Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Tóth Dávid
Matematikus MSc

Bergman-terek

Szakdolgozat

Témavezető: Szőke Róbert egyetemi docens

Budapest, 2014

Tartalomjegyzék

Bevezetés

E dolgozat a Bergman-terek elméletének egyes fejezeteibe nyújt rövid betekintést. A Bergman-tereket a komplex sík tartományain abszolút értékben p-edik hatványon integrálható holomorf függvények alkotják. Különösen fontos a $p = 2$ eset, ekkor a Bergman-tér Hilbert-tér lesz, melyben létezik egy ún. reprodukáló magfüggvény, mely a tér függvényeinek egy integrálként való előállítását szolgáltatja. Ennek két, lényegesen különböző jellegű alkalmazását is látjuk majd. A segítségével definiált Bergman-projekció segédeszközül szolgál majd a komplex egységkörhöz tartozó Bergman-terek duálisának leírásánál. Egy geometriai izű alkalmazásként pedig a magfüggvény segítségével metrikát definiálunk majd a komplex sík tartományain, melyre nézve éppen a konform leképezések lesznek izometriák. Ez hatékony eszközül szolgálhat a komplex függvénytan bizonyos tételeinek bizonyításában is.

Egy további érintett téma Bers tételének a Bergman-terekre vonatkozó megfelelője. Bers tétele alapján a tartományokon holomorf függvények algebrái közötti izomorfizmusokból nyerhetünk vissza egy a tartományok közötti konform leképezést, tehát az algebrai struktúra infromációt hordoz a tartományok geometriai tulajdonságairól is. A Bergman-terek ezen algebrákhoz képest egy „kisebb" („kevesebb" függvényből álló) struktúrát alkotnak, ennek megfelelően az izomorfizmusoknak megfelelő unitér leképezésekre itt már valamilyen plusz feltételt kell tennünk, és akkor megkapjuk az analóg állítást ebben az esetben is.

Végül röviden kitérünk a Bergman-terek fogalmának többdimenziós, súlyfüggvénnyel ellátott általánosításaira. Ezek közül csak az ún. Segal–Bargmann-terekkel foglalkozunk részletesen, melyek alkalmazhatók például a kvantummechanikában.

Ehelyütt szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Szőke Róbert tanár úrnak, aki magyarázataival és problémafelvetéseivel nagyban segítette munkámat, a dolgozat alapos átnézése során pedig rengeteg javaslattal járult hozzá a végleges változat kialakításához.

1. Bergman-terek

Ebben a fejezetben a Bergman-terek, azaz a $\mathbb{C}$-beli tartományokon abszolút értékben p-edik hatványon integrálható függvények terének legalapvetőbb tulajdonságaival foglalkozunk. Belátjuk, hogy a $p = 2$ esetben Hilbert-teret kapunk, és bebizonyítjuk a reprodukáló magfüggvény létezését, melynek segítségével a Bergman-tér elemeinek egy integrálként való előállítását kapjuk. Végül bizonyos speciális tartományok esetén ki is számoljuk a magfüggvényt.

1.1. Definíció és alapvető tulajdonságok

1.1. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány, $0 < p \leq \infty$, ekkor az

$$\mathcal{O}L^p(D) = \{f \in \mathcal{O}(D) : \|f\|_p < \infty\},$$

tereket, ahol

$$\|f\|_p = \left\{ \int_D |f(z)|^p \, dA(z) \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \text{ha } p < \infty, \quad \|f\|_\infty = \sup_{z \in D} |f(z)|,$$

Bergman-tereknek nevezzük.

A fenti $\|\cdot\|_p$ függvény $1 \leq p \leq \infty$ esetén normát definiál ezeken a tereken. A háromszög-egyenlőtlenség a Minkowski-egyenlőtlenség következménye. Ha $0 < p < 1$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség helyett $\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p$ teljesül a következő lemma szerint, azaz $\mathcal{O}L^p(D)$ minden $0 < p \leq \infty$ esetén metrikus tér.

1.2. Lemma. *Tetszőleges $a, b > 0$ esetén*

$$(a+b)^p \leq \begin{cases} a^p + b^p, & \text{ha } 0 < p \leq 1 \\ 2^{p-1}(a^p + b^p), & \text{ha } 1 \leq p < \infty. \end{cases}$$

Speciálisan $(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$ minden $0 < p < \infty$ esetén.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $p \neq 1$. Vizsgáljuk a $g(x) = (1+x)^p/(1+x^p)$ függvényt. Deriválva

$$g'(x) = \frac{p(1+x)^{p-1}(1+x^p) - px^{p-1}(1+x)^p}{(1+x^p)^2} = \frac{p(1+x)^{p-1}(1-x^{p-1})}{(1+x^p)^2}$$

adódik, tehát a g monoton csökkenő az $1 \leq x < \infty$ intervallumon, ha $p > 1$, és monoton növekvő $0 < p < 1$ esetén. Mivel $g(1) = 2^{p-1}$, és $g(x) \to 1$, ha $x \to \infty$, így tehát $1 < p < \infty$ esetén $(1+x)^p \leq 2^{p-1}(1+x^p)$, továbbá $0 < p < 1$ esetén $(1+x)^p \leq 1 + x^p$, ez pedig könnyen láthatóan ekvivalens az állítással. □

E szakasz fő célja annak igazolása, hogy az $\mathcal{O}L^p(D)$ terek teljesek. Legyen f értelmezve egy origó körüli δ sugarú körlapon, és $0 \leq r < \delta$ esetén vezessük be a következő jelöléseket:

$$M_p(r, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{i\varphi}) \right|^p d\varphi \right\}^{\frac{1}{p}}, \qquad (0 < p < \infty),$$

$$M_\infty(r, f) = \max_{0 \leq \varphi < 2\pi} \left| f(re^{i\varphi}) \right|.$$

Emlékeztetünk a szubharmonikus függvény definíciójára.

