Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Takács Balázs
Matematikus MSc.

Topologikus algebrák

Szakdolgozat

Témavezető: Kristóf János, egyetemi docens
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2014.

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék **3**

1. Bevezetés **4**

1.1. A dolgozatról . . . 4

1.2. Definíciók, jelölések . . . 5

2. Topologikus algebrák **7**

2.1. Környezetbázisok jellemzése topologikus algebrákban . . . 7

2.2. Projektíven előállított topologikus algebrák . . . 11

2.3. Teljes topologikus vektorterek és algebrák . . . 12

3. Lokálisan m-konvex algebrák **16**

3.1. m-konvex halmazok és m-hordók . . . 16

3.2. Projektíven előállított lokálisan m-konvex topológiák . . . 20

3.3. $\mathfrak{S}$-topológiák lokális m-konvexitása . . . 22

3.4. Legnagyobb m-topológiák és legnagyobb lokálisan m-konvex topológiák . . . 26

4. Spektrum topologikus algebrákban **33**

4.1. Elem spektruma algebrákban, kvázireguláris elemek, rezolvens függvény . . . 33

4.2. Folytonos inverzű algebrák . . . 35

4.3. Q-algebrák és Waelbroeck-algebrák, általánosított spektrálsugár . . . 38

5. Projektív limesz algebrák **43**

5.1. Topologikus algebrák projektív limesze . . . 43

5.2. Teljes, szeparált, lokálisan m-konvex algebrák előállítása projektív limeszként: az Arens – Michael-felbontás . . . 45

5.3. Az Arens – Michael-felbontás következményei . . . 49

1. Bevezetés

1.1. A dolgozatról

A topologikus algebrák természetes általánosításai a normált algebráknak, ennek az általánosításnak a szükségességét pedig a következők indokolják:
- Léteznek olyan topologikus függvényalgebrák, amelyek topológiája nem normálható (például a disztribúcióelméletben használatos alapfüggvények algebrája a természetes induktív topológiával ellátva).
- Az ultraspektrális C^*-algebrák elméletében fontos szerepe van az olyan algebra feletti topológiák létezésének, amelyek kompatibilisek a műveletekkel és az involúcióval (az ilyen algebrákat topologikus *-algebráknak nevezzük).
- Az elmélet létrehozásával egy magasabb nézőpontból tekinthetünk a normált algebrákra.

A dolgozat fő forrásai a [11] és [10] könyvek. A jelölések [10] jelöléseit követik, és a dolgozat megértéséhez szükséges előismeretekre is csak ezen könyv 1-5. és 13-14. fejezeteiből van szükség, továbbá a funkcionálanalízis alapvető definícióira és tételeire (ezek megtalálhatóak [7] I. részében és [8] II. részében). A könnyebb olvashatóság kedvéért a dolgozatbeli bizonyításokban külső hivatkozások csak [10] könyvre történnek. A dolgozat fő koncepciója az, hogy a témakör alapvető tételeit, amelyek megtalálhatóak [11]-ben, ismertessük [10] tárgyalásmódjához igazodva.

A 2. fejezetben definiáljuk a topologikus algebrákat és a folytonos szorzású topologikus algebrákat, megvizsgáljuk, hogyan jellemezhető topologikus algebrában (illetve folytonos szorzású topologikus algebrában) a 0 egy környezetbázisa, szó lesz projektívan előállított topológiákról, és kiderül, hogy hasonló tulajdonságok teljesülnek rájuk, mint a topologikus vektorterek esetében. Ezek után teljes topologikus vektorterekről és algebrákról látunk be néhány tulajdonságot, amelyeknek majd az 5. fejezetben lesz jelentőségük. Az utóbbi alfejezet (2.3) azért jött létre, hogy ne kelljen hivatkozni az uniform terekre vonatkozó analóg állításokra [3]-ból, illetve, hogy ne legyen szükség ennek részletes tárgyalására sem. Így uniform terek és Cauchy-szűrők helyett a bizonyítandó állításokat megfogalmazzuk topologikus vektorterek és általánosított Cauchy-sorozatok esetére.

A 3. fejezetben először lokálisan multiplikatívan konvex (röviden: lokálisan m-konvex) algebrák alaptulajdonságait tekintjük át, bebizonyítjuk hogy egy topologikus algebra pontosan akkor lokálisan m-konvex, ha létezik olyan szubmultiplikatív félnorma-rendszer, amely az E topológiáját generálja. Ezek után $\mathfrak{S}$-topológiák lokális m-konvexitásával foglalkozunk, ami azért fontos, mert a segítségével számos nevezetes példát tudunk adni lokálisan m-konvex algebrákra. A fejezet végén bevezetjük az m-topológia fogalmát, és egy adott algebra feletti legnagyobb m-topológiák és legnagyobb lokálisan m-konvex topológiák tulajdonságait vizsgáljuk, valamint azt, hogy mi mondható ezen topológiák kapcsolatáról. Ebben az alfejezetben (3.4.) – egy lemma kivételével – saját eredmények találhatóak.

A 4. fejezet célja a normált algebrák spektrálelméletéből néhány nevezetes tétel (például elem spektrumának nemürəssége, a Gelfand – Mazur-tétel) általánosítása bizonyos típusú topologikus algebrákra. Ezenkívül bevezetjük az általánosított spektrálsugár fogalmát, és megvizsgáljuk, hogyan alkalmazható Q-algebrák jellemzésére, valamint annak bizonyítására, hogy Q-algebrában minden elem vesszős spektruma kompakt halmaz $\mathbb{K}$-ban.

Az 5. fejezetben egy struktúratételt bizonyítunk szeparált, lokálisan m-konvex algebrákra. Kiderül többek között az, hogy teljes, szeparált, lokálisan m-konvex algebra előáll Banach-algebrák projektív limeszeként. Mivel a projektív limesz ez esetben Banach-algebrák szoratának zárt részalgebrája, így az utóbbi egy igen erős állításnak bizonyul. A dolgozat zárásaként ennek látjuk be néhány következményét.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani Kristóf János Tanár Úrnak, aki a félév során készséggel állt a rendelkezésemre, mindig fordulhattam hozzá a problémáimmal. Azért is köszönet illeti, amiért előadásaival és elektronikus jegyzeteivel világossá tette számomra, hogyan érdemes hozzáállni a matematikához.

1.2. Definíciók, jelölések

-Ha E halmaz, akkor $\mathcal{P}(E)$ jelöli a hatványhalmazát, $\mathcal{P}_0(E)$ a véges részhalmazainak halmazát, $Card(E)$ pedig az E számosságát.
-Ha E halmaz, akkor egy $\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{P}(E)$ halmazt *rácsnak* nevezünk, ha $\mathfrak{R} \neq \emptyset$, minden $R \in \mathfrak{B}$-re $R \neq \emptyset$, és minden $R, R' \in \mathfrak{R}$ esetén létezik $S \in \mathfrak{R}$, hogy $S \subseteq R \cap R'$.
-Ha E és F halmazok, akkor az $E \to F$ függvények halmazát $\mathfrak{F}(E; F)$, illetve F^E jelöli.
-Ha H, K halmazok és $f, g : H \to K$ függvények és $a \in K$, akkor
$[f = a] := \{x \in H | f(x) = a\}$.
Hasonlóan definiálható $[f \neq a]$, $[f = g]$ és $K = \mathbb{R}$ esetén $[f \leq a]$, $[f < a]$, $[f \leq g]$, $[f < g]$.
-Ha $(E_i)_{i\in I}$ nemüres halmazok rendszere akkor $pr_i : \prod\limits_{i\in I} E_i \to E_i$ jelöli azt a függvényt, amelyre minden $t \in \prod\limits_{i\in I} E_i$, $t = (t_i)_{i\in I}$ esetén $pr_i(t) = t_i$.
-$\mathbb{R}_+$ jelöli a nemnegatív valós számok halmazát.
-$\mathbb{R}^+$ jelöli a pozitív valós számok halmazát.
-$\mathbb{K}$ jelöli a valós vagy a komplex számok halmazát.
-Legyen $(T, \mathfrak{T})$ topologikus tér. $V \subseteq T$ esetén $int(V)$ jelöli a V belsejét $\overline{V}$ a V lezártját. $x \in T$ esetén

$$\mathfrak{T}(x) := \{V \subseteq T \,|\, x \in int(V)\}$$

jelöli az x *környezeteinek halmazát.* A $\mathfrak{B}_x \subseteq \mathfrak{T}(x)$ halmazt az x *környezetbázisának* nevezzük, ha minden $V \in \mathfrak{T}(x)$ esetén létezik olyan $V' \in \mathfrak{B}_x$, hogy $V' \subseteq V$. A $\mathfrak{B}'_x \subseteq \mathfrak{T}(x)$ halmazt az x *környezet-szubbázisának nevezzük*, ha minden $V \in \mathfrak{T}(x)$ esetén létezik olyan $(V_i)_{i\in I}$ nemüres, véges rendszer $\mathfrak{B}'_x$-ben, hogy $\bigcap\limits_{i\in I} V_i \subseteq V$.
T-t *szeparáltnak* nevezzük, ha minden $x, y \in T$ és $x \neq y$ esetén létezik olyan $U, V \in \mathfrak{T}$, amelyre $x \in U$, $y \in V$ és $U \cap V = \emptyset$.
-Ha T halmaz, akkor a $\mathfrak{T} := \{\emptyset, T\}$ topológiát a T feletti *antidiszkrét topológiának* nevezzük.
-Ha T, T' topologikus terek, akkor a $T \to T'$ folytonos függvények halmazát $\mathcal{C}(T; T')$ jelöli.

-$\mathcal{E}_{\mathbb{K}}$ jelöli $\mathbb{K}$ euklideszi (standard) topológiáját
-Legyen (M, d) metrikus tér. Ha $x \in M$ és $r \in \mathbb{R}_+$, akkor

$$B_r(x; d) := \{x' \in M \,|\, d(x, x') < r\}\,,$$

$$\overline{B}_r(x; d) := \{x' \in M \,|\, d(x, x') \leq r\}\,,$$

továbbá $M = \mathbb{K}$ esetén

$$B_r(x; \mathbb{K}) := \{x' \in M \,|\, |x - x'| < r\}\,,$$

$$\overline{B}_r(x; \mathbb{K}) := \{x' \in M \,|\, |x - x'| \leq r\}\,.$$

- Legyen E topologikus vektortér $\mathbb{K}$ felett.
Azt mondjuk, hogy az $A \subseteq E$ halmaz *elnyeli* a $B \subseteq E$ halmazt, ha létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|\lambda| \geq \alpha$, akkor $B \subseteq \lambda.A$. Az $A \subseteq E$ halmazt *elnyelőnek* nevezzük, ha E minden egyelemű részhalmazát elnyeli. Az $A \subseteq E$ halmaz *kiegyensúlyozott*, ha minden $x \in A$ és minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|\lambda| \leq 1$, akkor $\lambda.x \in A$.
Ha $U \subseteq E$, akkor $conv(U)$ jelöli az U *konvex burkát*, azaz a legkisebb U-t tartalmazó konvex halmazt; továbbá $eq(U)$ jelöli az U *kiegyensúlyozott burkát*, azaz a legkisebb U-t tartalmazó kiegyensúlyozott halmazt. Könnyen igazolható, hogy

$$conv(U) = \{\sum_{i \in I} \alpha_i.x_i \,|\, (I \neq \emptyset) \wedge (card(I) < \infty) \wedge ((\forall i \in I) : ((x_i \in V) \wedge (\alpha_i \in [0, 1]))) \wedge$$

$$\wedge (\sum_{i \in I} \alpha_i = 1)\}\,,$$

$$eq(U) = \overline{B}_1(0; \mathbb{K}).U\ .$$

Továbbá

$$E^* := \{u \,|\, u : E \to \mathbb{K} \text{ lineáris funkcionál}\}$$

$$E' := \{u \in E^* \,|\, u \text{ folytonos az } E \text{ topológiája és } \mathcal{E}_{\mathbb{K}} \text{ szerint}\}\,.$$

-Ha E vektortér és p félnorma E felett, akkor legyen

$$\dot{p} : E/ker(p) \to \mathbb{R}^+;\ x + ker(p) \mapsto p(x)\,.$$

Könnyen igazolható, hogy $\dot{p}$ norma az $E/ker(p)$ faktortér felett.

2. Topologikus algebrák

2.1. Környezetbázisok jellemzése topologikus algebrákban

A továbbiakban *algebra* alatt mindig legalább kételemű (azaz nem nulladimenziós) asszociatív algebrát fogunk érteni, *vektortér* alatt pedig $\mathbb{K}$ feletti vektorteret.

2.1.1. Definíció. *Az $(E, \mathcal{T})$ párt **topologikus algebrának** nevezzük, ha E egy $\mathbb{K}$ feletti algebra, $\mathcal{T}$ lineáris topológia E felett, és minden $a \in E$ esetén az*

$$l_a : E \to E;\ x \mapsto ax\,,$$

$$r_a : E \to E;\ x \mapsto xa$$

leképezések folytonosak a $\mathcal{T}$ topológia szerint.

2.1.2. Definíció. *Az $(E, \mathcal{T})$ párt **folytonos szorzású topologikus algebrának** nevezzük, ha E egy $\mathbb{K}$ feletti algebra, $\mathcal{T}$ lineáris topológia E felett, és az*

$$E \times E \to E;\ (x, y) \mapsto xy$$

leképezés folytonos a $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ és $\mathcal{T}$ topológiák szerint.

A továbbiakban - ha ez nem vezet félreértésre - topologikus algebrára az alaphalmaz szimbólumával fogunk hivatkozni.

2.1.3. Tétel. *Legyen E egy $\mathbb{K}$ feletti algebra, és $\mathcal{T}$ olyan topológia E felett, amellyel az $(E, \mathcal{T})$ pár topologikus algebra és $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa $\mathcal{T}$ szerint. Ekkor $\mathfrak{B}$-re teljesülnek a következők:*
(AV_I) $\mathfrak{B}$ minden eleme elnyelő, és minden $V \in \mathfrak{B}$-hez létezik olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $eq(W) \subseteq V$.
(AV_{II}) Minden $V \in \mathfrak{B}$-hez és $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$-hoz létezik olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W \subseteq \lambda.V$.
(AV_{III}) Minden $V \in \mathfrak{B}$-hez létezik olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W + W \subseteq V$.
(AV_{IV}) Minden $V \in \mathfrak{B}$ és minden $a \in E$-hez létezik $W \in B$, hogy $aW \subseteq V$ és $Wa \subseteq V$.
Továbbá, ha $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ olyan rács, amelyre $(AV_I) - (AV_{IV})$ tulajdonságok teljesülnek, akkor létezik egyetlen olyan $\mathcal{T}$ topológia E felett, amellyel $(E, \mathcal{T})$ topologikus algebra, és amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $(E, \mathcal{T})$ topologikus algebra. Ekkor [10] 1.1.3. Tétele miatt (AV_I), (AV_{II}), (AV_{III}) tulajdonságok teljesülnek $\mathfrak{B}$-re. Legyen $V \in \mathfrak{B}$ és $a \in E$ rögzített. Mivel az $l_a : E \to E;\ x \mapsto ax$ leképezés a 0 pontban folytonos, ezért létezik olyan W' környezete a 0-nak $\mathcal{T}$ szerint, hogy $aW' \subseteq V$. Az $r_a : E \to E;\ x \mapsto xa$ leképezés is folytonos a 0 pontban, ezért létezik olyan W'' környezete a 0-nak $\mathcal{T}$ szerint, hogy $W''a \subseteq V$. Ekkor létezik olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W \subseteq W' \cap W''$, így W-re teljesül, hogy $aW \subseteq V$ és $Wa \subseteq V$, tehát (AV_{IV}) teljesül $\mathfrak{B}$-re.

Most tegyük fel, hogy $\mathfrak{B}$ olyan rács, amelynek minden V elemére $V \subseteq E$ és $(AV_I)-(AV_{IV})$ tulajdonságok teljesülnek rá. Ismét [10] 1.1.3. Tétele miatt létezik egyetlen olyan $\mathfrak{T}$ lineáris topológia E felett, amely szerint $\mathfrak{B}$ környezetbázisa a 0-nak. Azt kell még belátnunk, hogy minden $a \in E$ esetén a korábban definált l_a és r_a leképezések folytonosak a $\mathfrak{T}$ topológia szerint. (AV_{IV}) miatt az l_a és l_b lineáris leképezések folytonosak a 0 pontban, ezért [10] 1.3.3. Állítása miatt l_a és l_b folytonosak a $\mathfrak{T}$ topológia szerint. □

2.1.4. Tétel. *Legyen E egy $\mathbb{K}$ feletti algebra, és $\mathfrak{T}$ olyan topológia E felett, amellyel az $(E, \mathfrak{T})$ pár folytonos szorzású topologikus algebra és $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa $\mathfrak{T}$ szerint. Ekkor $\mathfrak{B}$-re teljesülnek a következők:*
(AV_I) $\mathfrak{B}$ minden eleme elnyelő, és minden $V \in \mathfrak{B}$-hez létezik olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $eq(W) \subseteq V$.
(AV_{II}) Minden $V \in \mathfrak{B}$-hez és $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$-hoz létezik olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W \subseteq \lambda.V$.
(AV_{III}) Minden $V \in \mathfrak{B}$-hez létezik olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W + W \subseteq V$.
(AV'_{IV}) Minden $V \in \mathfrak{B}$-hez létezik olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W \cdot W \subseteq V$.
Továbbá, ha $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(E)$ olyan rács, amelyre $(AV_I) - (AV'_{IV})$ tulajdonságok teljesülnek, akkor létezik egyetlen olyan $\mathfrak{T}$ topológia E felett, amellyel $(E, \mathfrak{T})$ folytonos szorzású topologikus algebra, és amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $(E, \mathfrak{T})$ folytonos szorzású topologikus algebra, és $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa $\mathfrak{T}$ szerint. Ekkor az előző tétel alapján (AV_I)-(AV_{III}) tulajdonságok teljesülnek $\mathfrak{B}$-re. Legyen most $V \in \mathfrak{B}$. Mivel az $E \times E \to E$; $(x, y) \mapsto xy$ leképezés folytonos, ezért létezik a 0-nak olyan W_1 és W_2 környezete, hogy $W_1 \cdot W_2 \subseteq V$. Ekkor létezik olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W \subseteq W_1 \cap W_2$, így W-re teljesül, hogy $W \cdot W \subseteq V$, tehát (AV'_{IV}) is igaz $\mathfrak{B}$-re.
Most tegyük fel, hogy $\mathfrak{B}$ olyan rács, amelynek minden V elemére $V \subseteq E$, és $(AV_I)-(AV'_{IV})$ tulajdonságok teljesülnek rá. Belátjuk, hogy ekkor az előző tétel (AV_{IV}) tulajdonsága is teljesül $\mathfrak{B}$-re. Ennek bizonyításához legyen $V \in \mathfrak{B}$ és $a \in E$, ekkor (AV'_{IV}) alapján létezik olyan $U' \in \mathfrak{B}$, amelyre $U' \cdot U' \subseteq V$ teljesül. Mivel minden $\mathfrak{B}$-beli halmaz elnyelő, ezért létezik $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, amelyre $\lambda.a \in U'$. (AV_{II}) alapján pedig létezik olyan $U \in \mathfrak{B}$, hogy $U \subseteq \lambda.U'$ teljesül. Ekkor

$$aU \subseteq a(\lambda.U') = \lambda.aU' \subseteq U'U' \subseteq V\,,$$

$$Ua \subseteq (\lambda.U')a = U'\lambda.a \subseteq U'U' \subseteq V\,,$$

azaz (AV_{IV}) teljesül $\mathfrak{B}$-re. Az előző tétel alapján létezik egyetlen olyan $\mathfrak{T}$ topológia E felett, amellyel az $(E, \mathfrak{T})$ pár topologikus algebra, és amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa. Azt kell még ellenőriznünk, hogy az $E \times E \to E$; $(x, y) \to xy$ leképezés folytonos $\mathfrak{T}$ szerint. Legyen $a, b \in E$, és $V \in \mathfrak{B}$. Azt kell belátnunk, hogy létezik olyan V_1,$V_2 \in \mathfrak{B}$, hogy $a' \in a + V_1$ és $b' \in b + V_2$ esetén $a'b' \in ab + V$. Legyen $W \in \mathfrak{B}$ olyan, hogy $W + W + W \subseteq V$ teljesüljön (ilyen W-t (AV_{III}) kétszeri alkalmazásával kaphatunk). Legyenek $W_1, W_2 \in \mathfrak{B}$ olyanok, hogy $aW_1 \subseteq W$ és $W_2 b \subseteq W$, illetve (AV'_{IV}) alapján legyen W_3 olyan, hogy $W_3 \cdot W_3 \subseteq W$ teljesüljön rá. Ekkor létezik olyan $V' \in \mathfrak{B}$, hogy

$V' \subseteq W_1 \cap W_2 \cap W_3$, így $V_1 := V'$ és $V_2 := V'$ választással, $a' \in a + V_1, b' \in b + V_2$ esetén

$$a'b' - ab = (a' - a)(b' - b) + (a' - a)b + a(b' - b) \in W + W + W \subseteq V. \square$$

Példa. 1.) Legyen E topologikus vektortér, és legyen $\mathcal{L}(E)$ az $E \to E$ folytonos, lineáris operátorok algebrája a pontonkénti összedás és a kompozíció műveletével. Jelölje $\mathcal{L}_s(E)$ az előbbi algebrát, ellátva a pontonkénti konvergencia topológiájával. Ekkor $\mathcal{L}_s(E)$ topologikus algebra lesz. Mivel a pontonkénti konvergencia topológiája speciális projektíven előállított topológia ($\mathfrak{S}$-topológia), ezért elég ellenőrizni, hogy minden $u \in \mathcal{L}_s(E)$ esetén az

$$l_u : \mathcal{L}_s(E) \to \mathcal{L}_s(E)\,;\ u' \mapsto u \circ u'\,,$$
$$r_u : \mathcal{L}_s(E) \to \mathcal{L}_s(E)\,;\ u' \mapsto u' \circ u$$

leképezések folytonosak a pontonkénti konvergencia topológiája szerint. Legyen $u \in \mathcal{L}_s(E)$, és $(u'_i)_{i\in I}$ olyan $\mathcal{L}(E)$-ben haladó általánosított sorozat, amely pontonként konvergál $u' \in \mathcal{L}(E)$-hez. Legyen $x \in E$ tetszőleges. Ekkor u folytonossága miatt $((u \circ u'_i)(x))_{i\in I}$ konvergál $(u \circ u')(x)$-hez. Továbbá $(u'_i \circ u)(x)$ konvergál $(u' \circ u)(x)$-hez (ehhez nincs szükségünk u folytonosságára). Tehát az általánosított sorozatokra vonatkozó átviteli elv miatt l_u és r_u folytonosak.
2.) Legyen $(E, (.|.))$ végtelen dimenziós, szeparábilis Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett, jelölje továbbra is $\mathcal{L}(E)$ az $E \to E$ folytonos lineáris operátorok algebráját a pontonkénti összeadás és a kompozíció műveletével. Minden $x, y \in E$ esetén legyen

$$p_{x,y} : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{R}_+;\ u \mapsto |(u(x)|y)|$$

