kapjuk λ egy olyan $l' : (D^{p+1}, S^p) \to (C_f, M)$ reprezentánsát, amire $l'\big|_{S^p}$ beágyazás, legyen ez φ_0. Legyen $\bar{f}(x) = f(x)$, ha $x \in M$, és $\bar{f}(y) = r(l'(y))$ ha $y \in D^{p+1}$ (ahol r a $C_f \to X$ retrakció), ezzel egy jóldefiniált $\bar{f} : M \underset{\varphi_0}{\cup} D^{p+1} \to X$ leképezést kapunk. $\square$

2.2. 1 fokú leképezések

Definíció. (A, A') n-dimenziós Poincaré-pár, ha létezik $[A] \in H_n(A, A')$ végtelen rendű elem, (A, A') fundamentális osztálya, amire $[A]\cap : H^i(A, A') \to H_{n-i}(A)$ izomorfizmus minden i-re. (Ez ekvivalens azzal, hogy $[A]\cap : H^i(A) \to H_{n-i}(A, A')$ izomorfizmus minden i-re.)

A n-dimenziós Poincaré-tér, ha $(A, \emptyset)$ n-dimenziós Poincaré-pár.

Ha (A, A') n-dimenziós Poincaré-pár, akkor A' $(n-1)$-dimenziós Poincaré-tér (és $\partial[A] = [A']$ a fundamentális osztálya, ahol ∂ az (A, A') pár homologikus egzakt sorozatában a határleképezés).

Ha M n-dimenziós sokaság, akkor $(M, \partial M)$ n-dimenziós Poincaré-pár.

Definíció. Legyenek (A, A') és (B, B') n-dimenziós Poincaré-párok, a fundamentális osztályuk $[A]$ ill. $[B]$. $f : (A, A') \to (B, B')$ 1 fokú leképezés, ha $f_*([A]) = [B]$.

2. Tétel. *Legyen $n \geq 2$, (X, Y) n-dimenziós Poincaré-pár, X egyszeresen összefüggő, és M n-dimenziós sokaság. Ha $f : (M, \partial M) \to (X, Y)$ 1 fokú leképezés, $\left(f\big|_{\partial M}\right)_* : H_*(\partial M) \to H_*(Y)$ izomorfizmus, és f $\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)$-összefüggő, akkor f homotopikus ekvivalencia.*

Bizonyítás. Mivel f $\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)$-összefüggő, azaz $\pi_i(C_f, M) = 0$ ha $i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, és X egyszeresen összefüggő, ezért a relatív Hurewicz-tétel miatt $H_i(C_f, M) = 0$ ha $i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. A (C_f, M) pár homologikus egzakt sorozatából azt kapjuk, hogy $f_* : H_i(M) \to H_i(C_f) \cong H_i(X)$ izomorfizmus, ha $i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Ebből következik, hogy $f^* : H^i(X) \to H^i(M)$ is izomorfizmus, ha $i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Ugyanis felírhatjuk M-re és X-re az univerzális együttható formulából kapott rövid egzakt sorozatokat, és az f által ezek között indukált diagramot, és erre alkalmazhatjuk az 5-lemmát:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}(H_{i-1}(M), Z) \arrow[r] & H^i(M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_i(M), Z) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ext}(H_{i-1}(X), Z) \arrow[r] \arrow[u, "(f_*)^*"] & H^i(X) \arrow[r] \arrow[u, "f^*"] & \mathrm{Hom}(H_i(X), Z) \arrow[r] \arrow[u, "(f_*)^*"] & 0
\end{tikzcd}$$

Mivel f 1 fokú leképezés, ezért a Poincaré-dualitás miatt a homológiákon indukált $f_* : H_{n-i}(M, \partial M) \to H_{n-i}(X, Y)$ leképezés is izomorfizmus, ha $i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, azaz $n - i \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Most írjuk fel a párok homologikus egzakt sorozatai között indukált diagramot:

$$\begin{tikzcd}
H_{i+1}(M, \partial M) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_i(\partial M) \arrow[r] \arrow[d, "(f|_{\partial M})_*"] & H_i(M) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_i(M, \partial M) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_{i-1}(\partial M) \arrow[d, "(f|_{\partial M})_*"] \\
H_{i+1}(X, Y) \arrow[r] & H_i(Y) \arrow[r] & H_i(X) \arrow[r] & H_i(X, Y) \arrow[r] & H_{i-1}(Y)
\end{tikzcd}$$

Az eddigiek alapján $f_* : H_j(M, \partial M) \to H_j(X, Y)$ izomorfizmus, ha $j \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, a tétel kikötése szerint $\left(f\big|_{\partial M}\right)_* : H_j(\partial M) \to H_j(Y)$ pedig minden j-re izomorfizmus, ezért az 5-lemmából azt kapjuk, hogy $f_* : H_i(M) \to H_i(X)$ izomorfizmus, ha $i \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Tehát f_* izomorfizmus $H_*(M)$ és $H_*(X)$ között, és X egyszeresen összefüggő, és M is (ez f homotopikus egzakt sorozatából látszik, felhasználva, hogy f $\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1\right) \geq 2$-összefüggő), ezért alkalmazható Whitehead tétele, f tényleg homotopikus ekvivalencia. $\square$

A fejezet hátralevő részében legyen adott egy G együtthatócsoportot. Minden homológia- és kohomológiacsoportot G együtthatósnak tekintünk (de ezt nem jelöljük). Az eredményeket később a $G = Z$ és $G = Z_2$ esetekben fogjuk használni.

Legyen $f : (A, A') \to (B, B')$ 1 fokú leképezés. Tekintsük a következő diagramokat, ahol a függőleges nyilak izomorfizmusok:

$$\begin{tikzcd}
H^i(A, A') \arrow[d, "{[A]\cap}"] & H^i(B, B') \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "{[B]\cap}"] \\
H_{n-i}(A) \arrow[r, "f_*"] & H_{n-i}(B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H^i(A) \arrow[d, "{[A]\cap}"] & H^i(B) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "{[B]\cap}"] \\
H_{n-i}(A, A') \arrow[r, "f_*"] & H_{n-i}(B, B')
\end{tikzcd}$$

A $\cap$ szorzás természetes, azaz ha adottak olyan $a \in H_p(A, A')$, $b \in H_p(B, B')$, $\alpha \in H^q(A, A')$ és $\beta \in H^q(B, B')$ elemek, amelyekre $f_*(a) = b$ és $f^*(\beta) = \alpha$ teljesül, akkor $f_*(a \cap \alpha) = b \cap \beta \in H_{p-q}(B)$. Ezt az $a = [A]$, $b = [B]$, választással alkalmazva azt kapjuk, hogy $f_*([A] \cap f^*(\beta)) = [B] \cap \beta \in H_{n-i}(B)$ minden $\beta \in H^i(B, B')$-re, tehát az 1. diagram kommutatív. Ugyanez elmondható a 2. diagramról is.

Ez azt jelenti, hogy a homológia- és kohomológiacsoportoknak a Poincaré-dualitás által meghatározott izomorfizmusokkal való azonosítása után az $f_* \circ f^*$ homomorfizmus identikus. Az azonosítás nélkül ezt a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Jelölje D_B a $([B]\cap)$ izomorfizmus inverzét B ill. (B, B') homológiái és kohomológiái között. Ekkor f_*-nak van jobbinverze, mégpedig $([A]\cap) \circ f^* \circ D_B$. f^*-nak pedig balinverze van, $D_B \circ f_* \circ ([A]\cap)$.

A következő két állítás ennek egyszerű következménye.

3. Állítás. *Ha f 1 fokú leképezés, akkor f_* szürjektív és f^* injektív.*

4. Állítás.
$$\begin{aligned} H_i(A) &= \mathrm{Ker}(f_*)_i \oplus \mathrm{Im}\big(([A]\cap) \circ (f^*)_{n-i} \circ D_B\big) \\ H_i(A, A') &= \mathrm{Ker}(f_*)_i \oplus \mathrm{Im}\big(([A]\cap) \circ (f^*)_{n-i} \circ D_B\big) \\ H^i(A) &= \mathrm{Ker}\big(D_B \circ (f_*)_{n-i} \circ ([A]\cap)\big) \oplus \mathrm{Im}(f^*)_i \\ H^i(A, A') &= \mathrm{Ker}\big(D_B \circ (f_*)_{n-i} \circ ([A]\cap)\big) \oplus \mathrm{Im}(f^*)_i \end{aligned}$$

Jelölés.
$$\begin{aligned} K_i(A) &= \mathrm{Ker}\big(f_* : H_i(A) \to H_i(B)\big) \\ K_i(A, A') &= \mathrm{Ker}\big(f_* : H_i(A, A') \to H_i(B, B')\big) \\ K^i(A) &= \mathrm{Ker}\big(D_B \circ f_* \circ ([A]\cap) : H^i(A) \to H^i(B)\big) \\ K^i(A, A') &= \mathrm{Ker}\big(D_B \circ f_* \circ ([A]\cap) : H^i(A, A') \to H^i(B, B')\big) \end{aligned}$$

Megjegyzés. A jelölésben nem tüntetjük fel f-et, a használat során mindig egyértelmű lesz, hogy milyen leképezés magjáról van szó.

A definícióbol látszik, hogy $([A]\cap)$ leszűkítése izomorfizmus $K^i(A)$ és $K_{n-i}(A, A')$, ill. $K^i(A, A')$ és $K_{n-i}(A)$ között. Erre később ugyanúgy Poincaré-dualitásként fogunk hivatkozni, mint a teljes homológia- és kohomológiacsoport közti izomorfizmusra.

f^* injektivitása miatt a most bevezetett jelölésekkel a 4. állítás a következő alakba írható:

5. Állítás. *A és (A, A') homológiái és kohomológiái kanonikus módon direkt összegre bomlanak:*

$$H_i(A) \cong K_i(A) \oplus H_i(B)$$
$$H_i(A, A') \cong K_i(A, A') \oplus H_i(B, B')$$
$$H^i(A) \cong K^i(A) \oplus H^i(B)$$
$$H^i(A, A') \cong K^i(A, A') \oplus H^i(B, B')$$

6. Állítás. $K_i(A) \cong H_{i+1}(f)$ *és* $K^i(A) \cong H^{i+1}(f)$ *(és az izomorfizmusok kanonikusak).*

Bizonyítás. Tekintsük f homologikus egzakt sorozatát:

$$H_{i+1}(A) \xrightarrow{(f_*)_{i+1}} H_{i+1}(B) \longrightarrow H_{i+1}(f) \longrightarrow H_i(A) \xrightarrow{(f_*)_i} H_i(B)$$

$(f_*)_{i+1}$ szürjektivitása miatt a $H_{i+1}(B) \longrightarrow H_{i+1}(f)$ homomorfizmus 0. Ezért a $H_{i+1}(f) \longrightarrow H_i(A)$ homomorfizmus injektív, tehát izomorfizmust ad meg $H_{i+1}(f)$ és $\operatorname{Ker}(f_*)_i = K_i(A)$ között.

Az állítás másik fele a kohomologikus egzakt sorozatból jön:

$$H^i(B) \xrightarrow{(f^*)_i} H^i(A) \longrightarrow H^{i+1}(f) \longrightarrow H^{i+1}(B) \xrightarrow{(f^*)_{i+1}} H^{i+1}(A)$$

$(f^*)_{i+1}$ injektív, ezért a $H^{i+1}(f) \longrightarrow H^{i+1}(B)$ homomorfizmus 0. Ezért $H^i(A) \longrightarrow H^{i+1}(f)$ szürjektív, tehát $H^{i+1}(f) \cong H^i(A)/\operatorname{Im}(f^*)_i \cong K^i(A)$. □

7. Állítás. $K^i(A) \cong \operatorname{Hom}(K_i(A), G) \oplus \operatorname{Ext}(K_{i-1}(A), G)$.

Bizonyítás. Felírhatjuk a (C_f, A) párra vonatkozó univerzális együttható formulát: $H^{i+1}(C_f, A) \cong \operatorname{Hom}(H_{i+1}(C_f, A), G) \oplus \operatorname{Ext}(H_i(C_f, A), G)$. Ez pedig az előző állítás miatt pont azt jelenti, hogy $K^i(A) \cong \operatorname{Hom}(K_i(A), G) \oplus \operatorname{Ext}(K_{i-1}(A), G)$. □

Megjegyzés. Az univerzális együttható formula többi alakjának megfelelője is ugyanígy bizonyítható.

A következő állításhoz szükségünk lesz két algebrai lemmára.

$$
\begin{tikzcd}
 & Q_1 \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & Q_2 \arrow[dl] \arrow[dd] \\
P_1 \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[ur, dashed] & & P_2 \arrow[dd] \arrow[ur, dashed] & \\
 & \bar{Q}_1 \arrow[rr] \arrow[dl, dashed] & & \bar{Q}_2 \arrow[dl, dashed] \\
\bar{P}_1 \arrow[rr] \arrow[ur] & & \bar{P}_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Tegyük fel, hogy adott az ábrán látható kocka alakú, Abel-csoportokból álló diagram, aminek a lapjai a folytonos vonallal jelzett nyilakkal (előjeltől eltekintve) kommutatívak, és a függőleges nyilak izomorfizmusok. Ekkor a $\bar{P}_i \longrightarrow \bar{Q}_i$ nyílnak van jobbinverze (a $\bar{Q}_i \longrightarrow Q_i \longrightarrow P_i \longrightarrow \bar{P}_i$ kompozíció), legalábbis előjeltől eltekintve (tehát a kompozíciójuk $\pm\,\mathrm{id}_{\bar{Q}_i}$). A $Q_i \longrightarrow P_i$ nyílnak pedig hasonló balinverze van (a $P_i \longrightarrow \bar{P}_i \longrightarrow \bar{Q}_i \longrightarrow Q_i$ kompozíció). Ezeket a féloldali inverzeket fordított irányú szaggatott nyilakkal jelezzük.

Megjegyzés. Ha a függőleges nyilak (izomorfizmusok) közül néhányat megfordítunk, akkor a „P” és „Q” oldal (előjeltől eltekintve) kommutatív marad (de az „1” és „2” oldal nem).

8. Lemma. *A vízszintes lapok a szaggatott nyilakkal is kommutatívak (előjeltől eltekintve).*

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy a következő két átalakítássorozatban az egymás után következő kompozíciók (előjeltől eltekintve) megegyeznek:

$$
\begin{array}{l}
P_1 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_2 \\
P_1 \longrightarrow \bar{P}_1 \longrightarrow \bar{Q}_1 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_2 \\
P_1 \longrightarrow \bar{P}_1 \longrightarrow \bar{Q}_1 \longrightarrow \bar{Q}_2 \longrightarrow Q_2 \\
P_1 \longrightarrow \bar{P}_1 \longrightarrow \bar{P}_2 \longrightarrow \bar{Q}_2 \longrightarrow Q_2 \\
P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow \bar{P}_2 \longrightarrow \bar{Q}_2 \longrightarrow Q_2 \\
P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow Q_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\bar{Q}_1 \longrightarrow \bar{P}_1 \longrightarrow \bar{P}_2 \\
\bar{Q}_1 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow \bar{P}_1 \longrightarrow \bar{P}_2 \\
\bar{Q}_1 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow \bar{P}_2 \\
\bar{Q}_1 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_2 \longrightarrow P_2 \longrightarrow \bar{P}_2 \\
\bar{Q}_1 \longrightarrow \bar{Q}_2 \longrightarrow Q_2 \longrightarrow P_2 \longrightarrow \bar{P}_2 \\
\bar{Q}_1 \longrightarrow \bar{Q}_2 \longrightarrow \bar{P}_2
\end{array}
$$

Az első átalakítássorozat a felső lap, a második pedig az alsó lap kommutativitását bizonyítja. □

Tegyük fel, hogy adott a következő diagram, ahol a sorok egzaktak, és minden i-re $r_i \circ s_i = \mathrm{id}_{W_i}$.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, shift right, "r_1"'] & V_2 \arrow[r, "v_2"] \arrow[d, shift right, "r_2"'] & V_3 \arrow[d, shift right, "r_3"'] \\
W_1 \arrow[r, "w_1"] \arrow[u, shift right, "s_1"'] & W_2 \arrow[r, "w_2"] \arrow[u, shift right, "s_2"'] & W_3 \arrow[u, shift right, "s_3"']
\end{tikzcd}$$

Ez a diagram a következő két diagram egymásra rakásával keletkezik:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "r_1"'] & V_2 \arrow[r, "v_2"] \arrow[d, "r_2"'] & V_3 \arrow[d, "r_3"'] \\
W_1 \arrow[r, "w_1"] & W_2 \arrow[r, "w_2"] & W_3
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "v_1"] & V_2 \arrow[r, "v_2"] & V_3 \\
W_1 \arrow[r, "w_1"] \arrow[u, "s_1"'] & W_2 \arrow[r, "w_2"] \arrow[u, "s_2"'] & W_3 \arrow[u, "s_3"']
\end{tikzcd}$$

Vezessük be a $K_i = \operatorname{Ker} r_i$ jelölést.

9. Lemma. *Ha az r_i-ket tartalmazó és az s_i-ket tartalmazó diagram kommutatív (előjeltől letekintve), akkor $v_i(K_i) \subseteq K_{i+1}$ $(i = 1; 2)$, és a K_i-kből álló sorozat egzakt:*

$$K_1 \xrightarrow{v_1|_{K_1}} K_2 \xrightarrow{v_2|_{K_2}} K_3$$

Bizonyítás. Ha $x \in K_i$, azaz $r_i(x) = 0$, akkor $w_i(r_i(x)) = \pm r_{i+1}(v_i(x)) = 0$, tehát $v_i(x) \in K_{i+1}$.

$r_i \circ s_i = \mathrm{id}_{W_i}$ miatt $V_i = K_i \oplus \operatorname{Im} s_i$.

Ha $x \in \operatorname{Im} s_i$, azaz $x = s_i(y)$ valamilyen $y \in W_i$-re, akkor $v_i(x) = v_i(s_i(y)) = \pm s_{i+1}(w_i(y))$, tehát $v_i(x) \in \operatorname{Im} s_{i+1}$. Ez azt jelenti, hogy a

$$V_1 = K_1 \oplus \operatorname{Im} s_1 \xrightarrow{v_1} V_2 = K_2 \oplus \operatorname{Im} s_2 \xrightarrow{v_2} V_3 = K_3 \oplus \operatorname{Im} s_3$$

egzakt sorozatban a homomorfizmusok megtartják a direkt összeadandókat. Az egzaktságból következik, hogy az alábbi két (a komponensekből álló) sorozat is egzakt:

$$K_1 \xrightarrow{v_1|_{K_1}} K_2 \xrightarrow{v_2|_{K_2}} K_3 \qquad \operatorname{Im} s_1 \xrightarrow{v_1|_{\operatorname{Im} s_1}} \operatorname{Im} s_2 \xrightarrow{v_2|_{\operatorname{Im} s_2}} \operatorname{Im} s_3$$

Az előbbi pont a lemma állítását adja. □

Megjegyzés. A W-sorozat egzaktságát nem kellett volna feltennünk, hiszen nem használtuk a bizonyítás folyamán. Sőt, ez ki is jön a bizonyításból, mert a második komponensekből álló sorozat (s_i injektivitása miatt) pont a W-sorozat.

10. Állítás. *Legyen $f : (A, A') \to (B, B')$ 1 fokú leképezés. Ekkor létezik a következő egzakt sorozat:*

$$\longrightarrow K_i(A') \longrightarrow K_i(A) \longrightarrow K_i(A, A') \longrightarrow K_{i-1}(A') \longrightarrow$$

ahol $K_i(A') = \operatorname{Ker}\big((f\big|_{A'})_* : H_i(A') \to H_i(B')\big)$, és a homomorfizmusok az (A, A') pár homologikus egzakt sorozatában szereplő homomorfizmusok leszűkítései.

Felírható ennek a sorozatnak a duálisa is:

$$\longrightarrow K^{i-1}(A') \longrightarrow K^i(A, A') \longrightarrow K^i(A) \longrightarrow K^i(A') \longrightarrow$$

Bizonyítás. Tekintsük a következő diagramot:

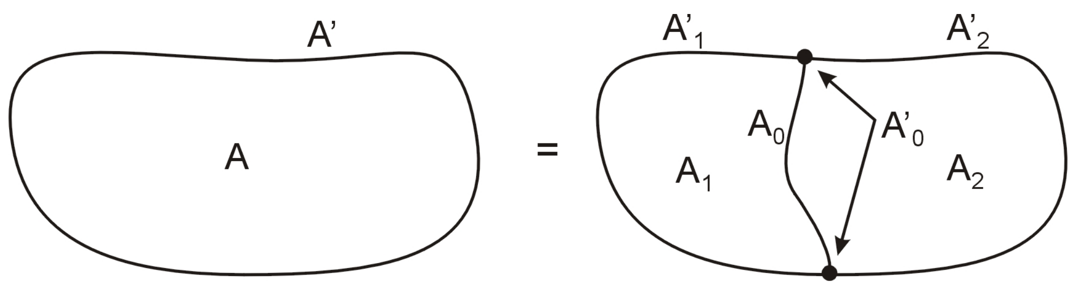
$$\begin{tikzcd}
& H^{i-1}(B') \arrow[rr] \arrow[dl, "f^*"'] \arrow[dd, "{[B']\cap}"] & & H^i(B,B') \arrow[rr] \arrow[dl, "f^*"'] \arrow[dd, "{[B]\cap}"] & & H^i(B) \arrow[rr] \arrow[dl, "f^*"'] \arrow[dd, "{[B]\cap}"] & & H^i(B') \arrow[dl, "f^*"'] \arrow[dd, "{[B']\cap}"] \\
H^{i-1}(A') \arrow[rr] \arrow[ur, dashed] \arrow[dd, "{[A']\cap}"'] & & H^i(A,A') \arrow[rr] \arrow[ur, dashed] \arrow[dd, "{[A]\cap}"'] & & H^i(A) \arrow[rr] \arrow[ur, dashed] \arrow[dd, "{[A]\cap}"'] & & H^i(A') \arrow[ur, dashed] \arrow[dd, "{[A']\cap}"'] & \\
& H_{n-i}(B') \arrow[rr] \arrow[dl, dashed] & & H_{n-i}(B) \arrow[rr] \arrow[dl, dashed] & & H_{n-i}(B,B') \arrow[rr] \arrow[dl, dashed] & & H_{n-i-1}(B') \arrow[dl, dashed] \\
H_{n-i}(A') \arrow[rr] \arrow[ur, "f_*"'] & & H_{n-i}(A) \arrow[rr] \arrow[ur, "f_*"'] & & H_{n-i}(A,A') \arrow[rr] \arrow[ur, "f_*"'] & & H_{n-i-1}(A') \arrow[ur, "f_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Ebben a függőleges nyilak izomorfizmusok (Poincaré-dualitás). A ,,ferde" nyilakat tartalmazó függőleges lapok a $\cap$ szorzás természetessége miatt kommutatívak (a folytonos vonalú nyilakkal). (Az eddigiekből következik a féloldali inverzek, vagyis a szaggatott nyilak létezése.) Az első ill. hátsó lap a Poincaré-dualitás által az (A, A') ill. (B, B') pár homologikus és kohomologikus egzakt sorozata között indukált diagram; ezek előjeltől eltekintve kommutatívak. Az alsó ill. felső lap az f által az (A, A') és (B, B') párok homologikus ill. kohomologikus egzakt sorozatai között indukált diagram; ezek kommutatívak.

