

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szalkai Balázs
Matematikus Msc

PÁROS KÖRÖK IRÁNYÍTOTT GRÁFOKBAN

MSc-szakdolgozat

Témavezető: Frank András, egyetemi tanár
Operációkutatási Tanszék



Budapest, 2013.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Frank Andrásnak, hogy ezt az érdekes témát ajánlotta a számomra, a konzultációk során hasznos információkkal szolgált, és mindig rendelkezésemre állt, ha iránymutatásra volt szükségem.

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	4
1. Bevezetés	5
2. Even digráfok	7
2.1. Algoritmikus ekvivalencia	7
2.2. Az élelhagyásra minimális even digráfok	9
2.3. Kapcsolat az összefüggőséggel és a foksámokkal	12
3. L-mátrixok	15
3.1. Motiváció	15
3.2. Kapcsolat a páros körökkel	17
4. Pfaff-irányítások	21
4.1. A teljes párosítások száma	21
4.2. Kasteleyn algoritmus a síkgráfokra	24
4.3. Kapcsolat az even tulajdonsággal	25
4.4. A Pólya-probléma	28
5. Hipergráfok 2-színezése	29
6. Algoritmus	32
6.1. Visszavezetés kapcsokra	32
6.2. A nem even digráfok struktúrája	35
6.3. Az algoritmus optimalizálása	37
7. Program	41
8. Összefoglalás	42
9. Függelék	44
9.1. Alapdefiníciók	44
9.2. Nagyságrendi jelölések	44
Hivatkozások	46

1. Bevezetés

Az, hogy egy irányítatlan gráf mikor tartalmaz páros, ill. páratlan hosszú kört, könnyen karakterizálható. Páratlan kör hiánya ekvivalens azzal, hogy a gráf páros. Páros kör pedig pontosan akkor nincs a gráfban, ha annak minden blokkja (2-pontösszefüggő komponense) páratlan kör vagy egyetlen él. Ezek jó jellemzések olyan értelemben, hogy algoritmust szolgáltatnak az adott paritású kör létezésének eldöntésére. Természetesen adódik a kérdés, hogy mi a helyzet az irányított gráfokkal.

Megmondható, hogy egy digráfban pontosan akkor nem létezik páratlan hosszú kör, ha minden erősen összefüggő komponens (irányítatlan értelemben véve) páros gráf. A páros hosszú kör létezésének karakterizációja viszont hosszú évtizedeken keresztül nyitott volt. Így az is kérdéses volt sokáig, hogy egyáltalán van-e az eldöntésére polinomiális algoritmus. Nemcsak saját jogán övezte érdeklődés a témát, ugyanis számos másik feladatról kiderült, hogy azok algoritmikusan ekvivalensek a páros irányított kör létezésének problémájával. Például: igaz-e egy adott digráfra, hogy bárhogy is osztjuk fel az éleket, mindenképpen lesz a kapott digráfban páros hosszú kör? (Az ilyen tulajdonságú digráfok neve: even digráfok.) További ekvivalens problémák: páros gráfok Pfaff-irányíthatósága, Pólya permanens-problémája [6], mátrixok előjel-nemsingularitása [13], vagy az, hogy igaz-e egy hipergráfra, hogy minimálisan nem páros [11]. (A pontos állításokat és az itt említett fogalmak definícióit ld. később.)

Az even gráfokkal kapcsolatban Seymour és Thomassen találtak NP-jellemzést [10]. Eszerint egy digráf pontosan akkor even, ha tartalmaz részgráfként gyenge C_{2k+1}^* -ot valamilyen $k \geq 1$ egészre. Hasonló jellemzést a Pfaff-irányítások nyelvén Little [7] fogalmazott meg: egy páros gráf pontosan akkor *nem* Pfaff-irányítható, ha tartalmaz párosan felosztott centrális $K_{3,3}$ -at.

Co-NP-jellemzést először Robertson, Seymour és Thomas [9] talált. Megmutatták, hogy a nem even digráfok bizonyos elemi alkotórészekből adott módon „összevarrhatóak”. Egy ilyen előállítás polinomiális időben ellenőrizhető bizonyíték arra, hogy egy digráf nem even. Cikkükben egyben polinomiális algoritmust is adtak annak eldöntésére, hogy egy erősen 2-összefüggő digráf even-e. Ha ezt más korábbi eredményekkel összevetjük, egy polinomiális algoritmust kapunk, amely eldönti, hogy tetszőleges irányított gráfban van-e páros hosszú kör, és ha van, akkor talál is egy ilyet.

Ez a szakdolgozat a megfelelő fejezetben kitér arra is, hogy a Robertson-Seymour-Thomas-féle algoritmus leírásában a jeles szerzők egy apró hibát vétettek, amely

könnyen javítható. A kijavított algoritmust—tudomásom szerint elsőként—implementáltam C++-ban. Erről az implementációról is ejtek pár szót az adott fejezetben.

Érdekes, hogy Robertson, Seymour és Thomas karakterizációja a digráfok nyelvén elmondva nehezkesebb, mint a Pfaff-irányításokén. Ez és Little tétele is azt mutatja, hogy—meglepő módon—valamilyen értelemben az igazán „természetes” probléma a Pfaff-irányítás keresése, és nem az even tulajdonság eldöntése, végképp nem pedig a páros irányított kör keresése.

A páros körök témakörében kevés a jó összefoglaló írás, különösen a magyar nyelvű. A témakör egy részét M. Brundage már összefoglalta MSc-szakedzőjében (1996) [3], ebben azonban az újabb eredmények—mint például a Pfaff-irányítható páros gráfok felépítési tétele, illetve a polinomiális algoritmus—nincsenek benne. Szakdolgozatommal ezt a hiányt szeretném pótolni.

2. Even digráfok

Ebben a fejezetben rögtön átfogalmazzuk a problémát, ami által könnyebben tudjuk majd kezelni. Egy algoritmikusan ekvivalens feladatot mutatunk, amely első látásra komplexebbnek tűnhet, mint a páros kör létezésének eldöntése. A szakasz nagy része Seymour és Thomassen [10] [14] eredményeire támaszkodik. A gráfelméleti alapfogalmak a Függelékben kerülnek tisztázásra.

2.1. Algoritmikus ekvivalencia

Tekintsük a következő digráf-tulajdonságot.

2.1.1. Definíció. *Egy digráf akkor és csak akkor even, ha minden felosztása tartalmaz páros hosszú irányított kört.*

Ekvivalens tulajdonság az, hogy minden egész élsúlyozásra létezik olyan irányított kör a digráfban, mely az adott súlyozás szerint páros súlyú. Ezt persze elég csak a 0-1 értékű súlyozásokra megkövetelni.

Megjegyzendő, hogy ha van egy algoritmusunk, amely eldönti a páros kör létezését súlyozatlan digráfokban, akkor ez működik tetszőleges egész élsúlyozásra is, csak fel kell osztanunk (egyszer) azokat az éleket, melyekre páros szám van írva.

A polinomiális visszavezetés alapgondolata a következő lesz: ha van egy gráfunk, amelyről el akarjuk dönteni, hogy even-e, akkor ügyesen választhatunk egy olyan súlyozást polinom időben, amely elárulja, ha a gráf nem even—ekkor ugyanis nem lesz páros kör a kapott súlyozásban, különben persze igen. Így a pároskör-kereső algoritmust lefuttatva készen vagyunk. Fordítva, ha a páros kör létezését akarjuk eldönteni, akkor ügyesen választva bizonyos köröket, vagy lesz ezek között páros hosszú, vagy az lesz igaz, hogy a gráfban pontosan akkor van páros kör, ha minden felosztásában található páros kör.

Ebben a szakaszban legyen $D = (V, A)$ tetszőleges erősen összefüggő digráf, U pedig az $A \rightarrow \mathbb{F}_2$ vektorok tere. U elemei a 0-1 élsúlyozások, de élhalmazokként is fogunk rájuk gondolni, egy 0-1 élvektorhoz hozzárendelve azoknak az éleknek a halmazát, amelyekre 1 van írva. Jelölje $C \leq U$ az *irányítatlan* értelemben vett D -beli körök karakterisztikus vektorai által generált alteret. A C alteret D *körterének* nevezzük. (Vegyük észre, hogy C elemei éppen az irányítatlan értelemben vett Euler-részgráfok.) Egy $B \subset C$ halmazt *körbázisnak* hívunk, ha B bázisa C -nek, és B elemei *irányított* értelemben vett D -beli körök karakterisztikus vektorai.

2.1.2. Tétel. D -nek létezik körbázisa.

Bizonyítás. D erősen összefüggő digráf, tehát létezik irányított fülfelbontása. Vegyük a következő B halmazt: a felbontás minden P elemére (beleértve az alapkört és a füleket is) vegyünk egy őt tartalmazó K_P irányított kört, mely nem használja a későbbi fülekkel felépítendő éleket. (Ez megtehető, mert a fülfelbontás során mindvégig erősen összefüggő digráfunk van.) Megmutatjuk, hogy B egy körbázis.

Valóban, nyilván $B \subset C$. Legyen most $K \in C$; belátjuk, hogy $K \in \text{span } B$. $K = \emptyset$ esetén ez triviális, egyébként pedig tekintsük azt a legutoljára hozzávett fület, mely tartalmaz K -beli élet. Ez a fül legyen P . K szükségszerűen tartalmazza P minden élet, mert része a P hozzávételekor keletkező digráfnek, melyben P belső pontjai 2-fokúak, K pedig irányítatlan értelemben Euler. Tehát $K + K_P$ csak P -nél korábbi fülek éleit tartalmazza. Indukciót alkalmazva készen vagyunk. \square

A bizonyításban leírt módon megkonstruált körbázisra polinom időben találhatunk olyan 0-1 súlyozást, melyre nézve minden báziskör páratlan súlyú. Persze, hiszen minden következő báziskör használ olyan élet, amelyet az előzőek még nem; tehát elég, ha az új élek súlyát úgy választjuk meg, hogy az új báziskör is páratlan súlyú legyen.

Az alábbi tétel szerint egy ilyen súlyozás mindig leleplezi a nem even digráfokat.

2.1.3. Tétel. *Legyen B körbázis, $w \in U$ pedig egy 0-1 súlyozás, melyre nézve B minden eleme páratlan súlyú. Ekkor D -ben pontosan akkor van w -re nézve páros súlyú kör, ha D even.*

Bizonyítás. Ha D even, akkor, speciálisan, w -re nézve is van páros súlyú köre. Fordítva, tegyük fel, hogy K egy páros súlyú kör. $K \in C$, tehát K előáll $\sum_{i=1}^k K_i$ alakban, ahol minden i -re $K_i \in B$. B elemei páratlan súlyúak, viszont K páros súlyú, tehát k biztosan páros. Megmutatjuk, hogy D even. Legyen ehhez $w_2 \in U$ egy tetszőleges 0-1 súlyozás. Ha valamelyik K_i súlya w_2 szerint páros, akkor készen vagyunk. Egyébként pedig K súlya lesz páros. \square

2.1.4. Tétel. *Az even tulajdonság eldöntése algoritmikusan ekvivalens a páros irányított kör létezésének eldöntésével.*

Bizonyítás. Egy digráf pontosan akkor even, ha legalább az egyik erősen összefüggő komponense even. Feltehetjük tehát, hogy a bemenetként kapott D gráf erősen összefüggő.

Tegyük fel, hogy el tudjuk dönteni a páros kör létezését. Vegyünk polinom időben egy körbázist, és egy súlyozást, mely szerint a báziskörök páratlan súlyúak. Az előző tétel szerint D pontosan akkor even, ha erre a súlyozásra nézve van benne páros kör. Ezzel visszavezettük a feladatot a páros kör létezésére.

Másrészt, tegyük fel, hogy el tudjuk dönteni, hogy egy digráf even-e, és páros irányított kör létezését szeretnénk eldönteni. Ismét vegyünk egy körbázist. Ha ennek valamelyik tagja páros súlyú, akkor készen vagyunk. Egyébként, ismét az előző tételt alkalmazva, elég eldönteni, hogy a gráf even-e. \square

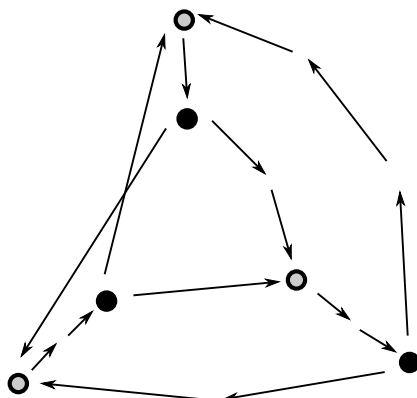
A későbbiekben egy even tulajdonságot eldöntő polinomiális algoritmust (Robertson-Seymour-Thomas) fogunk majd látni. Az előző bizonyítás alapján ebből következik, hogy páros kör egzisztenciáját is el tudjuk dönteni. Egy egyszerű trükk segítségével azt is meg tudjuk mondani, hol is található ez a kör. Csak el kell hagynunk a gráfból az összes élet, melyet elhagyva még van a maradékban páros kör. A végén kapunk egy konkrét páros kört.

2.2. Az élelhagyásra minimális even digráfok

2.2.1. Definíció. Jelölje C_k azt az irányítatlan gráfot, mely egyetlen k -hosszú körből áll. Ha H egy irányítatlan gráf, legyen H^* az az irányított gráf, amelyben minden H -beli élet oda-vissza behúzzunk. C_k^* neve: k -hosszú dupla kör.

2.2.2. Definíció. Legyen D egy digráf. Azt mondjuk, hogy a D_2 digráf egy gyenge D , ha megkapható D -ből élek és csúcsok felosztásával. Egy él felosztása azt jelenti, hogy egy új pont felvétele segítségével az élet egy 2-hosszú útra cseréljük. Egy v csúcs felosztása azt jelenti, hogy v -t kicseréljük egy v_1 és v_2 csúcsra, a v -be menő éleket v_1 -be irányítjuk, a v -t elhagyó éleket v_2 -ből indítjuk, és behúzzunk még egy v_1v_2 élet.

Az alábbi ábrán egy gyenge 3-hosszú dupla kör látható. A példában minden eredeti csúcsot felosztottunk, de persze ez nincs mindig így.



Legyen most D tetszőleges digráf, és D_2 egy gyenge D . Vegyük azt a P leképezést, mely minden $v \in V(D)$ csúcshoz megjelölt D_2 -ben a csúcsból a felosztás során keletkező P_v (esetleg 0-hosszú) utat. Ugyanígy, minden $e \in A(D)$ élnek feleltesse meg P D_2 -ben az él felosztásával keletkező P_e (legalább 1-hosszú) utat. Innentől P -re *útleképezés* néven fogunk hivatkozni. A definíció alapján P képhalmaza D_2 élhalmazának egy utakból álló partícióját alkotja.