Jelölje $\mathcal{T}$ a $(p_{x,y})_{(x,y)\in E\times E}$ félnorma-rendszer által generált lokálisan konvex topológiát ([10] 3.5.1. Definíció). Mivel

$$\mathfrak{B} := \{ \bigcap_{(x,y)\in J} [p_{x,y} < \varepsilon] \,|\, (J \in \mathcal{P}_0(E \times E) \wedge (\varepsilon \in [0, 1])\}$$

a 0-nak környezetbázisa $\mathcal{T}$ szerint, ezért egy $\mathcal{L}(E)$-ben haladó $(u_i)_{i\in I}$ általánosított pontosan akkor konvergál egy $u \in \mathcal{L}(E)$ elemhez $\mathcal{T}$ szerint, ha minden $x, y \in E$ esetén a $(p_{x,y}(u_i - u))_{i\in I}$ általánosított számsorozat 0-hoz konvergál $\mathbb{R}$-ben. Belátjuk, hogy $\mathcal{L}(E)$ a $\mathcal{T}$ topológiával ellátva topologikus algebra. Legyen $u, u' \in \mathcal{L}(E)$ és $(u'_i)_{i\in I}$ olyan $\mathcal{L}(E)$-ben haladó általánosított sorozat, amely konvergál u'-höz $\mathcal{T}$ szerint. Ekkor $x, y \in E$ esetén

$$\lim_{i,I} |((u \circ u'_i)(x) - (u \circ u')(x)|y)| = \lim_{i,I} |(u'_i(x) - u'(x)|u^*(y))| = 0\,,$$

$$\lim_{i,I} |((u'_i \circ u)(x) - (u' \circ u)(x)|y)| = \lim_{i,I} |(u'_i(u(x)) - u'(u(x))|y)| = 0\,,$$

tehát minden $u' \in \mathcal{L}(E)$ esetén az

$$l_u : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E);\ u' \mapsto u \circ u'\,,$$

$$r_u : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E);\ u' \mapsto u' \circ u$$

leképezések folytonosak $\mathcal{T}$ szerint, tehát $\mathcal{L}(E)$ a $\mathcal{T}$ topológiával ellátva topologikus algebra. Minden $x \in E$ esetén legyen

$$p'_x : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{R}_+;\ u \to ||u(x)||$$

Ekkor a pontonkénti konvergencia topológiáját a $(p'_x)_{x\in E}$ félnormarendszer generálja, és a Cauchy – Schwarz egyenlőtlenség alapján tetszőleges $\varepsilon \in [0,1]$ esetén

$$[p_x < \frac{\varepsilon}{||y||}] = \{u \in \mathcal{L}(E) \,|\, ||(u(x))|| < \frac{\varepsilon}{||y||}\} \subseteq \{u \in \mathcal{L}(E) \,|\, |(u(x), y)| < \varepsilon\} = [p_{x,y}(u) < \varepsilon]\,,$$

tehát ha $\mathcal{T}_s$ jelöli a pontonként konvergencia topologiáját $\mathcal{L}(E)$ felett, akkor $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_s$. Legyen $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortonormált bázissorozat E-ben, és

$$s : E \to E :\ x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} (x|e_{k-1})e_k\,.$$

Ekkor n szerinti teljes indukcióval kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re és $x \in E$-re

$$s^n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} (x|e_{k-n})e_k\,,$$

és s^n folytonos, mert norma nem-növelő. Legyen továbbá

$$t : E \to E;\ x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} (x|e_{k+1})e_k\,,$$

ekkor t lineáris és norma nem-növelő, tehát folytonos. Tetszőleges $x, y \in E$ esetén

$$(s(x)|y) = (\sum_{k=1}^{\infty} (x|e_{k-1})e_k| \sum_{k=0}^{\infty} (y|e_k)e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (x|e_{k-1})\overline{(y|e_k)} = \sum_{k=0}^{\infty} (x|e_k)\overline{(y|e_{k+1})} = (x|t(y))\,,$$

így az adjungált egyértelműségéből adódóan $t = s^*$. Továbbá n szerinti teljes indukcióval kapjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re és $x \in E$-re

$$(s^*)^n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x|e_{k+n})e_k\,.$$

Mivel $x \in E$ esetén $||x||^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |(x|e_k)|^2$, ezért a $((s^*)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontonként konvergál a 0 operátorhoz. Az előzőek alapján $((s^*)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{T}$ szerint is konvergál a 0 operátorhoz, és mivel minden $x, y \in E$ esetén $|((s^*)^n(x)|y)| = |(s^n(y)|x)|$, ezért $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ is konvergál a 0 operátorhoz $\mathcal{T}$ szerint, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$-re $(s^*)^n \circ s^n = id_E$, tehát $\mathcal{L}(E)$ a $\mathcal{T}$ topológiával ellátva olyan topologikus algebra, amely nem folytonos szorzású.

Megjegyzés. Ha E Hilbert-tér, akkor az előbbi példában előállított $\mathcal{L}(E)$ feletti $\mathcal{T}$ topológiát *gyenge operátortopológiának* nevezzük.

2.2. Projektíven előállított topologikus algebrák

2.2.1. Állítás. *Legyen E egy $\mathbb{K}$ feletti algebra, $(E_i)_{i\in I}$ topologikus algebrák rendszere, és $(u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$-re $u_i : E \to E_i$ algebra-morfizmus. Ha $\mathcal{T}$ jelöli az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított topológiát E felett, akkor E a $\mathcal{T}$ topológiával ellátva topologikus algebra. Továbbá, ha minden $i \in I$-re E_i folytonos szorzású topologikus algebra, akkor E a $\mathcal{T}$ topológiával ellátva folytonos szorzású topologikus algebra.*

Bizonyítás. [10] 1.4.1. Állítása miatt $\mathcal{T}$ lineáris topológia E felett. Azt kell még megmutatnunk, hogy minden $a \in E$ esetén az

$$l_{E,a} : E \to E;\ x \mapsto ax\ ,$$

$$r_{E,a} : E \to E;\ x \mapsto xa$$

leképezések folytonosak $\mathcal{T}$ szerint. Először is feltehető, hogy $I \neq \emptyset$, máskülönben $\mathcal{T}$ az antidiszkrét topológia, amely szerint minden $E \to E$ függvény folytonos. Legyen $a \in E$ rögzített. Az [10] 25.6.3. Állítása szerint $l_{E,a}$ folytonosságához elég ellenőriznünk, hogy minden $i \in I$ estén $u_i \circ l_{E,a} : E \to E_i$ folytonos a megfelelő topológiák szerint. Legyen $i \in I$ tetszőleges. Mivel u_i szorzástartó, ezért ha $b_i \in E_i$ esetén l_{E_i,b_i} jelöli a következő leképezést:

$$l_{E_i,b_i} : E_i \to E_i;\ y \mapsto b_i y\,,$$

akkor $u_i \circ l_{E,a} = l_{E_i,u_i(a)} \circ u_i$ teljesül, utóbbi pedig két folytonos függvény kompozícója, tehát folytonos. Az $r_{E,a}$ leképezés folytonossága hasonlóan igazolható.
Az állítás második feléhez tegyük fel, hogy minden $i \in I$ esetén E_i folytonos szorzású topologikus algebra. Legyen V a 0-nak környezete E-ben. Ekkor [10] 1.4.1. Állítása miatt létezik olyan $(V_i)_{i\in J}$ nemüres, véges rendszer, hogy minden $j \in J$-re V_j a 0-nak környezete E_j-ben és $\bigcap_{j\in J} \overset{-1}{u_j} \langle V_j \rangle \subseteq V$. Ekkor minden $j \in J$ esetén létezik W_j környezete a 0-nak E_j-ben, amelyre $W_j \cdot W_j \subseteq V_j$, és mivel u_j szorzástartó, ezért $\overset{-1}{u_j} \langle W_j \rangle \cdot \overset{-1}{u_j} \langle W_j \rangle \subseteq \overset{-1}{u_j} \langle V_j \rangle$, így

$$\Big(\bigcap_{i\in J} \overset{-1}{u_j} \langle W_j \rangle\Big) \cdot \Big(\bigcap_{i\in J} \overset{-1}{u_j} \langle W_j \rangle\Big) \subseteq \bigcap_{i\in J} \overset{-1}{u_j} \langle V_j \rangle \subseteq V\,.$$

Tehát $W := \bigcap_{i\in J} \overset{-1}{u_j} \langle W_j \rangle$ olyan környezete a 0-nak E-ben, amelyre $W \cdot W \subseteq V$, következésképpen (AV'_{IV}) teljesül a 0 tetszőleges $\mathcal{T}$ szerinti környezetbázisára E-ben, tehát a 2.1.4. Tétel alapján E a $\mathcal{T}$ topológiával ellátva folytonos szorzású topologikus algebra. □

2.2.2. Következmény. *Topologikus algebra (illetve folytonos szorzású topologikus algebra) részalgebrája az altértopológiával ellátva topologikus algebra (illetve folytonos szorzású topologikus algebra). Topologikus algebrák (illetve folytonos szorzású topologikus algebrák) szorzata a szorzattopológiával ellátva topologikus algebra (illetve folytonos szorzású topologikus algebra). Ha E algebra és $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ olyan E feletti topológiák rendszere, hogy minden $i \in I$-re az $(E, \mathcal{T}_i)$ pár topologikus algebra (illetve folytonos szorzású topologikus algebra),* *akkor E a $\sup_{i\in I} \mathcal{T}_i$ topológiával ellátva topologikus algebra (illetve folytonos szorzású topologikus algebra).*

Bizonyítás. Az altértopológia, a szorzattopológia és a szuprémum-topológia speciális projektíven előállított topológiák. □

2.3. Teljes topologikus vektorterek és algebrák

2.3.1. Definíció. *Legyen E topologikus vektortér. Egy E-ben haladó $(x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozatot* ***általánosított Cauchy-sorozatnak*** *nevezünk, ha a 0 bármely $V \subseteq E$ környezetéhez létezik olyan $i_0 \in I$, hogy minden $i, j \in I$ indexre, ha $i \geq i_0$ és $j \geq i_0$, akkor $x_i - x_j \in V$. E-t* ***teljesnek*** *nevezzük, ha minden E-ben haladó általánosított Cauchy-sorozat konvergens. Egy $M \subseteq E$ halmazt* ***teljesnek*** *nevezünk, ha minden M-ben haladó általánosított Cauchy-sorozat konvergens E-ben, és minden limeszpontja eleme M-nek.*

Megjegyzés. A definícióból következik, hogy ha E topologikus vektorér, akkor egy $M \subseteq E$ altér pontosan akkor teljes, ha M az altértopológiával ellátva teljes topologikus vektorér.

2.3.2. Állítás. *Legyen E topologikus vektortér, és $(x_i)_{i\in I}$ E-ben haladó konvergens általánosított sorozat. Ekkor $(x_i)_{i\in I}$ általánosított Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Legyen $x \in E$ határértéke $(x_i)_{i\in I}$-nek, és V a 0-nak környezete E-ben, továbbá legyen W olyan környezete a 0-nak E-ben, hogy $W+W \subseteq V$, és $W = -W$ (utóbbi teljesül például akkor, ha W-t szimmetrikusnak választjuk). Létezik olyan $i_W \in I$ index, hogy minden $i \in I$, $i \geq i_W$ esetén $x_i - x \in W$ teljesül. Legyen $j, k \geq i_W$, ekkor

$$x_j - x_k = (x_j - x) + (x - x_k) \in W + (-W) = W + W \subseteq V\,. \square$$

2.3.3. Állítás. *Ha E topologikus vektortér, és $M \subseteq E$ teljes halmaz, akkor M zárt E-ben.*

Bizonyítás. Legyen E topologikus vektortér, $M \subseteq E$ teljes halmaz, és $(x_i)_{i\in I}$ M-ben haladó általánosított sorozat, amely konvergens E-ben. Ekkor $(x_i)_{i\in I}$ az előző állítás alapján általánosított Cauchy-sorozat, ezért - M teljessége miatt - minden limeszpontja eleme M-nek, tehát M zárt halmaz. □

2.3.4. Állítás. *Legyen E teljes topologikus vektortér, és $M \subseteq E$ zárt halmaz. Ekkor M teljes E-ben; következésképpen, ha M lineáris altér, akkor M az altértopológiával ellátva teljes topologikus vektortér.*

Bizonyítás. Legyen $(x_i)_{i\in I}$ M-ben haladó általánosított Cauchy-sorozat. Ekkor $(x_i)_{i\in I}$ E-ben is Cauchy, ezért konvergens, és M zártsága, valamint az érintési pontok általánosított sorozatokkal való jellemzése miatt ([10] 26.3.5. Állítás) minden limeszpontja eleme M-nek, tehát M teljes halmaz. □

2.3.5. Következmény. *Legyen E teljes topologikus algebra és $F \subseteq E$ zárt részalgebra. Ekkor F az altértopológiával ellátva teljes topologikus algebra.*

2.3.6. Lemma. *Legyenek E, F topologikus vektorterek, és $u : E \to F$ folytonos lineáris operátor. Ha $(x_i)_{i\in I}$ E-ben haladó általánosított Cauchy-sorozat, akkor $(u(x_i))_{i\in I}$ (F-ben haladó) általánosított Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Legyen V a 0-nak környezete F-ben. Mivel u folytonos a 0-ban, ezért létezik olyan U környezete a 0-nak E-ben, amelyre $u\langle U\rangle \subseteq V$. Mivel $(x_i)_{i\in I}$ általánosított Cauchy-sorozat E-ben, ezért létezik olyan $i_0 \in I$, hogy minden $i, j \geq i_0$ esetén
$x_i - x_j \in U$, követezésképpen $u(x_i) - u(x_j) = u(x_i - x_j) \in V$, tehát $(u(x_i))_{i\in I}$ általánosított Cauchy-sorozat F-ben. □

2.3.7. Állítás. *Legyen E vektortér, $(E_i)_{i\in I}$ topologikus vektorterek rendszere, és $(u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$-re $u_i : E \to E_i$ lineáris leképezés. Ha E-t ellátjuk az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított topológiával, és $(x_j)_{j\in J}$ E-ben haladó általánosított sorozat, akkor*

$$(x_j)_{j\in J} \text{ Cauchy } E\text{-ben} \Leftrightarrow (\forall i \in I) : (f_i(x_j))_{j\in J} \text{ Cauchy } E_i\text{-ben.}$$

Bizonyítás. Mivel minden $i \in I$-re u_i folytonos lineáris operátor (a projektíven előállított topológia definícója szerint), ezért a balról jobbra irány az előző lemmából következik.
A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy minden $i \in I$-re $(f_i(x_j))_{j\in J}$ általánosított Cauchy sorozat E_i-ben. Legyen V a 0-nak környezte E-ben. Ekkor létezik olyan $\emptyset \neq I_0 \subseteq I$ véges halmaz és olyan $(V_k)_{k\in I_0}$ rendszer, hogy minden $k \in I_0$ esetén V_k környezete a 0-nak E_i-ben és $\bigcap_{k\in I_0} \overset{-1}{u_k} \langle V_k\rangle \subseteq V$. A feltevésből adódóan minden $k \in I_0$-hoz létezik olyan $j_k \in J$ index, hogy $l, m \in J$ és $l, m \geq j_k$ esetén $u_k(x_l) - u_k(x_m) \in V_k$. Legyen $j_0 \in J$ olyan, hogy minden $k \in I_0$ esetén $j_0 \geq j_k$ (ilyen tulajdonságú j_0 a J halmaz felfelé irányítottsága miatt létezik). Ekkor minden $k \in I_0$ és minden $l, m \in J$ esetén, ha $l, m \geq j_0$, akkor $x_l - x_m \in \overset{-1}{u_k} \langle V_k\rangle$. Tehát ha $l, m \in J$ és $l, m \geq j_0$, akkor

$$x_l - x_m \in \bigcap_{k\in I_0} \overset{-1}{u_k} \langle V_k\rangle \subseteq V\,,$$

azaz $(x_j)_{j\in J}$ általánosított Cauchy-sorozat E-ben. □

Szükségünk lesz egy tényre az általános topológiából.

2.3.8. Állítás. *Legyen* $(T_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ *topologikus terek rendszere,* $T := \prod_{i\in I} T_i$*,* $\mathcal{T}$ *jelölje a szorzattopológiát* T *felett, és legyen* $(x_j)_{j\in J}$ T*-ben haladó általánosított sorozat. Ekkor* $(x_j)_{j\in J}$ *pontosan akkor konvergens a* $\mathcal{T}$ *topológia szerint, ha minden* $i \in I$*-re* $(pr_i(x_j))_{j\in J}$ *konvergens a* $\mathcal{T}_i$ *topológia szerint.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $(x_j)_{j\in J}$ konvergens a $\mathcal{T}$ topológia szerint. Mivel minden $i \in I$-re a $pr_i : T \to T_i$ kanonikus projekció-függvény folytonos a $\mathcal{T}$ és $\mathcal{T}_i$ topológiák szerint, ezért az átviteli elv alapján minden $i \in I$ esetén a $(pr_i(x_j))_{j\in J}$ általánosított sorozat konvergens a $\mathcal{T}_i$ topológia szerint.
A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy minden $i \in I$-re $(pr_i(x_j))_{j\in J}$ konvergens a $\mathcal{T}_i$ topológia szerint. Ekkor *kiválasztható* egy olyan $(x_{i,0})_{i\in I}$ rendszer, amelyre minden $i \in I$ esetén $x_{i,0} \in T_i$ és x_{i_0} a $(pr_i(x_j))_{j\in J}$ általánosított sorozat határértéke. Megmutatjuk, hogy $x := (x_{i,0})_{i\in I} \in T$ az $(x_j)_{j\in J}$ sorozat határértéke. Legyen $V \subseteq T$ az x egy környezete. Ekkor létezik olyan $\emptyset \neq I_0 \subseteq I$ véges halmaz és olyan $(V_k)_{k\in I_0}$ rendszer, hogy minden $k \in I_0$ esetén V_k nyílt halmaz T_k-ban és

$$x \in \bigcap_{k\in I_0} \overset{-1}{pr_k} \langle V_k \rangle \subseteq V.$$

A feltevés miatt $k \in I_0$ esetén V_k-hoz létezik egy olyan $j_k \in J$ index hogy minden $j \in J$-re, ha $j \geq j_k$, akkor $pr_k(x_j) \in V_k$. Legyen $j_0 \in J$ olyan, hogy minden $k \in I_0$ esetén $j_0 \geq j_k$ (ilyen tulajdonságú j_0 a J halmaz felfelé irányítottsága miatt létezik). Ekkor minden $j \in J$ esetén, ha $j \geq j_0$, akkor

$$x_j \in \bigcap_{k\in I_0} \overset{-1}{pr_k} \langle V_k \rangle \subseteq V\,,$$

tehát az $(x_j)_{j\in J}$ általánosított sorozat konvergens $\mathcal{T}$ szerint. □

2.3.9. Tétel. *Legyen* $(E_i)_{i\in I}$ *topologikus vektorterek rendszere és* $E := \prod_{i\in I} E_i$*. Ekkor* E *a szorzattopológiával ellátva pontosan akkor teljes, ha minden* $i \in I$*-re az* E_i *topologikus vektortér teljes.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy minden $i \in I$-re az E_i topologikus vektortér teljes, és legyen $(x_j)_{j\in J}$ általánosított Cauchy-sorozat E-ben. Ekkor a 2.3.7. Állítás alapján minden $i \in I$ esetén $(pr_i(x_j))_{j\in J}$ általánosított Cauchy-sorozat E_i-ben (itt pr_i jelöli az $E \to E_i$ kanonikus projekciót minden $i \in I$-re), ezért konvergens is, így az előző állítás alapján $(x_j)_{j\in J}$ is konvergens E-ben.
Megfordítva, ha E teljes, és teszőleges, rögzített $i_0 \in I$ esetén $(x_{i_0,j})_{j\in J}$ általánosított Cauchy-sorozat E_{i_0}-ban, akkor definiáljuk az $(x'_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ rendszert a következőképpen:

$$x'_{i,j} := \begin{cases} x_{i_0,j} & ;\text{ ha } i = i_0 \text{ és } j \in J \\ 0_{E_i} & ;\text{ ha } i \neq i_0 \text{ és } j \in J \end{cases}$$

Ekkor minden $i \in I$-re a $(pr_i(x'_{i,j}))_{j\in J}$ általánosított sorozat Cauchy-sorozat, ezért minden $j \in J$-re az $x_j := (x'_{i,j})_{i\in I} \in E$ jelölést bevezetve a 2.3.7. Állítás alapján $(x_j)_{j\in J}$ általánosított Cauchy-sorozat E-ben, következésképpen konvergens, így az átviteli elv és a pr_{i_0} függvény folytonossága alapján $(pr_{i_0}(x_j))_{j\in J} = (x_{i_0,j})_{j\in J}$ általánosított sorozat konvergens E_i-ben. □

2.3.10. Következmény. *Legyen $(E_i)_{i\in I}$ topologikus algebrák rendszere és $E := \prod_{i\in I} E_i$. Ekkor az E algebra a szorzattopológiával ellátva pontosan akkor teljes, ha minden $i \in I$-re az E_i topologikus algebra teljes.*

2.3.11. Állítás. *Legyen E teljes topologikus vektortér, F topologikus vektortér, $u : E \to F$ lineáris homeomorfizmus. Ekkor F is teljes topologikus vektortér.*

Bizonyítás. Legyen $(x_i)_{i\in I}$ F-ben haladó általánosított Cauchy-sorozat. Ekkor a 2.3.6. Lemma miatt $(u^{-1}(x_i))_{i\in I}$ E-ben haladó általánosított Cauchy-sorozat, tehát konvergens E-ben, így u folytonossága miatt $(x_i)_{i\in I}$ konvergens F-ben. □

3. Lokálisan m-konvex algebrák

3.1. m-konvex halmazok és m-hordók

3.1.1. Definíció. *Az E topologikus vektorteret **lokálisan konvexnek** nevezzük, ha létezik a 0-nak konvex halmazokból álló környezetbázisa E-ben. Az E vektortér feletti $\mathcal{T}$ topológiát lokálisan konvexnek nevezzük, ha E a $\mathcal{T}$ topológiával ellátva lokálisan konvex topologikus vektortér.*

3.1.2. Definíció. *Ha E algebra $\mathbb{K}$ felett, akkor egy $B \subseteq E$ halmazt **multiplikatívnak** nevezünk, ha $B \cdot B \subseteq B$ teljesül rá. Az E multiplikatív és konvex részhalmazait röviden **m-konvex** halmazoknak nevezzük.*

3.1.3. Definíció. *Egy $\mathbb{K}$ feletti E algebrát **lokálisan multiplikatívan konvex** (röviden: **lokálisan m-konvex**) **algebrának** nevezzük, ha E topologikus vektortér és létezik a 0-nak m-konvex halmazokból álló környezetbázisa. Az E algebra feletti $\mathcal{T}$ topológiát lokálisan m-konvexnek nevezzük, ha E a $\mathcal{T}$ topológiával ellátva lokálisan m-konvex algebra.*

3.1.4. Állítás. *Ha E lokálisan m-konvex algebra, akkor E folytonos szorzású topologikus algebra.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathfrak{B}$ a 0-nak egy m-konvex halmazokból álló környezetbázisát. A 2.1.4. Tétel alapján elég azt belátnunk, hogy $\mathfrak{B}$-re teljesül az (AV'_{IV}) tulajdonság, ez pedig következik a $\mathfrak{B}$-beli halmazok multiplikativitásából. □

A megfordítás nem igaz, amint ezt a következő példa is mutatja.