Tehát a diagramon szereplő mindhárom kocka összes lapja előjeltől eltekintve kommutatív, ezért mind kielégíti a 8. lemma feltételeit. Ezért a vízszintes lapok kommutatívak (előjeltől eltekintve) a szaggatott nyilakkal is.

Ezért alkalmazható a 9. lemma úgy, hogy a V-sorozat az (A, A') pár homologikus egzakt sorozata, a W-sorozat a (B, B') páré, $r_i = f_*$, és s_i az f_* jobbinverze. Eredményül pont az állításban szereplő egzakt sorozat létezését kapjuk.

A kohomologikus egzakt sorozat ennek a Poincaré-duálisa. (Vagy bebizonyítható úgy is, hogy a 9. lemmát a diagramban szereplő kohomologikus egzakt sorozatatokra alkalmazzuk, az $s_i = f^*$ választással). $\square$



1. ábra

Definíció. Ha (A, A') n-dimenziós Poincaré-pár, $A = A_1 \cup A_2$, $A_0 = A_1 \cap A_2$, $A'_i = A_i \cap A'$, $(A_1, A'_1 \cup A_0)$ és $(A_2, A'_2 \cup A_0)$ n-dimenziós, (A_0, A'_0) pedig $(n-1)$-dimenziós Poincaré-pár, akkor azt mondjuk, hogy (A, A') az $(A_1, A'_1 \cup A_0)$ és $(A_2, A'_2 \cup A_0)$ összege (A_0, A'_0) mentén (1. ábra).

Ennek speciális esete sokaságok összefüggő uniója ill. perem menti összefüggő uniója. Az M és N n-dimenziós sokaságok összefüggő uniója, $M \# N$, az a sokaság, amit úgy kapunk, hogy M és N belsejéből kivágunk egy kis D^n golyót, és a keletkező S^{n-1} peremeket egy irányításváltó diffeomorfizmussal azonosítjuk. Hasonlóan ha M és N pereme nem üres, akkor vehetjük $M \#_\partial N$-t, a perem menti összefüggő uniójukat: kivágjuk egy $(D^n_+, D^{n-1}) \to (M, \partial M)$ és $(D^n_+, D^{n-1}) \to (N, \partial N)$ leképezés képét, és a keletkező S^{n-1}_+ peremeket azonosítjuk. Ezeknek a konstrukcióknak a megfelelői elvégezhetők n-dimenziós Poincaré-terekre ill. párokra is (ld. Wall [13]).

Tegyük fel, hogy (A, A') az $(A_1, A'_1 \cup A_0)$ és $(A_2, A'_2 \cup A_0)$ összege (A_0, A'_0) mentén, (B, B') pedig az $(B_1, B'_1 \cup B_0)$ és $(B_2, B'_2 \cup B_0)$ összege (B_0, B'_0) mentén. Legyen $f : (A, A') \to (B, B')$ 1 fokú leképezés, amire $f(A_i) \subseteq B_i$. (Ekkor $f\big|_{(A_i, \partial A_i)} : (A_i, \partial A_i) \to (B_i, \partial B_i)$ is 1 fokú.)

11. Állítás. *Ekkor létezik egy ilyen egzakt sorozat:*

$$K_i(A_0) \longrightarrow K_i(A_1) \oplus K_i(A_2) \longrightarrow K_i(A) \longrightarrow K_{i-1}(A_0)$$

Illetve a duálisa:

$$K^{i-1}(A_0, A_0') \longrightarrow K^i(A_1, A_1' \cup A_0) \oplus K^i(A_2, A_2' \cup A_0) \longrightarrow K^i(A, A') \longrightarrow K^i(A_0, A_0')$$

Bizonyítás. Tekintsük az $A = A_1 \cup A_2$ felbontás homologikus Mayer-Vietoris sorozatát, és ennek a duálisát:

$$\begin{tikzcd}
H^{i-1}(A_0, A_0') \arrow[r] \arrow[d, "{[A_0]\cap}"] & H^i(A_1, A_1' \cup A_0) \oplus H^i(A_2, A_2' \cup A_0) \arrow[r] \arrow[d, "{([A_1]\cap)\oplus([A_2]\cap)}"] & H^i(A, A') \arrow[r] \arrow[d, "{[A]\cap}"] & H^i(A_0, A_0') \arrow[d, "{[A_0]\cap}"] \\
H_{n-i}(A_0) \arrow[r] & H_{n-i}(A_1) \oplus H_{n-i}(A_2) \arrow[r] & H_{n-i}(A) \arrow[r] & H_{n-i-1}(A_0)
\end{tikzcd}$$

Ebből elkészíthető egy, az előző állításban szereplőhöz hasonló kockás diagram, ahol minden lap kommutatív. A 8. és a 9. lemmából következik az állítás. □

2.3. Vektornyalábok a gömbön, speciális ortogonális csoportok és Stiefel-sokaságok

Definíció. Legyen ξ egy k-dimenziós vektornyaláb S^n felett. S^n felbontható két, a peremüknél összeragasztott D^n uniójára, ezek felett ξ triviális, és (homotópia erejéig) egyértelmű a trivializálása. A két trivializálás eltérése a közös peremen megad egy $S^{n-1} \to SO_k$ leképezést, ez ξ karakterisztikus leképezése. Ennek a homotópiaosztálya egyértelmű, ezt jelölje $\mathfrak{o}(\xi) \in \pi_{n-1}(SO_k)$.

A karakterisztikus leképezés meghatároz egy bijekciót az S^n feletti k-dimenziós vektornyalábok és $\pi_{n-1}(SO_k)$ között.

Jelölés. $G_k(R^n)$ az R^n irányított k-dimenziós altereiből álló Grassmann-sokaság.

Az $ESO_k \xrightarrow{SO_k} BSO_k$ univerzális principális SO_k-nyaláb bázistere $BSO_k = G_k(R^\infty)$. Egy S^n feletti k-dimenziós ξ vektornyaláb Gauss-leképezése a ξ-t az univerzális nyalábból indukáló (homotópia erejéig egyértelmű) $S^n \to BSO_k$ leképezés. Ez megad egy bijekciót a vektornyalábok és $\pi_n(BSO_k)$ elemei között.

Az $ESO_k \xrightarrow{SO_k} BSO_k$ nyaláb homotopikus egzakt sorozatában a határleképezés izomorfizmus $\pi_n(BSO_k)$ és $\pi_{n-1}(SO_k)$ között (mert ESO_k pontrahúzható). Ez az izomorfizmus az S^n feletti vektornyalábok Gauss- és karakterisztikus leképezését felelteti meg egymásnak.

Jelölés. A $V_k(R^n)$ Stiefel-sokaság az R^n-beli ortonormált vektor-k-asok tere.

Ennek speciális esetei az ortogonális csoport ($V_k(R^k) = O_k$), a speciális ortogonális csoport ($V_{k-1}(R^k) \approx SO_k$, mert egy ortonormált vektor $(k-1)$-es egyértelműen egészíthető ki pozitív irányítású ortonormált bázissá) és a gömb ($V_1(R^k) = S^{k-1}$).

Minden $a \leq b$ és c pozitív egész esetén létezik egy $p : V_{a+c}(R^{b+c}) \xrightarrow{V_a(R^b)} V_c(R^{b+c})$ nyaláb. p egy vektor-$(a+c)$-eshez az első c vektorát rendeli, a $V_a(R^b) \to V_{a+c}(R^{b+c})$ beágyazás pedig $(v_1, v_2, \ldots, v_a)$-t $(e_{b+1}, e_{b+2}, \ldots, e_{b+c}, v_1, v_2, \ldots, v_a)$-ba viszi, ahol e_i az R^{b+c} standard bázisának i. vektorát jelöli.

Tekintsük az $SO_{k+1} \xrightarrow{SO_k} S^k$ nyaláb homotopikus egzakt sorozatát:

$$\pi_{i+1}(S^k) \xrightarrow{\partial} \pi_i(SO_k) \xrightarrow{j_*} \pi_i(SO_{k+1}) \xrightarrow{p_*} \pi_i(S^k)$$

ahol $j : SO_k \to SO_{k+1}$ a beágyazás és $p : SO_{k+1} \to S^k$ a vetítés.

Ha $i + 1 < k$, akkor $\pi_{i+1}(S^k) = \pi_i(S^k) = 0$, ezért $\pi_i(SO_k) \cong \pi_i(SO_{k+1})$. Tehát $\pi_i(SO_{i+2}) \cong \pi_i(SO_{i+3}) \cong \ldots$, és az izomorfizmusokat a beágyazások indukálják.

Az $i = k-1$ esetben $\pi_{k-1}(S^k) = 0$ miatt $j_* : \pi_{k-1}(SO_k) \to \pi_{k-1}(SO_{k+1})$ szürjektív. A magja a ∂ határleképezés képe. Mivel $\pi_k(S^k) \cong Z$, és egy generátora $[\mathrm{id}_{S^k}]$, az identikus $S^k \to S^k$ leképezés homotópiaosztálya, ezért ezt $\partial([\mathrm{id}_{S^k}])$ generálja.

12. Állítás. $\partial([\mathrm{id}_{S^k}]) = \mathfrak{o}(\mathcal{T}S^k) \in \pi_{k-1}(SO_k)$.

Bizonyítás. A fibrálás egzakt sorozata nem más, mint az (SO_{k+1}, SO_k) pár egzakt sorozata, figyelembe véve, hogy $\pi_i(SO_{k+1}, SO_k) \cong \pi_i(S^k)$. Az $[\mathrm{id}_{S^k}]$-nak megfelelő elemet egy olyan $f : (D^k, S^{k-1}) \to (SO_{k+1}, SO_k)$ leképezés reprezentálja, amire $p \circ f : D^k \to S^k$ a peremet 1 pontba vivő faktorleképezés. Ekkor tetszőleges $x \in \mathrm{int}\, D^k = S^k \setminus *$ pont esetén $f(x)$ egy olyan bázis R^{k+1}-ben, aminek az első vektora x, tehát a maradék egy bázis a $\mathcal{T}_x S^k$ érintőtérben. Így $f\big|_{\mathrm{int}\, D^k}$ megadja $\mathcal{T}S^k$ trivializálását 1 ponton (vagy annak egy kis környezetén) kívül. $\partial[f] = [f\big|_{S^{k-1}}] \in \pi_{k-1}(SO_k)$ pedig ennek a trivializálásnak és a pontbeli (vagy a pont egy kis környezetén adott) trivializálásnak az eltérése, vagyis $\mathfrak{o}(\mathcal{T}S^k)$. □

Hasonlóan tekintsük a $V_2(R^{k+1}) \xrightarrow{S^{k-1}} S^k$ nyaláb homotopikus egzakt sorozatát:

$$\pi_k(S^k) \xrightarrow{\partial'} \pi_{k-1}(S^{k-1}) \xrightarrow{j'_*} \pi_{k-1}(V_2(R^{k+1})) \xrightarrow{p'_*} \pi_{k-1}(S^k)$$

13. Állítás. $\partial'([\mathrm{id}_{S^k}]) = \chi(S^k)[\mathrm{id}_{S^{k-1}}] \in \pi_{k-1}(S^{k-1})$.

Bizonyítás. Ezt az előző állításhoz hasonlóan bizonyítjuk, most azt használva, hogy a p' projekció egy $\pi_k(V_2(R^{k+1}), S^{k-1}) \cong \pi_k(S^k)$ izomorfizmust indukál. Vegyük $[\mathrm{id}_{S^k}]$ egy $f : (D^k, S^{k-1}) \to (V_2(R^{k+1}), S^{k-1})$ reprezentánsát. Ez minden $x \in S^k \setminus *$ ponthoz egy olyan ortonormált vektorpárt rendel, aminek az első vektora x. Tehát a második vektor meghatároz egy nem nulla érintő vektormezőt $(S^k \setminus *)$-on. $\partial'([f]) \in \pi_{k-1}(S^{k-1}) \cong Z$ ennek a vektormezőnek az indexe a kihagyott pont körül, ami a Poincaré-Hopf tétel szerint megegyezik S^k Euler-karakterisztikájával. Tehát $\partial'([\mathrm{id}_{S^k}]) = \chi(S^k)[\mathrm{id}_{S^{k-1}}]$. □

14. Állítás. $p_*(\mathfrak{o}(\mathcal{T}S^k)) = p_* \circ \partial\,([\mathrm{id}_{S^k}]) = \chi(S^k)[\mathrm{id}_{S^{k-1}}]$.

Bizonyítás. Az első egyenlőség a 12. állításból következik. A második pedig abból, hogy az $SO_{k+1} \to V_2(R^{k+1})$ vetítés egy kommutatív diagramot indukál a két egzakt sorozat között:

$$\begin{tikzcd}
\pi_k(S^k) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & \pi_{k-1}(SO_k) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "p_*"'] & \pi_{k-1}(SO_{k+1}) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d] & \pi_{k-1}(S^k) \arrow[d, equal] \\
\pi_k(S^k) \arrow[r, "\partial'"] & \pi_{k-1}(S^{k-1}) \arrow[r, "j'_*"] & \pi_{k-1}(V_2(R^{k+1})) \arrow[r, "p'_*"] & \pi_{k-1}(S^k)
\end{tikzcd}$$

Ebből leolvasható, hogy $p_* \circ \partial = \partial'$, és alkalmazható a 13. állítás. □

15. Állítás.

$$\pi_i(V_k(R^{m+k})) \cong \begin{cases} 0 & \text{ha } i < m \text{ és } k \geq 1 \\ Z & \text{ha } i = m \text{ páros és } k \geq 2 \\ Z_2 & \text{ha } i = m \text{ páratlan és } k \geq 2 \end{cases}$$

Bizonyítás. k szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.

Ha $k = 1$ és $i < m$, akkor $V_1(R^{m+1}) = S^m$ és $\pi_i(V_1(R^{m+1})) = \pi_i(S^m) = 0$. Ha $k = 2$ és $i = m$, akkor a $V_2(R^{m+2}) \xrightarrow{S^m} S^{m+1}$ nyaláb egzakt sorozata:

$$\pi_{m+1}(S^{m+1}) \xrightarrow{\partial'} \pi_m(S^m) \xrightarrow{j'_*} \pi_m(V_2(R^{m+2})) \xrightarrow{p'_*} \pi_m(S^{m+1})$$

Ebben az első két csoport Z, az utolsó pedig 0. A 13. állítás szerint ∂' a $\chi(S^{m+1})$-el való szorzás, ezért $\pi_m(V_2(R^{m+2})) \cong Z/\chi(S^{m+1})Z$. Ez Z, ha m páros, és Z_2, ha m páratlan.

Ha $k \geq 1$ és $i < m$, vagy $k \geq 2$ és $i = m$, akkor $\pi_i(V_k(R^{m+k})) \cong \pi_i(V_{k+1}(R^{m+k+1}))$, ugyanis a $V_{k+1}(R^{m+k+1}) \xrightarrow{V_k(R^{m+k})} S^{m+k}$ nyaláb homotopikus egzakt sorozatában a két szélső tag 0:

$$\pi_{i+1}(S^{m+k}) \longrightarrow \pi_i(V_k(R^{m+k})) \longrightarrow \pi_i(V_{k+1}(R^{m+k+1})) \longrightarrow \pi_i(S^{m+k}) \quad \square$$

2.4. Normál átépítések

Legyen M n-dimenziós sokaság, ekkor definiálható az M stabil normálnyalábja: Legyen k nagy (legalább $n+2$). Ekkor létezik $(M, \partial M) \hookrightarrow (R_+^{n+k}, R^{n+k-1})$ beágyazás (amiről azt is feltehetjük, hogy R^{n+k-1}-re transzverzális), és bármely két ilyen izotóp. Ezért a normálnyalábjuk nem függ a beágyazástól, csak M-től, ez M k-dimenziós normálnyalábja.

Ez minden elég nagy k-ra létezik, és ha $l > k$, akkor az l-dimenziós normálnyaláb előáll, mint a k-dimenziós normálnyaláb és az ε^{l-k} triviális nyaláb Whitney-összege (mert egy R^{n+k}-ba való beágyazás tekinthető R^{n+l}-be menőnek is). M k-dimenziós normálnyalábjának leszűkítése ∂M-re a perem k-dimenziós normálnyalábja.

Definíció. Legyen M egy n-dimenziós sokaság, ν a stabil (k-dimenziós) normálnyalábja, (X, Y) tetszőleges térpár, és ξ egy k-dimenziós nyaláb X felett. (f, b) egy normál leképezés, ha $f : (M, \partial M) \to (X, Y)$ és $b : \nu \to \xi$ egy f feletti nyalábleképezés.

$$\begin{array}{ccc} \nu & \xrightarrow{b} & \xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Tehát ekkor ν izomorf $f^*\xi$-vel, és b meghatároz köztük egy konkrét izomorfizmust. (Sőt, egy f feletti b megadása egyenértékű egy $\nu \to f^*\xi$ izomorfizmus megadásával.)

Definíció. (f, b) 1 fokú normál leképezés, ha (X, Y) n-dimenziós Poincaré-pár, és $f : (M, \partial M) \to (X, Y)$ 1 fokú leképezés.

Definíció. M és M' n-dimenziós sokaságok kobordánsak, ha létezik olyan W $(n+1)$-dimenziós sokaság, amire $\partial W = M \cup U \cup (-M')$, ahol $\partial U = \partial M \sqcup (-\partial M')$ (vagy ha M és M' zárt, akkor $U = \emptyset$).

M és M' relatív kobordánsak, ha $U \approx \partial M \times [0, 1]$ (ekkor $\partial M' \approx \partial M$).

Definíció. Az (f, b) és (f', b') normál leképezések (ahol $f : (M, \partial M) \to (X, Y)$, $f' : (M', \partial M') \to (X, Y))$ normál kobordánsak, ha létezik egy W kobordizmus M és M' között, $F : (W, U) \to (X, Y)$, és $c : \omega \to \xi$ az F felett (ahol ω a W normálnyalábja) úgy, hogy (F, c) leszűkítései M-re és M'-re (f, b) és (f', b').

(f, b) és (f', b') relatív normál kobordánsak, ha W relatív kobordizmus, és (F, c) leszűkítése $U \approx \partial M \times [0, 1]$-re megegyezik az $\partial M \times [0, 1] \to \partial M$ vetítés és (f, b) ∂M-re vett leszűkítésének kompozíciójával (ekkor (f, b) és (f', b') peremre vett leszűkítései megegyeznek).

16. Állítás. *Ha (f, b) 1 fokú normál leképezés, és (f', b') normál kobordáns vele, akkor f' is 1 fokú.*

Bizonyítás. Legyen $F : (W, U) \to (X, Y)$ az f és f' közötti normál kobordizmus. F indukál $H_*(W) \to H_*(X)$ és $H_*(\partial W, U) \to H_*(X, Y)$ homomorfizmusokat, mindkettőt F_*-gal jelöljük. A beágyazásokat jelölje $i : X \hookrightarrow (X, Y)$, $j : \partial W \hookrightarrow (\partial W, U)$, $h : (M, \partial M) \hookrightarrow (\partial W, U)$, és $h' : (M', \partial M') \hookrightarrow (\partial W, U)$.

$i_*(F_*([W])) = 0$ (mert $H_{n+1}(X, Y) = 0$), ezért $i_*(F_*([\partial W])) = \partial i_*(F_*([W])) = 0$. $i_*(F_*([\partial W])) = F_*(j_*([\partial W]))$ és $j_*([\partial W]) = h_*([M]) - h'_*([M'])$, ezért $F_*(h_*([M])) - F_*(h'_*([M'])) = 0$. Mivel $F_*(h_*([M])) = f_*([M])$ és $F_*(h'_*([M'])) = f'_*([M'])$, ez azt jelenti, hogy $f'_*([M']) = f_*([M]) = [X]$, tehát f' 1 fokú. $\square$

Definíció (Átépítés)**.** Legyen M egy n-dimenziós sokaság, és $\varphi : S^p \times D^{n-p} \hookrightarrow \operatorname{int} M$ beágyazás ($0 \le p \le n - 1$). Ekkor M-et átépíthetjük φ mentén egy $M' = M \setminus \operatorname{int} \varphi(S^p \times D^{n-p}) \cup D^{p+1} \times S^{n-p-1}$ sokasággá (ahol az unió $\varphi(S^p \times S^{n-p-1})$ és $S^p \times S^{n-p-1}$ összeragasztását jelenti).

M' relatív kobordáns M-mel, $W = M \times [0, 1] \underset{\varphi \times \{1\}}{\cup} D^{p+1} \times D^{n-p}$ egy kobordizmus köztük. M'-n és W-n megadható sima struktúra, tehát ezeket is tekinthetjük sima sokaságoknak.

Erről az eljárásról részletesebb leírás található pl. Milnor [9] könyvében.

Definíció (Normál átépítés)**.** Legyen (f, b) normál leképezés, $\varphi_0 : S^p \hookrightarrow \operatorname{int} M$ beágyazás, és $\bar{f} : M \underset{\varphi_0}{\cup} D^{p+1} = \bar{M} \to X$. Ha φ_0 kiterjed egy $\varphi : S^p \times D^{n-p} \hookrightarrow \operatorname{int} M$ beágyazássá, akkor ementén végezhetünk egy átépítést. Ekkor $\bar{f}$ kiterjed egy $F : (W, \partial M \times [0, 1]) \to (X, Y)$ leképezéssé (mert $\bar{M}$ deformációs retraktuma W-nek).

Ha b is kiterjed egy $c : \omega \to \xi$ leképezéssé F felett, akkor ezt a konstrukciót normál átépítésnek nevezzük.

Ebben az esetben (F, c) egy relatív normál kobordizmus (f, b) és (f', b') között, ahol $f' = F\big|_{M'}$ és $b' = c\big|_{\nu_{M'}}$.

Megvizsgáljuk, hogy mikor lehet egy adott $\bar{f}$ leképezésből kiindulva normál átépítést végezni, azaz φ_0-nak ill. b-nek mikor létezik φ ill. c kiterjesztése.

Definíció. Vegyünk egy $i : M \hookrightarrow R^{n+k}$ beágyazást, és ennek egy $\bar{i} : \bar{M} \hookrightarrow R^{n+k+1}$ kiterjesztését úgy, hogy $\bar{i}\big|_{D^{p+1}}$ merőleges R^{n+k}-ra. Jelölje D^{p+1} normálnyalábját R^{n+k+1}-ben γ, ez triviális, és a trivializálása (homotópia erejéig) egyértelmű. γ leszűkítése kijelöli $i(\varphi_0(S^p))$ R^{n+k}-beli normálnyalábjának egy trivializálását.

Mivel $f \circ \varphi_0$ nullhomotóp (és $\bar{f}\big|_{D^{p+1}}$ megad egy homotópiát $f \circ \varphi_0$ és a konstans leképezés között), ezért $\nu\big|_{\varphi_0(S^p)} \cong \left(f\big|_{\varphi_0(S^p)}\right)^* \xi$ triviális (ahol ν az M normálnyalábját jelöli), és $\bar{f}\big|_{D^{p+1}}$ és b meghatározza egy trivializálását (homotópia erejéig). $\nu\big|_{\varphi_0(S^p)}$ tehát egy trivializált résznyalábja a (szintén trivializált) $\gamma\big|_{S^p}$ nyalábnak, ezért S^p minden pontjához kijelöli $V_k(R^{n+k-p})$ egy elemét. Az így kapott (homotópia erejéig definiált) o leképezés homotópiaosztálya legyen $\mathfrak{o} \in \pi_p(V_k(R^{n+k-p}))$.

