Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Horváth Vanda

Optimális bifenyvesek és kapcsolatuk az értékelt matroidokkal

Szakdolgozat
Matematikus MSc

Témavezető: Dr. Frank András, intézetigazgató
Operációkutatási Tanszék

Budapest, 2013

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Gráfelméletben a fenyőkről, fenyvesekről sok eredmény, tétel van, mint például Edmonds gyenge és erős fenyőtétele a k élidegen fenyves létezéséről, és sok probléma megoldható kombinatorikus úton, vagy esetleg matroidokat, és a matroidmetszet algoritmust használva, mint például a minimális összköltségű k élidegen fenyő keresése. Felmerülhet azonban egy kicsit általánosabb kérdés, amikor már nem egy pontból szeretnénk irányított úton eljutni minden más pontba, hanem a gráf csúcshalmaza ketté van osztva S és T halmazokra, és S minden pontjából el szeretnénk jutni irányított úton T-be, illetve T minden pontjába el szeretnénk jutni valamelyik S-beli pontból. Egy ilyen tartalmazásra nézve minimális élhalmazt neveznek bifenyvesnek.

A bifenyves keresése, illetve optimális bifenyves keresése közös általánosítása az optimális fenyő keresésének és páros gráfban minden pontot lefogó optimális élhalmaz keresésének. Nem meglepő, hogy ehhez a problémához a matroidelméleti ismereteket érdemes kibővíteni az értékelt matroidokra, amelyek a matroidok általánosításai.

A diplomamunkám elején áttekintem az optimális bifenyvesre adott algoritmusokat, melyek jellegzetességei, hogy mindegyik lineáris programozásra épül. A dolgozat második felében bevezetem az értékelt matroid fogalmát, ismertetem a főbb tudnivalókat, amelyek jó részénél felfedezhető a matroidokkal való hasonlóság. Utána beszélek az értékelt matroid-metszet algoritmusról, pontosabban annak egy kis általánosításáról. Az utolsó részben pedig megmutatom, hogyan lehet a bifenyves problémáját a metszetalgoritmus segítségével megoldani. Kitérek a két élidegen bifenyves kérdésére is, ami saját megoldás. Az értékelt matroidmetszettel való megközelítés új algoritmust ad, ami már nem lineáris optimalizásra, hanem negatív kör keresésére épül.

1. Optimális bifenyvesek

Ebben a fejezetben bevezetem a bifenyves kérdésköréhez szükséges fogalmakat, elsősorban [14] alapján végignézem a meglévő egyszerű állításokat, tételeket. Majd pedig áttekintem az optimális bifenyves problémáját megoldó algoritmusokat, némelyiket részletesen, némelyiket csak vázolva. Az algoritmusokban közös, hogy mindegyik primál-duál megoldási módszert, vagyis lineáris programozást használ az optimális bifenyves megtalálására.

1.1. Az optimális bifenyves alaptulajdonságai

1.1.1. Definíció. *Legyen adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf, és legyen adott egy S, T partíciója V-nek. Tekintsük a következő $(*)$ tulajdonságot:*

$(*)$ T minden pontja elérhető irányított úton egy tetszőleges S-beli pontból, és S minden pontjából elérhető irányított úton egy tetszőleges T-beli pont.

*Az élek egy B részhalmazát **bifenyvesnek** nevezik, ha a $(*)$-tulajdonság teljesül rá, de semmilyen részhalmazára nem teljesül.*

Vegyük észre, hogy a bifenyvesre adott definíció ekvivalens azzal, hogy az S egy s ponttá összehúzásával a párhuzamos éleket elhagyva egy s-gyökerű fenyőt kapunk, és T egy t ponttá összehúzásával a párhuzamos éleket elhagyva egy t-gyökerű kofenyőt (fordított fenyőt) kapunk. Ebből következik, hogy egy bifenyves nem tartalmazhat T-ből S-be menő élt, és feltehető, hogy nem tartalmaz ilyen élt a $D = (V, A)$ gráf.

A bifenyvesnek két speciális esete jól ismert. Egyik, ha az S vagy a T halmaz egypontú, ekkor az előbbiek alapján fenyőt illetve kofenyőt kapunk. Másik eset, ha $G = (S, T; A)$ páros gráf, ekkor az éleket S-ből T-be irányítva egy bifenyves megfelel egy olyan irányítatlan élhalmaznak, amely minden pontot fed, és tartalmazásra nézve minimális.

Az optimális súlyú bifenyvesnek egy speciális esete, ha minimális elemszámú bifenyvest keresünk. Erre a következő tétel ad megoldást:

1.1.2. Tétel. *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, legyen S, T egy partíciója V-nek, és tegyük fel, hogy S minden pontjából vezet irányított út T-be, és T minden pontjába vezet irányított út S-ből. Ekkor*

$$\min\{|B| : B \text{ élhalmaz bifenyvest határoz meg } \} =$$

$$= \max\{|X| : X \subseteq V, X \text{ nem feszít } S - T \text{ élt}\}$$

Bizonyítás. Legyen B egy bifenyves, X olyan halmaz, amely nem feszít $S-T$ élt. $\forall v \in X \cap S$-re válasszunk egy B-beli v-ből kilépő élt, $\forall v \in X \cap T$-re válasszunk egy v-be belépő B-beli élt. Mivel X nem feszít $S-T$ élt, ezért ezek az élek diszjunktak, vagyis $|B| \geq |X|$, tehát a minimum legalább annyi, mint a maximum.

Jelölje S' azon S-beli pontok halmazát, amelyeknek van szomszédja T-ben, és T' azon T-beli pontoknak a halmazát, amelyeknek van szomszédja S-ben. Tekintsük az $G' = (S', T'; A[S', T'])$ páros gráfot. Jelöljön B' egy minimális élszámú pontlefogást, és X' egy maximális elemszámú stabil halmazt. A Kőnig-tétel Gallai identitások segítségével kiadódó direkt következménye, hogy egy izolált pontot nem tartalmazó páros gráfban a pontokat fedő élek minimális száma egyenlő a maximális stabil élhalmaz méretével. Eszerint $|B'| = |X'|$. Vegyük észre, hogy B' kibővíthető bifenyvessé $V - S' \cup T'$ számú él hozzáadásával, és $X' \cup (V - S' \cup T')$ olyan halmaz, ami nem feszít $S-T$ élt. Így találtunk egy olyan B, X párt, ahol egyenlőség van. $\square$

Tegyük fel, hogy adott a gráfon egy $w : A \to Z^+$ élsúlyozás is, és így keressük a minimális súlyú bifenyvest. Vegyük észre, hogy a bifenyvesek az $0 \neq Y \subseteq T$, vagy $T \subseteq Y \neq V$ halmazokba legalább 1 éllel belépnek.

Tekintsük a következő lineáris leírást:

$$x(a) \geq 0 \text{ minden } a \text{ élre}$$

$$\varrho_x(Y) \geq 1 \text{ minden } Y\colon 0 \neq Y \subseteq T \text{ vagy } T \subseteq Y \neq V$$

ahol $\varrho_x(Y)$ az Y-ba belépő élek x-értékének összegét jelöli.

1.1.3. Tétel. *A*

$$x(a) \geq 0 \textit{ minden } a \textit{ élre}$$

$$\varrho_x(U) \geq 1 \textit{ minden } Y\colon 0 \neq Y \subseteq T \textit{ vagy } T \subseteq Y \neq V$$

rendszer TDI, és így a poliéder éppen a bifenyvesek politópjának felső burka.

Bizonyítás. Legyen A az a mátrix, amelynek a sorai az $0 \neq Y \subseteq T$ és $V \neq Y \supseteq T$ halmazoknak felelnek meg, oszlopai az éleknek, és egy i, j helyen 1 van, ha az él belép a halmazba. Ekkor:

Primál:	**Duál:**
$Ax \geq 1$	$yA \leq w$
$x \geq 0$	$y \geq 0$
$\min wx$	$\max \sum y(U)$

Tekintsünk egy optimális y duálmegoldást. Ha van két metsző Y_1, Y_2 halmaz, amelyekre $Y_1 \subseteq T$, $Y_2 \subseteq T$, $y(Y_1) > 0$, $y(Y_2) > 0$, akkor azokat keresztezzük ki, vagyis legyen $\alpha = \min\{y(Y_1), y(Y_2)\}$, csökkentsük $y(Y_1)$-t és $y(Y_2)$-t α-val, továbbá növeljük $y(Y_1 \cap Y_2)$-t és $y(Y_1 \cup Y_2)$-t α-val. Könnyen látszik, hogy a kapott új y' duálmegoldás lesz, amelyhez ugyanakkora duál-optimum tartozik. Járjunk el hasonlóan az Y_1, Y_2 halmazokra, amelyekre $Y_1 \supseteq T$, $Y_2 \supseteq T$, és $y(Y_1) > 0$, $y(Y_2) > 0$. Ezt ismételve mivel az y racionális volt, véges eljárást kapunk. Így azok a halmazok, amelyekre az $y > 0$, keresztezés-mentes halmazrendszert alkotnak. Ekkor létezik egy $H = (U, F)$ irányított fa és V pontjainak egy ϕ leképezése U-ba, hogy a keresztezés-mentes halmazrendszer tagjai és a fa élei egyértelműen megfelelnek egymásnak, éspedig olyan módon, hogy tetszőleges e élre $\phi^{-1}(V_e)$ az e-nek megfelelő halmaz a keresztező halmazrendszerben [3]. (V_e a fának az e él elhagyásával keletkező komponenset jelöli, amelybe e belép.) Tekintsük egy $\vec{uv} \in D$ esetén $\phi(u)$ és $\phi(v)$ között a fában az irányítatlan utat, ekkor ebben az előre élek folyamatosan helyezkednek el. Ugyanis ha lenne egy b, d előre él és egy c hátra él b, c, d sorrendben, akkor $\phi^{-1}(V_b)$, $\phi^{-1}(V_c)$, $\phi^{-1}(V_d)$ ellentmondana a keresztezés-mentességnek, vagy annak, hogy minden halmaz vagy tartalmazza T-t, vagy része T-nek. Jelölje az előre élek alkotta irányított út végpontjait u', v', ekkor A mátrix egy olyan $D' = (V, A')$ gráf hálózati mátrixának felel meg, ahol $A' = \{\vec{u'v'} : uv \in A\}$. Ekkor viszont TDI. □

1.1.4. Megjegyzés. *A bizonyítás analóg módon történik, hogyha $\varrho_x(U) \geq k$-t teszünk fel, és az $x \leq 1$ feltétele sem változtat sem a TDI tulajdonságon, sem azon, hogy az optimális duálmegoldás választható laminárisnak.*

1.1.5. Következmény. *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, legyen $w : A \to Z^+$ súlyozás az éleken. Ekkor*

$$\min\{w(B) : B \textit{ bifenyves }\} = \max\{|\mathcal{Y}| : Y \in \mathcal{Y} \textit{ olyan, hogy } 0 \neq Y \subseteq T \textit{ vagy}$$

$$T \subseteq Y \neq V \textit{ és minden él legfeljebb } w\textit{-be lép bele közülük}\}$$

□

1.1.6. Tétel. *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, legyen S, T a csúcsok egy partíciója. Ekkor az éldiszjunkt bifenyvesek maximális száma megegyezik a legkisebb olyan Y halmaz méretével, amelyre $0 \neq Y \subseteq T$ vagy $T \subseteq Y \neq V$.*

Bizonyítás. Legyen Y olyan, hogy $0 \neq Y \subseteq T$ vagy $T \subseteq Y \neq V$, ekkor világos hogy legfeljebb $\varrho(Y)$ diszjunkt bifenyves lehet. Legyen $k = \min\{\varrho(Y) : Y \subseteq T$ vagy $T \subseteq Y$ de $Y \neq \emptyset, V\}$. Tekintsük a D/S gráfot, Edmonds diszjunkt fenyő tételéből tudjuk, hogy tartalmaz k diszjunkt fenyőt, és hasonlóan D/T tartalmaz k diszjunkt kofenyőt. Válasszuk ezeket a fenyőket és kofenyőket úgy, hogy a nekik az eredeti gráfban megfelelő $B_1, \dots, B_k$ és a $B'_1, \dots, B'_k$ élhalmazokra $\sum_i \sum_{j \neq i} |B_i \cap B'_j|$ a lehető legkisebb legyen. Ha 0, akkor $B_i \cup B'_i$ élhalmazok diszjunkt bifenyveseket adnak, vagyis készen vagyunk.

Először $k = 2$-re bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $|B_1 \cap B'_2| > 0$.

Legyen $X = (B_1 \cup B_2) \cap A[T]$, $X' = (B'_1 \cup B'_2) \cap A[S]$, $Y = (B_1 \cup B_2) \cap A[S, T]$, $Y' = (B'_1 \cup B'_2) \cap A[S, T]$. Legyen $\mathcal{K}$ a (T, X) irányított gráf erősen összefüggő forráskomponenseinek halmaza és legyen $\mathcal{K}'$ az (S, Y) gráf erősen összefüggő nyelőkomponenseinek halmaza. Ekkor $\varrho_Y(K) = \varrho_{B_1 \cup B_2}(K) \geq 2$ minden $K \in \mathcal{K}$-ra, és $\varrho_{Y'}(K') = \varrho_{B'_1 \cup B'_2}(K') \geq 2$ minden $K' \in \mathcal{K}'$-re.

Azt állítjuk, hogy Y szétosztható Y_1, Y_2-re és Y' szétosztható Y'_1, Y'_2-re úgy, hogy $\varrho_{Y_i}(K) \geq 1$ minden $K \in \mathcal{K}$-ra, $\delta_{Y'_i}(K') \geq 1$ minden $K' \in \mathcal{K}'$-re és $Y_1 \cap Y'_2 = \emptyset$, valamint $Y_2 \cap Y'_1 = \emptyset$.

Ez a következőképpen tehető meg: válasszunk ki 2-2 élt minden $\mathcal{K}$-beli komponens számára. Ezek az élek diszjunktak. Hasonlóan $\mathcal{K}'$-re. Tekintsük azt a páros gráfot, amelynek egyik osztálya $\mathcal{K}$ elemei, másik osztálya $\mathcal{K}'$ elemei, és vegyük be a kiválasztott éleket. Az élgráfjában nincsen páratlan kör, így az élgráf páros gráf, és annak az osztályai jók lesznek kettéosztásnak. Ekkor X is kettéosztható X_1, X_2 fenyvesekre, ahol X_i gyökere Y_i fejei. Tegyük ugyanis fel, hogy nem, vagyis másképpen Edmonds erős fenyőtétele szerint a D/S-ben a megkezdett F_1, F_2 részfenyők nem befejezhetőek, ahol F_i-t Y_i adja. Mivel minden halmazba lépett két él, ez azt jelenti, hogy létezik halmaz, hogy az összes belépő éle már belekerült az egyik F_i-be. Ez azonban nem lehet, hiszen $V(X)$ minden erősen összefüggő forráskomponensbe mindkettő belelép. Hasonlóképpen X' is szétosztható X'_1, X'_2-re.
Ekkor $X_i \cup Y_i \cup Y'_i \cup X'_i$ is bifenyvesek lesznek, és diszjunktak, ami ellentmond a $\sum_i \sum_{j \neq i} |B_i \cap B'_j|$ minimális választásának.

A $k = 2$ segítségével az általános eset már könnyen kapható: ha van olyan i, j indexpár, amelyekre $|B_i \cap B'_j| > 0$, az előzőhöz hasonló módon eljárva diszjunktizálható. □

1.1.7. Következmény. *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, legyen S, T a csúcsok egy partíciója, és legyen adott egy $w : A \to Z_+$ kapacitás függvény. Ekkor*

$$\max\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ bifenyvesek családja, minden él} \leq w \text{ bifenyvesben van}\} =$$

$$= \min\{w(Y) : 0 \neq Y \subseteq T \text{ vagy } T \subseteq Y \neq V\}$$

Bizonyítás. Minden él helyett tegyünk be $w(e)$ élt. Ekkor az 1.1.6 tétel pontosan a kívánt állítást adja. $\square$

1.2. Algoritmusok optimális bifenyves keresésére

Legyen $D = (V, A)$ és $D' = (V, A')$ irányított gráfok ugyanazon a csúcshalmazon. Azt mondjuk, hogy az $A'' \subseteq A$ élhalmaz a $D' = (V, A')$ gráfot erősen összefüggővé teszi, hogyha $(V, A' \cup A'')$ gráf erősen összefüggő.

Schrijver [13] megmutatta, hogy az ellipszoid módszert használva létezik polinomiális algoritmus minimális súlyú A'' élhalmaz keresére, amivel a $D' = (V, A')$ gráf erősen összefüggővé tehető, feltéve, hogy D' minden forráspontja és nyelőpontja között vezet irányított út. (Vegyük észre, hogy a feltétel nélkül a probléma NP-teljes, ugyanis $A' = \emptyset$ esetén a minimális súlyú erősen összefüggő részgráf problémáját kapjuk, ami NP-teljes.) Ennek segítségével adható polinomiális algoritmus a minimális súlyú bifenyves problémájára is. Legyen $D = (V, A)$ a gráf, amelyben keressük a minimális súlyú $S - T$ bifenyvest. Tekintsük a következő $D' = (V, A')$ gráfot, ahol $A' = \{\vec{ts} : t \in T, s \in S\}$. Ekkor A'' pontosan akkor bifenyves D-ben, hogyha A'' élhalmaz a D' gráfot erősen összefüggővé teszi.