1.3. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány. Az $u : D \to \mathbb{R}$ függvényt *szubharmonikusnak* nevezzük, ha folytonos, és minden $z \in D$-re és elég kis $\delta > 0$-ra

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \delta e^{i\varphi}) d\varphi. \tag{1}$$

Megjegyezzük továbbá, hogy ha f holomorf függvény D-n, akkor $|f|^p$ szubharmonikus minden $0 < p < \infty$-re. Legyen $z_0 \in D$, meg kell mutatnunk, hogy (1) teljesül $|f|^p$-re. Ha $f(z_0) = 0$, akkor az állítás triviális. Egyébként a z_0 egy kis környezetén az f^p függvénynek van reguláris ága. A Cauchy-formula szerint

$$f(z_0)^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})^p d\varphi$$

egy elég kis $r > 0$-ra, amiből a triviális becsléssel következik az állítás.

1.4. Tétel. *Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány. Ekkor az $u : D \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor szubharmonikus, ha minden D' tartományra, melyre $\overline{D'} \subseteq D$ kompakt, és minden olyan U függvényre, amely harmonikus D'-n, folytonos $\overline{D'}$-n, és $\partial D'$-n $u \leq U$ teljesül, az előbbi egyenlőtlenség az egész $\overline{D'}$-n is teljesül.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy u szubharmonikus, és legyen D' tartomány, melyre $\overline{D'} \subseteq D$. Legyen továbbá U harmonikus függvény D'-n, melyre $u \leq U$ a D' határán, és tegyük fel, hogy valamely $z \in D'$-re $u(z) > U(z)$. Legyen E azon pontok halmaza $\overline{D'}$-ben, ahol az $u - U$ függvény felveszi az m maximumát. Ekkor $E \subseteq D'$, mert a határon $u \leq U$ teljesül. Mivel E zárt halmaz, így van olyan $z_0 \in E$, melynek semmilyen gömbi környezete nincs E-ben. Legyen $\{\rho_n\}$ olyan nullsorozat, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $|z - z_0| < \rho_n$ körlap D'-ben van. Ezen körlapoknak valamely nyílt részhalmazában, és így valamely z_0 körüli $\rho_n' \leq \rho_n$ köríven $u - U < m$. Tehát

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho_n' e^{i\varphi}) d\varphi - U(z_0) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho_n' e^{i\varphi}) - U(z_0 + \rho_n' e^{i\varphi}) d\varphi < m = u(z_0) - U(z_0),$$

ami az u szubharmonicitása miatt lehetetlen.

A másik irányhoz legyen a $|z - z_0| \leq \rho$ körlap D-ben, és legyen U a Dirichlet-feladat megoldása ezen körlapon az $u|_{\{|z - z_0| = \rho\}}$ kezdőfeltétel mellett. Ekkor

$$u(z_0) \leq U(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi,$$

vagyis u szubharmonikus. $\square$

1.5. Lemma. *Legyen $u(z)$ szubharmonikus függvény a $|z| \leq \delta$ körlapon. Ekkor az*

$$m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi}) d\varphi, \qquad 0 \leq r < \delta,$$

függvény monoton növő.

Bizonyítás. Legyen $0 \leq r_1 < r_2 < \delta$, és legyen $U(z)$ a Dirichlet-feladat megoldása a $|z| \leq r_2$ körlapon az $u|_{\{|z|=r_2\}}$ kezdeti feltétel mellett. Ekkor U harmonikus, és az előző tétel szerint $u \leq U$ a $|z| \leq r_2$ körlapon, ezért

$$m(r_1) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r_1 e^{i\varphi}) d\varphi = U(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r_2 e^{i\varphi}) d\varphi = m(r_2),$$

amit bizonyítani kellett. □

1.6. Következmény. *Legyen f holomorf függvény a $|z| < \delta$ körlapon, ekkor az $M_p(r,f)$ függvény monoton növő r-ben minden $0 < p \leq \infty$-re.*

Bizonyítás. Ha $0 < p < \infty$, akkor az állítás következik az fenti lemmából valamint abból, hogy $|f|^p$ szubharmonikus függvény. Ha $p = \infty$, akkor az állítás a maximum elv következménye. □

1.7. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány, $z \in D$, ekkor jelölje l_z a *kiértékelő lineáris funkcionált*, amelyre $f \in \mathcal{O}L^2(D)$ esetén $l_z(f) = f(z)$.

A következő tétel állítása szerint a Bergman-tér függvényei nem nőhetnek túl gyorsan a tartomány határánál. Ennek egyik következménye, hogy az l_z kiértékelő funkcionálok korlátosak, tehát folytonosak.

1.8. Tétel. *Legyen $D \subsetneq \mathbb{C}$ tartomány, és $f \in \mathcal{O}L^p(D)$. Ekkor minden $z \in D$ esetén*

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\pi^{\frac{1}{p}} d(z, \partial D)^{\frac{2}{p}}} \|f\|_p,$$

ahol $d(z, \partial D)$ jelöli a z pont távolságát a D határától.

