# Kombinatorikus sorozatok

Szakdolgozat

Írta: Szűcs Gábor

Matematikus MSc

Témavezető: Csikvári Péter

Tanársegéd

Számítógéptudományi Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2013.

# Tartalomjegyzék

# 1. fejezet

# Bevezetés

A dolgozat fő témája a következő rekurzió. Legyen $(a_n)_{n\geq 1}$ egészekből álló sorozat. Ekkor

$$d_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} d_k a_{n-k}, \quad \text{ahol} \quad d_0 = 1.$$

Ez az első ránézésre természetesnek nem mondható a definíció, mégis sokszor szolgáltat eredményül egész sorozatokat. Csikvári Péter tudományos diákköri munkájában található néhány feltétel, biztosítják, hogy egész sorozatot kapunk eredményül. A háttérben a generátorfüggvények állnak (2.1. szakasz).

Ennek ellenére még érvényes a kérdés, hogy miért érdemes ezzel a rekurzióval foglalkozni. Erre egy érvet szolgáltat a 2.3. szakasz. Mutatunk egy példát a rekurzió használatára, megszámoljuk az adott csúcsszámú, összefüggő gráfokat. Ezzel a témával többek között Riddell, Harary és Cadogan foglalkozott részletesebben. A rekurzió is az ő munkájukban szerepel először, az általánosan elfogadott neve Euler-transzformáció.

A dolgozat további részében sorozatok egy csoportjáról kombinatorikus eszközökkel mutatjuk meg, hogy az Euler-transzformáltjai egészekől állnak. A kísérletezésben jelentős segítséget nyújtott [1], amely sorozatok online elérhető adabázisa.

Részletesen foglalkozunk a Dyck-utakkal, az ennek környékén felmerülő sorozatokról kombinatorikusan eszközökkel belátjuk, hogy Euler-transzformáltjaik egészek. Továbbá mutatunk egy (eddig még nem vizsgált) általánosítását a Dyck-utaknak, amely sejtésünk szerint a "természetes" általánosításnak nevezhető (4.5. szakasz).

Szeretném megköszönni témavezetőm, Csikvári Péter segítségét, rugalmasságát és nem utolsósorban érdekes témajavaslatát, amely jelentős mértékben hozzájárult a dolgozat megszületéséhez. Köszönöm továbbá Kutas Péternek a kézirat alapos átnézését.

# 2. fejezet

# Egy rekurzió

## 2.1. Euler-transzformáció

Ebben a szakaszban megismerkedünk egy rekurzióval, amelynek tulajdonságait és alkalmazásait a dolgozatban vizsgálni fogjuk. Az irodalomban többféleképpen nevezik, mi az Euler-transzformáció elnevezést fogjuk használni a továbbiakban.

**2.1. Definíció** (Euler-transzformáció)**.** Legyen $a_1, a_2, \ldots$ egy egészekből álló sorozat. Legyen

$$d_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} d_k a_{n-k}, \quad \text{ahol} \quad d_0 = 1.$$

Ezt a $(d_i)_{i\geq 0}$ sorozatot nevezzük az $(a_i)_{i\geq 1}$ sorozat Euler-transzformáltjának. Jelöljük ezt a következőképpen:

$$E\left[(a_i)\right] = (d_i).$$

Nem világos, hogy ez a transzformáció mikor ad egész értékű sorozatokat, ennek egy feltételét fogalmazzuk meg Csikvári Péter tudományos diákköri dolgozata alapján. Ez, és ehhez hasonló eredmény sok más helyen megtalálható: [3], [11], [14]. Mi a [6] felépítést fogjuk követni.

Ehhez szükségünk van a Möbius-függvény definíciójára.

**2.2. Definíció** (Möbius-függvény)**.** Legyen $\mu(n)$ az alábbi módon definiált számelméleti függvény:

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad n \text{ nem négyzetmentes} \\ 1 & \text{ha} \quad n = 1 \\ (-1)^k & \text{ha} \quad n \ k \text{ darab különböző prím szorzata} \end{cases}$$

**2.3. Tétel.** *Legyen $a_1, a_2, \ldots$ egy egészekből álló sorozat. Legyen $(d_i)$ az $(a_i)$ sorozat Euler-transzformáltja, azaz $(d_i) = E[(a_i)]$. A $(d_i)$ sorozat tagjai akkor és csak akkor egészek, ha minden $n$-re teljesül, hogy $n \mid x_n$, ahol $x_n = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) a_d$.*

*Bizonyítás.* Használjuk a tétel jelöléseit. Megjegyezzük, hogyha $(x_i)$ a tételben definiált sorozat, akkor $a_n = \sum_{d|n} x_d$ (ezt nem bizonyítjuk, a bizonyítás közismert). A bizonyítás során generátorfüggvényeket fogunk használni. Legyenek: $A(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^{i-1}$, és $D(z) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i z^i$. Tekintsük továbbá a következőt:

$$\overline{D}(z) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - z^i)^{\frac{-x_i}{i}}.$$

Mivel

$$(1 - z^i)^{\frac{-x_i}{i}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{x_i}{i} + k - 1}{k} z^{ik},$$

ezért $z^n$ együtthatója $\overline{D}(z)$-ben:

$$\overline{d_n} = \sum_{k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n} \binom{x_1 + k_1 - 1}{k_1} \binom{\frac{x_2}{2} + k_2 - 1}{k_2} \cdots \binom{\frac{x_n}{n} + k_n - 1}{k_n}. \tag{2.1}$$

Először azt mutatjuk meg, hogy $(\overline{d_n})$ sorozat tagjai, akkor és csak akkor egészek, ha $n \mid x_n$ minden $n$-re.

Teljes indukciót használunk. $\overline{d_n} = x_1$, tehát $\overline{d_n}$ pontosan akkor egész, ha $1 \mid x_1$. Tegyük fel most, hogy $\overline{d_1}, \overline{d_2}, \ldots \overline{d_{n-1}}$ egészek, és minden $1 \le i \le n-1$ esetén $i \mid x_i$. Két esetet különböztethetünk meg. Ha $k_n = 0$, akkor a (2.1)-beli összeg tagjai az indukciós feltétel miatt egészek. Ha $k_n > 0$, akkor $k_n = 1$, és $k_1 = \ldots = k_{n-1} = 0$, ennek a feltételnek egyetlen tag felel meg, ez pedig az $\frac{x_n}{n}$. Tehát az összeg (azaz $\overline{d_n}$) pontosan akkor egész, ha $n \mid x_n$. Ezzel az állítás beláttuk.

Most már csak azt kell belátnunk, hogy $\overline{D}(z) = D(z)$. Fejezzük ki most az $\overline{D}(z)$ generátorfüggvény együtthatóit az $(a_i)$ sorozat tagjaival

$$\overline{D}(z) = e^{\ln(\overline{D}(z))} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \ln\left(\frac{1}{1 - z^n}\right)\right),$$

folytassuk az átalakításokat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \ln\left(\frac{1}{1-z^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{jn}}{j} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{d|n} x_d\right) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} z^n.$$

Tehát

$$\overline{D}(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} z^n\right) = e^{\int A(z)\mathrm{d}z}. \tag{2.2}$$

$A(z)D(z) = a_1d_0+(a_1d_1+a_2d_0)z+(a_1d_2+a_2d_1+a_3d_0)z^2+\ldots = d_1+2d_2z+3d_3z^2+\ldots$, azaz $A(z)D(z) = D(z)'$. Megoldva a differenciálegyenletet

$$D(z) = e^{\int A(z)\mathrm{d}z}.$$

Tudjuk továbbá, hogy $\overline{D}(0) = D(0)$, ezért $\overline{D}(z) \equiv D(z)$. Ezzel a 2.3 tétel bizonyítását befejeztük. $\square$

A bizonyításból több is kijön, mint a tétel állítása, ezt is kimondjuk. Ehhez szükségünk van a ciklusszámláló polinomok alábbi definíciójára:

**2.4. Definíció** (Ciklusszámláló polinom)**.** Egy $\Gamma$ permutációs csoport ciklusszámláló polinomjának nevezzük a

$$p_\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\pi\in\Gamma} x_1^{k_1(\pi)} x_2^{k_2(\pi)} \ldots x_n^{k_n(\pi)}$$

polinomot, ahol $n$ azon elemek száma melyeken $\Gamma$ hat, és $k_i(\pi)$ a $\pi$ permutáció $i$ hosszú ciklusainak a száma.

**2.5. Következmény.** *Adott $(a_n)_{n\geq 1}$ egész számok egy sorozata, illetve egy $(d_n)_{n\geq 0}$ sorozat, ekkor $(d_n) = E\left[(a_n)\right]$, pontosan akkor teljesül, ha $d_0 = 1$, és $n \geq 1$-re*

$$d_n = p_{S_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

*ahol $S_n$ $n$ elem szimmetrikus csoportja.*

*Bizonyítás.* Használjuk a (2.2) azonosságot

$$D(z) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i x^i = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i} x^i\right) = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_i x^i}{i}\right)^k}{k!},$$

tehát

$$d_n = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \frac{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n}}{(k_1!)(2^{k_2}k_2!)\ldots(n^{k_n}k_n!)} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_n^{k_n}.$$

Ezzel az állítást beláttuk. □

## 2.2. Példa a tétel alkalmazására

Mutatunk egy lehetséges számelméleti alkalmazását a 2.3 tételnek.

**2.6. Tétel.** *Minden $n$ pozitív egész számra teljesül, hogy*

$$n \Big| \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\binom{2n}{n}.$$

*Bizonyítás.* A 2.3 tételt szeretnénk alkalmazni. Ehhez definiáljuk a következő sorozatokat: $a_n = \binom{2n}{n}$ és $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. A $c_n$ sorozat tagjait Catalan-számoknak hívjuk, nekünk csak az első tagtól lesz erre szükségünk, ezért indexeljük át, legyen $d_n = c_{n+1}$. Ehhez szükségünk lesz a két sorozat generátorfüggvényére:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-4x)^k = \frac{1}{\sqrt{1-4x}},$$

ezért

$$A(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right).$$

Az $D(x)$ függvény kiszámításához szükségünk van a következő, jól ismert azonosságra: $d_{n+1} = 2d_n + \sum_{i=0}^{n-1} d_i d_{n-1-i}$. Így felírhatjuk, hogy

$$D(x)(xD(x)) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} d_i d_{n-1-i}\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(d_{n+1}-2d_n)x^n = \frac{1}{x}(D(x)-2x-1)-2(D(x)-1).$$

Megoldva a másodfokú egyenletet megkapjuk, hogy

$$D(x) = \frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x^2}.$$

A 2.3 tétel bizonyítása szerint most már elég ellenőriznünk, hogy

$$\exp\left(\int \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right)\mathrm{d}x\right)=\frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x^2}.$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ez teljesül. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. □

2.7. *Megjegyzés.* A bizonyítás során használtuk azt a tényt, hogy a Catalan-számok egészek. Ez természetesen igaz, hiszen a Catalan-számokat kombinatorikusan definiáljuk. Másrészt ez a 3.5 tétel következménye is.