Hatékony algoritmus minimális súlyú bifenyvesre.

Keijsper és Pendavingh [6] mutatott egy hatékony algoritmust egy minimális súlyú bifenyves keresésére, ebben a részben ezt fogom ismertetni. Mivel a minimális súlyú bifenyves magába foglalja mind a minimális súlyú fenyő problémáját, mind páros gráfban a minimális súlyú minden pontot fedő élhalmaz problémáját. Ez utóbbi visszavezethető a maximális súlyú párosítás problémájára: Legyen $D = (S, T; A)$ páros gráf $w : A \to Z_+$ élsúllyal. Jelölje $\mu(v) = min\{w(a) : a$ illeszkedik v-re$\}$, és legyen a_v olyan v-re illeszkedő él, melyre $w(a_v) = \mu_v$. $w'(uv) = \mu_u + \mu_v - w(uv)$ jelöléssel ha M maximális w'-súlyú párosítás, akkor $M \cup \{a_v :\ v$-t nem fedi $M\}$ minimális w-súlyú fedő élhalmaz. Tehát a minimális bifenyvesre adott algoritmus nem lehet egyszerűbb, mint a Fulkerson algoritmus és a maximális súlyú párosítást megoldó algoritmus.

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf egy $w : A \to Z_+$ élsúllyal, és legyen S, T a csúcsok egy partíciója. Tegyük fel, hogy van benne bifenyves. Tekintsük azt az M mátrixot, aminek a sorai az $U \subseteq S$, $U \subseteq T$ halmazok, az élek az oszlopai, és a mátrixban 1-es van, ha az él fedi a halmazt, és 0 ha nem fedi, ahol $U \subseteq S$ esetén a kilépő éleket nevezzük fedő élnek, $U \subseteq T$ esetén a belépő éleket. Ekkor

$$\min\{wx : x \geq 0, Mx \geq 1\} = \max\{y\mathbf{1} : y \geq 0, yM \leq w\},$$

1.1.3 alapján a rendszer TDI, és az optimális y választható laminárisnak.

Komplementaritási feltételek:

$$x_a > 0 \Rightarrow (yM)_a w(a)$$

$$y_U > 0 \Rightarrow (Mx)_U = 1$$

Rögzített y duális megoldásra definiálhatjuk a redukált költséget:

$$w'(a) = w(a) - \sum\{y(U) : a \text{ belép } U\text{-ba}, U \subseteq S \text{ vagy } U \subseteq T\}$$

Ennek segítségével a komplementaritási feltételek átalakíthatóak a következő alakra: egy B bifenyvesből és egy y duálmegoldásból álló pár optimális:

$$a \in B \Rightarrow w'(a) = 0$$

$$y_U > 0 \Rightarrow \ U \text{ pontosan 1 } B\text{-beli éllel van fedve}$$

Vegyük észre, hogy y duálmegoldás akkor és csak akkor, ha $y \geq 0$, $w' \geq 0$.

$V' \subseteq V$, $A' \subseteq A$ esetén jelölje $D(V', A')$ azt a részgráfot, melynek csúcsai a V'-beli elemek, élei azon A'-beli elemek, amelyek mindkét végpontja V'-beli. Továbbá $\mathcal{U} \subseteq \{U : U \subseteq S \text{ vagy } U \subseteq T\}$ halmazcsaládra jelölje $y(\mathcal{U}) = \sum_{U \in \mathcal{U}} y(U)$.

Az algoritmus folyamán végig megmarad, hogy a $\mathcal{L} = \{U : y(U) > 0\}$ lamináris, és teljesülnek a következő feltételek:

(P0) y duális megoldás

(P1) (a) Ha U maximális $\mathcal{L}$-ben, akkor U legfeljebb 1 B-beli éllel van fedve, vagy U egypontú halmaz $y(U) = 0$-val, és csak $S - T$-élekkel van fedve.

(b) Ha U nem maximális $\mathcal{L}$-ben, akkor egyértelműen létezik $b \in B$ él, ami őt fedi, de a szülőjét nem.

(c) Minden $U \in \mathcal{L}$ erősen összefüggő.

(P2) Ha $a \in B$, akkor $w'(a) = 0$.

Ezenkívül legyen $D_c = (V_c, A_c)$ az a gráf, amelyet az $\mathcal{L}$-beli maximális halmazok összehúzásával kapok a hurokélek eltávolítása után. Az így kapott gráf csúcsai megfelelnek $\mathcal{L}$-beli halmazoknak, ezért y természetes módon definiálható rajtuk. Továbbá mivel $\mathcal{L}$-beli halmazok nem metszik S-et és T-t egyszerre, ezért S_c, T_c is természetes módon adódik. Jelölje $B_c = B \cap A_c$.

Az algoritmus a $B = \emptyset$, az $\mathcal{L} = \{\{v\} : v \in V\}$, $y(L) = 0$ $(L \in \mathcal{L})$ kezdeti értékekkel indul. Erre teljesülnek a feltételek.

1.fázis: ismételjük, amíg van S_c-ben B által nem fedett pont:

1. Keressünk S_c-ben egy u fedetlen pontot, és egy minimális w'-súlyú u-ból kilépő a élt
2. Növeljük $y(u)$-t $w'(a)$ értékkel, tegyük bele a-t B-be
3. Ha B tartalmaz irányított kört, húzzuk össze egy ponttá

Vegyük észre, hogy mivel csak S_c-beli pontokból kiinduló éleket veszek, a keletkező körök benne vannak S_c-ben.

Egyszerűen látszik, hogy az első fázis során a $P0 - P2$ feltételek megmaradnak. A keletkező új y duális megoldás lesz, mert minimális w'-súlyú élt választottam, $(P1)(a), (b)$ nyilvánvalóan teljesül, mivel csak irányított köröket húzok össze, $(P1)(c)$ is, és $y(u)$ növelése miatt az új $w'(a) = 0$ lesz. Továbbá, mivel minden lépésnél $\mathcal{L}$ egy eleme le lesz fedve, $\mathcal{L}$ laminaritása miatt legfeljebb $2|S| - 1$-szer ismételhetem a lépést. Az 1. fázis végére ráadásul S minden részhalmaza le lesz fedve. Ha lenne egy $W \subseteq S$, ami nincs lefedve, az a $(P1)(c)$ miatt maximális $\mathcal{L}$-beliek uniója lenne, amelyek mindegyike le van fedve B-beli éllel. Ha W nincsen, akkor a maximális halmazok által meghatározott pontok között van irányított kör, amit nem húztunk össze, és ez ellentmondás az algoritmussal.

Definiáljunk egy $H = (V_c \cup \{r, s\}; A(H))$ gráfot, l élsúlyozással, és legyenek az élek a következőek:

- Minden $a = \vec{uv} \in A_c$ amelyre $u \in S_c$ és $v \in T_c$, vegyünk be egy $\vec{uv}$ élt $w'(a)$ súllyal
- Minden $b = \vec{uv} \in B_c$ amelyre $u \in S_c$ és $v \in T_c$, vegyünk be egy fordított $\vec{vu}$ élt $-w'(a)$ (vagyis 0) súllyal
- Minden $a = \vec{uv} \in A_c$ amelyre $u \in T_c$ és $v \in T_c$, és v csak egy éllel van fedve, vegyünk be egy $\vec{rv}$ élt $w'(a)$ súllyal
- Minden $b = \vec{uv} \in B_c$ amelyre $u \in S_c$ és $v \in S_c$, vegyünk be egy $\vec{ru}$ élt $-w'(b)$ (vagyis 0) súllyal
- Minden olyan $v \in T_c$ csúcshoz, amely több éllel van fedve, vegyünk be egy $\vec{rv}$ élt 0 súllyal

- Minden olyan $v \in S_c$ csúcshoz, amely $\mathcal{L}$-ben egypontú halmaznak felel meg, és nincs fedve $S_c - S_c$ éllel, vegyünk be egy $\vec{rv}$ élt $y(v)$ súllyal

- Minden $v \in T_c$ csúcsra, ami még nincs fedve, vegyünk be egy $\vec{vs}$ élt 0 súllyal.

Egy H-beli P útra jelölje $A(P)$ a P útnak megfelelő éleket A_c-ben.

1.2.1. Lemma. *Ha P irányított $r - s$ út H-ban, akkor $B\Delta A(P)$ olyan élhalmaz, amely fed minden olyan pontot D_c-ben, amit B fedett, és fed egy olyan pontot is, amit D_c nem fedett. Továbbá, ha $l(P) = 0$, akkor a $(P0) - (P2)$ tulajdonságok átöröklődnek B-ről $B\Delta A(P)$-re is.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy lehetséges P utat. Vegyük észre, hogy az első és utolsó élétől esetleg eltekintve ez csak úgy nézhet ki, hogy S_c és T_c-beli pontok között alternál, és T_c-ből S_c-be mindig fordított B_c-beli élen lép. Az utolsó él mindig egy új pont fedését biztosítja. És az $\vec{rv}$ élek is úgy vannak definiálva, hogy a fedést az úton való csere megtartsa.

Ha $l(P) = 0$, akkor $l \geq 0$ miatt minden P-beli él súlya 0. Ezért $(P2)$ és $(P1)(a)$ igaz marad. A többi triviálisan látszik. $\square$

2.fázis: ismételjük, amíg van T_c-ben B által nem fedett pont:

1. Keressünk egy legrövidebb $r - s$ utat H-ban, és minden $v \in V_c$ csúcsra számoljuk ki az l szerinti $d(rv)$ távolságot.

2. Minden $v \in S_c$-re vonjuk le $d(v)$-t $y(v)$-ből, és minden $v \in T_c$-re adjuk hozzá $d(v)$-t $y(v)$-hez.

3. Módosítsuk B-t $B\Delta A(P)$-re.

4. Ha az új B tartalmaz D_c-ben irányított kört, húzzuk össze a kört egy ponttá.

Ha fenn szeretnénk tartani, hogy y duális megoldás, akkor kis módosításra van szükségünk. Ha a második lépésben egy $v \in S_c$ csúcsra $d(v) > y(v)$, akkor v csúcsot bontsuk ki, vagyis tegyük be azt az irányított kört, amiből összehúztuk, kivéve azt az egy élét, amely abba a csúcsba megy, amibe a v csúcsba menő él megfeleltje megy. Ennek megfelelően az 1. lépésben a legrövidebb utak megtalálására alkalmazott Dijkstra algoritmust kicsit módosítani kell:

Módosított Dijkstra: Legyen kezdetben $d(r) = 0$, és $d(v) = \infty$ minden más csúcsra. Ismételjük, amíg van vizsgálatlan csúcs.

(i) Keressük egy $\bar{v} \in V(H)$ vizsgálatlan, minimális $d(\bar{v})$ értékű csúcsot.

(ii) Keressünk egy $\bar{u} \in S_c$ vizsgálatlan, minimális $y(\bar{u})$ értékű csúcsot.

(iii) Ha $d(\bar{v}) \leq y(\bar{u})$, akkor a Dijstra-nak megfelelően módosítsuk a d-értékeket, és tegyük $\bar{v}$-t a megvizsgált csúcsok közé.

Különben $y(\bar{u})$ értékét adjuk hozzá $\bar{u}$ minden u' gyerekének y értékéhez, $y(\bar{u})$-t csökkentsük 0-ra, és $\bar{u}$-t bontsuk ki. Ha u' $\bar{u}$-nak azon gyereke, amelyet a $\bar{u}$-ba lépő él fed, akkor ha u' egyelemű $\mathcal{L}$-ben, akkor legyen $d(u') = y(u')$, különben pedig $d(u') = \infty$. A többi gyerekre a d értéke legyen $y(\bar{u})$ eredeti értéke.

Vegyük észre, hogy $d(\bar{v}) > y(\bar{u})$ csak olyan $\bar{u}$ esetén fordulhat elő, amely nem egyelemű $\mathcal{L}$-ben. Tegyük fel, hogy $\bar{u}$ egyelemű $\mathcal{L}$-ben. Ha nem fedi B-ben $S - S$ él, akkor az $\vec{r\bar{u}}$ él benne van H-ban $y(\bar{u})$ súllyal. Ha pedig fedi a $b \in B$ él, akkor $\vec{r\bar{u}}$ él $-w'(b) = -w(b) + y(\bar{u}) \leq y(\bar{u})$ súllyal van H-ban. Így $d(\bar{v}) \leq d(\bar{u}) \leq y(\bar{u})$ miatt $d(\bar{v}) > y(\bar{u})$ nem állhat fönn.

1.2.2. Lemma. *A módosított Dijkstra algoritmus során megmaradnak a következő tulajdonságok:*

(A) Minden H-beli élnek nemnegatív súlya van.

(B) Egy megvizsgált v csúcsra $d(v)$ megegyezik a legrövidebb $r - v$ út hosszával H-ban.

(C) Egy nem vizsgált csúcsra $d(v) = \min\{d(x) + l(x, v) : \ x \text{ megvizsgált}\}$.

Bizonyítás. A Dijkstra kezdetekor ezek a tulajdonságok igazak. Ha egy lépésben nincsen kibontás, akkor a lépés után nyilvánvalóan igazak maradnak. Tegyük fel, hogy van kibontás $\bar{u}$-nál. Ekkor a bekerülő élek hossza legalább $y(\bar{u})$, és vizsgált x csúcsra $d(x) \leq y(\bar{u})$. Így $(A), (B)$ igaz marad a lépés végére is. Azt kellene belátni, hogy $\bar{u}$-nak u' gyerekére teljesül, hogy $d(u') = \min\{d(x) + l(x, u') : \ x \text{ megvizsgált}\}$. A kibontás után bekerülhet $\vec{ru'}$ él a H gráfba. Ha nem kerül be, akkor azt állítjuk, hogy $d(u') = \infty$, vagyis ha u'-nek van megvizsgált szomszédja H-ban, az csak r lehet. Tegyük fel, hogy x megvizsgált szomszédja u-nak, ekkor x csak T_c-ben lehet, és létezik egy $\vec{u'x}$ él B-ben. Ennek az élnek a kibontás előtt is a gráfban kellett lennie, így a hossza 0. Így $d(\bar{u}) = d(x) \leq y(\bar{u}) < d(\bar{v})$, ellentétben $d(\bar{v})$ minimalitásával. Így u'-nek csak az r lehet szomszédja a kibontás után H-ban, és ekkor $d(u') =$ $= \min\{d(x) + l(x, u') : \ x \text{ megvizsgált}\} = d(r) + l(r, u') = l(r, u')$. □

A második fázis (2)-ben kihasználom azt, hogy a $d(v)$ értékek nem végtelenek. Tegyük fel, hogy $v \in V_c$-re $d(v) = \infty$. Ekkor S_c minden csúcsa vagy megvizsgált, vagy teljesen ki van bontva, így v csak T_c-ben lehet, ekkor azonban a $d(v) = \infty$ azt jelenti, hogy nincsen bifenyves az eredeti gráfban a feltevéssel ellentétben. Hasonló okok miatt mindig van H-ban $r - s$ út.

1.2.3. Állítás. *A 2.fázis minden ismétlésénél B fedi az $\mathcal{L}$ egy újabb elemét, és a $(P0) - (P2)$ feltételek megmaradnak. A fázis legfeljebb $2|T| - 1$ ismétlésből állhat, és a fázis végére minden $U \subseteq S$ és $U \subseteq T$ halmaz fedve van.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy a feltételek teljesülnek a fázis elején. Az első lépésben $(P1)$ fennmarad, mivel a kibontás megőrzi $(P1)$-et, és minden $X \subseteq S$ halmaz fedve marad. A 2. lépés sem rontja el $(P1)$-et, ugyanis az olyan $v \in T_c$ csúcsokra, amelyek többször vannak fedve, a $d(v)$ távolság 0 lesz, így $y(v) + d(v) = y(v)$, vagyis $y(v)$ továbbra is 0 marad. Az 1-2. lépés után $(P0), (P2)$ is továbbra is igaz: y nemnegativitása a kibontás miatt megmarad. Egy $S - S$ élre $w'(a)$ elvileg negatívvá válhatna a kibontási lépés során, de ezt a második lépésben ellensúlyozzuk, így $w'(a)$ továbbra is nemnegatív marad. A többi A_c-beli a él reprezentálva van H-ban egy $w'(a)$ súlyú éllel, így mivel d távolságfüggvény, $w'(a) = l(u, v) + d(u) - d(v) \geq 0$ a 2. lépés után. Egyenlőség a legrövidebb utak-beli éleknél van. Így a második lépés után $w'(a) \geq 0$, és $w'(b) = 0$ $b \in B_c$-re. Ezért $(P0)$ és $(P2)$ teljesül és $l(P) = 0$. Ekkor azonban az 1.2.1 lemma alapján a 3.lépés után is megmaradnak a feltételek. □

Így a második fázis végére teljesülnek az alábbi feltételek:

(P0*) y duális megoldás és B bifenyves.