Bizonyítás. Ha $p = \infty$, akkor az állítás triviális az $1/p = 2/p = 0$ konvenció mellett. Legyen tehát $0 < p < \infty$, $z \in D$, és $\delta = d(z, \partial D)$. Ekkor

$$D_\delta(z) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\} \subseteq D.$$

Az 1.6. következmény szerint az $M_p(r, f(z + re^{i\varphi}))$ függvény monoton növő r-ben, ha $0 \leq r < \delta$, tehát ekkor

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z + re^{i\varphi}) \right|^p d\varphi.$$

Az egyenlőtlenséget $2\pi r$-rel szorozva, majd az így kapott kifejezéseket r szerint 0-tól δ-ig integrálva

$$\pi\delta^2 |f(z)|^p \leq \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \left| f(z + re^{i\varphi}) \right|^p d\varphi \, r dr =$$

$$= \int_{D_\delta(r)} |f(z)|^p \, dA(z) \leq \int_D |f(z)|^p \, dA(z) = \|f\|_p^p,$$

ami átrendezve éppen az állítás. □

1.9. Következmény. *Ha $f_n, f \in \mathcal{O}L^p(D)$, és $\|f_n - f\|_p \to 0$, akkor az f_n sorozat lokálisan egyenletesen tart az f függvényhez.*

1.10. Következmény. *Az $\mathcal{O}L^p(D)$ tér teljes. Ha $1 \le p \le \infty$, akkor az $\mathcal{O}L^p(D)$ tér Banach-tér. Az $\mathcal{O}L^2(D)$ tér Hilbert-tér, ahol a skalárszorzatot az*

$$\langle f, g\rangle = \int_D f(z)\overline{g(z)}dA(z)$$

integrállal definiáljuk.

Bizonyítás. Elegendő az első állítást bizonyítani. Mivel az $L^p(D)$ terek teljesek, így elég megmutatni, hogy az $\mathcal{O}L^p(D)$ terek ezeknek zárt alterei (ezeket természetes módon beágyazva az L^p-terekbe). Ha $f_n \in \mathcal{O}L^p(D)$, és $\|f_n - f\|_p \to 0$, ahol $f \in L^p(D)$, akkor van olyan részsorozat, amely majdnem mindenütt pontonként konvergál f-hez. Másrészt az f_n sorozat Cauchy-sorozat $\|\cdot\|_p$-re nézve, így lokálisan egyenletesen is Cauchy-sorozat, tehát a Weierstrass-tétel szerint lokálisan egyenletesen tart egy g holomorf függvényhez. Így $f = g$ majdnem mindenütt, vagyis az f és a g ekvivalenciaosztálya megegyezik L^p-ben. □

Mivel az előző tétel bizonyításában felhasználtuk az 1.8. tételt, így csak a $D \neq \mathbb{C}$ tartományokra kaptuk meg az állítást. Egyszerűen látszik azonban, hogy $p < \infty$ esetén $\mathcal{O}L^p(\mathbb{C}) = \{0\}$. Legyen ugyanis $f \in \mathcal{O}L^p(\mathbb{C})$, ekkor f az integrálhatóság miatt eltűnik a végtelenben, ezért korlátos, így a Liouville-tétel szerint konstans, azaz $f \equiv 0$. Ha $p = \infty$, akkor éppen a korlátos egészfüggvények teréről van szó, tehát $\mathcal{O}L^\infty(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$. Később azt is látni fogjuk (minden addigi eredménytől függetlenül), hogy ha a Bergman-tér nem triviális, akkor $p = 2$ esetén végtelen dimenziós.

Ha a $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány korlátos, akkor minden korlátos függvény, speciálisan például minden polinom normája véges, tehát ekkor $\mathcal{O}L^p(D) \neq \{0\}$. Nem feltétlenül igaz azonban, hogy a Bergman-tér csak korlátos függvényekből áll. Ha például D korlátos és egyszeresen összefüggő, akkor tetszőleges $z_0 \in \partial D$-re $f(z) = 1/\sqrt{z - z_0} \in \mathcal{O}L^2(D)$, ahol a négyzetgyököt a logaritmus reguláris ágával definiáljuk. Valóban, ekkor $|f(z)|^2$ integrálható egy tetszőleges z_0 körüli körön:

$$\int\limits_{\{z-z_0 \le R\}} \frac{1}{|z-z_0|}dA(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r}{r}drd\varphi = 2\pi R.$$

Mutatunk egy példát arra is, amikor $\mathcal{O}L^2(D) \neq \{0\}$, és a 0-n kívül egyetlen korlátos függvényt sem tartalmaz. Ehhez segítségünkre lesz az [5] könyvben is megtalálható következő tétel:

1.11. Tétel (Painlevé)**.** *Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ olyan tartomány, melyre $E = \mathbb{C} \setminus D$ korlátos. Tegyük fel, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van E-nek olyan körökkel való fedése, hogy a körök sugarának összege kisebb ε-nál. Ekkor $\mathcal{O}(D)$ nem tartalmaz végtelenben eltűnő korlátos függvényt az azonosan nulla függvényen kívül.*

Bizonyítás. Eltolás után feltehető, hogy $0 \in E$. Legyen $\varepsilon > 0$, és fedjük le E-t körökkel úgy, hogy sugaraik összhossza ε-nál kisebb legyen. Mivel E kompakt, így feltehető, hogy véges sok körrel fedjük. Legyen Γ_ε ezen körök D_ε uniójának a határa. Tegyük fel először, hogy D_ε összefüggő. Ha $f \in \mathcal{O}(D)$, akkor $z \notin \overline{D_\varepsilon}$ esetén helyettesítéses integrálást és a Cauchy-integrálformulát használva

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{f(\frac{1}{\zeta})}{\frac{1}{\zeta} - z}\cdot\frac{-1}{\zeta^2}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{f(\frac{1}{\zeta})\cdot\frac{1}{z\zeta}}{\zeta - \frac{1}{z}}d\zeta = f\left(\frac{1}{z^{-1}}\right)\cdot\frac{1}{zz^{-1}} = f(z),$$

ahol Γ'_ε a Γ_ε képe az $1/z$ függvénynél. A (-1)-es szorzó az első egyenlőségnél a görbe irányításának megváltozása miatt jelenik meg. Ha D_ε nem összefüggő, akkor hagyjunk ki a határából kis $\delta > 0$ hosszúságú köríveket, és kössük össze a véges sok összefüggő részt ezen körívek végpontjaiból induló egyenes szakaszokkal úgy, hogy z az így kapott, immár összefüggő tartomány külsejében legyen. Ekkor ismét érvényes a fenti formula. Most δ-val nullához tartva

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta$$

adódik.