## 2.3. Rekurzió az összefüggő gráfok leszámlálására

Ha ismerjük az adott csúcsszámú gráfok számát, akkor megmutatjuk, hogy az adott csúcsszámú, összefüggő gráfok számát megkaphatjuk a 2.3 tételbeli rekurzió segítségével. Ehhez szükségünk van néhány további eszközre.

Ezt az eredmény először Riddell fedezte fel, részletesebben foglalkozik a témával Cadogan cikke [3], mi Harary [11] gondolatmenetét követjük.

Először kimondjuk a Burnside-lemmát. Ez az állítás közismert, ezért nem bizonyítjuk (lásd pl. [14] 3.24. feladat).

**2.8. Lemma** (Burnside)**.** *Legyen $\Gamma$ az $\{1,2,\ldots,n\}$ halmaz egy permutációcsoportja. Ekkor a pályák száma megegyezik a $\Gamma$-beli permutációk fixpontjainak átlagos számával.*

Most már megfogalmazhatjuk a következő tételt (lásd [14] 3.29.).

**2.9. Tétel** (Pólya-Redfield módszer)**.** *Legyen $G$ egy véges halmaz, amin egy $\Gamma$ permutációcsoport hat. Adott továbbá egy $H$ halmaz, és azon egy $\omega$ nemnegatív, egészértékű súlyfüggvény. Legyen $h_n$ a $H$-beli $n$ súlyú elemek száma. Legyen*

$$h(x)=\sum_{i=0}^{\infty} h_n x^n.$$

*Nevezzünk két $f_1, f_2 : G \to H$ leképezést lényegesen különbözőnek, ha nincs olyan $\pi \in \Gamma$, amire $\pi f_1 = f_2$. Jelölje $a_n$ az olyan lényegesen különböző $f : G \to H$ leképezések számát, amelyekre*

$$\sum_{x\in G}\omega(f(x))=n. \tag{2.3}$$

*Ekkor teljesül, hogy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = p_\Gamma\left(h(x), h(x^2), \ldots, h(x^{|G|})\right). \tag{2.4}$$

*Bizonyítás.* Először számoljuk meg a (2.3) feltételt kielégítő leképezéseket, amelyeket egy rögzített $\gamma \in \Gamma$ permutáció helyben hagy. Legyen ezek száma $b_n(\gamma)$. Legyenek $\gamma$ ciklusai rendre $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\gamma)x^n = \prod_{i=1}^{k} h(x^{|C_i|}). \tag{2.5}$$

Hiszen ekkor az $x^n$ együtthatója a jobboldalon:

$$\sum_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_k > 0 \\ j_1|C_1| + \ldots + j_k|C_k| = n}} h_{j_1} \ldots h_{j_k} = n.$$

Ez a kifejezés pedig megegyezik azoknak a leképezéseknek a számával, amelyek a $C_1, \ldots C_k$ ciklusokon konstansok, és teljesül rájuk $a$ (2.3) feltétel. $A$ (2.5) feltételt nyilván következő alakban is írhatjuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\gamma)x^n = \prod_{l=1}^{|G|} h(x^l)^{k_l(\gamma)}.$$

Alkalmazzuk a Burnside-lemmát (2.8 lemma) az $f : G \to H$ leképezésekre, és a $\Gamma$ permutációcsoportra. Ekkor a pályák a lényegesen különböző permutációk lesznek, míg egy $\gamma$ permutáció fixpontjai, azok a leképezések, amiket $\gamma$ helyben hagy, ezek száma $b_n(\gamma)$. Így

$$a_n = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} b_n(\gamma).$$

Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\gamma)x^n = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \prod_{l=1}^{|G|} h(x^l)^{k_l(\gamma)} = p_\Gamma\left(h(x), h(x^2), \ldots, h(x^{|G|})\right).$$

Ezzel a tétel állítását beláttuk. $\square$

Legyen $g_n$ az $n$ pontú gráfok száma. Legyen a $(g_n)$ sorozat generátorfüggvénye

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n.$$

Hasonlóan

$$c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n,$$

ahol $c_n$ az $n$ pontú, összefüggő gráfok száma.

**2.10. Tétel.** *A $g(x)$ és $c(x)$ generátorfüggvények teljesítik a következőt:*

$$1 + g(x) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c(x^k)}{k}\right).$$

*Bizonyítás.* A 2.9 tételt szeretnénk alkalmazni.

Legyen $G = \{1, 2, \ldots, n\}$, és $\Gamma = S_n$. Legyenek $H$ elemei az összefüggő gráfok. Ekkor $h_n = c_n$. Legyen az $\omega$ súlyfüggvény az, ami egy gráfhoz a csúcsai számát rendeli hozzá.

Legyen $a_t$ olyan lényegesen különböző $f : G \to H$ leképezések száma, amire

$$\sum_{x \in G} \omega(f(x)) = t.$$

Ekkor $a_t$ az $n$ komponensből álló $t$ csúcsszámú gráfok száma.

A Pólya-Redfield módszer szerint

$$A_n(x) = \sum_{t=0}^{\infty} a_t x^t = p_{S_n}\left(c(x), c(x^2), \ldots, c(x^n)\right). \tag{2.6}$$

Összegezzük a (2.6) egyenletet minden $n$-re ($A_0(x) = 1$).

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) y^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_{S_n}\left(c(x), c(x^2), \ldots, c(x^n)\right) y^n.$$

Ekkor alkalmazva a 2.5 következménybeli azonosságot az egyenlet jobb oldalára azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) y^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_{S_n}\left(c(x), c(x^2), \ldots, c(x^n)\right) y^n = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c(x^k)}{k} z^k\right).$$

$y = 1$ helyettesítéssel már meg is kapjuk a tétel állítását, csak annyit kell meggondolnunk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n.$$

Ez viszont igaz, hiszen $A_n(x)$-ben az $x^t$ együtthatója a $t$ csúcsú $n$ összefüggőségi komponensből álló gráfok száma. Mivel $n$ végigfut az összes pozitív egész számon, ezért minden $t$ megkapjuk a $t$ csúcsú gráfok számát. $\square$

Legyen $R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n x^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c(x^k)}{k}$. Ekkor

$$r_n = \sum_{d|n} \frac{d}{n} c_d \quad \text{azaz} \quad n r_n = \sum_{d|n} d c_d.$$

Alkalmazzuk a Möbius-féle megfordítási formulát, így

$$n c_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d r_d \quad \text{azaz} \quad c_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \frac{d}{n} r_d. \tag{2.7}$$

Most már készen van a rekurzió, csak össze kell foglalni a kapott eredményeket.

Tehát a 2.10 állítása és az $R(x)$ generátorfüggvény definíciója együtt azt jelenti, hogy az $(r_n)$ sorozat Euler-transzformáltja az $(1, g_1, g_2, \ldots)$ sorozat (itt $g_n$ az $n$ csúcsú gráfok száma). A rekurzió megfordítható, ezért a $(g_n)$ sorozat ismeretében meghatározhatjuk az $(r_n)$ sorozatot. A (2.7) azonosság pedig azt mutatja, hogy az $(r_n)$ tagjaiból számolható a $(c_n)$ sorozat.

Így tényleg létezik egy egyszerű rekurzió az összefüggő gráfok számára. A fenti okoskodás, akkor is elvégezhető, ha a gráfra teszünk valamilyen megkötést (például páros gráfokat számolunk le), erről részletesebben a [3] cikk szól.

# 3. fejezet

# Dyck-utak

## 3.1. Fogalmak

**3.1. Definíció.** Legyen $\mathcal{A}_n$ a $2n$ hosszú, $n$ darab $F$ és $n$ darab $L$ betűt tartalmazó szavak halmaza. Ekkor $|\mathcal{A}_n| = \binom{2n}{n}$.

**3.2. Definíció** (Dyck-szavak)**.** Egy $v \in \mathcal{A}_n$ szót *Dyck-szónak* hívunk, ha $v$ minden kezdőszeletében az $F$ betűk száma legalább annyi, mint az $L$ betűké. Jelöljük a Dyck-szavak halmazát $\mathcal{V}_n$-nel.

A Dyck-szavakat ábrázolhatjuk az alábbi módon is.

**3.3. Definíció** (Dyck-út)**.** A $(0,0)$ pontból induló, és a $(2n,0)$ pontba érkező $v_n$ utat Dyck-útnak hívjuk, ha csak felfelé $(1,1)$ vagy lefelé $(1,-1)$ lépünk,és az útnak nincs pontja az alsó félsíkban. Legyenek $v_n$ csúcsai rendre $V_0, V_1, \ldots V_{2n}$, ahol $V_k$ jelöli a $(k+1)$. lépés kezdőpontját. Egy csúcs magasságának a csúcs $y$ koordinátáját nevezzük.

3.4. *Megjegyzés.* Hasonlóan ábrázolhatjuk az $\mathcal{A}_n$-beli szavakat is.

## 3.2. Chung-Feller tétel

Ismert, hogy $|\mathcal{V}_n| = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$. Ennél többet is belátunk a következő tételben. Ez a tétel széleskörben ismert, és alkalmazott, bővebben lásd [16], [13], [8]. A mi bizonyításunk az [5] ötletét követi.

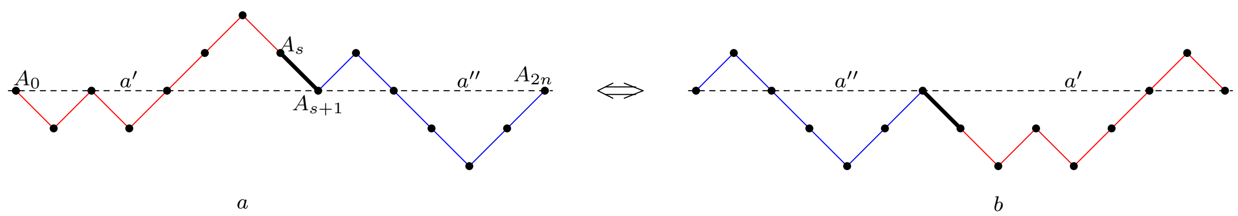
**3.5. Tétel** (Chung-Feller)**.** *Jelölje $\mathcal{A}_{n,k}$ az olyan $2n$ hosszú utakat, amelyekben pontosan $k$ darab lefelé lépést teszünk a felső félsíkban. Ekkor tetszőleges $k$-ra $(0 \leq k \leq n)$ teljesül, hogy*

$$|\mathcal{A}_{n,k}| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

*Speciálisan* $|\mathcal{V}_n| = |\mathcal{A}_{n,n}| = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$.

*Bizonyítás.* Válasszunk tetszőlegesen egy $a \in \mathcal{A}_n$ utat. Tegyük fel, hogy az út során $k$-szor lépünk lefelé a felső félsíkban ($k > 0$). Mutatunk egy olyan transzformációt, amely eggyel csökkenti a felső félsíkban történő lefelé lépések számát.