(P1*) (a) Ha $y(U) > 0$, akkor U legfeljebb 1 B-beli éllel van fedve, vagy U nem maximális $\mathcal{L}$-ben.

(b) Ha U nem maximális $\mathcal{L}$-ben, akkor egyértelműen létezik $b \in B$ él, ami őt fedi, de a szülőjét nem.

(c) Minden $U \in \mathcal{L}$ erősen összefüggő.

(P2) Ha $a \in B$, akkor $w'(a) = 0$.

3.fázis

Tekintsük ezentúl y-ra úgy, mint az $\{U : U \subseteq S$ vagy $U \subseteq T\}$ halmazcsaládon megadott függvényre, és ne változtassuk az értékét. Amíg azonban van $\mathcal{L}$-ben nem egyelemű halmaz, addig bontsuk ki azt.

Az algoritmus végén y és B primál-duál megoldáspár lesz. □

Az algoritmus futási ideje $O(n'(m + n \log n))$, ahol $n' = \min\{|S|, |T|\}$.

Egy másik hatékony algoritmus található [1]-ben, amelyik a skálázási technikán alapul, és $O(m\sqrt{n}\log n \log nW)$ időben talál meg egy optimális bifenyvest, ahol W a maximális élsúlyt jelenti.

Megoldás szupermoduláris áramok segítségével.

Egy másik megközelítés, hogy a bifenyves problémáját vissza lehet vezetni szupermoduláris áramra. Sőt, a minimális költségű k élidegen bifenyves problémáját is. Az 1.1.6 tétel alapján a k élidegen bifenyves megfelel olyan részgráfnak, amely minden $0 \neq U \subseteq T$ és $V \neq U \supseteq T$ halmazt k éllel fed.

Legyen $D = (V, A)$ az az irányított gráf, amelyben keresünk egy minimális összsúlyú k élidegen bifenyvest. Jelölje egy $X \subseteq V$ csúcshalmazra $f(X)$ azon éleket, amelyek töve X-ben van. Definiáljuk a következő $H = (V \cup A; E)$ gráfot a következőképpen: a pontjai feleljenek meg D pontjainak és éleinek, az élei pedig:
$E := \{av\ :\ \ a \in A,\, v \in V,\, v$ feje a-nak D-ben$\}$. Vegyük észre, hogy $\varrho_D(X) \geq k$ feltétel H-ban a $\varrho_H(X \cup f(X)) \geq k$ feltételnek felel meg, és $\delta_H(X \cup f(X)) = 0$. Ennek a segítségével definiáljunk H részhalmazain egy p függvényt.

$$p(X) = \begin{cases} k & \text{ha } X = U \dot\cup F \text{ ahol } F \subseteq f(U) \text{ és } U \subseteq T \text{ vagy } U \supseteq T \\ 0 & \text{ha } X = \emptyset \\ -\infty & \text{különben} \end{cases}$$

Az így kapott $p(X)$ függvény keresztező szupermoduláris. Legyen $w : E \to Z_+$ a következő élsúly H-ban: $w(av) = w(a)$ ahol $a \in A$, v feje a-nak D-ben. Tekintsük a következő keresztező szupermoduláris áramfeladatot:

$$\min wx : \varrho_x(Z) - \delta_x(Z) \geq p(Z), 0 \leq x \leq 1$$

Azzal, hogy nemcsak az $U \dot\cup f(U)$ ($U \subseteq T$ vagy $T \subseteq U \subseteq V$) halmazokon választottuk p-t k-nak, csak redundáns megkötéseket hoztunk be, ugyanis $U \dot\cup F$ ($F \subseteq f(U)$, $U \subseteq T$ vagy $T \subseteq U$) alakú halmazok kifoka szintén 0.

Így a minimális összsúlyú k élidegen bifenyves problémáját visszavezettük egy minimális súlyú megengedett keresztező szupermoduláris áram keresésére. A keresztező szubmoduláris (szupermoduláris) áramokat a teljes reszelt segítségével vissza lehet vezetni a teljesen szubmoduláris (szupermoduláris) áramokra. Továbbá ezek visszavezethetőek arra a speciális, úgynevezett 'szabad' esetre, amikor a korlátok $f = -\infty$, $g = \infty$. Ebben az esetben pedig létezik polinomiális algoritmus a minimális súlyú szubmoduláris (szupermoduláris) áram megtalálására, ami [4]-ban részletesen le van írva.

2. Értékelt matroidok, alapfogalmak, definíciók

Az értékelt matroidok a matroidok általánosításai. Segítségükkel nemcsak az alaphalmazon lehet megadni az elemek súlyát, hanem az alaphalmaz speciális részhalmazain, a bázisokon is, azonban a bázisokhoz tartozó súlynak teljesítenie kell bizonyos szép kicserélési tulajdonságot. Ebben a fejezetben az értékelt matroidok tulajdonságait tekintem át [12] segítségével, főleg azokat, amelyekre szükségem lesz az optimális bifenyves problémájával kapcsolatban.

2.0.4. Definíció (Értékelt matroid)**.** *Az $M = (V, \omega)$ párt **értékelt matroidnak** nevezzük, ha V egy véges halmaz, $\omega : 2^V \to \mathcal{R} \cup \{-\infty\}$ függvény olyan függvény, amelyre $\mathcal{B} = \{B \subseteq V : \omega(B) \neq -\infty\}$ halmaz nemüres, és teljesül az alábbi kicserélési axióma:*
(VM) *$B, B' \in \mathcal{B}$ és $u \in B - B'$ esetén $\exists v \in B' - B$ melyre $B - u + v \in \mathcal{B}$, $B' + u - v \in \mathcal{B}$, és $\omega(B) + \omega(B') \leq \omega(B - u + v) + \omega(B' + u - v)$.*

Vegyük észre, hogy ebben az esetben a $\mathcal{B}$ halmaz teljesíti a bázisaxiómákat. Így az értékelt matroid úgy is felfogható, mint egy matroid egy $\omega : \mathcal{B} \to \mathcal{R}$ függvénnyel, amelyre teljesül a (VM) kicserélési axióma. Valamint ha ω csak a bázisokon van definiálva, kiterjeszhető a többi halmazra $-\infty$ értékkel. Ha $\omega(B) = 0$ minden B bázisra, akkor az értékelt matroidot triviálisnak nevezzük.

2.1. Példák értékelt matroidokra

2.1.1. Példa. *Tegyük fel, hogy $(V, \mathcal{B})$ egy matroid. Ekkor tetszőleges $\alpha \in \mathcal{R}$ és $p :$ $: V \to \mathcal{R}$ függvény segítségével definiált*

$$\omega(B) = \alpha + \sum_{u \in B} p(u) \qquad (B \in \mathcal{B})$$

függvény értékelést ad a matroidon.

2.1.2. Példa. *Az előző példa általánosítása, ha adott egy $M = (V, \mathcal{B}, \omega)$ értékelt matroid, és egy $p : V \to \mathcal{R}$ függvény. Ekkor*

$$\omega[p](B) = \omega(B) + \sum_{u \in B} p(u) \qquad (B \in \mathcal{B})$$

függvény is értékelt matroidot ad. Ez a lineáris eltolás.

A matroidelméletben láttuk, hogy matroidok készíthetőek matroidokból dualizálással, elhagyással és összehúzással. Ezek a műveletek értékelt matroidokra is végrehajthatóak, és ennek belátásához elég megadni a bázisokon vett értékelést. Jelölje az U halmazra történő leszűkítéssel kapott matroid bázisait $\mathcal{B}^U$, és az U halmazra való összehúzással kapott matroid bázisait $\mathcal{B}_U$. Fixáljunk le egy $I \in \mathcal{B}_{V-U}$ és egy $J \in \mathcal{B}^{V-U}$ bázist.

2.1.3. Példa (Duális értékelt matroid)**.** *A $\omega^*(B) = \omega(V - B)$ ha $B \in \mathcal{B}$-vel definiált függvénnyel $M = (V, \mathcal{B}^*, w^*)$ értékelt matroidot ad.*

2.1.4. Példa (Értékelt matroid leszűkítése U-ra)**.** *Az $\omega_I^U(X) = \omega(I \cup X)$ minden $X \in \mathcal{B}^U$ esetén függvény értékelés: $M_I^U = (U, \mathcal{B}^U, \omega_I^U)$ értékelt matroidot ad.*

2.1.5. Példa (Értékelt matroid összehúzása U-ra)**.** *Az $\omega_U^J(X) = \omega(J \cup X)$ minden $X \in \mathcal{B}_U$ esetén függvény értékelés: $M_U^J = (U, \mathcal{B}_U, \omega_U^J)$ értékelt matroidot ad.*

Meggondolható, hogy az így definiált értékelések értékelt matroidot határoznak meg. [12]

2.2. Értékelt matroidok alaptulajdonságai

Legyen $M = (V, \mathcal{B}, \omega)$ egy értékelt matroid, $B \in \mathcal{B}$ és $v \in V - B$. Ekkor definiálható az egyértelmű $C(B, v)$ kör. Tetszőleges $u \in C(B, v)$-re definiálhatjuk a kicserélés költségét:

$$\omega(B, u, v) = \omega(B - u + v) - \omega(B)$$

A kicserélési költséget tekintsük $-\infty$-nek, ha $u \notin C(B, v)$. Látszik, hogy ez természetes kiterjesztés, ugyanis ilyenkor a kiterjesztett ω függvényt használva is ezt kapnánk.

2.2.1. Lemma. *Legyen $B \in \mathcal{B}$. B akkor és csak akkor maximális ω-súlyú bázis, ha $\omega(B, u, v) \leq 0$ minden olyan (u, v) párra, ahol $u \in C(B, v)$.*

Bizonyítás. Ha B max súlyú bázis, akkor nyilvánvalóan nem létezhet javító csere. Most tegyük fel, hogy nem létezik javító csere.

Legyen B' egy másik bázis, $d = |B' - B|$ szerinti indukcióval látjuk be, hogy $\omega(B) \geq \omega(B')$. $d = 0$-ra igaz az állítás. Ha $d \geq 1$, akkor létezik $u \in B' - B$ és $v \in B - B'$, hogy

$$\omega(B) + \omega(B') \leq \omega(B - u + v) + \omega(B' + u - v),$$

ahol $\omega(B - u + v) \leq \omega(B)$ hiszen nem létezik javító csere, és $\omega(B' + u - v) \leq \omega(B)$ az indukciós feltétel miatt. Így $\omega(B) + \omega(B') \leq \omega(B) + \omega(B)$-ből adódik az állítás. □

Mohó algoritmus.

A lemma segítségével a mohó algoritmus alkalmazható egy maximális ω-súlyú bázis megkeresésére:

Legyen kezdetben B_0 egy tetszőleges r rangú bázis, legyenek az elemei rendre $u_1, \ldots, u_r$. $k = 1, \ldots, r$-ig ismételjük a következőt:
Keressünk egy olyan $v_k \in (V - B_{k-1}) \cup \{u_k\}$ elemet, amelyre $\omega(B_{k-1} - u_k + v_k) \geq$ $\geq \omega(B_{k-1} - u_k + v)$ teljesül $\forall v \in (V - B_{k-1}) \cup \{u_k\}$-ra, és cseréljük le u_k-t v_k-ra, vagyis legyen $B_k = B_{k-1} - u_k + v_k$. Ekkor B_r maximális súlyú bázis lesz, melyet az ω függvény $r(|V| - r) + 1$ használatával kaptunk.

Kicserélési gráf.

Legyen $B \in \mathcal{B}$, és $B' \subseteq V$ Legyen a $G(B, B')$ a kicserélési gráf: vagyis egy olyan páros gráf, amelynek egyik osztálya $B - B'$, másik osztálya $B' - B$, és az élek halmaza: $\{(u, v) : u \in B - B', v \in B' - B, u \in C(B, v)\}$, ahol az (u, v) él súlya $\omega(B, u, v)$.

Jelölje $\widehat{\omega}(B, B')$ a legnagyobb súlyú teljes párosítás súlyát $G(B, B')$-ben.

2.2.2. Lemma (alsó-határ lemma)**.** *Minden $B, B' \in \mathcal{B}$-re teljesül, hogy*

$$\omega(B') \leq \omega(B) + \widehat{\omega}(B, B').$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy tetszőleges $u_1 \in B - B'$ esetén $\exists v_1 \in B' - B$ amelyre $\omega(B) + \omega(B') \leq \omega(B - u_1 + v_1) + \omega(B' + u_1 - v_1)$, amit a $B'_2 = B' + u_1 - v_1$ jelöléssel a következőképpen írhatunk:

$$\omega(B') \leq \omega(B, u_1, v_1) + \omega(B'_2)$$

Ugyanezt ismételve először B, B'_2-re majd tovább, amíg csak $B'_i = B$ lesz, kapjuk, hogy:

$$\omega(B') \leq \omega(B) + \sum_{i=1}^{m} \omega(B, u_i, v_i) \leq \omega(B) + \widehat{\omega}(B, B')$$

ahol $m = |B - B'|$, és $\{(u_i, v_i)\}$ halmaz teljes párosítása $G(B, B')$-nek. □

2.2.3. Feltétel (Egyetlen-maximum feltétel)**.** *Pontosan egy maximális súlyú teljes párosítás létezik $G(B, B')$-ben.*

2.2.4. Lemma. *Legyen $B \in \mathcal{B}$, és $B' \subseteq V$ olyan, hogy $|B - B'| = |B' - B| = m$.*

(1.) $G(B, B')$ kicserélési gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha létezik $\widehat{p} : (B - B') \cup (B' - B) \to \boldsymbol{Z}$, valamint $B - B'$ elemeinek egy $u_1, \ldots, u_m$

sorrendje, $B' - B$ *elemeinek egy* $v_1, \ldots, v_m$ *sorrendje, melyre*

$$\omega(B, u_i, v_j) - \widehat{p}(u_i) + \widehat{p}(v_j) \begin{cases} = 0 & ha\ 1 \le i = j \le m \\ \le 0 & ha\ 1 \le i, j \le m \end{cases}$$

(2.) $G(B, B')$ *kicserélési gráfban akkor és csak akkor létezik pontosan egy teljes párosítás, ha létezik* $\widehat{p} : (B - B') \cup (B' - B) \to \boldsymbol{Z}$*, valamint* $B - B'$ *elemeinek egy* $u_1, \ldots, u_m$ *sorrendje,* $B' - B$ *elemeinek egy* $v_1, \ldots, v_m$ *sorrendje, melyre*

$$\omega(B, u_i, v_j) - \widehat{p}(u_i) + \widehat{p}(v_j) \begin{cases} = 0 & ha\ 1 \le i = j \le m \\ \le 0 & ha\ 1 \le j \le i \le m \\ < 0 & ha\ 1 \le i < j \le m \end{cases}$$

□

2.2.5. Lemma. *Legyen* $B \in \mathcal{B}$*, legyenek* $u_1, u_2 \in B$ *különböző elemek, valamint* $v_1, v_2 \in V - B$ *olyan különböző elemek, amelyekre a* $B' = B - \{u_1, u_2\} + \{v_1, v_2\}$ *jelöléssel* $G(B, B')$*-ben az* $M = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2)\}$ *az egyetlen maximális súlyú teljes párosítás. Ekkor*

(1.) $B' \in \mathcal{B}$ *és* $\omega(B') = \omega(B) + \widehat{\omega}(B, B')$

(2.) *A* $B_2 = B - u_2 + v_2$ *jelöléssel*

$$\omega(B_2, u_1, v_1) = \omega(B, u_1, v_1)$$

$$\omega(B_2, u_1, u_2) = \omega(B, u_1, v_2) - \omega(B, u_2, v_2)$$

$$\omega(B_2, v_2, v_1) = \omega(B, u_2, v_1) - \omega(B, u_2, v_2)$$

Bizonyítás. Legyen $B_1 = B - u + v$. Mivel M maximális súlyú teljes párosítás, ezért

$$2\omega(B) + \widehat{\omega}(B, B') = 2\omega(B) + \omega(B, u_1, v_1) + \omega(B, u_2, v_2) = \omega(B_1) + \omega(B_2)$$

Alkalmazzuk a kicserélési axiómát B_2, B_1-re és $u_1 \in B_2 - B_1$-re. Az az elem, ami az u_1-gyel kicserélhető, csak az u_2 vagy v_1 lehet. Először tegyük fel, hogy ez u_2. Ekkor az előző egyenlőséggel együtt kapjuk a következőt:

$$\begin{aligned} 2\omega(B) + \widehat{\omega}(B, B') &= \omega(B_1) + \omega(B_2) \le \omega(B_1 - u_2 + u_1) + \omega(B_2 + u_2 - u_1) = \\ &= \omega(B - u_2 + v_1) + \omega(B - u_1 + v_2) = \\ &= \omega(B, u_2, v_1) + \omega(B, u_1, v_2) + 2\omega(B) \end{aligned}$$

Amiből az következne, hogy $M' = \{(u_1, v_2), (u_2, v_1)\}$ is maximális súlyú teljes párosítás, ami ellentmondás. Tehát az u_1-gyel kicserélhető elem a v_1. Ekkor

$$\begin{aligned} 2\omega(B) + \widehat{\omega}(B, B') &= \omega(B_1) + \omega(B_2) \leq \omega(B_1 - v_1 + u_1) + \omega(B_2 + v_1 - u_1) = \\ &= \omega(B) + \omega(B') \end{aligned}$$

Vagyis $\omega(B) + \widehat{\omega}(B, B') \leq \omega(B')$, a másik irányt pedig a 2.2.2. Lemma adja.