17. Tétel. *φ_0-nak ill. b-nek létezik φ ill. c kiterjesztése* $\Leftrightarrow \mathfrak{o} = 0$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy léteznek a megfelelő kiterjesztések, azaz tudunk normál átépítést végezni. Terjesszük ki $\bar{i}$-t egy $W \hookrightarrow R^{n+k+1}$ beágyazássá. Ekkor W normálnyalábjának leszűkítése, $\omega\big|_{D^{p+1}} \cong \left(\bar{f}\big|_{D^{p+1}}\right)^* \xi$ triviális, és az egyetlen trivializálása kiterjesztése $\nu\big|_{\varphi_0(S^p)}$ korábban definiált trivializálásának. Mivel ez résznyalábja γ-nak, ezért a trivializálása D^{p+1} minden pontjában meghatározza $V_k(R^{n+k-p})$ egy elemét, és az így kapott leképezés kiterjesztése o-nak. Tehát $\mathfrak{o} = 0$.

Most tegyük fel, hogy $\mathfrak{o} = 0$. Ekkor o kiterjed egy $D^{p+1} \to V_k(R^{n+k-p})$ leképezéssé. Ez meghatározza γ egy k-dimenziós trivializált γ' résznyalábját, aminek a leszűkítése $\nu\big|_{\varphi_0(S^p)}$, a korábban definiált trivializálással. Ezért γ' és ν összeragasztható egy $\bar{M}$ feletti $\bar{\nu}$ nyalábbá, és b kiterjeszthető egy $\bar{f}$ feletti $\bar{b} : \bar{\nu} \to \xi$ leképezéssé.

Legyen γ' ortogonális kiegészítője γ''. Ez D^{p+1} feletti nyaláb, tehát triviális, és egyértelmű a trivializálása. A leszűkítése $\varphi_0(S^p)$ M-beli normálnyalábja, aminek így szintén megkapjuk egy trivializálását. Ez meghatározza φ_0 egy kiterjesztését

φ-vé. Az ebből kapott W beágyazható R^{n+k+1}-be úgy, hogy $D^{p+1} \times D^{n-p}$-t γ'' golyónyalábjával azonosítjuk. Így W normálnyalábjának leszűkítése $\omega\big|_{\bar{M}} = \bar{\nu}$. És mivel $\bar{M}$ deformációs retraktuma W-nek, ezért $\bar{b}$ kiterjed egy $c : \omega \to \xi$ leképezéssé. $\square$

Abban az esetben, ha $\mathfrak{o} = 0$, volt egy választási lehetőségünk: az o nullhomotópiáját megadó $D^{p+1} \to V_k(R^{n+k-p})$ leképezés nem feltétlenül egyértelmű. Ha másik nullhomotópiát választunk, akkor megváltozik γ' és γ'', és az új γ'' trivializálása φ_0 egy másik φ-vé való kiterjesztését határozza meg. Megvizsgáljuk, hogy milyen φ-k kaphatóak így meg, azaz φ_0 mely kiterjesztéseivel végezhető normál átépítés. Két kiterjesztésnek, azaz $\varphi_0(S^p)$ M-beli normálnyalábja két trivializálásának eltérése leírható egy $\alpha : S^p \to SO_{n-p}$ leképezéssel, illetve ennek $[\alpha] \in \pi_p(SO_{n-p})$ homotópiaosztályával.

Most tehát tegyük fel, hogy $\mathfrak{o} = 0$, és rögzítsünk egy $\varphi : S^p \times D^{n-p} \hookrightarrow M$ beágyazást, ami normál átépítést határoz meg. Az előzőek szerint ez azt jelenti, hogy γ felbomlik γ' és γ'' összegére úgy, hogy γ' trivializálásának peremre vett leszűkítése megegyezik $\nu\big|_{\varphi_0(S^p)}$ előre adott trivializálásával, γ'' trivializálásának peremre vett leszűkítése pedig $\varphi_0(S^p)$ M-beli normálnyalábjának φ által meghatározott trivializálása.

Legyen $\alpha : S^p \to SO_{n-p}$ és $\varphi_\alpha : S^p \times D^{n-p} \hookrightarrow M$ a $\varphi_\alpha(x, y) = \varphi(x, \alpha(x)y)$ képlettel adott beágyazás.

18. Állítás. *φ_α-val normál átépítés végezhető $\Leftrightarrow$ $j_*([\alpha]) = 0$, ahol $j : SO_{n-p} \hookrightarrow SO_{n+k-p}$ a beágyazás.*

Bizonyítás. Az, hogy φ_α-val normál átépítés végezhető, ekvivalens azzal, hogy γ felbomlik γ'_α és γ''_α összegére, ahol γ'_α és γ' trivializálásának peremre vett leszűkítése megegyezik, γ''_α trivializálásának leszűkítése pedig $\varphi_0(S^p)$ M-beli normálnyalábjának φ_α által meghatározott trivializálása.

Ez azzal ekvivalens, hogy létezik olyan $D^{p+1} \to SO_{n+k-p}$ leképezés, ami a peremen az első k vektort helyben hagyja, a többi $(n-p)$-t pedig α-nak megfelelően változtatja meg (ugyanis egy ilyen leképezés felelteti meg egymásnak γ két, $\gamma' \oplus \gamma''$ és $\gamma'_\alpha \oplus \gamma''_\alpha$ alakú felbontását).

Egy ilyen leképezés létezése pedig pontosan azt jelenti, hogy $j \circ \alpha$ nullhomotóp, azaz $j_*([\alpha]) = 0$. $\square$

2.5. A Spivak normál fibrálás és az S-dualitás

Egy M n-dimenziós sokaság k-dimenziós stabil normálnyalábja (nagy k esetén) definíció szerint egy $(M, \partial M) \hookrightarrow (R_+^{n+k}, R^{n+k-1})$ beágyazás normálnyalábja. Egy ilyen beágyazás tekinthető (D^{n+k}, S^{n+k-1})-be menőnek is. A beágyazás egy csőszerű környezete azonosítható a ν normálnyaláb $D\nu$ golyónyalábjával. Ekkor van egy olyan $(D^{n+k}, S^{n+k-1}) \to (T\nu, T\nu\big|_{\partial M})$ leképezés, ami $(\operatorname{int} D\nu)$-n identikus, és minden mást 1 pontba képez, ez reprezentál egy $\alpha \in \pi_{n+k}(T\nu, T\nu\big|_{\partial M})$ elemet (ahol $T\nu = D\nu/S\nu$ a ν Thom terét jelöli). Erre teljesül, hogy $h(\alpha) \cap u_\nu = [M]$ (ahol $h : \pi_{n+k}(T\nu, T\nu\big|_{\partial M}) \to H_{n+k}(T\nu, T\nu\big|_{\partial M}) = H_{n+k}(D\nu, S\nu \cup D\nu\big|_{\partial M})$ a Hurewicz-homomorfizmus, $u_\nu \in H^k(T\nu) = H^k(D\nu, S\nu)$ a ν Thom-osztálya, $[M] \in H_n(M, \partial M) \cong H_n(D\nu, D\nu\big|_{\partial M})$ pedig az M fundamentális osztálya).

A normálnyaláb fogalma, és az utóbbi tulajdonsága általánosítható tetszőleges Poincaré-térre (ill. párra) is (ld. Browder [1], [2]).

Ha $\pi : \eta \to X$ egy S^{k-1}-fibrálás (azaz olyan Serre-fibrálás, aminek a fibruma homotopikusan ekvivalens S^{k-1}-gyel), akkor definiálható η Thom-tere: $T\eta = C_\pi/\eta$. Érvényes a Thom-izomorfizmus megfelelője: létezik egy olyan $u_\eta \in H^k(T\eta) \cong H^k(C_\pi, \eta)$, amire $(u_\eta \cup\ ) : H^i(C_\pi) \cong H^i(X) \to H^{k+i}(T\eta)$ izomorfizmus minden i-re.

Tétel. *Ha (X, Y) n-dimenziós Poincaré-pár, X egyszeresen összefüggő, és k elég nagy, akkor létezik olyan η S^{k-1}-fibrálás, amihez létezik olyan $\alpha \in \pi_{n+k}(T\eta, T\eta\big|_Y)$, hogy $h(\alpha) \cap u_\eta = [X]$.*

Ezt hívjuk (X, Y) Spivak normálnyalábjának. Ez homotopikusan egyértelmű:

Tétel. *Ha η_1 és η_2 két S^{k-1}-fibrálás (X, Y) felett, és az $\alpha_i \in \pi_{n+k}(T\eta_i, T\eta_i\big|_Y)$ elemekre $h(\alpha_i) \cap u_{\eta_i} = [X]$, akkor létezik egy olyan $b : \eta_1 \to \eta_2$ fibrumtartó homotopikus ekvivalencia, amire $T(b)_*(\alpha_1) = \alpha_2$, (ahol $T(b)$ a b által a Thom-tereken indukált leképezés).*

19. Állítás. *Ha (X, Y) homotopikusan ekvivalens egy sokasággal, akkor a Spivak normál fibrálása egy vektornyaláb gömbnyalábja.*

Bizonyítás. Legyen $f : (M, \partial M) \to (X, Y)$ és $g : (X, Y) \to (M, \partial M)$ homotopikus ekvivalencia, és ν az M k-dimenziós stabil normálnyalábja. Ekkor $\xi = g^*(\nu)$ vektornyaláb X felett és $f^*(\xi) \cong \nu$. Ezért létezik $b : \nu \to \xi$ nyalábleképezés f felett, és ez indukál egy $T(b) : (T\nu, T\nu\big|_{\partial M}) \to (T\xi, T\xi\big|_Y)$ leképezést a Thom-terek között.

Legyen $\alpha \in \pi_{n+k}(T\nu, T\nu\big|_{\partial M})$ a korábban definiált elem, amire $h(\alpha) \cap u_\nu = [M]$. Mivel $f_*([M]) = [X]$, $T(b)_*(h(\alpha)) = h(T(b)_*(\alpha))$ és $T(b)^*(u_\xi) = u_\nu$, ezért $h(T(b)_*(\alpha)) \cap u_\xi = [X]$. Ez azt jelenti, hogy $S\xi$ és $T(b)_*(\alpha)$ kielégíti a feltételt, tehát (X, Y) Spivak normál fibrálása $S\xi$. $\square$

Megjegyzés. A g homotopikus inverz létezését csak a ξ definiálásához használtuk fel. Ezért ha abból indulunk ki, hogy adott egy X feletti ξ vektornyaláb és egy (f, b) 1 fokú normál leképezés, akkor az előbbi gondolatmenet azt mutatja, hogy $S\xi$ az (X, Y) Spivak normál fibrálása (és (f, b) kijelöli $\pi_{n+k}(T\xi, T\xi\big|_Y)$ egy megfelelő elemét).

A következőkben összefoglaljuk a Spanier-féle S-dualitás felhasznált tulajdonságait (ld. Browder [2], Husemoller [4]).

A szuszpenzió minden A és B tér esetén meghatároz egy $[A, B] \to [\Sigma A, \Sigma B]$ leképezést (és az utóbbi halmaz csoport, hiszen ΣA H'-tér). Ez a leképezés bijekció, ha A n-dimenziós CW-komplexus és B $\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)$-összefüggő. Ebből következik, hogy ebben a láncban:

$$[A, B] \longrightarrow [\Sigma A, \Sigma B] \longrightarrow [\Sigma^2 A, \Sigma^2 B] \longrightarrow [\Sigma^3 A, \Sigma^3 B] \longrightarrow \dots$$

(amiben a második nyíltól kezdve a leképezések homomorfizmusok), egy idő után minden leképezés izomorfizmus.

Definíció. $\{A, B\} = \lim\limits_{s \to \infty} [\Sigma^s A, \Sigma^s B]$.

Az előzőek szerint $\{A, B\}$ csoport, és elég nagy s-re $\{A, B\} \cong [\Sigma^s A, \Sigma^s B]$. Egy $f : A \to B$ leképezés reprezentál egy elemet $\{A, B\}$-ben, ezt jelölje $\{f\}$.

Definíció. A és A' m-duális, ha létezik olyan s és t, hogy $\Sigma^s A$ beágyazható $S^{m+1+s+t}$-be, és $\Sigma^t A'$ homotopikusan ekvivalens $(S^{m+1+s+t} \setminus \Sigma^s A)$-val.

Egy ekvivalens definíciót ad a következő tétel:

Tétel. *A és A' pontosan akkor m-duális, ha létezik olyan $\gamma : S^m \to A \wedge A'$ leképezés, amire a $(\gamma_*([S^m])/) : H^i(A) \to H_{m-i}(A')$ homomorfizmus izomorfizmus.*

Ha A és A' ill. B és B' m-duálisak, akkor a dualitást mutató γ ill. γ' leképezések meghatároznak egy izomorfizmust (dualitást) $\{A, B\}$ és $\{B', A'\}$ között.

Tétel. *Legyen γ ill. γ' az A és A' ill. B és B' közötti dualitást mutató leképezés, $f : A \to B$ és $g : B' \to A'$. $\{f\} \in \{A, B\}$ és $\{g\} \in \{B', A'\}$ pontosan akkor duálisak, ha ez a diagram (homotópia erejéig) kommutatív:*

$$\begin{array}{ccc} S^m & \xrightarrow{\gamma} & A \wedge A' \\ \big\downarrow{\scriptstyle \gamma'} & & \big\downarrow{\scriptstyle f\wedge \mathrm{id}} \\ B \wedge B' & \xrightarrow{\mathrm{id}\wedge g} & B \wedge A' \end{array}$$

20. Állítás. *Legyen (X, Y) n-diemnziós Poincaré-pár. Ha η az (X, Y) Spivak normál fibrálása, akkor $T\eta$ és $\Sigma^s(X/Y)$ $(n + k + s)$-duális.*

Bizonyítás. $\Sigma^s(X/Y) \approx T\varepsilon^s/T\varepsilon^s\big|_Y$, tehát erre a térre kell belátnunk a dualitást. Vegyük a $\eta \oplus \varepsilon^s$ fibrálást X felett. Ez az $X \times X$ feletti $\eta \times \varepsilon^s$ fibrálás visszahúzottja a $\Delta : X \to X \times X$ átlóleképezéssel. Legyen $\varrho : \eta \oplus \varepsilon^s \to \eta \times \varepsilon^s$ a Δ feletti leképezés. Δ tekinthető $(X, Y) \to X \times (X, Y)$ párok közti leképezésnek, és hasonló mondható ϱ-ról. A ϱ által a Thom-terek között indukált $T(\varrho)$ leképezés pedig ennek megfelelően $(T(\eta \oplus \varepsilon^s), T(\eta \oplus \varepsilon^s)\big|_Y) \to T\eta \times (T\varepsilon^s, T\varepsilon^s\big|_Y)$ alakú.

$\eta \oplus \varepsilon^s$ az (X, Y) $(k+s)$-dimenziós Spivak normál fibrálása, ezért létezik egy olyan $\alpha \in \pi_{n+k+s}(T(\eta \oplus \varepsilon^s), T(\eta \oplus \varepsilon^s)\big|_Y)$, amire $h(\alpha) \cap u_{\eta\oplus\varepsilon^s} = [X]$. α egy reprezentánsa meghatároz egy $a : S^{n+k+s} \to T(\eta \oplus \varepsilon^s)/T(\eta \oplus \varepsilon^s)\big|_Y$, leképezést, amit $T(\varrho)$-val komponálva kapunk egy $\gamma_0 : S^{n+k+s} \to T\eta \times (T\varepsilon^s/T\varepsilon^s\big|_Y)$ leképezést.

Belátjuk, hogy $((\gamma_0)_*([S^{n+k+s}])/) : H^i(T\eta) \to H_{n+k+s-i}(T\varepsilon^s/T\varepsilon^s\big|_Y)$ izomorfizmus.

$(\gamma_0)_*([S^{n+k+s}]) = T(\varrho)_*(a_*([S^{n+k+s}])) = T(\varrho)_*(h(\alpha))$. $H^*(T\eta)$ minden eleme $x \cup u_\eta$ alakú, ahol $x \in H^*(X)$. $(\cap\, u_{\varepsilon^s}) : H_*(T\varepsilon^s/T\varepsilon^s\big|_Y) \to H_*(X/Y)$ izomorfizmus. Ezért elég belátni, hogy az $x \mapsto (T(\varrho)_*(h(\alpha))/(x \cup u_\eta)) \cap u_{\varepsilon^s}$ képlettel adott $H^*(X) \to H_*(X/Y)$ leképezés izomorfizmus. Azt fogjuk bebizonyítani, hogy ez megegyezik az $([X] \cap\ )$ Poincaré-dualitással.

Legyen p_1 és p_2 a $T\eta\times(T\varepsilon^s/T\varepsilon^s\big|_Y)$ vetítése a két komponensre. ϱ definíciója miatt $T(\varrho)^*(u_\eta\times u_{\varepsilon^s}) = u_{\eta\oplus\varepsilon^s}$. Ezért $T(\varrho)_*(h(\alpha))\cap(u_\eta\times u_{\varepsilon^s}) = \Delta_*(h(\alpha)\cap u_{\eta\oplus\varepsilon^s}) = \Delta_*([X])$. Ezt felhasználva:

$$\begin{aligned}
&\big(T(\varrho)_*(h(\alpha))/(x\cup u_\eta)\big)\cap u_{\varepsilon^s} = (p_2)_*\big(T(\varrho)_*(h(\alpha))\cap(p_1)^*(x\cup u_\eta)\big)\cap u_{\varepsilon^s} =\\
&= (p_2)_*\big(T(\varrho)_*(h(\alpha))\cap\big((p_1)^*x\cup(p_1)^*u_\eta\cup(p_2)^*u_{\varepsilon^s}\big)\big) =\\
&= (p_2)_*\big(\big(T(\varrho)_*(h(\alpha))\cap(u_\eta\times u_{\varepsilon^s})\big)\cap(p_1)^*x\big) = (p_2)_*\big(\Delta_*([X])\cap(p_1)^*x\big) = [X]\cap x
\end{aligned}$$

Tehát $((\gamma_0)_*([S^{n+k+s}])/)$ tényleg izomorfizmus, ezért a γ_0 és a faktorleképezés kompozíciójával kapott $\gamma : S^{n+k+s}\to T\eta\wedge(T\varepsilon^s/T\varepsilon^s\big|_Y)$ leképezés megfelelő. $\square$

Legyen (f,b) 1 fokú normál leképezés, $f:(M,\partial M)\to(X,Y)$, $b:\nu\to\xi$. Ekkor a 19. állítás utáni megjegyzés szerint $S\xi$ az (X,Y) Spivak normál fibrálása, és a normál leképezés kijelöl egy $T(b)_*(\alpha)\in\pi_{n+k}(T\xi,T\xi\big|_Y)$ elemet (ahol $\alpha\in\pi_{n+k}(T\nu,T\nu\big|_{\partial M})$ a fejezet elején konstruált homotópiaosztály).

A 20. állításban láttuk, hogy ekkor α ill. $T(b)_*(\alpha)$ meghatároz egy γ ill. γ' dualitást mutató leképezést $T\nu$ és $\Sigma^s(M/\partial M)$ ill. $T\xi$ és $\Sigma^s(X/Y)$ között. Ezek meghatároznak egy dualitást a leképezések között: $\{T(b)\}\in\{T\nu,T\xi\}$-nek létezik duálisa $\{\Sigma^s(X/Y),\Sigma^s(M/\partial M)\}$-ben, és ez reprezentálható egy $g:\Sigma^s(X/Y)\to\Sigma^s(M/\partial M)$ leképezéssel (ha s elég nagy).

Mivel f 1 fokú, ezért f^*-nak van balinverze, $D_X\circ f_*\circ([M]\cap)$, ezt jelölje ϕ. A szuszpenzió tetszőleges A esetén indukál egy $H^i(A)\to H^i(\Sigma^sA)$ izomorfizmust, ezt is Σ^s-sel jelöljük.

21. Állítás. *$g^*\circ\Sigma^s = \Sigma^s\circ\phi : H^i(M/\partial M)\to H^{i+s}(\Sigma^sX/Y)$.*

Bizonyítás. ϕ definíciója miatt a jobboldal $\Sigma^s\circ D_X\circ f_*\circ([M]\cap)$. Ebben f_*-on kívül minden izomorfizmus, ezért az állítás a következő ekvivalens alakba írható: $([X]\cap)\circ(\Sigma^s)^{-1}\circ g^*\circ\Sigma^s = f_*\circ([M]\cap) : H^i(M/\partial M)\to H_{n-i}(X)$.

Jelölje az M ill. X feletti triviális nyaláb Thom-osztályát u_M ill. u_X. $\Sigma^s(M/\partial M)\approx T\varepsilon^s/T\varepsilon^s\big|_{\partial M}$ és $\Sigma^s(X/Y)\approx T\varepsilon^s/T\varepsilon^s\big|_Y$, ezekkel az azonosításokkal $\Sigma^s = (u_M\cup\ ) : H^i(M/\partial M)\to H^{i+s}(\Sigma^s(M/\partial M))$ és $\Sigma^s = (u_X\cup\ ) : H^i(X/Y)\to H^{i+s}(\Sigma^s(X/Y))$.

Legyen $\gamma : S^{n+k+s}\to T\nu\wedge\Sigma^s(M/\partial M)$ és $\gamma' : S^{n+k+s}\to T\xi\wedge\Sigma^s(X/Y)$ az előző állításban megkonstruált, a dualitást mutató leképezés. Ezekről azt láttuk, hogy az $x\mapsto((\gamma)_*([S^{n+k+s}])/(x\cup u_\nu))\cap u_M$ képlettel adott $H^*(M/\partial M)\to H_*(M)$ leképezés megegyezik az $(\,\cap[M])$ Poincaré-dualitással és $y \mapsto ((\gamma')_*([S^{n+k+s}])/(y \cup u_\xi)) \cap u_X$ megegyezik az $(\,\cap[X])$-el.

g a $T(b)$ duálisa, ezért a következő diagram homotópia erejéig kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} S^{n+k+s} & \xrightarrow{\gamma} & T\nu \wedge \Sigma^s(M/\partial M) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle T(b)\wedge \mathrm{id}} \\ T\xi \wedge \Sigma^s(X/Y) & \xrightarrow{\mathrm{id}\wedge g} & T\xi \wedge \Sigma^s(M/\partial M) \end{array}$$

Ez azt jelenti, hogy mindkét kompozíciónál a homológiákon indukált homomorfizmusok ugyanabba a $z \in H_{n+k+s}(T\xi \wedge \Sigma^s(M/\partial M))$ elembe viszik $[S^{n+k+s}]$-et.

$H^{i+s}(\Sigma^s(M/\partial M))$ elemei $x \cup u_M$ alakúak, ahol $x \in H^i(M/\partial M)$. $z/(x \cup u_M)$-et a diagram alapján kétféleképpen is kiszámolhatjuk, eredményül azt kapjuk, hogy $T(b)_*\big(\gamma_*([S^{n+k+s}])/(x \cup u_M)\big) = \gamma'_*([S^{n+k+s}])/g^*(x \cup u_M) \in H_{n+k-i}(T\xi)$. Mindkét oldalra alkalmazzuk $(\,\cap u_\xi)$-t:

$$T(b)_*\big(\gamma_*([S^{n+k+s}])/(x \cup u_M)\big) \cap u_\xi = \gamma'_*([S^{n+k+s}])/g^*(x \cup u_M) \cap u_\xi \in H_{n-i}(X)$$

A baloldal $f_*\big(\gamma_*([S^{n+k+s}])/(x \cup u_M) \cap T(b)^*(u_\xi)\big)$, ami $T(b)^*(u_\xi) = u_\nu$ miatt $f_*\big(\gamma_*([S^{n+k+s}])/(x \cup u_M) \cap u_\nu\big) = f_*([M] \cap x)$.