2.2.3. Állítás. *Ha D even, akkor minden gyenge D is even.*

Bizonyítás. Legyen D_2 egy gyenge D , és w_2 egy tetszőleges 0-1 súlyozása. Vegyük D -n a következő w súlyozást: $w(uv) := w_2(P_{uv}) + w_2(P_v)$. D even, tehát van benne w -re nézve páros súlyú K kör. Legyen $K_2 \subset A(D)$ az az élhalmaz, amelyet az útleképezés által nyerünk K pontjaiból és éleiből. Ez egy irányított kör D_2 -ben. Ráadásul páros súlyú, mert $w_2(K_2) = \sum_{uv \in E(K)} w_2(P_{uv}) + \sum_{x \in V(K)} w_2(P_x) = \sum_{uv \in E(K)} (w_2(P_{uv}) + w_2(P_v)) = \sum_{e \in E(K)} w(e) = w(K)$, és $w(K)$ páros. Készen vagyunk. \square

2.2.4. Állítás. *Ha $k \geq 3$ páratlan, akkor minden gyenge C_k^* even.*

Bizonyítás. Az előző állítás alapján elég megmutatni, hogy C_k^* even. Írjunk tetszőlegesen 0-1 súlyokat az élekre! Ha valamelyik 2-élű kör páros súlyú, akkor készen vagyunk. Egyébként az egész digráf súlya páratlan, mert élhalmaza páratlan sok páratlan súlyú kör diszjunkt uniója. Másrészt C_k^* élei felbomlanak két (ellentétes irányú) körre, tehát ezek közül az egyik páros súlyú lesz. \square

Könnyen látható, hogy ha $k \geq 3$ páratlan, akkor minden gyenge C_k^* élelhagyásra minimális even. Az alábbi tétel alapján nincs más ilyen tulajdonságú digráf:

2.2.5. Tétel. *(Seymour-Thomassen) Egy digráf pontosan akkor even, ha tartalmaz részgráfként gyenge páratlan dupla kört.*

Persze ha az even tulajdonságot el tudjuk dönteni, akkor egy konkrét gyenge páratlan dupla kört is tudunk találni, amely mindenki számára könnyen ellenőrizhető bizonyíték. Sorban minden élre meg kell néznünk, hogy elhagyható-e anélkül, hogy az even tulajdonság sérülne. Így elő tudunk állítani egy élelhagyásra minimális even digráfot, amely a 2.2.5 Tétel szerint nem lehet más, mint egy gyenge páratlan dupla kör.

Az even tulajdonságot eldöntő szubrutint ehhez nagyságrendben annyszor kell meghívunk, ahány él van a gráfnak. Ez rossz esetben a csúcsok számában négyzetes számú hívás. Azonban az alábbi saját eredmény alapján ennél kevesebb is elég (legrosszabb esetben $\mathcal{O}(n \log n)$ hívás).

2.2.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy D egy even digráf, melyben minden csúcsból indul ki él. Ekkor $\mathcal{O}(n + n \log(m/n))$ hívással tudunk D -ben gyenge páratlan dupla kört keresni, ahol $n = |V(D)|$, $m = |E(D)|$.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy v csúcsot. Egy hívással eldönthető, hogy az innen kiinduló összes él egyszerre elhagyható-e. Ha nem, akkor legyen A a v -ből kiinduló élek halmaza, B pedig üres. Végig fenntartjuk majd azt a tulajdonságot, hogy A és B sem hagyható el, de az összes többi v -ből jövő él egyszerre elhagyható.

Ha $|A| \leq 1$ és $|B| \leq 1$, akkor készen vagyunk. Ilyenkor ugyanis egyszerűen elhagyjuk a többi élt, és továbbmegyünk a következő csúcsra. Feltehetjük tehát, hogy $|A| \geq |B| \geq 2$. Legyenek A_1 és A_2 olyanok, hogy $A_1 \dot{\cup} A_2 = A$, és $||A_1| - |A_2|| \leq 1$. Ha A_1 elhagyható, akkor hagyjuk el őt a gráfból, és legyen $A := A_2$. Ellenkező esetben A_1 és A_2 sem hagyható el. Ekkor $B = \emptyset$, különben lenne 3 diszjunkt élhalmaz, melyek v -ből indulnak ki, és egyik se felesleges. (Ilyen nem lehet, mert gyenge páratlan dupla körben minden kifok legfeljebb 2.) Ebben az esetben tehát legyen $B := A_2$ és $A := A_1$.

Tehát (konstans számú lépés kivételével) minden lépésben a v -ből kiinduló éleknek legalább $\frac{1}{4}$ részét ki tudjuk dobni. Ezért $\mathcal{O}(1 + \log \delta(v))$ lépés után mehetünk a következő csúcsra. (Itt használjuk, hogy $\delta(v) > 0$.) Vagyis a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával az összes hívás száma nagyságrendben legfeljebb

$$\sum_{\substack{v \in V(D) \\ \delta(v) > 0}} 1 + \log \delta(v) = n + \log \prod_{\substack{v \in V(D) \\ \delta(v) > 0}} \delta(v) \leq n + \log \left(\frac{\sum_{v \in V(D)} \delta(v)}{n} \right)^n = n + n \log \frac{m}{n}.$$

□

A fent leírt algoritmus új, gyors módszert ad arra is, hogy egy konkrét páros kört keressünk egy digráfban. A 2.1.4 tétel bizonyítása alapján ugyanis elég, ha csak az even digráfokban tudunk páros kört keresni (ha a digráf nem even, akkor az egyik báziskör jó lesz). Egy ilyen digráfban pedig a fenti módon hatékonyan találhatunk egy gyenge páratlan dupla kört, amely már csak lineárisan sok kört tartalmaz, ezekről pedig egymás után ellenőrizhetjük, hogy párosak-e.

A 2.2.5 tétel következményeként adódik az alábbi érdekes eredmény (multiunió alatt multihalmazokon vett uniót értünk):

2.2.7. Tétel. *(Manber-Shao) Egy digráf pontosan akkor even, ha tartalmaz olyan zárt sétát, mely előáll páros sok kör multiuniójaként és páratlan sok kör multiuniójaként is.*

Bizonyítás. Legyen D a digráf. Ha van ilyen séta, akkor D even. Legyen ugyanis w tetszőleges egész súlyozás. Ha most a séta kétféle felbontásában szereplő összes kör súlya páratlan lenne, akkor a séta éleinek (multiplicitással számolt) összsúlya egyrészt páros, másrészt páratlan lenne.

Másrészt tegyük fel, hogy D even. Ekkor tartalmaz részgráfként gyenge páratlan dupla kört, melyben van a feltételeknek megfelelő séta. Ugyanis vegyünk a páratlan dupla körben egy Euler-körsétát, és ennek az útleképezés általi képét. Ez a séta előáll mint páratlan sok kör multiuniója (a körök az eredeti dupla kör 2-hosszú köreinek P általi képei) és páros sok kör multiuniója (a körök az eredeti dupla kör k -hosszú köreinek képei). \square

2.3. Kapcsolat az összefüggőséggel és a fokszámokkal

Láttuk, hogy az even tulajdonság ekvivalens azzal, hogy a digráfban jelen van valamilyen struktúra. Adódik a kérdés, hogy biztosítva van-e a struktúra jelenléte a gráfban azzal, ha elég nagy alsó korlátokat teszünk az erős összefüggőségi számra, ill. a minimális fokszámra? Mi van akkor, ha kikötjük, hogy a digráf k -direguláris legyen (azaz minden csúcson befoka és kifoka ugyanaz a szám)? Másképpen,

2.3.1. Kérdés. *Igaz-e, hogy ha a D digráfban minden kifok legalább 100 és minden befok legalább 100, akkor D even?*

2.3.2. Kérdés. *Igaz-e, hogy ha a D digráf erősen 100-összefüggő, akkor D even?*

2.3.3. Kérdés. *Igaz-e, hogy ha a D digráf k -direguláris, ahol $k \geq 100$, akkor D even?*

Kanyarodjunk vissza kicsit a páros kör létezéséhez! Hasonló kérdéseket tehetünk fel itt is. Thomassen [12] megmutatta, hogy léteznek nagy fokú digráfok, melyekben nincsen páros kör.

2.3.4. Tétel. (Thomassen) Minden k -ra létezik olyan D_k digráf, mely nem tartalmaz páros kört, de minden pont kifoka pontosan k .

Bizonyítás. Legyen D_1 a 3-hosszú irányított kör. A következőképpen kapjuk D_{k+1} -et D_k -ből: minden $v \in V(D_k)$ -ra felveszünk egy új a_v csúcsot és egy $k + 1$ új csúcsból álló A_v halmazt. Húzzuk be a következő új éleket: v -ből a_v -be, a_v -ből A_v minden elemébe, és A_v minden eleméből v -be és minden olyan csúcsba, melybe v -ből vezet él. Ez a gráf jó lesz, mert ha lenne benne páros kör, akkor D_k -ban is lett volna. \square

2.3.5. Következmény. (Thomassen) Minden k -ra létezik olyan D_k' digráf, mely nem tartalmaz páros kört, de minden pont kifoka és befoka is legalább k . Speciálisan, D_k' nem even.

Bizonyítás. Vegyük a $D_k \dot{\cup} \overleftarrow{D}_k$ diszjunkt uniót, ahol \overleftarrow{D}_k az a digráf, amelyet D_k éleinek megfordításával kapunk. Ezután minden $u \in V(\overleftarrow{D}_k)$ csúcsból húzzunk élet minden $v \in V(D_k)$ csúcsba. Mivel $|V(D_k)| \geq k$, ezért a konstrukció jó lesz. \square

Láthatjuk, hogy összefüggőségi feltétel kimondása nélkül nem adhatunk meg elég nagy minimális fokszámot, amely garantálná, hogy a gráf even. Thomassen [14] az alábbi tételeket bizonyította az összefüggőség, a fokszámok és az even tulajdonság kapcsolatáról. A bizonyítások viszonylag komplikáltak.

2.3.6. Tétel. (Thomassen) Ha a D digráf erősen 2-összefüggő, és legfeljebb 3 kivétellel minden pont kifoka legalább 3, akkor D even.

Bizonyítás. A tételnek egy általánosítása következik Robertson, Seymour és Thomas nagyszabású struktúratételéből 6.2.1 6.2.3, melyet később tárgyalunk. \square

2.3.7. Tétel. (Thomassen) Ha a D digráf erősen összefüggő, és minden pont befoka és kifoka is legalább 3, akkor D even.

A fentiek alapján:

2.3.8. Következmény. (Thomassen) Minden erősen 3-összefüggő digráf even. Speciálisan, tartalmaz páros hosszú kört.

2.3.9. Következmény. (Thomassen) Minden k -direguláris digráf even, ha $k \geq 3$.

Bizonyítás. Legyen D k -direguláris digráf. Feltehető, hogy D összefüggő. D Euler, mert minden csúcs befoka egyenlő a kifokával. Tehát spec. D erősen összefüggő. Mivel minden befok és kifok legalább 3, ezért 2.3.7 alapján készen vagyunk. \square

A fentiek alapján a 2.3.1 kérdésre tehát „nem”, a 2.3.2 és 2.3.3 kérdésekre viszont „igen” a válasz.

3. L-mátrixok

Ebben a fejezetben egy elméleti közgazdaságtani problémát mutatunk be [2], amelytől aztán kiderül, hogy kapcsolatban áll a páros körök problémájával [13].

3.1. Motiváció

Adott egy termék, pl. legyen ez a banán. Tegyük fel, hogy a termék népszerűsége időben változó, és jelölje α azt, hogy jelenleg mennyire kedvelik az emberek a banánt. A megtermelt banánmennyiség az ár függvénye, viszont az emberek által keresett banánmennyiség függ az ártól és a kedveltségi szinttől is. A keresletet így tehát egy $D(p, \alpha)$, a kínálatot pedig egy $S(p)$ függvény írja le. Egyensúlyi ár esetén a kereslet és a kínálat is egyenlő valami x egyensúlyi mennyiséggel, vagyis

$$D(p, \alpha) - x = 0 \quad (3.1.1)$$

$$S(p) - x = 0 \quad (3.1.2)$$

Józan eszünkre támaszkodva kijelenthetjük, hogy $\frac{\partial S}{\partial p} > 0$, $\frac{\partial D}{\partial p} < 0$ és $\frac{\partial D}{\partial \alpha} > 0$. Kérdés, hogy ha α növekszik, akkor az egyensúlyi mennyiség és az egyensúlyi ár hogyan változnak. Egyáltalán meg tudjuk-e határozni az eddigi kvalitatív feltevéseinkből kiindulva $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ és $\frac{\partial p}{\partial \alpha}$ előjelét? Vagy esetleg ismernünk kellene a konkrét S , D függvényeket ahhoz, hogy ezeket az előjeleket meg tudjuk mondani?

Deriváljuk le a 3.1.1 és 3.1.2 egyenleteket α szerint. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\frac{\partial D}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{\partial D}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.1.3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.1.4)$$

Vagyis,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial D}{\partial p} & -1 \\ \frac{\partial S}{\partial p} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial D}{\partial \alpha} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A fenti $Ay = b$ lineáris egyenletrendszerben szereplő A mátrix és b vektor elemeit nem tudjuk, csupán az elemek előjelét. Arra vagyunk tehát kíváncsiak, hogy minden

ilyen előjelmintájú A mátrixra és b vektorra ugyanolyan előjelmintájú y vektorok felelnek-e meg az $Ay = b$ feltételnek.

3.1.1. Definíció. Ha X egy mátrix vagy vektor, akkor $[X]$ jelölje azon mátrixok/-vektorok halmazát, melyek elemeinek előjelei megegyeznek X megfelelő elemeinek előjeleivel.

Persze $[X]$ mindig egy konvex halmaz.

3.1.2. Definíció. Az $Ay = b$ lineáris egyenletrendszer előjel-megoldható, ha létezik olyan z , hogy minden $A_2 \in [A]$ és $b_2 \in [b]$ -re az $A_2y = b_2$ egyenletrendszer megoldható, és minden y megoldásra $y \in [z]$.

Ha tehát a következő rendszer előjel-megoldható, akkor $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ és $\frac{\partial p}{\partial \alpha}$ előjele meghatározható anélkül, hogy ismernénk a konkrét keresleti és kínálati függvényeket:

$$\begin{pmatrix} - & - \\ + & - \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} - \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.1.3. Definíció. Egy A mátrixot L-mátrixnak hívunk, ha minden $A_2 \in [A]$ mátrixra A_2 sorai lineárisan függetlenek.

3.1.4. Definíció. Egy négyzetes A mátrixot előjeles determinánsúnak hívunk, ha minden $A_2 \in [A]$ mátrixra $\text{sgn det } A_2 = \text{sgn det } A$.

Könnyen látható, hogy A pontosan akkor előjeles determinánsú, ha vagy L-mátrix, vagy determinánsának minden kifejtési tagja 0. (Megjegyezzük, hogy az, hogy egy mátrix determinánsának minden kifejtési tagja 0, eldönthető polinom időben, ugyanis ekvivalens azzal, hogy egy bizonyos páros gráfban nincs teljes párosítás.)