A lemma második felének bizonyítása, az első részt felhasználva:

$$\begin{aligned} \omega(B_2, u_1, v_1) &= \omega(B - u_2 + v_2 - u_1 + v_1) - \omega(B - u_2 + v_2) = \\ &= \omega(B') - \omega(B) - \omega(B, u_2, v_2) = \widehat{\omega}(B, B') - \omega(B, u_2, v_2) = \\ &= \omega(B, u, v) \\ \omega(B_2, u_1, u_2) &= \omega(B - u_1 + v_2) - \omega(B - u_2 + v_2) = \omega(B, u_1, v_2) - \\ &= \omega(B, u_2, v_2) \\ \omega(B_2, v_2, v_1) &= \omega(B - u_2 + v_1) - \omega(B - u_2 + v_2) = \omega(B, u_2, v_1) - \\ &= \omega(B, u_2, v_2) \end{aligned}$$

□

2.2.6. Lemma. *Legyen $B \in \mathcal{B}$ és $B' \subseteq V$, $|B'| = |B|$. Ha pontosan 1 maximális súlyú M teljes párosítás létezik $G(B, B')$-ben, akkor az M párosítás minden (u°, v°) elemére igazak a következőek:*

- $B^\circ = B - u^\circ + v^\circ \in \mathcal{B}$
- *Pontosan 1 maximális súlyú teljes párosítás létezik $G(B^\circ, B')$-ben*
- $\widehat{\omega}(B^\circ, B') = \widehat{\omega}(B, B') - \omega(B, u^\circ, v^\circ)$

Bizonyítás. A lemma első állítása nyilvánvaló. A második állításhoz a 2.2.4. Lemma alapján indexeljük az M elemeit: $M = \{(u_i, v_i) : i = 1, \ldots, m\}$ és $(u^\circ, v^\circ) = (u_k, v_k)$ valamely k-ra. Legyen $B_{ij} = B^\circ - u_i + v_j = B - \{u_i, u_k\} + \{v_j, v_k\}$. Ekkor a 2.2.2. Lemma és a 2.2.4. Lemma alapján igaz a következő:

$$\begin{aligned} &\omega(B^\circ, u_i, v_j) = \omega(B_{ij}) - \omega(B^\circ) \leq \widehat{\omega}(B, B_{ij}) - \omega(B, u_k, v_k) = \\ &= max\big(\omega(B, u_k, v_k) + \omega(B, u_i, v_j), \omega(B, u_i, v_k) + \omega(B, u_k, v_j)\big) - \omega(B, u_k, v_k) \leq \\ &\leq (\hat{p}(u_k) + \hat{p}(u_i) - \hat{p}(v_k) - \hat{p}(v_j)) - (\hat{p}(u_k) - \hat{p}(v_k)) = \hat{p}(u_i) - \hat{p}(v_j) \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogyha $i < j$, akkor a második egyenlőtlenségnél határozott $<$ van. Továbbá ha $i = j$, akkor mindkét egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, amiből következik a második állítás. A harmadik állítás is következik az eddigiekből:

$$\widehat{\omega}(B^\circ, B') = \sum_{i \neq k} (\hat{p}(u_i) - \hat{p}(v_i)) = \widehat{\omega}(B, B') - \omega(B, u_k, v_k) = \widehat{\omega}(B, B') - \omega(B, u^\circ, v^\circ)$$

□

2.2.7. Lemma (Egyetlen-maximum lemma)**.** *Legyen $B \in \mathcal{B}$ és $B' \subseteq V$, amelyre $|B'| = |B|$. Ha pontosan egy maximális súlyú M teljes párosítás létezik $G(B, B')$-ben, akkor $B' \in \mathcal{B}$ és $\omega(B') = \omega(B) + \hat{\omega}(B, B')$.*

Bizonyítás. A bizonyítás $m = |B - B'|$ szerinti indukcióval történik. Az $m = 1$ eset rendben van. Tegyük fel, hogy $m \geq 2$, vegyük M egy (u°, v°) elemét, legyen $B^\circ = B - u^\circ + v^\circ$. A 2.2.6. Lemmából következik, hogy (B°, B') kielégíti a 2.2.3 feltételt, vagyis az indukciós feltétel alapján $\omega(B') = \omega(B^\circ) + \widehat{\omega}(B^\circ, B')$. A 2.2.6. Lemma alapján pedig $\widehat{\omega}(B^\circ, B') = \widehat{\omega}(B, B') - \omega(B, u^\circ, v^\circ)$, amellyel együtt már következik a lemma állítása. □

2.2.8. Lemma. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a 2.2.7. Lemma feltételei, és legyen $\hat{p}, u_i, v_j$ olyan, amit a 2.2.4. Lemma ad. Ekkor ezen lemmák alapján $\omega(B', v_j, u_i) \leq$ $\leq \hat{p}(v_j) - \hat{p}(u_i)$.*

Bizonyítás. A korábbi B'_{ij} jelöléssel a lemmák és a 2.2.2. Lemma alapján:

$$\omega(B', v_j, u_i) = \omega(B'_{ij}) - \omega(B') \leq \widehat{\omega}(B, B'_{ij}) - \widehat{\omega}(B, B') \leq$$

$$\leq \left[\sum_{k \neq i} \hat{p}(u_k) - \sum_{k \neq j} \hat{p}(v_k)\right] - \left[\sum_{k=1}^{m} \hat{p}(u_k) - \sum_{k=1}^{m} \hat{p}(v_k)\right] = \hat{p}(v_j) - \hat{p}(u_i)$$

□

Gyengébb axiómák. Az értékelt matroidok a **(VM)** kicserélési axiómánál kicsit gyengébb kicserélési axiómákkal is megadhatóak.

(VM$_w$) $B, B' \in \mathcal{B}$, $B' \neq B$ esetén $\exists u \in B - B'$,$v \in B' - B$ melyre $B - u + v \in \mathcal{B}$, $B' + u - v \in \mathcal{B}$, és $\omega(B) + \omega(B') \leq \omega(B - u + v) + \omega(B' + u - v)$.

(VM$_{loc}$) $\mathcal{B}$ teljesíti a bázisaxiómákat, és $B, B' \in \mathcal{B}$ amelyre $|B - B'| = 2$ esetén $\exists u \in B - B'$ és $\exists v \in B' - B$ úgy, hogy $B - u + v \in \mathcal{B}$, $B' + u - v \in \mathcal{B}$, és $\omega(B) + \omega(B') \leq \omega(B - u + v) + \omega(B' + u - v)$.

2.2.9. Tétel. *Egy $\omega : 2^V \to R \cup \{-\infty\}$ függvényre **(VM)**, **(VM$_w$)**, **(VM$_{loc}$)** ekvivalensek, ahol $\mathcal{B} = \{B \subseteq V : \omega(B) \neq -\infty\}$*

Bizonyítás. Matroidokra tudjuk, hogy a

$$B, B' \in \mathcal{B}, u \in B - B' \text{ esetén } \exists v \in B' - B \text{ melyre } B - u + v \in \mathcal{B}, B' + u - v \in \mathcal{B}$$

feltétel ekvivalens a

$$B, B' \in \mathcal{B}, B' \neq B \text{ esetén } \exists u \in B - B', v \in B' - B \text{ melyre } B - u + v \in \mathcal{B}, B' + u - v \in \mathcal{B}$$

feltétellel. Így **(VM$_w$)**$\Rightarrow$**(VM$_{loc}$)**.

Azt szeretnénk belátni, hogy **(VM$_{loc}$)**$\Rightarrow$**(VM)**. Definiáljuk a következő bázispárokból álló halmazt:

$$\mathcal{D} = \{(B, B') : B, B' \in \mathcal{B}, \exists u_* \in B - B' \forall v \in B' - B \text{ esetén}$$

$$\omega(B) + \omega(B') > \omega(B - u_* + v) + \omega(B' + u_* - v)\}$$

Ha $\mathcal{D} = \emptyset$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy nem üres, legyen $(B, B') \in \mathcal{D}$ olyan, amelyre $|B - B'|$ minimális. Tudjuk, hogy $|B - B'| > 2$. Legyen $p : V \to R$ függvény a következő:

$$p(v) = \begin{cases} -\omega(B, u_*, v) & \text{ha } v \in B' - B, B - u_* + v \in \mathcal{B} \\ \omega(B', v, u_*) + \varepsilon & \text{ha } v \in B' - B, B - u_* + v \notin \mathcal{B}, B' + u_* - v \in \mathcal{B} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor $v \in B' - B$, $B - u_* + v \in \mathcal{B}$ esetén

$$\omega_p(B, u_*, v) = \omega_p(B - u_* + v) - \omega_p(B) = p(v) - p(u_*) + \omega(B, u_*, v) = 0$$

Továbbá $v \in B' - B$ esetén $\omega_p(B', v, u_*) < 0$. Először tegyük fel, hogy $B - u_* + v \in \mathcal{B}$ és használjuk az előbbi egyenlőséget, és $\mathcal{D}$ definícióját:

$$\omega_p(B', v, u_*) = \omega_p(B', v, u_*) + \omega_p(B, u_*, v) = \omega(B', v, u_*) + \omega(B, u_*, v) < 0$$

Ha $B - u_* + v \notin \mathcal{B}$, akkor $B' + u_* - v \in \mathcal{B}$ esetén $p(v)$ definíciója miatt $-\varepsilon$-t kapunk, $B' + u_* - v \notin \mathcal{B}$ esetén $-\infty$-t.

Azt állítjuk, hogy $\exists u_0 \in B - B'$ és $v_0 \in B' - B$ úgy, hogy $u_0 \neq u_*$, $B' + u_0 - v_0 \in \mathcal{B}$

és

$$\omega_p(B', v_0, u_0) \geq \omega_p(B', v, u_0) \text{ minden } v \in B' - B \text{ esetén}$$

Mivel $|B - B'| > 2$, ezért $\exists u_0 \in B - B' - u_*$. A bázisaxióma teljesülése miatt $\exists v_0 \in B' - B$, amelyre $B' + u_0 - v_0 \in \mathcal{B}$. Válasszuk v_0-nak egy olyan cserélhető elemet, amely maximalizálja $\omega_p(B', v, u_0)$-t.

Legyen $B'' = B' + u_0 - v_0$. Ekkor $(B, B'') \in \mathcal{D}$:

$$\omega_p(B'', v, u_*) = \omega_p(B' + \{u_0, u_*\} - \{v_0, v\}) - \omega_p(B' + u_0 - v_0) \leq$$

$$\leq \max\{\omega_p(B', v_0, u_0) + \omega_p(B', v, u_*); \omega_p(B', v, u_0) + \omega_p(B', v_0, u_*)\} -$$

$$-\omega_p(B', v_0, u_0) < \max\{\omega_p(B', v_0, u_0); \omega_p(B', v, u_0)\} - \omega_p(B', v_0, u_0) = 0,$$

Így $\omega(B'', v, u_*) + \omega(B, u_*, v) = \omega_p(B'', v, u_*) + \omega_p(B, u_*, v) < 0$, tehát $(B, B'') \in \mathcal{D}$.

Azonban $|B'' - B| = |B' - B| - 1$, ami ellentmondás (B, B') választásával. Így $\mathcal{D}$-nek üresnek kell lennie. □

2.2.10. Tétel. *Legyen $(V, \mathcal{B})$ matroid. Egy $\omega : \mathcal{B} \to R$ függvény akkor és csak akkor értékelés, ha tetszőleges $p : V \to R$ függvényre az $\omega[p]$-t maximalizáló $\mathcal{B}_p$ család egy matroid bázisait adja. Ha ω egészértékű, akkor elég csak az egész p-ket nézni.*

Bizonyítás. Ha ω értékelés, akkor abból triviálisan következik, hogy $\mathcal{B}_p$ egy matroid bázisait adja:

$$2 \max \omega_p = \omega_p(B) + \omega_p(B') \leq \omega_p(B - u + v) + \omega_p(B' + u - v),$$

amiből látszik, hogy $B - u + v, B' + u - v \in \mathcal{B}_p$.

A másik irányhoz $\mathbf{VM}_{loc}$-ot szeretnénk belátni, ezért legyen B, B' olyan, hogy $B - B' = \{u_0, u_1\}$, $B' - B = \{v_0, v_1\}$. Jelölje $\omega_{ij} = \omega(B, u_i, v_j)$.

2.2.11. Állítás.

$$\omega(B') - \omega(B) \leq \max\{\omega_{00} + \omega_{11}; \omega_{01} + \omega_{10}\}$$

Jelölje az egyenlőtlenség bal oldalát γ, a jobb oldalát μ. Tekintsük a következő páros gráfot: $G = (\{u_0, u_1\}, \{v_0, v_1\}; E)$, ahol $E = \{(u_i, v_j) : B - u_i + v_j \in \mathcal{B}\}$, és írjuk rá az élekre ω_{ij}-t súlyként. Mivel tudjuk, hogy a bázisaxiómák teljesülnek, ezért a gráfnak van teljes párosítása, és létezik olyan $\hat{p} : \{u_0, u_1, v_0, v_1\} \to R$ potenciál, amelyre

$$\hat{p}(u_i) + \hat{p}(v_j) \geq \omega_{ij} \text{ minden } (u_i, v_j) \text{ élre, és } \sum_{i=0,1} \hat{p}(u_i) + \sum_{j=0,1} \hat{p}(v_j) = \mu$$

Indirekten tegyük fel, hogy $\gamma > \mu$. Ekkor van olyan $\bar{p}$:

$$\bar{p}(u_i) + \bar{p}(v_j) \geq \omega_{ij} \text{ minden } (u_i, v_j) \text{ élre, és } \sum_{i=0,1} \bar{p}(u_i) + \sum_{j=0,1} \bar{p}(v_j) = \gamma$$

Legyen M nagy szám, és $p : V \to R$:

$$p(v) = \begin{cases} +\bar{p}(v) & v \in B - B' \\ -\bar{p}(v) & v \in B' - B \\ +M & v \in B \cap B' \\ -M & v \in V - (B \cup B') \end{cases}$$

Erre a p-re $\{B, B'\} \supseteq \mathcal{B}$, ugyanis:

$$\omega_p(B') - \omega_p(B) = (\omega(B') - \omega(B)) - \sum_{i=0,1} \bar{p}(u_i) - \sum_{j=0,1} \bar{p}(v_j) = 0$$

$$\omega_p(B - u_i + v_j) - \omega_p(B) = (\omega(B - u_i + v_j) - \omega(B)) + (p(B - u_i + v_j) - p(B)) =$$

$$= \omega_{ij} - \bar{p}(u_i) - \bar{p}(v_j) \leq 0$$

$$\omega_p(B'') - \omega_p(B) \leq \omega(B'') - \omega(B) + \sum_{i=0,1} |\bar{p}(u_i)| + \sum_{j=0,1} |\bar{p}(v_j)| - M \leq 0$$

kivéve ha $B \cap B' \subseteq B'' \subseteq B \cup B'$. Így $B, B' \in \mathcal{B}_p$, és $\mathcal{B}_p$ kielégíti a bázisaxiómákat, tehát létezik $j \in \{0{,}1\}$ hogy $\omega_p(B - u_0 + v_j) = \omega_p(B' + u_0 - v_j)$. Legyen $k = 1 - j$, és mivel $B' + u_0 - v_j = B - u_1 + v_k$ ezért

$$0 = \omega_p(B - u_0 + v_j) + \omega_p(B - u_1 + v_k) - 2\omega_p(B) =$$

$$= \omega(B - u_0 + v_j) + \omega(B - u_1 + v_k) - 2\omega(B) - \sum_{i=0,1} \bar{p}(u_i) - \sum_{j=0,1} \bar{p}(v_j) =$$

$$= \omega_{0j} + \omega_{1k} \leq \mu - \gamma$$

ellentétben az indirekt feltevéssel. Ezzel az állítást beláttuk, az állításból pedig következik a tétel. Még azt vegyük észre, hogyha ω egész, akkor a bizonyításban használt potenciálok is válaszhatóak egésznek. $\square$

Függetlenek, generátorok.