A jobboldalon $g^*(x \cup u_M) = y \cup u_X$ valamilyen $y \in H^i(X/Y)$-ra. Ezzel a jobboldal $(\gamma'_*([S^{n+k+s}])/y \cup u_X) \cap u_\xi = [X] \cap y$. Mivel $y = (\Sigma^s)^{-1} \circ g^* \circ \Sigma^s(x)$, ez nem más, mint $([X]\cap) \circ (\Sigma^s)^{-1} \circ g^* \circ \Sigma^s(x)$. A két oldalt összehasonlítva kapjuk az állítást. $\square$

3. A főtétel bizonyítása

Ebben a részben mondjuk ki és bizonyítjuk a normál átépítések főtételét Browder [2] könyve nyomán.

Végig adottnak tekintünk egy (X, Y) n-dimenziós Poincaré-párt, és X felett egy k-dimenziós vektornyalábot, ahol X egyszeresen összefüggő, $k \gg n$, és $n \geq 5$.

Jelölés. $q = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, tehát $n = 2q$ vagy $n = 2q + 1$, és $q \geq 2$.

Főtétel. *Legyen $f : (M, \partial M) \to (X, Y)$, (f, b) 1 fokú normál leképezés, $\left(f\big|_{\partial M}\right)_* : H_*(\partial M) \to H_*(Y)$ izomorfizmus. (f, b) pontosan akkor relatív normál kobordáns egy olyan (f', b') normál leképezéssel, amelyre $f' : M' \to X$ homotopikus ekvivalencia, ha $\sigma(f, b) = 0$.*

A σ obstrukció olyan normál leképezéseken van értelmezve, amelyek a perem homológiáin izomorfizmust indukálnak. Az értéke páratlan n esetén mindig 0, ha $n = 2q$ és q páros, akkor $\sigma(f, b) \in Z$, és ha q páratlan, akkor $\sigma(f, b) \in Z_2$. σ definíciója az utóbbi két esetben a 37. és a 41. oldalon található. A 4. részben fel fogjuk használni (de nem bizonyítjuk) a következő, σ-ra vonatkozó tételt:

22. Tétel. *Ha $2q > 4$, akkor létezik olyan (g, c) 1 fokú normál leképezés, amire $g : (M, \partial M) \to (D^{2q}, S^{2q-1})$, $c : \nu \to \varepsilon^k$, $g\big|_{\partial M} : \partial M \to S^{2q-1}$ homotopikus ekvivalencia, és $\sigma(g, c)$ egy tetszőleges, előre meghatározott értéket vesz fel.*

Most térjünk rá a főtétel bizonyítására.

Azt, hogy a $\sigma(f, b) = 0$ feltétel szükséges egy ilyen (f', b') létezéséhez a 44. oldalon bizonyítjuk, ez (σ tulajdonságainak ismeretében) a tétel könnyű iránya.

A másik irányt úgy fogjuk bizonyítani, hogy (f, b)-re sorozatos normál átépítéseket alkalmazunk. A célunk az lesz, hogy így elérjünk egy $(q + 1)$-összefüggő leképezést, mert a 2. tétel szerint az már homotopikus ekvivalencia lesz. (A tétel másik feltétele, hogy a leképezés 1 fokú legyen, azért fog teljesülni, mert a 16. állítás miatt 1 fokú normál leképezés átépítés után is 1 fokú lesz, tehát ez a tulajdonság végig megmarad.) Szintén változatlan marad a perem, ezért a peremre vett leszűkítés néhány átépítés után is izomorfizmust fog indukálni a homológiákon. Ezt úgy fogjuk kihasználni, hogy $K_i(\partial M) = 0$ miatt a 10. állítás egzakt sorozatában minden harmadik tag 0, ezért $K_i(M) \cong K_i(M, \partial M)$.

Először bebizonyítjuk, hogy (f, b) átépíthető q-összefüggővé. Utána belátjuk, hogy páratlan n esetén a $(q+1)$-összefüggőség is elérhető. Ezután definiáljuk σ-t és levezetjük a legfontosabb tulajdonságait. Majd belátjuk, hogy páros n esetén $\sigma(f, b) = 0$ szükséges, és elégséges feltétel is.

Az első lemma azt írja le, hogy hogyan változik $\pi_i(f)$ a sokaság normál átépítésekor. Legyen $\lambda \in \pi_p(f)$, ennek egy, az 1. állítással konstruált reprezentánsa $\bar{f}$, és tegyük fel, hogy ebből kiindulva lehet normál átépítést végezni. Legyen $\varphi : S^p \times D^{n-p} \hookrightarrow M$ az a beágyazás, amivel az átépítést csináljuk. Az átépített sokaság legyen M', az új normál leképezés (f', b').

23. Lemma. *Ekkor*

$$\begin{aligned} \pi_i(f') &\cong \pi_i(f) && \textit{ha} \quad i \leq \min(p, n-p-1) \\ \pi_{p+1}(f') &\cong \pi_{p+1}(f)/\Lambda && \textit{ha} \quad p+1 \leq \frac{n}{2} \end{aligned}$$

ahol Λ egy λ-t tartalmazó részcsoport.

Bizonyítás. Legyen $M_0 = M \backslash \varphi(S^p \times D^{n-p})$, és $f_0 = f\big|_{M_0}$, ekkor $C_{f_0} \subset C_f$. Tekintsük a következő diagramot, amit az $(C_{f_0}, M_0) \hookrightarrow (C_f, M)$ beágyazás indukál a párok homotopikus egzakt sorozatai között:

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_i(M_0) & \longrightarrow & \pi_i(C_{f_0}) & \longrightarrow & \pi_i(f_0) & \longrightarrow & \pi_{i-1}(M_0) & \longrightarrow & \pi_{i-1}(C_{f_0}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_i(M) & \longrightarrow & \pi_i(C_f) & \longrightarrow & \pi_i(f) & \longrightarrow & \pi_{i-1}(M) & \longrightarrow & \pi_{i-1}(C_f) \end{array}$$

Mivel $C_{f_0} \simeq X \simeq C_f$, ezért a $\pi_j(C_{f_0}) \to \pi_j(C_f)$ leképezés minden j-re izomorfizmus. $\pi_j(M_0) \to \pi_j(M)$ izomorfizmus, ha $j < n-p-1$ és szürjektív, ha $j = n-p-1$. (Ez belátható az (M, M_0) pár egzakt sorozatával, felhasználva a homotopikus kivágási tételt és azt, hogy az $(S^p \times D^{n-p}, S^p \times S^{n-p-1})$ pár $(n-p-1)$-szeresen összefüggő. Vagy egy másik lehetőség ennek a bizonyítására az, hogy a Thom transzverzalitási tétel miatt egy $S^j \to M$ ill. $S^j \times [0,1] \to M$ leképezésről feltehető, hogy elkerüli $\varphi_0(S^p)$-t, ha $j < n-p$ ill. $j < n-p-1$, tehát $\pi_j(M \setminus \varphi_0(S^p)) \to \pi_j(M)$ szürjektív ill. injektív ezekben a dimenziókban; és $M_0 \simeq M \setminus \varphi_0(S^p)$.)

Tehát (az 5-lemma szerint) $\pi_i(f_0) \to \pi_i(f)$ izomorfizmus, ha $i \leq n-p-1$ és szürjektív, ha $i = n-p$.

Írjuk fel az $(C_{f_0}, M_0) \hookrightarrow (C_{f'}, M')$ beágyazáshoz tartozó hasonló diagramot:

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_i(M_0) & \longrightarrow & \pi_i(C_{f_0}) & \longrightarrow & \pi_i(f_0) & \longrightarrow & \pi_{i-1}(M_0) & \longrightarrow & \pi_{i-1}(C_{f_0}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_i(M') & \longrightarrow & \pi_i(C_{f'}) & \longrightarrow & \pi_i(f') & \longrightarrow & \pi_{i-1}(M') & \longrightarrow & \pi_{i-1}(C_{f'}) \end{array}$$

Itt $\pi_j(C_{f_0}) \to \pi_j(C_{f'})$ minden j-re izomorfizmus, $\pi_j(M_0) \to \pi_j(M')$ pedig izomorfizmus, ha $j < p$ és szürjektív, ha $j = p$. Az 5-lemma szerint a $\pi_i(f_0) \to \pi_i(f')$ leképezés izomorfizmus, ha $i \le p$ és szürjektív, ha $i = p+1$.

Ezeket összerakva, $\pi_i(f) \cong \pi_i(f_0) \cong \pi_i(f')$ ha $i \le \min(p, n-p-1)$ és $\pi_{p+1}(f) \cong \pi_{p+1}(f_0) \to \pi_{p+1}(f')$ szürjektív, ha $p+1 \le n-p-1$. Azt kell még belátnunk, hogy λ ennek a homomorfizmusnak a magjában van.

Vegyük λ-nak azt az $l : (D^{p+1}, S^p) \to (C_f, M)$ reprezentánsát, amiből $\bar{f}$-t készítettük (erre $l\big|_{S^p} = \varphi\big|_{S^p\times\{0\}}$, és $r \circ l = \bar{f}\big|_{D^{p+1}}$, ahol $r : C_f \to X$ a deformációs retrakció). $D^{p+1} = D^{p+1}_{\frac{1}{2}} \cup S^p \times [\frac{1}{2}, 1]$, ahol az unió az $\frac{1}{2}x$ és $(x, \frac{1}{2})$ pontok összeragasztását jelenti, minden $x \in S^p$-re. Feltehető, hogy l olyan alakú, hogy (D^{p+1} előbbi felbontását használva) $l(D^{p+1}_{\frac{1}{2}}) \subseteq X$ és $l\big|_{S^p\times[\frac{1}{2},1]} = l\big|_{S^p} \times 2(1-\mathrm{id})$. Ugyanis minden $(D^{p+1}, S^p) \to (C_f, M)$ leképezés homotóp egy ilyen alakúval, úgy, hogy a homotópia S^p-n rögzített, és r-rel komponálva végig $r \circ l$ (egy ilyen homotópia az r és C_f identitása közötti homotópiából konstruálható meg).

Tetszőleges rögzített $s \in S^{n-p-1}$ mellett $\varphi\big|_{S^p\times\{0\}}$ homotóp $\varphi\big|_{S^p\times\{s\}}$-vel, ezért l homotóp egy olyan l'-vel, amire $l'\big|_{S^p} = \varphi\big|_{S^p\times\{s\}}$. l'-ről is feltehető, hogy speciális alakú, és ekkor C_{f_0}-ba képez (amit C_f részhalmazának tekintünk), tehát λ $\pi_{p+1}(f_0)$-beli képének reprezentánsa. Viszont C_{f_0} tekinthető $C_{f'}$ részhalmazának is, ezért l' a λ $\pi_{p+1}(f')$-beli képének is reprezentánsa. $C_{f'}$-ben l' homotóp a $\varphi'\big|_{D^{p+1}\times\{s\}} : D^{p+1} \to M' \subset C_{f'}$ leképezéssel (ahol $\varphi' : D^{p+1} \times S^{n-p-1} \to M'$ az átépítéskor keletkező új rész beágyazása), S^p-n rögzített homotópiával (mert f'-t $\bar{f}$-ból készítettük). Ez pedig 0-t reprezentál $\pi_{p+1}(f')$-ben, tehát λ képe tényleg 0. $\square$

24. Tétel. *Legyen (f, b) normál leképezés, $n \ge 4$. Ekkor (f, b) relatív normál kobordáns egy olyan (f', b')-vel, ahol $f' : M' \to X$ q-összefüggő.*

Bizonyítás. Minden $0 \le i \le q$ esetén konstruálunk olyan (f_i, b_i) normál leképezést, ami relatív normál kobordáns (f, b)-vel, és amire $f_i : M_i \to X$ i-összefüggő.

Mivel X összefüggő, ezért $\pi_0(X) = 0$, ezért $\pi_0(f) = 0$, azaz $f_0 = f$ megfelelő.

Most tegyük fel, hogy $0 \leq i \leq q-1$, és f_i-t már megadtunk. Nézzük f_i homotopikus egzakt sorozatát:

$$\pi_{i+1}(X) \longrightarrow \pi_{i+1}(f_i) \longrightarrow \pi_i(M_i) \longrightarrow \pi_i(X)$$

Ha $i = 0$, akkor ebből $\pi_1(f_i) \cong \pi_0(M_i)$ egy véges halmaz.

Ha $i = 1$, akkor $\pi_2(X)$ végesen generált Abel-csoport, $\pi_1(M_i)$ végesen generált csoport, és $\pi_2(f_i) \to \pi_1(M_i)$ szürjektív, tehát $\pi_2(f_i)$ is egy végesen generált csoport.

Ha $i \geq 2$, akkor $\pi_{i+1}(X)$ és $\pi_i(M_i)$ végesen generált Abel-csoport, tehát $\pi_{i+1}(f_i)$ is az.

Tehát $\pi_{i+1}(f_i)$ minden esetben végesen generált, rögzítsük le egy véges generátorrendszerét. Egy adott $\lambda \in \pi_{i+1}(f_i)$ generátort a következőképpen tudunk megölni. Először vegyük egy $\bar{f}_i : M_i \cup D^{i+1} \to X$ reprezentánsát (1. állítás). A 17. tétel szerint ementén tudunk normál átépítést végezni (a 15. állítás miatt $\pi_i(V_k(R^{n+k-i})) = 0$). A 23. lemma pedig biztosítja, hogy az átépítés után λ eltűnik, az $(i+1)$-nél kisebb dimenziós homotopikus csoportok pedig triviálisak maradnak. Ha ezt $\pi_{i+1}(f_i)$ összes generátorára megcsináljuk, akkor véges sok lépésben kapunk egy (f_{i+1}, b_{i+1}) normál leképezést, ami relatív normál kobordáns (f_i, b_i)-vel, és ezért (f, b)-vel is, és f_{i+1} $(i+1)$-összefüggő. $\square$

25. Állítás. *Ha f q-összefüggő, akkor $\pi_{q+1}(f) \cong K_q(M)$.*

Bizonyítás. Mivel f q-összefüggő, és X egyszeresen összefüggő, ezért M is egyszeresen összefüggő. Ezért alkalmazható a relatív Hurewicz-tétel a (C_f, M) párra, tehát $\pi_{q+1}(f) \cong H_{q+1}(f)$. A 6. állítás miatt pedig $H_{q+1}(f) \cong K_q(M)$. $\square$

Ezért a továbbiakban $K_q(M)$-et próbáljuk megölni (úgy, hogy közben f q-összefüggő marad). Az 5. állítás szerint $H_q(M) \cong K_q(M) \oplus H_q(X)$, tehát, mivel X rögzített, $K_q(M)$ és $H_q(M)$ „ugyanúgy változik” az átépítések során. Pontosabban: ha M-ből normál átépítéssel M'-t kapjuk, úgy, hogy az új f' leképezés is q-összefüggő, akkor $\mathrm{rk}\, K_q(M') - \mathrm{rk}\, K_q(M) = \mathrm{rk}\, H_q(M') - \mathrm{rk}\, H_q(M)$ és $\frac{|\mathrm{Tor}\, K_q(M')|}{|\mathrm{Tor}\, K_q(M)|} = \frac{|\mathrm{Tor}\, H_q(M')|}{|\mathrm{Tor}\, H_q(M)|}$ (ha a nevezők 0-tól különbözőek).

3.1. Páratlan n

A következőkben azt az esetet vizsgáljuk, amikor n páratlan, azaz $n = 2q+1$.

$K_q(M) \cong \pi_{q+1}(f)$ és az 1. állítás miatt $K_q(M)$ tetszőleges eleme meghatározza (homotópia erejéig) f egy $\bar{f} : \bar{M} \to X$ kiterjesztését, és a 17. tétel és a 15. állítás miatt ebből az $\bar{f}$-ból kiindulva tudunk normál átépítést végezni. A 23. lemma szerint pedig a kapott f' is q-összefüggő lesz.

Az első lemma leírja, hogy hogyan változik $H_q(M)$, ha átépítjük M-et. Legyen $\lambda \in H_q(M)$, $\varphi : S^q \times D^{q+1} \hookrightarrow \operatorname{int} M$ a λ egy reprezentánsa, a kivágott sokaság $M_0 = M \setminus \operatorname{int} \varphi(S^q \times D^{q+1})$, az átépítés eredménye M'. Jelölje i ill. i' az M_0 beágyazását M-be ill. M'-be. Legyen $\varepsilon = \varphi\big|_{S^q \times \{s\}}([S^q]) \in H_q(M_0)$ és $\varepsilon' = \varphi\big|_{\{s\} \times S^q}([S^q]) \in H_q(M_0)$ (ahol $s \in S^q$ tetszőleges), ekkor $\lambda = i_*(\varepsilon)$. Legyen $\lambda' = i'_*(\varepsilon')$.

26. Lemma. $H_q(M)/\langle\lambda\rangle \cong H_q(M')/\langle\lambda'\rangle$.

Bizonyítás. Létezik egy ilyen diagram, ahol a vízszintes és függőleges sorozat egzakt, $\delta(1) = \varepsilon'$, $\delta'(1) = \varepsilon$, és $(\cdot\lambda)$ ill. $(\cdot\lambda')$ a λ-val ill. λ'-vel vett metszési szám:

$$\begin{tikzcd}
 & & H_{q+1}(M') \arrow[d, "\cdot\lambda'"] & & \\
 & & Z \arrow[d, "\delta'"] & & \\
H_{q+1}(M) \arrow[r, "\cdot\lambda"] & Z \arrow[r, "\delta"] & H_q(M_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "i'_*"] & H_q(M) \arrow[r] & 0 \\
 & & H_q(M') \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

A diagramot úgy kapjuk, hogy az (M, M_0) és (M', M_0) párok egzakt sorozatait összeillesztjük. A vízszintes sorozatban a relatív homológia csoportok (a kivágási tétel és a pár egzakt sorozata alapján):

$$H_j(M, M_0) \cong H_j(S^q \times D^{q+1}, S^q \times S^q) \cong \begin{cases} Z & \text{ha } j = q+1 \text{ vagy } 2q+1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Tehát $H_{q+1}(M, M_0) = Z$ és $H_q(M, M_0) = 0$. A $H_{q+1}(M, M_0)$-t generáló homológiaosztály $\varphi\big|_{\{s\} \times D^{q+1}}([D^{q+1}])$, ezt a δ határleképezés ε'-be viszi. Mivel λ egy reprezentánsa $\varphi(S^q \times \{0\})$, a λ-val vett metszési számot $H_{q+1}(M, M_0) \to Z$ leképezésnek is tekinthetjük, ami a generátort 1-be viszi, tehát ez a két csoport közötti izomorfizmus. A $H_{q+1}(M) \to H_{q+1}(M, M_0)$ megszorításnak és ennek az izomorfizmusnak a kompozíciója megegyezik $(\cdot\lambda)$-val.

Hasonlóan beláthatjuk, hogy a függőleges egzakt sorozatban $H_{q+1}(M', M_0) = Z$, $H_q(M', M_0) = 0$, δ' a $H_{q+1}(M', M_0)$ generátorát ε-ba viszi, és a $H_{q+1}(M') \to Z$ leképezés $(\cdot\lambda')$.

A diagramról leolvasható, hogy i_* egy $H_q(M) \cong H_q(M_0)/\operatorname{Im}\delta = H_q(M_0)/\langle\varepsilon'\rangle$ izomorfizmust, i'_* pedig egy $H_q(M') \cong H_q(M_0)/\operatorname{Im}\delta' = H_q(M_0)/\langle\varepsilon\rangle$ izomorfizmust indukál. Ezért $H_q(M)/\langle\lambda\rangle = H_q(M)/\langle i_*(\varepsilon)\rangle \cong H_q(M_0)/\langle\varepsilon, \varepsilon'\rangle \cong H_q(M')/\langle i'_*(\varepsilon')\rangle = H_q(M')/\langle\lambda'\rangle$. □

A következő két lemmában megvizsgáljuk, hogy ez mit jelent speciálisan választott λ-k esetén.

Legyen $h : M \hookrightarrow (M, \partial M)$ a beágyazás. Legyen F test, és jelölje $(\cdot)_F$ a $Z \to F$ együtthatócsoportok közti homomorfizmus által a homológiákon indukált leképezést.

27. Lemma. a) *Ha λ egy végtelen ciklikus direkt összeadandót generál $H_q(M)$-ben, és ugyanez igaz $h_*(\lambda)$-ra $H_q(M, \partial M)$-ben, akkor $H_q(M') \cong H_q(M)/\langle\lambda\rangle$, tehát az átépítés megöli $H_q(M)$ egy Z direkt összeadandóját.*

b) *Ha $(\lambda)_F \neq 0$ $H_q(M; F)$-ben, sőt, $h_*((\lambda)_F)$ sem 0 $H_q(M, \partial M; F)$-ben, akkor $H_q(M'; F) \cong H_q(M; F)/\langle(\lambda)_F\rangle$, tehát* $\dim_F H_q(M'; F) = \dim_F H_q(M; F) - 1$.

Bizonyítás. a) Mivel $h_*(\lambda)$ egy Z direkt összeadandót generál $H_q(M, \partial M)$-ben, ezért a Poincaré-dualitás miatt létezik olyan $\mu \in H_{q+1}(M)$, amire $\mu \cdot h_*(\lambda) = 1$. Ekkor $\mu \cdot \lambda = 1$, tehát $(\cdot\lambda)$ szürjektív, és $\delta = 0$. Ezért $\varepsilon' = \delta(1) = 0$, és $\lambda' = i'_*(\varepsilon') = 0$, tehát $H_q(M') \cong H_q(M)/\langle\lambda\rangle$.

b) A 26. lemmában szereplő diagramot felírhatjuk F együtthatós homológiákkal is (az új diagramban Z helyett F szerepel), ezért az a) rész bizonyítása működik az F együtthatócsoport esetén is. □

28. Lemma. *Ha q páros és λ véges rendű, akkor* $\operatorname{rk} H_q(M') \neq \operatorname{rk} H_q(M)$ *(azaz λ' végtelen rendű).*

Bizonyítás. Ennek a bizonyítása zárt M esetén (tetszőleges λ-ra) megtalálható pl. Kervaire-Milnor [6] cikkében. A peremes M esetét erre fogjuk visszavezetni.

Legyen $\hat{M}$ az M egy másik példánya és legyen $M_* = M \cup \hat{M}$, a peremek mentén összeragasztva. M_*-ot átépíthetjük $\varphi : S^q \times D^{q+1} \to M \subset M_*$ mentén. A kivágott sokaság $M_{0*} = M_0 \cup \hat{M}$, az eredmény $M'_* = M' \cup \hat{M}$ lesz. M_* zárt, ezért erről már tudjuk, hogy $\operatorname{rk} H_q(M'_*) \neq \operatorname{rk} H_q(M_*)$.

Legyen λ képe az $M \hookrightarrow M_*$ beágyazás által indukált homomorfizmus szerint $\lambda_* \in H_q(M_*)$. Hasonlóan definiáljuk λ'_*-ot. A 26. lemmát alkalmazhatjuk M_* átépítésére, eszerint $H_q(M_*)/\langle \lambda_* \rangle \cong H_q(M'_*)/\langle \lambda'_* \rangle$. Mivel λ véges rendű, ezért λ_* is az, ezért $\operatorname{rk} H_q(M_*) = \operatorname{rk} H_q(M_*)/\langle \lambda_* \rangle$. Tehát $\operatorname{rk} H_q(M'_*) \neq \operatorname{rk} H_q(M'_*)/\langle \lambda'_* \rangle$, ami azt jelenti, hogy λ'_* végtelen rendű, és így szükségképpen λ' is az. $\square$

Megjegyzés. A 27. lemmában az a feltétel, hogy $h_*(\lambda) \neq 0$, és a 28. lemmában az a feltétel, hogy λ torzióelem nem hagyható el. Mindkettőt mutatja a következő példa: legyen $M = S^q \times D^{q+1}$, és $\lambda \in H_q(M)$ egy generátor. Ekkor λ egy reprezentánsa $\varphi : S^q \times D^{q+1}_\varepsilon \hookrightarrow S^q \times D^{q+1}$, és ha ementén átépítést végzünk, akkor az eredmény $M' = D^{q+1} \times S^q$, ami homeomorf M-mel, tehát a homológiáik izomorfak.