Ha f korlátos, és $f(\infty) = 0$, akkor az előző formulából

$$|f(z)| \leq \frac{\varepsilon \cdot \sup_{\zeta \in \Gamma_\varepsilon} f(\zeta)}{d(z, \Gamma_\varepsilon)} \leq \frac{\varepsilon \cdot \sup_{\zeta \in D} f(\zeta)}{d(z, \Gamma_\varepsilon)}.$$

Mivel elég nagy abszolút értékű z-re és elég kis ε-ra $d(z, \Gamma_\varepsilon)$ alulról korlátos, így ε-nal a nullához tartva $f(z) = 0$ adódik. □

Ha E a Cantor-halmaz a valós egyenesen, akkor E lefedhető 2^n darab $(1/3)^n$ átmérőjű körrel tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re. Így az előző tétel szerint $\mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus E)$-ben nincs végtelenben eltűnő korlátos függvény a 0-n kívül. Megmutatható azonban, hogy $\mathcal{O}L^2(\mathbb{C} \setminus E) \neq \{0\}$ (lásd [3]).

1.2. A Bergman-terek reprodukáló magfüggvényei

Ebben a pontban csak az $\mathcal{O}L^2(D)$ terekkel foglalkozunk. Ezeknek egyik legfontosabb tulajdonsága a reprodukáló magfüggvény létezése. Erről szól a következő

1.12. Tétel. *Legyen olyan $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány, melyre $\mathcal{O}L^2(D) \neq \{0\}$. Ekkor létezik olyan $K(z, w) : D \times D \to \mathbb{C}$ függvény, melyre a következők teljesülnek:*

1. *$K(z, w)$ holomorf z-ben, és antiholomorf w-ben, továbbá $K(w, z) = \overline{K(z, w)}$.*

2. *Fix $w \in D$-re $K(\cdot, w) \in \mathcal{O}L^2(D)$, és minden $f \in \mathcal{O}L^2(D)$-re*
$$f(z) = \langle f, K(\cdot, z) \rangle = \int_D f(w)\overline{K(w, z)} dA(w) = \int_D f(w) K(z, w) dA(w).$$

3. *Ha $f \in L^2(D)$, és Pf az f ortogonális projekciója $\mathcal{O}L^2(D)$-re, akkor*
$$Pf(z) = \int_D f(w) K(z, w) dA(w).$$

4. *Minden $z, u \in D$-re*
$$\int_D K(z, w) K(w, u) dA(w) = K(z, u).$$

5. *Minden $z \in D$-re és $f \in \mathcal{O}L^2(D)$-re $|f(z)|^2 \leq K(z, z)\|f\|^2$, és a $K(z, z)$ konstans optimális abban az értelemben, hogy minden $z \in D$-re van olyan $f_z \in \mathcal{O}L^2(D)$, amire egyenlőség teljesül.*

6. *Ha $z \in D$, és $\phi \in \mathcal{O}L^2(D)$ olyan, hogy minden $f \in \mathcal{O}L^2(D)$-re*
$$f(z) = \int_D f(w)\overline{\phi(w)} dA(w),$$
akkor $K(z, w) = \overline{\phi(w)}$.

Bizonyítás. Az előző szakaszban láttuk, hogy az l_z kiértékelő funkcionálok folytonosak, így a Riesz-tétel szerint van olyan $\phi_z \in \mathcal{O}L^2(D)$, melyre minden $f \in \mathcal{O}L^2(D)$ esetén

$$f(z) = \langle f, \phi_z \rangle = \int_D f(w)\overline{\phi_z(w)}dA(w).$$

Legyen $K(z,w) = \overline{\phi_z(w)}$. Ekkor $K(z,w)$ antiholomorf w-ben. A fenti egyenlőségnél f helyére ϕ_z-t írva

$$\phi_z(w) = \langle \phi_z, \phi_w \rangle = \overline{\langle \phi_w, \phi_z \rangle} = \overline{\phi_w(z)},$$

tehát $K(z,w) = \overline{K(w,z)} = \phi_w(z)$, és így $K(z,w) \in \mathcal{O}L^2(D)$. Ezzel az 1. állítást beláttuk, és az eddigiekből következik a 2. állítás is.

A 3. állításhoz legyen először $f \in \mathcal{O}L^2(D)$, ekkor a 3. állítás jobb oldala megegyezik $f(z)$-vel a 2. állítás szerint. Ha viszont $f \in \mathcal{O}L^2(D)^\perp$, akkor $\langle f, \phi_z \rangle = 0$, mert $\phi_z \in \mathcal{O}L^2(D)$. Tehát

$$\int_D f(w)K(\cdot, w)dA(w)$$

az identitás $\mathcal{O}L^2(D)$-n, és 0 a merőleges komplementerén, így szükségképp megegyezik az ortogonális projekcióval.

A 4. állítást úgy kapjuk, ha alkalmazzuk a 2. állítást a $\overline{K(z,\cdot)} \in \mathcal{O}L^2(D)$ függvényre.