Példa. Legyen $p \in]0,1[$, és

$$l^p_{\mathbb{K}} := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|^p < \infty\}.$$

Ekkor

$$d : l^p_{\mathbb{K}} \times l^p_{\mathbb{K}} \to \mathbb{R}^+;\ (x,y) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} |x(k) - y(k)|$$

metrika $l^p_{\mathbb{K}}$ felett, bebizonyítjuk, hogy az általa generált topológiával (jelölje $\mathcal{T}_d$) $l^p_{\mathbb{K}}$ (a pontonkénti műveletekkel) folytonos szorzású topologikus algebra. $\mathcal{T}_d$ lineáris topológia, ehhez [10] 2.1.6. Állítása és d transzláció-invarianciája miatt elég ellenőriznünk, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(0; d)$ kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \in B_1(0; \mathbb{K})$ és $x \in B_r(0; d)$. Ekkor

$$d(0, \lambda.x) = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda x(k)| = |\lambda| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x(k)| \right) \leq |\lambda| r \leq r\,,$$

tehát $B_r(0;d)$ kiegyensúlyozott halmaz. Legyen most $y \in l^p_{\mathbb{K}}$ és $R \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|^p < R$. Ekkor $\frac{r}{R}.y \in B_r(0;d)$, tehát $B_r(0;d)$ elnyelő halmaz. Be kell még látnunk, hogy (AV'_{IV}) teljesül a

$$\mathfrak{B} := \{B_r(0;d) \,|\, r \in \mathbb{R}^+\}$$

környezetbázisára a $\mathcal{T}_d$ topológiának. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, továbbá $\varrho \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\varrho \leq r^{\frac{1}{2}}$, és $x, y \in B_\varrho(0;d)$. Ekkor

$$d(0, xy) = \sum_{k=0}^{\infty} |x(k)y(k)| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} |y(k)|\right) < \varrho^2 \leq r\,,$$

tehát $B_\varrho(0;d) \cdot B_\varrho(0;d) \subseteq B_r(0;d)$, azaz (AV'_{IV}) teljesül $\mathfrak{B}$-re.
Megmutatjuk, hogy $l^p_{\mathbb{K}}$ nem lokálisan konvex (következésképpen nem is lokálisan m-konvex). Ehhez elég belátni, hogy $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $\overline{B}_r(0;d)$ nem tartalmazza a 0-nak konvex környezetét. Indirekten tegyük fel V olyan konvex környezete a 0-nak, amelyre $V \subseteq \overline{B}_r(0;d)$ teljesül. Legyen $s \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\overline{B}_s(0;d) \subseteq V$. Minden $k \in \mathbb{N}$-re jelölje e_k azt az $l^p_{\mathbb{K}}$-beli elemet, amelynek k-adik komponense 1, az összes többi pedig 0. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$-re $s.e_k \in \overline{B}_s(0;d)$, következésképpen minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}.(s.e_k) \in conv(B_s(0;d)) \subseteq V \subseteq B_r(0;d)\,,$$

tehát

$$n^{1-p}s^p = d(0, \sum_{k=0}^{n-1} s.e_k) \leq r\,,$$

ami $p < 1$ miatt ellentmondás.
Megjegyzés. Az előző példa azért is érdekes, mert $p \in]0,1[$ esetén $(l^p_{\mathbb{K}}, d)$ egy olyan szeparált, nem lokálisan konvex tér, amely felett a folytonos lineáris funkcionálok halmaza szétválasztó. Ugyanis minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$u_n : l^p_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K};\; x \mapsto x(n)\,,$$

lineáris, és tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz $\delta := \varepsilon^p$ olyan szám, hogy $x \in B_\delta(0;d)$ esetén

$$|u_n(x)| = |x(n)| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon\,,$$

azaz u_n a 0-ban folytonos, tehát folytonos. Továbbá $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ szétválasztó $l^p_{\mathbb{K}}$ felett. Ez azt is jelenti, hogy léteznek $l^p_{\mathbb{K}}$-ben nemtriviális konvex, nyílt kiegyensúlyozott halmazok, ugyanis ha u nemnulla folytonos lineáris funkcionál, akkor $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $[|u| < r]$ rendelkezik az előbb felsorolt tulajdonságokkal.

3.1.5. Definíció. *Ha E topologikus vektortér, akkor egy $B \subseteq E$ halmazt **hordónak** nevezünk, ha konvex, zárt, kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz. Továbbá, ha E topologikus algebra, akkor a multiplikatív hordókat röviden **m-hordóknak** nevezzük.*

3.1.6. Lemma. *Legyen E topologikus vektortér. Ekkor a következő állítások teljesülnek:*
(i) Ha $C \subseteq E$ konvex halmaz, akkor $int(C)$ is konvex.
(ii) Ha $C \subseteq E$ konvex halmaz, akkor $\overline{C}$ is konvex.
(iii) Ha $V \subseteq E$ kiegyensúlyozott halmaz, akkor $conv(V)$ is kiegyensúlyozott.
(iv) Ha $V \subseteq E$ kiegyensúlyozott halmaz, akkor $\overline{V}$ is kiegyensúlyozott.

Bizonyítás. (i) Legyenek $x{,}y \in int(C)$ és $t \in [0,1]$. Legyenek U és V a 0-nak olyan környezetei E-ben, amelyekre $x + U \subseteq C$ és $y + V \subseteq C$. Ekkor $W := U \cap V$ a 0-nak környezete E-ben, és $W \subseteq t.W + (1-t).W$ teljesül rá. Ekkor

$$t.x + (1-t).y + W \subseteq t.(x+W) + (1-t).(y+W) \subseteq t.C + (1-t).C \subseteq C\,,$$

azaz $t.x + (1-t).y \in int(C)$, tehát $int(C)$ konvex halmaz.
(ii) Legyenek $x, y \in \overline{C}$, $t \in [0,1]$ és U a 0-nak környezete E-ben; azt kell belátnunk, hogy $((t.x + (1-t).y) + U) \cap C \neq \emptyset$. Legyen V a 0-nak olyan kiegyensúlyozott környezete E-ben, amelyre $V + V \subseteq U$ teljesül. Legyen $x' \in (x+V) \cap C$ és $y' \in (y+V) \cap C$. Ekkor $t.x' + (1-t).y' \in C$, és

$$t.x' + (1-t).y' \in t.(x+V) + (1-t).(y+V) \subseteq$$

$$\subseteq (t.x + (1-t).y) + (V+V) \subseteq (t.x + (1-t).y) + U\,,$$

azaz $t.x' + (1-t).y' \in ((t.x + (1-t).y) + U) \cap C$.
(iii) Legyen $x \in conv(V)$ és $\lambda \in \overline{B}_1(0;\mathbb{K})$, azt kell megmutatnunk, hogy $\lambda.x \in conv(V)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy x előáll a következő alakban:

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i.x_i\,,$$

ahol $I \neq \emptyset$ véges indexhalmaz, minden $i \in I$-re $\alpha_i \in [0,1]$ és $x_i \in V$, továbbá $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i = 1$. Ekkor

$$\lambda.x = \sum_{i \in I} \alpha_i.(\lambda.x_i) \in \sum_{i \in I} \alpha_i.(\lambda.V) \subseteq \sum_{i \in I} \alpha_i.V \subseteq conv(V)\,,$$

tehát $conv(V)$ kiegyensúlyozott halmaz.
(iv) Mivel a $\mathbb{K} \times E \to E$; $(\lambda, x) \mapsto \lambda.x$ leképezés folytonos az $\mathcal{E}_{\mathbb{K}} \times \mathcal{T}_E$ és $\mathcal{T}_E$ topológiák szerint (ahol $\mathcal{T}_E$ az E topológiáját jelöli), ezért ha $V \subseteq E$ kiegyensúlyozott halmaz, akkor a folytonosság topologikus jellemzése alapján

$$\overline{B}_1(0;\mathbb{K}).\overline{V} \subseteq \overline{\overline{B}_1(0;\mathbb{K}).V} \subseteq \overline{V}\,.$$

3.1.7. Lemma. *Legyen E topologikus algebra. Ekkor a következő állítások teljesülnek:*
(i) Ha $U \subseteq E$ multiplikatív halmaz, akkor $eq(U)$ is multiplikatív.
(ii) Ha $U \subseteq E$ multiplikatív halmaz, akkor $conv(U)$ is multiplikatív.
(iii) Ha $A, B \subseteq E$, akkor $\overline{A} \cdot \overline{B} \subseteq \overline{A \cdot B}$, következésképpen, ha $U \subseteq E$ multiplikatív halmaz, akkor $\overline{U}$ is multiplikatív.

Bizonyítás. (i) Legyen $U \subseteq E$ multiplikatív halmaz, ekkor

$$eq(U) \cdot eq(U) = \overline{B}_1(0;\mathbb{K}).U \cdot \overline{B}_1(0;\mathbb{K}).U = \overline{B}_1(0;\mathbb{K}).U \cdot U \subseteq \overline{B}_1(0;\mathbb{K}).U = eq(U)\,.$$

(ii) Legyen $U \subseteq E$ multiplikatív halmaz és $x, y \in conv(U)$. Ekkor

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i . x_i\,,$$

$$y = \sum_{j \in J} \beta_j . x_j\,,$$

ahol I és J nemüres, véges indexhalmazok, továbbá minden $(i,j) \in I \times J$-re $x_i, y_j \in U$ és $\alpha_i, \beta_j \in [0,1]$, valamint $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i = 1 = \sum\limits_{j \in J} \beta_j$. Így - kihasználva U multiplikativitását - kapjuk, hogy:

$$xy = (\sum_{i \in I} \alpha_i . x_i)(\sum_{j \in J} \beta_j . x_j) = \sum_{(i,j) \in I \times J} \alpha_i \beta_j . x_i y_j \in \sum_{(i,j) \in I \times J} \alpha_i \beta_j . U \subseteq conv(U)\,,$$

ahol az utóbbi tartalmazás $\sum\limits_{(i,j) \in I \times J} \alpha_i \beta_j = 1$ miatt teljesül.

(iii) Legyen $x \in \overline{A}$ és $y \in \overline{B}$, és legyen $(x_i)_{i \in I}$ olyan A-ban haladó általánosított sorozat, amelyre $\lim\limits_{i,I} x_i = x$, illetve $(y_j)_{j \in J}$ olyan B-ben haladó általánosított sorozat, amelyre $\lim\limits_{j,J} y_j = y$. Ekkor a 2.1.1. Definíció és az átviteli elv alapján:

$$xy = \lim_{i,I} x_i y = \lim_{i,I} x_i (\lim_{j,J} y_j) = \lim_{i,I} (\lim_{j,J} x_i y_j)\,.$$

Mivel minden $i \in I$-re $\lim\limits_{j,J} x_i y_j \in \overline{A \cdot B}$, így $\overline{A \cdot B}$ zártsága miatt $xy \in \overline{A \cdot B}$. □

3.1.8. Állítás. *Lokálisan m-konvex algebrában létezik a 0-nak m-hordókból álló környezetbázisa.*

Bizonyítás. Legyen E lokálisan m-konvex algebra és $V \subseteq E$ a 0-nak környezete. Azt kell megmutatnunk, hogy V tartalmazza a 0-nak m-hordó környezetét. Legyen V_1 a 0-nak olyan zárt környezete E-ben, hogy $V_1 \subseteq V$ (ilyen környezetet azért tudunk venni, mert minden lineáris topológia reguláris, lásd [10] 1.1.4 Állítását). E lokális (m-)konvexitása miatt vehetünk olyan V_2 konvex környezetét a 0-nak E-ben, amelyre $V_2 \subseteq V_1$, és (2.1.3. Tétel miatt) vehetünk olyan V_3 kiegyensúlyozott környezetét a 0-nak E-ben, amelyre

$V_3 \subseteq V_2$, illetve ismét E lokális m-konvexitása miatt létezik V_4 multiplikatív környezete a 0-nak E-ben, amelyre $V_4 \subseteq V_3$. Ekkor $W := \overline{conv(eq(V_4))} \subseteq V$, továbbá W környezete a 0-nak E-ben, valamint
-*zárt*
-*konvex*, mert a 3.1.6. Lemma alapján konvex halmaz lezártja konvex
-*elnyelő*, mert topologikus vektortérben a 0-nak minden környezete elnyelő,
-*kiegyensúlyozott*, mert szintén a 3.1.6. Lemma miatt kiegyensúlyozott halmaz konvex burka és lezártja kiegyensúlyozott
-*multiplikatív*, mert az előző lemma szerint multiplikatív halmaz kiegysúlyozott burka, konvex burka és lezártja is multiplikatív,
tehát W m-hordó E-ben. □

3.2. Projektíven előállított lokálisan m-konvex topológiák

3.2.1. Állítás. *Legyen E algebra, $(E_i)_{i\in I}$ lokálisan m-konvex algebrák rendszere, és $(u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$-re $u_i : E \to E_i$ algebra-morfizmus. Ha $\mathcal{T}$ jelöli az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított topológiát E felett, akkor E a $\mathcal{T}$ topológiával ellátva lokálisan m-konvex algebra.*

Bizonyítás. Először is feltehető, hogy $I \neq \emptyset$, ellenkező esetben $\mathcal{T}$ az antidiszkrét topológia E-n, ami lokálisan m-konvex. Ekkor [10] 1.4.1. Állítása alapján, ha $\mathcal{P}_0(I)$ jelöli az I véges részhalmazainak halmazát, valamint minden $i \in I$-re $\mathfrak{B}_i$ a 0-nak környezetbázisa az E_i algebrában akkor a

$$\mathfrak{B} := \{\bigcap_{i\in J} \overset{-1}{u_i} \langle V_i\rangle \mid (J \in \mathcal{P}_0(I)) \wedge ((V_i)_{i\in J} \in \prod_{i\in J} \mathfrak{B}_i)\}$$

halmaz a 0-nak környezetbázisa E-ben. Mivel az $(E_i)_{i\in I}$ rendszer lokálisan m-konvex algebrákból áll, ezért minden $i \in I$-re a $\mathfrak{B}_i$ megválasztható úgy, hogy elemei m-konvex halmazok legyenek. Ekkor $\mathfrak{B}$ elemei is m-konvex halmazok, mert m-konvex halmaz algebra-morfizmus általi őskképe m-konvex és m-konvex halmazok metszete m-konvex, tehát a $\mathcal{T}$ topológia lokálisan m-konvex. □

3.2.2. Következmény. *Lokálisan m-konvex algebra részalgebrája az altértopológiával ellátva lokálisan m-konvex algebra. Lokálisan m-konvex algebrák szorzata a szorzattopológiával ellátva lokálisan m-konvex algebra. Ha E algebra és $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ olyan E feletti topológiák rendszere, hogy minden $i \in I$-re az $(E, \mathcal{T}_i)$ pár lokálisan m-konvex algebra, akkor E a $\sup_{i\in I} \mathcal{T}_i$ topológiával ellátva lokálisan m-konvex algebra.*

Bizonyítás. Az altértopológia, a szorzattopológia és a szuprémum-topológia speciális projektíven előállított topológiák. □

3.2.3. Definíció. *Legyen E algebra. A $p : E \to \mathbb{R}_+$ félnormát* ***szubmultiplikatívnak*** *nevezzük, ha minden $x, y \in E$ esetén $p(xy) \leq p(x)p(y)$.*

3.2.4. Állítás. *Legyen E algebra, és $p : E \to \mathbb{R}_+$ szubmultiplikatív félnorma. Ekkor a p által generált topológia lokálisan m-konvex topológia E felett.*

Bizonyítás. A

$$\mathfrak{B} := \{[p < r] \,|\, r \in]0, 1]\}$$

halmaz a 0-nak m-konvex halmazokból álló környezetbázisa. Valóban, $r \in]0, 1]$, $x, y \in [p < r]$, és $t \in [0, 1]$ esetén

$$p((1-t).x + t.y) \leq (1-t)p(x) + tp(y) < r$$

$$p(xy) \leq p(x)p(y) < r^2 \leq r\,. \;\square$$

3.2.5. Definíció. *Ha E vektortér, $(p_i)_{i \in I}$ E feletti félnormák rendszere, és minden $i \in I$-re $\mathcal{T}_{p_i}$ jelöli a p_i félnorma által generált E feletti topológiát, akkor a $\sup\limits_{i \in I} \mathcal{T}_{p_i}$ topológiát a $(p_i)_{i \in I}$* ***félnorma-rendszer által generált topológiának*** *nevezzük.*

A 3.2.2. Következmény alapján ha E algebra és $(p_i)_{i \in I}$ E feletti szubmultiplikatív félnormák rendszere, akkor a $(p_i)_{i \in I}$ rendszer által generált topológia lokálisan m-konvex. Megmutatjuk, hogy a megfordítás is igaz (hasonlóan, mint a topologikus vektorterek esetében), azaz minden lokálisan m-konvex topológia előállítható szubmultiplikatív félnormarendszer által generált topológiaként.

3.2.6. Definíció. *Legyen E vektortér, és $C \subseteq E$ olyan halmaz, hogy minden $x \in E$ esetén létezik $\lambda \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in \lambda.C$. Ekkor a*

$$p_C : E \to \mathbb{R}_+;\; x \mapsto \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \,|\, x \in \lambda.C\}$$

leképezést a C halmaz ***Minkowski-funkcionáljának*** *nevezzük.*

Emlékeztetünk egy tényre a topologikus vektorterek elméletéből:

3.2.7. Lemma. *Ha E vektortér és $C \subseteq E$ konvex, kiegyensúlyozott, elnyelő halmaz, akkor a p_C Minkowski-funkcionál félnorma E felett, és teljesül, hogy $[p_C < 1] \subseteq C \subseteq [p_C \leq 1]$.*

Bizonyítás. [10] 3.5.5. Lemmájából következik.

3.2.8. Lemma. *Ha E algebra és $U \subseteq E$ olyan multiplikatív halmaz, amelyre teljesül, hogy minden $x \in E$ esetén létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in \lambda.U$ akkor a p_U Minkowski-funkcionál szubmultiplikatív.*

Bizonyítás. Legyen $x, y \in E$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor p_U definícója szerint létezik olyan $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{3p_U(y)}$ szám, hogy $x \in (p_U(x) + \delta).U$, valamint létezik olyan $0 < \delta' \leq \min\{\frac{\varepsilon}{3p_U(x)}, \frac{\varepsilon}{3\delta}\}$, hogy $x \in (p_U(y) + \delta').U$ teljesül. Ekkor, kihasználva U multiplikativitását

$$xy \in ((p_U(x) + \delta).U) \cdot ((p_U(y) + \delta').U) = (p_U(x)p_U(y) + \delta' p_U(x) + \delta p_U(y) + \delta\delta').(U \cdot U) \subseteq$$

$$\subseteq (p_U(x)p_U(y) + \delta' p_U(x) + \delta p_U(y) + \delta\delta').U\,,$$

és mivel

$$p_U(x)p_U(y) + \delta' p_U(x) + \delta p_U(y) + \delta\delta' \leq p_U(x)p_U(y) + \varepsilon\,,$$

ezért $p_U(xy) \leq p_U(x)p_U(y) + \varepsilon$. Továbbá, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges volt, következésképpen $p_U(xy) \leq p_U(x)p_U(y)$. □

Az előző két lemmából kapjuk a következőt:

3.2.9. Következmény. *Ha E algebra és $U \in E$ m-hordó, akkor a p_U Minkowski-funkcionál szubmultiplikatív félnorma E felett.*

3.2.10. Tétel. *Az E topologikus algebra pontosan akkor lokálisan m-konvex, ha létezik olyan E feletti szubmultiplikatív félnorma-rendszer, amely E topológiáját generálja.*

Bizonyítás. A 3.2.2. Következmény és a 3.2.4. Lemma miatt szubmultiplikatív félnorma-rendszer által generált topológia lokálisan m-konvex.
A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy E lokálisan m-konvex algebra, és legyen $\mathfrak{B}$ m-hordókból álló környezetbázisa a 0-nak E-ben. Ekkor a 3.2.9. Következmény alapján a $(p_U)_{U\in\mathfrak{B}}$ rendszerre teljesül, hogy minden $U \in \mathfrak{B}$-re p_U szubmultiplikatív félnorma E felett, továbbá a topologikus vektorterek elméletéből ismeretes ([10] 3.5.6. Állítás), hogy a $(p_U)_{U\in\mathfrak{B}}$ (szubmultiplikatív) félnormarendszer által generált topológia megegyezik E topológiájával. □

3.3. $\mathfrak{S}$-topológiák lokális m-konvexitása

Először emlékeztetünk a korlátosság és az $\mathfrak{S}$-korlátos függvények definíciójára, valamint az $\mathfrak{S}$-topológiák néhány tulajdonságára.

3.3.1. Definíció. *Legyen E topologikus vektortér. Egy $A \subseteq E$ halmazt **korlátosnak** nevezünk, ha A-t a 0 minden környezete elnyeli.*

Megjegyzés. Ha E félnormált tér, akkor a definíció ekvivalens a félnorma szerinti korlátossággal.

3.3.2. Definíció. *Ha T halmaz, és F topologikus vektortér, akkor egy $f : T \to F$ függvényt **korlátosnak** nevezünk, ha $Im(f)$ korlátos halmaz F-ben. A $T \to F$ korlátos függvények halmazát $\mathcal{F}^b(T; F)$ jelöli.*

Megjegyzés. Ha T halmaz, és F topologikus vektortér, akkor $\mathcal{F}^b(T;F)$ lineáris altere a $T \to F$ függvények vektorterének.

Jelölés. Ha T halmaz, F topologikus vektortér, akkor $V \subseteq F$ esetén legyen

$$\mathbf{W}(V) := \{f \in \mathcal{F}^b \,|\, Im(f) \subseteq V\}\,,$$

3.3.3. Tétel. *Legyen T halmaz, F topologikus vektortér és $\mathcal{T}_F(0)$ jelölje a 0 vektor F-beli környezeteinek halmazát. Ekkor:*
a) Létezik egyetlen $\mathcal{F}^b(T;F)$ feletti $\mathcal{T}$ lineáris topológia, amelyre

$$\{\mathbf{W}(V) \,|\, V \in \mathcal{T}_F(0)\}$$

a 0-nak környezetbázisa $\mathcal{T}$ szerint.
b) Ha $\mathfrak{B}_F$ könyezetbázisa a 0-nak F-ben, akkor a

$$\{\mathbf{W}(V) \,|\, V \in \mathfrak{B}_F\}$$

halmaz környezetbázisa a 0-nak $\mathcal{F}^b(T;F)$-ben a $\mathcal{T}$ topológia szerint.
c) Egy $\mathcal{F}^b(T;F)$-ben haladó $(f_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat pontosan akkor konvergál $f \in \mathcal{F}^b(T;F)$-hez $\mathcal{T}$ szerint, ha

$$(\forall\, V \in \mathcal{T}_F(0))(\exists\, i_0 \in I)(\forall\, i \in I)(\forall\, t \in T) : (i \geq i_0 \Rightarrow f_i(t) - f(t) \in V)\,,$$

amit úgy fejezünk ki, hogy "az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat T-n egyenletesen konvergál f-hez".