Nézzük (balról) az első olyan lefelé lépést, amely érinti az $x$ tengelyt (ilyen van, hiszen feltettük, hogy $k > 0$). Legyen ennek a kezdőpontja $A_s$, míg a végpontja $A_{s+1}$. Jelölje $a'$ az $A_0$ és $A_s$ közti utat, míg $a''$ az $A_{s+1}$ és $A_{2n}$ közöttit. Legyen $b$ egy olyan $\mathcal{A}_n$-beli út, amely $a''$-vel kezdődik, majd egy lefelé lépéssel folytatódik és aztán $a'$-vel fejeződik be (3.1 ábra).




3.1. ábra.

Ez a transzformáció nem változtatja a felső félsíkbeli lefelé lépések számát $a'$-ben és $a''$-ben, viszont $A_sA_{s+1}$-et az alsó félsíkba viszi. Tehát a $b$ út során $(k-1)$-szer lépünk lefelé a felső félsíkban. Könnyen látható, hogy ez a transzformáció megfordítható. Hiszen a $b$ út végétől visszafelé indulva $A_sA_{s+1}$ lesz az első olyan lefelé lépés, ami az $x$ tengelyről indul. Ez kettébontja $b$-t, a fenti módon megcserélve a két részt, éppen $a$-t kapjuk. Két utat ekvivalensnek mondunk, ha ilyen transzformációkkal egymásba vihetőek. Ez egy ekvivalencia-reláció, ezért az utak ekvivalencia-osztályok uniójára bomlanak, ahol minden osztály $n+1$ elemű. Innen a tétel állítása adódik.

$\square$

## 3.3. Dyck-utak rekurziója

A következőkben kombinatorikus bizonyítást adunk arra, hogy a $\left(\binom{2n}{n}\right)$ sorozat Euler-transzformáltja a Catalan-számok sorozata. Ez a két sorozat, mint az az előző szakaszban láttuk, különböző séták leszámlálásával is megadható. Ezt prezízen az alábbi két képlet adja meg:

$$a_n = |\mathcal{A}_n| \quad \text{és} \quad d_n = |\mathcal{V}_{n+1}|.$$

A két sorozat első néhány tagja:

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 6 | 20 | 70 | 252 | 924 | 3432 | 12870 | 48620 | $\ldots$ |
| 1 | 2 | 5 | 14 | 42 | 132 | 429 | 1430 | 4862 | 16796 | $\ldots$ |
| $d_0$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ | $d_5$ | $d_6$ | $d_7$ | $d_8$ | $d_9$ | $\ldots$ |

Most már kimondhatjuk a fenti állítást megfogalmazó tételt.

**3.6. Tétel.** *Legyen* $(a_n)_{n\geq 1}$ *és* $(d_n)_{n\geq 0}$ *a két előbb definiált sorozat. Ekkor* $E[(a_n)] = (d_n)$*, azaz minden* $n > 0$ *esetén teljesül, hogy*

$$d_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} d_k a_{n-k}.$$

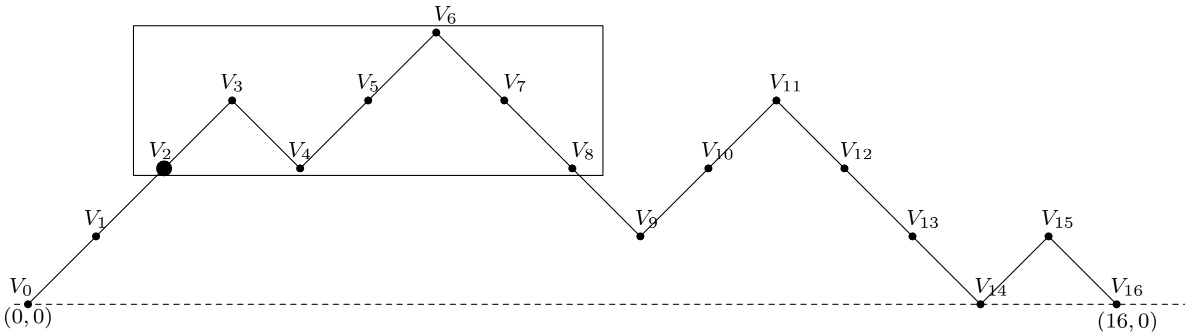
*Bizonyítás.* Használjuk a 3.3 definíció elnevezéseit. A bizonyítás során az alábbi két dologra lesz szükségünk:

**A)** Az $l_{n,m} = (v_n, V_m)$ párt *pontozott Dyck-útnak* hívjuk, ha $v_n \in \mathcal{V}_n$ egy $2n$ hosszú Dyck-út, és $V_m$ egy olyan felfelé lépés kezdőpontja, ahol $m > 0$. Legyen $\mathcal{L}_n$ a $2n$ hosszú pontozott Dyck-utak halmaza (nyilván $|\mathcal{L}_{n+1}| = nd_n$).

Egy $l_{n,m} \in \mathcal{L}_n$ út *árnyékának* egy olyan (maximális) $v_s \in \mathcal{V}_s$ utat nevezünk, amely a $V_m$ csúcsból indul és $2s$ hosszú. Az árnyék maximálitása miatt a $v_s$ utolsó $U$ csúcsa után vagy lefelé lépés következik, vagy $U = V_{2n}$. Mivel $V_m$ minden esetben egy felfelé lépés kezdőpontja, ezért az árnyék soha nem lehet üres, továbbá nem lehet az egész út sem az árnyék, mert $V_m$ nem lehet egyenlő $V_0$-lal.

Jelölje $s(l_{n,m})$ $l_{n,m}$ árnyékát (azaz $s(l_{n,m}) = v_s$), legyen továbbá $h(l_{n,m})$ a $V_m$ csúcs magassága.

A 3.2 ábrán egy $l_{8,2}$ pontozott Dyck-út látható (bekeretezve látható az árnyék).




3.2. ábra. Pontozott Dyck-út árnyéka

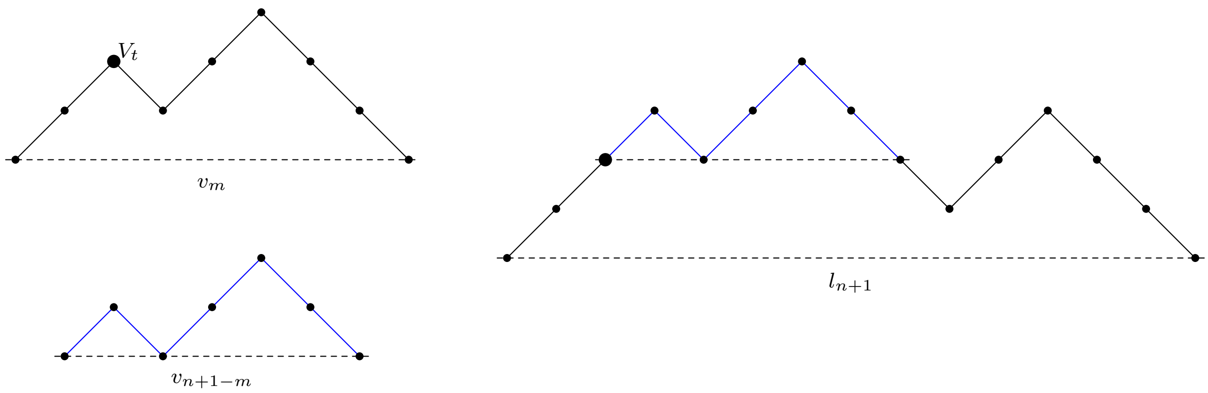
**B)** Egy $p_{n,k} = (v_k, a_{n-k})$ párt Dyck-párnak nevezzük, ha $1 \leq k < n$, $v_k \in \mathcal{V}_k$, és $a_{n-k} \in \mathcal{A}_{n-k}$. Az útpárok száma nyilván $\sum_{k=1}^{n-1} |\mathcal{V}_k| \cdot |\mathcal{A}_{n-k}| = \sum_{l=0}^{n-2} d_l a_{n-l-1}$. Egy ilyen párt a két út egymás után rajzolásával ábrázolhatunk, tehát a $(0,0)$ pontból indul és a $(2n, 0)$ pontba érkezik. Jelölje $\mathcal{P}_n$ a $2n$ hosszú Dyck-párok halmazát.

**3.7. Állítás.** *Minden* $0 \leq n$*-re*

$$|\mathcal{L}_{n+1}| = |\mathcal{P}_{n+1}| \iff d_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d_k a_{n-k}.$$

*Bizonyítás.* A 3.7 állítás triviális. □

Az $|\mathcal{L}_{n+1}| = |\mathcal{P}_{n+1}|$ igazolásához $(2n+2)$-nél rövidebb Dyck-utak segítségével fogunk pontozott Dyck-utakat előállítani.




3.3. ábra. Pontozott Dyck-út előállítása

Válasszunk egy tetszőleges $\mathcal{V}_m$-beli $v_m$ utat, ahol $1 \leq m < n+1$. Jelöljünk ki ezen egy olyan $V_t$ csúcsot, ami vagy egy lefelé lépés kezdőpontja, vagy pedig $V_t = V_{2m}$. A $V_t$ csúcsot $(m+1)$ féleképpen választhatjuk meg. Legyen $v_{n+1-m} \in \mathcal{V}_{n+1-m}$ tetszőleges Dyck-út.

A fenti $(v_m, t, v_{n+1-m})$ hármashoz rendeljünk hozzá egy $\mathcal{L}_{n+1}$-beli utat a következőképpen (3.3 ábra). Rajzoljuk meg először a $v_m$ út $V_t$ csúcsig tartó részét, aztán rajzoljuk meg $V_t$-ből kiindulva a $v_{n+1-m}$ utat, végezetül fejezzük be a $v_m$ út, $V_t$ utáni részével. Így kapjuk az $l_{n+1,t} \in \mathcal{L}_{n+1}$ utat. Mivel $V_t$ eredetileg egy lefelé lépés kezdőpontja volt, ezért $s(l_{n+1,t}) = v_{n+1-m}$. Jelölje ezt a leképezést $f$.

$f$ **injektív.** Tegyük fel, hogy $f(v_m, t, v_{n+1-m}) = f(u_{m'}, t', u_{n+1-m'})$. A képek pontozott Dyck-utak, így meg kell egyezniük a kitüntetett csúcsaiknak, ezért $t = t'$. Az árnyékuk is meg kell egyezniük, ezért $v_{n+1-m} = u_{n+1-m'}$. Innen $m = m'$. Az árnyékon kívüli részek is azonosak, ezért $v_m = u_{m'}$. Ezzel beláttuk, hogy $f$ injektív.

$f$ **szürjektív.** Legyen $l_{n+1,t}$ tetszőleges $\mathcal{L}_{n+1}$-beli út. Legyen $v_s = s(l_{n+1,t})$ $(1 \leq s < n+1)$. Az árnyék törlésével kapott út egy $\mathcal{V}_{n+1-s}$-beli út lesz (jelölje ezt $v_{n+1-s}$). Így az $(v_{n+1-s}, t, v_s)$ hármas képe pont, az $l_{n+1,t}$ út lesz. Tehát $f$ szürjektív.