Értékelt matroidokkal kapcsolatban felmerülnek olyan kérdések, hogy vajon definiálható lenne-e bázisok helyett független halmazokon, vagy generátorokon. Murota [11]-ban kiterjesztette az értékelést:

Az értékelt matroid egy olyan (V, ζ) pár, ahol $\zeta : \mathcal{P}(V) \to R \cup \{-\infty\}$ függvényre igazak a következőek:

0. $\zeta(I) \neq -\infty$ valamilyen $I \in \mathcal{P}(V)$-re
1. Ha $I \subseteq J$ akkor $\zeta(I) \geq \zeta(J)$
2. Ha $I \subseteq J$, $|I| < |J|$ és $\zeta(J) \neq -\infty$, akkor $\exists v \in V - I$ amelyre $\zeta(I) = \zeta(I + v)$
3. Ha $|I| = |J| - 1$, akkor $\exists v \in J - I$ amelyre $\zeta(I) + \zeta(J) \leq \zeta(I + v) + \zeta(J - v)$

Az így kapott ζ megfelel a következőnek: ha bázisokon van adva egy ω értékelés, az kiterjeszthető a többi független halmazra is:

$$\zeta(I) = \max\{\omega(B) : I \subseteq B \text{ ahol B bázis}\}$$

Azonban az így kapott kiértékelés nem feltétlen az, amit várnánk, például ha $\omega(B) = \sum_{i \in B} v(b)$ függvényt tekintjük.

Tegyük fel, hogy adott egy f függvény, amely egy matroid $\mathcal{F}$ függetlenjein kívül $-\infty$ és amelyre a következő tulajdonság igaz:

$$\forall u \in F_1 - F_2\text{-re igaz, hogy vagy } f(F_1) + f(F_2) \leq f(F_1 - u) + f(F_2 + u)$$

$$\text{vagy } \exists v \in F_2 - F_1 \text{ amelyre } f(F_1) + f(F_2) \leq f(F_1 - u + v) + f(F_2 + u - v)$$

Vegyük észre, hogy az előbb definiált ζ teljesíti ezt: Legyen F_1, F_2 két független halmaz, és legyen B_1, B_2 azon bázisok, amelyen felveszik a maximumot.
Legyen $u \in F_1 - F_2$. Először tegyük fel, hogy $u \notin B_2$, ekkor létezik $v \in B_2 - B_1$:

$$\zeta(F_1)+\zeta(F_2) = \omega(B_1)+\omega(B_2) \leq \omega(B_1-u+v)+\omega(B_2+u-v) \leq \zeta(F_1-u)+\zeta(F_2-v)$$

Ha pedig $u \in B_2$, akkor $\zeta(F_2) = \zeta(F_2 + u)$ és $\zeta(F_1) \leq \zeta(F_1 - u)$ miatt

$$\zeta(F_1) + \zeta(F_2) \leq \zeta(F_1 - u) + \zeta(F_2 + u)$$

Az is látszik, hogy a jó f-ek leszűkítve a bázisokra értékelt matroidot adnak.

A duálizálás segítségével hasonlóan jellemezhetőek a generátorok is.

3. Értékelt matroid metszet

Matroidokhoz hasonlóan, értékelt matroidokra is kereshetjük két értékelt matroid közös bázisát, vagy maximális súlyú közös bázisát. Ebben a részben erre adunk algoritmust kicsit általánosabb formában [9] és [10] segítségével.

3.0.12. Definíció (Valuated independent assignment problem (VIAP))**.** *Adott egy $G = (V^+, V^-; A)$ páros gráf, és az éleken egy $w : A \to R$ súlyfüggvény, ahol R rendezett, additív csoport, továbbá adott 2 értékelt matroid: $M^+ = (V^+, \mathcal{B}^+, \omega^+)$, $M^- = (V^-, \mathcal{B}^-, \omega^-)$. Egy tetszőleges $F \subseteq A$ élhalmazra jelölje $\delta^+(F)$ az élek V^+-beli végpontjait, és $\delta^-(F)$ az élek V^--beli végpontjait, továbbá legyen $w(F) = \sum_{a\in F} w(a)$. A feladat keresni egy olyan M párosítást a G-ben, melyre a*

$$\Omega(M) = w(M) + \omega^+(\delta^+ M) + \omega^-(\delta^- M)$$

érték maximális, azon feltételek mellett, hogy $\delta^+(M) \in \mathcal{B}^+$ és $\delta^-(M) \in \mathcal{B}^-$.

A továbbiakban felteszem, hogy az R csoport az egész számok halmaza.

Tegyük fel, hogy adva van egy V halmaz, $\mathcal{M}_1 = (V, \mathcal{B}_1, \omega_1)$,$\mathcal{M}_2 = (V, \mathcal{B}_2, \omega_2)$ értékelt matroidok, és egy $w : V \to R$ súlyfüggvény. Ekkor a VIAP magába foglalja a $\max\{w(B) + \omega_1(B) + \omega_2(B) : B$ bázis $\mathcal{M}_1$-ben, $\mathcal{M}_2$-ben$\}$ feladatot. Ugyanis vegyük fel két példányban a V halmazt, és kössük össze a párokat, és ekkor VIAP feladatot kapunk.

3.1. Optimalitási feltételek

3.1.1. Tétel. *Egy M független élhalmaza G-nek teljesíti a VIAP feltételeit, akkor és csak akkor, ha létezik olyan $p : V^+ \cup V^- \to R$, amelyre*

(i)

$$w(a) - p(\delta^+ a) + p(\delta^- a) \begin{cases} \leq 0 & \text{ha } a \in A \\ = 0 & \text{ha } a \in M \end{cases}$$

(ii) $\delta^+ M$ maximális súlyú bázis $M^+ -$ ban $\omega^+[p^+]$ szerint

(iii) $\delta^- M$ maximális súlyú bázis $M^- -$ ban $\omega^-[-p^-]$ szerint

ahol $p^\pm$ a p értelemszerű leszűkítése

Továbbá ha teljesül az előző három feltétel egy p-re valamely optimális M-hez, akkor, akkor egy M' független párosítás akkor és csak akkor optimális, ha ugyanazzal a p-vel teljesülnek a feltételek.

3.1.2. Definíció ($\tilde{G}_M$). *Egy M párosításra legyen $\tilde{G}_M = (\tilde{V}, \tilde{A})$ a következő:*
$\tilde{V} = V^+ \cup V^-$, $\tilde{A} = A^\circ \cup M^\circ \cup A^+ \cup A^-$, *ahol $B^\pm = \delta^\pm M$ jelöléssel*

$$A^\circ = \{a : a \in A\}$$

$$M^\circ = \{\bar{a} : a \in M\} \text{ ahol } \bar{a}\text{: } a \text{ él visszafele}$$

$$A^+ = \{\vec{uv} : u \in B^+, v \in V^+ - B^+, u \in C^+(B^+, v)$$

$$A^- = \{\vec{vu} : u \in B^-, v \in V^- - B^-, u \in C^-(B^-, v)$$

Továbbá adott az éleken egy γ_M súlyozás:

$$\gamma_M(a) = \begin{cases} -w(a) & ha\ a \in A^\circ \\ w(\bar{a}) & ha\ a \in M^\circ \\ -\omega^+(B^+, u, v) & ha\ a \in A^+ \\ -\omega^-(B^-, u, v) & ha\ \bar{a} \in A^- \end{cases}$$

3.1.3. Tétel. *Egy M akkor és csak akkor optimális G-ben a VIAP problémára, ha nem létezik $\tilde{G}_M$-ben negatív kör.*

Tételek bizonyítása.
I. M **optimális $\Rightarrow$ nem létezik negatív kör $\tilde{G}_M$-ben.**
Tegyük fel, hogy van negatív kör, legyen Q a legkevesebb élszámú ilyen kör. Alternáljunk a kör segítségével: $\bar{B}^+ = B^+ - \{\delta^+ a : a \in Q \cap A^+\} + \{\delta^- a : a \in Q \cap A^+\}$, és $\bar{B}^- = B^- - \{\delta^- a : a \in Q \cap A^-\} + \{\delta^+ a : a \in Q \cap A^-\}$

3.1.4. Lemma. *Ekkor $(B^+, \bar{B}^+)$ és $(B^-, \bar{B}^-)$ kielégíti az egyetlen-maximum feltételt M^+-ban illetve M^--ban.*

Bizonyítás. Vegyünk egy M' maximális súlyú teljes párosítást $G(B^+, \bar{B}^+)$-ben. Erre a 2.2.4. Lemma alapján létezik jó $\hat{p}$, és $M' = \{(u_i, v_i) : i = 1, \ldots, m\}$ sorrend. Legyen $Q' = (Q - A^+) \cup M'$, ahol M'-re mint A^+ részhalmazára tekintek, amelybe beleágyazható (negatív élsúllyal). $\gamma(Q') = \gamma(Q) + \gamma(M') - \gamma(Q \cap A+)$ érték negatív, mert $-\gamma(M')$ egy maximális súlyú teljes párosítás értéke $G(B^+, \bar{B}^+)$-ben, $Q \cap A^+$ + pedig megfelel egy teljes párosításnak $G(B^+, \bar{B}^+)$-ben. Ekkor Q' felbomlik körök uniójára. De mivel Q minimális elemszámú volt, ezért Q' is egy negatív kör.

M'-höz a 2.2.4. Lemma alapján létezik jó $\hat{p}$, és jó sorrend. Jelölje A^* a pontos élek halmazát, ekkor $(u_i, v_i) \in A^*$. A lemma állításával ellentétben tegyük fel, hogy nem teljesül az egyetlen-maximum feltétel. Ekkor létezik (másik) i_k indexelés is, hogy $(u_{i_k}, v_{i_{k+1}}) \in A^*$ $k = 1, \ldots, q$-ra, és $i_{q+1} = i_1$. Így

$$\sum_{k=1}^{q} \omega^+(B^+, u_{i_k}, v_{ik+1}) = \sum_{k=1}^{q} \hat{p}(u_{i_k}) - \hat{p}(v_{i_k}) = \sum_{k=1}^{q} \omega^+(B^+, u_{i_k}, v_{i_k})$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{q} \gamma(u_{i_k}, v_{i_{k+1}}) = \sum_{k=1}^{q} \gamma(u_{i_k}, v_{i_k}).$$

$k = 1, \ldots, q$-ra jelölje $P'(v_{i_{k+1}}, u_{i_k})$ az utat köztük Q'-ben, és legyenek továbbá Q_k körök: $Q_k = P'(v_{i_{k+1}}, u_{i_k}) \cup (u_{i_k}, v_{i_{k+1}})$.

Ekkor valamilyen $1 \leq q' < q$ egész számra:

$$\bigcup_{k=1}^{q} P'(v_{i_{k+1}}, u_{i_k}) \cup \{(u_{i_k}, v_{i_k}) : k = 1, \ldots, q\} = q'Q'$$

ahol az uniót multiplicitással értem. Ezek alapján

$$\sum_{k=1}^{q} \gamma(Q'_k) = \sum_{k=1}^{q} \gamma(u_{i_k}, v_{i_{k+1}}) + \sum_{k=1}^{q} \gamma(P'(v_{i_{k+1}}, u_{i_k})) =$$

$$\sum_{k=1}^{q} \gamma(u_{i_k}, v_{i_{k+1}}) - \sum_{k=1}^{q} \gamma(u_{i_k}, v_{i_k}) + q'\gamma(Q') = q'\gamma(Q') < 0$$

Ebből következik, hogy valamelyik Q'_k negatív, ami viszont Q' minimalitása miatt nem lehet. Vagyis teljesül az egyetlen-maximum feltétel. □

3.1.5. Lemma. *Ha Q' olyan negatív kör, amelynek élszáma minimális, akkor az $\overline{M} = M - \{a \in M : \bar{a} \in Q \cap M^\circ\} \cup (Q \cap A^\circ)$ független párosítás, melyre teljesül, hogy $\Omega(\overline{M}) \geq \Omega(M) - \gamma_M(Q)$.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $\bar{B}^\pm = \delta^\pm \bar{M}$. Ekkor a 2.2.7. Lemma és a 3.1.4. Lemma alapján:

$$\omega(\bar{B}^+) = \omega(B^+) + \widehat{\omega}^+(B^+, \bar{B}^+) \geq \omega^+(B^+) - \gamma(Q \cap A+)$$

$$\omega(\bar{B}^-) = \omega(B^-) + \widehat{\omega}^-(B^-, \bar{B}^-) \geq \omega^-(B^-) - \gamma(Q \cap A-)$$

Továbbá $w(\bar{M}) = w(M) - \gamma(Q \cap (A^\circ \cup M^\circ))$.

Így kapjuk, hogy $\Omega(\bar{M}) \geq \Omega(M) - \gamma_M(Q)$. □

Tehát az I. következtetés igaz.

II. **Nem létezik negatív kör $\tilde{G}_M$-ben $\Rightarrow$ Létezik potenciál, ami teljesíti a 3.1.1 feltételeit.**

Mivel nem létezik negatív kör a gráfban, ezért tudjuk, hogy létezik $p : V^+ \cup V^- \to R$, amelyre $\gamma(a) + p(\delta^+ a) - p(\delta^- a) \geq 0$ minden $a \in \tilde{A}$. Ebből $a \in A^\circ \cup M^\circ$-re rögtön következik a 3.1.1 (i) feltétele. Ha $a = (u, v) \in A^+$, akkor $\omega^+(B^+, u, v) - p(u) + p(v) \leq \leq 0$-at kapjuk, ami másképpen $\omega^+[p^+](B^+, u, v) \leq 0$-át jelenti, amiből következik, hogy B^+ maximális súlyú bázis, vagyis a 3.1.1. (ii) teljesül. Hasonlóképpen a 3.1.1. (iii). is, tehát a II. következtetés igaz.

III. **Létezik potenciál, ami teljesíti a 3.1.1 feltételeit $\Rightarrow$ M optimális.**

Tetszőleges M-re és p-re tudjuk, hogy $w_p(a) = w(a) - p(\delta^+ a) + p(\delta^- a)$ jelöléssel

$$\Omega(M) = \omega^+(\delta^+ M) + \omega^-(\delta^- M) + w(M) =$$

$$= \left[\omega^+(\delta^+ M) + \sum_{a \in M} p(\delta^+ a)\right] + \left[\omega^-(\delta^- M) - \sum_{a \in M} p(\delta^- a)\right] +$$

$$+ \sum_{a \in M} w(a) - p(\delta^+ a) + p(\delta^- a) = \omega^+[p^+](\delta^+ M) + \omega^-[-p^-](\delta^- M) + \sum_{a \in M} w_p(a)$$

Tegyük fel, hogy p, M teljesíti a feltételeket, és legyen M' tetszőleges. Ekkor

$$\Omega(M') = \omega^+[p^+](\delta^+ M') + \omega^-[-p^-](\delta^- M') + \sum_{a \in M'} w_p(a) \leq$$

$$\leq \omega^+[p^+](\delta^+ M) + \omega^-[-p^-](\delta^- M) + \sum_{a \in M} w_p(a) = \Omega(M).$$

Vagyis III. is igaz. Továbbá a 3.1.1. Tétel második felének belátásához vegyük észre, hogy az előző egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha $\omega^+[p^+](\delta^+ M') = = \omega^+[p^+](\delta^+ M)$, $\omega^-[-p^-](\delta^- M') = \omega^-[-p^-](\delta^- M)$, és $w_p(a) = 0$ minden $a \in M'$-re.

A következtetések alapján beláttuk a 3.1.1 és a 3.1.3 tételeket. $\square$

3.2. Metszet algoritmus

3.2.1. Algoritmus. *Induljunk ki egy tetszőleges M-ből, és ismételjük a következő lépéseket, amíg van negatív kör $\tilde{G}_M$-ben*

(i) Vegyünk egy minimális élszámú Q negatív kört $\tilde{G}_M$-ben.

(ii) Módosítsuk a párosítást: $\overline{M} = (M - \{a \in M : \bar{a} \in Q \cap M^\circ\}) \cup (Q \cap A^\circ)$.

3.2.2. Megjegyzés. *Az a feltétel, hogy minimális élszámú kört választok, nem hagyható el.*

Azt mondjuk, hogy egy Q negatív kör megengedett, ha $(B^+, \bar{B}^+)$ és $(B^-, \bar{B}^-)$ is teljesíti az egyetlen-maximum feltételt. A 3.1.4. Lemmában beláttuk, hogyha Q nem teljesíti az egyetlen-maximum feltételt, akkor a definiált Q'_k körök között van negatív kör.

3.2.3. Lemma. *Legyen Q negatív kör $\tilde{G}_M$-ben. Ekkor vagy Q megengedett, vagy létezik nála kisebb élszámú negatív kör. Vagyis a legkisebb élszámú negatív kör megengedett.* □

3.2.4. Lemma. *Q megengedett körre $\overline{M}$ független párosítás, amelyre teljesül, hogy $\Omega(\overline{M}) \geq \Omega(M) - \gamma_M(Q)$.* □

Az algoritmus véges lépésben végetér, azonban nem feltétlen polinomiális. Ezért módosításra van szükség.