Bizonyítás. lásd [10] 5.6.2. Tétel. □

3.3.4. Definíció. *Ha T halmaz és F topologikus vektortér, akkor az előző állításbeli $\mathcal{T}$ topológiát az $\mathcal{F}^b(T;F)$ feletti* ***egyenletes konvergencia topológiájának*** *nevezzük, és az $\mathcal{F}^b(T;F)$ teret ezzel a topológiával ellátva $\mathcal{F}^b_u(T;F)$-fel jelöljük.*

3.3.5. Definíció. *Legyen T halmaz, $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{P}(T)$ nemüres halmaz és F topologikus vektortér. Jelölje $\mathcal{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ azon $f : T \to F$ függvények halmazát, amelyekre teljesül, hogy minden $S \in \mathfrak{S}$ esetén az $f\langle S\rangle$ halmaz korlátos F-ben. Az $\mathcal{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ függvényhalmaz elemeit* ***$\mathfrak{S}$-korlátos függvényeknek*** *nevezzük.*

Jelölés. Ha T halmaz, F topologikus vektortér, akkor $S \subseteq T$ és $V \subseteq F$ esetén legyen

$$\mathbf{W}(S;V) := \{f \in \mathcal{F}^b_{\mathfrak{S}} \,|\, f\langle S\rangle \subseteq V\}\,,$$

$$p_S : \mathcal{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F) \to \mathcal{F}^b(S;F);\;\; f \mapsto f|_S.$$

3.3.6. Definíció. *Legyen T halmaz $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{P}(T)$ nemüres halmaz és F topologikus vektortér. Az $(\mathcal{F}^b_u(T;F), p_S)_{S\in\mathfrak{S}}$ rendszer által projektíven előállított $\mathcal{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ feletti topológiát $\mathfrak{S}$-topológiának nevezzük.*

3.3.7. Állítás. *Legyen T halmaz, $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{P}(T)$ nemüres halmaz és F topologikus vektortér.*
a) Ha $\mathfrak{B}_F$ a 0-nak környezetbázisa F-ben, akkor

$$\{\mathbf{W}(S,V) \,|\, (S \in \mathfrak{S}) \wedge (V \in \mathfrak{B}_F)\}$$

környezet-szubbázisa a 0-nak $\mathcal{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$-ben az $\mathfrak{S}$-topológia szerint.
b) Egy $\mathcal{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$-ben haladó $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat pontosan akkor konvergál az $f \in \mathcal{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ függvényhez, ha

$$(\forall\, S \in \mathfrak{S})(\forall\, V \in \mathcal{T}_F(0))(\exists\, i_0 \in I)(\forall\, i \in I)(\forall\, s \in S) : (i \geq i_0 \Rightarrow f_i(s) - f(s) \in V)\,,$$

amit úgy fejezünk ki, hogy "minden $S \in \mathfrak{S}$-re az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat S-en egyenletesen konvergál f-hez".

Bizonyítás. lásd [10] 5.7.4. Állítás. □

Az is ismeretes a topologikus vektorterek elméletéből, hogy ha T halmaz, $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{P}(T)$ nemüres halmaz és F lokálisan konvex topologikus vektortér, akkor $\mathcal{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ az $\mathfrak{S}$-topológiával ellátva lokálisan konvex tér. Bebizonyítjuk, hogy hasonló állítás igaz akkor, ha F lokálisan m-konvex algebra.

3.3.8. Lemma. *Ha E folytonos szorzású topologikus algebra és $A, B \subseteq E$ korlátos halmazok, akkor $A + B$, $A \cdot B$ korlátos, illetve, ha $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor $\lambda.A$ is korlátos halmaz.*

Bizonyítás. Legyen E folytonos szorzású topologikus algebra és $A, B \subseteq E$ korlátos halmazok, továbbá V a 0-nak környezete E-ben. Ekkor (AV_{III}) alapján (2.1.4. Tétel) létezik olyan W környezete a 0-nak E-ben, amelyre $W + W \subseteq V$. A és B elnyelősége folytán létezik olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, hogy $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geq \alpha$ esetén $A \subseteq \lambda.W$, valamint $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geq \beta$ esetén $B \subseteq \lambda.W$. Ekkor $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geq \max\{\alpha, \beta\}$ esetén $A+B \subseteq \lambda.W+\lambda.W = \lambda.(W+W) \subseteq \lambda.V$, tehát V elenyeli $A + B$-t. (AV'_{IV}) alapján (2.1.4. Tétel) létezik olyan W' környezete a 0-nak E-ben, amelyre $W' \cdot W' \subseteq V$. Ekkor $\lambda' \in \mathbb{K}$ és $|\lambda'| \geq \alpha\beta$ esetén

$$A \cdot B \subseteq (\alpha.W') \cdot \left(\frac{\lambda'}{\alpha}.W'\right) = \lambda'.(W' \cdot W') \subseteq \lambda'.V\,,$$

tehát V elnyeli $A \cdot B$-t. Legyen most $\lambda_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, ekkor $\lambda'' \in \mathbb{K}$ és $|\lambda''| \geq \alpha|\lambda_0|$ esetén $\lambda_0.A \subseteq \lambda_0.(\frac{\lambda''}{\lambda_0}.V) = \lambda.V$, azaz V elnyeli $\lambda_0.A$-t. □

3.3.9. Állítás. *Legyen T halmaz, $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{P}(T)$ nemüres halmaz és F folytonos szorzású topologikus algebra. Ekkor $\mathcal{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ a pontonkénti szorzás műveletével részalgebrája a $T \to F$ függvények algebrájának.*

Bizonyítás. $S \in \mathfrak{S}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ esetén $(\lambda.f)\langle S\rangle = \lambda.f\langle S\rangle$,
$(f + g)\langle S\rangle \subseteq f\langle S\rangle + g\langle S\rangle$, $(fg)\langle S\rangle \subseteq f\langle S\rangle g\langle S\rangle$, és korlátos halmaz skalárral szorozva korlátos, korlátos halmazok összege és szorzata korlátos, valamint korlátos halmaz részhalmaza is korlátos. □

3.3.10. Állítás. *Legyen T halmaz, $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{P}(T)$ nemüres halmaz és F lokálisan m-konvex algebra. Ekkor az $\mathcal{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ feletti $\mathfrak{S}$ topológia is lokálisan m-konvex.*

Bizonyítás. Először igazoljuk, hogy ha $V \subseteq F$ m-konvex halmaz, akkor minden $S \in \mathfrak{S}$ esetén $\mathbf{W}(S,V)$ m-konvex halmaz. Legyen $V \subseteq F$ m-konvex halmaz és $S \in \mathfrak{S}$, $t \in [0,1]$ és $f \in \mathbf{W}(S,V)$. Ekkor

$$(t.f + (1-t).f)\langle S\rangle \subseteq t.f\langle S\rangle + (1-t).f\langle S\rangle \subseteq t.V + (1-t).V \subseteq V\,,$$

tehát $t.f + (1-t).f \in \mathbf{W}(S,V)$, továbbá, ha $g \in \mathbf{W}(S,V)$, akkor

$$fg\langle S\rangle \subseteq f\langle S\rangle \cdot g\langle S\rangle \subseteq V \cdot V \subseteq V\,,$$

azaz $fg \in \mathbf{W}(S,V)$. következésképpen $\mathbf{W}(S,V)$ m-konvex halmaz. Legyen $\mathfrak{B}_F$ a 0-nak m-konvex halmazokból álló környezetbázisa F-ben. Ekkor a 3.3.7. Állítás alapján

$$\mathfrak{B}' := \{\mathbf{W}(S,V) \,|\, (S \in \mathfrak{S}) \wedge (V \in \mathfrak{B}_F)\}$$

m-konvex halmazokból álló környezet-szubbázisa a 0-nak $\mathcal{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$-ben, és mivel véges sok m-konvex halmaz metszete m-konvex, ezért a $\mathfrak{B}'$ által generált bázis m-konvex halmazokból áll. $\square$

Példa. 1.) Legyen T halmaz, $\mathfrak{S}$ a T egyelemű halmazainak halmaza és F lokálisan m-konvex algebra. Ekkor $\mathcal{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F) = \mathcal{F}(T;F)$, és ezen az $\mathfrak{S}$-topológia a pontonkénti konvergencia topológiája, ami (az előzőek alapján) lokálisan m-konvex.
2.) Legyen T topologikus tér, $\mathfrak{S}$ a T kompakt részhalmazainak halmaza és F lokálisan m-konvex algebra. Ekkor $\mathcal{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$-en az $\mathfrak{S}$ topológia a kompakt konvergencia topológiája. Ennek $\mathcal{C}(T;F)$ egy részalgebrája, ami ezek alapján a kompakt konvergencia topológiájával ellátva lokálisan m-konvex algebra.
3.) Legyen T halmaz, $\mathfrak{S} := \{T\}$ és F lokálisan m-konvex algebra. Ekkor $\mathcal{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F) = \mathcal{F}^b(T;F)$, és ezen az $\mathfrak{S}$ topológia az egyenletes konvergencia topológiája, ami F lokális m-konvexitása miatt lokálisan m-konvex topológia.
4.) Ha az előző példákban F helyére $\mathbb{K}$-t írunk (ami lokálisan m-konvex algebra az euklideszi topológiával, hiszen ez a topológia normából származtatható), akkor kapjuk, hogy tetszőleges T halmaz esetén a $T \to \mathbb{K}$ függvények algebrája a pontonkénti konvergencia topológiájával ellátva lokálisan m-konvex algebra, és a $T \to \mathbb{K}$ korlátos függvények algebrája az egyenletes konvergencia topológiájával ellátva lokálisan konvex algebra. Továbbá, ha T topologikus tér, akkor a $T \to F$ folytonos függvények algebrája a kompakt konvergencia topológiájával ellátva, valamint a $T \to F$ folytonos függvények algebrája a pontonkénti konvergencia topológiájával ellátva szintén lokálisan m-konvex algebra.
5.) A 2.1.4. Tétel utáni második példában láttuk, hogy ha E végtelen dimenzós szeparábilis Hilbert-tér, akkor $\mathcal{L}_s(E)$ (az $E \to E$ folytonos lineáris operátorok algebrája a pontonkénti konvergencia topológiájával ellátva) olyan topologikus algebra, amely nem folytonos szorzású, következésképpen nem lokálisan m-konvex (3.1.4. Állítás), viszont lokálisan konvex [10] 5.7.6. Állítása miatt, hiszen E normált tér, tehát lokálisan konvex.

3.4. Legnagyobb m-topológiák és legnagyobb lokálisan m-konvex topológiák

3.4.1. Definíció. *Legyen E algebra $\mathbb{K}$ felett. Egy E feletti $\mathfrak{T}$ topológiát* ***m-topológiának*** *nevezünk, ha az $(E, \mathfrak{T})$ pár folytonos szorzású topologikus algebra.*

Ha E egy $\mathbb{K}$ feletti algebra, akkor sokféle m-topológia létezhet felette (például az antidiszkrét topológia mindig ilyen), felmerül a kérdés: létezik-e legnagyobb ezen topológiák között? Az eddigiek alapján ez a kérdés könnyen megválaszolható: igen, ugyanis ha vesszük az összes m-topológiát akkor ezek szuprémuma szintén m-topológia, mert a topológia-szuprémum speciális projektíven előállított topológia. Hasonlóan adódik, hogy azon topológiák között is létezik legnagyobb, amelyekkel ellátva E topologikus algebra. A most következő néhány állítás szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy egy teszőleges $V \subseteq E$ halmaz környezete legyen a 0-nak az E feletti legnagyobb m-topológia szerint. Ezt úgy bizonyítjuk, hogy közben a legnagyobb m-topológia létezését is megkapjuk, anélkül, hogy felhasználnánk a projektívan előállított m-topológiák tulajdnoságait.

3.4.2. Állítás. *Legyen E algebra $\mathbb{K}$ felett és $V \subseteq E$. Pontosan akkor létezik olyan m-topológia E felett, amely szerint V környezete a 0-nak, ha létezik az E kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak olyan $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre $W_0 + W_0 \subseteq V$ és $W_0 \cdot W_0 \subseteq V$, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$-re $W_{n+1} + W_{n+1} \subseteq W_n$ és $W_{n+1} \cdot W_{n+1} \subseteq W_n$ teljesül.*

Bizonyítás. Először legyen $V \subseteq E$ a 0-nak környezete egy E feletti $\mathfrak{T}$ m-topológia szerint. Mivel a 0 minden $\mathfrak{T}$ szerinti környezetbázisára teljesül (AV_I), (AV_{III}) és (AV'_{IV}) (2.1.4. Tétel), ezért léteznek olyan W'_0, W''_0 kiegyensúlyozott környezetei a 0-nak, amelyekre $W'_0 + W'_0 \subseteq V$, és $W''_0 \cdot W''_0 \subseteq V$. Ekkor $W_0 := W'_0 \cap W''_0$-ra teljesül, hogy $W_0 + W_0 \subseteq V$ és $W_0 \cdot W_0 \subseteq V$. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ és $(W_k)_{0\le k\le n}$ a 0 kiegyensúlyozott környezeteinek olyan rendszere, amelyre $W_0 + W_0 \subseteq V$ és $W_0 \cdot W_0 \subseteq V$, továbbá minden $k < n$ természetes számra $W_{k+1} + W_{k+1} \subseteq W_k$ és $W_{k+1} \cdot W_{k+1} \subseteq W_k$ teljesül. Ekkor W_n a 0-nak környezete $\mathfrak{T}$ szerint, ezért létezik a 0-nak olyan W_{n+1} kiegensúlyozott környezete, amelyre $W_{n+1} + W_{n+1} \subseteq W_{n+1}$ és $W_{n+1} \cdot W_{n+1} \subseteq W_n$ teljesül. Ekkor $(W_k)_{0\le k\le n+1}$ a 0 kiegyensúlyozott környezeteinek olyan rendszere, amelyre $W_0 + W_0 \subseteq V$ és $W_0 \cdot W_0 \subseteq V$, továbbá minden $k < n+1$ természetes számra $W_{k+1} + W_{k+1} \subseteq W_k$ és $W_{k+1} \cdot W_{k+1} \subseteq W_k$ teljesül. A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió-tétel alkalmazásával kapjuk, hogy létezik a 0-nak kiegyensúlyozott környezeteiből álló $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, amelyre $W_0 + W_0 \subseteq V$ és $W_0 \cdot W_0 \subseteq V$, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$-re $W_{n+1} + W_{n+1} \subseteq W_n$ és $W_{n+1} \cdot W_{n+1} \subseteq W_n$ teljesül. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$-re W_n a 0-nak környezete, ezért elnyelő is, tehát, $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal.
Megfordítva, legyen $V \subseteq E$ olyan, hogy létezik E kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak olyan $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre $W_0 + W_0 \subseteq V$ és $W_0 \cdot W_0 \subseteq V$, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$-re $W_{n+1} + W_{n+1} \subseteq W_n$ és $W_{n+1} \cdot W_{n+1} \subseteq W_n$ teljesül. Legyen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{K} \setminus \{0\}$-ban haladó sorozat, amelyre $\inf_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| = 0$ teljesül. Megmutatjuk, hogy

$$\mathfrak{B} := \{\lambda_m.W_n \mid (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$$

környezetbázisa egy olyan E feletti m-topológiának, amely szerint V környezete a 0-nak. $\mathfrak{B}$ rács, ennek belátásához legyen $(m,n),(m',n') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Létezik olyan $k\in\mathbb{N}$, amelyre $|\lambda_k| \leq \min\{|\lambda_{m'}|, |\lambda_m|\}$, valamint legyen $l \geq \max\{n,n'\}$. Ekkor – mivel minden $i\in\mathbb{N}$-re W_i kiegyensúlyozott és $W_{i+1}\subseteq W_i$ –

$$\lambda_k.W_l \subseteq \lambda_k.(W_n\cap W_{n'}) = (\lambda_m(\frac{\lambda_k}{\lambda_m}).W_n)\cap(\lambda_{m'}(\frac{\lambda_k}{\lambda_{m'}}).W_{n'}) \subseteq (\lambda_m.W_n)\cap(\lambda_{m'}.W_{n'})\,.$$

$\mathfrak{B}$-re teljesül (AV_I), mert minden eleme kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz. (AV_{II}) is teljesül $\mathfrak{B}$-re, ugyanis legyen $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ és $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, ekkor létezik $k\in\mathbb{N}$, amelyre $|\lambda_k|\leq|\lambda\lambda_m|$ teljesül, ezért a $\lambda_k.W_n\in\mathfrak{B}$-re

$$\lambda_k.W_n = \lambda\lambda_m(\frac{\lambda_k}{\lambda\lambda_m}).W_n \subseteq \lambda\lambda_m.W_n\,.$$

Továbbá $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ esetén a $\lambda_m.W_{n+1}\in\mathfrak{B}$ halmazra

$$\lambda_m.W_{n+1}+\lambda_m.W_{n+1} = \lambda_m.(W_{n+1}+W_{n+1}) \subseteq \lambda_m.W_n\,,$$

tehát (AV_{III}) is teljesül $\mathfrak{B}$-re. (AV'_{IV})-höz legyen $(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, és $k\in\mathbb{N}$ olyan, hogy $|\lambda_k|\leq|\lambda_m|^{\frac{1}{2}}$. Ekkor a $\lambda_k.W_{n+1}\in\mathfrak{B}$ halmazra

$$(\lambda_k.W_{n+1})\cdot(\lambda_k.W_{n+1}) = \lambda_k^2.(W_{n+1}\cdot W_{n+1}) \subseteq \lambda_k^2.W_n \subseteq \lambda_m(\frac{\lambda_k^2}{\lambda_m}).W_n \subseteq \lambda_m.W_n\,.$$

Tehát a 2.1.4. Tétel alapján létezik olyan E feletti $\mathcal{T}$ m-topológia, amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa. $\mathcal{T}$ szerint V környezete lesz a 0-nak, mert
$W_0 = W_0+\{0\}\subseteq W_0+W_0\subseteq V$, és $\lambda_0.W_0\in\mathfrak{B}$, továbbá $\lambda_0\neq 0$, ezért W_0 környezete a 0-nak, következésképpen V is. $\square$

Megjegyzés. Az előző bizonyítás második részében előállított topológia megszámlálható környezetbázisú, így az állításból az is következik, hogy ha egy $V\subseteq E$ halmaz környezete a 0-nak valamilyen m-topológia szerint (illetve itt elég azt feltenni, hogy lineáris topológia szerint, lásd [10] 1.2.2. Lemma bizonyítását), akkor környezete egy félmetrika által generált m-topológiának (illetve lineáris topológiának).

3.4.3. Állítás. *Ha E algebra $\mathbb{K}$ felett, akkor létezik E feletti legnagyobb m-topológia. Ha $\mathfrak{B}$ jelöli azon $V\subseteq E$ halmazokat, amelyekhez létezik az E kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak olyan $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre $W_0+W_0\subseteq V$ és $W_0\cdot W_0\subseteq V$, továbbá minden $n\in\mathbb{N}$-re $W_{n+1}+W_{n+1}\subseteq W_n$ és $W_{n+1}\cdot W_{n+1}\subseteq W_n$ teljesül, akkor $\mathfrak{B}$ környezetbázisa ennek a topológiának.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy $\mathfrak{B}$ rács. Legyen $V,V'\in\mathfrak{B}$, ezekhez léteznek az E kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak olyan $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(W'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatai, amelyekre $W_0+W_0\subseteq V$, $W_0\cdot W_0\subseteq V$, $W'_0+W'_0\subseteq V'$ és $W'_0\cdot W'_0\subseteq V'$, továbbá minden $n\in\mathbb{N}$-re $W_{n+1}+W_{n+1}\subseteq W_n$ és $W_{n+1}\cdot W_{n+1}\subseteq W_n$, valamint $W'_{n+1}+W'_{n+1}\subseteq W'_n$ és

$W'_{n+1}\cdot W'_{n+1} \subseteq W'_n$. Ekkor a $(W_n \cap W'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat kiegyensúlyozott és elnyelő halmazokból áll, $(W_0 \cap W'_0)+(W_0 \cap W'_0) \subseteq V \cap V'$, $(W_0 \cap W'_0)\cdot(W_0 \cap W'_0) \subseteq V \cap V'$, illetve minden $n \in \mathbb{N}$-re $(W_{n+1} \cap W'_{n+1}) + (W_{n+1} \cap W'_{n+1}) \subseteq W_n \cap W'_n$ és $(W_{n+1} \cap W'_{n+1}) \cdot (W_{n+1} \cap W'_{n+1}) \subseteq W_n \cap W'_n$, azaz $V \cap V' \in \mathfrak{B}$.
Ha $V \in \mathfrak{B}$ és $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az E kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak olyan sorozata, amelyre $W_0 + W_0 \subseteq V$ és $W_0 \cdot W_0 \subseteq V$, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$-re $W_{n+1} + W_{n+1} \subseteq W_n$ és $W_{n+1}\cdot W_{n+1} \subseteq W_n$, akkor minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $W_m \in \mathfrak{B}$, mert $(W_{n+m+1})_{n\in\mathbb{N}}$ az E kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak olyan sorozata, amelyre $W_{m+1}+W_{m+1} \subseteq W_m$, $W_{m+1} \cdot W_{m+1} \subseteq W_m$, és minden $n \in \mathbb{N}$-re $W_{m+n+2} + W_{m+n+2} \subseteq W_{m+n+1}$, $W_{m+n+2} \cdot W_{m+n+2} \subseteq W_{m+n+1}$. Ennek segítségével bebizonyítjuk, hogy $\mathfrak{B}$-re $(AV_I), (AV_{II}), (AV_{III}), (AV'_{IV})$ teljesül.
Legyen $V \in \mathfrak{B}$, és $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az E kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak olyan sorozata, amelyre $W_0 + W_0 \subseteq V$, $W_0 \cdot W_0 \subseteq V$, és minden $n \in \mathbb{N}$-re $W_{n+1} + W_{n+1} \subseteq W_n$, $W_{n+1} \cdot W_{n+1} \subseteq W_n$. Ekkor $W_0 \subseteq V$ és W_0 elnyelő, ezért V is elnyelő, továbbá W_0 kiegyensúlyozott és $W_0 \in \mathfrak{B}$, tehát (AV_I) teljesül $\mathfrak{B}$-re. (AV_{II}) belátásához legyen először $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| > 1$. Ekkor $\lambda.W_0 \subseteq \lambda.V$, és W_0 kiegyensúlyozottsága miatt $W_0 \subseteq \lambda.W_0$, következésképpen $\lambda.W_0 \in \mathfrak{B}$. Legyen most $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $|\lambda| \le 1$. Ebben az esetben $\lambda.V \in \mathfrak{B}$, hiszen $(\lambda.W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az E kiegyensúlyozott és elnyelő halmazainak olyan sorozata, amelyre

$$(\lambda.W_0) + (\lambda.W_0) = \lambda.(W_0 + W_0) \subseteq \lambda.V \ ,$$

$$(\lambda.W_0) \cdot (\lambda.W_0) \subseteq (\lambda.W_0) \cdot W_0 = \lambda.(W_0 \cdot W_0) \subseteq \lambda.V \ ,$$

és minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$(\lambda.W_{n+1}) + (\lambda.W_{n+1}) = \lambda.(W_{n+1} + W_{n+1}) \subseteq \lambda.W_n \ ,$$

$$(\lambda.W_{n+1}) \cdot (\lambda.W_{n+1}) \subseteq (\lambda.W_{n+1}) \cdot W_{n+1} = \lambda.(W_{n+1} \cdot W_{n+1}) \subseteq \lambda.W_n \ ,$$

azaz (AV_{II}) teljesül $\mathfrak{B}$-re. Végül, $W_0 \in \mathfrak{B}$, $W_0 + W_0 \subseteq V$ és $W_0 \cdot W_0 \subseteq V$, tehát (AV_{III}) és (AV_{IV}) is teljesül $\mathfrak{B}$-re.
Jelölje $\mathcal{T}$ azt az m-topológiát E felett, amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa (2.1.4. Tétel). Ha $\mathcal{T}'$ m-topológia E felett, és V környezete a 0-nak $\mathcal{T}'$ szerint, akkor az előző állítás alapján $V \in \mathfrak{B}$. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{T}$ bármely E feletti m-topológiánál nagyobb-egyenlő. □

3.4.4. Következmény. *Legyen E algebra $\mathbb{K}$ felett. Egy $V \subseteq E$ halmaz pontosan akkor környezete a 0-nak az E feletti legnagyobb m-topológia szerint, ha létezik az E kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak olyan $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre $W_0 + W_0 \subseteq V$ és $W_0 \cdot W_0 \subseteq V$, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$-re $W_{n+1} + W_{n+1} \subseteq W_n$ és $W_{n+1} \cdot W_{n+1} \subseteq W_n$ teljesül.*

Arra a kérdésre, hogy egy $\mathbb{K}$ feletti E algebrán létezik-e legnagyobb lokálisan m-konvex topológia, szintén pozitív választ tudunk adni, hasonló okokból, mint az alfejezet elején, ugyanis az összes E lokálisan m-konvex topológia szuprémuma (az antidiszkrét topológia mindig lokálisan m-konvex) lokálisan m-konvex lesz a 3.2.2. Következmény alapján. A legnagyobb lokálisan m-konvex topológiában is tudjuk jellemezni a 0 környezeteit.