Ezzel azt kaptuk, hogy $f$ bijekció a pontozott Dyck-utak és a fentebb definiált hármasok között. Így teljesül a következő azonosság:

$$|\mathcal{L}_{n+1}| = \sum_{m=1}^{n} |\mathcal{V}_m| \cdot (m+1) \cdot |\mathcal{V}_{n+1-m}| \tag{3.1}$$

Alkalmazzuk most a Chung-Feller tételt (3.5 tétel).

$$\sum_{m=1}^{n} |\mathcal{V}_m| \cdot (m+1) \cdot |\mathcal{V}_{n+1-m}| = \sum_{m=1}^{n} \frac{|A_m|}{m+1} \cdot (m+1) \cdot |\mathcal{V}_{n+1-m}| = \sum_{m=1}^{n} |A_m| \cdot |\mathcal{V}_{n+1-m}|. \tag{3.2}$$

Ezzel be is fejeztük a 3.6 tétel bizonyítását, hiszen a (3.1) a (3.2) azonosságok összevetésével kapjuk, hogy

$$|\mathcal{L}_{n+1}| = \sum_{m=1}^{n} |A_m| \cdot |\mathcal{V}_{n+1-m}| = \sum_{k=1}^{n} |V_k| \cdot |\mathcal{A}_{n+1-k}| = |P_{n+1}|.$$

□

# 4. fejezet

# Általánosított Dyck-utak

## 4.1. Chung-Feller tétel

Az előző fejezetben vizsgált sorozatnak ismert számos általánosítása, mi most a következővel fogunk foglalkozni.

**4.1. Definíció.** Adott egy $r$ rögzített pozitív, egész szám. Egy utat $r$-útnak hívunk, ha az út a $(0,0)$ pontból indul, és az $((r+1)n, 0)$ pontba érkezik. Az út során az $(1, r)$, illetve az $(1, -1)$ lépések megengedettek. Jelöljük az $(r+1)n$ hosszú utak halmazát $\mathcal{A}_n^{(r)}$-rel. Speciálisan $\mathcal{A}_n^{(1)} = \mathcal{A}_n$. Legyen $a_n^{(r)} = |\mathcal{A}_n^{(r)}|$.

**4.2. Definíció.** Jelölje $\mathcal{V}_n^{(r)}$ az olyan $(r+1)n$ hosszú $r$-utak halmazát, amelyek minden lépése a felső félsíkban halad. Speciálisan $\mathcal{V}_n^{(1)} = \mathcal{V}_n$. Legyen $d_n^{(r)} = |\mathcal{V}_n^{(r)}|$.

4.3. *Megjegyzés.* Ha nem zavarja a megértést az ilyen utakat is Dyck-útnak hívjuk.

4.4. *Megjegyzés.* Ha az út során az $(1, -r)$, illetve az $(1, 1)$ lépések megengedettek, akkor a definíció az előzővel analóg módon működik, a továbbiakban előfordul, hogy külön hivatkozás nélkül ezekről az utakról fogunk beszélni.

Ismert, hogy $|\mathcal{V}_n^{(r)}| = \frac{\binom{(r+1)n}{n}}{rn+1}$. Ennél többet is belátunk a következő tételben, a felépítés követi [10]-t (7.5. szakasz).

**4.5. Tétel** (Chung-Feller II.)**.** *Jelölje $\mathcal{A}_{n,k}^{(r)}$ az olyan $(r+1)n$ hosszú utakat, amelyekben $k$ darab lefelé lépést teszünk a felső félsíkban. Ekkor tetszőleges $k$-ra $(0 \le k \le rn)$ teljesül, hogy*

$$|\mathcal{A}_{n,k}^{(r)}| = \frac{1}{rn+1} \cdot |\mathcal{A}_n^{(r)}| = \frac{1}{rn+1}\binom{(r+1)n}{n}.$$

**4.6. Következmény.** *Speciálisan* $|\mathcal{V}_n^{(r)}| = |\mathcal{A}_{n,rn}^{(r)}| = \frac{1}{rn+1}\binom{(r+1)n}{n}$.

A bizonyítás a 3.5 tétel bizonyításához teljesen hasonlóan is működik (lásd [12]).

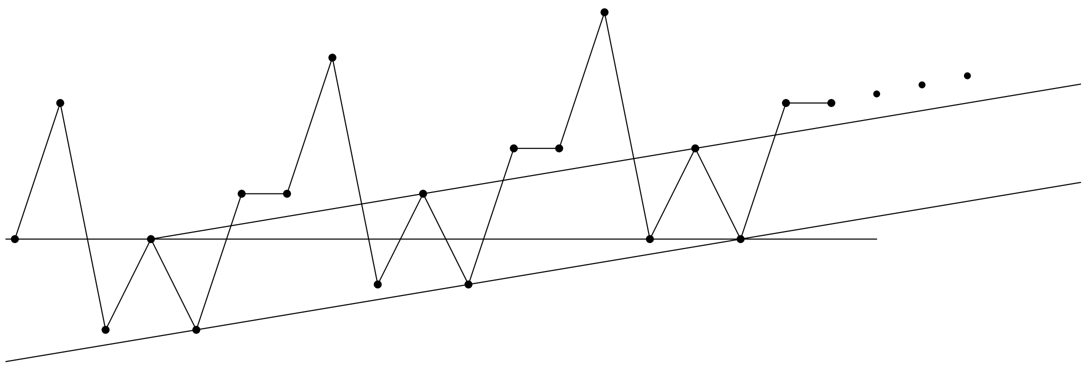
*Bizonyítás.* Mi adunk a 4.6 következményre egy ettől különböző bizonyítást. Ez használja a következő önmagában is érdekes lemmát (lásd még [7]).

**4.7. Lemma** (Raney)**.** *Adott az* $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *egészeknek egy olyan sorozata amelyre teljesül, hogy* $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. *Ekkor a*

$$(x_1, x_2, \ldots x_n),\ (x_2, x_3 \ldots x_n, x_1),\ \ldots,\ (x_n, x_1 \ldots x_{n-1})$$

*sorozatok közül pontosan egy olyan van, amelynek az összes részletösszege pozitív. Részletösszegnek nevezzük az első tagtól a* $j$*-ik tagig tartó összegeket, ahol* $1 \leq j \leq n$.

*A 4.7 lemma bizonyítása.* Nézzük a következő, végtelen sorozatot $(x_1, x_2, \ldots x_n, x_1, x_2, \ldots x_n, x_1, x_2, \ldots)$. Feleltessünk meg a sorozat egy $x_i$ tagjának egy $(1, x_i)$ lépést, ekkor az alábbi módon ábrázolhatjuk a sorozatot:



4.1. ábra.

Az egy, $n$ hosszú ciklus alatti átlagos emelkedés 1, azaz ha a grafikon egy pontja $(x, y)$, akkor a grafikon áthalad a $(x + n, y + 1)$ ponton is. Egy $\frac{1}{n}$ meredekségű egyenesnek egy $n$ hosszú, nyílt ciklus alatt legfeljebb egy olyan pontja lehet, melynek koordinátái egészek. Bármelyik pontból indítva egy ilyen egyenest, akkor lesz az összes onnan induló részletösszeg pontosan akkor pozitív, ha a grafikon végig az egyenes felett halad. Alulról közelítve egy ilyen egyenest a grafikonhoz, csak az első érintési pont felel meg a feltételnek. Ezzel a lemma állítását beláttuk. □

Hogyan használhatjuk a lemmát a 4.5 tétel bizonyításához?

Ha a felfelé lépéseknek megfeleltetünk $-r$-et, míg a lefelé lépéseknek $+1$-et. Vegyünk egy olyan sorozatot, ami $n$ darab $-r$ számot és $rn$ darab $+1$-est tartalmaz. Ekkor az a kérdés, hogy hány olyan sorozat van, ahol az összes részletösszeg nem-pozitív. Ez nyilván ekvivalens az olyan sorozatokkal, ahol az összes részletösszeg nem-negatív (legyen ezek száma $S$). Vegyük most az olyan sorozatokat, amelyek $n$ darab $-r$-et és $rn+1$ darab $+1$-est tartalmaz. Ezek közül azoknak a száma, amelyek minden részletösszege pozitív, megegyezik $S$-sel. Ekkor a 4.7 lemma szerint ezek száma

$$\frac{1}{(r+1)n+1}\binom{(r+1)n+1}{n} = \frac{1}{rn+1}\binom{(r+1)n}{n}.$$

Ezzel a 4.6 következményt beláttuk. □

## 4.2. Általánosított Dyck-utak és fák

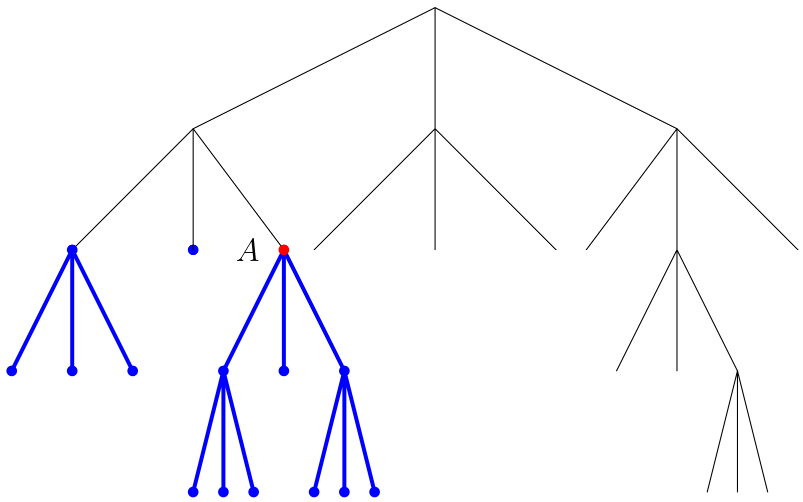
Mutatunk egy másik érdekes kombinatorikus értelmezését a $\left(\frac{1}{rn+1}\binom{(r+1)n}{n}\right)$ sorozatnak, a bizonyítás megtalálható itt: [2].

**4.8. Definíció.** Nevezzünk egy gyökeres, rendezett fát *$r$-ed rendű fának* akkor, ha minden belső (nem levél) csúcsának pontosan $(r+1)$ gyereke van. Jelölje a pontosan $n$ belső csúcsot tartalmazó fák halmazát $\mathcal{F}_n^{(r)}$.

**4.9. Állítás.** *Minden $n$-re és $r$-re létezik bijekció $\mathcal{F}_n^{(r)}$ és $\mathcal{V}_n^{(r)}$ között.*

*Bizonyítás.* Legyen $F$ egy tetszőleges $r$-rendű fa. Az $F$ fa csúcsain futassunk egy mélységi keresést (minden csúcsnál a legbaloldalibb, be nem járt élen megyünk tovább). Írjuk fel a csúcsokat olyan sorrendben (*"postordering"*), ahogy a mélységi keresés elhagyja őket. Az első csúcs kivételével minden levélnek feleltessünk meg egy $(1,1)$ lépést, míg minden belső csúcsnak egy $(1,-r)$ lépést. Azt szeretnénk belátni, hogy ezek a lépések egy $r$-ed rendű Dyck-utat alkotnak. Ehhez elég ellenőrizni, hogy minden elhagyott belső csúcs esetén, az addig tartó út az $x$ tengely felett van.