Tartsunk fönn egy $M^\bullet \subseteq \tilde{A}$ aktív élhalmazt, és definiáljunk egy $\alpha : \tilde{A} \to \{0,1\}$ függvényt:

$$\alpha(a) = \begin{cases} 1 & \text{ha } a \in M^\bullet \\ 0 & \text{ha } a \in \tilde{A} - M^\bullet \end{cases}$$

Nevezzünk egy $Q \subseteq \tilde{A}$ kört (γ_M, α)-minimális rátájú körnek, ha $\gamma_M(Q)/\alpha(Q)$ minimális azok között a körök között, amelyekre $\alpha(Q) > 0$. Módosítsuk az algoritmust a következőképpen:

3.2.5. Algoritmus. *Induljunk ki egy tetszőleges M-ből, legyen $M^\bullet = M^\circ$, és ismételjük a következő lépéseket, amíg van negatív kör $\tilde{G}_M$-ben*

(i) Vegyünk egy minimális rátájú megengedett Q negatív kört $\tilde{G}_M$-ben.

(ii) Módosítsuk az aktív halmazt: $\overline{M^\bullet} = M^\bullet - (Q \cap M^\circ)$, és az α-t

(iii) Módosítsuk a párosítást: $\overline{M} = (M - \{a \in M : \bar{a} \in Q \cap M^\circ\}) \cup (Q \cap A^\circ)$.

A módosított algoritmus helyességéhez be kellene látni, hogy minden negatív kör tartalmaz aktív élt, és az így definiált $\overline{M}$ független párosítás. Ekkor ugyanis amíg van negatív kör, az (i) lépés jól definiált lenne, és az aktív halmaz szigorúan monoton csökkenése miatt $|M|$ iteráció után leállna az algoritmus egy M független párosítással, ami optimális, ugyanis nincsen negatív kör $\tilde{G}_M$-ben.

Jelöljük γ_M-et az egyszerűség kedvéért γ-val. $\varepsilon \geq 0$ esetén egy M független párosítást ε-optimálisnak mondunk, hogyha létezik olyan $p : \tilde{V} \to R$ függvény, amelyre

$$\gamma_p(a) \equiv \gamma(a) + p(\delta^+ a) - p(\delta^- a) \geq -\varepsilon\alpha(a)$$

Ez ekvivalens a $\hat{\gamma}(a) = \gamma(a) + \varepsilon\alpha(a)$ módosított élsúlyra nézve a

$$\hat{\gamma}(a) + p(\delta^+ a) - p(\delta^- a) \geq 0$$

feltétellel, így p-nek a létezése ekvivalens a

$$\gamma(Q) \geq -\varepsilon\alpha(Q) \text{ Q negatív kör}$$

feltétellel, vagyis implikálja hogy $\alpha(Q) > 0$ minden Q negatív körre.

Ha pedig azt tesszük fel, hogy $\alpha(q) > 0$ minden negatív körre, akkor a minimális rátájú kör rátáját μ-nek nevezve az $\varepsilon = -\mu$ értékkel M ε-optimélis lesz.

3.2.6. Lemma. *Az a feltétel, hogy minden negatív kör tartalmaz aktív élt, ekvivalens azzal a feltétellel, hogy létezik $\varepsilon \geq 0$, amelyre M ε-optimális.*

□

A rögzített aktív halmazhoz legyen $\varepsilon(M)$ az a legkisebb érték, amelyre M ε-optimális. (Vagyis $\varepsilon = -\mu$.)

3.2.7. Lemma. *Tegyük fel, hogy van negatív kör, minden negatív kör tartalmaz aktív élt, és legyen Q minimális rátájú kör. Ekkor vagy Q megengedett kör, vagy implikál egy minimális rátájú kört, amely kevesebb elemszámú.*

Bizonyítás. Módosítsuk a 3.1.4 lemma bizonyítását:

Vegyünk egy M' maximális súlyú teljes párosítást $G(B^+, \bar{B}^+)$-ben. Erre a 2.2.4. Lemma alapján létezik jó $\hat{p}$, és $M' = \{(u_i, v_i) : i = 1, \ldots, m\}$ sorrend, jelölje a pontos élek halmazát A^*. Legyen $Q' = (Q - A^+) \cup M'$, ahol M'-re mint A^+ részhalmazára tekintek, amelybe beleégyazható (negatív élsúllyal).
$\gamma(Q') = \gamma(Q) + \gamma(M') - \gamma(Q \cap A+) \leq \gamma(Q')$, mert $-\gamma(M')$ egy maximális súlyú teljes párosítás értéke $G(B^+, \bar{B}^+)$-ben, $Q \cap A^+$ pedig megfelel egy teljes párosításnak $G(B^+, \bar{B}^+)$-ben.

Ekkor $\alpha(Q') = \alpha(Q)$, ugyanis $\alpha(M') = \alpha(Q \cap A^+) = 0$. $\gamma(Q') \leq \gamma(Q)$-val együtt ez azt jelenti, hogy $\gamma(Q')/\alpha(Q') \leq \gamma(Q)/\alpha(Q) = \mu$. Mivel pedig Q' felbomlik körök uniójára ($Q' = \bigcup_{j=1}^{l} Q'_j$), melyekre $\gamma(Q'_j)/\alpha(Q'_j) \geq \mu$, ezért egyenlőségnek kell lennie, és $\gamma(Q') = \gamma(Q)$. Továbbá $\gamma(Q') = \gamma(Q) + (\gamma(M') - \gamma(Q \cap A^+))$

Vagyis $\gamma(Q \cap A^+) = \gamma(M') = -\widehat{\omega}^+(B^+, \hat{B}^+)$.

Legyen $M'' = Q \cap A^+ = \{(u_i, v_i) : i = 1, \ldots, m\}$. Ekkor $M'' \subseteq A^*$. Indirekten tegyük fel, hogy nem teljesül az egyetlen-maximum feltétel. Ekkor létezik (másik) i_k indexelés is, hogy $(u_{i_k}, v_{i_{k+1}}) \in A^*$ $k = 1, \ldots, q$-ra, és $i_{q+1} = i_1$. Így

$$\sum_{k=1}^{q} \omega^+(B^+, u_{i_k}, v_{ik+1}) = \sum_{k=1}^{q} \hat{p}(u_{i_k}) - \hat{p}(v_{i_k}) = \sum_{k=1}^{q} \omega^+(B^+, u_{i_k}, v_{i_k})$$

vagyis

$$\sum_{k=1}^{q} \gamma(u_{i_k}, v_{i_{k+1}}) = \sum_{k=1}^{q} \gamma(u_{i_k}, v_{i_k}).$$

$k = 1, \ldots, q$-ra jelölje $P(v_{i_{k+1}}, u_{i_k})$ az utat köztük Q-ben, és legyen továbbá a Q_k körök: $Q_k = P(v_{i_{k+1}}, u_{i_k}) \cup (u_{i_k}, v_{i_{k+1}})$.

Ekkor valamilyen $1 \leq q' < q$ egész számra:

$$\sum_{k=1}^{q} \gamma(Q_k) - \mu\alpha(Q_k) = q'(\gamma(Q) - \mu\alpha(Q) = 0)$$

Vagyis $\gamma(Q_k) = \mu\alpha(Q_k)$ minden k-ra, vagyis Q_k minimális rátájú kör, kevesebb éllel. □

3.2.8. Lemma. *Tegyük fel, hogy van negatív kör, és minden negatív kör tartalmaz aktív élt. Legyen Q minimális rátájú megengedett kör. Ekkor $\overline{M}$ független párosítás $\Omega(\overline{M}) = \Omega - \gamma_M(Q)$ súllyal.*

Bizonyítás. A bizonyítás ugyanúgy megy, mint a minimális élszámú kör esetében. □

3.2.9. Lemma. *Legyen Q minimális rátájú kör. Ekkor $\varepsilon(\overline{M}) \leq \varepsilon(M)$.*

Bizonyítás. Jelölje $\varepsilon = \varepsilon(M)$. Mivel M ε-optimális, ezért $\gamma_p(a) \geq \varepsilon\alpha(a)$ valamilyen p-re. Be fogjuk látni, hogy $\overline{\gamma}_p(a) \geq \varepsilon\overline{\alpha}(a)$ teljesül ugyanarra a p-re.

Ez igaz, ha $a \in \overline{M}^\circ - M^\circ$, ugyanis ekkor $\overline{\alpha}(a) = 0$, és $\hat{a} \in Q \cap A^\circ$-ra $\gamma_p(\hat{a}) = 0$.

$a \in \overline{A}^+$ esetén fogjuk igazolni a kívánt állítást, az $a \in \overline{A}^-$ eset hasonló.

$a \in \overline{A}^+$ esetén a bizonyítandó állítás az $\omega^+(\overline{B}^+, u, v) \leq p(u) - p(v)$ formába írható, ahol $u \in \overline{B}^+, v \in V^+ - \overline{B}^+$.

Vegyük észre, hogy $a \in A^+$ esetén $\alpha(a) = 0$, így $\omega^+(B^+, u, v) \leq p(u) - p(v)$ fennáll, és egyenlőséggel teljesül, ha $(u, v) \in Q \cap A^+$. Így

$$\widehat{\omega}(B^+, \overline{B}^+) = \sum_{u \in B^+ - \overline{B}^+} p(u) - \sum_{v \in \overline{B}^+ - B^+} p(v)$$

Legyen $B'^{+} = \overline{B}^{+} - u + v$ $u \in \overline{B}^{+}, v \in V^{+} - \overline{B}^{+}$ esetén. Ekkor a 2.2.2. lemma, a 2.2.7. lemma és az előbbiek alapján:

$$\omega^{+}(\overline{B}^{+}, u, v) = \omega^{+}(B'^{+}) - \omega^{+}(\overline{B}^{+}) \leq \widehat{\omega}(B^{+}, B'^{+}) - \widehat{\omega}(B^{+}, \overline{B}^{+}) \leq$$

$$\sum_{u' \in B^{+} - B'^{+}} p(u') - \sum_{v' \in B'^{+} - B^{+}} p(v') - \sum_{u \in B^{+} - \overline{B}^{+}} p(u) + \sum_{v \in \overline{B}^{+} - B^{+}} p(v) = p(u) - p(v)$$

□

Tehát a minimális rátájú kört használó algoritmus helyes. Megiddo [7]-ben leírja, hogy ilyen kör található $O(|\tilde{V}|^2 |\tilde{A}| log|\tilde{V}|)$ időben. A megengedettség eldönthető $O(|\tilde{V}|^3)$ időben. Így az algoritmus erősen polinomiális algoritmus, ha az $\omega^{\pm}$ kiértékeléseket egy lépésnek tekintjük.

Murota [10]-ben leír egy másik algoritmust is a VIAP problémára, amely növelésen alapul, $k = 1, \ldots, r$ esetén k elemű M párosítást keres, amely kibővíthető közös B bázissá, és a lehetséges kibővítésekre a $w(M) + \omega^{+}(B) + \omega^{-}(B)$ érték maximális.

4. Optimális bifenyvesek és értékelt matroidok

Láttuk, hogy az optimális súlyú k élidegen bifenyves problémája megoldható szupermoduláris áromok segítségével. Azonban az algoritmus meglehetősen bonyolult. Egyrészt mivel maga a minimális súlyú szupermoduláris áramot kereső algoritmus bonyolult, másrészt pedig azért, mert több transzformációs lépésen keresztül jutunk el ide. Ezért vált természetessé az a kérdés, hogyan lehet másképpen megközelíteni a problémát.

Ebben a részben bemutatom az optimális bifenyvesek és az értékelt matroidok kapcsolatát, vagyis hogy az optimális bifenyves problémája visszavezethető az értékelt matroidmetszet problémára. Ennek a segítségével az előző fejezetben leírt algoritmus új megközelítést ad a bifenyves keresérére, amely algoritmus már nem épül lineáris programozásra. Továbbá alapvetően csak az $A[S,T]$ éleken dolgozik, a gráf többi élét csak egy szubrutin részeként használja a kicserélési költségek kiszámításához. Amikor csak egy optimális bifenyvest keresünk, akkor [16] alapján vezetem vissza a metszet-algoritmusra. A $k = 2$ eset, amikor minimális összsúlyú 2 élidegen bifenyvest keresek, saját eredmény. Általános k-ra is az a sejtés, hogy visszavezethető az értékelt matroid-metszet algoritmusra.

4.1. Fogalmak, definíciók, használandó tételek

Legyen $x \in Z^V$ vektorra jelölje $supp^+(x) = \{v : v \in V, x(v) > 0\}$ és $supp^-(x) = \{v : v \in V, x(v) < 0\}$.

4.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $f : Z^V \to R \cup \{+\infty\}$ függvény (ahol létezik véges f-értékű x)* ***M-konvex függvény****, ha teljesül az alábbi kicserélési tulajdonság:*

$$\forall x, y \in Z^V \text{ és } u \in supp^+(x-y) \text{ esetén } \exists v \in supp^-(x-y) \text{ amelyre}$$

$$f(x - \chi_u + \chi_v) + f(y + \chi_u - \chi_v) \leq f(x) + f(y)$$

Egy függvényt ***M-konkáv függvény****nek nevezünk, ha a negáltja M-konvex.*

4.1.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $f : Z^V \to R \cup \{+\infty\}$ függvény (ahol létezik véges f-értékű x)* $M^\natural$***-konvex függvény****, ha $\forall x, y \in Z^V$ és $u \in supp^+(x-y)$ esetén vagy $f(x - \chi_u) + f(y + \chi_u) \leq f(x) + f(y)$ vagy*

$$\exists v \in supp^-(x-y) \text{ amelyre } f(x - \chi_u + \chi_v) + f(y + \chi_u - \chi_v) \leq f(x) + f(y)$$

Egy függvényt $M^\natural$***-konkáv függvény****nek nevezünk, ha a negáltja $M^\natural$-konvex.*

Az M-konvex és $M^\natural$-konvex függvények szoros kapcsolatban vannak egymással. Legyen v_0 egy a V-beliektől különböző elem, és legyen α egy egész szám. Tetszőleges $f : Z^V \to R \cup \{+\infty\}$ függvényre legyen $\tilde{f} : Z^V \to R \cup \{+\infty\}$ függvény a következő:

$$\tilde{f}(x_0, x) = \begin{cases} f(x) & \text{ha } x(\tilde{V}) = \alpha \\ +\infty & \text{különben} \end{cases} \quad (x_0 \in Z, x \in Z^V)$$

4.1.3. Tétel. *[5] Az $f : Z^V \to R \cup \{+\infty\}$ függvény akkor és csak akkor $M^\natural$-konvex függvény, ha $\tilde{f}$ M-konvex függvény.*

Az M-konvex (és $M^\natural$-konvex) függvények egy fontos tulajdonsága, hogy lehet őket folyamon keresztül transzformálni. Legyen (N, E) irányított gráf N_1 bejárattal, N_2 kijárattal, ahol $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, legyen $\underline{c}$ alsó kapacitás az éleken, $\overline{c}$ felső kapacitás, és legyen adott $\gamma_e : Z \to R \cup \{+\infty\}$ egyváltozós konvex függvény minden e élre. Legyen egy ξ folyam határa $\delta\xi(v) = \xi(\delta^+ v) - \xi(\delta^- v)$. Egy $f_1 : Z^{N_1} \to R \cup \{+\infty\}$ függvényhez definiáljuk az $f_2 : Z^{N_2} \to R \cup \{\pm\infty\}$ függvényt:

$$f_2(y) = \inf_{x,\xi}\{f_1(x) + \sum_e \gamma_e(\xi(e)) : \xi \in Z^E, \underline{c}(e) \le \xi(e) \le \overline{c}(e) \forall e \in E,$$

$$\delta\xi = (x, -y, 0), \text{ ahol } (x, -y, 0) \in Z^{N_1} \times Z^{N_2} \times Z^{N - N_1 - N_2}\}$$

4.1.4. Tétel. *[8, 15] Tegyük fel, hogy $f_2 > -\infty$. Ekkor ha f_1 M-konvex függvény volt, akkor f_2 is az, és ha f_1 $M^\natural$-konvex függvény volt, akkor f_2 is az.*

4.1.5. Lemma. *Definiáljuk $f : 2^V \to R \cup \{+\infty\}$ függvényt a következőképpen:*

$$f(X) = \begin{cases} \min\{w(B) : B \textit{ fenyves, és } R(B) = X & \textit{ha létezik } X \textit{ gyökerű fenyves} \\ +\infty & \textit{különben} \end{cases}$$

Ekkor f $M^\natural$-konvex függvény.