29. Lemma. *Ha q páros, és $K_q(M)$ véges (de nem 0), akkor két normál átépítéssel elérhetjük, hogy $K_q(M)$ mérete csökkenjen.*

Bizonyítás. Vegyük $K_q(M)$ egy 0-tól különböző λ elemét. Ementén tudunk normál átépítést végezni M-en, a 26. és a 28. lemma miatt $H_q(M)/\langle \lambda \rangle \cong H_q(M')/\langle \lambda' \rangle$, ahol λ' végtelen rendű. Ebből következik, hogy $\operatorname{rk} H_q(M') = \operatorname{rk} H_q(M) + 1$, és ezért $\operatorname{rk} K_q(M') = \operatorname{rk} K_q(M) + 1 = 1$. Vegyünk $K_q(M')$-ben egy Z direkt összeadandót generáló elemet, és amentén végezzünk még egy normál átépítést, az eredmény legyen M''. $K_q(M')$ direkt összeadandó $H_q(M')$-ben (5. állítás), ezért a homológiaosztály, ami mentén átépítettünk, $H_q(M')$-ben is egy Z direkt összeadandót generál. A 10. állítás és $K_i(\partial M') = 0$ miatt $K_q(M') \cong K_q(M', \partial M')$, ezért ez $H_q(M', \partial M')$-ben is igaz. Tehát a 27. lemma feltételei teljesülnek, ezért az átépítés megöli a Z direkt összeadandót. Ezért $\operatorname{rk} H_q(M'') = \operatorname{rk} H_q(M') - 1$, ezért $\operatorname{rk} K_q(M'') = \operatorname{rk} K_q(M') - 1$, tehát $K_q(M'')$ torziócsoport. $|\operatorname{Tor} H_q(M'')| = |\operatorname{Tor} H_q(M')| \leq |\operatorname{Tor} H_q(M')/\langle \lambda' \rangle| = |\operatorname{Tor} H_q(M)/\langle \lambda \rangle| < |\operatorname{Tor} H_q(M)|$. Emiatt pedig $|\operatorname{Tor} K_q(M'')| < |\operatorname{Tor} K_q(M)|$, vagyis $|K_q(M'')| < |K_q(M)|$. $\square$

Ha q páratlan, akkor nem biztos, hogy $H_q(M)$ rangja megváltozik, ha egy $K_q(M)$-beli torzióelem mentén átépítjük M-et, ezért ebben az esetben más módon fogjuk

$K_q(M)$ rendjét csökkenteni. A 26. lemma alapján $H_q(M)$ méretének változása λ és λ' rendjétől függ.

Tegyük fel, hogy $\lambda \in H_q(M)$ véges rendű, 0-tól különböző elem, a rendje legyen l. Ekkor $0 = l\lambda = li_*(\varepsilon) = i_*(l\varepsilon)$. Mivel $\operatorname{Ker} i_* = \operatorname{Im}\delta = \langle\varepsilon'\rangle$, ez azt jelenti, hogy $l\varepsilon \in \langle\varepsilon'\rangle$, tehát $l\varepsilon = l'\varepsilon'$ valamilyen $l' \in Z$-re. l' egyértelmű, mert ha $l\varepsilon = l_1'\varepsilon' = l_2'\varepsilon'$, akkor $(l_1' - l_2')\varepsilon' = 0$, viszont mivel λ véges rendű, ezért $\operatorname{Im}(\cdot\lambda) = \operatorname{Ker}\delta = 0$, tehát $\delta(1) = \varepsilon'$ végtelen rendű, és így $l_1' - l_2' = 0$.

30. Lemma. *λ' rendje végtelen, ha $l' = 0$, és $|l'|$, ha $l' \neq 0$.*

Bizonyítás. Ha $l' = 0$, azaz $l\varepsilon = l\delta'(1) = \delta'(l) = 0$, akkor δ' nem injektív, ezért $(\cdot\lambda') \neq 0$, tehát λ' végtelen rendű.

Ha $l' \neq 0$, akkor $l'\lambda' = l'i_*'(\varepsilon') = i_*'(l'\varepsilon') = i_*'(l\varepsilon) = 0$ (hiszen $\operatorname{Ker} i_*' = \langle\varepsilon\rangle$), és ezért λ' rendje osztója l'-nek. Legyen λ' rendje $l_0' = \frac{l'}{r}$, ekkor a korábbi gondolatmenetünkhöz hasonlóan $l_0'\varepsilon' = l_0\varepsilon$ valamilyen $l_0 \in Z$ -re. $l\varepsilon = l'\varepsilon' = rl_0'\varepsilon' = rl_0\varepsilon$, és mivel λ' véges rendű, ezért ekkor $l = rl_0$. Ezért $\frac{l}{r}\lambda = l_0\lambda = i_*(l_0\varepsilon) = i_*(l_0'\varepsilon') = 0$, ez pedig csak úgy lehetséges, ha $r = \pm 1$. Tehát λ' rendje $|l'|$. $\square$

Tehát, a 26. lemma miatt, ha $|l'| < l$ (és nem 0), akkor $H_q(M)$ torziója csökken az átépítés során. Nem biztos, hogy l' ilyen, ezért megvizsgáljuk, hogy mi történik, hogyha φ helyett λ egy másik reprezentánsát választjuk az átépítéshez. Legyen tehát $\alpha : S^q \to SO_{q+1}$ és $\varphi_\alpha : S^q \times D^{q+1} \hookrightarrow M$, $\varphi_\alpha(x, y) = \varphi(x, \alpha(x)y)$.

Ha φ_α mentén építjük át M-et, akkor $\operatorname{Im}\varphi_\alpha = \operatorname{Im}\varphi$ miatt a kivágott sokaság M_0 marad, de az átépítés eredményéül kapott sokaság megváltozik, jelölje ezt M_α'. Legyen $i_\alpha' : M_0 \hookrightarrow M_\alpha'$ a beágyazás, $\varepsilon_\alpha = \varphi_\alpha\big|_{S^q \times \{s\}}([S^q]) \in H_q(M_0)$ (ε' nem változik, mert $\varphi(\{s\} \times S^q) = \varphi_\alpha(\{s\} \times S^q)$), és $\lambda_\alpha' = (i_\alpha')_*(\varepsilon')$.

Legyen $p_* : \pi_q(SO_{q+1}) \to \pi_q(S^q) \cong Z$ a $p : SO_{q+1} \to S^q$ projekció által indukált homomorfizmus, és $l_\alpha' = l' + lp_*([\alpha])$.

31. Lemma. *λ_α' rendje $|l_\alpha'|$ (vagy végtelen, ha $l_\alpha' = 0$).*

Bizonyítás. Legyenek $\bar\varepsilon$, $\bar\varepsilon'$ és $\bar\varepsilon_\alpha$ a $g, g', g_\alpha : S^q \to S^q \times S^q$, $g(x) = (x, s)$, $g'(x) = (s, x)$ és $g_\alpha(x) = (x, \alpha(x)s)$ leképezések által reprezentált elemek $H_q(S^q \times S^q)$-ban (tehát $\bar\varepsilon$ és $\bar\varepsilon'$ a két S^q-nak megfelelő generátor). Ekkor $\varepsilon = \varphi_*(\bar\varepsilon)$, $\varepsilon' = \varphi_*(\bar\varepsilon')$, és $\varepsilon_\alpha = \varphi_*(\bar\varepsilon_\alpha)$, ahol φ_* a $\varphi\big|_{S^q \times S^q}$ által indukált $H_q(S^q \times S^q) \to H_q(M_0)$ homomorfizmus.

Legyen p_1 és p_2 a két $S^q \times S^q \to S^q$ vetítés. $p_1 \circ g_\alpha = \mathrm{id}$, ami 1-et reprezentál $H_q(S^q) \cong Z$-ben, és $p_2 \circ g_\alpha = p \circ \alpha$, ami $[p \circ \alpha] = p_*([\alpha])$-t reprezentál. Ebből következik, hogy $\bar{\varepsilon}_\alpha = \bar{\varepsilon} + p_*([\alpha])\bar{\varepsilon}'$, és ezért $\varepsilon_\alpha = \varepsilon + p_*([\alpha])\varepsilon'$.

Ebből $l\varepsilon_\alpha = l\varepsilon + lp_*([\alpha])\varepsilon' = l'\varepsilon' + lp_*([\alpha])\varepsilon' = (l' + lp_*([\alpha]))\varepsilon' = l'_\alpha\varepsilon'$, és a 30. lemmát alkalmazva a módosított átépítésre megkapjuk λ'_α rendjét. □

32. Lemma. *Ha q páratlan, és $K_q(M)$ véges (de nem 0), akkor véges sok normál átépítéssel elérhetjük, hogy $K_q(M)$ mérete csökkenjen.*

Bizonyítás. Legyen p egy $|K_q(M)|$-et osztó prím. Ekkor $K_q(M)$-ben van p-hatvány rendű ciklikus direkt összeadandó, legyen λ egy ilyennek egy generátora. Mivel $K_q(M)$ direkt összeadandó $H_q(M)$-ben (5. állítás), ezért a λ által generált részcsoport $H_q(M)$-ben is direkt összeadandó. Az univerzális együttható formula szerint létezik egy

$$0 \longrightarrow H_q(M) \otimes Z_p \longrightarrow H_q(M, Z_p) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_{q-1}(M), Z_p) \longrightarrow 0$$

egzakt sorozat, és mivel $H_q(M) \otimes Z_p$-ben $\lambda \otimes 1 \neq 0$, ezért $(\lambda)_{Z_p} \neq 0$.

A 10. állítás miatt $K_q(M) \cong K_q(M, \partial M)$, ezért $h_*(\lambda)$-ra (ahol $h : M \to (M, \partial M)$) is alkalmazható az előbbi gondolatmenetünk, ezért $h_*((\lambda)_{Z_p}) \neq 0$. Tehát λ kielégíti a 27. lemma b) részének a feltételeit $F = Z_p$ esetén.

Jelölje λ rendjét l, vegyük λ egy $\varphi : S^q \times D^{q+1} \hookrightarrow M$ reprezentánsát, és végezzünk ementén egy normál átépítést. A korábban bevezetett jelöléseket használjuk. Mivel l', λ' rendje nem biztos, hogy a $[-l, l]$ intervallumba esik (amire szükségünk lenne a bizonyítás folytatásához), ezért veszünk egy olyan $\alpha : S^q \to SO_{q+1}$ leképezést, amire az ebből származó φ_α-val is végezhető normál átépítés, és megcsináljuk ezt az átépítést. A 31. lemma szerint az új λ'_α rendje $|l'_\alpha| = |l' + lp_*([\alpha])|$ (vagy végtelen).

Belátjuk, hogy van olyan α, amire φ_α normál átépítést definiál, és $|l'_\alpha| \leq l$.

A 18. állítás szerint az első feltétel akkor teljesül, ha $j_*([\alpha]) = 0$, azaz $[\alpha] \in \operatorname{Ker} j_*$, ahol $j : SO_{q+1} \to SO_{k+q+1}$ a beágyazás. Legyen $j_1 : SO_{q+1} \to SO_{q+2}$ és $j_2 : SO_{q+2} \to SO_{k+q+1}$, ekkor $j = j_2 \circ j_1$, és ezért $j_* = (j_2)_* \circ (j_1)_*$. Tudjuk, hogy $(j_2)_* : \pi_q(SO_{q+2}) \to \pi_q(SO_{k+q+1})$ izomorfizmus, ezért $\operatorname{Ker} j_* = \operatorname{Ker}(j_1)_*$.

Az $SO_{q+2} \xrightarrow{SO_{q+1}} S^{q+1}$ nyaláb egzakt sorozatából tudjuk, hogy $\operatorname{Ker}(j_1)_* = \operatorname{Im} \partial$, és ezt $\mathfrak{o}(\mathcal{T}S^{q+1})$ generálja (12. állítás). Tehát φ_α-val pontosan akkor végezhető normál átépítés, ha $[\alpha]$ többszöröse $\mathfrak{o}(\mathcal{T}S^{q+1})$-nek.

A 14. állítás szerint $p_*(\mathfrak{o}(\mathcal{T}S^{q+1})) = \chi(S^{q+1})[\mathrm{id}_{S^q}] \in \pi_q(S^q) \cong Z$, és $\chi(S^{q+1}) = 2$ (mert q páratlan), ezért ha φ_α normál átépítést definiál, akkor $p_*([\alpha]) \in 2Z$ (és tetszőleges páros érték elő is fordulhat). Ezért $l'_\alpha = l' + lp_*([\alpha])$ tetszőleges értéket felvehet, ami kongruens l'-vel modulo $2l$, tehát α választható úgy, hogy l'_α a $[-l, l]$ intervallumba essen.

Tehát feltehetjük, hogy $|l'| \leq l$. Most 3 esetet különböztetünk meg:

1. Ha $0 < |l'| < l$, akkor λ' is véges rendű, ezért $\mathrm{rk}\, H_q(M') = \mathrm{rk}\, H_q(M)$, ezért $K_q(M')$ is torziócsoport. A 26. lemma szerint $H_q(M)/\langle\lambda\rangle \cong H_q(M')/\langle\lambda'\rangle$, ezért $\frac{|\mathrm{Tor}\, H_q(M')|}{|l'|} = \frac{|\mathrm{Tor}\, H_q(M)|}{l}$. Tehát $|\mathrm{Tor}\, H_q(M')| < |\mathrm{Tor}\, H_q(M)|$, és ezért $|K_q(M')| < |K_q(M)|$.

2. Ha $l' = 0$, akkor λ' végtelen rendű. Ekkor a 29. lemmához hasonlóan $\mathrm{rk}\, K_q(M') = 1$, vegyük egy Z direkt összeadandójának a generátorát, és amentén építsük át M'-t M''-vé. Erről ugyanúgy belátható, hogy $K_q(M'')$ torziócsoport, és $|K_q(M'')| < |K_q(M)|$. Tehát ekkor 2 lépésben tudjuk csökkenteni $K_q(M)$ méretét.

3. Ha $|l'| = l$, akkor az 1. esethez hasonlóan látjuk, hogy $K_q(M')$ torziócsoport, és $|\mathrm{Tor}\, H_q(M')| = |\mathrm{Tor}\, H_q(M)|$, ezért $|K_q(M')| = |K_q(M)|$. λ-t úgy választottuk, hogy a 27. lemma b) része alkalmazható legyen rá az $F = Z_p$ választással, ezért $\dim_{Z_p} H_q(M'; Z_p) = \dim_{Z_p} H_q(M; Z_p) - 1$. Most csináljuk meg M'-vel ugyanazt, mint M-mel: vegyük $K_q(M')$ egy p-hatvány rendű direkt összeadandójának a generátorát ($|K_q(M')| = |K_q(M)|$ miatt p osztja $|K_q(M')|$-t is), és amentén végezzünk átépítést, az eredmény legyen M''. A megfelelő α választásával erről az átépítésről is feltehetjük, hogy nem növeli $H_q(M')$ torziójának méretét. Ha az átépítés az 1. vagy 2. esetbe tartozik, akkor 1 vagy 2 lépésben tudjuk csökkenteni $K_q(M')$ méretét, és így sikerült $|K_q(M)|$-et csökkentenünk. Ha a 3. esetbe, akkor $|K_q(M'')| = |K_q(M')|$ és $\dim_{Z_p} H_q(M''; Z_p) = \dim_{Z_p} H_q(M'; Z_p) - 1$. Ekkor ugyanúgy csináljuk tovább az átépítéseket. Véges sok lépés után lesz egy olyan átépítés, ami az 1. vagy 2. esetbe tartozik (különben a Z_p-együtthatós homológiacsoport dimenzióját, ami mindig pozitív egész, tetszőlegesen sokszor tudnánk 1-gyel csökkenteni). Tehát ebben az esetben is tudjuk véges sok átépítéssel csökkenteni $K_q(M)$ méretét. □

33. Tétel. *$K_q(M)$ megölhető normál átépítésekkel.*

Bizonyítás. Az 5. állítás miatt $K_q(M)$ egy Z direkt összeadandójának generátora $H_q(M)$-ben is direkt összeadandót generál. Mivel $K_q(M) \cong K_q(M, \partial M)$ (10. állítás), ezért ugyanez teljesül $(M, \partial M)$-ben is. Ezért a 27. lemma alkalmazható rá, és a Z komponens egy normál átépítéssel megölhető. Ezt ismételve elérhetjük, hogy $K_q(M)$ torziócsoport legyen. Ezt q paritásától függően a 29. vagy a 32. lemmában leírt módon tudjuk csökkenteni. Ezt egészen addig csinálhatjuk, amíg $K_q(M)$ eltűnik. $\square$

3.2. A σ obstrukció

Legyen $n = 2q$.

A $\cup : H^q(M) \times H^q(M, \partial M) \to H^{2q}(M, \partial M) \cong Z$ szorzás és a beágyazásból származó $j^* : H^q(M, \partial M) \to H^q(M)$ homomorfizmus indukál egy ugyanígy jelölt, és $x \cup y = (j^*(x) \cup y)[M]$ képlettel adott $\cup : H^q(M, \partial M) \times H^q(M, \partial M) \to Z$ bilineáris függvényt. Ez szimmetrikus, ha q páros, és antiszimmetrikus, ha q páratlan.

Mivel $H^q(M, \partial M) \cong H_q(M)$, ezért $\cup$ definiál egy $B : H_q(M) \times H_q(M) \to Z$ bilineáris függvényt. Ez nem más, mint a két homológiaosztályhoz a metszési számukat rendelő leképezés.

Legyen (f, b) 1 fokú normál leképezés, ahol $f : (M, \partial M) \to (X, Y)$. Az 5. állítás szerint $H^q(M, \partial M) = K^q(M, \partial M) \oplus f^*(H^q(X, Y))$.

34. Lemma. *A $H^q(M, \partial M) \cong K^q(M, \partial M) \oplus f^*(H^q(X, Y))$ felbontásban a komponensek $\cup$-ortogonálisak.*

Bizonyítás. Ha $x \in K^q(M, \partial M)$ és $y \in H^q(X, Y)$, akkor $f^*(y) \cup x = (j^*(f^*(y)) \cup x)[M] = (f^*(j'^*(y)) \cup x)[M]$ (ahol $j' : X \to (X, Y)$). Ez pedig $f^*(j'^*(y))([M] \cap x) = (j'^*(y))(f_*([M] \cap x)) = 0$, hiszen $x \in K^q(M, \partial M)$ miatt $[M] \cap x \in K_q(M)$, azaz $f_*([M] \cap x) = 0$. $\square$

Mivel véges rendű $x \in K^q(M, \partial M)$ esetén $(x \cup\ ) = 0$, ezért $\cup$ indukál egy bilineáris leképezést $K^q(M, \partial M)/ \operatorname{Tor} K^q(M, \partial M)$ -n.

35. Lemma. *Ha $(f\big|_{\partial M})_* : H_*(\partial M) \to H_*(Y)$ izomorfizmus, akkor $\cup\big|_{K^q(M, \partial M)}$ nemszinguláris (azaz a szabad részen tetszőleges bázisban felírva a mátrixa ± 1 determinánsú).*

Bizonyítás. A feltétel miatt $K_q(\partial M) = 0$, ezért a duálisra is $K^q(\partial M) = 0$. A 10. állítás miatt ebből következik, hogy $j^* : H^q(M, \partial M) \to H^q(M)$ izomorfizmus. A Poincaré-dualitás miatt $\cup : H^q(M) \times H^q(M, \partial M) \to Z$ nemszinguláris, ezért a

$H^q(M,\partial M)$-en indukált $\cup$ is nemszinguláris. Ezért ez igaz az előző lemmában szereplő ortogonális direkt összeg felbontás komponenseire leszűkítve is. $\square$

Páros q

Azt az esetet vizsgáljuk, amikor q páros, ekkor $\cup$ ill. B szimmetrikus.

Definíció. $I(f) = \sigma\big(\cup\big|_{K^q(M,\partial M)}\big)$, $\cup$ leszűkítésének szignatúrája.

A Poincaré-dualitás miatt ez megegyezik $B\big|_{K_q(M)}$ szignatúrájával.

36. Állítás. *$I(f) = \sigma(M,\partial M) - \sigma(X,Y)$ (ahol σ a sokaság ill. Poincaré-pár szignatúráját jelöli).*

Bizonyítás. A 34. lemmában bizonyított ortogonalitás miatt a $\cup$ bilineáris leképezés is a két komponensre vett leszűkítései direkt összegévé bomlik, ezért $\sigma(\cup) = \sigma\big(\cup\big|_{K^q(M,\partial M)}\big) + \sigma\big(\cup\big|_{f^*(H^q(X,Y))}\big)$. Itt a második tag megegyezik $\cup$ $H^q(X,Y)$-on vett szignatúrájával, mivel $\cup$ természetes. Tehát $\sigma(M,\partial M) = I(f) + \sigma(X,Y)$. $\square$

Tegyük fel, hogy $(M,\partial M)$ az $(M_1,\partial M_1)$ és $(M_2,\partial M_2)$ sokaságok összege $(M_0,\partial M_0)$ mentén, (X,Y) pedig $(X_1, Y_1\cup X_0)$ és $(X_2, Y_2 \cup X_0)$ összege (X_0,Y_0) mentén.

37. Állítás. *Ha $f(M_i) \subseteq X_i$ és $(f\big|_{M_0})_* : H_*(M_0) \to H_*(X_0)$ izomorfizmus, akkor $I(f) = I(f\big|_{(M_1,\partial M_1)}) + I(f\big|_{(M_2,\partial M_2)})$.*

Bizonyítás. A 11. állításban szereplő egzakt sorozatot használjuk. Mivel f leszűkítése izomorfizmust indukál, ezért $K_i(M_0) = 0$ minden i-re, tehát $K_q(M_1)\oplus K_q(M_2) \cong K_q(M)$. Mivel egy $K_q(M_i)$-beli homológiaosztály reprezentálható int M_i-beli lánccal, és int M_1 és int M_2 diszjunkt, ezért különböző komponensben lévő homológiaosztályok metszési száma 0. Tehát $K_q(M_1)$ és $K_q(M_2)$ B-ortogonálisak.

Áttérve a kohomológiákra ez azt jelenti, hogy $K^q(M_1,\partial M_1)\oplus K^q(M_2,\partial M_2) \cong K^q(M,\partial M)$, és a komponensek $\cup$-ortogonálisak. Ezért $\cup$ szignatúrája a komponenseken vett szignatúrák összege, ami pont az állítást adja. $\square$

38. Állítás. *Tegyük fel, hogy $f : (M,\partial M) \to (X,Y)$ 1 fokú normál leképezés, $(f\big|_{\partial M})_* : H_*(\partial M) \to H_*(Y)$ izomorfizmus, és (f,b) relatív normál kobordáns (f',b')-vel. Ekkor $I(f) = I(f')$.*

Bizonyítás. Legyen $F : (W, \partial M \times [0,1]) \to (X, Y)$ az f és f' közötti relatív normál kobordizmus. Ebből elkészíthető egy $(W, M \cup (\partial M \times [0,1]) \cup M') \to (X \times [0,1], X \times \{0\} \cup (Y \times [0,1]) \cup X \times \{1\})$ leképezés is. Ekkor $\partial W \approx M \cup_{\partial M} M'$ és $\partial(X \times [0,1]) \approx X \cup_Y X$, ezért az $(f\big|_{\partial M})_*$-ra vonatkozó feltétel pont azt biztosítja, hogy $F\big|_{\partial W}$ kielégíti a 37. állítás feltételeit.