Egy belső csúcs elhagyásakor a már bejárt csúcsok $r$-ed rendű fákat feszítenek (ez akár lehet egyetlen levél is). A 4.2 ábrán az $A$-val jelölt csúcs elhagyásakor a már elhagyott csúcsok által feszített fákat kék színnel jelöltük.

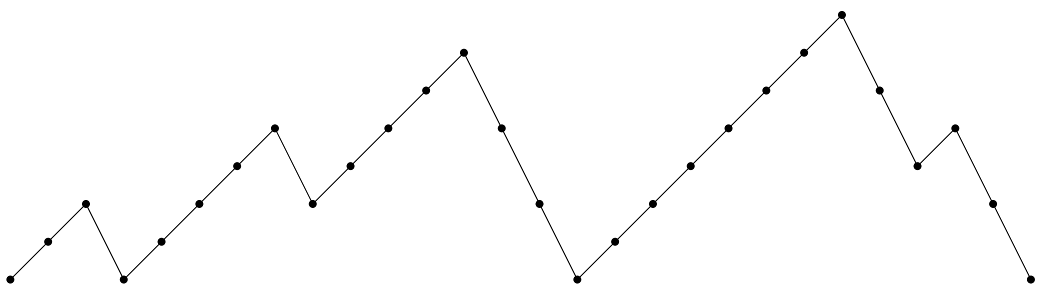



4.2. ábra. Egy másodrendű fa

Elég tehát ellenőriznünk, hogy $r$-ed rendű fák uniójában a levelek száma mindig nagyobb, mint a belső pontok számának $r$-szerese (az első levélnek nem feleltettünk meg felfelé lépést, ezért kell a szigorú egyenlőtlenség). Legyen egy fában a belső csúcsok száma $b$, míg a leveleké $l$. Ekkor kétféleképpen megszámolva az éleket, kaphatjuk, hogy

$$\frac{(r+2)(b-1)+(r+1)+l}{2} = l+b-1.$$

Innen egyszerű számolással adódik, hogy $l = rb+1$. Összegezve minden a $k$ darab fára, azt kapjuk, hogy $\sum_{i=1}^{k} l_i = r(\sum_{i=1}^{k} b_i) + k$. Ez pontosan az, amit szerettünk volna. Ezzel megadtunk egy $f$ leképezést, ami egy $r$-ed rendű fához $r$-ed rendű Dyck-utat rendel (a 4.3 ábrán láthatjuk $F$ fa $f$ szerinti képét). Szeretnénk belátni, hogy $f$ injektív. Ehhez használjuk a következő lemmát.



4.3. ábra. $f$ szerinti kép

**4.10. Lemma.** *Ismerjük egy $F$ rendezett fa csúcsainak $v_1, v_2, \ldots, v_n$ elhagyási (postordering) sorrendjét. Adott továbbá az $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fokszám sorozat, ahol $f_i$ a $v_i$ csúcs fokszáma. Ekkor $F$ egyértelműen meghatározható.*

*A 4.10 lemma bizonyítása.* Megadunk egy algoritmust, ami az elhagyási sorrendben visszafelé haladva, lépésenként felépíti $F$-et. Tudjuk, hogy $F$ gyökere $v_n$. Ismerjük $f_n$-t is, tehát tudjuk a $v_n$ gyerekei számát. Rajzoljuk meg $v_n$ gyerekeit. Az algoritmus során a már felépített (rész)gráfban nevezzük szabad csúcsnak azt a csúcsot, amely a mélységi bejárás során a beazonosítatlan csúcsok közül utoljára hagyunk el (ez most $v_n$ legjobboldali gyereke). Legyen ez $v_{n-1}$. Folytatva az algoritmus a soron következő $v_k$-t mindig az aktuális szabad csúccsal kell azonosítanunk, majd ezután egészítsük ki a gráfot a szabad csúcs gyerekeivel. Ezzel az algoritmussal egyértelműen felépítjük a gráfot. Ezzel a 4.10 lemma bizonyítását befejeztük. □

Az $f$ leképezés szerint egy fa képe egy Dyck-út. Mivel egy Dyck-út megad egy elhagyási sorrendet, és meghatározza a fokszámokat is (hiszen egy felfelé lépés levélnek, míg egy lefelé lépés belső pontnak felel meg), ezért $f$ a 4.10 lemma miatt injektív.

A bijekcióhoz be kell látnunk, hogy szürjektív is, ehhez elég megmutatnuk, hogy a 4.10 lemmában leírt algoritmus tetszőleges Dyck-út esetén végigfut, és felépít egy fát. Ezt egyszerűen végiggondolhatjuk. Ezzel a 4.9 állítás bizonyítását befejeztük. □

## 4.3. Generátorfüggvények

Egy érdekes feladat az általánosított Dyck-utak generátorfüggvényének a meghatározása (lásd [12], [4]). Ehhez szükségünk van a következőkre.

Jelölje $[x^n]f(x)$ az $f(x)$ függvény hatványsorában a $x^n$ együtthatóját.

**4.11. Definíció.** Jelölje $C[[x]]$ a formális hatványsorok gyűrűjét, azaz

$$C[[x]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n | a_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Jelölje $C((x))$ a formális Laurent-sorok gyűrűjét, azaz

$$C((x)) = \left\{ \sum_{n \geq N} a_n x^n | N \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

**4.12. Lemma.** *Ha tetszőleges $f(x) \in x\mathbb{C}[[x]]$ hatványsorra $[x^1]f(x) \neq 0$, akkor*

$$[x^{-1}]f(x)^i f'(x) = \begin{cases} 1 & ha \quad i = -1 \\ 0 & ha \quad i \neq -1 \end{cases}$$

*Bizonyítás.* Ha $i \neq -1$, akkor $f(x)^i f'(x) = \frac{1}{i+1}\left(f(x)^{i+1}\right)'$. Viszont egy Laurent-sor deriváltjában az $x^{-1}$ együtthatója mindig 0. Ezzel ezt az esetet beláttuk.

Legyen most $i = -1$. Legyen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Ekkor

$$\frac{f(x)'}{f(x)} = \frac{a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots}{a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots} = \frac{a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots}{a_1x} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2a_2}{a_1}x + \frac{3a_3}{a_1}x^2 + \dots\right)} =$$
$$= \left(\frac{1}{x} + \frac{2a_2}{a_1} + \frac{3a_3}{a_1}x + \dots\right)\left(1 - x\left(\frac{2a_2}{a_1} + \frac{3a_3}{a_1}x + \dots\right) + \dots\right). \quad (4.1)$$

Ezzel az állítást beláttuk. □

A következő tételhez a [15] jegyzet gondolatmenetét használjuk.

**4.13. Tétel** (Lagrange inverz)**.** *Legyen $f(x), g(x) \in xC[[x]]$, és $x = f(g(x))$. Ekkor*

$$[x^n]g(x) = \frac{1}{n}[x^{-1}]\frac{1}{f(x)^n}.$$

*Bizonyítás.* Legyen $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i x^i$. Mivel $g^{-1}(x) = f(x)$, így $x = g(f(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i f(x)^i$. Deriválva mindkét oldalt kapjuk, hogy

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} i g_i f(x)^{i-1} f(x)'.$$

Osszuk el mindkét oldalt $f(x)^n$-nel, ekkor

$$\frac{1}{f(x)^n} = \sum_{i=1}^{\infty} i g_i f(x)^{i-n-1} f(x)'.$$

Alakítsuk át a jobboldali összeget

$$\frac{1}{f(x)^n} = \sum_{k=2}^{n} (n+1-k) g_{n+1-k} f(x)^{-k} f(x)' + n g_n \frac{f(x)'}{f(x)} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+n+1) g_{k+n+1} f(x)^k f(x)'. \quad (4.2)$$

A (4.2) azonosság jobboldalára alkalmazhatjuk a 4.12 lemmát, így meghatározhatjuk $[x^{-1}]\frac{1}{f(x)^n}$ értékét, ami $ng_n$. Ezzel a tétel állítását beláttuk.

□

**4.14. Következmény.** *Ha $F(x) \in C[[x]]$, $G(x) \in xC[[x]]$, és teljesül, hogy $G(x) = xF(G(x))$, ekkor*

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} [t^{n-1}] F(t)^n \right) x^n.$$

*Bizonyítás.* Az $f(x) = x/F(x)$, illetve a $g(x) = G(x)$ helyettesítés után alkalmazhatjuk a 4.13 tételt, így kapjuk, hogy

$$[x^n]G(x) = \frac{1}{n}[x^{n-1}]F(x)^n.$$

Ezt már csak összegeznünk kell $x^n$ szerint. □

Most térjünk át az általánosított Dyck-utak vizsgálatára.

**4.15. Definíció.** Legyen egy $v$ egy olyan út, amely során felfelé $(1,1)$, illetve lefelé $(1,-r)$ léphetünk. A $(0,0)$ pontból indulunk és a $(n+1,h)$ pontba érkezünk, miközben egyszer sem érintjük az $x$ tengelyt. Legyen az ilyen utak halmaza $\mathcal{V}_{n,h}^{(r)}$. Legyen $v_n^{r,h} = |\mathcal{V}_{n,h}^{(r)}|$. Rögzített $h$-ra és $r$-re, legyen a $\left(v_n^{r,h}\right)$ sorozathoz tartozó generátorfüggvény $F_{r,h}(x)$.

**4.16. Lemma.** *Egy tetszőleges $\mathcal{V}_{n,h}^{(r)}$-beli út felbontható $h$ darab, diszjunkt $\mathcal{V}_{n,1}^{(r)}$-beli útra.*

*Bizonyítás.* A felbontást mohón is előállíthatjuk. Legyen az első részút végpontja a legutolsó olyan csúcs, amely 1 magasságban van. Az eddig tartó részút nyilván $\mathcal{V}_{n,1}^{(r)}$-beli lesz. A következő rész legyen az utolsó 2 magasságig tartó út, és így tovább. Ez az algoritmus megadja a kívánt felbontást (kihasználtuk, hogy az útnak 1-től $h$-ig minden magasságban van csúcsa). □

4.17. *Megjegyzés.* $|\mathcal{V}_{n,1}^{(r)}| = |\mathcal{V}_n^{(r)}|$, hiszen egy $\mathcal{V}_{n,1}^{(r)}$-beli út első lépését elhagyva egy $\mathcal{V}_n^{(r)}$-beli utat kapunk. Legyen a $\left(\mathcal{V}_n^{(r)}\right)$ sorozat generátorfüggvénye $F_r(x) = F_{r,1}(x)$.

Vegyünk egy tetszőleges $v \in \mathcal{V}_{n,h}^{(r)}$ utat, minden felfelé lépésnek adjunk 1-es súlyt, míg minden lefelé lépésnek $x$-et. Legyen egy $v$ út $\omega(v)$ súlya, a lépések súlyainak szorzata. Ekkor nyilván teljesül, hogy

$$F_{r,h}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v \in \mathcal{V}_{n,h}^{(r)}} \omega(v).$$

Ezt az összefüggést és a 4.16 lemmát összevetve adódik, hogy $F_{r,h}(x) = (F_{r,1}(x))^h = (F_r(x))^h$.