Látni fogjuk, hogy a négyzetes L-mátrixok szoros kapcsolatban állnak a páros irányított körökkel. Konkrétan, egy négyzetes mátrixról eldönteni, hogy L-mátrix-e, ekvivalens azzal, hogy egy irányított gráfban eldöntsük, hogy van-e benne páros kör. Ha tehát a páros kör eldöntésére van egy polinomiális algoritmusunk, akkor az alábbi tétel alapján négyzetes együtthatómátrix esetén el tudjuk dönteni az előjel-megoldhatóságot:

3.1.5. Tétel. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $b \in \mathbb{R}^n$. Jelölje $A(i : b)$ azt a mátrixot, melyet A -ból kapunk úgy, hogy az i . oszlop helyére behelyettesítjük a b vektort. Ekkor $Ay = b$ pontosan akkor előjel-megoldható, ha A L-mátrix, és minden i -re $A(i : b)$ előjeles determinánsú.

Bizonyítás. Az odafelé irány bizonyításához először tegyük fel, hogy A nem L-mátrix. Ekkor létezik $A_2 \in [A]$ szinguláris mátrix. Legyen z olyan nemnulla vektor, melyre $A_2 z = 0$. Mivel $Ay = b$ előjel-megoldható, ezért létezik y_2 , melyre $A_2 y_2 = b$. De ekkor az $y_2 + \mathbb{R}z$ egyenes minden eleme is megoldás, másrészt egy egyenes elemei nem tartoznak egy előjelosztályba. Ez ellentmond az előjel-megoldhatóságnak. Vagyis A L-mátrix.

Emiatt minden $A_2 \in [A]$ és $b_2 \in [b]$ esetén $A_2 y = b_2$ egyértelműen oldható meg, és a megoldást a Cramer-szabállyal kaphatjuk meg, vagyis $y_i = \frac{\det A_2(i:b_2)}{\det A_2}$. Mivel A L-mátrix, ezért $\text{sgn det } A_2 = \text{sgn det } A$. Az előjel-megoldhatóság miatt y_i előjele bármely A_2, b_2 -re ugyanaz, tehát $\det A_2(i : b_2)$ előjele is mindig ugyanaz, vagyis $A(i : b)$ előjeles determinánsú.

A visszafelé irány egyszerűen következik a Cramer-szabályból. \square

A fenti tétel miatt a 3.1 egyenletrendszer pontosan akkor előjel-megoldható, ha $\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$ L-mátrix, valamint $\begin{pmatrix} - & + \\ + & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & - \\ 0 & - \end{pmatrix}$ előjeles determinánsúak. Ezek a tulajdonságok elég könnyen ellenőrizhetőek, de ha egy komplexebb közgazdaságtani problémát vázoltunk volna fel, akkor a következő szakasz alapján digráfok rajzolatása és páros kör keresése lenne a megoldás.

3.2. Kapcsolat a páros körökkel

Az alábbi tétel fontos jellemzését adja az L-mátrixoknak.

3.2.1. Tétel. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pontosan akkor L-mátrix, ha a determinánsában van nemnulla kifejtési tag, és minden nemnulla kifejtési tag előjele megegyezik.

Bizonyítás. A feltétel nyilvánvalóan elégséges, mivel ha A minden nemnulla kifejtési tagja ugyanolyan előjelű, és van ilyen tag, akkor minden $B \in [A]$ esetén $\text{sgn det } B = \text{sgn det } A \neq 0$.

Másrészt, tegyük fel, hogy $\det A$ -ban szerepel negatív és pozitív kifejtési tag is. Megmutatjuk, hogy ekkor létezik olyan $B \in [A]$, mely szinguláris, tehát ekkor A nem L-mátrix. Tegyük fel az általánosság megszorítása nélkül, hogy $\det A > 0$. Ekkor vegyünk egy negatív kifejtési tagot, és jelölje $N_\varepsilon \in [A]$ azt a mátrixot, ahol a kijelölt tagban szereplő mátrixelemek abszolút értéke 1, a többi nemnulla elemé pedig ε . Elég kicsi $\varepsilon > 0$ -ra $\det N_\varepsilon < 0$. Az A -t és N_ε -t összekötő szakaszon ekkor létezik olyan $B \in [A]$, melyre $\det B = 0$. \square

Legyen most $B \in \{0, \pm 1\}^{n \times n}$ egy előjelmátrix. Készítsünk el egy páros gráfot, melynek egyik színosztálya B oszlopainak felel meg, a másik B sorainak, és két csúcs össze van kötve, ha az adott mátrixelem nem nulla. Keressünk teljes párosítást ebben a gráfban (pl. folyamalgoritmussal)! Ha ilyen nincs, akkor a fenti tétel alapján B determinánsában nincsen nemnulla kifejtési tag, tehát B biztosan nem L-mátrix. Egyébként vegyünk egy teljes párosítást, és permutáljuk meg úgy B sorait és oszlopait, hogy a párosításnak megfelelő kifejtési tag a főátlóba kerüljön; majd szorozzuk meg azokat a sorokat -1 -gyel, amelyeknek megfelelő főátlóbeli elemek negatívak. (Ezen transzformációk nyilvánvalóan nem változtatnak az L-tulajdonságon.)

A fenti gondolatmenet alapján tehát feltehetjük, hogy a szóban forgó mátrix főátlója csupa 1 -esből áll. Feleltessünk meg most B -nek egy 0 - 1 súlyozással ellátott D_B digráfot a következőképpen. A gráf csúcsai legyenek az $1, \dots, n$ számok, és minden nemnulla B_{ij} elemhez húzzuk be az ij élt. Ennek az élnek a súlya legyen 1 ill. 0 , ha $B_{ij} = 1$ ill. -1 . Az alábbi tétel alapján a négyzetes mátrixok L-mátrixságának eldöntése algoritmikusan ekvivalens a páros irányított kör létezésének eldöntésével.

3.2.2. Tétel. *B pontosan akkor L-mátrix, ha D_B -ben nincs páros súlyú irányított kör.*

Bizonyítás. B főátlójának egy pozitív tag felel meg a determinánsban. Tegyük fel most, hogy D_B -ben van egy $\{x_1, \dots, x_k\}$ csúcsok által meghatározott w súlyú kör, ahol w páros szám. Legyen $x_{k+1} := x_1$. Vegyük a következő π permutációt: minden $1 \leq i \leq k$ -ra $\pi(x_i) := x_{i+1}$, a többi elem pedig fixpontja π -nek. Ekkor a π -hez tartozó kifejtési tag negatív lesz. Valóban, a π -hez tartozó kifejtési tag előjele:

$$(-1)^{k+1} \prod_{i=1}^k B_{x_i x_{i+1}} = (-1)^{k+1} 1^w (-1)^{k-w} = (-1)^{w+1} = -1.$$

Ha tehát D_B -ben van páros súlyú kör, akkor B nem lehet L-mátrix.

Fordítva, tegyük fel, hogy B nem L-mátrix, vagyis van olyan π permutáció, melyhez negatív kifejtési tag tartozik. Léteznek olyan $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\ell$ nemtriviális ciklusok, melyeknek szorzata π , és melyek páronként különböző elemeket mozgatnak. Ekkor viszont a π -hez tartozó kifejtési tag is szorzata a π_j ciklusokhoz tartozó kifejtési tagoknak, mert az előjel szorzódik, és a mátrix főátlója csupa 1 -es. Mivel π -hez negatív kifejtési tag tartozik, ezért tehát van olyan π_j , melyhez szintén negatív tartozik. Feltehetjük tehát, hogy π egyetlen ciklusból áll. Ekkor π -nek megfelel egy D_B -beli kör. A fentihez hasonló számolással belátható, hogy ha a kör páratlan súlyú lenne, akkor π -hez pozitív kifejtési tag tartozna. \square

3.2.3. Következmény. *Egy digráfban pontosan akkor van páros kör, ha $\det(I + A) \neq \text{per}(I + A)$, ahol A az adjacencia-mátrix.*

Bizonyítás. Mivel $I + A$ egy 0-1 mátrix, ezért $\det(I + A) \leq \text{per}(I + A)$, és egyenlőség pontosan akkor, ha $I + A$ L-mátrix. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha D_{I+A} -ban nincs páros kör. D_{I+A} pedig éppen az eredeti digráf a csupa 1 súlyozással. \square

3.2.4. Következmény. *Ha 0-1 mátrixokra el tudjuk dönteni az L-mátrixságot, akkor minden mátrixra.*

Bizonyítás. Az állítással ekvivalens, hogy ha súlyozatlan digráfokra el tudjuk dönteni páros kör létezését, akkor minden 0-1 súlyozású digráfra is. Ez persze triviális, csak fel kell osztanunk a 0-súlyú éleket. \square

A fentiek segítségével már könnyen bebizonyítható Friedland [4] eredménye. Ez gyengébb, mint a 2.3.9 tétel, de nagy előnye, hogy nem használja fel Thomassen [14] terjedelmes bizonyítást igénylő tételeit.

3.2.5. Tétel. *(Friedland) Minden k -direguláris digráf tartalmaz páros kört, ha $k \geq 7$.*

Bizonyítás. 3.2.3 alapján elég, ha $\det(I + A) \neq \text{per}(I + A)$. Esetünkben $I + A$ minden sorában és oszlopában $k + 1$ egyes szerepel, tehát $\frac{I+A}{k+1}$ duplán sztochasztikus mátrix, melynek permanense a van der Waerden-„sejtés” miatt legalább e^{-n} . Emiatt $\text{per}(I + A) \geq (k + 1)^n e^{-n}$. Másrészt a mátrix minden sorvektorának hossza $\sqrt{k + 1}$, tehát $|\det(I + A)| \leq \sqrt{k + 1}^n$. Mivel $k \geq 7 > e^2 - 1$, ezért $\sqrt{k + 1}^n < (k + 1)^n e^{-n}$, tehát $|\det(I + A)| < \text{per}(I + A)$. \square

Digráfok segítségével könnyebben kezelhetőek az L-mátrixok. Nevezzünk egy mátrixelemet *feleslegesnek*, ha az az előjelmátrixnak nincsen benne nemnulla kifejtési tagjában.

3.2.6. Állítás. *Egy L-mátrixban pontosan akkor nincsen felesleges elem, ha a megfelelő digráf minden komponense erősen összefüggő.*

Bizonyítás. Ha egy elem felesleges, akkor nem a főátlóban van, tehát neki megfelel egy él a gráfban. Minden kifejtési taghoz diszjunkt körök tartoznak a digráfban. Így az adott mátrixelem pontosan akkor felesleges, ha az őhöz tartozó él nincsen benne körben. Ebből azonnal adódik az állítás. \square

Az alábbi tételek alapján egy L-mátrixban nem lehet túl sok nemnulla elem.

3.2.7. Tétel. *Ha egy L -mátrixban nincsen felesleges elem, akkor van olyan sor vagy oszlop, melyben legfeljebb 3 nemnulla elem szerepel.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy B minden sorában és oszlopában legalább 4 nemnulla elem van. Ekkor a D_B digráfban minden kifok és befok legalább 3. Továbbá D_B minden komponense erősen összefüggő, mert nincsen felesleges elem. A 2.3.7 tétel alkalmazásával kapjuk, hogy D_B minden komponense even, spec. D_B -ben van páros súlyú kör. Ekkor viszont B nem lehet L -mátrix. \square

Az alábbi tételt bizonyítás nélkül közöljük.

3.2.8. Tétel. *(Thomassen) Minden $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ L -mátrixnak legalább $\binom{n-1}{2}$ eleme 0.*

4. Pfaff-irányítások

Ebben a fejezetben egy olyan problémát fogunk látni, mely algoritmikusan ekvivalens az even tulajdonság eldöntésével. Az elején még meglepőnek tűnhet az a kijelentés, hogy a páros gráfok Pfaff-irányíthatósága bizonyos értelemben könnyebben kezelhető átfogalmazás, mint az even tulajdonság. Azonban Little tételén és majd a Robertson-Seymour-Thomas-algoritmuson keresztül is látni fogjuk, hogy igazából ez egy eléggé természetes „nyelv” a probléma leírására. A fejezet nagy része Lovász és Plummer [5] könyvének alapszik.

4.1. A teljes párosítások száma

Tegyük fel, hogy az A adjacenciamátrixszal adott egy páros gráf, melynek mindkét színosztálya n csúcsot tartalmaz. Szeretnénk megszámolni a teljes párosításokat, vagyis kíváncsiak vagyunk per A értékére. Sajnos a permanens kiszámolására valószínűleg nem létezik polinomiális algoritmus. De bizonyos tulajdonságú páros gráfokra per A mégis kiszámolható.

Ehhez vezessük be először a *Pfaff-polinomot*. Legyen $B \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ antiszimmetrikus mátrix. Jelölje K_{2n} azt a teljes gráfot, melynek csúcsai az $1, \dots, 2n$ számok. Legyen M egy teljes párosítás K_{2n} -ben, vagyis $M = \{\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\}, \dots, \{i_n, j_n\}\}$, ahol $\{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, 2n\}$. Legyen π az $(i_1, j_1 \dots i_n, j_n)$ permutáció (π -t az M halmaz nem határozza meg egyértelműen!), és $b_M := \text{sgn } \pi \prod_{x=1}^n B_{i_x j_x}$.

4.1.1. Állítás. b_M jóldefiniált, vagyis nem függ a π permutáció választásától.

Bizonyítás. Elég belátni, hogy b_M értékét nem változtatja meg két párosításél felcserélése, és az sem, ha egy élen belül a két csúcsot felcseréljük. Két él cseréje két transzpozíciónak felel meg, tehát ezzel $\text{sgn } \pi$ nem változik, másrészt $\prod_{x=1}^n B_{i_x j_x}$ sem. Ha pedig egy élen belül cserélünk, akkor $\text{sgn } \pi$ és $\prod_{x=1}^n B_{i_x j_x}$ is -1 -szeresére vált, hiszen B antiszimmetrikus. \square

4.1.2. Definíció. A $\sum_M b_M$ értéket a B antiszimmetrikus mátrix Pfaff-polinomjának nevezzük, és $\text{pf } B$ -vel jelöljük. (Az összegzés az összes $M \subset E(K_{2n})$ teljes párosításra megy.)

Az alábbi tétel kapcsolatot teremt a determináns és a Pfaff-polinom között.

4.1.3. Tétel. (Cayley) Minden B antiszimmetrikus mátrixra $\det B = (\text{pf } B)^2$.

Legyen most $G = (V, E)$ egy tetszőleges egyszerű gráf, melynek $2n$ csúcsa van. A legyen G adjacencia-mátrixa, $\vec{G} = (V, \vec{E})$ pedig G egy tetszőleges irányítása. Definiáljuk az \vec{A} irányított adjacencia-mátrixot a következőképpen: \vec{A}_{ij} értéke legyen 1, ha $ij \in \vec{E}$; -1, ha $ji \in \vec{E}$; és 0 egyébként.