Az 5. állítás bizonyításához írjuk fel a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséget:

$$|f(z)|^2 = |\langle f, K(\cdot, z)\rangle|^2 \le \langle K(\cdot, z), K(\cdot, z)\rangle \langle f, f\rangle = K(z,z)\|f\|^2.$$

Világos, hogy $f_z = K(\cdot, z)$-re itt egyenlőség teljesül.

A 6. állításhoz legyen $\phi \in \mathcal{O}L^2(D)$ olyan, hogy minden $f \in \mathcal{O}L^2(D)$-re

$$\langle f, \phi \rangle = f(z) = \langle f, K(\cdot, z)\rangle.$$

Ekkor minden $f \in \mathcal{O}L^2(D)$-re $\langle f, \phi - K(\cdot, z)\rangle = 0$, és mivel $\phi - K(\cdot, z) \in \mathcal{O}L^2(D)$, így $\|\phi - K(\cdot, z)\| = 0$, azaz $\phi(w) = \overline{K(z,w)}$. □

Megjegyzés. A fenti bizonyítás tetszőleges függvénytérre elmondható, amely Hilbert-tér, és ahol a kiértékelő funkcionálok folytonosak. Tehát ekkor létezik olyan $K(z,w)$ függvény, melyre $f(z) = \langle f, K(\cdot, z)\rangle$. Ha továbbá létezik ilyen függvény, akkor a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség szerint a kiértékelő funkcionálok folytonosak (5. állítás), vagyis a magfüggvény létezése ekvivalens a kiértékelő funkcionálok folytonosságával.

A következő tétel elméletben módszert is ad a magfüggvény meghatározására, amely bizonyos speciális tartományok esetén valóban lehetővé teszi $K(z,w)$ explicit alakjának kiszámolását.

1.13. Tétel. *Legyen $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormált bázis az $\mathcal{O}L^2(D)$ téren. Ekkor minden $z, w \in D$ esetén*

$$\sum_n \left|\phi_n(z)\overline{\phi_n(w)}\right| < \infty,$$

valamint

$$K(z,w) = \sum_n \phi_n(z)\overline{\phi_n(w)}.$$

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{O}L^2(D)$, ekkor a Parseval-formula szerint $\sum_n |\langle f, \phi_n \rangle|^2 = \|f\|^2$. Ha tehát $f, g \in \mathcal{O}L^2(D)$, akkor az $|\langle f, \phi_n \rangle|$ és a $|\langle g, \phi_n \rangle|$ sorozatok benne vannak az l^2 térben. Alkalmazva az ottani Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséget

$$\sum_n |\langle \phi_n, f \rangle \langle g, \phi_n \rangle| \leq \|f\| \|g\|.$$

Most az $f = K(\cdot, z)$ és a $g = K(\cdot, w)$ választással

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \phi_n(z) \overline{\phi_n(w)} \right| \leq \|K(\cdot, z)\| \|K(\cdot, w)\| < \infty$$

adódik.

Legyen most w rögzített. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \phi_n(z) \overline{\phi_n(w)} \right\|_{L_2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \overline{\langle \phi_n, K(\cdot, w) \rangle} \phi_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle \phi_n, K(\cdot, w) \rangle|^2 = \|K(\cdot, w)\|^2 < \infty,$$

de a ϕ_n függvények ortogonálisak, így valójában $\mathcal{O}L^2$-ben konvergens sort kapunk. Tehát az összeg z-ben holomorf L_2-beli függvény. Hasonló érvelés mutatja, hogy w-ben antiholomorf L_2-beli függvényt kapunk.

Legyen most $f \in \mathcal{O}L^2(D)$, ekkor

$$f(w) = \langle f, K(\cdot, w) \rangle = \left\langle \sum_n \langle f, \phi_n \rangle \phi_n, K(\cdot, w) \right\rangle = \sum_n \langle f, \phi_n \rangle \langle \phi_n, K(\cdot, w) \rangle =$$

$$= \sum_n \phi_n(w) \int_D f(z) \overline{\phi_n(z)} dA(z) = \int_D f(z) \left[\sum_n \phi_n(w) \overline{\phi_n(z)} \right] dA(z),$$

ahol a szumma és az integrál felcserélhetőségét a szumma L_2-beli konvergenciája biztosítja. Végül az 1.12. tétel 6. állítása szerint a szumma megegyezik a magfüggvénnyel. □

1.3. Egy extremális probléma

Minden Hilbert-térnek létezik bázisa. Most a $D \subseteq \mathbb{C}$ korlátos tartományokra egy eljárást is mutatunk $\mathcal{O}L^2(D)$ bázisának meghatározására, ami a 0 középpontú gömbökre explicit alakot szolgáltat. Ennek segítségével az előző tétel alapján kiszámoljuk ezen tartományok magfüggvényét is.

Legyen $c \in D$ rögzített, és tekintsük azon $\mathcal{O}L^2(D)$-beli függvények S halmazát, melyekre $f^{(k)}(c) = 0$, ha $0 \leq k \leq n-1$, és $f^{(n)}(c) = 1$. Ez a halmaz nem üres, például a $(z-c)^n/n!$ megfelel a feltételeknek.