Most vegyünk egy tetszőleges $\mathcal{V}_{n,1}^{(r)}$-beli utat ($n > 1$), és hagyjuk el az utolsó lépését (ez nyilván lefelé lépés). Ekkor a maradék egy $\mathcal{V}_{n-1,r+1}^{(r)}$-beli út. Ezért teljesül a következő azonosság (felhasználjuk, hogy $F_r(x) = F_{r,1}(x)$):

$$F_r(x) = 1 + x\left(F_r(x)\right)^{r+1}. \tag{4.3}$$

Az egyenlet megoldását explicit módon nehéz meghatározni, de alkalmazhatjuk a 4.13 tételt.

Ehhez vezessük be a $g_x(z) = F_r(x)$ és $f_x(z) = 1 + xz^{r+1}$ paraméteres függvényeket. Majd oldjuk meg az alábbi függvényegyenleteket minden $x$-re:

$$g_x(z) = zf_x(g_x(z)).$$

A 4.14 következmény szerint minden $x$-re teljesül, hogy

$$F_r(x) = g_x(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n}[t^{n-1}]f_x(t)^n\right)z^n.$$

Helyettesítsünk be $z = 1$-et, akkor kapjuk a következőt:

$$F_r(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}[t^{n-1}]f_x(t)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}[t^{n-1}](1+xt^{r+1})^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}[t^{n-1}]\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k t^{k(r+1)}\right).$$

A nemnulla tagok $n = k(r+1)+1$ esetben vannak, ezért írhatjuk, hogy

$$F_r(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k(r+1)+1}\binom{k(r+1)+1}{k}x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{kr+1}\binom{k(r+1)}{k}x^k\right).$$

Ezért $x^k$ együtthatója $\frac{1}{kr+1}\binom{k(r+1)}{k}$, azaz

$$|\mathcal{V}_k^{(r)}| = \frac{1}{kr+1}\binom{k(r+1)}{k}.$$

Így most már generátorfüggvények segítségével is bebizonyítottuk a 4.6 következményt.

## 4.4. Általánosított Dyck-utak rekurziója

A következőkben tetszőleges $r$ pozitív számra belátjuk, hogy az $\left(\binom{(r+1)n}{n}\right)$ sorozat Euler-transzformáltja a $\left(\frac{1}{rn+1}\binom{(r+1)n}{n}\right)$ sorozat. Ezek a sorozatok, mint az az előző szakaszokban láttuk, különböző séták leszámlálásával is megadhatóak. Ezt prezízen az alábbi két képlet adja meg:

$$a_n^{(r)} = |\mathcal{A}_n^{(r)}| \quad \text{és} \quad d_n^{(r)} = |\mathcal{V}_{n+1}^{(r)}|.$$

Az $r = 3$ esetben a megfelelő két sorozat első néhány tagja:

| | $a_1^{(3)}$ | $a_2^{(3)}$ | $a_3^{(3)}$ | $a_4^{(3)}$ | $a_5^{(3)}$ | $a_6^{(3)}$ | $a_7^{(3)}$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 28 | 220 | 1820 | 15504 | 134596 | 1184040 | ... |
| 1 | 4 | 22 | 140 | 969 | 7084 | 53820 | 420732 | ... |
| $d_0^{(3)}$ | $d_1^{(3)}$ | $d_2^{(3)}$ | $d_3^{(3)}$ | $d_4^{(3)}$ | $d_5^{(3)}$ | $d_6^{(3)}$ | $d_7^{(3)}$ | ... |

Most már kimondhatjuk a fenti állítást megfogalmazó tételt.

**4.18. Tétel.** *Rögzítsünk egy $r > 0$ egész számot. Ekkor minden $n > 0$ esetén teljesül, hogy*

$$d_n^{(r)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} d_k^{(r)} a_{n-k}^{(r)},$$

*azaz $E[(a_n^{(r)})] = (d_n^{(r)})$.*

**Bizonyítás.**

*Bizonyítás.* Használjuk 3.6 bizonyításában bevezetett fogalmakat.

Legyen az $(r+1)n$ hosszú pontozott Dyck-utak halmaza $\mathcal{L}_n^{(r)}$. Mivel a felfelé lépéseket pontozzuk, ezért $|\mathcal{L}_{n+1}^{(r)}| = nd_n^{(r)})$. Definiáljuk hasonlóan az utak árnyékát is.

Továbbá vezessük be a $\mathcal{P}_n^{(r)}$ jelölést, ami az $(r+1)n$ hosszú Dyck-párok halmaza. Nyilván $|\mathcal{P}_n^{(r)}| = \sum_{k=1}^{n-1} |\mathcal{V}_k^{(r)}| \cdot |\mathcal{A}_{n-k}^{(r)}| = \sum_{l=0}^{n-2} d_l^{(r)} a_{n-l-1}^{(r)}$.

Hasonlóan elég belátnunk, hogy $|\mathcal{L}_{n+1}^{(r)}| = |\mathcal{P}_{n+1}^{(r)}|$.

A már megismert módon a $(v_m^{(r)}, t, v_{n+1-m}^{(r)})$ hármasokhoz fogunk $(r+1)(n+1)$ hosszú, pontozott Dyck-utakat rendelni ($v_m^{(r)} \in \mathcal{V}_m^{(r)}$, $v_{n+1-m}^{(r)} \in \mathcal{V}_{n+1-m}^{(r)}$). Erről a hozzárendelésről szintén a fenti tétel segítségével megmutathatjuk, hogy bijekció. Ami az előző bizonyításhoz képest különbség, hogy a $v_m^{(r)}$ úton a kitüntetett pontot $rn+1$ féleképpen választhatjuk ki (hiszen vagy egy lefelé lépés kezdőpontja, vagy pedig az utolsó pont).

Mivel a hármasok és a pontozott Dyck-utak között a hozzárendelés bijekció, ezért fel tudjuk írni az $|\mathcal{L}_{n+1}^{(r)}|$ értékét

$$|\mathcal{L}_{n+1}^{(r)}| = \sum_{m=1}^{n} |\mathcal{V}_m^{(r)}| \cdot (rm+1) \cdot |\mathcal{V}_{n+1-m}^{(r)}|.$$

Továbbalakítva megkapjuk, hogy

$$\sum_{m=1}^{n} |\mathcal{V}_m^{(r)}| \cdot (rm+1) \cdot |\mathcal{V}_{n+1-m}^{(r)}| = \sum_{m=1}^{n} \frac{|A_m|^{(r)}}{rm+1} \cdot (rm+1) \cdot |\mathcal{V}_{n+1-m}^{(r)}| = |\mathcal{P}_{n+1}^{(r)}|$$

Ezzel beláttuk, hogy rögzített $r$ esetén, minden $n$-re $|\mathcal{L}_{n+1}^{(r)}| = |\mathcal{P}_{n+1}^{(r)}|$. Ezzel a 4.18 tétel bizonyítását befejeztük.

□

**4.19. Következmény.** *Rögzített $r \geq 2$ egész esetén, minden $n$ pozitív számra teljesül, hogy*

$$n \mid \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\binom{rn}{n}.$$

*Bizonyítás.* Felhasználva a 4.18 eredményét, és a 2.6 tétel bizonyítása alapján, ez már triviális. □

## 4.5. Egy további lehetséges általánosítás

Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy a $\left(\binom{(r+s)n}{rn}\right)$ sorozat Euler-transzformáltja is egész sorozat-e. A tapasztalatok alapján ez igaz, sajnos egyelőre ennek az igazolása nem sikerült. Az alábbi táblázatban néhány paraméter esetén láthatjuk az Euler-transzformált sorozat értékeit.

| $a_n$ | | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d_n$ | $d_0$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ | $d_5$ | $d_6$ | $\dots$ |
| $\left(\binom{4n}{2n}\right)$ | | 6 | 70 | 924 | 12870 | 184756 | 2704156 | $\dots$ |
| $d_n$ | 1 | 6 | 53 | 554 | 6362 | 77580 | 986253 | $\dots$ |
| $\left(\binom{5n}{2n}\right)$ | | 10 | 210 | 5005 | 125970 | 3268760 | 86493225 | $\dots$ |
| $d_n$ | 1 | 10 | 155 | 2885 | 59355 | 1300727 | 29769570 | $\dots$ |
| $\left(\binom{7n}{2n}\right)$ | | 21 | 1001 | 54264 | 3108105 | 183579396 | 11058116888 | $\dots$ |
| $d_n$ | 1 | 21 | 721 | 30142 | 1400588 | 69511687 | 3608597902 | $\dots$ |
| $\left(\binom{7n}{3n}\right)$ | | 35 | 3003 | 293930 | 30421755 | 3247943160 | 353697121050 | $\dots$ |
| $d_n$ | 1 | 35 | 2114 | 157675 | 13144068 | 1173522602 | 109762843624 | $\dots$ |

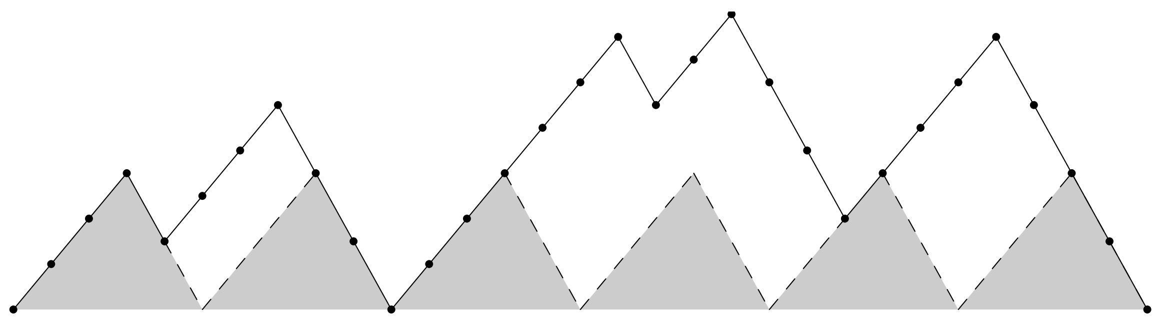
Mit tudunk az alsó sorban lévő sorokról? A természetes általánosítás az lenne, hogy az olyan Dyck-utakat számolják, ahol a két megengedett lépés az $(1, r)$, illetve az $(1, -s)$. Ez nem igaz. A felső félsíkban haladó $(r, s)$ paraméterű Dyck-utak száma nem egyezik meg ezekkel a sorozatokkal.

Viszont a felső félsíkban haladás feltételein változtatva, már kaphatunk olyan sorozatokat, amelyek a kívánt sorozatokat adják.