\vec{A} antiszimmetrikus, tehát $\text{pf } \vec{A}$ értelmes. Ráadásul $\text{pf } \vec{A}$ átcímkezésre invariáns, vagyis értéke nem függ attól, hogy az A mátrixban melyik sor/oszlop melyik csúcshoz tartozott. Ezért beszélhetünk magának az irányításnak a Pfaff-polinomjáról.

Mivel $\vec{A} \in \{0, \pm 1\}^{2n \times 2n}$, ezért a Pfaff-polinomban minden nemnulla tag ± 1 . $\text{pf } \vec{A}$ tagjai pedig megfelelnek G teljes párosításainak, tehát értelmezhető egy teljes párosítás előjele (amit a \vec{G} irányítás határoz meg). Ha most $\Phi(G)$ jelöli G teljes párosításainak a számát, akkor tehát $|\text{pf } \vec{A}| \leq \Phi(G)$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha minden teljes párosítás előjele megegyezik.

4.1.4. Definíció. Egy \vec{G} irányítást Pfaff-irányításnak nevezünk, ha őrán nézve minden teljes párosítás ugyanolyan előjelű. G Pfaff-irányítható, ha létezik Pfaff-irányítása.

Tegyük fel, hogy az érdekel minket, hogy hány teljes párosítás van G -ben. Ha találunk egy \vec{G} Pfaff-irányítást, akkor erre nézve minden teljes párosítás előjele megegyezik, vagyis $\Phi(G) = |\text{pf } \vec{A}| = \sqrt{\det \vec{A}}$. Tehát elég egy determináns négyzetgyökét kiszámolnunk, és megkapjuk a teljes párosítások számát.

Most legyen \vec{G} tetszőleges irányítás, és vegyünk két teljes párosítást, ezek legyenek M_1 és M_2 . Mikor lesznek ezek \vec{G} szerint ugyanolyan előjelűek?

Tekintsük az $M_1 \Delta M_2$ szimmetrikus differenciát, amely G -ben páros hosszú körökből áll. Ha K egy páros hosszú kör G -ben, akkor definiálhatjuk \vec{G} -re nézve az $\text{sgn } K$ előjelet a következőképpen. Vegyük G -nek egy olyan \vec{G}_2 irányítását, melyre nézve K egy irányított kör. Ha most K mentén k db élre igaz az, hogy az az él \vec{G} szerint és \vec{G}_2 szerint ugyanúgy van irányítva, akkor legyen $\text{sgn } K := (-1)^{k+1}$. Mivel K hossza páros, ezért $\text{sgn } K$ jóldefiniált. $\text{sgn } K = -1$ esetén a kör *párosan*, $\text{sgn } K = 1$ esetén pedig *páratlanul* van irányítva.

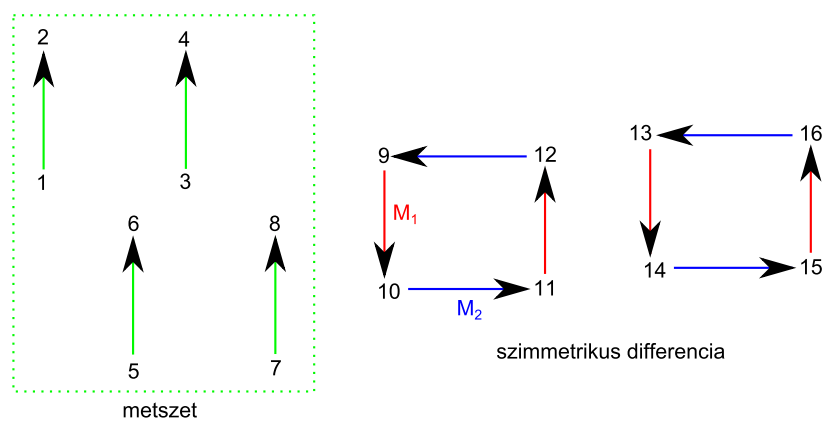
4.1.5. Tétel. Ha az $M_1 \Delta M_2$ körrendszer a K_1, K_2, \dots, K_m körökből áll, akkor

$$\text{sgn } M_1 \cdot \text{sgn } M_2 = \prod_{i=1}^m \text{sgn } K_i.$$

Vagyis M_1 és M_2 pontosan akkor ugyanolyan előjelű, ha a szimmetrikus differenciában páros sok párosan irányított kör van.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy ha egy irányításon igaz a fenti állítás, akkor mind-egyikre igaz. Ugyanis egy e él megfordítva vagy egyik oldal sem változik, vagy mindegyik ellentettjére vált (ez akkor van, ha $e \in M_1 \Delta M_2$). Feltehetjük tehát, hogy $M_1 \Delta M_2$ minden köre irányított kör \vec{G} -ben.

Továbbá, ha átcímkezzük a gráfot, nem változnak meg az M_i teljes párosítások előjelei. Feltehetjük tehát, hogy az $M_1 \cap M_2$ párosítás minden éle egy csúcsból az eggyel nagyobb indexű csúcsba mutat. Továbbá azt is, hogy minden $K_j \subset M_1 \Delta M_2$ körre igaz, hogy az irányítás mentén a kör csúcsai egymást követő indexűek, és a növekvő számozás egy M_1 -beli él kezdőpontjával kezdődik.



Ekkor az M_1 -hez és M_2 -höz tartozó Pfaff-tagban is 1 a mátrixelemek szorzata. Továbbá, $\text{sgn } M_1 = 1$, mert úgy számoztuk meg a csúcsokat, hogy M_1 -hez az identikus permutáció tartozzon. M_2 -höz pedig egy olyan permutáció tartozik, amelyben a K_j körök felelnek meg a páros hosszú ciklusoknak. Tehát $\text{sgn } M_2 = (-1)^m$, mert minden páros hosszú ciklus páratlan permutáció. Másrészt itt minden j -re $\text{sgn } K_j = -1$. Mindezt összevetve adódik az állítás. \square

Nevezzünk egy G -beli K kört *szépnek*, ha páros hosszú, és a $G - V(K)$ gráfban van teljes párosítás. A fenti tételből adódnak a Pfaff-irányítások alábbi jellemzései.

4.1.6. Következmény. \vec{G} pontosan akkor Pfaff-irányítás, ha minden szép kör páratlanul van irányítva.

4.1.7. Következmény. \vec{G} pontosan akkor Pfaff-irányítás, ha vagy nincs G -ben teljes párosítás, vagy létezik olyan $M \subset E(G)$ teljes párosítás, melyre minden M -alternáló kör páratlanul van irányítva.

4.2. Kasteleyn algoritmusa síkgráfokra

P. W. Kasteleyn bebizonyította, hogy minden síkgráfnak létezik Pfaff-irányítása, ráadásul egy ilyen irányítás polinom időben megkereshető. Ebből speciálisan az is következik, hogy egy síkgráf teljes párosításainak a száma polinom időben kiszámolható. A páros irányított körök szempontjából azonban nem ezért érdekes a Kasteleyn-algoritmus, hanem azért, mert azt a digráfok even tulajdonságát eldöntő Robertson-Seymour-Thomas-algoritmus szubrutinként használja!

Legyen tehát G tetszőleges egyszerű síkgráf. Ha G valamelyik komponense nem egy blokkból áll, akkor vegyük annak a blokk-eltávolító-pont-fáját, és annak egy levelét, mely egy B blokk. Legyen a B -hez tartozó eltávolító pont v , és a v -re illeszkedő élek halmaza E_v . $|V(B)|$ paritásától függően v párja vagy minden teljes párosításban B -beli, vagy egyikben sem az. Az első esetben töröljük a gráfból az $E_v \setminus E(B)$ -beli éleket, a második esetben az $E_v \cap E(B)$ -beli éleket. Így csupa olyan élt töröltünk, mely nincs benne teljes párosításban. A törölt élek emiatt tetszőlegesen irányíthatóak. Előbb-utóbb a redukációs lépések véget érnek, mert véges sok él van.

Ekkor G minden komponense izolált él vagy 2-összefüggő. Az izolált éleket tetszőlegesen irányíthatjuk, mert minden teljes párosításban benne vannak. Azaz innentől feltehetjük, hogy G 2-összefüggő. Lapjait tehát körök határolják, és minden éle két lapnak a határán van rajta.

Vegyünk egy \vec{G} irányítást. Nevezzünk egy G -beli kört *jónak* (saját elnevezés), ha a pozitív körüljárás szerint irányított éleinek száma ellentétes paritású a kör belsejében lévő pontok számával. Vegyünk G -ben egy szép kört! Mivel a kör komplementerének pontjai összepárosíthatóak, ezért a kör belsejében mindenképpen páros számú pont van. Tehát ha ez a kör nemcsak szép, hanem jó is, akkor ő páratlanul irányított. Vagyis ha a gráf összes köre jó, akkor spec. minden szép kör páratlanul irányított, tehát az irányítás Pfaff-irányítás.

Az alábbi lemma szerint elég a jóságot a véges laphatárokra megkövetelni.

4.2.1. Lemma. *Ha \vec{G} -re nézve minden véges lap határköre jó, akkor \vec{G} -re nézve G összes köre jó. Speciálisan, ekkor \vec{G} Pfaff-irányítás.*

Bizonyítás. Vegyünk egy $C \subset E(G)$ kört, és tekintsük a C által határolt véges tartományt. Ezen belül f lap, v csúcs és e él van (C csúcsait és éleit nem számoljuk bele). Ha C hossza ℓ , akkor az Euler-formula szerint $(f + 1) + (v + \ell) - (e + \ell) = 2$, vagyis $v - 1 = e - f$.

Jelölje c_i ($1 \leq i \leq f$) az i -edik C -beli lap határkörén szereplő élek közül a pozitívan irányítottak számát. Minden c_i páratlan, tehát $\sum_{i=1}^f c_i \equiv f \pmod{2}$.

Másrészt, ha c jelöli azt, hogy C határán hány él van pozitívan irányítva, akkor $\sum c_i = c + e$. Ugyanis a belső élek az egyik szomszédos lapra nézve pozitívak, a másokra nézve negatívak. Mindebből, $c + e \equiv f$, vagyis $c \equiv f - e \equiv v - 1$. Ezt kellett igazolnunk. \square

Az algoritmus inentől már egyszerű. Ha G egyetlen körből áll, akkor triviálisan elérhető, hogy ez a kör jó legyen. Egyébként pedig vegyünk egy F lapot, mely szomszédos a végtelen lappal, majd legyen P az F -et és a végtelen lapot elhatároló út. A 2-összefüggő $G - P$ gráfnak indukcióval megkereshetjük egy Pfaff-irányítását, majd a P utat olyan irányítással illesztjük be a gráfba, hogy a P -vel szomszédos véges lap határköre jó legyen. Így megkapjuk G -nek egy Pfaff-irányítását.

Az első fázis $\mathcal{O}(m^2)$ időben könnyen megoldható, mert egy gráf blokkfaját élszámnyi időben meg lehet találni, és max. annyi törlési lépés van, ahány élű a gráf. A második fázis már teljesen lineáris, $\mathcal{O}(m)$ időben megy. Egy síkgráfnak csak $\mathcal{O}(n)$ éle van, tehát a futásidő $\mathcal{O}(n^2)$.

Kasteleyn eredetileg fizikus volt. Az algoritmus kifejlesztésekor tudomásunk szerint főleg az motiválta, hogy szeretne volna megoldani a fizikai alkalmazásokkal rendelkező dimérproblémát, vagyis azt akarta kiszámolni, hogy egy $n \times m$ -es sakktáblát (nm páros) hányféleképpen lehet dominókkal lefedni. Ez a szám éppen $\Phi(L(n, m))$, vagyis az $L(n, m)$ rácsgráf teljes párosításainak száma. Mivel a rácsgráf síkgráf, ezért könnyen megtalálható egy Pfaff-irányítása, és a megfelelő determináns négyzetgyöke megadja a teljes párosítások számát. A teljes párosítások számára ezzel a módszerrel a következő szép képlet adódik:

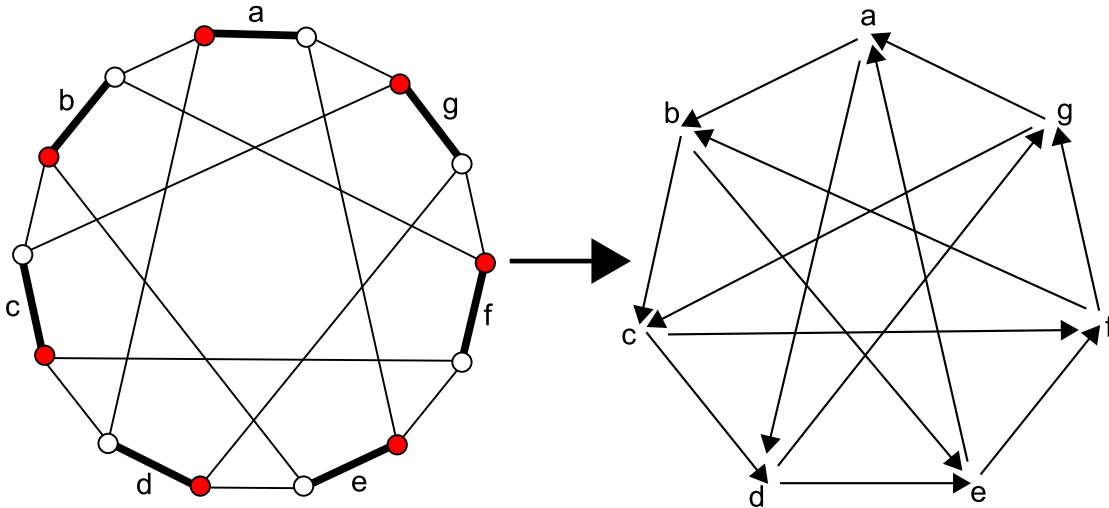
$$\Phi(L(n, m)) = \sqrt{2}^{nm} \prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^m \left(\cos^2 \frac{\pi k}{n+1} + \cos^2 \frac{\pi l}{m+1} \right)^{1/4}.$$

4.3. Kapcsolat az even tulajdonsággal

A szakasz hátralevő részében páros gráf alatt négyzetes páros gráfot értünk, vagyis olyat, amelynek a két színosztálya ugyanakkora. A nem négyzetes páros gráfok nem túl izgalmasak, ugyanis nincs bennük teljes párosítás, tehát mindannyian Pfaff-irányíthatóak, sőt bármely irányításuk megfelel.

Legyen tehát $G = (S, T, E)$ egy páros gráf, és M egy teljes párosítása. A (G, M) párnak megfeleltethetünk egy $D(G, M)$ digráfot a következőképpen: a digráf pontjai M élei, és $u, v \in M$ esetén u -ból v -be pontosan akkor mutasson D -beli él, ha $(u \cap \cap S, v \cap \cap T) \in E$. Fordíva, ha van egy digráfunk, akkor—a konstrukció megfordításával—megfelel neki egy páros gráf és abban egy teljes párosítás.