3.4.5. Állítás. *Legyen E algebra $\mathbb{K}$ felett. Egy $V \subseteq E$ halmaz pontosan akkor környezete a 0-nak az E feletti legnagyobb lokálisan m-konvex topológiában, ha tartalmaz m-konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő halmazt.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{B}$ az E összes m-konvex, kiegyensúlyozott, elnyelő részhalmazainak halmaza. Elég megmutatnunk, hogy $\mathfrak{B}$ környezetbázisa a 0-nak az E feletti legnagyobb lokálisan m-konvex topológia szerint. (AV_I) és (AV'_{IV}) triviálisan teljesül $\mathfrak{B}$-re, továbbá (AV_{II}) is, mert $V \in \mathfrak{B}$ és $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ esetén $\lambda.V \in \mathfrak{B}$. Mivel $\mathfrak{B}$ minden eleme konvex halmaz, ezért minden $V \in \mathfrak{B}$-re $\frac{1}{2}.V + \frac{1}{2}.V \subseteq V$ teljesül, tehát (AV_{III}) teljesül $\mathfrak{B}$-re. $\mathfrak{B}$ zárt a véges metszetképzésre, tehát rács, így a 2.1.4. Tétel alapján létezik egyetlen olyan $\mathcal{T}$ m-topológia E felett, amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa. $\mathcal{T}$ lokálisan m-konvex, továbbá, ha $\mathcal{T}'$ lokálisan m-konvex topológia E felett, és ha V' a 0-nak környezete $\mathcal{T}'$ szerint, akkor tartalmaz $\mathcal{T}'$ szerinti m-hordót, ez pedig eleme $\mathfrak{B}$-nek, tehát $V' \in \mathfrak{B}$. Következésképpen $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, tehát $\mathcal{T}$ a legnagyobb lokálisan m-konvex topológia. □

Felmerül a kérdés, hogy egy $\mathbb{K}$ feletti algebrán a legnagyobb m-topológia lokálisan konvex-e? Erre lineáris topológiák és lokális konvexitás esetében pontos választ tudunk adni: ha E vektortér, akkor az E feletti legnagyobb lineáris toplógia pontosan akkor lokálisan konvex, ha E véges vagy megszámlálhatóan végtelen dimenziós. Az is ismeretes, hogy a legnagyobb lokálisan konvex topológia szeparált, következésképpen a legnagyobb lineáris topológia is, hiszen nagyobb-egyenlő a legnagyobb lokálisan konvex toplógiánál. Ezért adódik a következő kérdés is: egy $\mathbb{K}$ feletti algebrán a legnagyobb lokálisan m-konvex topológia szeparált-e? Mindkét kérdésre részleges választ fogunk adni.

3.4.6. Állítás. *Ha E egy $\mathbb{K}$ feletti egységelemes, véges dimenziós algebra, akkor létezik szubmultiplikatív norma E felett.*

Bizonyítás. Legyen E egy $\mathbb{K}$ feletti egységelemes, véges dimenziós algebra és $||\cdot||_E$ tetszőleges norma E felett. Jelölje $\mathcal{L}(E)$ az $E \to E$ $||\cdot||_E$ szerint folytonos, lineáris operátorok algebráját a pontonkénti összedás és a kompozíció műveletével, és legyen

$$l_a : E \to E;\ x \mapsto ax\,.$$

Minden $a \in E$ esetén l_a lineáris és folytonos is $||\cdot||_E$ szerint, mert E véges dimenziós ([10] 1.7.7. Következmény). Ekkor a

$$\Phi : E \to \mathcal{L}(E);\ a \mapsto l_a$$

leképezés algebra-morfizmus (mivel E asszocatív algebra). Továbbá injektív, mert ha $a \in E$ esetén $l_a = 0$, akkor $a = a\mathbf{1} = 0$. Jelölje $||\cdot||$ az $\mathcal{L}(E)$ feletti operátornormát. Mivel $||\cdot||$ szubmultiplikatív ([7] 1.4.2. Állítás), ezért $||\cdot|| \circ \Phi$ szubmultiplikatív norma E felett. □

Emlékeztetünk arra a tényre, hogy ha A egy teszőleges K test feletti algebra, és bevezetjük az $\tilde{A} := K \times A$ jelölést, továbbá a következő leképezéseket:

$$+ : \tilde{A} \times \tilde{A} \to \tilde{A}\,,\ \cdot : \tilde{A} \times \tilde{A} \to \tilde{A}\,,\ . : K \times \tilde{A} \to A$$

úgy, hogy minden (λ, a),$(\lambda', a') \in \tilde{A}$, és $\alpha \in K$ esetén

$$(\lambda, a) + (\lambda', a') = (\lambda + \lambda', a + a'),$$

$$(\lambda, a) \cdot (\lambda', a') = (\lambda\lambda', \lambda.a' + \lambda'.a' + aa'),$$

$$\alpha.(\lambda, a) = (\alpha\lambda, \alpha.a),$$

akkor $\tilde{A}$ a fenti műveletekkel ellátva olyan egységelemes algebra (az $(1, 0)$ egységelemmel), amelyre a $\{0\} \times A \subseteq \tilde{A}$ izomorf az A algebrával ([10] 13.2.1. Állítás).

3.4.7. Definíció. *Ha A algebra a K test felett, akkor az imént definiált $\tilde{A}$ algebrát az A* ***standard egységelemesítésének*** *nevezzük.*

3.4.8. Állítás. *Ha E véges dimenziós, $\mathbb{K}$ feletti algebra, akkor létezik szubmultiplikatív norma E felett.*

Bizonyítás. Legyen E véges dimenziós, $\mathbb{K}$ feletti algebra és jelölje $\tilde{E}$ a standard egységelemesítését, valamint j az $E \to \tilde{E}$; $a \mapsto (0, a)$ kanonikus injekciót. Legyen továbbá $||\cdot||$ szubmultiplikatív norma $\tilde{E}$ felett. Mivel j injektív algebra-morfizmus, ezért a $||\cdot|| \circ j$ szubmultiplikatív norma E felett. □

3.4.9. Állítás. *Legyen E véges dimenziós, $\mathbb{K}$ feletti algebra. Ekkor az E feletti legnagyobb m-konvex topológia szeparált. Továbbá a legnagyobb E feletti m-topológia és a legnagyobb olyan topológia, amellyel E folytonos szorzású topologikus algebra szintén szeparált.*

Bizonyítás. Az előző állítás miatt létezik szubmultiplikatív norma E felett, jelölje ezt $||\cdot||$ és $\mathcal{T}_{||\cdot||}$ az általa generált topológiát. A 3.2.4. Állítás miatt $\mathcal{T}_{||\cdot||}$ lokálisan m-konvex topológia, továbbá szeparált is (mert $||\cdot||$ norma E felett). Legyen $\mathcal{T}$ az E feletti legnagyobb lokálisan m-konvex topológia. Ekkor $\mathcal{T}$ nagyobb-egyenlő $\mathcal{T}_{||\cdot||}$-nál, következésképpen szeparált. Az állítás második fele abból következik, hogy a legnagyobb m-toplógia, valamint a legnagyobb olyan topológia, amivel E topologikus algebra, nagyobb egyenlő $\mathcal{T}$-nél. □

3.4.10. Következmény. *Ha E véges dimenziós, $\mathbb{K}$ feletti algebra, akkor az E feletti legnagyobb lokálisan m-konvex topológia és az E feletti legnagyobb m-topológia megegyezik, továbbá ez a topológia szubmultiplikatív normából származtatható.*

Bizonyítás. Legyen E véges dimenziós, $\mathbb{K}$ feletti algebra. Jelölje $\mathcal{T}$ a legnagyobb lokálisan m-konvex topológiát E felett és $\mathcal{T}'$ a legnagyobb m-topológiát E felett. Ekkor a $\mathcal{T}$ és $\mathcal{T}'$ topológiák lineárisak és szeparáltak, ezért [10] 1.7.5. Következménye miatt $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, és ugyanezen következmény, valamint a 3.4.8. Állítás miatt $\mathcal{T}$ szubmultiplikatív normából származtatható. □

Most megvizsgáljuk, hogy mi mondható el a nem megszámlálhatóan végtelen dimenziós esetről. Ehhez szükségünk lesz egy lemmára.

3.4.11. Lemma. *Legyen $(x_i)_{i\in I}$ $\mathbb{R}_+$-ban haladó rendszer. Tekintsük a következő állításokat*
(i) $\sup\limits_{J\subseteq I,\, J \text{ véges}} (\sum\limits_{i\in J} x_i) < +\infty$ *(azaz az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer szummálható)*
(ii) Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $K \subseteq I$ véges halmaz, hogy minden $i \in I \setminus K$ esetén $x_i < \varepsilon$ teljesül.
(iii) Az $\{i \in I \,|\, x_i \neq 0\}$ halmaz megszámlálható.
Ekkor teljesülnek az (i) $\Rightarrow$ (ii) és (ii) $\Rightarrow$ (iii) következtetések.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (ii) nem teljesül. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $K \subseteq I$ véges halmazhoz létezik olyan $i \in I \setminus K$, hogy $x_i \geq \varepsilon$ (ebből adódik, hogy I végetlen halmaz). Ekkor a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió-tétel alkamazásával kapjuk, hogy létezik olyan $I_0 \subseteq I$ megszámlálhatóan végtelen halmaz, amelyre minden $i \in I_0$ esetén $x_i \geq \varepsilon$ teljesül. Ekkor

$$+\infty = \sup_{J\subseteq I_0,\, J \text{ véges}} (\sum_{i\in J} x_i) \leq \sup_{J\subseteq I,\, J \text{ véges}} (\sum_{i\in J} x_i)$$

tehát (ii) tagadásából következik (i) tagadása.
Tegyük fel, hogy (ii) teljesül. Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozat, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $K_n \subseteq I$ olyan véges halmaz, amelyre minden $i \in I \setminus K_n$ esetén $x_i < \varepsilon_n$ teljesül. Ekkor $K := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ megszámlálható számosságú, és minden $i \in I \setminus K$ esetén $x_i = 0$, tehát a $(ii) \Rightarrow (iii)$ következtetés is igaz. $\square$

Megjegyzés. Az előző lemma $(ii) \Rightarrow (i)$ iránya is teljesül, illetve a *szummálhatóság* definíciója általánosabb körülmények között is megfogalmazható, ennek részletes tárgyalása megtalálható [8] 12. fejezetének 8.gyakorlatában.

3.4.12. Állítás. *Ha κ nem megszámlálható számosság, akkor létezik olyan E algebra, hogy* $\dim(E) = \kappa$ *és az E feletti legnagyobb m-topológia nem lokálisan m-konvex.*

Bizonyítás. Legyen T olyan halmaz, amelyre $Card(T) = \kappa$ teljesül. Ekkor a

$$\mathbb{K}^{(T)} := \{x : T \to K \text{ függvény} \,|\, [x \neq 0] \text{ véges halmaz}\}$$

függvényhalmaz a pontonkénkénti műveletekkel ellátva olyan algebra, amelyre $\dim(\mathbb{K}^{(T)}) = \kappa$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a $\mathbb{K}^{(T)}$ algebra feletti legnagyobb m-topológia nem lokálisan m-konvex (valójában nem is lokálisan konvex). Minden $p \in]0, 1[$, $r \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen

$$V(p, r) := \{x \in \mathbb{K}^{(T)} \,|\, \sum_{t\in T} x(t) \leq r\}\,.$$

Legyen $p \in]0, 1[$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Ekkor $V(p, r)$ kiegyensúlyozott, ugyanis ha $\lambda \in B_1(0; \mathbb{K})$ és $x \in V(p, r)$, akkor

$$\sum_{t\in T} |\lambda x(t)|^p \leq \sum_{t\in T} |x(t)|^p \leq r\,,$$

azaz $\lambda.x \in V(p,r)$. $V(p,r)$ elnyelő is, mert ha $x \in \mathbb{K}^{(T)}$, akkor $s := \frac{r^{\frac{1}{p}}}{(\sum\limits_{t\in T} |x(t)|^p+1)^{\frac{1}{p}}} \in \mathbb{R}^+$ választással $s.x \in V(p,r)$ teljesül. Legyen most $p \in]0,1[$ és $r \in]0,1[$, megmutatjuk, hogy $V(p,r)$ környezete a 0-nak $\mathbb{K}^{(T)}$-ben a legnagyobb m-topológia szerint. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $x, y \in V(p, \frac{r}{2^{n+1}})$, akkor

$$\sum_{t\in T} |x(t) + y(t)|^p \leq \sum_{t\in T} |x(t)|^p + |y(t)|^p \leq \frac{r}{2^{n+1}} + \frac{r}{2^{n+1}} = \frac{r}{2^n} \, ,$$

$$\sum_{t\in T} |x(t)y(t)|^p \leq \left(\sum_{t\in T} |x(t)|^p\right)\left(\sum_{t\in T} |y(t)|^p\right) \leq \frac{r^2}{2^{2n+1}} \leq \frac{r}{2^n} \, ,$$

tehát minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$V(p, \frac{r}{2^{n+1}}) + V(p, \frac{r}{2^{n+1}}) \subseteq V(p, \frac{r}{2^n}) \, ,$$

$$V(p, \frac{r}{2^{n+1}}) \cdot V(p, \frac{r}{2^{n+1}}) \subseteq V(p, \frac{r}{2^n}) \, ,$$

így 3.4.4. Következmény alapján $V(p,r)$ környezete a 0-nak $\mathbb{K}^{(T)}$-ben a legnagyobb m-topológia szerint. Belátjuk, hogy $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $V(\frac{1}{2}, r)$ nem tartalmaz konvex, elnyelő halmazt. Indirekten tegyük fel, hogy $V \subseteq V(\frac{1}{2}, r)$ konvex, elnyelő halmaz. Minden $t \in T$-re legyen $e_t : T \to \mathbb{K}$, amelyre $t' \in T$ esetén

$$e_t(t') := \begin{cases} 1 & ; \text{ ha } t' = t \\ 0 & ; \text{ egyébként.} \end{cases}$$

V elnyelősége miatt minden $t \in T$ esetén létezik olyan $s \in \mathbb{R}^+$, hogy $s.e_t \in V$, tehát *kiválaszthatunk* egy olyan $s : T \to \mathbb{R}^+$ függvényt, amelyre minden $t \in T$ esetén $s(t).e_t \in V$. Legyen $H \subseteq T$ nemüres, véges halmaz, ekkor

$$\sum_{t\in H} \left(\frac{s(t)}{\sum\limits_{t\in H} s(t)}\right).(s(t).e_t) \in conv(V) = V \subseteq V(\frac{1}{2}, r) \, ,$$

tehát

$$\sum_{t\in H} \left(\frac{s(t)^2}{\sum\limits_{t\in H} s(t)}\right)^{\frac{1}{2}} \leq r \, ,$$

következésképpen $\sum\limits_{t\in H} s(t) \leq r^2$, ami ellentmondás, hiszen T nem megszámlálhatóan végtelen, így az előző lemma miatt $\sup\limits_{H\subseteq T,\, H \text{ véges}} (\sum\limits_{t\in H} s(t)) = +\infty$. Tehát $r \in]0,1[$ esetén $V(\frac{1}{2}, r)$ környezete a 0-nak $\mathbb{K}^{(T)}$-ben a legnagyobb m-toplógia szerint, de nem környezete a 0-nak a legnagyobb lokálisan m-konvex toplógia szerint (sőt [10] 3.4.4. Állítása miatt a legnagyobb lokálisan konvex topológia szerint sem). $\square$

4. Spektrum topologikus algebrákban

4.1. Elem spektruma algebrákban, kvázireguláris elemek, rezolvens függvény

4.1.1. Definíció. *Legyen A algebra a K test felett, és vezessük be a következő műveletet:*

$$\circ : A \times A \to A\,;\ (a, a') \mapsto a + a' - aa'$$

$a, a' \in A$ esetén az $a \circ a'$ elemet a és a' ***kváziszorzatának*** *nevezzük. Egy $a \in A$ elemet* ***kváziregulárisnak*** *nevezünk, ha létezik olyan $b \in A$, amelyre $a \circ b = b \circ a = 0$ teljesül, és ekkor b-t az a elem* ***kváziinverzének*** *nevezzük, és az a° szimbólummal jelöljük. Az A algebra nem kvázireguláris elemeit* ***kváziszingulárisaknak*** *nevezzük.*

Megjegyzés. Legyen A algebra a K test felett.
1.) A $\circ$ művelet asszociatív. Valóban, $a, b, c \in A$ esetén

$$(a \circ b) \circ c = (a + b - ab) \circ c = a + b - ab + c - ac - bc + abc =$$

$$= a + b \circ c - a(b \circ c) = a \circ (b \circ c)\,.$$

2.) Legyen $a \in A$. Ekkor, ha $b, c \in A$ olyanok, hogy $b \circ a = 0$ és $a \circ c = 0$, akkor $b = c$, ugynanis:

$$b = b \circ 0 = b \circ (a \circ c) = (b \circ a) \circ c = 0 \circ c = c.$$

Ebből adódóan a kváziinverz egyértelmű.
3.) Ha $a \in A$ kváziinvertálható, akkor $(a^\circ)^\circ = a$.
4.) Ha A egységelemes algebra és $\mathbf{1}$ jelöli az egységelemét, akkor $a, b \in A$ esetén $a \circ b = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $(\mathbf{1} - a)(\mathbf{1} - b) = \mathbf{1}$.

A továbbiakban - ha ez nem vezet félreértésre - algebra egységelemét az $\mathbf{1}$ szimbólummal jelöljük.

4.1.2. Definíció. *Ha A egységelmes algebra a K test felett, akkor $\mathbf{G}(A)$ jelöli az invertálható elemeinek halmazát. Ha A (nem feltélenül egységelemes) algebra, akkor $\mathbf{G}'(A)$ jelöli a kvázireguláris elemeinek halmazát.*

4.1.3. Definíció. *Ha A egységelemes algebra a K test felett, és $a \in K$, akkor*

$$Sp_A(a) := \{\lambda \in K \mid \lambda.\mathbf{1} - a \notin \mathbf{G}(A)\}\,,$$

és az $Sp_A(a)$ halmazt az $a \in A$ elem ***spektrumának****, a $K \setminus Sp_A(a)$ halmazt az $a \in A$ elem* ***rezolvenshalmazának*** *nevezzük. Ha $a \in A$, akkor az*

$$R(a, .) : K \setminus Sp_A(a) \to A\,;\ \lambda \mapsto (\lambda.\mathbf{1} - a)^{-1}$$

leképezést az $a \in A$ elem ***rezolvens függvényének*** *nevezzük.*

4.1.4. Állítás. *Ha A egységelemes algebra a K test felett, $a \in A$ és $\lambda, \mu \in K \setminus Sp_A(a)$, akkor*

$$R(a, \lambda) - R(a, \mu) = (\mu - \lambda).R(a, \lambda)R(a, \mu)\,.$$

Bizonyítás. Legyen A egységelemes algebra a K test felett, $a \in A$ és $\lambda, \mu \in Sp_A(a)$. Mivel $R(a, \lambda)R(a, \mu) = R(a, \mu)R(a, \lambda)$, ezért

$$R(a, \lambda) - R(a, \mu) = R(a, \lambda)R(a, \mu)((\mu.\mathbf{1} - a) - (\lambda.\mathbf{1} - a)) =$$

$$= (\mu - \lambda).R(a, \lambda)(R(a, \mu)\,. \;\square$$

4.1.5. Definíció. *Ha A algebra a K test felett, és $a \in A$, akkor*

$$Sp'_A(a) := \{\lambda \in K \setminus \{0\} \mid \lambda^{-1}.a \notin \mathbf{G}'(E)\} \cup \{0\}\,,$$

*és az $Sp'_A(a)$ halmazt az a elem **vesszős spektrumának** nevezzük.*

4.1.6. Állítás. *Ha A algebra a K test felett, és $\tilde{A}$ a standard egyégelmesítése (3.4.7. Definíció), akkor minden $a \in A$ esetén*

$$Sp'_A(a) = Sp_{\tilde{A}}((0, a))\,,$$

továbbá, ha A egységelemes algebra, akkor minden $a \in A$ esetén

$$Sp'_A(a) = Sp_A(a) \cup \{0\}.$$

Bizonyítás. Először is, ha A egységelemes algebra a K test felett, akkor a 4.1.1. Definíció utáni 4. megjegyzés alapján $\lambda \in K \setminus \{0\}$ és $a \in A$ esetén $\lambda^{-1}.a$ pontosan akkor kvázireguláris, ha $\lambda.\mathbf{1} - a$ invertálható. Ezzel beláttuk a második egyenlőséget. Legyen most A nem feltétlenül egységelemes algebra a K test felett. Ekkor $a \in A$ pontosan akkor kvázireguláris A-ban, ha $(0, a)$ kvázireguláris $\tilde{A}$-ban. Ennek bizonyításához tegyük fel először, hogy $a \in A$ kvázireguláris, kváziinverze pedig b, és ha j-vel jelöljük az $A \to \tilde{A}$; $a \mapsto (0, a)$ kanonikus injekciót, akkor

$$(0, a) \circ (0, b) = j(a) \circ j(b) = j(a \circ b) = j(0) = (0, 0).$$

Megfordítva, ha $(a, 0)$ kváziinvertálható $\tilde{A}$-ban, és kváiziinverze (λ, b), akkor $\lambda = 0$, ugyanis

$$(0, 0) = (0, a) \circ (\lambda, b) = (\lambda, a + b) - (0, \lambda.a + ab) = (\lambda, (1 - \lambda).a + b + ab).$$

Ez alapján ha $\lambda \in K \setminus \{0\}$ és $a \in A$, akkor $\lambda^{-1}.a$ pontosan akkor kváziinvertálható A-ban, ha $(0, \lambda^{-1}.a)$ kváziinvertálható $\tilde{A}$-ban, ami ekvivalens a $\lambda.(1, 0) - (0, a)$ invertálhatóságával $\tilde{A}$-ban. Tehát az első egyenlőséghez azt kell még belátni, hogy $a \in A$ esetén $0 \in Sp_{\tilde{A}}((0, a))$. Ez pedig azért igaz, mert ha létezne olyan $(\lambda, b) \in \tilde{A}$, hogy $(0, a) \cdot (\lambda, b) = (1, 0)$, akkor $1 = 0$ teljesülne K-ban. $\square$

4.2. Folytonos inverzű algebrák

4.2.1. Definíció. *Legyen E egységelemes topologikus algebra, és jelölje $\mathcal{T}_E$ a topológiáját. Ekkor E-t* ***folytonos inverzű topologikus algebrának*** *nevezzük, ha a $\mathbf{G}(E) \to \mathbf{G}(E)$; $a \mapsto a^{-1}$ leképezés folytonos $\mathcal{T}_E|_{\mathbf{G}(E)}$ szerint.*

4.2.2. Definíció. *Legyen E topologikus algebra, és jelölje $\mathcal{T}_E$ a topológiáját. Ekkor E-t* ***folytonos kváziinverzű topologikus algebrának*** *nevezzük, ha a $\mathbf{G}'(E) \to \mathbf{G}'(E)$; $a \mapsto a^\circ$ leképezés folytonos $\mathcal{T}_E|_{\mathbf{G}'(E)}$ szerint.*

Belátjuk, hogy minden egységelemes, lokálisan m-konvex algebra folytonos inverzű topologikus algebra. Ehhez először vegyük észre, hogy [10] 14.3.4. Állítása igaz félnormált egységelemes algebrákra ugyanazzal a bizonyítással (egy algebrát *félnormált algebrának* nevezünk, ha adott felette egy szubmultiplikatív félnorma). A rend kedvéért bebizonyítjuk erre az esetre is az utóbbi állítást.