**4.20. Definíció.** Adott $r$ és $s$ rögzített számok. Nevezzük $(r, s)$ Dyck-útnak egy utat, amely során az $(1, r)$, illetve az $(1, -s)$ lépéseket használjuk. Illetve az út sosem megy a $T_{r,s}$ töröttvonal alá. $T_{r,s}$ csúcsai rendre

$$(0,0), (s, rs), (r+s, 0), (r+2s, rs), (2r+2s, 0), (2r+3s, rs), (3r+3s, 0), \dots.$$

Egy ilyen sorozat látható a 4.4 ábrán. Jelölje ezek halmazát $\mathcal{V}^{(r,s)}$



4.4. ábra. $(2, 3)$ Dyck-út

A sejtésünk szerint tehát a $\left(|\mathcal{V}^{(r,s)}|\right)$ sorozat lesz a $\left(\binom{(r+s)n}{rn}\right)$ sorozat Euler-transzformáltja.

Ebben megerősíthet minket az, hogy $s = 1$ esetén visszakapjuk a már megismert sorozatokat, azaz $\mathcal{V}^{(r,1)} = \mathcal{V}^{(r)}$.

Az alábbi 4.5 ábrán látható a $\left(|\mathcal{V}^{(2,3)}|\right)$ sorozat első néhány tagjának a kiszámolása.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | |1| | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |1| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | |10| | | | | | | |
| | | | | | | | | | |1| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |9| | | | | | | | |
| | | | | | | | | |1| | | | |55| | | | | | |
| | | | | | | | | | | |8| | | | | | | | | |
| | | | | | | | |1| | | | |45| | | | | | | |
| | | | | | | | | | |7| | | | |210| | | | | |
| | | | | | | |1| | | | |36| | | | | | | | |
| | | | | | | | | |6| | | | |155| | | | | | |
| | | | | | |1| | | | |28| | | | |530| | | | |
| | | | | | | | |5| | | | |110| | | | | | | |
| | | | | |1| | | | |21| | | | |420| | | | | |
| | | | | | | |4| | | | |74| | | | |1470| | | |
| | | | |1| | | | |15| | | | |265| | | | | | |
| | | | | | |3| | | | |46| | | | |840| | | | |
| | | |1| | | | |10| | | | |155| | | | |2885| | |
| | | | | |2| | | | |25| | | | |420| | | | | |
| | |1| | | | |6| | | | |81| | | | |1415| | | |
| | | | |1| | | | |10| | | | |155| | | | |2885| |
| |1| | | | |3| | | | |35| | | | |575| | | | |
|1| | | | |**1**| | | | |**10**| | | | |**155**| | | | |**2885**|

4.5. ábra.

4.21. *Megjegyzés.* $2885 = 5 \times 577$, ahol 577 prím, ez mutatja, hogy itt nincs esélyünk a Chung-Feller tétel alkalmazására. A következő fejezetben mutatunk egy példát, ahol bár direktben nem alkalmazhatjuk a Chung-Feller tételt, egy hasonló állítás mégis segít a bizonyításban.

# 5. fejezet

# Schröder-utak

## 5.1. Kis és nagy Schröder-utak

**5.1. Definíció** (Delannoy-út)**.** Egy utat Delannoy-útnak hívunk, ha az út a $(0,0)$ pontból indul, és az $(2n,0)$ pontba érkezik. Az út során a felfelé $(1,1)$, a lefelé $(1,-1)$, illetve az előre $(2,0)$ lépések megengedettek. Jelöljük az $2n$ hosszú utak halmazát $\mathcal{SA}_n$-el.

Legyen $\mathcal{SA}_{n,l}$ az $\mathcal{SA}_n$-beli utak egy olyan részhalmaza, amely utak során pontosan $n-l$ darab előre lépést teszünk. Elemi kombinatorikai megfontolások segítségével kaphatjuk azt, hogy

$$|\mathcal{SA}_{n,l}| = \binom{n+l}{2l}\binom{2l}{l}. \tag{5.1}$$

Innen

$$|\mathcal{SA}_n| = \sum_{l=0}^{n}\binom{n+l}{2l}\binom{2l}{l}. \tag{5.2}$$

**5.2. Definíció** (Nagy Schröder-út)**.** Jelölje $\mathcal{SV}_n$ az olyan $2n$ hosszú Delannoy-utak halmazát, amelyek minden lépése a felső félsíkban halad. Ezeket az utakat nevezzük nagy Shröder-utaknak.

Ezekkel a sorozatokkal kapcsolatban is kimondhatunk egy Chung-Feller típusú tételt. Az 5.3 tétel és az 5.6 állítás bizonyításainál követjük [12]-t, és [9]-t.

**5.3. Tétel** (Chung-Feller III.)**.** *Legyen $l$ egy rögzített természetes szám. Jelölje $\mathcal{SA}_{n,l,k}$ az olyan $2n$ hosszú utakat, amelyekben $n-l$ darab előre lépést teszünk. Illetve a lefelé lépések száma a felső félsíkban $k$. Tetszőleges $k$-ra $(0 \leq k \leq n)$ teljesül, hogy*

$$|\mathcal{SA}_{n,l,k}| = \frac{1}{l+1} \cdot |\mathcal{SA}_{n,l}| = \frac{1}{l+1}\binom{n+l}{2l}\binom{2l}{l}. \tag{5.3}$$

*Speciálisan* $|\mathcal{SV}_{n,l}| = |\mathcal{SA}_{n,l,l}| = \frac{1}{l+1}\binom{n+l}{2l}\binom{2l}{l}$.

*Bizonyítás.* Rögzítsük az $n-l$ előre lépés helyzetét. Ekkor a 3.5 tétel bizonyítása szerint, ezeket az utakat $\frac{2n-2(n-l)}{2}+1 = l+1$ darab ekvivalencia-osztályba sorolhatjuk, a felső félsíkban történő lefelé lépések száma alapján. Két különböző helyzetben rögzített előre lépésekhez nyilván nem tartozhat ugyanaz az út. Így az összes $\mathcal{SV}_{n,l,k}$-beli út $l+1$ darab ekvivalencia-osztályra bontható (a rögzített helyzetű előre lépések által meghatározott osztályok diszjunkt uniójaként). Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

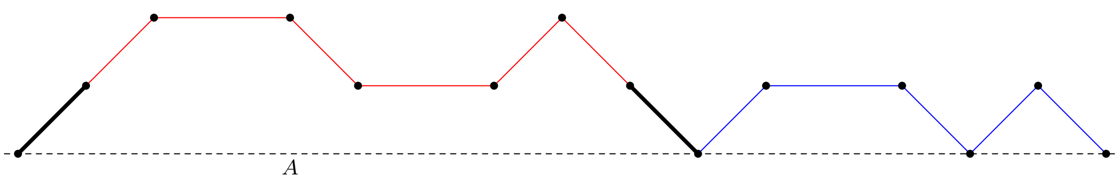
**5.4. Következmény.** *Az előző tétel szerint, a következő formula megadja a nagy Schröder utak számát:*

$$|\mathcal{SV}_n| = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l+1}\binom{n+l}{2l}\binom{2l}{l}. \tag{5.4}$$

**5.5. Definíció** (Kis Schröder-út)**.** Jelölje $\overline{\mathcal{SV}}_n$ az olyan $2n$ hosszú nagy Schröder-utak halmazát, amelyekben nincs előre lépés az $x$ tengelyen. Ezeket az utakat kis Schröder-utaknak nevezzük.

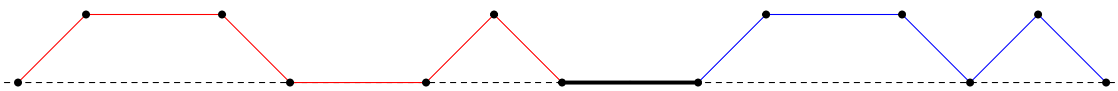
**5.6. Állítás.** *Ha $n > 0$ tetszőleges egész, akkor* $|\mathcal{SV}_n| = |2 \cdot \overline{\mathcal{SV}}_n|$.

*Bizonyítás.* Az állítás bizonyításához megadunk egy bijekciót az olyan Schröder-utak között, amelyeknek van előre lépése az $x$ tengelyen, és azok között, amelyeknek nincsen. Ez nyilván elég az állítás igazolásához, jelöljük ezt a megkonstruálandó bijektív leképezést $f$-fel.




5.1. ábra. kis Schröder-út

Az 5.1 ábrán egy kis Schröder-út látható. Ennek $f$ általi képe a következőképpen határozható meg. Jelölje $A$ az út első, $x$ tengelyhez való visszatéréséig tartó részt. $A$ egy felfelé lépéssel kezdődik és egy lefelé lépéssel végződik (ezek az ábrán feketével vannak jelölve), hagyjuk el ezeket, és a megmaradt rész legyen az $f$ általi kép kezdőszelete (az ábrán pirossal jelölt rész). Majd folytassuk az utat egy előre lépéssel, végül a kis Schröder-út maradék részével fejezzük be. Az így kapott út látható az 5.2 ábrán.



5.2. ábra. $f$ általi kép

Ez az $f$ leképezés nyilván injektív. Másrészt természetes módon definiálva $f$ inverzét (Vegyük az utolsó előre lépést ...), az minden előre lépéses Scröder-utat injektív módon egy kis Schröder-útba képez. Ez már igazolja, hogy $f$ bijekció. Ezzel az állítást beláttuk. □

## 5.2. A kis Schröder-számok rekurziója

A következőkben belátjuk, hogy a Delannoy-számok sorozatának Euler-transzformáltja a kis Schröder-számok sorozata. Ezek a sorozatok, mint az az előző szakaszokban láttuk, különböző séták leszámlálásával is megadhatóak. Ezt prezízen az alábbi két képlet adja meg:

$$a_n = |\mathcal{SA}_n| \quad \text{és} \quad s_n = |\mathcal{SV}_{n+1}|.$$

A két sorozat első néhány tagja:

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 13 | 63 | 321 | 1683 | 8989 | 48639 | $\dots$ |
| 1 | 3 | 11 | 45 | 197 | 903 | 4279 | 20793 | $\dots$ |
| $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ | $s_7$ | $\dots$ |

Most már kimondhatjuk a fenti állítást megfogalmazó tételt.

**5.7. Tétel.** *Minden $n > 0$ esetén teljesül, hogy*

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k a_{n-k},$$

*azaz $E[(a_n)] = (s_n)$.*

*Bizonyítás.* A bizonyításhoz a nagy Schröder-utakat fogjuk használni. Az $l_{n,m} = (v_n, V_m)$ párt *pontozott Schröder-útnak* hívunk, ha $v_n \in \mathcal{SV}_n$ egy $2n$ hosszú nagy Schröder-út, és $V_m$ egy olyan felfelé vagy előre lépés kezdőpontja, ahol $m > 0$. Legyen $\mathcal{SL}_n$ a $2n$ hosszú pontozott Schröder-utak halmaza (nyilván $|\mathcal{SL}_{n+1}| = 2ns_n$).

Egy $l_{n,m} \in \mathcal{SL}_n$ út *árnyékának* egy olyan (maximális) $v_t \in \mathcal{SV}_t$ utat nevezünk, amely a $V_m$ csúcsból indul és $2t$ hosszú. Az árnyék maximálitása miatt a $v_t$ utolsó $U$ csúcsa után vagy lefelé lépés következik, vagy $U = V_{2n}$. Mivel $V_m$ minden esetben egy felfelé vagy előre lépés kezdőpontja, ezért az árnyék soha nem lehet üres, továbbá nem lehet az egész út sem az árnyék, mert $V_m$ nem lehet egyenlő $V_0$-lal.