Az alábbi ábrán a Heawood-gráf példáján illusztráljuk a megfeleltetést. A Heawood-gráf a Fano-sík pont-egyenes incidenciagráfja, vagyis egy 14-pontú páros gráf. Ebben a speciális gráfban akárhogy választunk egy teljes párosítást, a kapott $D(G, M)$ digráf izomorfizmus erejéig mindig ugyanaz lesz.



A következő tétel teremti meg a kapcsolatot az even tulajdonság és a Pfaff-irányítások között.

4.3.1. Tétel. G pontosan akkor Pfaff-irányítható, ha $D(G, M)$ nem even.

Bizonyítás. Feleltessük meg egymásnak G irányításait és a $D(G, M)$ -en értelmezett 0-1 élfüggvényeket a következőképpen. Ha egy e élt a \vec{G} irányítás S -ből T -be irányítja, akkor az e -nek megfelelő $D(G, M)$ élre írjunk 0-t, egyébként 1-et.

A 4.1.7 következmény miatt \vec{G} pontosan akkor Pfaff-irányítás, ha minden M -alternáló kör páratlanul irányított. Az M -alternáló körök pedig éppen $D(G, M)$ irányított köreinek felelnek meg, és egy M -alternáló kör pontosan akkor páratlanul irányított, ha a neki megfelelő $D(G, M)$ -beli irányított kör súlya páratlan.

Tehát \vec{G} pontosan akkor Pfaff-irányítás, ha a neki megfelelő 0-1 élfüggvényre nézve nincsen páros súlyú irányított kör $D(G, M)$ -ben. Vagyis G pontosan akkor Pfaff-irányítható, ha $D(G, M)$ nem even. \square

4.3.2. Következmény. A Heawood-gráf Pfaff-irányítható.

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy a Heawood-gráfnak megfeleltetett irányított gráfban nincsen páros kör. Speciálisan, ez a digráf nem even. \square

Azt mondjuk, hogy a H' gráf egy *párosan felosztott* H , ha H' -t úgy kapjuk H -ból, hogy annak minden élet páros sok osztóponttal felosztjuk. (Speciálisan, az is lehet, hogy egy élet egyáltalán nem osztunk fel.) Az alábbi egy saját elnevezés.

4.3.3. Definíció. G -ben lakik H , ha G -nek van olyan H' részgráfja, mely egy párosan felosztott H , és amely szép részgráf, azaz melyre $G - V(H')$ tartalmaz teljes párosítást.

A Pfaff-irányítható páros gráfokat Little jellemezte a $K_{3,3}$ gráf segítségével.

4.3.4. Tétel. (Little) Pontosan azok a teljes párosítással rendelkező páros gráfok Pfaff-irányíthatóak, melyekben nem lakik $K_{3,3}$.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy G -ben lakik $K_{3,3}$. Jelölje ezt a részgráfot H . Ekkor van olyan M párosítás G -ben, melyre $M \cap E(H)$ párosítás H -ban. ($K_{3,3}$ teljes párosításai egy-egyértelműen megfelelnek H teljes párosításainak, tehát H -ban van teljes párosítás, a maradékban pedig azért, mert H szép.)

Vegyük a $D(G, M)$ digráfot. Ebben a $D(H, M)$ részgráf éppen egy gyenge C_3^* lesz. Ugyanis ha N teljes párosítás $K_{3,3}$ -ban, akkor $D(K_{3,3}, N)$ egy C_3^* , és $K_{3,3}$ páros felosztása annak felel meg, hogy C_3^* -ban felosztjuk az éleket, ill. csúcsokat. Vagyis $D(G, M)$ even, mert tartalmaz gyenge páratlan dupla kört. Emiatt pedig G nem Pfaff-irányítható.

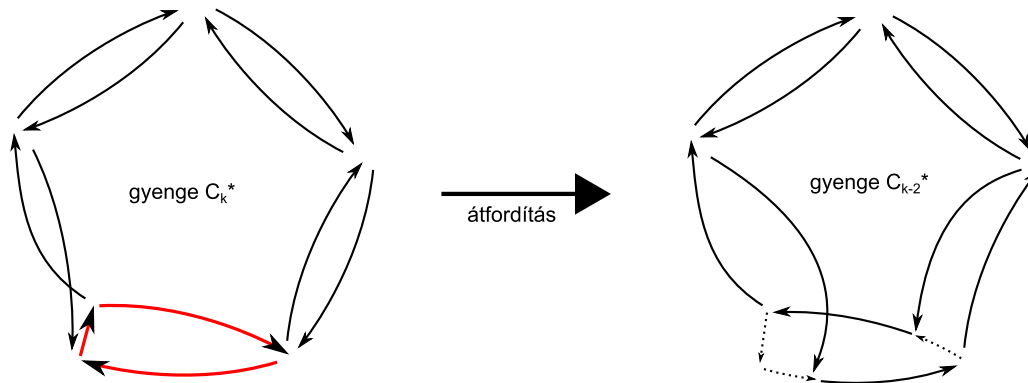
A másik irányt önmagában is be lehetne bizonyítani [7], azonban ez hosszadalmas. Ehelyett megmutatjuk, hogy ez az irány a Seymour-Thomassen tételből (2.2.5) következik. Tegyük fel ugyanis, hogy G nem Pfaff-irányítható. Minden olyan gráf Pfaff-irányítható, mely nem tartalmaz teljes párosítást, tehát G -ben van egy M teljes párosítás.

A $D(G, M)$ digráf even, tehát a Seymour-Thomassen tétel miatt van benne egy D_2 gyenge páratlan dupla kör. Legyen ez egy gyenge C_k^* . Ha most $k = 3$, akkor a D_2 digráfot visszahúzva G -be, kapunk egy G -ben lakozó $K_{3,3}$ -at. Feltehetjük tehát, hogy $k > 3$. Megmutatjuk, hogy ekkor van olyan M' teljes párosítás G -ben, melyre $D(G, M')$ -ben van gyenge C_{k-2}^* . Ekkor indukcióval készen vagyunk.

Legyen most D tetszőleges digráf, és K egy irányított köre. $v \in V(K)$ esetén v^* jelölje v megelőzőjét, vagyis azt az $u \in V(K)$ pontot, melyre $uv \in A(K)$. Defináljuk D -nek a K -ra vonatkozó *átfordítását* a következőképpen: Első lépésként a K kör irányítását megfordítjuk. Majd minden $uv \in A$ élre, melyre $v \in K$, az uv élet kicseréljük az uv^* élre (vagyis a végpontot eggyel hátrébb léptetjük az eredeti irányítású kör mentén).

Ha most $D(G, M)$ -nek vesszük egy K körét, az meghatároz egy M_K teljes párosítást G -ben. Valóban, M_K az a teljes párosítás, melyre $M \Delta M_K$ egyetlen körből áll, ami pedig a K kör ősképe G -ben. Könnyen látható, hogy $D(G, M)$ -nek a K -ra vonatkozó átfordítása éppen a $D(G, M_K)$ digráf.

Vegyünk most D_2 -nek egy olyan körét, mely egy C_k^* -beli 2-hosszú kör képe az útleképezés által. Fordítsuk át $D(G, M)$ -et ementén a kör mentén. Az alábbi ábra szemlélteti, hogy a kapott digráfnek ekkor lesz egy gyenge C_{k-2}^* részgráfja (a nyilak itt utakat jelölnek). Indukcióval készen vagyunk.



□

4.4. A Pólya-probléma

A szakasz befejezéseként megemlítünk egy Pólya György által felvetett feladatot [8]. Adott egy $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$ mátrix. Nevezzünk egy $B \in \{0, \pm 1\}^{n \times n}$ mátrixot A egy *módosításának*, ha $\text{supp } B = \text{supp } A$, vagyis B -ben pontosan azok az elemek nullák, amik A -ban is. Egy B módosítást akkor nevezünk *jónak*, ha $|\det B| = \text{per } A$. Kérdés, hogy mely A mátrixoknak létezik jó módosítása. Másrészt, ha van jó módosítás, akkor az megkereshető-e polinomiális időben. Ugyanis ha igen, akkor ezekre a speciális 0-1 mátrixokra a permanens polinom időben kiszámolható.

Feleltessünk meg A -nak egy $G = (S, T, E)$ páros gráfot, melyre $|S| = |T| = n$, és G adjacenciamátrixa $\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^\top & 0 \end{pmatrix}$. Ekkor a G -beli teljes párosítások száma $\text{per } A$. Másrészt, G pontosan akkor Pfaff-irányítható, ha A -nak létezik olyan B módosítása, melyre $\det \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix} = \Phi^2(G)$. Ez pedig azzal ekvivalens, hogy létezik B módosítás, melyre $\det^2 B = \text{per}^2 A$, vagyis B A -nak egy jó módosítása. A Pólya-probléma tehát algoritmikusan ekvivalens a páros gráfok Pfaff-irányíthatóságával.

5. Hipergráfok 2-színezése

Bemutatunk még egy utolsó kapcsolódó témát, ez pedig a hipergráfok 2-színezése. Egy hipergráfot *2-színezhetőnek* avagy *párosnak* nevezünk, ha a csúcsait meg tudjuk úgy színezni két színnel, hogy ne legyen egyszínű él. A mi definíciónk szerint tehát a nulla- vagy egy pontú éleket tartalmazó hipergráfok nem 2-színezhetőek. Ismert, hogy hipergráfok 2-színezhetősége „nehezen eldönthető”:

5.0.1. Tétel. *A hipergráfok 2-színezhetősége NP-teljes.*

Bizonyítás. Vissza fogjuk vezetni a konjunktív normálformák kielégíthetőségét a hipergráfok 2-színezhetőségére. Legyen φ egy CNF, és az abban szereplő változók legyenek x_1, \dots, x_n . Konstruáljunk egy hipergráfot, melynek csúcsai a változók és azok komplementerei, továbbá még egy f nevű csúcsot is vegyünk fel. (f jelképezi a konstans hamis értéket.) Minden x_i -re húzzunk be egy $\{x_i, \bar{x}_i\}$ élt. Nevezzük ezeket az éleket egyszerű éleknek! Ezután a normálforma minden monomjára is adjuk hozzá a hipergráfhoz egy olyat élt, mely a diszjunkció tagjait és f -et tartalmazza. Belátjuk, hogy a kapott hipergráf pontosan akkor 2-színezhető, ha φ kielégíthető.

Ugyanis ha φ kielégíthető, akkor színezzük ki az igaz változókat/változónegáltakat pirosra, a többi csúcsot (beleértve f -et is) pedig kékre. A diszjunkciókhoz tartozó élek jól lesznek színezve, mert tartalmaznak piros (igaz) változót/változónegáltat, és tartalmazzák f -et is, ami pedig kék. Az egyszerű élek pedig triviálisan jól lesznek színezve.

Fordítva, ha van a hipergráfnak egy jó 2-színezése, akkor feltehetjük, hogy itt f kék. A piros változókat igazra, a kékeket pedig hamisra állítva, megkapjuk φ egy kielégítését. \square

Bizonyos speciális hipergráfokra viszont egyszerűbb lesz a helyzetünk. Nevezünk egy hipergráfot *négyzetesnek*, ha ugyanannyi csúcsa van, mint éle. Egy hipergráf *Hall-tulajdonságú*, ha az incidenciagráfjában van teljes párosítás. Persze minden Hall-hipergráf négyzetes. Innentől csak a Hall-hipergráfokkal fogunk foglalkozni.

Jelölje egy H hipergráfra G_H az incidenciagráfot. Ha a H hipergráf Hall, és az incidenciagráfban M egy teljes párosítás, akkor a már tárgyalt konstrukcióval elkészíthetjük a $D(G_H, M)$ digráfot, amit a bizonyításokban D -vel fogunk jelölni. Ez a digráf éppen annak felel meg, hogy minden $v \in V(H)$ csúcsból az M által őhozá rendelt hiperél többi elemébe irányított éleket húzunk. A következő tételek alapján H párossága szorosan összefügg azzal, hogy $D(G_H, M)$ -ben létezik-e páros kör.

5.0.2. Tétel. *Ha H 2-színezhető, akkor $D(G_H, M)$ -ben létezik páros kör.*

Bizonyítás. Vegyük H -nak egy 2-színezését. Minden $v \in V$ csúcsához rendeljünk hozzá egy D -beli, v -ből kilépő élet, melynek két végpontja különböző színű. Ilyen van, mert H 2-színezhető, és a v -ből kilépő élek végpontjai v -vel együtt a hipergráf egy élét alkotják, történetesen azt az élet, amelyhez M a v csúcsot párosítja. Így kapjuk a $D_2 \subset D$ részgráfot. Ha D_2 -ben elindulunk egy csúcsból, akkor előbb-utóbb beérünk egy már meglátogatott csúcsba. A D_2 -beli élek választása miatt a keletkező kör H -ban alternálóan van színezve, tehát páros hosszú. \square

5.0.3. Tétel. *Ha $D(G_H, M)$ erősen összefüggő, és létezik benne páros kör, akkor H 2-színezhető.*

Bizonyítás. Vegyünk egy K páros kört, és a $V(K)$ csúcshalmazból indítsunk a \overleftarrow{D} fordított digráfban egy mélységi bejárást. A mélységi bejárással kapott erdő és K uniója egy olyan D_2 részgráfja lesz D -nek, mely irányítatlan értelemben páros.

Színezzük ki most D_2 csúcsait két színnel. Így H -nak egy jó 2-színezését kapjuk. Valóban, mivel D_2 -ben minden csúcs kifoka 1, ezért ez egy olyan színezés, melyre minden csúcsból indul ki olyan D -beli él, melynek végpontjának más a színe, mint a kezdőpontjának. \square

Vegyünk egy D digráf erősen összefüggő komponensei közül a magokat, és nevezzük ezeket a digráf *végkomponenseinek*. Ha veszünk egy magot $D(G_H, M)$ -ben, akkor a magbeli csúcsok és az azokhoz M által rendelt hiperélek egy Hall-hipergráfot alkotnak a mag csúcshalmazán. Ezt hívjuk a mag által meghatározott hipergráfnak.

5.0.4. Tétel. *H pontosan akkor 2-színezhető, ha $D(G_H, M)$ minden végkomponense által meghatározott hipergráf 2-színezhető.*

Bizonyítás. Az odafelé irány nyilvánvaló. Fordítva tegyük fel, hogy minden végkomponens hipergráfja páros. Színezzük ki jól D végkomponenseit, majd indítsunk a már kiszínezett csúcsokból egy mélységi bejárást a \overleftarrow{D} fordított digráfban. A bejárással kapott erdőre kiterjeszthető a 2-színezés, és így megkapjuk az egész hipergráfnak egy jó színezését. \square

Mivel páros kör keresésére van polinomiális algoritmus, ezért

5.0.5. Tétel. *Hall-hipergráfokra a 2-színezhetőség polinom időben eldönthető; és ha van, akkor konkrét 2-színezést is meg tudunk adni.*

Bizonyítás. Vegyünk egy M teljes párosítást, és tekintsük $D(G_H, M)$ végkomponenseit. A fenti tételek miatt elég eldönteni, hogy minden végkomponensben van-e páros kör, ugyanis pontosan ekkor lesz H 2-színezhető. Konkrét 2-színezést pedig a páros körökből indított fordított irányú mélységi bejárással tudunk találni. \square

Nevezzünk egy hipergráfot *minimálisan nem párosnak* (MNP), ha nem 2-színezhető, viszont bármely élét elhagyva, a maradék részhipergráf már 2-színezhető. Seymour [11] alábbi tétele kapcsolatot teremt az MNP hipergráfok és a páros körök közt.