4.2.3. Állítás. *Ha E egy $\mathbb{K}$ feletti egységelemes algebra, és $p : E \to \mathbb{R}_+$ szubmultiplikatív félnorma E felett, akkor a $\mathbf{G}(E) \to \mathbf{G}(E)$; $a \mapsto a^{-1}$ leképezés folytonos a p félnorma szerint*

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathbf{G}(E)$ rögzített, és $x \in E$ olyan, hogy $a + x \in \mathbf{G}(E)$. Ekkor az $y := (a + x)^{-1} - a^{-1}$ elemre $(a^{-1} + y)(a + x) = \mathbf{1}$, azaz $\mathbf{1} + ya + a^{-1}x + yx = \mathbf{1}$, tehát $y = -a^{-1}xa^{-1} - yxa^{-1}$. Ebből $p(y) \leq p(a^{-1})^2 p(x) + p(y)p(x)p(a^{-1})$ adódik, így ha $r \in]0, 1[$, és $x \in E$ olyan, hogy $p(x) \leq \frac{r}{p(a^{-1})}$, akkor

$$p((a + x)^{-1} - a^{-1}) = p(y) \leq \frac{p(a^{-1})^2}{1 - p(x)p(a^{-1})} p(x) \leq \frac{p(a^{-1})^2}{1 - r} p(x)\,.$$

Tehát létezik olyan $C, r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in B_r(x, p) \cap \mathbf{G}(E)$ esetén

$$p(z^{-1} - a^{-1}) \leq Cp(z - a)\,,$$

következésképpen a $\mathbf{G}(E) \to \mathbf{G}(E)$; $a' \mapsto a'^{-1}$ leképezés folytonos az $a \in \mathbf{G}(E)$ pontban. □

4.2.4. Állítás. *Minden egységelemes, lokálisan m-konvex algebra folytonos inverzű topologikus algebra.*

Bizonyítás. Legyen E lokálisan m-konvex algebra, és $(p_i)_{i \in I}$ olyan szubmultiplikatív félnormarendszer, ami az E topológiáját generálja. Ekkor a $\mathbf{G}(E) \to \mathbf{G}(E)$; $a \to a^{-1}$ leképezés minden $i \in I$-re folytonos a p_i félnorma szerint, ezért [10] 3.7.1. Tétele miatt folytonos az E topológiája szerint is. □

Megjegyzés. Belátható, hogy ha E olyan egységelemes, metrizálható topologikus algebra, amelyre $\mathbf{G}(E)$ az altértopológiával ellátva szeparábilis Baire-tér (azaz minden nemüres nyílt részhalmaza második kategóriájú), akkor E folytonos szorzású. Ennek bizonyításához nemtriviális tényekre van szükség a topologikus csoportok elméletéből, ez pedig túlmutat a dolgozat keretein. Ezek az állítások egyébként megtalálhatóak [4] II. fejezetében.

4.2.5. Állítás. *Legyen E folytonos inverzű algebra és $a \in E$. Ha létezik olyan $\mathbb{K} \setminus (Sp_E(a) \cup \{0\})$-ban haladó $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat, amelyre $\lim\limits_{k\to\infty} |\lambda_k| = +\infty$, akkor $\lim\limits_{k\to\infty} R(a, \lambda_k) = 0$.*

Bizonyítás. Jelölje $m_{\mathbb{K}}$, $i_{\mathbf{G}(E)}$ és s_E a következő leképezéseket:

$$m_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \times E \to E\,;\ (\lambda, x) \to \lambda.x\,,$$

$$i_{\mathbf{G}(E)} : \mathbf{G}(E) \to \mathbf{G}(E)\,;\ x \to x^{-1}\,,$$

$$s_E : E \times E \to E\,;\ (x, y) \to x + y\,.$$

Ekkor $\lambda \in \mathbb{K} \setminus (Sp_E(a) \cup \{0\})$ esetén

$$R(a, \lambda) := (\lambda.\mathbf{1} - a)^{-1} = (\lambda.(\mathbf{1} - \lambda^{-1}.a))^{-1} = \lambda^{-1}.(\mathbf{1} - \lambda^{-1}.a)^{-1} =$$

$$= m_{\mathbb{K}}(\lambda^{-1}, i_{\mathbf{G}(E)}(s_E(\mathbf{1}, m_{\mathbb{K}}(-\lambda^{-1}, a)))).$$

Legyen V a 0-nak környezete E-ben és

$$R_a^{-1} := \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathbb{K} \setminus (Sp_E(a) \cup \{0\})\} \cup \{0\}$$

Mivel $m_{\mathbb{K}}$ folytonos a $(0, \mathbf{1}) \in \mathbb{K} \times E$ pontban, ezért létezik olyan $r' \in \mathbb{R}^+$, és W környezete a 0-nak hogy $|\alpha| < r'$ esetén $\alpha.(\mathbf{1} + W) \subseteq V$. Továbbá az

$$R_a \to E\,;\ \alpha \mapsto i_{\mathbf{G}(E)}(s_E(\mathbf{1}, m_{\mathbb{K}}(-\alpha, a)))$$

függvény is folytonos (folytonos függvények kompozíciója), ezért W-hez létezik olyan $r'' \in \mathbb{R}^+$, amelyre $|\alpha| < r''$, $\alpha \in R_a^{-1}$ esetén $i_{\mathbf{G}(E)}(\mathbf{1} - \alpha.a) \in \mathbf{1} + W$. Legyen $r := \min\{r', r''\}$. Ekkor $|\alpha| < r$ és $\alpha \in R_a^{-1}$ esetén $m_{\mathbb{K}}(\alpha, i_{\mathbf{G}(E)}(s_E(\mathbf{1}, m_{\mathbb{K}}(-\alpha, a)))) \in V$, tehát, ha $|\lambda_k| > \frac{1}{r}$, akkor $R(a, \lambda_k) \in V$, azaz $\lim\limits_{k\to\infty} R(a, \lambda_k) = 0$. □

4.2.6. Tétel. *Legyen E egy $\mathbb{C}$ feletti folytonos inverzű algebra, amelyre E' szétválasztó E felett és $a \in E$. Ekkor $Sp_E(a) \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy $Sp_E(a) = \emptyset$. Ekkor $Dom(R(a, .)) = \mathbb{C}$, és tetszőleges $f \in E'$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ esetén a 4.1.4. Állítás, valamint f és $R(a, .)$ függvények folytonossága alapján

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{f(R(a,\lambda)) - f(R(a,\lambda_0))}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda\to\lambda_0} -f(R(a,\lambda))f(R(a,\lambda_0)) = -(f(R(a,\lambda_0)))^2\,,$$

tehát $f(R(a, .)) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ egész függvény, így az előző állítás és a Liouville-tétel miatt konstans, következésképpen $f(R(a, .)) \equiv 0$ (szintén az előző állítás miatt). Ez azt jelenti, hogy $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén minden $f \in E'$-re $f((\lambda.\mathbf{1} - a)) = 0$, és mivel E' szétválasztó, ezért $(\lambda.\mathbf{1} - a)^{-1} = 0$, tehát ellentmondásra jutottunk. □

4.2.7. Következmény. *Ha E szeparált, lokálisan konvex, folytonos inverzű topologikus algebra, akkor minden $a \in E$ esetén $Sp_E(a) \neq \emptyset$. Ha E szeparált, lokálisan m-konvex algebra, akkor minden $a \in E$ esetén $Sp_E(a) \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Az első állításhoz legyen E szeparált, lokálisan konvex, folytonos inverzű topologikus algebra. A Hahn–Banach-tétel következménye miatt ([10] 4.2.4. Következmény) E' szétválasztó E felett, így az előző állítás alapján minden $a \in E$-re $Sp_E(a) \neq \emptyset$. Legyen most E szeparált, lokálisan m-konvex algebra. Ekkor a 4.2.4. Állításból adódóan E folytonos inverzű, szeparált, lokálisan konvex topologikus algebra, így az első állítás alapján minden $a \in E$-re $Sp_E(a) \neq \emptyset$. □

4.2.8. Tétel (Gelfand – Mazur-tétel). *Ha E olyan egységelemes komplex, folytonos inverzű algebra, amelyben minden nemnulla elem invertálható, és E' szétválasztó E felett, akkor E topologikusan izomorf $\mathbb{C}$-vel.*

Bizonyítás. Legyen $a \in E \setminus \{0\}$. Ekkor a 4.2.6. Tétel miatt létezik olyan $\lambda \in \mathbb{C}$, amelyre $a = \lambda.\mathbf{1}$. Tehát $E = \mathbb{C}.\mathbf{1}$, és E-re teljesül, hogy minden $\mathbb{C} \to E$ bijekció homeomorfizmus ([10] 1.7.5. Következmény), ezért a

$$\mathbb{C} \to E;\ \lambda \mapsto \lambda.\mathbf{1}$$

algebra-izomorfizmus homeomorfizmus lesz. □

Megjegyzés. Az előbbi bizonyítás a hivatkozás nélkül is meggondolható. A

$$\Phi : \mathbb{C} \to E;\ \lambda \mapsto \lambda.\mathbf{1}$$

leképezés folytonosságához legyen U környezete a 0-nak, és legyen $r := \min\{1, \sup\{|\lambda| \mid \lambda.\mathbf{1} \in U\}\}$. Ekkor $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < r$ esetén $\lambda.\mathbf{1} \in U$, tehát Φ a 0-ban folytonos, következésképpen folytonos. Megmutatjuk, hogy Φ^{-1} is folytonos. Legyen $\varepsilon > 0$, ehhez létezik olyan U kiegyensúlyozott környezete a 0-nak E-ben, amelyre $\varepsilon.\mathbf{1} \notin U$ (mert abból, hogy E' szétválasztó E felett, következik, hogy E szeparált). Ekkor minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re ha $\lambda.\mathbf{1} \in U$, akkor $|\lambda| \leq \varepsilon$, mert ha nem így lenne, akkor $\varepsilon.\mathbf{1} = \frac{\varepsilon}{\lambda}.(\lambda.\mathbf{1}) \in U$ teljesülne, tehát Φ^{-1} is folytonos, a 0-ban, így Φ homeomorfizmus.

4.2.9. Következmény. *Ha E olyan egységelemes, komplex, szeparált lokálisan m-konvex algebra, amelyben minden nemnulla elem invertálható, akkor E topologikusan izomorf $\mathbb{C}$-vel.*

Bizonyítás. A szeparált m-konvexitásból következik, hogy E' szétválasztó E felett, illetve az is, hogy E folytonos inverzű algebra. □

4.3. Q-algebrák és Waelbroeck-algebrák, általánosított spektrálsugár

4.3.1. Definíció. *Egy E topologikus algebrát **Q-algebrának** nevezünk, ha a $\mathbf{G}'(E)$ halmaz nyílt E-ben, illetve **Waelbroeck-algebrának**, ha Q-algebra és folytonos kváziinverzű topologikus algebra.*

4.3.2. Állítás. *Legyen E egységelemes topologikus algebra. Ekkor E pontosan akkor Q-algebra, ha $\mathbf{G}(E)$ nyílt halmaz E-ben.*

Bizonyítás. Tetszőleges $a \in E$ esetén a pontosan akkor invertálható, ha $\mathbf{1} - a$ kváziinvertálható, ezért $\mathbf{G}(E) = \mathbf{1} - \mathbf{G}'(E)$. Mivel topologikus vektortérben az eltolások és a nemnulla skalárral szorzások homeomorfizmusok, ezért a $\mathbf{G}(E)$ és $\mathbf{G}'(E)$ halmazok nyíltsága ekvivalens. □

4.3.3. Állítás. *Legyen E egységelemes topologikus algebra. Ekkor E pontosan akkor folytonos inverzű topologikus algebra, ha folytonos kváziinverzű topologikus algebra.*

Bizonyítás. Legyen

$$i_{\mathbf{G}(E)} : \mathbf{G}(E) \to \mathbf{G}(E);\ a \mapsto a^{-1}\,,$$

$$k_{\mathbf{G}'(E)} : \mathbf{G}'(E) \to \mathbf{G}'(E);\ a \mapsto a^{\circ}\,,$$

$$s_E : E \times E \to E;\ (a,b) \mapsto a + b\,,$$

$$m_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \times E \to;\ (\lambda, a) \mapsto \lambda.a$$

Ekkor a 4.1.1. Definícó utáni megjegyzés 4. pontja alapján minden $a \in \mathbf{G}'(E)$-re $a^{\circ} = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - a)^{-1}$ és minden $b \in \mathbf{G}(E)$-re $b^{-1} = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - b)^{\circ}$. Tehát

$$k_{\mathbf{G}'(E)} = s_E(\mathbf{1}, m_{\mathbb{K}}(-1, i_{\mathbf{G}(E)}(s_E(\mathbf{1}, m_{\mathbb{K}}(-1, (id_E))))))\,,$$

$$i_{\mathbf{G}(E)} = s_E(\mathbf{1}, m_{\mathbb{K}}(-1, k_{\mathbf{G}'(E)}(s_E(\mathbf{1}, m_{\mathbb{K}}(-1, (id_E))))))\,,$$

így s_E és $m_{\mathbb{K}}$ folytonossága miatt $i_{\mathbf{G}(E)}$ és $k_{\mathbf{G}'(E)}$ folytonssága ekvivalens. □

4.3.4. Következmény. *Legyen E egységelemes topologikus algebra. Ekkor E pontosan akkor Waelbroeck-algebra, ha folytonos inverzű topologikus algebra, és $\mathbf{G}(E)$ nyílt E-ben.*

Bizonyítás. Az előző két állításból következik. □

4.3.5. Állítás. *Ha E egységelemes Waelbroeck-algebra, akkor minden $a \in E$ esetén $Sp_E(a)$ zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban. Ha E Waelbroeck-algebra, akkor minden $a \in E$-re $Sp'_E(a)$ zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban.*

Bizonyítás. Legyen E egységelemes Waelbroeck-algebra, és $a \in E$. Mivel az $s_a : \mathbb{K} \to E$; $\lambda \mapsto \lambda.\mathbf{1} - a$ leképezés folytonos a megfelelő topológiák szerint, ezért $\mathbb{K} \setminus Sp_E(a) = \overset{-1}{s_a} \langle \mathbf{G}(E) \rangle$ nyílt halmaz $\mathbb{K}$-ban, tehát $Sp_E(a)$ zárt $\mathbb{K}$-ban. Az állítás második részéhez legyen E (nem feltétlenül egységelemes) Waelbroeck-algebra és $a \in E$. Ha $m_{\mathbb{K}}$ jelöli a következő leképezést

$$m_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \times E \to E\,;\ (\lambda, x) \to \lambda.x\,,$$

akkor a

$$\mathbb{K} \setminus Sp'_E(a) = \{\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, |\, \lambda^{-1}.a \in \mathbf{G}'(E)\} = \overset{-1}{(m_{\mathbb{K}}(.,a) \circ \frac{1}{id_{\mathbb{K}}})} \langle \mathbf{G}'(E) \rangle$$

nyílt halmaz $\mathbb{K} \setminus \{0\}$-ban az altértopológia szerint, tehát $Sp'_E(a) \setminus \{0\}$ zárt $\mathbb{K} \setminus \{0\}$-ban az altértopológia szerint. Ez azt jelent, hogy létezik olyan $F \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz, hogy $Sp'_E(a) = F \setminus \{0\}$, következésképpen $Sp'_E(a)$ zárt halmaz $\mathbb{K}$-ban. □

4.3.6. Lemma. *Ha E topologikus algebra, akkor az*

$$l'_a : E \to E;\ x \mapsto a \circ x\,,$$

$$r'_a : E \to E;\ x \mapsto x \circ a$$

leképezések folytonosak E topológiája szerint.

Bizonyítás. Minden $a \in E$ esetén definiáljuk a következő leképezésket:

$$l_a : E \to E;\ x \mapsto ax\,,$$

$$r_a : E \to E;\ x \mapsto xa\,,$$

és legyen

$$s_E : E \times E \to E;\ (x, y) \mapsto x + y.$$

Ekkor s_E folytonos, és minden $a \in E$ esetén l_a, r_a is folytonos az E topológiája szerint. Legyen $a \in E$, ekkor

$$l'_a = s_E(s_E(a, .), l_{-a}(.))\,,$$

$$r'_a = s_E(s_E(., a), r_{-a}(.))\,,$$

tehát l'_a és r'_a folytonos, mert mindkettő folytonos függvények kompozíciója. □

4.3.7. Állítás. *Legyen E topologikus algebra. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*
(i) $\mathbf{G}'(E)$ *nyílt halmaz E-ben, azaz E Q-algebra*
(ii) $int(\mathbf{G}'(E)) \neq \emptyset$
(iii) $\mathbf{G}'(E)$ *környezete 0-nak.*

Bizonyítás. Mivel $0 \in \mathbf{G}'(E)$, ezért az $(i) \Rightarrow (ii)$ következtetés világos, ugyanaezen ok miatt $(i) \Rightarrow (iii)$ is, továbbá $(iii) \Rightarrow (ii)$ is triviálisan teljesül. Be kell még látnunk, hogy (ii)-ből következik (i). Tegyük fel, hogy (ii) teljesül, és minden $a \in E$ esetén jelölje l'_a és r'_a a következő leképezéseket:

$$l'_a : E \to E;\ x \mapsto a \circ x\,,$$

$$r'_a : E \to E;\ x \mapsto x \circ a\,.$$

Legyen $x \in \mathbf{G}'(E)$ és $a \in int(\mathbf{G}'(E))$. Ekkor $l'_{a\circ x^\circ}(x) = r'_{x^\circ\circ a}(x) = a \in int(\mathbf{G}'(E))$, tehát

$$x \in (\overset{-1}{l'_{a\circ x^\circ}}\langle int(\mathbf{G}'(E))\rangle) \cap (\overset{-1}{r'_{x^\circ\circ a}}\langle int(\mathbf{G}'(E))\rangle)\,,$$

továbbá

$$(\overset{-1}{l'_{a\circ x^\circ}}\langle int(\mathbf{G}'(E))\rangle) \cap (\overset{-1}{r'_{x^\circ\circ a}}\langle int(\mathbf{G}'(E))\rangle) \subseteq \mathbf{G}'(E)\,.$$

Valóban, ha y eleme a baloldali halmaznak, akkor $a \circ x^\circ \circ y$ és $y \circ x^\circ \circ a$ elemek kváziinvertálhatóak, tehát létezik olyan $y', y'' \in E$, hogy $y' \circ (a \circ x^\circ \circ y) = 0$ és $(y \circ x^\circ \circ a) \circ y'' = 0$. Mivel

$$(y' \circ a \circ x^\circ) \circ y = y' \circ (a \circ x^\circ \circ y) = 0\,,$$

$$y \circ (x^\circ \circ a \circ y'') = (y \circ x^\circ \circ a) \circ y'' = 0\,,$$

ezért az $y \in E$ elem kváziinvertálható (sőt az is igaz, hogy $y' \circ a \circ x^\circ = x^\circ \circ a \circ y''$). Az $l'_{a\circ x^\circ}$, $r'_{x^\circ\circ a}$ függvények folytonossága miatt $(\overset{-1}{l'_{a\circ x^\circ}}\langle int(\mathbf{G}'(E))\rangle) \cap (\overset{-1}{r'_{x^\circ\circ a}}\langle int(\mathbf{G}'(E))\rangle)$ nyílt halmaz E-ben, következésképpen

$$x \in (\overset{-1}{l'_{a\circ x^\circ}}\langle int(\mathbf{G}'(E))\rangle) \cap (\overset{-1}{r'_{x^\circ\circ a}}\langle int(\mathbf{G}'(E))\rangle) \subseteq int(\mathbf{G}'(E))\,.$$

Ezzel beláttuk a $(ii) \Rightarrow (i)$ következtetést is. □

4.3.8. Állítás. *Legyen E egységelemes topologikus algebra. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*
(i) $\mathbf{G}(E)$ nyílt halmaz E-ben, azaz E Q-algebra
(ii) $int(\mathbf{G}(E)) \neq \emptyset$
(iii) $\mathbf{G}(E)$ környezete az egységelemnek.