Megmutatjuk, hogy ebben a halmazban van pontosan egy olyan f_n függvény, melyre $\|f_n\|$ minimális. Legyen $A = \inf_{g \in S} \|g\|$, és legyen $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ olyan S-beli sorozat, melyre $\lim_{k \to \infty} \|g_k\| = A$. Ekkor a $\|g_k\|$ sorozat korlátos. A Cauchy-formula szerint minden $z \in D$-re

$$2\pi g_k(z) = \int_0^{2\pi} g_k(z + re^{i\varphi}) d\varphi,$$

ha g_k értelmezve van a z körüli r sugarú zárt körlapon. Ezért

$$\frac{1}{r_0^2 \pi} \int\limits_{|\zeta - z| < r_0} g_k(\zeta) dA(\zeta) = \frac{1}{r_0^2 \pi} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} g_k(z + re^{i\varphi}) r d\varphi dr = g_k(z).$$

Most a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség szerint

$$|g_k(z)|^2 = \left| \frac{1}{r_0^2\pi} \int\limits_{|\zeta - z| < r_0} g_k(\zeta) dA(\zeta) \right|^2 \leq \frac{1}{r_0^4\pi^2} \int\limits_{|\zeta - z| < r_0} |g_k(\zeta)|^2 \, dA(\zeta) \cdot 2r_0^2\pi = \frac{2\|g_k\|^2}{r_0^2\pi} \leq \frac{M}{r_0^2},$$

azaz a $\{g_k\}$ sorozat lokálisan egyenletesen korlátos. Ekkor minden $K \subseteq D$ kompakt halmazon is egyenletesen korlátos, így a Montel-tétel szerint van olyan $\{g_{\nu_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, amely minden kompakt halmazon egyenletesen konvergens. Ekkor a Weierstrass-tétel szerint ez a részsorozat pontonként tart egy f_n holomorf függvényhez.

Mivel a g_{ν_k} sorozat egyenletesen korlátos minden $K \subseteq D$ kompakt részhalmazon, így a Lebesgue-tétel szerint

$$\int_K |f_n(z)|^2 \, dA(z) = \lim_{k\to\infty} \int_K |g_{\nu_k}(z)|^2 \, dA(z) \leq \lim_{k\to\infty} \int_D |g_{\nu_k}(z)|^2 \, dA(z) = A^2.$$

Ezért a kis Lebesgue-tétel szerint

$$\int_D |f_n(z)|^2 \, dA(z) \leq A^2,$$

és mivel $\lim_{k\to\infty} g_{\nu_k}^{(l)} = f^{(l)}$ is teljesül, így $g_{\nu_k} \in S$ miatt $f_n \in S$, tehát valójában a fenti integrál egyenlő A^2-tel.

Megmutatjuk, hogy f_n az egyetlen ilyen függvény S-ben. Legyenek $f \in S$, $h \in \mathcal{O}L^2(D)$ olyanok, hogy $\|f\| = A$, és $h^{(k)}(c) = 0$, ha $0 \leq k \leq n$. Azt állítjuk, hogy ekkor $\langle f, h\rangle = 0$. Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{C}$-re $f + \lambda h \in S$. Tegyük fel, hogy $\langle f, h\rangle \neq 0$, és legyen $\lambda = -\langle f, h\rangle / \|h\|^2$, ekkor

$$\|f + \lambda h\|^2 = \|f\|^2 + \frac{|\langle f, h\rangle|^2}{\|h\|^4}\|h\|^2 + \lambda \langle h, f\rangle + \overline{\lambda} \langle f, h\rangle = A^2 - \frac{|\langle f, h\rangle|^2}{\|h\|^2} < A^2,$$

ami lehetetlen.

Ha $\hat{f}_n \in S$, és $\|\hat{f}_n\| = A$, akkor $(f_n - \hat{f}_n)^{(k)}(c) = 0$, ha $0 \leq k \leq n$, tehát

$$\left\langle f_n, f_n - \hat{f}_n \right\rangle = 0, \qquad \left\langle \hat{f}_n, f_n - \hat{f}_n \right\rangle = 0,$$

vagyis $\|f_n - \hat{f}_n\|^2 = 0$, és így $f_n = \hat{f}_n$.

Tekintsük most az $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rendszert. Mivel $n < m$ esetén $f_m^{(k)}(c) = 0$ minden $0 \leq k \leq n$ esetén, így $\langle f_n, f_m\rangle = 0$, tehát a rendszer ortogonális, vagyis az $\{f_n/\|f_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ rendszer ortonormált.

Megmutatjuk, hogy ez a rendszer zárt, és ezért teljes. Legyen tehát $f \in \mathcal{O}L^2(D)$, és legyen $a_k = \langle f, f_k/\|f_k\|\rangle$. A Bessel-egyenlőtlenség szerint $\sum a_k^2 \leq \|f\|^2$, tehát a Riesz–Fischer-tétel szerint a

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\|f_k\|} f_k$$

függvény $\mathcal{O}L^2(D)$-ben van, és $\|g\|^2 = \sum a_k^2$. Azt kell belátnunk, hogy $g = f$.

Keressük az a_k^n konstansokat ($n \in \mathbb{N}^+$), melyekre

$$h_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^n}{\|f_k\|} f_k,$$

továbbá $h_n^{(l)}(c) = f^{(l)}(c)$ minden $0 \le l \le n-1$-re. Mivel $f_k^{(l)}(c) = 0$, ha $0 \le l \le k-1$, és $f_k^{(k)}(c) = 1$, így az

$$f^{(l)}(c) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \frac{f_k^{(l)}(c)}{\|f_k\|}, \qquad (0 \le l \le n-1)$$

egyenletrendszer együtthatómátrixa felső háromszögmátrix, melynek determinánsa nem 0, tehát az egyenletrendszer megoldható, és léteznek a keresett a_k^n számok. Ekkor viszont $\langle f - h_n, f_k \rangle = 0$, ha $0 \le k \le n-1$, azaz $a_k^n = a_k$. Vagyis

$$\left(f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{\|f_k\|} f_k \right)^{(l)} = 0, \quad 0 \le l \le n-1$$

igaz minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra. A g függvényt definiáló sor lokálisan egyenletesen konvergens (ezt ugyanúgy láthatjuk be, ahogy a g_k függvényekről), így a Weierstrass-tétel szerint tagonként deriválható, vagyis $(f(z) - g(z))^{(l)} = 0$ minden $l \in \mathbb{N}$-re. Mivel az $f - g$ holomorf függvény, így tehát $f \equiv g$. Ezzel beláttuk, hogy az $\{f_n/\|f_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer.