5.0.6. Tétel. (Seymour) H pontosan akkor MNP, ha $D(G_H, M)$ erősen összefüggő és pároskör-mentes.

Bizonyítás. Legyen először H egy MNP hipergráf. Tegyük fel, hogy D nem erősen összefüggő. Ekkor D minden végkomponense által meghatározott hipergráf valódi része H -nak, tehát az MNP tulajdonság miatt 2-színezhető. Ekkor viszont az egyik előző tétel miatt H is 2-színezhető, ami ellentmondás. Tehát D mégis erősen összefüggő, ekkor pedig a korábbi tétel miatt nem létezhet benne páros kör.

Fordítva, tegyük fel, hogy D erősen összefüggő, de nincs benne páros kör. Ekkor persze H nem 2-színezhető, mert különben lenne D -ben páros kör. Másrészt, minden részhipergráf viszont 2-színezhető. Ugyanis vegyünk egy $v \in V(H)$ csúcsot, és D -ben egy v gyökerű befenyőt. Ha a befenyőt – mint gráfot – jól 2-színezzük, akkor ezzel megkaptunk egy olyan csúcsszínezést, melyre az összes olyan hiperél jól van színezve, amely különbözik a v -hez M által rendelt hiperéltől. Vagyis a v -hez rendelt hiperél elhagyásával 2-színezhető hipergráfot kapunk. v pedig tetszőleges volt. \square

5.0.7. Következmény. Erősen összefüggő $D(G_H, M)$ esetén: ha van $D(G_H, M)$ -ben páros kör, akkor H 2-színezhető, egyébként viszont MNP.

Befejezésül megemlítjük a 2.3.9 tétel egy szép hipergráfos következményét.

5.0.8. Tétel. (Thomassen) Minden k -reguláris és k -uniform hipergráf 2-színezhető, ha $k \geq 4$.

Bizonyítás. Ha H k -reguláris és k -uniform, akkor persze négyzetes hipergráf, sőt a Hall-feltétel ellenőrzésével kapjuk, hogy H Hall is. A regularitás miatt D -ben minden pont befoka $k - 1$, az uniformitás miatt pedig minden kifok is $k - 1$. D tehát erősen összefüggő, és a 2.3.9 tétel miatt even, speciálisan van benne páros kör. Tehát H 2-színezhető. \square

6. Algoritmus

Hosszú éveken át nyitott volt, hogy vajon van-e polinomiális algoritmus a páros irányított kör keresésére. A dolog kétesélyesnek látszott, ugyanis egyrészt vannak rokon problémák, melyekre létezik gyors algoritmus, másrészt olyanok is vannak, amelyek NP-teljesek. A teljesség igénye nélkül, illusztrációként párat felsorolunk:

- Könnyű (P-beli) problémák:
 - Irányítatlan gráfban van-e páratlan kör?
 - Irányítatlan gráfban van-e páros kör?
 - Irányított gráfban van-e páratlan kör?
- Nehéz (NP-teljes) problémák:
 - Irányított gráfban van-e adott élt tartalmazó páratlan kör? [12]
 - Irányított gráfban van-e adott élt tartalmazó páros kör? [12]
 - Fix k -ra, az $m(n) := n + \lfloor n^{1/k} \rfloor$ jelöléssel élve: egy $m(n) \times n$ -es mátrix L-mátrix-e? [13]
 - 2-színezhető-e egy adott hipergráf?

Szintén rossz hír, hogy nem tudjuk, hogy a Pfaff-irányíthatóság tetszőleges (azaz nem feltétlenül páros) egyszerű gráfokra egyáltalán NP-ben van-e [5]. Ugyanis az, hogy egy tetszőleges gráf adott irányítása Pfaff-irányítás-e, szintén kérdéses, hogy NP-ben van-e. (Persze co-NP-ben van, hiszen elég mutatni egy teljes párosítást, és egy párosan irányított alternáló kört.)

Thomassen [15] 1993-ban publikált egy algoritmust, amely síkgráfokra megoldja a páros kör problémáját. Azonban az algoritmus komplikált és lassú ($\mathcal{O}(n^6)$ időben fut). A teljes megoldásig még pár évet várni kellett.

6.1. Visszavezetés kapcsolatokra

6.1.1. Tétel. *Elég, ha az even tulajdonságot erősen 2-összefüggő digráfokra el tudjuk dönteni.*

Bizonyítás. Seymour és Thomassen [10] gondolatmenete alapján bizonyítunk. Legyen D az a digráf, amelyről el akarjuk dönteni, hogy even-e. Feltehetjük, hogy D erősen összefüggő. Ekkor minden blokkja is erősen összefüggő.

Ha most D minden blokkja erősen 2-összefüggő, akkor készen vagyunk. Ugyanis minden kör benne van egy blokkban, tehát elég külön-külön a blokkokat megnézni. Tegyük fel hát, hogy D -nek van olyan H blokkja, mely nem erősen 2-összefüggő, azaz létezik olyan $v \in V(H)$, melyre $H - v$ nem erősen összefüggő. Ekkor $H - v$ -ben létezik nemtriviális mag, legyen egy ilyen mag által feszített részgráf H_2 , és legyen $H_1 := H - v - V(H_2)$. Legyen B a H_1 -ből H_2 -be menő élek halmaza. Mivel H (irányítatlan értelemben) 2-összefüggő, ezért B nemüres.

Végezzük el a következő redukciós lépést: minden $xy \in B$ élet cseréljünk ki egy xvy irányított útra. Így kapjuk H -ból a H' digráfot, amely szintén erősen összefüggő, viszont H -val ellentétben H' -ben van elvágó pontja. Legyen $H_1' := H' - V(H_2)$ és $H_2' := H' - V(H_1)$. Két dolgot kell belátnunk: egyrészt azt, hogy a redukciós lépésekkel polinom időben elérjük, hogy minden blokk erősen 2-összefüggő legyen. Másrészt azt, hogy a redukció megőrzi az even tulajdonságot, azaz H pontosan akkor even, ha H' even.

A polinomiális futásidő bizonyításához vegyük észre, hogy minden redukciós lépés növeli a blokkok számát D -ben, és legfeljebb csak pontszámnyi blokk lehet. Tehát, valóban, legfeljebb $|V(D)|$ redukciós lépés után végzünk.

Az even tulajdonság megőrződésének bizonyításához minden $xy \in B$ élhez rendeljünk hozzá egy $xy \in C_{xy} \subset A(H)$ kört. Ez a kör persze átmegy v -n. Jelölje a kör v és x közötti szakaszát P_{xy} , ekkor P_{xy} egy $H - V(H_2)$ -beli út. Hasonlóan Q_{xy} (az y és v közötti szakasz) egy $H - V(H_1)$ -beli út.

Tegyük fel, hogy H nem even. Legyen $w : A(H) \rightarrow \{0, 1\}$ olyan súlyfüggvény, melyre nézve H -ban nincs páros súlyú kör. Rendeljük hozzá w -hez a $w' : A(H') \rightarrow \{0, 1\}$ súlyfüggvényt a következőképpen. Az eredeti éleken legyen $w' := w$. A B -ből felemelt xv alakú éleken legyen $w'(xv) := w(xy) + w(Q_{xy})$, a B -ből felemelt vy alakú éleken pedig legyen $w'(vy) := w(xy) + w(P_{xy})$. Ekkor w' bizonyítja, hogy H' sem even. Valóban, ha lenne pl. H_1' -ben egy w' -re nézve páros súlyú kör, akkor ez egy felemelt xv élet használva átmenne v -n, de azt az élet a neki megfelelő $xy \cup Q_{xy}$ útra cserélve H -ban kapnánk egy w szerint páros súlyú kört.

Másrészt, tegyük fel, hogy H' nem even. Vegyük rajta a pároskör-mentes w' élfüggvényt. Ennek az eredeti éleken felvett értékeit húzzuk vissza az eredeti gráfra, így kapjuk a $w : A(H) - B \rightarrow \{0, 1\}$ élfüggvényt. w -t terjesszük ki B -re is: $xy \in B$ esetén $w(xy)$ legyen olyan, hogy C_{xy} w -súlya páratlan legyen.

Belátjuk, hogy H -ban nincs páros w -súlyú kör. Ha lenne ilyen C kör, akkor az (w' pároskör-mentessége miatt) használna B -beli élt és átmenne v -n. Legyen $P := C|_{[v,x]}$ és $Q := C|_{[y,v]}$ a két megfelelő szakasza a körnek. Mivel C és C_{xy} különböző

w -paritású, ezért feltehető, hogy pl. Q és Q_{xy} különböző w -paritású. Ekkor $Q \cup vy$ és $Q_{xy} \cup vy$ megad két különböző w' -paritású kört H' -ben, tehát ezek közül az egyik páros súlyú, ami ellentmondás. \square

Feltehetjük tehát, hogy az inputgráf erősen 2-összefüggő. Térjünk most át a négyzetes páros gráfok nyelvére. Nevezzünk egy páros gráfot k -kiterjeszhetőnek, ha bármely legfeljebb k -élű párosítása kibővíthető teljes párosítássá. A 2-kiterjeszhető páros gráfok neve legyen *kapocs* (angolul: *brace*).

6.1.2. Tétel. *Legyen G páros gráf, M egy teljes párosítása, és tegyük fel, hogy $|V(G)| \geq 2(k+1)$. Ekkor G pontosan akkor összefüggő és k -kiterjeszhető, ha $D := D(G, M)$ erősen k -összefüggő.*

Bizonyítás. $k = 1$ -re a tétel triviális, feltehetjük tehát, hogy $k > 1$. Egy digráf pontosan akkor erősen k -összefüggő, ha legalább $k+1$ -pontú, és bármely $k-1$ csúcs elhagyásával erősen összefüggő marad. Vagyis az kell, hogy 1) irányítatlan értelemben k -összefüggő, és 2) bárhogy választunk $k-1$ csúcsot és egy rájuk nem illeszkedő e élet, mindig lesz e -n átmenő, de a kiválasztott csúcsokon nem átmenő kör.

Tegyük fel, hogy G összefüggő és k -kiterjeszhető. Ekkor a 2) feltétel teljesül, ugyanis csak vennünk kell az adott csúcsoknak és az egyetlen élnek megfelelő G -beli k -elemű párosítást, és azt kibővítvé teljes párosítássá, kapunk egy e -n átmenő, a csúcsokat nem tartalmazó D -beli kört. Az 1) feltétel teljesüléséhez indirekt legyen $X \subset V(D)$ olyan elvágó ponthalmaz, melyre $|X| < k$. Ekkor $|X| = k-1$, mert k -ra indukciót alkalmazva látszik, hogy D erősen $k-1$ -összefüggő.

Legyen $S \subset V(D) \setminus X$ élnélküli vágás $D \setminus X$ -ben, $T := V(D) - X - S$, és legyen $y \in X$ tetszőleges. Az erősen $k-1$ -összefüggőség miatt $X \setminus y$ elhagyásával D erősen összefüggő marad, melynek y elvágó pontja. S tehát itt nem mag, vagyis létezik xy él, ahol $x \in S$. Ugyanígy létezik yz él, ahol $z \in T$. Vegyük most az xy és yz éleket, továbbá $X \setminus y$ pontjait. Az ezeknek megfelelő k db G -beli él egészülhet ki teljes párosítássá, mert az xyz út nincs benne olyan körben, mely nem megy át $X \setminus y$ -beli ponton.

A visszafelé irányhoz legyen N egy k -elemű G -beli párosítás. Vegyük az N -nek D -ben megfelelő csúcsokat és éleket. Ha $N \cap M$ nemüres, azaz van csúcs, akkor ezt D -ből elhagyva a kapott digráf erősen $k-1$ -összefüggő, tehát indukciót alkalmazhatunk k -ra. Tehát feltehetjük, hogy N diszjunkt M -től, vagyis N D -ben k db élnek felel meg. Legyen ez a k él $x_1y_1, \dots, x_ky_k \in A(D)$.

Legyen most $X \subset V(D)$ olyan csúcshalmaz, mely nem tartalmazza egyik x_i -t sem. Ekkor az X -ből élen elérhető nem X -beli csúcsok száma legalább k . Ugyanis ha kevesebb ilyen csúcs lenne, akkor azokat elhagyva X nemtriviális mag lenne. (Nemtriviális, mert X nemüres, és komplementere legalább k -elemű.) Ez pedig elentmondana az erősen k -összefüggőségnek.

Mindenesetre tehát igaz az, hogy azon csúcsok száma, amelyek nem egyenlőek valamely y_i -vel, továbbá vagy X -beliek, vagy X -ből élen elérhetőek, legalább $|X|$. Ezzel pedig pontosan azt fogalmaztuk meg az irányított gráf nyelvén, hogy $G - V(N)$ -ben teljesül a Hall-feltétel. Vagyis N kiegészül teljes párosítással. \square

6.1.3. Következmény. G ($|V(G)| \geq 6$) pontosan akkor összefüggő kapocs, ha $D(G, M)$ erősen 2-összefüggő.

6.1.4. Következmény. Elég, ha a páros gráfok Pfaff-irányíthatóságát az összefüggő kapcsolokra el tudjuk dönteni.

6.2. A nem even digráfok struktúrája

Ebben a részben látni fogjuk, hogy a nem even digráfok, azaz a Pfaff-irányítható páros gráfok csak nagyon speciálisak lehetnek. A leírtak nagy része Robertson, Seymour és Thomas [9] cikkén alapul.

Szorítkozzunk innentől csak a kapcsolokra. Kasteleyn algoritmus (4.2) alapján a síkkapcsok Pfaff-irányíthatóak. Ezenkívül ellenőrizhető, hogy a Heawood-gráf (4.3) is Pfaff-irányítható kapocs, noha nem síkgráf.

Vezessünk most be egy ragasztási műveletet! Legyenek G_1, \dots, G_k legalább 5 csúcsú egyszerű gráfok, amelyek rendre tartalmazzák a C_i 4-hosszú szép köröket. A C_i körök mentén ragasszuk össze a gráfokat, vagyis bizonyos $\varphi_i : C_i \rightarrow C_1$ gráfizomorfiák segítségével azonosítsuk egymással a köröket. Majd a kapott gráfból töröljük a varrat (4-hosszú kör) néhány (esetleg 0) élét, így kapunk valami G gráfot.