Bizonyítás. Mivel $\mathbf{G}(E) = \mathbf{1} - \mathbf{G}'(E)$, ezért ez következik az előző állításból. □

4.3.9. Definíció. *Ha A algebra $\mathbb{K}$ felett, akkor minden $a \in A$-re legyen*

$$\varrho'_A(a) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in Sp'_A(a)\}\,,$$

ekkor $\varrho'_A(a)$-t az $a \in A$ elem ***általánosított spektrálsugarának*** *nevezzük.*

Megjegyzés. 1.) Ha A egységelemes algebra $\mathbb{K}$ felett és $a \in E$, akkor $Sp'_A(a) = Sp_A(a) \cup \{0\}$ miatt

$$\varrho'_A(a) = \begin{cases} \sup\{|\lambda| \,|\, \lambda \in Sp_A(a)\} & ; \text{ha } Sp_A(a) \neq \emptyset \\ 0 & ; \text{ha } Sp_A(a) = \emptyset \,. \end{cases}$$

2.) Ha A komplex Banach-algebra, akkor minden $a \in A$-ra $\varrho'_A(a) = \varrho_A(a)$, ahol $\varrho_A(a) := \inf\limits_{n \in \mathbb{N}^+} ||a^n||^{\frac{1}{n}}$ az $a \in A$ elem *spektrásugara*, ez következik a spektrálsugár minimalitási tulajdonságából ([10] 14.6.2. Tétel).

4.3.10. Állítás. *Legyen E topologikus algebra és*

$$S(E) := \{a \in E \,|\, \varrho'_E(a) \leq 1\}.$$

A következő állítások ekvivalensek:
(i) E Q-algebra
(ii) $S(E)$ a 0-nak környezete E-ben

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy E Q-algebra. Ekkor $\mathbf{G}'(E)$ környezete a 0-nak E-ben, tehát létezik a 0-nak olyan V kiegyensúlyozott környezete E-ben, amelyre $V \subseteq \mathbf{G}'(E)$ teljesül. Megmutatjuk, hogy $V \subseteq S(E)$. Indirekten tegyük fel, hogy $x \in V$ és $\varrho'_E(x) > 1$. Ekkor létezik $\lambda \in \mathbb{K}$, amelyre $|\lambda| > 1$ és $\lambda^{-1}.x \notin \mathbf{G}'(E)$, viszont V kiegyensúlyozott, tehát $\lambda^{-1}.x \in V \subseteq \mathbf{G}'(E)$, azaz $V \subseteq S(E)$ teljesül, így $S(E)$ a 0-nak környezete E-ben. Megfordítva, tegyük fel, hogy $S(E)$ a 0-nak környezete E-ben, és legyen $0 < r < 1$ rögzített szám. Ekkor $r.S(E)$ is környezete a 0-nak, valamint $r.S(E) \subseteq \mathbf{G}'(E)$ teljesül. Utóbbi bizonyításához tegyük fel indirekten, hogy $x \in S(E)$ és $r.x \notin \mathbf{G}'(E)$. Ekkor $\frac{1}{r}.x \in Sp_E(x)$, következésképpen $\varrho'_E(x) \geq r^{-1} > 1$, ez pedig ellentmond annak, hogy $x \in S(E)$. Tehát $r.S(E) \subseteq \mathbf{G}'(E)$ következésképpen $\mathbf{G}'(E)$ környezete a 0-nak E-ben, így a 4.3.7. Állítás miatt E Q-algebra. □

4.3.11. Tétel. *Ha E Q-algebra, akkor minden $a \in E$ esetén $Sp'_E(a)$ kompakt halmaz $\mathbb{K}$-ban. Ha E egységelemes Q-algebra, akkor minden $a \in E$ esetén $Sp_E(a)$ kompakt halmaz $\mathbb{K}$-ban.*

Bizonyítás. Legyen E Q-algebra és $a \in E$. Ekkor a 4.3.7. Állítás miatt $\mathbf{G}'(E)$ környezete a 0-nak, tehát létezik olyan $V \subseteq E$ kiegyensúlyozott környezete a 0-nak, amelyre $V \subseteq \mathbf{G}'(E)$. Mivel topologikus vektortérben a 0-nak minden környezete elnyelő, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, amelyre $r.a \in V$. Megmutatjuk, hogy $\varrho'_E(a) \leq \frac{1}{r}$. Tegyük fel indirekten, hogy $\varrho'_E(a) > \frac{1}{r}$, ekkor létezik olyan $\lambda \in \mathbb{K}$, amelyre $|\lambda| > \frac{1}{r}$ és $\lambda \in Sp'_E(a)$. Mivel $|\frac{1}{r\lambda}| < 1$ és V kiegyensúlyozott, ezért

$$\frac{1}{\lambda}.a = \left(\frac{1}{r\lambda}\right).(r.a) \in \frac{1}{r\lambda}.V \subseteq V\,.$$

Tehát $Sp'_E(a)$ korlátos halmaz, a zártságát pedig már korábban bizonyítottuk (4.3.5. Állítás). Az állítás második feléhez legyen E egységelmes Q-algebra és $a \in E$. Mivel $Card(Sp'_E(a) \setminus Sp_E(a)) \leq 1$, így $Sp'_E(a)$ kompaktságából adódóan $Sp_E(a)$ is kompakt $\mathbb{K}$-ban. $\square$

4.3.12. Következmény. *Ha E egységelemes, $\mathbb{C}$ feletti Waelbroeck-algebra, akkor minden $a \in E$ esetén $Sp_E(a)$ nemüres, kompakt halmaz $\mathbb{C}$-ben.*

Bizonyítás. Az előző és a 4.2.6. Tételből adódik. $\square$

5. Projektív limesz algebrák

5.1. Topologikus algebrák projektív limesze

5.1.1. Definíció. *A reflexív és tranzitív relációkat* ***előrendezéseknek*** *nevezzük, az antiszimmetrikus előrendezéseket pedig* ***rendezéseknek****. Azt mondjuk, hogy I* ***előrendezett halmaz*** *(illetve* ***rendezett halmaz****), ha adott I felett egy előrendezés (illetve rendezés). Az I halmaz feletti $\leq$ előrendezést* ***felfelé irányítottnak*** *nevezzük, ha minden $i_1, i_2 \in I$ esetén létezik olyan $i \in I$, hogy $i_1 \leq i$ és $i_2 \leq i$.*

A továbbiakban - ha ez nem vezet félreértésre - az előrendezéseket (így a rendezéseket is) a $\leq$ szimbólummal fogjuk jelölni.

5.1.2. Definíció. *Legyen $(E_i)_{i\in I}$ $\mathbb{K}$ feletti algebrák rendszere, ahol I felfelé irányított, rendezett halmaz, $(f_{i,j})_{(i,j)\in I\times I, i\leq j}$ pedig olyan rendszer, hogy minden $(i,j) \in I \times I$ és $i \leq j$ esetén $f_{i,j} : E_j \to E_i$ algebra-morfizmus. Tegyük fel, hogy teljesülnek a következők:*
(PRO_I) Minden $i \in I$ esetén $f_{i,i} = id_{E_i}$;
(PRO_{II}) Minden $i, j, k \in I$, $i \leq j \leq k$ esetén $f_{i,k} = f_{i,j} \circ f_{j,k}$.
Ekkor az $((E_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{(i,j)\in I\times I, i\leq j})$ párt ***projektív algebra-rendszernek*** *nevezzük. Az*

$$E := \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \,|\, (\forall (i,j) \in I \times I) : ((i \leq j) \Rightarrow f_{i,j}(x_j) = x_i)\}$$

halmazt az adott algebra-rendszer ***projektív limeszének*** *nevezzük, és a $\varprojlim_{i,I} E_i$ szimbólummal jelöljük, továbbá minden $i \in I$ esetén az $f_i := pr_i|_E : E \to E_i$ leképezést a limesz i-edik* ***kanonikus projekciójának*** *nevezzük.*

5.1.3. Állítás. *Ha $((E_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{(i,j)\in I\times I, i\leq j})$ projektív algebra-rendszer, akkor $\varprojlim_{i,I} E_i$ részalgebrája a $\prod_{i\in I} E_i$ szorzatalgebrának.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy $E := \varprojlim_{i,I} E_i \subseteq \prod_{i\in I} E_i$ lineáris altér és zárt a szorzásra. Legyen $\lambda \in \mathbb{K}$ és $x := (x_i)_{i\in I} \in E$. Ekkor minden $(i,j) \in I \times I$ és $i \leq j$ esetén

$$(\lambda.x)_i = \lambda.x_i = \lambda.f_{i,j}(x_j) = f_{i,j}(\lambda.x_j)$$

tehát $\lambda.x \in E$. Legyen továbbá $y := (y_i)_{i\in I} \in E$, ekkor minden $(i,j) \in I \times I$ és $i \leq j$ esetén

$$(x + y)_i = x_i + y_i = f_{i,j}(x_j) + f_{i,j}(y_j) = f_{i,j}(x_j + y_j)\,,$$
$$(xy)_i = x_i y_i = f_{i,j}(x_j) f_{i,j}(y_j) = f_{i,j}(x_j y_j)\,,$$

azaz $x + y, xy \in E$, tehát E részalgebra $\prod_{i\in I} E_i$-ben. $\square$

5.1.4. Definíció. *Az* $((E_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{(i,j)\in I\times I, i\leq j})$ *párt* ***topologikus algebrák projektív rendszerének*** *nevezzük, ha projektív algebra-rendszer és minden* $i \in I$*-re* E_i *topologikus algebra, továbbá minden* $(i,j) \in I \times I$, $i \leq j$ *esetén* $f_{i,j} : E_j \to E_i$ *folytonos a megfelelő topológiák szerint. Ha minden* $i \in I$*-re* $f_i : \varprojlim_{i,I} E_i \to E_i$ *jelöli a projektív limesz* i*-edik kanonikus projekcióját, akkor* $\varprojlim_{i,I} E_i$*-t az* $(f_i)_{i\in I}$ *rendszer által projektíven előállított topológiával ellátva az adott rendszer* ***projektív limesz topologikus algebrájának*** *nevezzük.*

Megjegyzés. Az előző definícióban az $(f_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított topológia megegyezik a szorattopológia $\varprojlim_{i,I} E_i$-re vett leszűkítésével.

5.1.5. Következmény. *Ha* E *az* $((E_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{(i,j)\in I\times I, i\leq j})$ *topologikus algebrák projektív rendszerének projektív limesze, és minden* $i \in I$*-re* E_i *lokálisan m-konvex algebra, akkor* E *is lokálisan m-konvex.*

Bizonyítás. Mivel minden $i \in I$ esetén E_i lokálisan m-konvex, ezért $\prod_{i\in I} E_i$ a szorzattopológiával ellátva lokálisan m-konvex, és ennek E-re vett leszűkítése is lokálisan m-konvex topológia. □

5.1.6. Állítás. *Ha* $((E_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{(i,j)\in I\times I, i\leq j})$ *topologikus algebrák projektív rendszere, akkor* $\varprojlim_{i,I} E_i$ *zárt részalgebrája a* $\prod_{i\in I} E_i$ *algebrának. Továbbá, ha minden* $i \in I$*-re* E_i *teljes topologikus algebra, akkor* $\varprojlim_{i,I} E_i$ *is teljes topologikus algebra.*

Bizonyítás. Minden $(i,j) \in I \times I$ esetén definiáljuk a következő függvényt:

$$f'_{i,j} : \prod_{k\in I} E_k \to E_i\,;$$

$$(x_k)_{k\in I} \mapsto f_{i,j}(x_j)$$

Minden $(i,j) \in I \times J$-re $f'_{i,j}$ folytonos függvény. Valóban, legyen $(i,j) \in I \times J$, és $U_i \subseteq E_i$ nyílt halmaz. Ekkor

$$\overset{-1}{f'_{i,j}} \langle U_i \rangle = \prod_{k\in I} \Omega_k,$$

ahol minden $k \in I \backslash \{j\}$-re $\Omega_k = E_k$ és $\Omega_j = \overset{-1}{f_{i,j}} \langle U_i \rangle$, tehát $\overset{-1}{f'_{i,j}} \langle U_i \rangle$ nyílt halmaz $\prod_{k\in I} E_k$-ban (mivel $f_{i,j} : E_j \to E_i$ folytonos függvény). Ekkor

$$\varprojlim_{i,I} E_i = \bigcap_{i\in I} \bigcap_{j\geq i} \overset{-1}{f'_{i,j}} \langle E_i \rangle\,,$$

azaz $\varprojlim_{i,I} E_i$ zárt halmazok metszete, tehát zárt. Az állítás második fele a 2.3.10. és 2.3.5. Következményekből adódik. $\square$

5.1.7. Állítás. *Legyen E vektorér $(E_i)_{i\in I}$ szeparált topologikus vektorterek rendszere, és $(u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$-re $u_i : E \to E_i$ lineáris operátor, és lássuk el E-t az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított topológiával. Ekkor E pontosan akkor szeparált, ha minden $x \in E \setminus \{0\}$ esetén léltezik olyan $i \in I$, hogy $u_i(x) \neq 0$.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy E szeparált, és legyen $x \in E \setminus \{0\}$. Ekkor létezik a 0-nak olyan V környezete E-ben, hogy $x \notin V$. A projektíven előállított topológia tulajdonságai szerint létezik olyan $\emptyset \neq J \subseteq I$ véges halmaz és olyan $(V_j)_{j\in J}$ rendszer, hogy minden $j \in J$ esetén V_j a 0-nak környezete E_j-ben, és

$$\bigcap_{j\in J} \overset{-1}{u_j} \langle V_j \rangle \subseteq V\,,$$

így, mivel minden $j \in J$-re $u_j : E \to E_j$ folytonos a megfelelő topológiák szerint, minden $j \in J$-re $u_j(x) \neq 0$. Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $x \in E \setminus \{0\}$ esetén léltezik olyan $i \in I$, hogy $u_i(x) \neq 0$. Legyen $x_0 \in E \setminus \{0\}$ rögzített, és $i_0 \in I$ olyan index, amelyre teljesül, hogy $u_{i_0}(x_0) \neq 0$. Legyen V_{i_0} olyan környezete a 0-nak E_{i_0}-ban, hogy $u_{i_0}(x_0) \notin V_{i_0}$, ekkor

$$x_0 \notin \overset{-1}{u_{i_0}} \langle V_{i_0} \rangle\,,$$

utóbbi halmaz pedig a 0-nak környezete E-ben, tehát E szeparált. $\square$

5.1.8. Következmény. *Ha $((E_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{(i,j)\in I\times I,\, i\leq j})$ Banach-algebrák projektív rendszere, akkor $\varprojlim_{i,I} E_i$ teljes, szeparált, lokálisan m-konvex algebra.*

*Bizonyítás.*A teljesség az 5.1.6. Állításból, a lokális m-konvexitás az 5.1.5. Következményből adódik. A szeparáltság pedig az előző állításból következik, ugyanis $\prod_{i\in I} E_i$ a szorzattoplógiával ellátva szeparált (mert a szorzattopológia speciális projektíven előállított topológia), így minden részhalmaza az altértoplógiával ellátva szeparált, tehát $\varprojlim_{i,I} E_i$ is az. $\square$

A következő alfejezetben be fogjuk látni, hogy a megfordítás is igaz: minden teljes, szeparált, lokálisan m-konvex algebra előáll Banach-algebrák projektív limeszeként.

5.2. Teljes, szeparált, lokálisan m-konvex algebrák előállítása projektív limeszként: az Arens – Michael-felbontás

5.2.1. Állítás. *Legyen $((E_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{(i,j)\in I\times I,\, i\leq j})$ topologikus algebrák projektív rendszere, és minden $i \in I$-re $\mathfrak{B}_i$ a 0-nak környezetbázisa E_i-ben, továbbá legyen $E := \varprojlim_{i,I} E_i$,*

$f_i : E \to E_i$ pedig a limesz i-edik kanonikus projekciója minden $i \in I$-re. Ekkor

$$\mathfrak{B}' := \{\overset{-1}{f_i}\langle V_i\rangle \,|\, (i \in I) \wedge (V_i \in \mathfrak{B}_i)\}$$

a 0-nak környezetbázisa E-ben.

Bizonyítás. A projektívan előállított topológiák tulajdonságai szerint, ha $\mathcal{P}_0(I)$ jelöli I véges részhalmazainak halmazát, akkor

$$\mathfrak{B} := \{\bigcap_{i\in J}\overset{-1}{f_i}\langle V_i\rangle \,|\, (J \in \mathcal{P}_0(I)) \wedge ((V_i)_{i\in J} \in \prod_{i\in J}\mathfrak{B}_i)\}$$

környezetbázisa a 0-nak E-ben. Mivel $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$, ezért elég belátni, hogy minden $V \in \mathfrak{B}$-hez létezik $V' \in \mathfrak{B}'$, hogy $V' \subseteq V$. Legyen $J \in \mathcal{P}_0(I))$ és $(V_i)_{i\in J} \in \prod_{i\in J}\mathfrak{B}_i$. Ekkor I felfelé irányítottsága miatt létezik olyan $i_0 \in I$ index, hogy minden $i \in J$ esetén $i_0 \geq i$, valamint E definíciója szerint minden $i \in J$-re $f_i = f_{i,i_0} \circ f_{i_0}$. Ezt kihasználva

$$\bigcap_{i\in J}\overset{-1}{f_i}\langle V_i\rangle = \bigcap_{i\in J}\overset{-1}{f_{i_0}}\langle\overset{-1}{f_{i,i_0}}\langle V_i\rangle\rangle = \overset{-1}{f_{i_0}}\langle\bigcap_{i\in J}\overset{-1}{f_{i,i_0}}\langle V_i\rangle\rangle$$

ahol $V_{i_0} := \bigcap_{i\in J}\overset{-1}{f_{i,i_0}}\langle V_i\rangle$ a 0-nak környezete E_{i_0}-ban, tehát létezik $U_{i_0} \in \mathfrak{B}_{i_0}$, hogy $U_{i_0} \subseteq V_{i_0}$, következésképpen

$$\overset{-1}{f_{i_0}}\langle U_{i_0}\rangle \subseteq \overset{-1}{f_{i_0}}\langle V_{i_0}\rangle = \bigcap_{i\in J}\overset{-1}{f_i}\langle V_i\rangle\,. \square$$

5.2.2. Tétel. *Minden szeparált, lokálisan m-konvex algebra topologikusan izomorf normált algebrák projektív limeszének egy részalgebrájával, továbbá minden teljes, szeparált, lokálisan m-konvex algebra topologikusan izomorf Banach-algebrák projektív limeszével. Azaz, ha E szeparált, lokálisan m-konvex algebra, akkor létezik olyan $((E_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{(i,j)\in I\times I, i\leq j})$ rendszer, amely normált algebrák projektív rendszere, és olyan*

$$\Phi : E \to \varprojlim_{i,I} E_i$$

algebra-morfizmus, amely homeomorfizmus $\Phi\langle E\rangle$-re, illetve ha E teljes is, akkor az $((E_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{(i,j)\in I\times I, i\leq j})$ rendszer megválasztható Banach-algebrák projektív rendszerének, továbbá ekkor a Φ leképezés szürjektív.

Bizonyítás. Legyen E szeparált, lokálisan m-konvex algebra, és $(U_i)_{i\in I}$ egy hordókból álló környezetbázisa a 0-nak E-ben. Bevezetjük I-n a $\leq$ rendezést:

$$i \leq j \Leftrightarrow U_j \subseteq U_i\,,$$

amely felfelé irányított lesz (mert az $(U_i)_{i\in I}$ rendszer a 0-nak környezetbázisa E-ben); továbbá minden $i \in I$-re jelölje p_{U_i} az U_i halmaz Minkowski-funkcionálját. Ekkor $(p_{U_i})_{i\in I}$

olyan szubmultiplikatív félnorma-rendszer E felett, ami generálja E topológiáját, és $i, j \in I$, $i \leq j$, $x \in E$ esetén $p_{U_i}(x) \leq p_{U_j}(x)$. Minden $i \in I$ esetén legyen $N_i := ker(p_{U_i})$, továbbá legyen $E_i := E/N_i$ a $\dot{p_{Ui}}$ faktornormával ellátva, és jelölje $\widehat{E_i}$ az E_i teljes burkát, p_i pedig a $\dot{p_{Ui}}$ norma (folytonos) kiterjesztését $\widehat{E_i}$-ra. Ekkor minden $i \in I$-re E_i normált algebra, $\widehat{E_i}$ pedig Banach-algebra. Ha $i, j \in I$ és $i \leq j$, akkor legyen $f_{i,i} := id_{E_i}$, és

$$f_{i,j} : E_j \to E_i\,;\; x + N_j \mapsto x + N_i\,.$$

Minden $i, j \in I$, $i \leq j$ esetén $f_{i,j}$ jóldefiniált ($N_j \subseteq N_i$ miatt) algebra-morfizmus, és norma nem-növelő, jelölje a folytonos kiterjesztését $\widehat{E_i}$-ra $\widehat{f_{i,j}}$. Ekkor az $((E_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{(i,j)\in I\times I, i\leq j})$ rendszer normált algebrák projektív rendszere, az $((\widehat{E_i})_{i\in I}, (\widehat{f_{i,j}})_{(i,j)\in I\times I, i\leq j})$ pedig Banach-algebrák projektív rendszere. Minden $x \in E$ esetén $(x+N_i)_{i\in I} \in \varprojlim\limits_{i,I} E_i$ az $f_{i,j}$ függvények definícója miatt, ezért értelmezhetjük a következő leképezést:

$$\Phi : E \to \varprojlim_{i,I} E_i;\; x \mapsto (x + N_i)_{i\in I}.$$

Ekkor Φ algebra-morfizmus, megmutatjuk, hogy injektív. Ehhez legyen $(x + N_i)_{i\in I} = 0$, ekkor minden $i \in I$-re $p_{U_i}(x) = 0$, ezért E szeparáltsága és [10] 3.5.2. Állítása miatt $x = 0$. Φ folytonosságához elég azt ellenőriznünk, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i \circ \Phi : E \to E_i$ folytonos függvény, ahol f_i jelöli a $\varprojlim\limits_{i,I} E_i$ i-edik kanonikus projekcióját. Mivel $x \in E$ és $i \in I$ esetén

$$f_i \circ \Phi(x) = x + N_i\,,$$

ezért ez a leképezés [10] 3.7.1. Tétele miatt folytonos. Ezek után belátjuk, hogy $\Phi^{-1} : \Phi\langle E\rangle \to E$ is folytonos. Tegyük fel, hogy $(\Phi(x_j))_{j\in J}$ $\Phi\langle E\rangle$-ben haladó konvergens általánosított sorozat, és legyen $x \in E$ olyan, hogy $\Phi(x) = \lim\limits_{j,J} \Phi(x_j)$ (a limesz egyértelműsége abból következik, hogy $\Phi\langle E\rangle$ topologikus altere egy normált algebrákból álló szorzattérnek, ami Hausdorff). Ekkor a 2.3.8. Állítás bizonyításából következik, hogy minden $i \in I$-re $\lim\limits_{j,J}(x_j + N_i) = x + N_i$, azaz

$$\lim_{j,J} p_{U_i}(x_j - x) = \lim_{j,J} p_i(x_j - x) = 0\,,$$

következésképpen $\lim\limits_{j,J} x_j = x$.
Az állítás második feléhez tegyük fel, hogy E teljes. Először megmutatjuk, hogy ekkor Φ szürjektív. Legyen $y := (y_i + N_i)_{i\in I} \in \varprojlim\limits_{i,I} E_i$. Ha $\mathcal{P}_0(I)$ jelöli az I véges, nemüres részhalmazainak halmazát, akkor I felfelé irányítottsága miatt *kiválaszthatunk* egy olyan $(i_J)_{J\in\mathcal{P}_0(I)}$ rendszert, amelyre minden $J \in \mathcal{P}_0(I)$ és $i \in J$ esetén $i_J \geq i$. Jelölje minden $i \in I$-re

$$\pi_i : E \to E_i;\; x \mapsto x + N_i$$

az i-edik faktorleképezést. *Kiválaszthatunk* egy olyan $(x_J)_{J\in\mathcal{P}_0(I)}$ rendszert, amelyre minden $J \in \mathcal{P}_0(I)$ esetén $x_J \in \overset{-1}{\pi_{i_J}} (y_i + N_i)$. Ekkor $\varprojlim\limits_{i,I} E_i$ definíciója szerint minden $J \in \mathcal{P}_0(I)$

és $i \in J$ esetén $x_J + N_i = y_i + N_i$, továbbá $J_1, J_2 \in \mathcal{P}_0(I)$, $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$ esetén minden $i \in J_1 \cap J_2$ esetén $x_{J_1} + N_i = x_{J_2} + N_i$. A $\mathcal{P}_0(I)$ halmaz a tartalmazás relációval felfelé irányított, rendezett halmaz, tehát $(x_J)_{J\in\mathcal{P}_0(I)}$ általánosított sorozat, sőt általánosított Cauchy-sorozat. Valóban, legyen V a 0-nak környezete E-ben, ekkor a félnorma-rendszer által generált topológiák egyik tulajdonsága miatt létezik olyan $J_0 \in \mathcal{P}_0(I)$ és $r \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$\bigcap_{j\in J_0} [p_{U_j} < r] \subseteq V\,.$$

Ekkor $J_1, J_2 \supseteq J_0$, és $j \in J_0$ esetén $p_{U_i}(x_{J_1} - x_{J_2}) = 0$, ezért

$$x_{J_1} - x_{J_2} \in \bigcap_{j\in J_0} [p_{U_j} < r] \subseteq V\,.$$

Tehát $(x_J)_{J\in\mathcal{P}_0(I)}$ általánosított Cauchy-sorozat, és E teljessége miatt konvergens is (a szeparáltság miatt pedig a limesz egyértelmű), legyen $x := \lim\limits_{J,\mathcal{P}_0(I)} x_J$. Ekkor Φ folytonossága miatt $\Phi(x) = \lim\limits_{J,\mathcal{P}_0(I)} \Phi(x_J)$. Legyen $i \in I$ rögzített, és

$$\mathcal{P}_{0,i}(I) := \{J \in \mathcal{P}_0(I) \,|\, i \in J\}\,.$$

Ekkor $(x_J)_{J\in\mathcal{P}_{0,i}(I)}$ általánosított részsorozata az $(x_J)_{J\in\mathcal{P}_0(I)}$ általánosított sorozatnak, ezért $\lim\limits_{J,\mathcal{P}_{0,i}(I)} x_J = x$, és mivel minden $J \in \mathcal{P}_{0,i}(I)$-re $x_J + N_i = y_i + N_i$, ezért $x + N_i = y_i + N_i$. Következésképpen $\Phi(x) = (y_i + N_i)_{i\in I}$.