W irányított kobordizmus M és M' között, ezért M-en az eredeti, M'-n viszont az eredetivel ellentétes irányítást indukál (és ugyanez igaz $X \times [0,1]$ peremkomponenseire is). Ezért a 37. állítás azt adja, hogy $I(F\big|_{\partial W}) = I(f) - I(f')$.

Viszont azt is tudjuk, hogy $I(F\big|_{\partial W}) = \sigma(\partial W) - \sigma(\partial(X \times [0,1])) = 0$, hiszen sokaság, ill. Poincaré-pár peremének szignatúrája 0. Tehát $I(f) = I(f')$. □

39. Állítás. *Ha (f, b) 1 fokú normál leképezés, és $(f\big|_{\partial M})_* : H_*(\partial M) \to H_*(Y)$ izomorfizmus, akkor $I(f)$ osztható 8-cal.*

Bizonyítás. Az állítást elég olyan esetekben bebizonyítani, amikor f q-összefüggő. Ugyanis a 24. tétel szerint (f, b) relatív normál kobordáns egy olyan (f', b')-vel, ahol f' q-összefüggő, a 38. állítás miatt pedig $I(f) = I(f')$.

Ebben az esetben a 25. állítás miatt $K_q(M) \cong \pi_{q+1}(f)$, ezért az 1. állítás szerint tetszőleges $x \in K_q(M)$ homológiaosztály reprezentálható $\varphi_0 : S^q \hookrightarrow M$ beágyazással. Jelölje ν a beágyazás normálnyalábját, ennek az Euler osztálya $e(\nu) \in H^q(S^q) \cong Z$ pont az $x \cdot x$ önmetszési szám.

$\mathfrak{o}$ definíciójánál láttuk, hogy $\varphi_0(S^q)$ $(k+q)$-dimenziós normálnyalábja triviális, és felbomlik M $\varphi_0(S^q)$-ra leszűkített k-dimenziós normálnyalábjának (ami triviális) és $\varphi_0(S^q)$ M-beli normálnyalábjának összegére. Így ez utóbbi stabilan triviális, ami a karakterisztikus leképezésre vonatkozóan azt jelenti, hogy $j_*(\mathfrak{o}(\nu)) = 0$, ahol $j_* : \pi_{q-1}(SO_q) \to \pi_{q-1}(SO_{q+1})$. Az $SO_{q+1} \xrightarrow{SO_q} S^q$ nyaláb homotopikus egzakt sorozatában $\operatorname{Ker} j_* = \operatorname{Im} \partial$, ezt pedig a 12. állítás miatt $\mathfrak{o}(\mathcal{T}S^q)$ generálja. Tehát $\mathfrak{o}(\nu) = r\mathfrak{o}(\mathcal{T}S^q)$ valamilyen $r \in Z$-re.

Az S^q feletti ξ nyalábokra az $\mathfrak{o}(\xi) \mapsto e(\xi)$ leképezés homomorfizmus (ld. Milnor [8]). Ugyanis az $\mathfrak{o}(\xi)$ karakterisztikus leképezés az $\pi_{q-1}(SO_q) \cong \pi_q(BSO_q)$ izomorfizmusnál a nyaláb g_ξ Gauss-leképezésének felel meg. A nyaláb Euler-osztálya pedig az $e \in H^q(BSO_q)$ univerzális Euler-osztály visszahúzottja g_ξ^*-gal, és a $g_\xi \mapsto g_\xi^*(e)$ leképezés homomorfizmus.

Ezért $e(\nu) = re(\mathcal{T}S^q) = 2r$ (hiszen q páros). Ez pedig a korábbiak szerint azt jelenti, hogy az $x \cdot x$ önmetszési szám mindig páros. A duálisra áttérve azt kapjuk, hogy minden $y \in K^q(M, \partial M)$ kohomológiaosztályra $y \cup y$ páros. Mivel $\cup\big|_{K^q(M,\partial M)}$ nemszinguláris (35. lemma), ezért $\sigma\big(\cup\big|_{K^q(M,\partial M)}\big)$ osztható 8-cal (ld. Serre [12]). $\square$

Definíció. $\sigma(f, b) = \frac{1}{8} I(f) \in Z$.

Az $I(f)$-re bebizonyított tulajdonságok teljesülnek $\sigma(f, b)$-re is.

Páratlan q

Ebben a részben minden homológia és kohomológia Z_2 együtthatós.

Mielőtt rátérünk a normál leképezések vizsgálatára, bevezetünk néhány fogalmat, amire szükségünk lesz a σ obstrukció definiálásához.

Jelölés. $K = K(Z_2, q)$, az az Eilenberg-MacLane tér, amire $\pi_q(K) \cong Z_2$ és $\pi_i(K) = 0$, ha $i \neq q$. $H^q(K) \cong Z_2$, a generátorát jelölje ℓ.

Ekkor tetszőleges A esetén $[A, K]$ és $H^q(A)$ között van egy bijekció: $\varphi \mapsto \varphi^*(\ell)$.

Definíció. Legyen A tetszőleges tér és $t : \Sigma^s A \to \Sigma^s K$ olyan leképezés, amire $t^*(\Sigma^s \ell) = 0$. Ekkor definiálható $Sq_t^{q+1}(\Sigma^s \ell) \in H^{2q+s}(\Sigma^s A)$ a következőképpen:

Tekintsük a t kohomologikus egzakt sorozatát, és azt a diagramot, amit Sq^{q+1} indukál ennek két részlete között:

$$\begin{tikzcd}
H^{q+s-1}(\Sigma^s K) \arrow[r, "t^*"] \arrow[d, "Sq^{q+1}"] & H^{q+s-1}(\Sigma^s A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "Sq^{q+1}"] & H^{q+s}(t) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "Sq^{q+1}"] & H^{q+s}(\Sigma^s K) \arrow[r, "t^*"] \arrow[d, "Sq^{q+1}"] & H^{q+s}(\Sigma^s A) \arrow[d, "Sq^{q+1}"] \\
H^{2q+s}(\Sigma^s K) \arrow[r, "t^*"] & H^{2q+s}(\Sigma^s A) \arrow[r, "\delta"] & H^{2q+s+1}(t) \arrow[r, "j^*"] & H^{2q+s+1}(\Sigma^s K) \arrow[r, "t^*"] & H^{2q+s+1}(\Sigma^s A)
\end{tikzcd}$$

$t^*(\Sigma^s \ell) = 0$ miatt $\Sigma^s \ell \in \operatorname{Im} j^*$, ezért létezik olyan $x \in H^{q+s}(t)$, amire $j^*(x) = \Sigma^s \ell$. Ez az x nem egyértelmű, csak a $\operatorname{Ker} j^* = \operatorname{Im} \delta$ szerinti mellékosztálya az. $Sq^{q+1}(x)$ viszont már egyértelmű, mert $Sq^{q+1}(\delta(H^{q+s-1}(\Sigma^s A))) = \delta(Sq^{q+1}(H^{q+s-1}(\Sigma^s A))) = \delta(Sq^{q+1}(\Sigma^s H^{q-1}(A))) = \delta(\Sigma^s Sq^{q+1}(H^{q-1}(A))) = 0$, hiszen Sq^{q+1} minden $(q-1)$-dimenziós kohomológiaosztályt 0-ba visz. Legyen $y = Sq^{q+1}(x) \in H^{2q+s+1}(t)$. Ekkor $j^*(y) = j^*(Sq^{q+1}(x)) = Sq^{q+1}(j^*(x)) = Sq^{q+1}(\Sigma^s \ell) = \Sigma^s Sq^{q+1}(\ell) = 0$, hiszen ℓ q-dimenziós. Ezért $y \in \operatorname{Ker} j^* = \operatorname{Im} \delta$, ezért létezik olyan $z \in H^{2q+s}(\Sigma^s A)$, amire $\delta(z) = y$. Ez a z egyértelmű, mert δ injektív, mert $t^*(H^{2q+s}(\Sigma^s K)) = 0$. Ugyanis

Serre tétele alapján $H^{2q}(K)$ megkapható ℓ képeként, ha a Steenrod-algebra hat rajta, ezért ugyanez igaz $H^{2q+s}(\Sigma^s K)$-ra és $\Sigma^s\ell$-re, és $t^*(\Sigma^s\ell) = 0$.

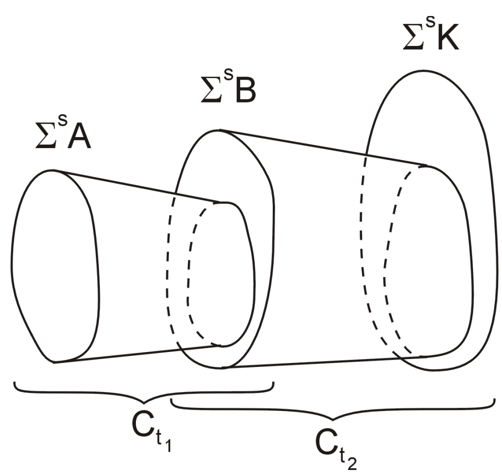
Legyen $Sq_t^{q+1}(\Sigma^s\ell) = z$.

Megjegyzés. A definícióból látszik, hogy $Sq_t^{q+1}(\Sigma^s\ell)$ csak t homotópiaosztályától függ.

A konstrukció nem működne, ha $\Sigma^s A$-t lecserélnénk egy tetszőleges térre, mert kihasználtuk, hogy $Sq^{q+1}(H^{q+s-1}(\Sigma^s A)) = \Sigma^s Sq^{q+1}(H^{q-1}(A)) = 0$. De hasonlóan az is igaz, hogy $Sq^{q+1}(H^{q+s-1}(\Sigma^{s-1}A)) = 0$ tetszőleges A térre, ezért ha $\Sigma^s A$ helyén csak egy $(s-1)$-szeres szuszpenzió, $\Sigma^{s-1}A$ áll, akkor még működik a konstrukció.

Az operáció két alapvető tulajdonságát bizonyítjuk be a következő lemmákban:

40. Lemma. *Legyen $t_1 : \Sigma^s A \to \Sigma^s B$, $t_2 : \Sigma^s B \to \Sigma^s K$, $t_3 = t_2 \circ t_1$, és tegyük fel, hogy $t_2^*(\Sigma^s\ell) = 0$ (és ezért $t_3^*(\Sigma^s\ell) = 0$). Ekkor $Sq_{t_3}^{q+1}(\Sigma^s\ell) = (t_1)^*\big(Sq_{t_2}^{q+1}(\Sigma^s\ell)\big)$.*



2. ábra

Bizonyítás. Legyen $C_{t_1,t_2} = C_{t_1} \cup C_{t_2}$, $\Sigma^s B$ mentén összeragasztva (2. ábra). Ekkor C_{t_1,t_2} homotopikusan ekvivalens $\Sigma^s K$-val, a $(C_{t_1,t_2}, \Sigma^s A)$ pár $(C_{t_3}, \Sigma^s A)$-val, a (C_{t_1,t_2}, C_{t_1}) pár $(C_{t_2}, \Sigma^s B)$-vel.

A $(C_{t_1,t_2}, \Sigma^s A) \to (C_{t_1,t_2}, C_{t_1})$ beágyazás indukál egy kommutatív diagramot a párok (és ezért t_3 és t_2) kohomologikus egzakt sorozatai között. Sq^{q+1} pedig ennek a diagramnak a két szakasza között indukál egy kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
 & H^{q+s-1}(\Sigma^s A) \arrow[rr] \arrow[dd, "Sq^{q+1}"] & & H^{q+s}(t_3) \arrow[rr] \arrow[dd, "Sq^{q+1}"] & & H^{q+s}(\Sigma^s K) \arrow[dd, "Sq^{q+1}"] \\
H^{q+s-1}(\Sigma^s B) \arrow[ur, "(t_1)^*"] \arrow[rr] \arrow[dd, "Sq^{q+1}"'] & & H^{q+s}(t_2) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "Sq^{q+1}"] & & H^{q+s}(\Sigma^s K) \arrow[ur, equal] \arrow[dd, "Sq^{q+1}"] & \\
 & H^{2q+s}(\Sigma^s A) \arrow[rr] & & H^{2q+s+1}(t_3) \arrow[rr] & & H^{2q+s+1}(\Sigma^s K) \\
H^{2q+s}(\Sigma^s B) \arrow[ur, "(t_1)^*"] \arrow[rr] & & H^{2q+s+1}(t_2) \arrow[ur] \arrow[rr] & & H^{2q+s+1}(\Sigma^s K) \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

A diagram kommutativitásából következik, hogy a $Sq_{t_2}^{q+1}(\Sigma^s\ell)$ definíciójában szereplő x, y és z képe a „ferde" nyilaknál pont a $Sq_{t_3}^{q+1}(\Sigma^s\ell)$ definíciójában szereplő x, y és z, a legutóbbi pont a lemma állítását adja. $\square$

41. Lemma. *Legyen $t_1, t_2, t_3 : \Sigma^s A \to \Sigma^s K$ olyanok, hogy $t_3 = t_1 + t_2$ a $[\Sigma^s A, \Sigma^s K]$ csoportban. Tegyük fel, hogy $t_1^*(\Sigma^s\ell) = t_2^*(\Sigma^s\ell) = 0$ (és ezért $t_3^*(\Sigma^s\ell) = 0$). Ekkor $Sq_{t_3}^{q+1}(\Sigma^s\ell) = Sq_{t_1}^{q+1}(\Sigma^s\ell) + Sq_{t_2}^{q+1}(\Sigma^s\ell)$.*

Bizonyítás. Legyen $v : \Sigma^s A \to \Sigma^s A \vee \Sigma^s A$, ekkor $t_3 = (t_1 \vee t_2) \circ v$ (homotópia erejéig). Ezért az előző lemma alapján $Sq_{t_3}^{q+1}(\Sigma^s\ell) = (v)^*\big(Sq_{t_1\vee t_2}^{q+1}(\Sigma^s\ell)\big) = (v)^*\big(Sq_{t_1}^{q+1}(\Sigma^s\ell) \oplus Sq_{t_2}^{q+1}(\Sigma^s\ell)\big) = Sq_{t_1}^{q+1}(\Sigma^s\ell) + Sq_{t_2}^{q+1}(\Sigma^s\ell)$. $\square$

Most legyen (f, b) 1 fokú normál leképezés, $f : (M, \partial M) \to (X, Y)$, $b : \nu \to \xi$. Ekkor $\cup$ meghatároz egy $K^q(M, \partial M) \times K^q(M, \partial M) \to Z_2$ szimmetrikus bilineáris függvényt, és $x \cup x = 0$ minden $x \in K^q(M, \partial M)$-re.

A 19. állítás utáni megjegyzés szerint (X, Y) Spivak normál fibrálása $S\xi$. A 20. és a 21. állítás alapján ekkor $T\nu$ és $\Sigma^s(M/\partial M)$ ill. $T\xi$ és $\Sigma^s(X/Y)$ között adott egy dualitás, és a leképezések között $T(b)$ duálisa egy olyan $g : \Sigma^s(X/Y) \to \Sigma^s(M/\partial M)$ leképezés, amire $g^* \circ \Sigma^s = \Sigma^s \circ \phi$ (ahol ϕ az f^* balinverze).

Legyen $x \in K^q(M, \partial M)$, ez azt jelenti, hogy $\phi(x) = 0$, és ezért $g^*(\Sigma^s x) = \Sigma^s\phi(x) = 0$. Legyen $\varphi : M/\partial M \to K$ az a (homotopikusan egyértelmű) leképezés, amire $\varphi^*(\ell) = x$, ekkor $(\Sigma^s\varphi)^*(\Sigma^s\ell) = \Sigma^s x$. Legyen $h = \Sigma^s\varphi \circ g : \Sigma^s(X/Y) \to \Sigma^s K$. Erre $h^*(\Sigma^s\ell) = g^*((\Sigma^s\varphi)^*(\Sigma^s\ell)) = g^*(\Sigma^s x) = 0$, ezért értelmes $Sq_h^{q+1}(\Sigma^s\ell) \in H^{2q+s}(\Sigma^s X/Y)$.

Definíció. $\psi(x) = Sq_h^{q+1}(\Sigma^s\ell)(\Sigma^s[X]) \in Z_2$.

Ezzel definiáltunk egy $\psi : K^q(M, \partial M) \to Z_2$ függvényt.

42. Állítás. *ψ kvadratikus, azaz $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y) + (x \cup y)$ minden $x, y \in K^q(M, \partial M)$ esetén.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi_1, \varphi_2 : M/\partial M \to K$ olyan, hogy $(\varphi_1)^*(\ell) = x$ és $(\varphi_2)^*(\ell) = y$. Ekkor $\varphi_1 \times \varphi_2 : M/\partial M \to K \times K$ $(x+y)$-t indukálja $(\ell \times 1 + 1 \times \ell)$-ből. $K = K(Z_2, q)$ homotopikusan ekvivalens $K(Z_2, q+1)$ hurokterével, ezért H-tér, létezik egy $\mu : K \times K \to K$ szorzás. Erre teljesül, hogy $\mu^*(\ell) = \ell \times 1 + 1 \times \ell$, ezért a $\varphi = \mu \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)$ definícióval $\varphi^*(\ell) = (x+y)$.

Legyen $h_1 = \Sigma^s\varphi_1 \circ g$, $h_2 = \Sigma^s\varphi_2 \circ g$ és $h = \Sigma^s\varphi \circ g$, ekkor definíció szerint $\psi(x) = Sq_{h_1}^{q+1}(\Sigma^s\ell)(\Sigma^s[X])$, $\psi(y) = Sq_{h_2}^{q+1}(\Sigma^s\ell)(\Sigma^s[X])$ és $\psi(x+y) = Sq_h^{q+1}(\Sigma^s\ell)(\Sigma^s[X])$.

Tudjuk, hogy $\Sigma(K \times K)$ homotopikusan ekvivalens $\big(\Sigma K \vee \Sigma K \vee \Sigma(K \wedge K)\big)$-val (ld. Hatcher [3]), legyen a köztük menő két homotopikus ekvivalencia p és r. $[r] \in [\Sigma K \vee \Sigma K \vee \Sigma(K \wedge K), \Sigma(K \times K)] = [\Sigma K, \Sigma(K \times K)] \oplus [\Sigma K, \Sigma(K \times K)] \oplus [\Sigma(K \wedge K), \Sigma(K \times K)]$ három leképezés összegére bomlik, $r = \Sigma i_1 + \Sigma i_2 + \gamma$, ahol i_1 és i_2 a két $K \to K \times K$ beágyazás, és $\gamma : \Sigma(K \wedge K) \to \Sigma(K \times K)$.

Ekkor $h = \Sigma^s\mu \circ \Sigma^s(\varphi_1 \times \varphi_2) \circ g = \Sigma^s\mu \circ \Sigma^{s-1}r \circ \Sigma^{s-1}p \circ \Sigma^s(\varphi_1 \times \varphi_2) \circ g$ (hiszen $r \circ p$ homotóp $\Sigma(K \times K)$ identitásával). Ebben $\Sigma^{s-1}r = \Sigma^s i_1 + \Sigma^s i_2 + \Sigma^{s-1}\gamma$, ezért h három leképezés összegére bomlik. $\Sigma\mu \circ \Sigma i_1 \circ p : \Sigma(K \times K) \to \Sigma K$ valójában az első tényezőre való $K \times K \to K$ vetítés szuszpenziója, és hasonló mondható $(\Sigma\mu \circ \Sigma i_2 \circ p)$-ről is. Ezért h első két tagja $\Sigma^s\varphi_1 \circ g$ és $\Sigma^s\varphi_2 \circ g$, azaz h_1 és h_2. A harmadik tag legyen $h' = \Sigma^s\mu \circ \Sigma^{s-1}\gamma \circ \Sigma^{s-1}p \circ \Sigma^s(\varphi_1 \times \varphi_2) \circ g$. A 41. lemmát felhasználva $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y) + Sq_{h'}^{q+1}(\Sigma^s\ell)(\Sigma^s[X])$.

Legyen $\zeta = \Sigma^s\mu \circ \Sigma^{s-1}\gamma \circ \Sigma^{s-1}p : \Sigma^s(K \times K) \to \Sigma^s K$. Ekkor $\zeta^*(\Sigma^s\ell) = \Sigma^{s-1}\big(p^* \circ \gamma^* \circ (\Sigma\mu)^*(\Sigma\ell)\big) = \Sigma^{s-1}\big(p^* \circ \gamma^*(\Sigma(\ell \times 1 + 1 \times \ell)\big) = 0$. Ezért értelmes $Sq_\zeta^{q+1}(\Sigma^s\ell)$, és a 40. lemma szerint $Sq_{h'}^{q+1}(\Sigma^s\ell) = g^* \circ \Sigma^s(\varphi_1 \times \varphi_2)^*\big(Sq_\zeta^{q+1}(\Sigma^s\ell)\big)$. Belátható, hogy $Sq_\zeta^{q+1}(\Sigma^s\ell) = \Sigma^s(\ell \times \ell)$, ezért $Sq_{h'}^{q+1}(\Sigma^s\ell) = g^*\big(\Sigma^s(\varphi_1^*(\ell) \cup \varphi_2^*(\ell))\big) = g^*\big(\Sigma^s(x \cup y)\big) = \Sigma^s\phi(x \cup y)$ (a 21. állítás miatt). Itt $\phi(x \cup y) = D_X \circ f_*([M] \cap (x \cup y))$, ezért $Sq_{h'}^{q+1}(\Sigma^s\ell)(\Sigma^s[X]) = \phi(x \cup y)[X] = f_*([M] \cap (x \cup y))$.

Tehát $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y) + (x \cup y)$. □

Tegyük fel, hogy az (f, b) normál leképezés olyan, hogy $(f\big|_{\partial M})_* : H_*(\partial M) \to H_*(Y)$ izomorfizmus. A 35. lemma Z_2 együtthatós változata is igaz (és ugyanúgy bizonyítható), ezért ekkor $\cup$ nemszinguláris.

Definíció. $\sigma(f, b)$ a ψ Arf-invariánsa.

Azaz $\sigma(f, b) = \sum_{i=1}^{r} \psi(\lambda_i)\psi(\mu_i) \in Z_2$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_r$ egy szimplektikus bázis $K^q(M, \partial M)$-ben ($\lambda_i \cup \lambda_j = \mu_i \cup \mu_j = 0$ minden i, j-re, $\lambda_i \cup \mu_i = 1$, $\lambda_i \cup \mu_j = 0$, ha $i \neq j$). Ilyen bázis létezik, mert $\cup$ nemszinguláris, és $\sigma(f, b)$ jóldefiniált, azaz független a szimplektikus bázis választásától (ld. pl. [11]).

Megjegyzés. ψ egy Z_2 feletti véges dimenziós vektortéren van definiálva, tehát egy véges halmaz minden eleméhez 0-t vagy 1-et rendel. Az Arf invariáns megegyezik azzal az értékkel, amit ψ több helyen vesz fel.

A következőkben bebizonyítjuk σ legfontosabb tulajdonságait.