Tegyük fel, hogy G -t a G_i Pfaff-irányítható páros gráfokból ragasztottuk össze. Persze ekkor G is páros gráf. Vegyük minden G_i -nek egy Pfaff-irányítását! Ha egy Pfaff-irányításban az egy pontra illeszkedő összes él irányítását megfordítjuk, akkor továbbra is Pfaff-irányításunk lesz, ugyanis minden párosítás előjelet vált. C_i szép kör G_i -ben, tehát páratlanul van irányítva. Ezek alapján feltehetjük, hogy a $\varphi_i : C_i \rightarrow C_1$ gráfizomorfiák megtartják az élek irányítását. (Ha nem, akkor megfordítási műveleteket alkalmazunk addig, amíg a C_i körök ugyanúgy lesznek irányítva.)

Vegyük most G -nek azt az irányítását, amit a G_i gráfok Pfaff-irányításainak összekombinálásával kapunk. Robertson, Seymour és Thomas megmutatták, hogy

ez az irányítás G -nek egy Pfaff-irányítása lesz. (Elég persze csak $k = 2$ -re megmutatni, aztán nagyobb k -ra indukcióval.) Ebből következik, hogy egy gráf valahány síkkapocs összeragasztásával megkapható, akkor ő Pfaff-irányítható. A következő tétel alapján az eddig említetteken kívül nincs más Pfaff-irányítható kapocs. Sőt, az összeragasztásokat hármassával is elvégezhetjük.

6.2.1. Tétel. *(Robertson-Seymour-Thomas-strukturátétel) Egy G kapocs pontosan akkor Pfaff-irányítható, ha vagy izomorf a Heawood-gráffal, vagy síkkapcsokból előállítható a ragasztási művelet ismételt alkalmazásával úgy, hogy egy művelet során mindig pontosan három gráfot ragasztunk össze.*

Bizonyítás. (vázlat) A bizonyítás nagyon komplikált, egy majdnem 60 oldalas cikk nagy részét kitölti. Lényegében arról van szó, hogy a szerzők tekintenek egy nem síkbeli kapocsra. Ebben ekkor van felosztott K_5 vagy $K_{3,3}$. Ezeket a részgráfokat a kapocs-tulajdonság felhasználásával különböző módszerekkel „növeszteni” lehet, vagyis megmutatható, hogy ekkor $K_{3,3}$, a Heawood-gráf, és egy Rotunda nevű gráf közül legalább az egyik benne lakik (4.3.3) a gráfban. Ha most egy nem síkbeli kapocs Pfaff-irányítható, akkor Little tétele 4.3.4 miatt nem lakhat benne $K_{3,3}$. Másrészt ha lakik benne Heawood-gráf, akkor izomorf azzal. Ha pedig lakik benne Rotunda, akkor a Rotunda gráf bizonyos struktúrája mentén a gráfunk előáll három kisebb gráf összeragasztásaként, melyekre indukciót alkalmazhatunk. \square

6.2.2. Következmény. *Ha a G kapocsnak legalább 3 csúcsa és több mint $2|V(G)| - 4$ éle van, akkor nem lehet Pfaff-irányítható.*

Bizonyítás. Az, hogy az élek száma legfeljebb $2|V(G)| - 4$, teljesül a Heawood-gráfra és a páros síkgráfokra is. Továbbá, ha két gráfra igaz, akkor összeragasztásukra is. Emiatt indukcióval készen vagyunk. \square

Térjünk át egy kicsit az even digráfok nyelvére! A fenti következmény itt így hangzik:

6.2.3. Következmény. *Ha a D erősen 2-összefüggő digráfnak legalább 2 csúcsa és több mint $3|V(D)| - 4$ éle van, akkor even.*

Vegyük észre, hogy ebből azonnal következik Thomassen 2.3.6 tétele.

A strukturátétel felhasználásával algoritmust adhatunk páros gráf Pfaff-irányíthatóságának eldöntésére. Nevezzünk egy 4-elemű X csúcshalmazt *triszelektornak*, ha $G \setminus X$ legalább három komponensű. Meg kell jegyezni, hogy Robertson, Seymour és Thomas [9] 8.4-es lemmájának bizonyítása szerint ha egy összefüggő kapocsban

X triszektor, akkor X két-két csúcsot tartalmaz mindkét színosztályból. Ez sajnos nem igaz, ellenpélda a C_6^* irányított gráfnak megfelelő páros gráf. Viszont ha ezt a feltevést beépítjük a triszektor definíciójába, akkor már helytállóak a [9] cikk megállapításai. A definíció tehát helyesen:

6.2.4. Definíció. *Egy 4-elemű X csúcshalmazt triszektornak nevezünk, ha mindkét színosztályból 2-2 csúcsot tartalmaz, továbbá $G \setminus X$ legalább három komponensű.*

Triviális, hogy ha X triszektor, akkor G felbomlik X mentén három kisebb összefüggő gráf összeragasztására. Belátható [9], hogy bárhogy választjuk a három összeragasztott gráfot, ezek kapcsok lesznek, és ha G Pfaff-irányítható, akkor Pfaff-irányíthatóak lesznek. Ez alapján a következő algoritmust nyerjük az összefüggő kapcsok Pfaff-irányíthatóságának eldöntésére:

- Ha G izomorf a Heawood-gráffal, akkor kiadjuk annak egy Pfaff-irányítását.
- Ha G síkgráf, akkor a Kasteleyn-algoritmust alkalmazva kiadjuk egy Pfaff-irányítást.
- Egyébként keresünk G -ben egy X triszektort.
- Vesszük azokat a G_1, G_2, G_3 gráfokat, amelyekből X mentén G összeragasztható. Ezek a fentiek alapján összefüggő kapcsok. Rekurzívan eldöntjük, hogy G_1, G_2, G_3 Pfaff-irányítható-e.
- Ha igen, összekombináljuk az irányításokat, és így megkapjuk G -nek egy Pfaff-irányítását.
- Ha nem, akkor G nem lehet Pfaff-irányítható.

6.3. Az algoritmus optimalizálása

Az algoritmus sajnos még elég lassú. Naiv megvalósítással $\Theta(n^6)$ ideig is eltarthat, amíg egyetlen triszektort találunk (ha minden csúcsnégyest végignézzük, és a maradékon mindig egy gráfbejárást futtatunk a komponensszám ellenőrzésére, amely sok él esetén n^2 ideig is eltarthat). Az alábbi trükkel azonban segíthetünk a lassú futásidőn.

6.3.1. Tétel. *(Robertson-Seymour-Thomas) Legyen G Pfaff-irányítható összefüggő kapocs, mely a G_1, G_2, G_3 gráfoknak a C négy pontú halmaz mentén történő összeragasztásával áll elő. Ha most $X \neq C$ egy csúcshalmaz, akkor X pontosan akkor triszektor G -ben, ha triszektor G_1, G_2, G_3 valamelyikében.*

6.3.2. Következmény. *Ha G Pfaff-irányítható összefüggő kapocs, melyre $|V(G)| \geq 5$, akkor G -ben legfeljebb $|V(G)| - 5$ triszektor van.*

Bizonyítás. Ha nincs triszektor, akkor az állítás triviális. Egyébként G összeragasztható G_1, G_2, G_3 -ból. Ekkor az előző tétel alapján, indukció alkalmazásával adódik, hogy a triszektorok száma legfeljebb $1 + |V(G_1)| - 5 + |V(G_2)| - 5 + |V(G_3)| - 5 < |V(G)| - 5$. \square

Ezek a megfigyelések több ponton is segítenek. Először is, G_1, G_2, G_3 -ra nem kell külön-külön megkeresni az összes triszektort. Elég az algoritmus legelején G triszektorait megkeresni és eltárolni, és a rekurzió során ezeket felhasználhatjuk. Másrészt, ha G triszektorainak keresése közben többet találunk, mint $|V(G)| - 5$, akkor azonnal megállhatunk, hiszen ekkor G nem lehet Pfaff-irányítható.

Még egy gyorsítási trükköt bevethetünk. A struktúratétel miatt ha a G összefüggő kapocsnak legalább 3 csúcsa és több mint $2|V(G)| - 4$ éle van, akkor azonnal kiírhatjuk, hogy G nem Pfaff-irányítható. Tehát ha triszektorokat kell keresnünk, akkor a gráfnak nagyságrendileg csak csúcscsámnyi éle lehet. Ráadásul ha a triszektorokat ügyesen keressük, akkor kihasználhatjuk az SPQR-fákkal [1] kapcsolatos eredményeket. Emiatt pedig

6.3.3. Tétel. *A triszektorok keresésével $\mathcal{O}(n^3)$ időben végzünk.*

Bizonyítás. Csak a nagyságrend érdekel minket, tehát feltehetjük, hogy $n := |V(G)| \geq 8$. ($n < 7$ esetén egyébként egyáltalán nincs is triszektor.) Legyen u, v tetszőleges pontja a gráfnak, és keressük csak azokat a triszektorokat, melyek ezt a két pontot tartalmazzák. Ehhez végezzünk el egy mélységi bejárást a $G \setminus \{u, v\}$ gráfon, amely a kevés él miatt $\mathcal{O}(n)$ időben lefut. A bejárás segítségével építsük fel az összefüggő komponenseket, és azokon belül a blokk-eltávolító pont-fákat.

Tegyük fel, hogy legalább 3 komponens van. Ekkor majdnem minden maradék pontpár u, v -vel együtt triszektort alkot. Csak azok a pontpárok lehetnek rosszak, amikor vagy egy kétpontú komponens két pontját választottuk ki, vagy az egyik kiválasztott pont egy pontú komponenset alkot. Ilyen pontpárból legfeljebb $3 + 2(n - 4)$ lehet. Tehát legalább $\binom{n-2}{2} - 2(n - 4) - 3$ triszektor van, ami $n \geq 8$ miatt nagyobb, mint $n - 5$. Így 3 komponens esetén egyből kiadhatjuk, hogy G nem Pfaff-irányítható, mert túl sok triszektora van.

Tegyük fel, hogy 2 komponens van. Tegyük fel először, hogy a pontpár két pontját különböző komponensekből választjuk. Ha az egyik komponens egy pontú, akkor azokat választhatjuk hozzá, amik a blokk-eltávolító pont-fában legalább harmadfokúak.

Ha mindegyik komponens legalább kétpontú, akkor pedig pontosan azokat a pontpárokat választhatjuk, melyekből legalább az egyik pont elvágó. Viszont ha a két pontot ugyanabból a komponensből választjuk, akkor az a feltétel, hogy ők ketten a komponensnek egy kétpontú elvágó ponthalmazát alkossák. Ehhez építsük fel a komponens blokkjaihoz tartozó SPQR-fákat lineáris időben, majd soroljuk fel ezeknek segítségével az összes kétpontú elvágó halmazt, persze csak legfeljebb $n - 5$ -öt.

Végül tegyük fel, hogy csak 1 komponens van. Ekkor az a feladat, hogy megkeressük azokat a kétpontú elvágó halmazokat, melyek legalább három részre vágják a komponenset. Szintén azt kell tennünk, hogy minden blokkra felépítjük az SPQR-fát. Az SPQR-fa tulajdonságai miatt pontosan azok a pontpárok lesznek jók, amik valamelyik blokk SPQR-fájában egy olyan P-pontot alkotnak, melynek legalább 3 virtuális éle van. \square

6.3.4. Megjegyzés. *Ha nem akarunk az SPQR-fa implementálásával bajlódni, akkor egy n -es szorzót veszítve egyszerűsíthetünk az algoritmuson. Ugyanis az elvágó pontpárokat és a legalább három részre vágó pontpárokat $\mathcal{O}(n)$ helyett (ezt adná az SPQR-fa) $\mathcal{O}(n^2)$ -ben megkereshetjük csak a blokk-elvágópont-fák használatával. Ugyanis elég, ha minden v csúcsra felépítjük a v elhagyásával keletkező komponensekben a blokk-elvágópont-fákat (ez $\mathcal{O}(n^2)$ idő), majd hasonló diszkussziót alkalmazunk, mint az előző bizonyításban.*

A módosított, igazán hatékony algoritmus tehát a következő:

- Ha a G összefüggő kapocs izomorf a Heawood-gráffal, akkor kiadjuk annak egy Pfaff-irányítását.
- Ha G -nek legalább 3 csúcsa és több mint $2|V(G)| - 4$ éle van, akkor kiírjuk, hogy G nem Pfaff-irányítható.
- G -nek megkeressük a triszektorait. Ha többet találnánk, mint $|V(G)| - 5$, akkor kiírjuk, hogy G nem Pfaff-irányítható.
- Eldöntjük, hogy G síkbarajzolható-e. Ha igen, akkor a Kasteleyn-algoritmust használva készen vagyunk.
- Veszünk egy X triszektorot, és azokat a G_1, G_2, G_3 gráfokat, amelyekből X mentén G összeragasztható. A maradék triszektorokat szétszjtjuk a gráfok között, és (az előző lépéstől indulva) rekurzívan eldöntjük, hogy G_1, G_2, G_3 Pfaff-irányítható-e.

- Ha igen, összekombináljuk az irányításokat, és így megkapjuk G -nek egy Pfaff-irányítását.
- Ha nem, akkor G nem lehet Pfaff-irányítható.

Azt, hogy egy gráf síkgráf-e, lineáris időben tesztelni tudjuk, és lineáris időben meg is tudunk adni egy síkbarajzolást. Ezután a Kasteleyn-algoritmus négyzetes időben lefut. Mindezt nagyságrendileg annyiszor kell megtennünk, ahány gráfból van összeragasztva az eredeti gráf, ez pedig n -ben lineáris. Tehát az egész algoritmus megvalósítható $\mathcal{O}(n^3)$ időben, amiből $\mathcal{O}(n^3)$ a triszektorok keresése, $\mathcal{O}(n^2)$ a síkbarajzolás, és $\mathcal{O}(n^3)$ a Kasteleyn-algoritmus futtatása.

Végül szeretnénk rámutatni, hogy nem mindegy, hogy a Heawood-gráffal való izomorfiát hogyan teszteljük. Ha mind a $14!$ lehetséges megfeleltetést kipróbáljuk a csúcsok között, az több, mint 87 milliárd műveletet igényel, és ez bár konstans idő, de a gyakorlatban nagyon lassú. Ennél valójában sokkal gyorsabban eldönthető a dolog, ugyanis

6.3.5. Tétel. *A Heawood-gráf izomorfia erejéig az egyetlen olyan 3-reguláris összefüggő páros gráf, melynek két színosztálya 7-7 csúcsból áll, és bármely két egyszínű pontnak pontosan egy közös szomszédja van.*

Bizonyítás. Ha egy gráf a fenti tulajdonságokat teljesíti, akkor ő egy másodrendű projektív sík incidenciagráfja. És csak egyetlen másodrendű projektív sík van, a Fano-sík. \square

A fenti tulajdonságok már nagyon gyorsan ellenőrizhetőek.