Jelölje $\mathbb{D}_R$ az origó középpontú r sugarú körlapot. Ekkor az $f_n(z) = z^n/n!$ függvényekre nyilván teljesül, hogy $f_n^{(k)}(0) = 0$, ha $0 \le k \le n-1$, és $f_n^{(n)}(0) = 1$. Legyen n fix, g pedig olyan $\mathcal{O}L^2(\mathbb{D}_R)$-beli függvény, amely ugyanígy viselkedik. Belátjuk, hogy $\|f_n\| \le \|g\|$, azaz az előbb bizonyítottak speciális eseteként kapjuk, $\{f_n/\|f_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ egy teljes ortonormált rendszer $\mathcal{O}L^2(\mathbb{D}_R)$-ben.

Először is tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_{\mathbb{D}_R} z^n \overline{z^m} dA(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^n e^{in\varphi} r^m e^{-im\varphi} r dr d\varphi =$$

$$= \int_0^R r^{n+m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi dr = \begin{cases} \dfrac{\pi R^{2n+2}}{n+1}, & \text{ha } n = m \\ 0, & \text{ha } n \ne m, \end{cases}$$

tehát az f_n függvények ortogonális rendszert alkotnak $\mathcal{O}L^2(\mathbb{D}_R)$-ben. Mivel $g(z) = z^n/n! + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots$, így

$$\int_{\mathbb{D}_R} |g(z)|^2 \, dA(z) = \int_{\mathbb{D}_R} \left(\frac{z^n}{n!} + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots \right) \left(\frac{\overline{z}^n}{n!} + \overline{a}_{n+1} \overline{z}^{n+1} + \ldots \right) dA(z) =$$

$$= \int_{\mathbb{D}_R} \left| \frac{z^n}{n!} \right|^2 dA(z) + \int_{\mathbb{D}_R} \left| a_{n+1} z^{n+1} \right|^2 dA(z) + \cdots \ge \int_{\mathbb{D}_R} \left| \frac{z^n}{n!} \right|^2 dA(z) = \|f_n\|^2.$$

A következőt kaptuk tehát:

1.14. Tétel. *A* $\sqrt{\dfrac{n+1}{\pi}} \dfrac{z^n}{R^{n+1}}$ *($n \in \mathbb{N}$) függvények az $\mathcal{O}L^2(\mathbb{D}_R)$ tér egy bázisát alkotják.*

A fenti számolás egyébként azt is mutatja, hogy ha $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < 1\}$, ahol $\varepsilon > 0$, és $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \ne m$, akkor

$$\int_{D_\varepsilon} z^n \overline{z^m} dA(z) = 0.$$

Ennek van egy érdekes következménye. Legyen $f \in \mathcal{O}L^2(\mathbb{D}_1 \setminus \{0\})$, és fejtsük Laurent-sorba az origó körül:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Ekkor minden $\varepsilon > 0$-ra

$$\int_{\mathbb{D}_1} |f(z)|^2 \, dA(z) = \int_{\mathbb{D}_1} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \right|^2 dA(z) \geq \int_{D_\varepsilon} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \right|^2 dA(z) =$$

$$\int_{D_\varepsilon} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{a}_n \overline{z}^n \right) dA(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{D_\varepsilon} |a_n z^n|^2 \, A(z).$$

Ha most valamely $n < 0$-ra $a_n \neq 0$, akkor

$$\|f\|^2 \geq \int_{D_\varepsilon} \left| \frac{a_n}{z^{|n|}} \right|^2 dA(z) = \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 \frac{|a_n|^2 r}{r^{2|n|}} dr d\varphi = \begin{cases} 2\pi |a_n|^2 \left[-\frac{2|n|-2}{r^{2|n|-2}} \right]_\varepsilon^1 & (n < -1) \\ 2\pi |a_n|^2 [\log r]_\varepsilon^1 & (n = -1). \end{cases}$$

Itt a jobb oldali kifejezések ∞-hez tartanak, ha ε tart 0-hoz, ami lehetetlen. Következésképp minden $n < 0$-ra $a_n = 0$, vagyis f szingularitása megszüntethető. Nyilván semmi jelentősége nincs a fenti gondolatmenetben a kipontozott körlap középpontjának és sugarának, így valójában a következő eredményt kaptuk:

1.15. Tétel. *Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány, $z_0 \in D$, ekkor minden $f \in \mathcal{O}L^2(D \setminus \{z_0\})$ függvény kiterjed $\mathcal{O}L^2(D)$-beli függvénnyé. Vagyis a Bergman-tér függvényeinek izolált szingularitásai megszüntethetők.*

Térjünk vissza a bázis meghatározásához. Legyen most $D \subsetneqq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány. Ekkor D konform ekvivalens az egységkörlappal. A konform leképezés segítségével megkaphatjuk majd $\mathcal{O}L^2(D)$ bázisát is. Ehhez először vizsgáljuk meg, hogyan írhatjuk fel egy függvény normáját egy konform leképezés segítségével.