Az állítás második felének bizonyításához még be kell látnunk, hogy $\lim\limits_{\overleftarrow{i,I}} E_i = \lim\limits_{\overleftarrow{i,I}} \widehat{E_i}$. Ehhez elég megmutatni, hogy $\lim\limits_{\overleftarrow{i,I}} E_i$ sűrű $\lim\limits_{\overleftarrow{i,I}} \widehat{E_i}$-ben, mert a 2.3.11. Állítás alapján $\lim\limits_{\overleftarrow{i,I}} E_i$ teljes, így a 2.3.3. Állítás miatt zárt is $\lim\limits_{\overleftarrow{i,I}} \widehat{E_i}$-ben, azaz $\lim\limits_{\overleftarrow{i,I}} E_i = \lim\limits_{\overleftarrow{i,I}} \widehat{E_i}$. A sűrűség igazolásához legyen $\emptyset \neq \Omega \subseteq \lim\limits_{\overleftarrow{i,I}} \widehat{E_i}$ nyílt halmaz. A projektíven előállított topológiák tulajdonságai miatt ([10] 25.6.1. Tétel) létezik olyan $J \in \mathcal{P}_0(I)$, hogy minden $i \in J$-re Ω_i nyílt halmaz $\widehat{E_i}$-ban, és

$$\bigcap_{i\in J} \overset{-1}{f_i} \langle \Omega_i \rangle \subseteq \Omega\,.$$

Az I halmaz felfelé irányítottsága miatt létezik olyan $i_J \in I$ index, hogy minden $i \in J$ esetén $i_J \geq i$. Legyen

$$\Omega_{i_J} := \bigcap_{i\in J} \overset{-1}{\widehat{f_{i,i_J}}} \langle \Omega_i \rangle\,.$$

Ω_{i_J} nemüres, nyílt halmaz $\widehat{E_{i_J}}$-ban, és mivel E_{i_J} sűrű $\widehat{E_{i_J}}$-ban, ezért létezik olyan $x \in E$, hogy $x + N_{i_J} \in \Omega_{i_J}$. Mivel minden $i \in J$-re $\widehat{f_{i,i_J}}\langle \Omega_{i_J} \rangle \subseteq \Omega_i$ és $\Phi(x) \in \lim\limits_{\overleftarrow{i,I}} E_i$, ezért minden $i \in J$-re

$$x + N_i = f_{i,i_J}(x + N_{i_J}) \in \Omega_i\,,$$

következésképpen

$$\Phi(x) \in \bigcap_{i\in J} \overset{-1}{f_i} \langle \Omega_i \rangle \subseteq \Omega \,. \ \square$$

5.2.3. Következmény. *Egy topologikus algebra pontosan akkor teljes, szeparált és lokálisan m-konvex, ha topologikusan izomorf (azaz homeomorf és izomorf) Banach-algebrák projektív limeszével.*

Bizonyítás. a 2.3.11. Állítás, az 5.1.8. Következmény, és az előző tétel alapján elég azt belátnunk, hogy ha T és T' topologikus terek és $f : T \to T'$ homeomorfizmus, akkor T szeparáltsága ekvivalens T' szeparáltságával. Ez pedig azért igaz, mert ha $U, V \subseteq T$ diszjunkt nyílt halmazok, akkor $f\langle U\rangle$ és $f\langle V\rangle$ is diszjunkt nyílt halmazok T'-ben. $\square$

5.2.4. Definíció. *Ha E teljes, szeparált, lokálisan m-konvex algebra, akkor az előző tétel bizonyításában előállított $((E_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{(i,j)\in I\times I,\, i\le j})$* ***Arens – Michael-rendszerének****, az $((\widehat{E_i})_{i\in I}, (\widehat{f_{i,j}})_{(i,j)\in I\times I,\, i\le j})$ rendszert az E algebra* ***teljes Arens – Michael-rendszerének****, a projektív limeszüket, azaz $\varprojlim_{i,I} E_i = \varprojlim_{i,I} \widehat{E_i}$-ot pedig az E algebra* ***Arens – Michael-felbontásának*** *nevezzük.*

5.3. Az Arens – Michael-felbontás következményei

5.3.1. Lemma. *Legyen $((E_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{(i,j)\in I\times I,\, i\le j})$ projektív algebra-rendszer, $E := \varprojlim_{i,I} E_i$. Ekkor a következő állítások teljesülnek:*
(i) Egy $a := (a_i)_{i\in I} \in E$ elem pontosan akkor kváziinvertálható E-ben, ha minden $i \in I$-re a_i kváziinvertálható E_i-ben.
(ii) Ha minden $i \in I$-re E_i egységelemes, akkor E egységelemes. Továbbá, ha minden $i \in I$ esetén $f_i : E \to E_i$ (a limesz i-edik kanonikus projekciója) szürjektív és E egységelemes, akkor minden $i \in I$-re E_i egységelemes.
(iii) Tegyük fel, hogy minden $i \in I$-re E_i egységelemes. Ekkor az $a := (a_i)_{i\in I} \in E$ elem pontosan akkor invertálható E-ben, ha minden $i \in I$-re a_i invertálható E_i-ben.

Bizonyítás. (i) Tegyük fel, hogy $a = (a_i)_{i\in I} \in E$ kváziinvertálható, legyen $a^\circ := (a_i')_{i\in I}$. Ekkor a szorzatalgebra műveleteinek definíciójából adódik, hogy minden $i \in I$ esetén a_i kváziinvertálható E_i-ben és a kváziinverze a_i'. Megfordítva, tegyük fel, hogy $a = (a_i)_{i\in I} \in E$ és minden $i \in I$-re a_i kváziinvertálható E_i-ben, jelölje a kváziinverzét b_i. Ekkor $b := (b_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$-re teljesül, hogy $a \circ b = b \circ a = 0$ tehát b kváziinverze a-nak $\prod_{i\in I} E_i$-ben. Belátjuk, hogy $b \in E$. Legyen $i, j \in I$, $i \le j$, ekkor

$$a_i \circ f_{i,j}(b_j) = f_{i,j}(a_j) \circ f_{i,j}(b_j) = f_{i,j}(a_j \circ b_j) = 0_{E_i},$$

ezért a kváziinverz egyértelműsége miatt $b_i = f_{i,j}(b_j)$, következésképpen $b \in E$.
(ii) Tegyük fel, hogy minden $i \in I$ esetén $\mathbf{1}_i$ az E_i algebra egységeleme. Ekkor $\mathbf{1} := (\mathbf{1}_i)_{i\in I}$

a $\prod\limits_{i\in I} E_i$ algebra egységeleme, azt kell belátnunk, hogy $\mathbf{1} \in E$. Legyen $i, j \in I$, $i \leq j$, ekkor minden $a_i \in E_i$ esetén létezik olyan $a \in E$, hogy $f_i(a) = a_i$, továbbá

$$a_i f_{i,j}(\mathbf{1}_j) = f_{i,j}(f_j(a)) f_{i,j}(\mathbf{1}_j) = f_{i,j}(f_j(a)\mathbf{1}_j) = f_{i,j}(f_j(a)) = a_i \,,$$

tehát az algebrabeli egységelem egyértelműsége miatt $f_{i,j}(\mathbf{1}_j) = \mathbf{1}_i$, így $\mathbf{1} \in E$. Most tegyük fel, hogy $\mathbf{1} = (\mathbf{1}_i)_{i\in I}$ az E algebra egységeleme, és minden $i \in I$-re f_i szürjektív. Ekkor a szorzatalgebra műveleteinek definíciója miatt minden $i \in I$ esetén $\mathbf{1}_i$ az E_i algebra egységeleme.

(iii) Először is, mivel minden $i \in I$-re E_i egységelemes, ezért E egységelemes. Tegyük fel, hogy $a = (a_i)_{i\in I} \in E$ invertálható, legyen $a^{-1} := (a'_i)_{i\in I}$. Ekkor a szorzatalgebra műveleteinek definíciójából adódik, hogy minden $i \in I$ esetén a_i invertálható E_i-ben és a inverze a'_i. Megfordítva, tegyük fel, hogy $a = (a_i)_{i\in I} \in E$ és minden $i \in I$-re a_i invertálható E_i-ben, jelölje az inverzét b_i. Ekkor $b := (b_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} E_i$-re teljesül, hogy $ab = ba = \mathbf{1}_E$ tehát b inverze a-nak $\prod\limits_{i\in I} E_i$-ben. Belátjuk, hogy $b \in E$. Legyen $i, j \in I$, $i \leq j$, ekkor

$$a_i f_{i,j}(b_j) = f_{i,j}(a_j) f_{i,j}(b_j) = f_{i,j}(a_j b_j) = \mathbf{1}_{E_i},$$

ezért az inverz egyértelműsége miatt $b_i = f_{i,j}(b_j)$, következésképpen $b \in E$. $\square$

5.3.2. Állítás. *Legyen $((E_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{(i,j)\in I\times I, i\leq j})$ projektív algebra-rendszer, $E := \varprojlim\limits_{i,I} E_i$. Ekkor minden $a = (a_i)_{i\in I} \in E$ esetén*

$$Sp'_E(a) = \bigcup_{i\in I} Sp'_{E_i}(a_i)$$

következésképpen $\varrho'_E(a) = \sup\limits_{i\in I} \varrho'_{E_i}(a_i)$. Továbbá, ha minden $i \in I$-re E_i egységelemes, akkor minden
$a = (a_i)_{i\in I} \in E$ esetén

$$Sp_E(a) = \bigcup_{i\in I} Sp_{E_i}(a_i)\,.$$

Bizonyítás. Az állítás első feléhez legyen $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, és $a = (a_i)_{i\in I} \in E$. Ha $\lambda \in Sp'_E(a)$, akkor $\lambda^{-1}.a \notin \mathbf{G}'(E)$, így az előző lemma alapján létezik olyan $i \in I$, amelyre $\lambda.a_i \notin G'(E_i)$, azaz $\lambda \in \bigcup\limits_{i\in I} Sp'_{E_i}(a_i)$. Megfordítva, ha $\lambda \in \bigcup\limits_{i\in I} Sp'_{E_i}(a_i)$, akkor létezik $i \in I$, hogy $\lambda^{-1}.a_i \notin G'(E_i)$, emiatt (ismét az előző lemma lapján) $\lambda^{-1}.a \notin \mathbf{G}'(E)$, tehát $\lambda \in Sp'_E(a)$. Mivel a $0 \in \mathbb{K}$ $Sp'_E(a)$-nak és $\bigcup\limits_{i\in I} Sp'_{E_i}(a_i)$-nek is eleme, ezért az első állítást beláttuk. Az általánosított spektrálsugárra vonatkozó állítás ennek közvetlen következménye. Tegyük fel most, hogy minden $i \in I$-re E_i egységelemes (következésképpen E is), és legyen $a = (a_i)_{i\in I} \in E$. Ha $\lambda \in Sp_E(a)$, akkor $\lambda.\mathbf{1}_E - a \notin \mathbf{G}(E)$, ezért az előző lemma alapján létezik olyan $i \in I$, hogy $\lambda.\mathbf{1}_{E_i} - a_i \notin G(E_i)$, tehát $\lambda \in \bigcup\limits_{i\in I} Sp_{E_i}(a_i)$. Megfordítva, ha

$\lambda \in \bigcup\limits_{i\in I} Sp_{E_i}(a_i)$, akkor létezik olyan $i \in I$, hogy $\lambda.\mathbf{1}_{E_i} - a_i \notin G(E_i)$, így ismét az előző lemma alapján $\lambda.\mathbf{1}_E - a \notin \mathbf{G}(E)$, tehát $\lambda \in Sp_E(a)$. $\square$

5.3.3. Következmény. *Legyen E teljes, szeparált, lokálisan m-konvex algebra $\mathbb{K}$ felett, $((E_i)_{i\in I}, (f_{i,j})_{(i,j)\in I\times I, i\leq j})$ az Arens – Michael-rendszere $((\widehat{E_i})_{i\in I}, (\widehat{f_{i,j}})_{(i,j)\in I\times I, i\leq j})$ a teljes Arens – Michael-rendszere, továbbá minden $i \in I$-re jelölje π_i az $E \to E_i$ kanonikus szürjekciót (faktorleképezést), $||\cdot||_i$ pedig az $\widehat{E_i}$ normáját. Ekkor minden $a \in E$ esetén*

$$Sp'_E(a) = \bigcup_{i\in I} Sp'_{E_i}(\pi_i(a)) = \bigcup_{i\in I} Sp'_{\widehat{E_i}}(\pi_i(a))\,,$$

$$\varrho'_E(a) = \sup_{i\in I} \varrho'_{E_i}(\pi_i(a)) = \sup_{i\in I} \varrho'_{\widehat{E_i}}(\pi_i(a))\,,$$

és $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén

$$\varrho'_E(a) = \sup_{i\in I} \varrho_{E_i}(\pi_i(a)) = \sup_{i\in I} \lim_{n\to\infty} ||(\pi_i(a))^n||_i^{\frac{1}{n}}\,.$$

Ha E egységelemes, akkor minden $a \in E$ esetén

$$Sp_E(a) = \bigcup_{i\in I} Sp_{E_i}(\pi_i(a)) = \bigcup_{i\in I} Sp_{\widehat{E_i}}(\pi_i(a))\,.$$

Bizonyítás. Az előző állítást alkalmazzuk. Jelölje Φ az $E \to \varprojlim_{i,I} E_i = \varprojlim_{i,I} \widehat{E_i}$ izomorfizmust, és legyen $a \in E$. Ekkor, mivel minden $i \in I$-re $f_i \circ \Phi = \pi_i$

$$Sp'_E(a) = Sp'_E(\Phi(a)) = \bigcup_{i\in I} Sp'_{E_i}(f_i(\Phi(a))) = \bigcup_{i\in I} Sp'_{E_i}(\pi_i(a))\,,$$

ezért $\varrho'_E(a) = \sup_{i\in I} \varrho'_{E_i}(\pi_i(a)) = \sup_{i\in I} \varrho'_{\widehat{E_i}}(\pi_i(a))$ is teljesül. Tegyük fel, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ekkor minden $i \in I$ esetén $\widehat{E_i}$ a p_i normával ellátva komplex Banach-algebra, tehát a 4.3.9. Definíció utáni megjegyzés és a spektrálsugár elemi tulajdonságai alapján alapján

$$\varrho'_E(a) = \sup_{i\in I} \varrho'_{E_i}(\pi_i(a)) = \sup_{i\in I} \varrho_{E_i}(\pi_i(a)) = \sup_{i\in I} \lim_{n\to\infty} ||(\pi_i(a))^n||_i^{\frac{1}{n}}\,.$$

Ha E egységelemes algebra, akkor minden $i \in I$-re E_i és $\widehat{E_i}$ is egységelemes, ezért

$$Sp_E(a) = \bigcup_{i\in I} Sp_{E_i}(\pi_i(a)) = \bigcup_{i\in I} Sp_{\widehat{E_i}}(\pi_i(a))\,. \square$$

5.3.4. Állítás. *Legyen E teljes, szeparált, lokálisan m-konvex algebra.*
(i) Ha $a \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor $\varrho'_E(\lambda.a) = |\lambda|\varrho'_E(a)$.
(ii) Ha $a \in E$ és $m \in \mathbb{N}$, akkor $\varrho'_E(a^m) = (\varrho'_E(a))^m$.
(iii) Ha $a, b \in E$ és $ab = ba$, akkor $\varrho'_E(a+b) \leq \varrho'_E(a) + \varrho'_E(b)$.
(iv) Ha $a, b \in E$ és $ab = ba$, akkor $\varrho'_E(ab) \leq \varrho'_E(a)\varrho'_E(b)$.

Bizonyítás. Legyen $((\widehat{E_i})_{i\in I}, (\widehat{f_{i,j}})_{(i,j)\in I\times I, i\leq j})$ az E teljes Arens – Michael-rendszere, továbbá minden $i \in I$-re jelölje π_i az $E \to E_i$ kanonikus szürjekciót (amely algebramorfizmus is). Felhasználjuk az előző következményt, illetve a Banach-algebrákra érvényes analóg állítást ([10] 14.3.3. Állítás).
(i) Legyen $a \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, ekkor

$$\varrho'_E(\lambda.a) = \sup_{i\in I} \varrho_{\widehat{E_i}}(\pi_i(\lambda.a)) = \sup_{i\in I} |\lambda| \varrho_{\widehat{E_i}}(\pi_i(a)) = |\lambda| \sup_{i\in I} \varrho_{\widehat{E_i}}(\pi_i(a)) = |\lambda| \varrho'_E(a)\,.$$

(ii) Legyen $a \in \mathbb{K}$ és $m \in \mathbb{N}$, ekkor

$$\varrho'_E(a^m) = \sup_{i\in I} \varrho_{\widehat{E_i}}(\pi_i(a^m)) = \sup_{i\in I}(\varrho_{\widehat{E_i}}(\pi_i(a)))^m = (\sup_{i\in I} \varrho_{\widehat{E_i}}(\pi_i(a)))^m = (\varrho'_E(a))^m\,.$$

(iii) Legyen $a, b \in E$, és tegyük fel, hogy $ab = ba$ teljesül. Ekkor minden $i \in I$- re $\pi_i(a)\pi_i(b) = \pi_i(b)\pi_i(a)$ teljesül, ezért

$$\varrho'_E(a+b) = \sup_{i\in I} \varrho_{\widehat{E_i}}(\pi_i(a+b)) \leq \sup_{i\in I}(\varrho_{\widehat{E_i}}(\pi_i(a)) + \varrho_{\widehat{E_i}}(\pi_i(b))) \leq \sup_{i\in I} \varrho_{\widehat{E_i}}(\pi_i(a)) + \sup_{i\in I} \varrho_{\widehat{E_i}}(\pi_i(b)) =$$

$$= \varrho'_E(a) + \varrho'_E(b)\,.$$

(iv) Legyen $a, b \in E$, és tegyük fel, hogy $ab = ba$ teljesül. Ekkor minden $i \in I$- re $\pi_i(a)\pi_i(b) = \pi_i(b)\pi_i(a)$ teljesül, következésképpen

$$\varrho'_E(ab) = \sup_{i\in I} \varrho_{\widehat{E_i}}(\pi_i(ab)) \leq \sup_{i\in I}(\varrho_{\widehat{E_i}}(\pi_i(a))\varrho_{\widehat{E_i}}(\pi_i(b))) \leq \sup_{i\in I} \varrho_{\widehat{E_i}}(\pi_i(a)) \sup_{i\in I} \varrho_{\widehat{E_i}}(\pi_i(b)) =$$

$$= \varrho'_E(a)\varrho'_E(b)\,. \square$$

5.3.5. Következmény. *Legyen E kommutatív, teljes, szeparált, lokálisan m-konvex Q-algebra. Ekkor ϱ'_E szubmultiplikatív félnorma E felett.*

Bizonyítás. Mivel Q-algebra minden elemének általánosított spektrálsugara véges (4.3.11. Tétel), ezért E kommutativitása és az előző állítás miatt ϱ'_E szubmultiplikatív félnorma E felett. $\square$

Hivatkozások

[1] V.K. Balachandran, *Topological Algebras*, North-Holland Mathematics Studies, 2000.

[2] F.F. Bonsall – J.Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, 1973.

[3] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics: General Topology*, Springer-Verlag, 1966.

[4] T.Husain, *Introduction to Topological Groups*, W.B. Saunders Company, 1966.

[5] J.E. Kelley – I. Namioka, *Linear Topological Spaces*, Springer-Verlag, 1963.

[6] Kristóf János, *A matematikai analízis elemei I.*, elektronikus jegyzet, 2014.

[7] Kristóf János, *A matematikai analízis elemei II.*, elektronikus jegyzet, 2014.

[8] Kristóf János, *A matematikai analízis elemei III.*, elektronikus jegyzet, 2014.

[9] Kristóf János, *A matematikai struktúrák elmélete*, elektronikus jegyzet, 2013.

[10] Kristóf János, *Topologikus vektorterek és normált algebrák*, elektronikus jegyzet, 2014.

[11] A. Mallios, *Topological Algebras - Selected Topics*, North-Holland Mathematics Studies, 1986.

[12] Molnár Lajos, *Banach-algebrák, C*-algebrák és Neumann-algebrák*, egyetemi jegyzet, 2000.