7. Program

Az előzőekben leírt Robertson-Seymour-Thomas-féle algoritmust tudomásom szerint még nem valósították meg semmilyen programnyelven. Ezért a LEMON (Library for Efficient Modeling and Optimization in Networks) gráfok programkönyvtárát felhasználva készítettem egy C++-implementációt. A megvalósításnál az egyetlen cél az volt, hogy egy működő programot hozzak létre, ami alkalmas az even tulajdonság eldöntésére. A program még kísérleti stádiumban van. Főleg a kíváncsiság vezérelt, szerettem volna működés közben látni az algoritmust.

A kódban előforduló főbb osztályok és szerepük:

- `ConnectedBracePfaffian` – annak eldöntése, hogy egy összefüggő kapocs Pfaff-irányítható-e. Ez lényegében a Robertson-Seymour-Thomas [9] cikkben leírt algoritmus megvalósítása.
- `DigraphEven` – annak eldöntése, hogy egy digráf even-e. Ez az osztály először erősen 2-összefüggő részekre redukálja az eredeti gráfot az előző fejezetben leírt redukciós lépések segítségével, majd azokra egyenként használja a `ConnectedBracePfaffian` osztályt.
- `DigraphStretcher` – egy D digráfhoz létrehoz egy olyan G páros gráfot, melynek egy megfelelő M teljes párosítására $D(G, M) = D$.
- `DoubleCycle` – dupla kör generálása
- `Heawood` – a Heawood-gráffal való izomorfizmus eldöntése
- `Testing` – a többi osztály tesztelése
- `Trisectors` – triszektorok keresése

A főprogram (`main()`) jelenleg mindössze annyit csinál, hogy leteszteli a főbb programkomponenseket a `Testing` osztály segítségével. Néhány speciális digráfra és sok különböző méretű dupla körre meghívja az even tulajdonságot eldöntő algoritmust, majd az eredmény helyességét ellenőrzi.

Az összecsomagolt programkód (`src.7z`) bele van ágyazva ennek a szakdolgozatnak az elektronikus (PDF) verziójába, és az alábbi ikonra kattintva érhető el. (Nem minden PDF-megjelenítő jeleníti meg az ikont.) A forráskódra (kivétel: LEMON) a GNU LGPL v3 licenc vonatkozik.



8. Összefoglalás

A páros kör problémájával algoritmikusan ekvivalens az even tulajdonság eldöntése, mátrixok előjel-nemszingularitása, a páros gráfok Pfaff-irányíthatósága, a permanens-probléma, és bizonyos hipergráfok kérdései. Körbázisok segítségével láttuk be az even tulajdonság és a páros kör közötti ekvivalenciát. Az élelhyásra nézve minimális even digráfokról Seymour és Thomassen mutatta meg, hogy ezek pontosan a gyenge páratlan dupla körök. A tételt megemléztük, de bizonyítását területi okok miatt nem közöltük, de megmutattuk, hogyan lehet hatékonyan gyenge páratlan dupla kört találni, ha a létezését el tudjuk dönteni; és a Seymour-Thomassen-tétel következményeként levezettük a Manber-Shao-tételt, amely egy másik jellemzése az even digráfoknak.

Elegendő nagy foksám nem garantálja a páros kör létezését, és ezáltal a szigorúbb even tulajdonságot sem. Ezt Thomassen konstrukciója nyomán láttuk. Azonban—szintén Thomassen tételei alapján—ha az összefüggőségi szám elég nagy, az már maga után vonja, hogy a gráf even. A k -direguláris ($k \geq 3$) digráfokról is láttuk, hogy even tulajdonságúak.

Egy egyszerű közgazdaságtani modellen keresztül bevezettük az előjel-megoldhatóság és az L-mátrixok fogalmát, melyekről beláttuk, hogy eldöntésük végső soron a páros körök keresésére vezethető vissza. A mátrixok determinánsa és permanense révén egy szép, rövid algebrai bizonyítást (Friedland) láttunk Thomassen előbb említett eredményének egy (lényeges) gyengítésére, azaz arra, hogy $k \geq 7$ -re minden k -direguláris digráf tartalmaz páros kört.

Definiáltuk a Pfaff-polinomot, valamint a Pfaff-irányítást, melyek többek között arra használhatóak, hogy megsámoljuk egy gráf teljes párosításait. Röviden jellemeztük szép körökkel a Pfaff-irányításokat. Bebizonyítottuk, hogy minden síkgráf Pfaff-irányítható, sőt, polinom időben megtalálható egy ilyen irányítás Kasteleyn egyszerű algoritmus segítségével. Megfeleltettük egymásnak a kijelölt teljes párosítással rendelkező négyzetes páros gráfokat, és a digráfokat. Tisztáztuk a kapcsolatot a Pfaff-irányítások és az even tulajdonság közt. Seymour és Thomassen tétele segítségével bebizonyítottuk Little tételét a teljes párosítással rendelkező páros gráfok Pfaff-irányíthatóságára. Kitértünk a Pólya-problémára is, ami a permanens kiszámolását célozza meg.

Vizsgáltuk hipergráfok 2-színezhetőségét, a CNF visszavezetésével bebizonyítottuk, hogy ez NP-teljes. Definiáltuk a Hall-hipergráfokat, és irányított gráfokat feleltettünk meg nekik. Megmutattuk, hogy ha a hipergráf 2-színezhető, akkor ebben a digráfban van páros kör; és ha a digráf erősen összefüggő, akkor a megfordítás is igaz.

A páros körökkel való kapcsolat kimutatása után igazoltuk, hogy Hall-hipergráfokra a 2-színezhetőség polinom időben megoldható. Beláttuk, hogy a minimálisan nem páros hipergráfok megfelelnek a páros kör nélküli erősen összefüggő digráfoknak. Thomassen direguláris digráfokra vonatkozó tétele segítségével bebizonyítottuk, hogy minden k -reguláris és k -uniform hipergráf 2-színezhető, ha $k \geq 4$.

Rátértünk a konkrét algoritmus kérdésére. Visszavezettük az even tulajdonság eldöntésének problémáját erősen 2-összefüggő digráfokra. Áttértünk a páros gráfok Pfaff-irányításainak nyelvére, itt az erősen 2-összefüggő digráfoknak a kapcsok felelnek meg. Megfigyeltük, hogy a síkgráfok és a Heawood-gráf Pfaff-irányíthatóak. Definiáltunk egy ragasztási műveletet, és megemlítettük, hogy Robertson, Seymour és Thomas bebizonyították, hogy ez megőrzi a Pfaff-irányíthatóságot. Kimondtuk a három szerző azon tételét is, mely lényegében a megfordítást állítja, azaz hogy minden Pfaff-irányítható páros gráf ily módon előáll. A terjedelmes bizonyításnak csak az alapgondolatait ismertettük, azokat is nagyon vázlatosan. Következésként adódott Thomassen egyik tétele.

Felhívtuk a figyelmet egy hibára a Robertson-Seymour-Thomas cikkben, és megmutattuk, hogyan lehet azt kijavítani. A triszektorok helyes definíciója után leírtuk azt az algoritmust, mely a struktúratétel és néhány kapcsolódó lemma alkalmazásával eldönti, hogy egy digráf even-e. Rátértünk arra, hogy a három szerző hogyan optimalizálta az algoritmust, melynek első változata bár polinomiális, de a kitevő nagy. Az algoritmus végső verziója $\mathcal{O}(n^3)$ időben fut, de ha kihagyjuk belőle a szofisztikált adatstruktúrát (SPQR-fa), akkor is megvalósítható $\mathcal{O}(n^4)$ időben. Megmutattuk, hogyan lehet egyszerűen eldönteni a Heawood-gráffal való izomorfiát, amellyel az optimalizáció teljessé vált.

Végül az algoritmusnak egy C++-implementációja került leírásra, amely az SPQR-fák nélküli ($\mathcal{O}(n^4)$ -es) verziót valósítja meg. A program bele van ágyazva ebbe a dokumentumba, és a megfelelő fejezet végén található ikonra kattintva tölthető le.

Ezzel befejeztük a páros körök témakörének áttekintő leírását, ahol minden mindennel összefügg: a probléma a digráfok, páros gráfok, mátrixok és hipergráfok nyelvén egyaránt megfogalmazható, az átfogalmazások segítségével az állítások pedig érdekesnél érdekesebb alakot öltenek. Bár az Olvasóra bízom ennek megítélését, de talán a Pfaff-irányítások adják a legtermészetesebb megfogalmazást, mert itt tűnik ki leginkább az, hogy a dolog mélyén valójában gráfok síkbarajzolhatósága lappang; aminek a páros irányított körökkel való kapcsolatára talán álunkban sem gondoltunk volna.

9. Függelék

9.1. Alapdefiníciók

Az $A \subset B$ részhalmaz-jelölésnél megengedünk egyenlőséget is. *Gráf* alatt irányítatlan gráfot értünk; ha a gráf irányított, azt külön hangsúlyozzuk. Az irányítatlan és irányított gráfokban megengedünk többszörös éleket is. Ha mégsem, akkor *egyszerű gráfról/digráfról* beszélünk. Hurokélek sohasem megengedettek. Egy $v \in V$ csúcsra $\delta(v)$ jelöli v kifokát, $\rho(v)$ pedig v befokát. Ha adott egy gráf/digráf, akkor a csúcsok egy $S \subset V$ részhalmazát *vágásnak* hívjuk, ha $S \neq \emptyset$ és $S \neq V$. A vágásokat néha azonosítjuk azoknak az éleknek a halmazával, melyeknek egyik végpontja a vágásban van, másik végpontja pedig nincs a vágásban. Ha egy digráf egy vágásából nem lép ki él, akkor azt a vágást *magnak* hívjuk.

Egy digráf *Euler*, ha minden vágásban ugyanannyi él mutat mindkét irányba. Egy gráf *k-pontösszefüggő*, ha legalább $k + 1$ pontja van, és bármely $k - 1$ pontját elhagyva összefüggő gráfot kapunk. A *k-pontösszefüggő* helyett néha egyszerűen csak *k-összefüggő*t mondunk. Egy digráf *erősen k-(pont)összefüggő*, ha legalább $k + 1$ pontja van, és bármely $k - 1$ pontját elhagyva erősen összefüggő digráfot kapunk.

Egy gráf egy pontját *elvágó pontnak* nevezzük, ha elhagyásával az összefüggő komponensek száma nő. A tartalmazásra nézve maximális 2-összefüggő feszített részgráfokat *blokkoknak* hívjuk. A *blokk-elvágópont-fa* az a gráf, melynek csúcsai a blokkok és elvágó pontok, éleit pedig úgy kapjuk, hogy összekötünk minden blokkot az általa tartalmazott elvágó pontokkal. Ismert, hogy mélységi bejárással a blokk-elvágópont-fa lineáris időben megkereshető.

Egy digráfot *fenyőnek* hívunk, ha összefüggő, az egyik csúcs befoka 0, a többié pedig 1. A fenyő tehát egy olyan fa, melyet egy csúcsából kifelé irányítottunk. Ha egy digráf fordítottja fenyő, akkor azt a digráfot *befenyőnek* hívjuk.

Az előzőekben leírt, irányítatlan gráfokra vonatkozó tulajdonságok digráfokra is értelmezhetőek, ha elfelejtjük az élek irányítását, és a digráfra gráfként tekintünk. Így mondhatjuk pl. azt, hogy egy digráf *k-összefüggő*. Ez azt jelenti, hogy irányítatlan értelemben *k-pontösszefüggő*. (Ez *nem* ugyanaz, mint az erős *k-összefüggőség* fogalma!)

9.2. Nagyságrendi jelölések

Pozitív egész számokon értelmezett nemnegatív értékű függvények nagyságrendjére az \mathcal{O} (ordó), Θ és Ω jelöléseket használjuk. $f = \mathcal{O}(g)$, ha létezik olyan $c > 0$

konstans, hogy minden $n > 0$ egészre $f(n) \leq cg(n)$. Ekkor azt mondjuk, hogy f *nagyságrendben legfeljebb* g . A $g(n) = n$ speciális esetben f *nagyságrendben lineáris*. $f = \Omega(g)$ pontosan akkor, ha $g = \mathcal{O}(f)$. Ezt értelemszerűen úgy fogalmazzuk meg, hogy f *nagyságrendben legalább* g . Ha $f = \mathcal{O}(g)$ és $f = \Omega(g)$ is teljesül, azt úgy jelöljük, hogy $f = \Theta(g)$. Ebben az esetben f és g *ugyanolyan nagyságrendűek*. A nagyságrendi jelöléseket szóról-szóra ugyanígy értelmezzük többváltozós függvényekre is. Csak az a lényeg, hogy az értékkészlet része legyen a nemnegatív számok halmazának.

Amikor gráfalgoritmusok futásidejét értékeljük, akkor az n és m betű rendre a bemeneti (di)gráf csúcsainak, ill. éleinek számát jelöli. Így például, ha egy algoritmus futásideje $\mathcal{O}(nm)$, akkor ez azt jelenti, hogy a futásidő nagyságrendileg legfeljebb a csúcsok és élek számának szorzata.

Hivatkozások

- [1] G. BATTISTA AND R. TAMASSIA, *On-line graph algorithms with spqr-trees*, 443 (1990), pp. 598–611.
- [2] R. A. BRUALDI AND B. L. SHADER, *Matrices of sign-solvable linear systems*, (1995).
- [3] M. BRUNDAGE, *From the even cycle mystery to the l-matrix problem and beyond (msc thesis)*, (1996).
- [4] S. FRIEDLAND, *Every 7-regular digraph contains an even cycle*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 46 (1989), pp. 249–252.
- [5] L. LOVÁSZ AND M. D. PLUMMER, *The pfaffian and the number of perfect matchings*, (1986), pp. 318–325.
- [6] W. MCCUAIG, *Pólya's permanent problem*, The Electronic Journal of Combinatorics, 11 (2004), pp. 1–83.
- [7] S. NORINE, C. H. C. LITTLE, AND K. L. TEO, *A new proof of a characterisation of pfaffian bipartite graphs*, Journal of Combinatorial Theory, (2004), pp. 123–126.
- [8] G. PÓLYA, *Aufgabe 424*, Arch. Math. Phys., 20 (1913).
- [9] N. ROBERTSON, P. D. SEYMOUR, AND R. THOMAS, *Permanents, pfaffian orientations, and even directed circuits*, Annals of Mathematics, (1999), pp. 929–975.
- [10] P. SEYMOUR AND C. THOMASSEN, *Characterization of even directed graphs*, Journal of Combinatorial Theory, (1987), pp. 36–45.
- [11] P. D. SEYMOUR, *On the two-colouring of hypergraphs*, The Quarterly Journal of Mathematics, 25 (1974), pp. 303–312.
- [12] C. THOMASSEN, *Even cycles in directed graphs*, European Journal of Combinatorics, (1985), pp. 85–89.
- [13] —, *Sign-nonsingular matrices and even cycles in directed graphs*, Linear Algebra and its Applications, (1986), pp. 27–41.
- [14] —, *The even cycle problem for directed graphs*, Journal of the American Mathematical Society, 5 (1992), pp. 217–229.

- [15] —, *The even cycle problem for planar digraphs*, *Journal of Algorithms*, 15 (1993), pp. 61–75.