Tegyük fel, hogy $(M, \partial M)$ az $(M_1, \partial M_1)$ és $(M_2, \partial M_2)$ sokaságok összege $(M_0, \partial M_0)$ mentén, (X, Y) pedig $(X_1, Y_1 \cup X_0)$ és $(X_2, Y_2 \cup X_0)$ összege (X_0, Y_0) mentén.

Tegyük fel, hogy $f(M_i) \subseteq X_i$, legyen f leszűkítése M_i-re $f_i : (M_i, \partial M_i) \to (X_i, \partial X_i)$, b megfelelő leszűkítése b_i.

Ha $(f\big|_{\partial M})_* : H_*(\partial M) \to H_*(Y)$ és $(f\big|_{M_0})_* : H_*(M_0) \to H_*(X_0)$ izomorfizmus, akkor $(f\big|_{\partial M_i})_* : H_*(\partial M_i) \to H_*(\partial X_i)$ is izomorfizmus $(i = 1, 2)$, ezért definiálható $\sigma(f_i, b_i)$.

43. Állítás. *Ekkor* $\sigma(f, b) = \sigma(f_1, b_1) + \sigma(f_2, b_2)$.

Bizonyítás. A 11. állításból következik, hogy $K_q(M) \cong K_q(M_1) \oplus K_q(M_2)$. Ez egy B-ortogonális felbontás, mert M_1-beli és M_2-beli homológiaosztályok reprezentálhatóak diszjunkt láncokkal. Ez a duálisra vonatkozólag azt jelenti, hogy $K^q(M, \partial M) \cong K^q(M_1, \partial M_1) \oplus K^q(M_2, \partial M_2)$, és ez egy $\cup$-ortogonális felbontás. Ebből következik, hogy ψ Arf-invariánsa megegyezik a komponensekre vett leszűkítések Arf-invariánsának összegével (hiszen a komponensekben külön-külön vehetünk szimplektikus bázisokat).

Legyen ψ_i az M_i-beli ($K^q(M_i, \partial M_i)$-n értelmezett) kvadratikus függvény. A kohomológia komponensek beágyazását jelölje $\varrho_i : K^q(M_i, \partial M_i) \to K^q(M, \partial M)$. Ezt a $\beta_i : M/\partial M \to M/(M \setminus \operatorname{int} M_i) \approx M_i/\partial M_i$ leképezés indukálja.

Belátjuk, hogy $\psi\big|_{\varrho_i(K^q(M_i,\partial M_i))} = \psi_i$, ebből és az eddigiekből következik, hogy ψ Arf-invariánsa ψ_1 és ψ_2 Arf-invariánsának az összege.

Legyen $T(b)$ S-duálisa g, $T(b_i)$-é pedig g_i. Valamint legyen $\alpha_i : X/Y \to X_i/\partial X_i$ a β_i-nek megfelelő leképezés X-ben.

Ez a diagram kommutatív (ld. Browder [2]):

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^s(X/Y) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Sigma^s\alpha_i"] & \Sigma^s(M/\partial M) \arrow[d, "\Sigma^s\beta_i"] & \\
\Sigma^s(X_i/\partial X_i) \arrow[r, "g_i"] & \Sigma^s(M_i/\partial M_i) \arrow[r, "\Sigma^s\varphi_i"] & \Sigma^s K
\end{tikzcd}$$

Legyen $x \in K^q(M_i/\partial M_i)$, és $\varphi_i : M_i/\partial M_i \to K$ az ezt a kohomológiaosztályt indukáló leképezés. Legyen $h_i = \Sigma^s\varphi_i \circ g_i$, ekkor $\psi_i(x) = Sq_{h_i}^{q+1}(\Sigma^s\ell)(\Sigma^s[X_i])$.

$\varrho_i = \beta_i^*$, ezért a $\varrho_i(x)$-et indukáló leképezés $\varphi = \varphi_i \circ \beta_i$. Legyen $h = \Sigma^s\varphi \circ g = \Sigma^s\varphi_i \circ \Sigma^s\beta_i \circ g$, ekkor $\psi(\varrho_i x) = Sq_h^{q+1}(\Sigma^s\ell)(\Sigma^s[X])$.

A diagram kommutativitása miatt $h = \Sigma^s\varphi_i\circ\Sigma^s\beta_i\circ g = \Sigma^s\varphi_i\circ g_i\circ\Sigma^s\alpha_i = h_i\circ\Sigma^s\alpha_i$. Ezért alkalmazhatjuk a 40. lemmát: $Sq_h^{q+1}(\Sigma^s\ell) = (\Sigma^s\alpha_i)^*\big(Sq_{h_i}^{q+1}(\Sigma^s\ell)\big)$.

Ezeket felhasználva $\psi(\varrho_i x) = Sq_h^{q+1}(\Sigma^s\ell)(\Sigma^s[X]) = (\Sigma^s\alpha_i)^*\big(Sq_{h_i}^{q+1}(\Sigma^s\ell)\big)(\Sigma^s[X]) = \big(Sq_{h_i}^{q+1}(\Sigma^s\ell)\big)\big((\Sigma^s\alpha_i)_*(\Sigma^s[X])\big) = \big(Sq_{h_i}^{q+1}(\Sigma^s\ell)\big)(\Sigma^s[X_i]) = \psi_i(x)$. □

44. Állítás. *Ha* (W, M) $(2q+1)$*-dimenziós sokaság,* (Z, X) $(2q+1)$*-dimenziós Poincaré-pár,* (f, b) *normál leképezés,* $f : (W, M) \to (Z, X)$*,* $i : M \to W$ *a perem beágyazása és* $x \in K^q(W)$*, akkor* $\psi(i^*(x)) = 0$.

Bizonyítás. W/M homotopikusan ekvivalens $(W \cup CM)$-mel (ahol CM az M feletti kúp), ΣM pedig $(W\cup CM)/W$-vel, ezért a faktorleképezés indukál egy $d_W : W/M \to \Sigma M$ leképezést. Hasonlóan legyen $d_Z : Z/X \to \Sigma X$. Ezek 1 fokú leképezések, ezért $d_W([W]) = \Sigma[M]$ és $d_Z([Z]) = \Sigma[X]$.

Legyen $\varphi : W \to K$ olyan, hogy $\varphi^*(\ell) = x$. Legyen $g : \Sigma^s Z/X \to \Sigma^s W/M$ a $T(b)$, $g' : \Sigma^s X \to \Sigma^s M$ pedig a $T(b\big|_M)$ duálisa. Ekkor $h' = \Sigma^s\varphi \circ \Sigma^s i \circ g' : \Sigma^s X \to \Sigma^s K$ az a leképezés, amivel $\psi(i^*(x)) = Sq_{h'}^{q+1}(\Sigma^s\ell)(\Sigma^s[X])$-t definiáljuk.

Legyen $h = h' \circ \Sigma^{s-1}d_Z : \Sigma^{s-1}(Z/X) \to \Sigma^s K$. A korábbi megjegyzésünk szerint definiálható $Sq_h^{q+1}(\Sigma^s\ell)$ és a 40. lemma miatt $Sq_h^{q+1}(\Sigma^s\ell) = (\Sigma^{s-1}d_Z)^*\big(Sq_{h'}^{q+1}(\Sigma^s\ell)\big)$.

Ezt felhasználva $\psi(i^*(x)) = Sq_{h'}^{q+1}(\Sigma^s\ell)(\Sigma^s[X]) = Sq_{h'}^{q+1}(\Sigma^s\ell)\big((\Sigma^{s-1}d_Z)_*([Z])\big) =$

$\big((\Sigma^{s-1}d_Z)^*(Sq_{h'}^{q+1}(\Sigma^s\ell))\big)[Z] = \big(Sq_h^{q+1}(\Sigma^s\ell)\big)[Z].$

$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^{s-1}(Z/X) & \xrightarrow{g} & \Sigma^{s-1}(W/M) & & & & \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \Sigma^{s-1}d_Z} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Sigma^{s-1}d_W} & & & & \\
\Sigma^s X & \xrightarrow{g'} & \Sigma^s M & \xrightarrow{\Sigma^s i} & \Sigma^s W & \xrightarrow{\Sigma^s\varphi} & \Sigma^s K
\end{array}$$

Ez a diagram kommutatív (ld. Browder [2]), ezért $h = h'\circ\Sigma^{s-1}d_Z = \Sigma^s\varphi\circ\Sigma^s i\circ g'\circ\Sigma^{s-1}d_Z = \Sigma^s\varphi\circ\Sigma^s i\circ\Sigma^{s-1}d_W\circ g$. Ebben $\Sigma^s i\circ\Sigma^{s-1}d_W = \Sigma^{s-1}(\Sigma i\circ d_W)$ nullhomotóp, mert $\Sigma i\circ d_W$ az $M\longrightarrow W\longrightarrow W/M\longrightarrow\Sigma M\longrightarrow\Sigma W\longrightarrow\Sigma W/\Sigma M\longrightarrow\dots$ Puppe-sorozat két szomszédos leképezésének kompozíciója. Ebből következik, hogy h nullhomotóp, tehát $\psi(i^*(x)) = \big(Sq_h^{q+1}(\Sigma^s\ell)\big)[Z] = 0$. □

45. Állítás. *Ha* (W,M) $(2q+1)$*-dimenziós sokaság,* (Z,X) $(2q+1)$*-dimenziós Poincaré-pár,* (f,b) *normál leképezés,* $f:(W,M)\to(Z,X)$*, akkor* $\sigma(f\big|_M, b\big|_M) = 0$.

Bizonyítás. Legyen $i: M\to W$ a beágyazás. Vegyük a 10. állításban szereplő egzakt sorozatokat, és a Poincaré-dualitás által köztük indukált diagramot:

$$\begin{array}{ccccc}
K^q(W) & \xrightarrow{i^*} & K^q(M) & \longrightarrow & K^{q+1}(W,M) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle [W]\cap} & & \Big\downarrow{\scriptstyle [M]\cap} & & \Big\downarrow{\scriptstyle [W]\cap} \\
K_{q+1}(W,M) & \longrightarrow & K_q(M) & \xrightarrow{i_*} & K_q(W)
\end{array}$$

Ebben a függőleges nyilak izomorfizmusok, és a sorok egzaktak, ezért $[M]\cap\operatorname{Im} i^* = \operatorname{Ker} i_*$, tehát $\dim\operatorname{Im} i^* = \dim\operatorname{Ker} i_*$. Másrészt, mivel az együtthatócsoport Z_2, ezért a 7. állítás azt adja, hogy $K^q(W)\cong\operatorname{Hom}(K_q(W),Z_2)$ és $K^q(M)\cong\operatorname{Hom}(K_q(M),Z_2)$, és i^* az i_* Hom-duálisa. Ezért $\dim\operatorname{Im} i^* = \dim\operatorname{Im} i_*$. A homomorfizmus-tétel szerint pedig $\dim K_q(M) = \dim\operatorname{Ker} i_* + \dim\operatorname{Im} i_*$. Az eddigieket összerakva azt kapjuk, hogy $\dim K^q(M) = 2\dim\operatorname{Im} i^*$.

A 44. állítás miatt ha $x\in\operatorname{Im} i^*$, akkor $\psi(x) = 0$.

Tudunk egy olyan $\lambda_1,\dots,\lambda_r,\mu_1,\dots,\mu_r$ szimplektikus bázist venni $K^q(M)$-ben, amire $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ az $\operatorname{Im} i^*$ bázisa: Vegyünk egy $\lambda_1\in\operatorname{Im} i^*$ nem 0 elemet. Mivel $\cup$ nemszinguláris, ezért létezik egy μ_1, amire $\lambda_1\cup\mu_1 = 1$. $\mu_1\notin\operatorname{Im} i^*$, különben $\psi(\lambda_1+\mu_1) = \psi(\lambda_1)+\psi(\mu_1)+(\lambda_1\cup\mu_1) = 0+0+1 = 1$, ami ellentmondás, mert $\lambda_1+\mu_1\in\operatorname{Im} i^*$. A bázis kiválasztását ugyanígy folytathatjuk a λ_1 és μ_1 által generált altér $\cup$-ortogonális kiegészítőjén.

Ebből következik, hogy $\sigma(f\big|_M, b\big|_M) = \sum_{i=1}^r \psi(\lambda_i)\psi(\mu_i) = 0$. □

46. Állítás. *Tegyük fel, hogy* $f : (M, \partial M) \to (X, Y)$ *1 fokú normál leképezés,* $(f\big|_{\partial M})_* : H_*(\partial M) \to H_*(Y)$ *izomorfizmus, és* (f, b) *relatív normál kobordáns* (f', b')*-vel. Ekkor* $\sigma(f, b) = \sigma(f', b')$.

Bizonyítás. A 38. állítás bizonyításához hasonlóan, ha van egy relatív normál kobordizmus (f, b) és (f', b') között, az tekinthető egy olyan normál leképezésnek, ami a peremen $M \cup_{\partial M} M'$ és $X \cup_Y X$ közötti leképezés. A 45. állítás miatt ezen a peremen σ értéke 0. A 43. állítás miatt pedig megegyezik $\sigma(f, b) + \sigma(f', b')$-vel. Tehát $\sigma(f, b) + \sigma(f', b') = 0 \in Z_2$, ezért $\sigma(f, b) = \sigma(f', b')$. □

3.3. Páros n

Most folytatjuk a főtétel bizonyítását, azt az esetet vizsgáljuk, amikor n páros, azaz $n = 2q$ (és $q \geq 3$).

Először bebizonyítjuk, hogy a $\sigma(f, b) = 0$ feltétel szükséges.

47. Tétel. *Ha* (f, b) *relatív normál kobordáns egy homotopikus ekvivalenciával, akkor* $\sigma(f, b) = 0$.

Bizonyítás. Ha f homotopikus ekvivalencia, akkor $K^q(M, \partial M) = 0$ miatt $\sigma(f, b) = 0$. Ha (f, b) relatív normál kobordáns egy (f', b')-vel, ahol f' homotopikus ekvivalencia, akkor $\sigma(f', b') = 0$, másrészt a 38. vagy a 46. állítás miatt $\sigma(f, b) = \sigma(f', b')$. Tehát $\sigma(f, b) = 0$. □

A továbbiakban azt bizonyítjuk, hogy ha $\sigma(f, b) = 0$, akkor (f, b) átépíthető homotopikus ekvivalenciává.

A páratlan esethez hasonlóan $K_q(M) \cong \pi_{q+1}(f)$, ezért alkalmazható az 1. állítás: $K_q(M)$ tetszőleges eleme reprezantálható f egy $\bar{f} : \bar{M} \to X$ kiterjesztésével. A 17. tétel és a 15. állítás szerint egy $\mathfrak{o} \in \pi_q(V_k(R^{q+k})) \neq 0$ obstrukciója van annak, hogy ementén tudjunk átépítést végezni.

Először belátjuk, hogy $K_q(M)$ szabad Abel-csoport, és megnézzük, hogy hogyan változik, ha tudunk átépítést végezni.

48. Állítás. *Ha* f *q-összefüggő, akkor* $K_q(M)$ *szabad Abel-csoport.*

Bizonyítás. A Poincaré-dualitás és a 10. állítás miatt $K_q(M) \cong K^q(M, \partial M) \cong K^q(M)$. A 7. állítás szerint pedig $K^q(M) \cong \operatorname{Ext}(K_{q-1}(M), Z) \oplus \operatorname{Hom}(K_q(M), Z) \cong \operatorname{Hom}(K_q(M), Z)$ (hiszen $K_{q-1}(M) = 0$).

Tehát $K_q(M) \cong \operatorname{Hom}(K_q(M), Z)$, ezért $K_q(M)$ szabad. □

Tegyük fel, hogy λ direkt összeadandót generál $K_q(M)$-ben, és M átépíthető λ mentén. Most is a korábban bevezetett jelöléseket használjuk: $\varphi : S^q \times D^q \hookrightarrow \operatorname{int} M$ a λ reprezentánsa, a kivágott sokaság $M_0 = M \setminus \operatorname{int} \varphi(S^q \times D^q)$, az átépítés eredménye M', az új normál leképezés (f', b'). Legyen $i : M_0 \hookrightarrow M$ a beágyazás, és $\varepsilon = \varphi\big|_{S^q \times \{s\}}([S^q]) \in H_q(M_0)$ (ahol $s \in S^{q-1}$ tetszőleges) a λ-nak megfelelő homológiaosztály M_0-ban, ekkor $i_*(\varepsilon) = \lambda$.

49. Lemma. *f' is q-összefüggő, és* $\operatorname{rk} K_q(M') = \operatorname{rk} K_q(M) - 2$.

Bizonyítás. A 23. lemma miatt f' $(q-1)$-összefüggő.

Az (M, M_0) pár homologikus egzakt sorozata:

$$0 \longrightarrow H_q(M_0) \longrightarrow H_q(M) \xrightarrow{\cdot\lambda} Z \xrightarrow{\delta} H_{q-1}(M_0) \longrightarrow H_{q-1}(M) \longrightarrow 0$$

Ahol a relatív homológia csoportok:

$$H_j(M, M_0) \cong H_j(S^q \times D^q, S^q \times S^{q-1}) \cong \begin{cases} Z & \text{ha } j = q \text{ vagy } 2q \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

A $H_q(M) \to H_q(M, M_0) \cong Z$ homomorfizmus a λ-val vett metszési szám (ez ugyanúgy bizonyítható, mint a 26. lemmában). Mivel $K_q(M) \cong K_q(M, \partial M)$ (10. állítás) és ez direkt összeadandó $H_q(M, \partial M)$-ben (5. állítás), ezért λ $H_q(M, \partial M)$-ben is végtelen ciklikus direkt összeadandót generál. Ezért $(\cdot\lambda) : H_q(M) \to Z$ szürjektív, így $\delta = 0$, tehát $H_{q-1}(M_0) \cong H_{q-1}(M)$ és $\operatorname{rk} H_q(M_0) = \operatorname{rk} H_q(M) - 1$.

Az (M', M_0) pár homologikus egzakt sorozata:

$$Z \xrightarrow{\delta'} H_q(M_0) \longrightarrow H_q(M') \longrightarrow 0 \longrightarrow H_{q-1}(M_0) \longrightarrow H_{q-1}(M') \longrightarrow 0$$

Ahol:

$$H_j(M', M_0) \cong H_j(D^{q+1} \times S^{q-1}, S^q \times S^{q-1}) \cong \begin{cases} Z & \text{ha } j = q+1 \text{ vagy } 2q \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

$\delta'(1) = \varepsilon$ (ld. 26. lemma), ez végtelen rendű, mert $i_*(\varepsilon) = \lambda$ végtelen rendű, tehát $\operatorname{rk} H_q(M') = \operatorname{rk} H_q(M_0) - 1$. Az is leolvasható, hogy $H_{q-1}(M') \cong H_{q-1}(M_0)$.

Az eddigieket összefoglalva: $H_{q-1}(M') \cong H_{q-1}(M_0) \cong H_{q-1}(M)$, amiből következik, hogy $K_{q-1}(M') \cong K_{q-1}(M) = 0$. Tehát $H_q(f') = 0$ (6. állítás), vagyis f' is q-összefüggő. Az előző állítás szerint ekkor $K_q(M')$ szabad Abel-csoport. $\operatorname{rk} H_q(M') = \operatorname{rk} H_q(M_0) - 1 = \operatorname{rk} H_q(M) - 2$ miatt pedig $\operatorname{rk} K_q(M') = \operatorname{rk} K_q(M) - 2$. $\square$

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy mikor lehet egy homológiaosztály mentén átépíteni M-et.

Páros q

Legyen $x \in K_q(M) \cong \pi_{q+1}(f)$, vegyük ennek egy, az 1. állítás szerint $\bar{f}$ reprezentánsát (a $\varphi_0 : S^q \hookrightarrow M$ beágyazásra ekkor $(\varphi_0)_*([S^q]) = x$), ehhez definiáljuk az $\mathfrak{o} \in \pi_q(V_k(R^{k+q}))$ obstrukciót, ennek egy reprezentánsát jelölje o.

50. Lemma. $\mathfrak{o} = 0 \Leftrightarrow x \cdot x = 0$.

Bizonyítás. Jelölje $\varphi_0(S^q)$ M-beli normálnyalábját ν. Azt fogjuk belátni, hogy mindkét feltétel ekvivalens azzal, hogy ν triviális.

Legyen $c : V_k(R^{k+q}) \to G_q(R^{k+q})$ az a leképezés, ami egy R^{k+q}-beli vektor-k-ashoz hozzárendeli az általuk kifeszített altér ortogonális kiegészítőjét (úgy irányítva, hogy a vektor-k-as és a kiegészítő altér pozitív irányítása együtt kiadja R^{k+q} pozitív irányítását). A $G_q(R^{k+q}) \to G_q(R^\infty) = BSO_q$ a beágyazást jelölje i. $\mathfrak{o}$ definíciójából látható, hogy $c \circ o : S^q \to G_q(R^{k+q})$ pont $\varphi_0(S^q)$ M-beli normálnyalábját indukálja a Grassmann-sokaság feletti tautologikus nyalábból. Ezért $i \circ c \circ o$ a ν Gauss-leképezése, tehát ν pontosan akkor triviális, ha $i_* \circ c_*(\mathfrak{o}) = 0 \in \pi_q(BSO_q)$.

Legyen $p : SO_q \to S^{q-1}$ a vetítés, a $\pi_{q-1}(SO_q) \cong \pi_q(BSO_q)$ izomorfizmust felhasználva az általa indukált leképezés $p_* : \pi_q(BSO_q) \to \pi_{q-1}(S^{q-1}) \cong Z$. A 15. állítás szerint $\pi_q(V_k(R^{k+q})) \cong Z$ ezért $p_* \circ i_* \circ c_* : \pi_q(V_k(R^{k+q})) \to \pi_{q-1}(S^{q-1})$ egy $Z \to Z$ homomorfizmus. Vegyük a standard $S^q \hookrightarrow R^{k+q}$ beágyazást, ennek a normálnyalábja triviális, egy trivializálása definiál egy $S^q \to V_k(R^{k+q})$ leképezést, legyen ennek a homotópiaosztálya θ. Ekkor $i_* \circ c_*(\theta)$ a $\mathcal{T}S^k$ Gauss-leképezése, ezért $p_* \circ i_* \circ c_*(\theta) = 2[\mathrm{id}_{S^{q-1}}] \in \pi_{q-1}(S^{q-1})$ (a 14. állítás miatt, felhasználva, hogy q páros).

Ebből következik, hogy $p_* \circ i_* \circ c_*$ nem 0, tehát injektív, ezért $i_* \circ c_*$ is injektív. Tehát ν pontosan akkor triviális, ha $\mathfrak{o} = 0$.