Bizonyítás. Vegyünk két minimális fenyvest, egészítsük ki őket egy új r gyökérpontból bevett 0 súlyú élekkel F_1, F_2 fenyőkké, tekintsük a két fenyőből álló élhalmazt (párhuzamos élekkel). Azt szeretnénk belátni, hogy a G_1, G_2 gyökérélekre teljesül, hogy egy élt vagy át lehet tenni a másik gyökérélhalmazába, vagy létezik hozzá csere. Legyen $a = r\vec{u} \in G_1$. Tegyük fel, hogy nem lehet áttenni a másik gyökérélhalmazba. Ez azt jelenti, hogy $G_1 - a$, $G_2 + a$ részfenyők nem fejezhetőek be diszjunktan, vagyis Edmonds erős fenyőtétele alapján létezik olyan X halmaz, amibe az összes belépő él $G_2 + a$-beli. Válasszuk a legszűkebb ilyen X halmazt, akkor ebbe lép be $b \in G_2$-beli él. Azt állítjuk, hogy a és b kicserélhető, hogy a fenyőket diszjuktan be lehessen fejezni. Az látszik, hogy olyan halmaz nem lehet, amibe csak $G'_2 = G_2 + a - b$-beli él lép, mert X-et legszűkebbnek választottuk. Tegyük fel, hogy $\exists Y$ halmaz, amibe csak $G'_1 = G_1 - a + b$-beli él lép, ekkor b biztosan belelép. Azonban Ekkor $X \cap Y$ nem üres, és csak a b él lép bele, ami ellentmondás. Vagyis a és b cserélhető, ami definiál egy cserét az eredeti fenyvesek gyökérpontjain is, amiből pedig következik az $M^\natural$-konvexitás. Vegyük észre, hogy kihasználtuk azt, hogyha egy él benne volt B_1 fenyvesben és B_2 fenyvesben is, az a csere után is mindkettőben benne kell legyen, ugyanis egy fenyőben nem lehetnek párhuzamos élek. $\square$

4.2. Optimális bifenyves és az értékelt matroidmetszet

Legyen (D, w) élsúlyozott irányított gráf, legyen (S, T) a csúcsok egy partíciója. Az S által feszített részgráf segítségével definiáljuk a következő ${f^*}_S : 2^S \to R \cup \{+\infty\}$ függvényt a következőképpen:

Jelölje $R(B)$ a fenyves (kofenyves) gyökérpontjainak halmazát.

$$
{f^*}_S(X) = \begin{cases} \min\{w(B) : \text{B kofenyves, és } R(B) = X & \text{ha } \exists\ X \text{ gyökerű kofenyves} \\ +\infty & \text{különben} \end{cases}
$$

Hasonlóan definiáljuk $f_T : 2^T \to R \cup \{+\infty\}$ függvényt a következőképpen:

$$
f_T(X) = \begin{cases} \min\{w(B) : \text{B fenyves, és } R(B) = X & \text{ha } \exists\ X \text{ gyökerű fenyves} \\ +\infty & \text{különben} \end{cases}
$$

Ekkor ${f^*}_S, f_T$ $M^\natural$-konvex függvények a 4.1.5 lemma alapján. Az is egyszerűen látszik, hogy mindkét függvény monoton csökkenő. Ezek segítségével a minimális súlyú bifenyves problémája visszavezethető a következőre:

$$
\min\{w(F) + {f^*}_S(\delta^+ F) + f_T(\delta^- F) : F \subseteq A[S, T]\}
$$

Terjesszük ki ${f^*}_S$ értelmezési tartományát Z^S-re:

$$
g_S(x) = \begin{cases} {f^*}_S(supp^+(x)) & \text{ha } x \in Z^S_+ \\ +\infty & \text{különben} \end{cases}
$$

4.2.1. Állítás. *g_S függvény $M^\natural$-konvex függvény.*

Bizonyítás. Legyen x, y olyanok, amire $g(x), g(y)$ véges, és legyen $u \in supp^+(x - y)$

Ha $y(u) \geq 1$, akkor $x(u) \leq 2$, vagyis x-et u-nál csökkentve $g(x)$ nem változik, y-t u-nál növelve $g(y)$-sem változik (mert a tartó nem változik), ezért:

$g(x - \chi_u) + g(y + \chi_u) = g(x) + g(y)$.

Ha $x(u) \leq 2$, $y(u) = 0$, akkor $f^*{}_S$ monoton csökkenése miatt:
$g(x - \chi_u) + g(y + \chi_u) \leq g(x) + g(y)$

Ha $x(u) = 1$ és $y(u) = 0$, akkor tekintsük x és y tartóját, azokra alkalmazva vagy a kicserélést vagy az áttevést, jó megoldást kapunk.

□

Ezután transzformáljuk át az $A[S,T]$ élekre a g_S függvényt.
$h_S : Z^{A[S,T]} \to R \cup \{+\infty\}$ legyen a következő:

$$h_S(x) = \begin{cases} g_S(x') & \text{ha } x \in \{0{,}1\}^{A[S,T]} \\ +\infty & \text{különben} \end{cases}$$

ahol $x' \in Z^S$ az $x'(u) = \sum_{a \in \delta^+ u} x(a)$ képlettel van definiálva.

Ekkor h_S a g_S-nek egy folyamon keresztüli transzformáltja, méghozzá annak, amelyre $N = S \cup A[S,T]$, $E = \{ua : u \in S, a \in A[S,T] \cap \delta^+ u\}$, a belépő halmaz S, a kilépő halmaz $A[S,T]$, az alsó kapacitás azonosan 0, a felső kapacitás azonosan 1, és $\gamma_e \equiv 0$ minden $e \in E$-re. Így h_S is $M^\natural$-konvex függvény.

Legyen most $\tilde{A} = \{a_0\} \cup A[S,T]$ és α kellően nagy szám.
($\alpha \geq |A[S,T]| - \min\{\min\{|X| : X$ kofenyves gyökérzete$\}, \min\{|X| : X$ fenyves gyökérzete$\}\}$)

$$\tilde{h}_S(x_0, x) = \begin{cases} h_S(x) & \text{ha } x_0 = \alpha - x(A[S,T]) \\ +\infty & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor $\tilde{h}_S$ M-konvex függvény.

Végül legyen U α-méretű élhalmaz, jelölje $W = U \cup A[S,T]$-t.

$$\tilde{h^+}_S(X) = \begin{cases} \tilde{h}_S(|X \cap U|, \chi_{X \cap A[S,T]}) & \text{ha } |X| = \alpha \\ +\infty & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor $h^+{}_S$ a $\tilde{h}_S$-nek azon folyamon keresztüli transzformáltja, melyre $N = \tilde{A} \cup W$, $E = \{a_0 u : u \in U\} \cup \{a a_w : a \in A[S,T]\}$, a belépő halmaz $\tilde{A}$, a kilépő halmaz W, az alsó kapacitás azonosan 0, a felső kapacitás azonosan 1, és $\gamma_e \equiv 0$ minden $e \in E$-re. Így $h^+{}_S$ is M-konvex függvény, és mivel $0-1$-en van értelmezve, ezért $\omega^+ = -h^+$ értékelt matroidot ad.

Hasonlóan kapható ω^-. Így ha az U-beli élekre 0 súlyt írunk, az $A[S,T]$-beliekre pedig $-w(a)$-t, akkor ezzel visszavezettük a problémát az értékelt matroid metszet problémára.

Az értékelt matroid metszet algoritmusnak szüksége van egy orákulumra, amely segítségével a kicserélési költség kiszámolható. A Fulkerson-algoritmus segítségével meg tudjuk határozni egy-egy gyökérélhalmazhoz tartozó minimális fenyő költségét, és ennek segítségével a kicserélési költség meghatározható.

4.3. Két gyökérélű 2-élösszefüggő gráfok

Ebben a részben a $k = 2$ esetet szeretném megvizsgálni, vagyis amikor két élidegen bifenyvest keresek, melyeknek összsúlya minimális. Azt szeretném belátni, hogy ez megkapható az értékelt matroidmetszet algoritmussal. Ehhez először azt fogom belátni, hogy egy gyökeresen 2-élösszefüggő gráf gyökéréleinek azon kételemű halmazai, amelyek kibővíthetőek minimális súlyú gyökeresen 2-élösszefüggő gráffá a gyökérélhalmaz megváltoztatása nélkül, bázist alkotnak.

Jelölje S a gyökérélek halmazát.

Tekintsük az $\{x : x \geq 0, x \leq 1, \varrho_x(X) \geq 2\ \forall X \subseteq V - r,\ g_x(S) = 2\}$ poliédert. Ekkor ez az 1.1.4 szerint TDI, sőt egész w-re a komplementer feladatnak van olyan megoldása, ahol a halmazokhoz tartozó duálváltozók lamináris halmazrendszert alkotnak. Írjuk fel a duálpoliédert, és a komplementaritási feltételeket. Legyen A az a mátrix, amelynek sorai a $V - r$ részhalmazainak felelnek meg, oszlopai az éleknek, és egy elem értéke egy, ha az él belép a halmazba, különben pedig 0. Legyen a $V - r$-hez tartozó sora az a sor, ezt ne vegyük bele a mátrixba.

Primál:	**Duál:**
$Ax \geq 2$	$yA - \pi I + za \leq w$
$0 \leq x \leq 1$	$y, \pi \geq 0$
$ax = 2$	
$\min wx$	$\max 2\sum y_U - \sum \pi_e + 2z$

Komplementaritási feltételek:

$$x_e > 0 \Rightarrow (yA)_e - \pi_e + za_e = w_e$$

$$y_U > 0 \Rightarrow (Ax)_U = 1$$

$$\pi_e > 0 \Rightarrow x_e = 1$$

Rögzítsünk egy olyan duális optimális megoldást, ahol y lamináris halmazrendszert határoz meg. Ezután a gráfban csak a pontos éleket hagyjuk meg, vagyis amelyekre az 1. komplementaritási feltétel teljesül. Továbbá jelölje a 3. komplementaritási feltétel miatt biztosan bevett éleket A_π. Ezen megállapítások mellett azt szeretnénk belátni, hogy azon primál egész megoldás x-ek által meghatározott gyökérélhalmazok, amelyek a lamináris halmaz elemeibe pontosan egyszer lépnek, és A_π-nek bővítései, ezen gyökérélhalmazok bázist alkotnak. Egy $X \subseteq V - r$ halmazra jelölje $gy(X)$ a gyökéréleinek halmazát.

A bizonyítás során felhasználunk egy lemmát. Ehhez először definiáljuk egy halmaz bejáratát: Egy $D = (V, A)$ digráfban egy $X \subseteq V$ halmaz $B(X)$ bejárata: $B(X) = \{v \in X :$ létezik olyan $uv \in A$ él, amelyre $u \in V - X\}$ halmaz.
Egy $g : V \to Z_+$ függvényre legyen $\beta_g(X) = \sum g(v) : v \in B(X)$. Ekkor igaz az alábbi lemma:

4.3.1. Lemma. *[3] Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, $g : V \to Z_+$ felső korlát függvény a csúcshalmazon. Legyen p pozitívan metsző szupermoduláris függvény. Akkor és csak akkor létezik olyan $x : A \to Z_+$ függvény, amelyre $\varrho_x(Z) \geq p(Z)$ minden $Z \subseteq V$ és $\varrho_x(v) \leq g(v)$ minden $v \in V$ csúcsra, ha minden $X \subseteq V$ halmazra teljesül $p(X) \leq \beta_g(X)$.*

4.3.2. Állítás. *Legyen $D = (V, A)$ digráf, melynek adott egy A_π élhalmaza, és egy r gyökérpontja.*

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq S : |B| = 2, \exists H \text{ amelyre } g(H) = B, A_\pi \subseteq H, H 2(n-1) \text{ élű gyök. 2-élöf}\}$$

amennyiben nem üres, egy matroid bázisát adja.

Bizonyítás. Hagyjuk el D-ből az r csúcsot, és a hozzá tartozó éleket, valamint ha $v \in V - r$-be nem lépett A_π-ben él, akkor a v-be lépő éleket tegyük át A_1-be. Legyen $v \in V - r$-re $g(v) = (2 - \varrho_{A_\pi} - \varrho_{A_1})^+$. Vegyük észre, hogyha egy v pontba belelépett 2 A_π-beli él, akkor a v-be menő gyökérélek elhagyhatóak. Tekintsünk egy GY gyökérélhalmazt, amelyre $|GY| = 2$. A 4.3.1 lemmából látszik, hogy a GY gyökérélhalmaz csak akkor jó, ha minden $X \subseteq V - r$-re $2 - \varrho_{GY}(X) - \varrho_{A_\pi}(X) - \varrho_{A_1}(X) \leq \beta_{g'}(X)$, ahol $g'(v) = (g(v) - \varrho_{GY}(v))^+$, és ha $g(v) = 1$, akkor oda GY legfeljebb 1 éllel lép. Ekkor ugyanis GY kibővíthető gyökeresen 2-élösszefüggő gráffá a lemma segítségével: az x által meghatározott élek, GY, az A_1-beli és A_π-beli élek 2-összefüggő gráfot fognak meghatározni, amely lehet hogy nem lesz minimális, de alkalmas minimálissá szűkítése tartalmazza az A_π-beli éleket, és a 2 gyökérélt. Vegyük még észre, hogy $g(v) \leq 1$ miatt az x értéke nemcsak egész lesz, hanem $0-1$

értékű is, vagyis tényleg élhalmazt definiál. Továbbá, ha A_π-ben volt gyökérél, akkor ahhoz már csak egy gyökérélt szeretnénk hozzáválasztani.

A $2 - \varrho_{GY}(X) - \varrho_{A_\pi}(X) - \varrho_{A_1}(X) \leq \beta_{g'}(X)$ feltételt át kell fogalmazni a gyökérélekre vonatkozó feltételre. Először is g' helyett írjuk át az alábbi alakra:

$$2 - \varrho_{GY}(X) - \varrho_{A_\pi}(X) - \varrho_{A_1}(X) \leq \beta_g(X) - \sum_{v \in B(X), g(v)=1} \varrho_{GY}(v),$$

majd rendezzük:

$$\varrho_{GY}(X) - \sum_{v \in B(X), g(v)=1} \varrho_{GY}(v) \geq 2 - \varrho_{A_\pi}(X) - \varrho_{A_1}(X) - \beta_g(X).$$

Mivel feltettük, hogy a gráfban van gyökeresen 2-élösszefüggő részgráf, ezért csak azokat az X halmazokat kell tekinteni, amelyekbe lép gyökérél. Ez alapján $K(\emptyset) = 0$ legyen, és $F \subseteq S$-re

$$K(F) = max\{2 - \varrho_{A_\pi}(X) - \varrho_{A_1}(X) - \beta_g(X)$$

ahol $gy(X) - \{rv : v \in B(X), g(v) = 1\} \subseteq F \subseteq gy(X)\}$
Ennek teljesülnie kell, sőt erősíthető:

$$K(F) = max\{2 - \varrho_{A_\pi}(X) - \varrho_{A_1}(X) - \beta_g(X) - |F' - F| + \sum_{v \in B(X) \cap (F'-F) \text{ és } g(v)=1} 1\}$$

ahol $gy(X) - \{rv : v \in B(X), g(v) = 1\} \subseteq F'$, és $F \subseteq F' \subseteq gy(X)$.

Vegyük észre, hogy egy olyan GY, amely kielégíti $K(F)$-et és $|GY| = 2$, és ha $g(v) = 1$, akkor oda GY legfeljebb 1 éllel lép, az a GY kielégíti az eredeti feltételeket is. A továbbiakban felteszem hogy $g(v) = 1$ esetén v-be csak egy gyökérél lép. Ha így matroidot kapok, akkor az is matroid, hogyha a beválasztott v-be mutató gyökérél helyett másik v-be mutató gyökérélt választok.

4.3.3. Lemma. *$K(F)$ függvény metsző szupermoduláris.*

Bizonyítás. Először is vizsgáljuk meg β_g-t.

$$\beta_g(X) + \beta_g(Y) \geq \beta_g(X \cup Y) + \beta_g(X \cap Y) + \sum_{v \in B(X) \cap B(Y) - B(X \cup Y)} g(v).$$

Nézzük ezután $K(E) + K(F)$-t, ahol $F \cap E \neq \emptyset$, tartozzon E-hez E' és X, F-hez

F' és Y. Feltehető, hogy $v \in B(X) \cap (E' - E)$-re $g(v) = 0$, és $v \in B(Y) \cap (F' - F)$-re $g(v) = 0$. Mivel $E \cap F \neq \emptyset$, ezért $X \cap Y \neq \emptyset$.
Vegyük észre, hogy $E' \cap F' \supseteq gy(X \cap Y) - \{rv : B(X \cap Y), g(v) = 1\}$. Az unióhoz azonban $F' \cup E'$-t bővíteni kell:
$E' \cup F' \cup \{rv : v \in B(X) \cap B(Y) - B(X \cup Y) - E' \cup F', g(v) = 1\} \supseteq$
$\supseteq gy(X \cup Y) - \{rv : B(X \cup Y), g(v) = 1\}$.
Jelölje $EF'' = \{rv : v \in B(X) \cap B(Y) - B(X \cup Y) - E' \cup F', g(v) = 1\}$.

$$K(E) + K(F) =$$

$$= 2 - \varrho_{A_\pi}(X) - \varrho_{A_1}(X) - \beta_g(X) - |E' - E| + 2 - \varrho_{A_\pi}(Y) - \varrho_{A_1}(Y) - \beta_g(Y) - |F' - F| \leq$$

$$\leq 2 - \varrho_{A_\pi}(X \cup Y) - \varrho_{A_1}(X \cup Y) - \beta_g(X \cup Y) + 2 - \varrho_{A_\pi}(X \cap Y) - \varrho_{A_1}(X \cap Y) - \beta_g(X \cap Y) -$$

$$- \sum_{v \in B(X) \cap B(Y) - B(X \cup Y)} g(v) - |E' \cup F' - E \cup F| - |E' \cap F' - E \cap F| \leq$$

$$\leq 2 - \varrho_{A_\pi}(X \cup Y) - \varrho_{A_1}(X \cup Y) - \beta_g(X \cup Y) - |E' \cup F' \cup EF'' - E \cup F| +$$

$$+ 2 - \varrho_{A_\pi}(X \cap Y) - \varrho_{A_1}(X \cap Y) - \beta_g(X \cap Y) - |E' \cap F' - E \cap F| \leq K(E \cup F) + K(E \cap F)$$

□

A $K(E)$ értékét a negatív egyelemű halmazokon módosítsuk 0-ra, majd vegyük az így kapott függvény reszeltjét. Ekkor $0-1$-en ugyanazt a szubmoduláris poliédert definiálja, kihasználva, hogy az egész halmazon a reszelt sem lehet nagyobb, mint 2, hiszen feltettük, hogy van megoldás, és a megoldás jó a reszelthez is. A monotonitás is látszik, így a reszelt a $0 - 1$ értékű gyökérmegoldásokon matroidot definiál. □

4.3.4. Tétel. *Legyen $D = (V, A)$ egy irányított gráf, amelyen van egy $w : A \to Z$ függvény , és tegyük fel, hogy van egy olyan $2(n-1)$ élű gyökeresen 2-élösszefüggő H részgráfja, amelyre $|g(H)| = 2$. Legyen*
$m = min\{w(H) : H \subseteq A, |H| = 2(n-1), g(H) = 2$ és H gyök. 2-élöf.$\}$. Ekkor a gyökérélek S alaphalmazát tekintve,

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq S, |B| = 2, \exists \text{ gyök. 2-élöf. } H{:}|H| = 2(n-1), g(H) = B, \text{ és } w(H) = m\ \}$$

jelöléssel $M = (S, \mathcal{B})$ matroidot ad.