Megint azt próbáljuk meg belátni, hogy a pontozott kis Schröder-utak száma megegyezik az útpárok számával. Ehhez nevezzünk egy $p_{n,k} = (v_k, a_{n-k})$ párt Schröder-párnak, ha $1 \le k < n$, $v_k \in \mathcal{SV}_k$, és $a_{n-k} \in \mathcal{SA}_{n-k}$. Az útpárok száma nyilván $\sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot |\mathcal{SV}_k| \cdot |\mathcal{SA}_{n-k}| = 2 \cdot \sum_{l=0}^{n-2} s_l a_{n-l-1}$. Jelölje $\mathcal{SP}_n$ a $2n$ hosszú Schröder-párok halmazát. Nyilván elég belátnunk, hogy $|\mathcal{SL}_{n+1}| = |\mathcal{SP}_{n+1}|$.

Megint $(v_m, t, v_{n+1-m})$ hármasokhoz ($v_m \in \mathcal{SV}_m, v_{n+1-m} \in \mathcal{SV}_{n+1-m}$) szeretnénk $\mathcal{SL}_{n+1}$-beli utat rendelni a már megismert módon. Tehát a $v_m$ út egy olyan $V_t$ csúcsánál szeretnénk beszúrni egy $v_{n+1-m}$ utat, ami egy lefelé lépés kezdőpontja, vagy pedig $V_t = V_{2m}$. Ha a $v_m$ útban $m - l$ darab előre lépés van, akkor erre $l + 1$ lehetőségünk van.

A 3.6 tétel bizonyításához hasonlóan itt is megmutathatjuk, hogy ez a hozzárendelés bijekció. Elég tehát megszámolnunk a lehetséges hármasokat:

$$\mathcal{SL}_{n+1} = \sum_{m=1}^{n} \left( \sum_{l=0}^{m} |\mathcal{SV}_{m,l}| \cdot (l+1) \right) \cdot |\mathcal{SV}_{n+1-m}| = \sum_{m=1}^{n} \left( \sum_{l=0}^{m} \frac{|\mathcal{SA}_{m,l}|}{l+1} \cdot (l+1) \right) \cdot |\mathcal{SV}_{n+1-m}| \tag{5.5}$$

Itt a $\mathcal{SV}_m$ halmazt szétbontottuk az előre lépések száma szerint, majd használtuk az 5.3 tételt. Folytassuk az átalakítást:

$$\mathcal{SL}_{n+1} = \sum_{m=1}^{n} \left( \sum_{l=0}^{m} |\mathcal{SA}_{m,l}| \right) \cdot |\mathcal{SV}_{n+1-m}| = \sum_{m=1}^{n} |\mathcal{SA}_m| \cdot |\mathcal{SV}_{n+1-m}| = \mathcal{SP}_{n+1} \quad (5.6)$$

Ezzel befejeztük az 5.7 tétel bizonyítását. □

## 5.3. A nagy Schröder-számok rekurziója

Jelölje $S_n = |\mathcal{SV}_n|$ a nagy Schröder-utak számát (legyen $S_0 = 1$).

**5.8. Lemma.** *Minden $n \geq 1$ egész számra teljesül az alábbi azonosság:*

$$S_n = S_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} S_k S_{n-1-k}. \quad (5.7)$$

*Bizonyítás.* Legyen $SV \in \mathcal{SV}_n$ tetszőleges nagy Schröder-út. Két esetet különböztetünk meg.

Ha $SV$ egy előre lépéssel kezdődik, akkor az út további része $\mathcal{SV}_{n-1}$-beli. Az ilyen utak száma $S_{n-1}$.

Ha $SV$ egy felfelé lépéssel kezdődik, akkor legyen $(2k+2, 0)$ az út első visszatérése az $x$ tengelyre ($1 \leq k \leq n-1$). A $(2k+2, 0)$-ba visszatérő utak száma $S_k S_{n-1-k}$, hiszen az első visszatérésig az $(1, 0)$ pont és az $(2k+1, 0)$ pont közti út $\mathcal{SV}_k$-beli, míg a $(2k+2, 0)$ és $(2n, 0)$ közti út $\mathcal{SV}_{n-1-k}$-beli. Tehát ha $SV$ felfelé lépéssel kezdődik, akkor az utak száma $\sum_{k=0}^{n-1} S_k S_{n-1-k}$.

Ezzel a lemma állítását beláttuk. □

Legyen $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$. Alakítsuk át a függvényt az alábbi módon (felhasználva az (5.7) azonosságot)

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( S_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} S_k S_{n-1-k} \right) x^n =$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} S_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} S_k S_{n-1-k} x^n = 1 + xS(x) + xS(x)^2. \quad (5.8)$$

Megoldva a másodfokú egyenletet, megkapjuk, hogy

$$S(x) = \frac{1 - x - \sqrt{x^2 - 6x + 1}}{2x}. \quad (5.9)$$

A másik lehetséges gyök nem adja vissza a sorozat tagjait.

Határozzuk meg a Delannoy-sorozat generátorfüggvényét is. Használjuk az előző bizonyítás ötletét, bontsuk szét a Delannoy-utakat a kezdő lépésük, és az első, $x$ tengelyre való visszatérésük szerint. Így a következő azonosságot nyerhetjük:

$$a_n = a_{n-1} + 2\sum_{k=0}^{n-1} S_k a_{n-1-k}. \tag{5.10}$$

Az (5.10) azonosságot használva kapjuk, hogy

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{n-1} + 2\sum_{k=0}^{n-1} a_k S_{n-1-k}\right)x^n =$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} a_k S_{n-1-k}x^n = 1 + xA(x) + 2xA(x)S(x). \tag{5.11}$$

Az elsőfokú egyenletet megoldva, megkapjuk $A(x)$ értékét:

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 1}}.$$

A következőkben belátjuk, hogy a Delannoy-számok (átindexelt) sorozatának Euler-transzformáltja a nagy Schröder-számok sorozata.

Legyen $(a'_n)$ a Delannoy-sorozat eltoltja, azaz minden $n > 0$-ra, legyen

$$a'_n = a_{n-1} = |\mathcal{SA}_{n-1}|$$

Továbbá jelölje $(s'_n)$ a nagy Schröder-sorozat egy eltoltját, ahol $S'_0 = 1$, és $n > 0$-ra

$$S'_n = S_{n-1} = |\mathcal{SV}_{n-1}|.$$

A két sorozat első néhány tagja:

| | $a'_1$ | $a'_2$ | $a'_3$ | $a'_4$ | $a'_5$ | $a'_6$ | $a'_7$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | 13 | 63 | 321 | 1683 | 8989 | ... |
| 1 | 1 | 2 | 6 | 22 | 90 | 394 | 1806 | ... |
| $S'_0$ | $S'_1$ | $S'_2$ | $S'_3$ | $S'_4$ | $S'_5$ | $S'_6$ | $S'_7$ | ... |

Most már kimondhatjuk a fenti állítást megfogalmazó tételt.

**5.9. Tétel.** *Minden $n > 0$ esetén teljesül, hogy*

$$S'_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S'_k a'_{n-k},$$

*azaz* $E[(a'_n)] = (S'_n)$.

*Bizonyítás.* A 2.3 tétel bizonyítása szerint most már elég ellenőriznünk, hogy a két generátorfüggvény teljesíti a (2.2) azonosságot. A tételben szereplő két generátorfüggvény:

$$S'(x) = 1 + xS(x) = 1 + x\frac{1 - x - \sqrt{x^2 - 6x + 1}}{2x}$$
$$A'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a'_i z^{i-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 1}}.$$

Most már elég ellenőriznünk, hogy

$$\exp\left(\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 1}} \mathrm{d}x\right) = \frac{3 - x - \sqrt{x^2 - 6x + 1}}{2}.$$

Ezt pedig könnyen végigszámolhatjuk.

□

Ezzel megmutattuk, hogy a Delannoy-számok sorozata $(3, 13, 63, 321, \ldots)$, és az átindexelt Delannoy-sorozat (azaz a nulladik tagtól kezdődő sorozat, $1, 3, 13, 63, 321, \ldots$) is olyan sorozatok, amelyek Euler-transzformáltja egész sorozatot ad eredményül. Ennek mélyebb okai nem világosak.

Megjegyezzük, hogy a Delannoy-számok definiálhatók a $(ax^2 + bx + c)^n$ polinom $x^n$ tagjának együtthatójával is, ha $a = 1, b = 3$ és $c = 2$ (ennek a bizonyítása megtalálható például itt [6]). Tetszőleges $a, b, c$ értékek esetén is igaz lesz, hogy a sorozat Euler-transzformáltja egész lesz (szintén [6]).

# Irodalomjegyzék

[1] OEIS Foundation Inc. (2013), *The on-line encyclopedia of integer sequences*, , published electronically at http://oeis.org, 2013.

[2] J.-C. Aval, *Multivariate fuss-catalan numbers*, Discrete Mathematics **308** (2008), 4660–4669.

[3] C. C. Cadogan, *The Möbius Function and Connected graphs*, Journal of Combinatorial Theory **11** (1971), 193–200.

[4] N. T. Cameron, *Random walks and generalized riordan group techniques*, Ph.D. thesis, Howard University, May 2002.

[5] Young-Ming Chen, *The Chung-Feller theorem revisited*, Discrete Mathematics **308** (2008), no. 7, 1328 – 1329.

[6] P. Csikvári, *Partíciós rekurzió*, TDK dolgozat (2003).

[7] N. Dershowitz and S. Zaks, *The cycle lemma and some applications*, Europ. J. Combinatorics **11** (1990), 35–40.

[8] S.-P. Eu, T.-S. Fu, and Y.-N. Yeh, *Refined Chung-Feller theorems for lattice paths*, J. Comb. Theory, Ser. A **112** (2005), 143–162.

[9] M. Gessel, *Schröder numbers, large and small*, 2nd Canadian Discrete and Algorithmic Mathematics Conference, CRM, Canada (2009).

[10] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik, *Concrete mathematics: A foundation for computer science*, 2nd ed., Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1994.

[11] F. Harary, *The number of linear, directed, rooted and connected graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. **78 (2)** (1955), 445–463.

[12] A. Huq, *Generalized Chung-Feller Theorems for Lattice Paths*, Ph.D. thesis, Brandeis University, Aug 2009.

[13] S.-C. Liu, Y. Wang, and Y.-N. Yeh, *Chung - Feller property in view of generating functions*, The Electronic Journal of Combinatorics **18** (2011), P104.

[14] L. Lovász, *Kombinatorikai problémák és feladatok*, Typotex Kiadó, 1999.

[15] P. Magyar, *Lagrange inversion formula*, 2012, `http://www.math.msu.edu/~magyar/Math880/Lagrange.pdf` [2013. május 31.].

[16] E. A. Wolfhagen, *An Investigation of the Chung-Feller Theorem*, ArXiv Mathematics e-prints (2004).