A 39. állítás bizonyításában láttuk, hogy $\mathfrak{o}(\nu) = r\mathfrak{o}(\mathcal{T}S^q)$ valamilyen r egészre, és $x \cdot x = e(\nu) = re(\mathcal{T}S^q) = 2r$ (hiszen q páros). Ezért $x \cdot x$ pontosan akkor 0, ha $r = 0$. Másrészt ez ekvivalens azzal, hogy ν triviális, azaz $\mathfrak{o}(\nu) = 0$ (ugyanis $\mathfrak{o}(\mathcal{T}S^q)$ végtelen rendű, mert a 14. állítás szerint egy Z-be képező homomorfizmus, p_*, nem 0-ba viszi). Tehát ν pontosan akkor triviális, ha $x \cdot x = 0$. □

51. Tétel. *Ha q páros és $\sigma(f, b) = 0$, akkor $K_q(M)$ megölhető.*

Bizonyítás. $\sigma(f, b) = 0$ miatt $\cup$ indefinit $K^q(M, \partial M)$-en. Ebből következik, hogy van olyan $x' \in K^q(M, \partial M)$, amire $x' \cup x' = 0$ (ld. Serre [12] vagy Milnor [8]). Feltehetjük, hogy x' oszthatatlan, azaz direkt összeadandót generál. Legyen x' duálisa $x \in K_q(M)$, ekkor x is direkt összeadandót generál, és $x \cdot x = 0$. Az 50. lemma szerint ekkor végezhető normál átépítés x mentén, a 49. lemma miatt pedig az átépítéssel csökken $K_q(M)$ rangja. A 38. állításból következik, hogy σ normál átépítéskor nem változik, ezért az átépített sokaságra is alkalmazható az előbb leírt eljárás. Ezt egészen addig folytathatjuk, amíg $K_q(M)$ el nem tűnik. □

Páratlan q

Most is azt vizsgáljuk, hogy egy adott $x \in K_q(M)$ homológiaosztály mentén mikor lehet normál átépítést végezni. x-et tudjuk az 1. állítás szerint reprezentálni, és tartozik hozzá egy $\mathfrak{o} \in \pi_q(V_k(R^{k+q})) \cong Z_2$ obstrukció (17. tétel és 15. állítás).

Legyen x Poincaré-duálisa $x' \in K^q(M, \partial M)$, és ennek Z_2 együtthatós redukciója $(x')_2 \in K^q(M, \partial M; Z_2)$.

52. Lemma. *Ha $\mathfrak{o} = 0$, akkor $\psi((x')_2) = 0$.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{o} = 0$, akkor végezhető normál átépítés x mentén, legyen az átépített sokaság M', a köztük lévő relatív normál kobordizmus W. Legyenek a beágyazások $k : M \to \partial W$ és $i : \partial W \to W$. Mivel x mentén végeztük az átépítést, ezért $i_*(k_*(x)) = 0$.

Legyen $p : \partial W \to M/\partial M$ az a leképezés, ami M belsején kívül mindent 1 pontba visz. Legyen x (pontosabban $k_*(x)$) Poincaré-duálisa ∂W-ben x'', ekkor $x'' = p^*(x')$.

A 10. állítás alapján létezik egy ilyen diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
K^q(W) & \xrightarrow{i^*} & K^q(\partial W) & \longrightarrow & K^{q+1}(W,\partial W) \\
\big\downarrow{\scriptstyle [W]\cap} & & \big\downarrow{\scriptstyle [\partial W]\cap} & & \big\downarrow{\scriptstyle [W]\cap} \\
K_{q+1}(W,\partial W) & \longrightarrow & K_q(\partial W) & \xrightarrow{i_*} & K_q(W)
\end{array}$$

Mivel $k_*(x) \in \operatorname{Ker} i_*$, ezért az egzaktság miatt a duálisa $x'' \in \operatorname{Im} i^*$, azaz $x'' = i^*(z)$ valamilyen $z \in K^q(W)$-re.

W-n van egy $F : (W, \partial W) \to (X \times [0,1], \partial(X \times [0,1]))$ normál leképezés, ennek a leszűkítése normál leképezés a peremen. Legyen ψ_0 a $K^q(\partial W; Z_2)$-n meghatározott kvadratikus függvény. A 43. és 46. állítás bizonyításában láttuk, hogy ilyenkor ψ_0 az M-en adott ψ és az M'-n adott új kvadratikus függvény ortogonális direkt összege, és $\psi_0(p_*((x')_2)) = \psi((x')_2)$. A 45. állításból pedig azt látjuk, hogy $\psi_0(\operatorname{Im} i^*) = 0$, speciálisan tehát $\psi_0(i^*(z)) = 0$.

Az eddigieket összerakva: $\psi((x')_2) = \psi_0(p_*((x')_2)) = \psi_0((x'')_2) = 0$ (hiszen $x'' = i^*(z)$). □

53. Lemma. *Ha $\mathfrak{o} = 1$, akkor $\psi((x')_2) = 1$.*

Bizonyítás. Legyen M' az M és $S^q \times S^q$ összefüggő uniója, és legyen $p : M' \to M$ az a leképezés, ami az $(M \setminus D^{2q})$-hoz ragasztott $(S^q \times S^q \setminus D^{2q})$-t egy pontba viszi. Ekkor vehetünk M'-n egy (f', b') normál leképezést, ahol $f' = f \circ p$. $K_q(M')$ ekkor $K_q(M)$ és Z^2 B-ortogonális direkt összege, ahol a Z^2 rész két generátora $H_q(S^q \times S^q)$ két generátorának felel meg.

Legyen a két új generátor $a_1, a_2 \in K_q(M')$, a duálisaik $g_1, g_2 \in K^q(M', \partial M)$. Ekkor $a_i \cdot a_i = 0$ és $a_1 \cdot a_2 = 1$, ezért hasonló teljesül g_1-re és g_2-re is.

Legyen az x-nek megfelelő elem $K_q(M')$-ben $\bar{x}$, ennek duálisa $\bar{x}'$, ekkor $\bar{x}' = p^*(x')$. Legyen ψ' az új kvadratikus függvény $K^q(M', \partial M; Z_2)$-n. A 43. állítás bizonyításában láttuk, hogy ekkor $\psi'(p^*((x')_2)) = \psi((x')_2)$. Tehát $\psi'((\bar{x}')_2) = \psi((x')_2)$.

$(g_1)_2$, $(g_2)_2$, és $(g_1)_2 + (g_2)_2$ közül legalább az egyiken ψ' értéke 1 (mert ha mindhárom 0, akkor a $\psi'((g_1)_2 + (g_2)_2) = \psi'((g_1)_2) + \psi'((g_2)_2) + ((g_1)_2 \cup (g_2)_2)$ egyenlőség $0 = 0 + 0 + 1$ alakú lenne), jelölje ezt az elemet $(g)_2$, ami az $a \in K_q(M')$ duálisának Z_2 együtthatós redukáltja. Ekkor az előző lemmából következik, hogy az a mentén való normál átépítés obstrukciója $\mathfrak{o}_a = 1$.

Az $x+a$ mentén való normál átépíthetőség obstrukciója $\mathfrak{o}_{x+a} = \mathfrak{o} + \mathfrak{o}_a = 1 + 1 = 0$. Ez általánosabban is igaz: ha két homológiaosztály diszjunkt $S^q \to M$ beágyazásokkal reprezentálható, akkor az összegükhöz tartozó obstrukció az obstrukciók összege. (Ezt a következő módon láthatjuk be: Vegyük a két beágyazás ,,összefüggő unióját": kössük össze őket egy M-beli szakasszal, ennek egy csőszerű környezetének a pereme és a két eredeti gömb (kis D^q golyók kihagyásával) együtt az összeget reprezentáló beágyazás. Egy obstrukciót a beágyazott S^q gömb stabil normálnyalábjának egy trivializálásából, és M normálnyalábjának S^q-ra vett leszűkítésének trivializálásából számolunk ki. Amikor az összeget reprezentáló gömbön vesszük ezeket a trivializásokat, akkor feltehetjük, hogy az eredeti gömbökre vett leszűkítéseik pont azok a trivializálások, amelyekből az eredeti obstrukciókat számoltuk. Ebből következik, hogy ilyen esetekben az összeg obstrukciója az obstrukciók összege.)

Az előző lemma miatt $\psi'((\bar{x}')_2 + (g)_2) = 0$. Mivel $x \cdot a = 0$ (hiszen diszjunkt beágyazásokkal reprezentálhatóak), ezért ekkor $\psi'((\bar{x}')_2) + \psi'((g)_2) = 0$. Itt az első tag $\psi((x')_2)$, a második pedig 1, tehát $\psi((x')_2) = 1$. □

54. Tétel. *Ha q páratlan és $\sigma(f,b) = 0$, akkor $K_q(M)$ megölhető.*

Bizonyítás. $\sigma(f,b) = 0$ azt jelenti, hogy ψ Arf-invariánsa 0. Ekkor létezik olyan $y \in K^q(M, \partial M; Z_2)$ nem 0 elem, amire $\psi(y) = 0$. Mivel f q-összefüggő, ezért a 7. állítás szerint $K^q(M; Z_2) \cong K^q(M) \otimes Z_2$. A 10. állítás miatt ekkor $K^q(M, \partial M; Z_2) \cong K^q(M, \partial M) \otimes Z_2$, tehát $y = (z)_2$ valamilyen $z \in K^q(M, \partial M)$-re. Ha z nem oszthatatlan, akkor páratlan többszöröse egy direkt összeadandót generáló z_0 elemnek (mert különben $(z)_2 = 0$). Ekkor $(z_0)_2 = (z)_2 = y$. Legyen z_0 duálisa $x \in K_q(M)$. Az előző lemma miatt az x-hez tartozó obstrukció 0 (mert $\psi((z_0)_2) = 0$), ezért végezhető normál átépítés x mentén. A 49. lemma szerint az új f' leképezés is q-összefüggő, és $K_q(M)$ rangja csökken. A 46. állítás miatt $\sigma(f', b')$ 0 lesz az új normál leképezésre is. Ezért ez az eljárás ismételhető egészen addig, amíg $K_q(M)$ el nem tűnik. □

4. Alkalmazás a sokaságok osztályozásában

A sokaságok osztályozásának egy alapvető kérdése, hogy egy adott (X, Y) CW-pár esetén létezik-e olyan sima sokaság, ami vele homotopikusan ekvivalens, ill. hogy hány ilyen létezik.

Ahhoz, hogy létezzen ilyen sokaság, szükséges feltétel, hogy (X, Y) Poincaré-pár legyen. Egy másik szükséges feltételt ad a 19. állítás: (X, Y) Spivak normál fibrálása álljon elő egy vektornyaláb gömbnyalábjaként. Az állítás bizonyításából azt is kiolvashatjuk, hogy egy f homotopikus ekvivalencia felett mindig létezik egy nyalábleképezés a normálnyalábból ebbe a vektornyalábba, azaz f kiegészíthető (f, b) normál leképezéssé.

Ez azt jelenti, hogy a klasszifikáció kérdése visszavezethető normál leképezések vizsgálatára.

Tegyük fel, hogy (X, Y) n-dimenziós Poincaré-pár, és adott egy ξ k-dimenziós vektornyaláb X felett ($k \gg n$). Ha van egy 1 fokú normál leképezés (X, Y)-ba, akkor az meghatároz egy olyan $\alpha \in \pi_{n+k}(T\xi, T\xi\big|_Y)$ elemet, amire $h(\alpha) \cap u_\xi = [X]$ (ld. 19. állítás utáni megjegyzés). Ha két normál leképezés normál kobordáns, akkor ugyanazt a α elemet határozzák meg (mert a normál kobordizmus megad egy homotópiát köztük).

Megfordítva, ha adott egy ilyen $\alpha \in \pi_{n+k}(T\xi, T\xi\big|_Y)$, akkor vehetjük ennek egy olyan $(D^{n+k}, S^{n+k-1}) \to (T\xi, T\xi\big|_Y)$ reprezentánsát, ami transzverzális (X, Y)-ra, ekkor (X, Y) ősképe egy n-dimenziós sima sokaság, $(M, \partial M)$, a leképezés leszűkítése M-re 1 fokú, M egy csőszerű környezetén pedig nyalábleképezés M normálnyalábjából ξ-be. Az α homotópiaosztálya normál kobordizmus erejéig határozza meg az így kapott normál leképezést.

Ez a két hozzárendelés meghatároz egy bijekciót az (X, Y)-ba menő 1 fokú normál leképezések normál kobordizmus osztályai és az olyan $\alpha \in \pi_{n+k}(T\xi, T\xi\big|_Y)$ elemek között, amelyekre $h(\alpha) \cap u_\xi = [X]$.

A következő két tétel arra ad elégséges feltételt, hogy egy normál kobordizmus osztályban mikor van homotopikus ekvivalencia:

55. Tétel (Browder, Novikov)**.** *Legyen X n-dimenziós, egyszeresen összefüggő Poincaré-tér, ξ k-dimenziós vektornyaláb X felett. Ha (f,b) 1 fokú normál leképezés, $f: M \to X$, $b: \nu \to \xi$, és n páratlan, vagy $n = 4l$ és $\sigma(X) = \big(L_l(p_1(\xi^{-1}), \dots, p_l(\xi^{-1}))\big)[X]$ (ahol L_l a Hirzebruch-polinom), és $n \geq 5$, $k \geq n+2$, akkor (f,b) normál kobordáns egy olyan (f', b')-vel, amire f' homotopikus ekvivalencia.*

Bizonyítás. Páratlan n esetén ez speciális esete a főtételnek. Ha $n = 4l$, akkor $\sigma(f,b) = \frac{1}{8} I(f) = \frac{1}{8}(\sigma(M) - \sigma(X))$. És Hirzebruch szignatúra tétele szerint $\sigma(M) = \big(L_l(p_1(\mathcal{T}M), \dots, p_l(\mathcal{T}M))\big)[M] = \big(L_l(p_1(\nu^{-1}), \dots, p_l(\nu^{-1}))\big)[M]$, ez pedig a Pontrjagin-osztályok természetessége és $f^*(\xi) = \nu$ miatt egyenlő a tételben szereplő kifejezéssel. Tehát ekkor $\sigma(f,b) = 0$, és a főtételből következik az állítás. □

56. Tétel. *Legyen (X,Y) n-dimenziós Poincaré-pár, X egyszeresen összefüggő, $Y \neq \emptyset$, (f,b) normál leképezés, $f: (M, \partial M) \to (X,Y)$. Ha $(f\big|_{\partial M})_*: H_*(\partial M) \to H_*(Y)$ izomorfizmus, és $n \geq 5$, akkor létezik olyan (g,c) normál leképezés, $g: (U, \partial U) \to (D^n, S^{n-1})$, hogy $g\big|_{\partial U}: \partial U \to S^{n-1}$ homotopikus ekvivalencia, és $((f \#_\partial g), (b \#_\partial c))$ relatív normál kobordáns egy homotopikus ekvivalenciával.*

$((f \#_\partial g), (b \#_\partial c))$ a normál leképezések perem menti összefüggő unióját jelöli, $(f \#_\partial g): (M, \partial M) \#_\partial (U, \partial U) \to (X,Y) \#_\partial (D^n, S^{n-1}) \approx (X,Y)$ (ld. Browder [2])

Bizonyítás. A 22. tétel szerint létezik olyan (g,c), amire $\sigma(g,c) = -\sigma(f,b)$. Ekkor (a 37. vagy a 43. állítás miatt) $\sigma((f \#_\partial g), (b \#_\partial c)) = 0$, és a főtételből következik az állítás. □

Megjegyzés. (f,b) normál kobordáns $((f \#_\partial g), (b \#_\partial c))$-vel. Ugyanis feltehetjük, hogy $f \#_\partial g: (M, \partial M) \#_\partial (U, \partial U) \to (X,Y) \#_\partial (D^n, S^{n-1}) \approx (X,Y)$ az U-nak megfelelő részt Y-ba viszi (mert D^n pontrahúzható). Ezután vegyük ennek az intervallummal vett szorzatát, ez $(M \#_\partial U) \times [0,1]$-en egy szorzat alakú normál leképezés, ennek a pereme $(M \#_\partial U) \times \{0\} \cup \partial(M \#_\partial U) \times [0,1] \cup (M \#_\partial U) \times \{1\}$. Ez $M \cup V \cup (M \#_\partial U)$ alakú, ahol V-t a feltevésünk szerint Y-ba viszi a leképezés, tehát ez egy megfelelő normál kobordizmus.

Ez azt jelenti, hogy a peremes esetben minden normál leképezés, ami a perem homológiáin izomorfizmust indukál, normál kobordáns egy homotopikus ekvivalenciával.

57. Tétel (Novikov)**.** *Legyen X n-dimenziós egyszeresen összefüggő Poincaré-tér, (f_i, b_i) két normál kobordáns normál leképezés ($i = 0, 1$), ahol $f_i : M_i \to X$ homotopikus ekvivalencia. Ha $n \geq 4$, akkor létezik olyan (g, c) normál leképezés, $g : (U, \partial U) \to (D^{n+1}, S^n)$, hogy $g\big|_{\partial U} : \partial U \to S^n$ homotopikus ekvivalencia, és (f_0, b_0) h-kobordáns $(f_1 \# g\big|_{\partial U}, b_1 \# c\big|_{\partial U})$-val (azaz van köztük egy olyan normál kobordizmus, ami h-kobordizmus M_0 és $(M_1 \# \partial U)$ között).*

Bizonyítás. Legyen (F, B) az (f_0, b_0) és (f_1, b_1) közötti normál kobordizmus, $F : W \to X$. Létezik olyan $h : W \to [0, 1]$ függvény, amire $h^{-1}(0) = M_0$ és $h^{-1}(1) = M_1$, ez F-fel együtt meghatároz egy $F' : (W, M_0 \cup M_1) \to (X \times [0, 1], X \times \{0\} \cup X \times \{1\})$ leképezést, B pedig egy F' feletti B'-t, amivel (F', B') normál leképezés. Erre teljesülnek az előző tétel feltételei, ezért létezik olyan (g, c) normál leképezés, $g : (U, \partial U) \to (D^{n+1}, S^n)$, hogy $g\big|_{\partial U} : \partial U \to S^n$ homotopikus ekvivalencia, és $((F' \#_\partial g), (B' \#_\partial c))$ (ahol feltételezzük, hogy az M_1 peremkomponensnél vettük a perem menti összefüggő uniót) relatív normál kobordáns egy homotopikus ekvivalenciával. Ez utóbbi legyen (F'', B''), $F'' : (W'', M_0 \cup (M_1 \# \partial U)) \to (X \times [0, 1], X \times \{0\} \cup X \times \{1\})$. Mivel ezt egy relatív normál kobordizmussal kaptuk, ezért a peremekre vett leszűkítései (f_0, b_0) és $(f_1 \# g\big|_{\partial U}, b_1 \# c\big|_{\partial U})$.

W'' pedig h-kobordizmus, azaz a peremkomponensek beágyazásai homotopikus ekvivalenciák. Ez abból következik, hogy $F'' : W'' \to X \times [0, 1]$, $f_0 : M_0 \to X$ és $f_1 \# g\big|_{\partial U} : M_1 \# \partial U \to X$ mind homotopikus ekvivalenciák (az utolsó azért, mert ∂U homotopikus gömb, ezért $M_1 \# \partial U$ homotopikusan ekvivalens M_1-el; és mert $g\big|_{\partial U}$, g leszűkítése a pontrahúzható D^{n+1}-be képez). □

Megjegyzés. A parallelizálható sokaságokat határoló homotopikus n-gömbök (ilyenek fordulhatnak elő itt ∂U-ként) bP_{n+1} csoportjáról Kervaire és Milnor ([6]) bebizonyította, hogy véges és ciklikus. Ld. még Levine [7], ill. [11].

58. Tétel (Wall)**.** *Legyen (X, Y) n-dimenziós Poincaré-pár, $Y \neq \emptyset$, X, Y egyszeresen összefüggő, (f, b) normál leképezés, $f : (M, \partial M) \to (X, Y)$. Ha $n \geq 6$, akkor (f, b) normál kobordáns egy olyan (f', b')-vel, amire f' homotopikus ekvivalencia. Ez az (f', b') h-kobordizmus erejéig egyértelmű.*

Bizonyítás. (f, b) leszűkítése ∂M-re egy normál leképezés pereme, ezért a 38. vagy a 46. állítás miatt $\sigma(f\big|_{\partial M}, b\big|_{\partial M}) = 0$. Ezért a főtétel miatt ez normál kobordáns egy homotopikus ekvivalenciával, legyen (F, B) a köztük lévő normál kobordizmus, $F : W \to Y$, $\partial W = \partial M \cup N$. W-t és M-et összeragaszthatjuk ∂M mentén, ezen (f, b) és (F, B) megad egy normál leképezést, ez legyen (f', b'). Ennek a szorzata az intervallummal (F', B'), ahol $F' : (W \cup M) \times [0, 1] \to (X, Y)$, és $W \times [0, 1]$ az Y-ba képződik. Ennek a pereme $(M \cup W) \times \{0\} \cup N \times [0, 1] \cup (M \cup W) \times \{1\}$, és ez a perem $M \cup V \cup (M \cup W)$ alakú, ahol V az Y-ba képződik. Ezért ez egy normál kobordizmus (f, b) és (f', b') között. Tehát (f, b) normál kobordáns egy olyan normál leképezéssel, ami a peremen (N-en) homotopikus ekvivalencia, és ezért izomorfizmust indukál a perem homológiáin. Az 56. tétel, ill. az utána következő megjegyzés szerint ez normál kobordáns egy homotopikus ekvivalenciával.

Most legyen (f_i, b_i) $(i = 0, 1)$ két normál kobordáns normál leképezés, amikre $f_i : (M_i, \partial M_i) \to (X, Y)$ homotopikus ekvivalencia. Legyen a köztük lévő normál kobordizmus (F, B), ekkor F tekinthető $(W, V) \to (X \times [0, 1], Y \times [0, 1])$ leképezésnek, és ezért $(W, V) \to (X \times [0, 1], X \times \{0\} \cup Y \times [0, 1] \cup X \times \{1\})$-be menőnek is. Ez Poincaré-pár, ezért alkalmazható az 56. tétel: $((F \#_\partial g), (B \#_\partial c))$ relatív normál kobordáns egy homotopikus ekvivalenciával. Ha a (g, c)-vel való perem menti összefüggő uniót W peremének V részén készítettük el, akkor az új homotopikus ekvivalenciának a peremében ott van M_1 és M_2 (ill. (f_1, b_1) és (f_2, b_2)). Az előző tételhez hasonlóan beláthatjuk, hogy egy h-kobordizmust kaptunk ezek között. □

Irodalomjegyzék

[1] W. Browder, *Poincare Spaces, Their Normal Fibrations and Surgery.* Inventiones Math. 17, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New york, pp. 191-202, 1972.

[2] W. Browder, *Surgery on Simply-Connected Manifolds.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[3] A. Hatcher, *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 559 pp., 2002.

[4] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, McGraw-Hill Book Company, 300 pp., 1966

[5] M. A. Kervaire, *Lectures on The Theorem of Browder And Novikov And Siebenmann's Thesis.* Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 94 pp., 1969.

[6] M. A. Kervaire, J. W. Milnor, *Groups of Homotopy Spheres: I.* The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 77, No. 3, pp. 504-537, 1963.

[7] J. P. Levine, *Lectures on groups of homotopy spheres.* In: Algebraic and Geometric Topology, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1126, Springer-Verlag, New york, Berlin, Heidelberg, pp. 62-95, 1985.

[8] J. W. Milnor, *A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds.* Symposia in Pure Math. A.M.S., vol. III, pp 39-55, 1961.

[9] J. W. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem.* Princeton University Press, Princeton, New Yersey, 116 pp., 1965.

[10] J. W. Milnor, J. D. Stasheff, *Characteristic classes.* Princeton University Press, Princeton, New Yersey and University of Tokyo Press, 330 pp., 1974.

[11] Cs. Nagy, *Egzotikus Gömbök.* Budapest, ELTE TTK Szakdolgozat, kézirat, 54 p., 2010.

[12] J-P Serre, *Formes bilinéaires symétriques entieres a discriminant* $\pm$ *1.* Séminaire Henri Cartan, tome 14 (1961-1962), exp. n 14-15, pp 1-16, 1962.

[13] C. T. C. Wall, *Poincare Complexes: I.* The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 86, No. 2, pp. 213-245, 1967.