Bizonyítás. Vegyük azt az optimális duális megoldást, melyre az y lamináris. A laminaritás mélységére vonatkozó indukciót használok. Vagyis tekintsük a maximális pontos halmazokat, azt már tudjuk, hogy az azokba belépő jó élpárok bázist definiálnak.

Minden pontos halmazra jelöljünk ki egy abba belépő élt, és fixáljuk le (ha még nem volt A_π-ben belelépő él), és tegyük bele A_1-be. Húzzuk össze a pontos halmazokat egy ponttá, vegyük ki a gráfból azokat az éleket, amik a lefixált éllel nem alkotnak bázist a pontos halmaznál, és írjunk az így kapott összehúzott pontra $g(v) = 1$-et. Ezzel visszavezettem a feladatot az előbb megvizsgált kérdéskörre. Nevezzünk egy lefixálást jónak, ha az olyan X halmazokra, amelyekbe nem lép gyökérél, nem sérül meg a $2-\varrho_{A_\pi}(X)-\varrho_{A_1}(X) \leq B_{g_{mod}}(X)$ feltétel, és a hozzá tartozó $K(S)$ értéke 2. Így kapjuk, hogy a jó fixálásokhoz tartozó jó gyökérélekpárok bázist alkotnak. Tekintsük az összes lehetséges jó fixálást, ez megadja az összes lehetséges megoldását az eredeti feladatnak. Az kellene, hogy a különböző fixálásához tartozó megoldások együtt is bázist alkotnak. Vegyünk egy $x = (x_1, x_2)$ és $y = (y_1, y_2)$ megoldást, amelyek külön fixálásokhoz tartoznak, és vegyük egy-egy hozzájuk tartozó H_1, H_2 gráfot. Válasszunk egy Y pontos halmazt, amelybe H_1 belépő élei e és f, H_2 belépő élei g és h. Ha van közöttük egyforma, akkor azt válasszuk ahhoz a pontos halmazhoz, tehát feltehető, hogy mind a négy él különböző. Mivel (e, f) és (g, h) is bázismegoldása a pontos halmaznak, ezért vagy $(e, g), (f, h)$ párok is, vagy $(e, h), (f, g)$ párok is, tegyük fel az előbbit. Ekkor a pontos halmaz helyére két új pontot tegyünk be: v_1-be lépjen e, h, v_2-be pedig f, g, továbbá legyen $g(v_1) = g(v_2) = 1$, a v-ből kimenő élek lépjenek ki belőlük tetszőlegesen, a többi belépő élt pedig hagyjuk el. $K(E)$ definíciójában pedig csak azokat a halmazokat vegyük, amelyek nem választják el v_1, v_2-t. (Vagyis a 4.3.1 lemmában tekintsük a $p(X)$-et $-\infty$-nek, ha X elválasztja a két pontot.) Az így kapott $K(E)$ ugyanúgy matroidot határoz meg, benne van x és y, tehát létezik hozzájuk csere: (x_1, y_1) megoldáshoz tartozzon H_1', (x_2, y_2) megoldáshoz tartozzon H_2'. Ezek minden pontos halmazba belépnek, válasszunk ki hozzájuk 1-1 ilyen élt a fixálásban. Könnyen látszik, hogy az így meghatározott fixálásokhoz hozzátartozik a H_1' és H_2' összehúzottja, vagyis az eredeti feladat megoldásai is matroidot alkotnak. □

4.3.5. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy a bizonyítás hasonló módon megy, ha a pontosan l gyökérélű, és ezek között minimális súlyú 2-élösszefüggő gráfok gyökérélhalmazát szeretném jellemezni, vagyis az is bázist alkot. Ott kell módosítani, hogyha egy fixálásra a $K(S) > l$, akkor azt nem kell belevenni, ha pedig $K(S) < l$, akkor fel kell emelni l-re, amivel a metsző szupermodularitás továbbra is megmarad. Illetve az elején a primál-duál feladatot l-re kell felírni, azonban akkor is igaz, hogy létezik lamináris y.*

4.4. Két élidegen bifenyves

Tegyük fel, hogy a gráfban van gyökeresen 2-élösszefüggő részgráf. Bővítsük ki a gráfot egy új részgráffal, amely a következő alakú: ha $|V-r| = n-1$, akkor álljon $v'_1, \ldots, v'_{n-1}$ pontokból, s-ből mutasson két él minden v'_i-be, és v'_i-ből mutasson két él v'_{i+1}-be, és legyen minden új él súlya 0. Könnyen látszik, hogy ebben kibővített gráfban a $2n$ gyökérélű, minimális súlyú 2-élösszefüggő részgráfok megfelelnek az eredetiben a minimális súlyú kétélösszefüggő gráfoknak. Erre a bővített gráfra a 4.3.5 megjegyzés alapján a megoldások matroidot alkotnak.

Jelölje minden B $2n$ élű gyökérélhalmazra $f(B)$ a minimális súlyú gyökeresen 2-élösszefüggő gráf súlyát, amelynek pontosan B a gyökérélhalmaza, illetve legyen $f(B) = \infty$, ha nincs ilyen gráf.

A 2.2.10 tétel alapján ez azt jelenti, hogy a bővített gráfban a $2n$ gyökérélből álló halmazok a $-f(B)$ súlyozással értékelt matroidot alkotnak. Ez azonban azt is jelenti, hogy az eredeti gráf gyökérélhalmazára teljesül az alábbi tulajdonság: E, F gyökérélhalmazokra minden $e \in E - F$-hez vagy létezik olyan $f \in F - E$, amelyre $f(E)+f(F) \geq f(E-e+f)+f(F+e-f)$ vagy $f(E)+f(F) \geq f(E-e)+f(F+e)$. Vagyis az f függvény $M^\natural$-konvex függvény.

4.4.1. Lemma. *Legyen adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf, és egy $w : A \to Z_+$ élsúly. Jelölje $D' = (V \cup r, A')$ azt a gráfot, amely D-ből keletkezik egy új r pont hozzáadásával, és 2-2 párhuzamos 0 súlyú $\vec{rv}$ él hozzáadásával $\forall v \in V$ esetén. Egy $x : V \to \{0{,}1{,}2\}$ vektorra jelölje $g(x)$ a következőt:*

$$g(x) = \min\{w(H) : \ H \textit{ gyök. 2-élöf. } D'\textit{-ben, } \forall v \in V \textit{ csúcsba } x(v) \textit{ gyökéréllel lép}\}$$

Ekkor $g(x)$ $M^\natural$-konvex függvény.

Bizonyítás. D'-ben a gyökéréleken vett f függvény $M^\natural$-konvexitása megfelel D-ben a $g(x)$ függvény $M^\natural$-konvexitásának. □

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf w élsúllyal, amelyben keressük a minimális összsúlyú 2 élidegen bifenyvest. Jelölje D'_S az S halmazra megszorított gráf új r_S ponttal és $r_S v$ élekkel való kibővítettjét, jelölje D'_T a T halmazra megszorított gráf új r_T ponttal és $r_T v$ élekkel való kibővítettjét.

Legyen $g^*{}_S : \{0{,}1{,}2\}^S \to R \cup \{+\infty\}$ függvény a következő:

$$g^*{}_S(x) = \begin{cases} \min\{w(H) : & H \text{ fordítottja gyök. 2-élöf. gráf } D'_S\text{-ben, } \forall v \in S \\ & \text{csúcsba pontosan } x(v) \text{ gyökéréllel lép}\} \\ +\infty & \text{ha nem létezik ilyen } H \end{cases}$$

Hasonlóan definiáljuk $g_T : \{0,1,2\}^T \to R \cup \{+\infty\}$ függvényt a következőképpen:

$$g_T(x) = \begin{cases} \min\{w(H) : & H \text{ gyök. 2-élöf. gráf } D'_T\text{-ben}, \forall v \in T \\ & \text{csúcsba pontosan } x(v) \text{ gyökéréllel lép}\} \\ +\infty & \text{ha nem létezik ilyen } H \end{cases}$$

Ekkor $g^*{}_S, g_T$ $M^\natural$-konvex függvények a 4.4.1 lemma alapján. Az is egyszerűen látszik, hogy mindkét függvény monoton csökkenő.

Terjesszük ki $g^*{}_S$ értelmezési tartományát Z^S-re:

$$g'_S(x) = \begin{cases} \min\{g^*{}_S(x') : x' \leq x\} & \text{ha } x \in Z^S_+ \\ +\infty & \text{különben} \end{cases}$$

4.4.2. Lemma. *g'_S függvény $M^\natural$-konvex függvény.*

Bizonyítás. A monotonitásból és $g^*{}_S(x)$ $M^\natural$-konvexitásából következik. □

Innentől kezdve a 4.2 részben leírt megoldás működik $k = 2$ esetén is:

Transzformáljuk át az $A[S,T]$ élekre a g'_S függvényt.

$h_S : Z^{A[S,T]} \to R \cup \{+\infty\}$ legyen a következő:

$$h_S(x) = \begin{cases} g'_S(x') & \text{ha } x \in \{0,1\}^{A[S,T]} \\ +\infty & \text{különben} \end{cases}$$

ahol $x' \in Z^S$ az $x'(u) = \sum_{a \in \delta^+ u} x(a)$ képlettel van definiálva.

Ekkor h_S a g'_S-nek egy folyamon keresztüli transzformáltja, méghozzá annak, amelyre $N = S \cup A[S,T]$, $E = \{ua : u \in S, a \in A[S,T] \cap \delta^+ u\}$, a belépő halmaz S, a kilépő halmaz $A[S,T]$, az alsó kapacitás azonosan 0, a felső kapacitás azonosan 1, és $\gamma_e \equiv 0$ minden $e \in E$-re. Így h_S is $M^\natural$-konvex függvény.

Legyen most $\tilde{A} = \{a_0\} \cup A[S,T]$ és α kellően nagy szám.

$$\tilde{h}_S(x_0, x) = \begin{cases} h_S(x) & \text{ha } x_0 = \alpha - x(A[S,T]) \\ +\infty & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor $\tilde{h}_S$ M-konvex függvény.

Végül legyen U α-méretű élhalmaz, jelölje $W = U \cup A[S,T]$-t.

$$\tilde{h^+}_S(X) = \begin{cases} \tilde{h}_S(|X \cap U|, \chi_{X \cap A[S,T]}) & \text{ha } |X| = \alpha \\ +\infty & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor ${h^+}_S$ a $\tilde{h}_S$-nek azon folyamon keresztüli transzformáltja, melyre $N = \tilde{A} \cup W$, $E = \{a_0u : u \in U\} \cup \{aa_w : a \in A[S,T]\}$, a belépő halmaz $\tilde{A}$, a kilépő halmaz W, az alsó kapacitás azonosan 0, a felső kapacitás azonosan 1, és $\gamma_e \equiv 0$ minden $e \in E$-re. Így ${h^+}_S$ is M-konvex függvény, és mivel $0-1$-en van értelmezve, ezért $\omega^+ = -h^+$ értékelt matroidot ad.

Hasonlóan kapható ω^-. Így ha az U-beli élekre 0 súlyt írunk, az $A[S,T]$-beliekre pedig $-w(a)$-t, akkor ezzel visszavezettük a problémát az értékelt matroid metszet problémára.

Tudjuk, hogy minimális költségű, gyökeresen k-élösszefüggő gráf található a súlyozott matroid-metszet algoritmussal [2]. Ennek a segítségével az értékelt matroid-metszet algoritmushoz szükséges kicserélési költségek kiszámolhatóak.

Vegyük észre, hogy a primál-duál megoldást csak arra használtuk, hogy belássuk, alkalmazható az értékelt matroid-metszet algoritmus. Magában az algoritmusban már nem használunk lineáris programozást.

4.5. Kérdések.

Nyitott feladat maradt az a kérdés, hogy vajon k élidegen bifenyves is meghatározható-e az értékelt matroidmetszet algoritmussal. Látszik, hogy elég lenne itt is a gyökérélhalmazokra belátni, hogy értékelt matroidot alkotnak, onnantól már hasonlóan működne tetszőleges k-ra is.

Egy másik hasonló jellegű kérdés, hogy mi a helyzet k-pontösszefüggőség esetén, pontosabban ha olyan részgráfot keresek, amelyben minden S-beli pontból vezet k kezdőponttól eltekintve pontidegen út T-be, és minden T-beli pontba vezet k végponttól eltekintve élidegen út S-ből. Egyrészt megoldható-e szupermoduláris áramok segítségével, másrészt vajon visszavezethető-e az értékelt matroid-metszet problémára.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Frank Andrásnak, hogy figyelmembe ajánlotta ezt az érdekes témát, és a dolgozat megírása közben folyamatosan támogatott kérdéseivel, ötleteivel, megjegyzéseivel. Köszönöm továbbá a sok konzultációt, rám fordított időt, és a szakdolgozat alapos átnézését.

Szeretnék köszönetet mondani családomnak és barátomnak, akik a szakdolgozat megírása alatt folyamatosan mellettem álltak, bátorítottak, valamint szeretetükkel és türelmükkel segítettek a szakdolgozat készülése közben.

Hivatkozások

[1] Maxim A. Babenko. An efficient scaling algorithm for the minimum weight bibranching problem. *Algorithmica*, 61:898–922, 2011.

[2] András Frank. Matroidelmélet. egyetemi jegyzet, elérhető a http://www.cs.elte.hu/ frank/jegyzet/matroid/ulmat.2011.pdf honlapon.

[3] András Frank. Poliéderes kombinatorika. egyetemi jegyzet, elérhető a http://www.cs.elte.hu/ frank/jegyzet/polkomb/upoli.2012.2.pdf honlapon.

[4] András Frank. *Connections in Combinatorial Optimization.* Vol. 38 of the series Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. Oxford University Press, New York, 2011.

[5] A. Shioura Kazuo Murota. M-convex function on generalized polymatroid. *Math. Oper.Res*, 24:95–105, 1999.

[6] J. Keijsper and R. Pendavingh. An efficient algorithm for minimum-weight bibranching. *Combinatorial Theory*, B(73):130–145, 1998.

[7] N. Megiddo. Combinatorial optimization with rational objective functions. *Math. Oper. Res.*, 4:414–424, 1979.

[8] Kazuo Murota. Convexity and steinitz's exchange property. *Adv. Math*, 125:272–331, 1996.

[9] Kazuo Murota. Valuated matroid intersection i: Optimality criteria. *SIAM J. Discrete Math.*, 9(4):545–561, 1996.

[10] Kazuo Murota. Valuated matroid intersection ii: Algorithms. *SIAM J. Discrete Math.*, 9(4):562–576, 1996.

[11] Kazuo Murota. Matroid valuation on independent sets. *Journal of Combinatorial Theory*, B69:59–78, 1997.

[12] Kazuo Murota. *Matrices and Matroids for Systems Analysis.* Vol. 20 of the series Algorithms and Combinatorics. Springer, 2000.

[13] Alexander Schrijver. Min-max relations for directed graphs. *Ann. Discrete Math.*, 16:261–280, 1982.

[14] Alexander Schrijver. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. Vol. 24 of the series Algorithms and Combinatorics. Springer, New York, 2003.

[15] A. Shioura. A constuctive proof for the induction of m-convex functions through networks. *Discrete Appl. Math*, 82:271–278, 1998.

[16] Kenjiro Takazawa. Shortest bibranchings and valuated matroid intersection. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 29:561–573, 2012.