1.16. Állítás. *Legyenek $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ tartományok, $\phi : D_1 \to D_2$ konform ráképezés, és $f \in \mathcal{O}L^2(D_2)$. Ekkor*

$$\int_{D_2} |f(z)|^2 \, dA(z) = \int_{D_1} |f(\phi(z))|^2 \, |\phi'(z)|^2 \, dA(z).$$

Bizonyítás. Használjuk a valós függvénytanból ismert integráltranszformációs formulát:

$$\int_{D_2} |f(z)|^2 \, dA(z) = \int_{D_1} |f(\phi(z))|^2 \, |\det D\phi(z)| \, A(z),$$

ahol $D\phi$ jelöli a valós deriváltat. Ha $\phi(z) = \phi_1(z) + i\phi_2(z)$, és $z = \tau + i\eta$, akkor

$$\det D\phi = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial \tau} & \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} - \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \tau} =$$

$$= \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial \tau} = \left| \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right|^2 = \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|^2 = |\phi'(z)|^2,$$

ahol felhasználtuk a komplex derivált definícióját és a Cauchy–Riemann-egyenleteket. □

Legyen tehát $D \neq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $c \in D$, és $\phi : D \to \mathbb{D}_R$ az a konform leképezés, melyre $\phi(c) = 0$, és $\phi'(c) = 1$. Belátjuk, hogy az

$$f_n(z) = \frac{\phi(z)^n \phi'(z)}{n!}$$

függvények megoldják a fenti extremális feladatot. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy $f_n^{(k)}(c) = 0$, ha $0 \leq k \leq n-1$, továbbá $f_n^{(n)}(c) = 1$. Legyen g_n az a függvénysorozat, amely megoldja az extremális feladatot D-n. Ekkor

$$\int_D \left| \frac{\phi(z)^n \phi'(z)}{n!} \right|^2 = \int_{\mathbb{D}_R} \left| \frac{z^n}{n!} \right|^2 dA(z) \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{D}_R} \left| g_n(\phi^{-1}(z))(\phi^{-1})'(z) \right|^2 dA(z) = \int_D |g_n(z)|^2 \, dA(z).$$

A g_n függvények egyértelműsége miatt $f_n = g_n$, tehát a

$$\sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \cdot \frac{\phi(z)^n \phi'(z)}{R^{n+1}}$$

függvények ortonormált bázist alkotnak $\mathcal{O}L^2(D)$-ben.

Végül explicit képletet adunk az $\mathcal{O}L^2(\mathbb{D}_R)$ tér magfüggvényére:

1.17. Tétel. *Az $\mathcal{O}L^2(\mathbb{D}_R)$ tér reprodukáló magfüggvénye*

$$K(z, w) = \frac{R^2}{\pi(R^2 - z\overline{w})^2}.$$

Következésképpen minden $f \in \mathcal{O}L^2(D)$-re

$$|f(z)|^2 \leq \frac{R^2}{\pi \left(R^2 - |z|^2\right)^2} \|f\|.$$

Bizonyítás. Az 1.13. és az 1.14. tételek szerint

$$K(z, w) = \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n+1)(z\overline{w})^n}{R^{2n+2}}.$$

Ha $\alpha < 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha^n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n+1} \right)' = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)' = \frac{1}{(1-\alpha)^2},$$

tehát

$$K(z, w) = \frac{1}{\pi R^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{z\overline{w}}{R^2} \right)^n = \frac{R^2}{\pi(R^2 - z\overline{w})^2}.$$

Az egyenlőtlenség az 1.12. tétel 5. állításának következménye. □

Az origó középpontú kör magfüggvénye más módon is meghatározható, két a fentitől különböző érvelés található például a [7] könyvben. Általában azonban nem lehet explicit módon felírni sem a bázist, sem a magfüggvényt. Megemlítünk egy másik kivételes esetet: a $D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ tartományok bázisa is viszonylag egyszerűen felírható, és a Weierstrass-féle $\wp$ függvény segítségével zárt alak adható a magfüggvényére. A részletekért lásd az [1] könyvet.

2. Bers tétele Bergman-terekre

2.1. A Bergman-terek dimenziója

Ebben a fejezetben csak az $\mathcal{O}L^2(D)$ terekkel foglalkozunk. A későbbiekben felhasználjuk majd, hogy a nemtriviális Bergman-terek dimenziója egynél nagyobb. Ebben a szakaszban belátjuk Wiegerinck [8] tételét, mely szerint minden $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány esetén a triviálistól különböző Bergman-terek valójában végtelen dimenziósak. Ehhez célszerű a Bergman-tér fogalmát a $D \subseteq \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tartományokra kiterjeszteni. Azt mondjuk, hogy $f \in \mathcal{O}L^2(D)$, ha f négyzetesen integrálható a $D \setminus \{\infty\}$ halmazon. Szükségünk lesz a következő állításra:

2.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy az $E \subseteq \mathbb{C}$ kompakt halmaz pozitív Lebesgue-mértékű. Ekkor az*

$$f(z) = \int_E \frac{1}{\zeta - z} dA(\zeta)$$

függvény nem konstans, folytonos és korlátos $\mathbb{C}$-n, továbbá $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus E)$, és $f^2 \in \mathcal{O}L^2(\overline{\mathbb{C}} \setminus E)$.

Bizonyítás. Legyen $z_0 \in \mathbb{C} \setminus E$, ekkor

$$\left| \frac{1}{z - z_0} \int_E \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} dA(\zeta) - \int_E \frac{1}{(\zeta - z_0)^2} dA(\zeta) \right| \leq$$

$$\leq \int_E \left| \frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^2} \right| dA(\zeta) \leq \varepsilon \lambda(E),$$

ha $|z - z_0|$ elég kicsi (itt λ jelöli a Lebesgue-mértéket). Ez azért igaz, mert az $1/[(\zeta - z)(\zeta - z_0)]$ függvény egyenletesen tart az $1/(\zeta - z_0)^2$ függvényhez E-n, ugyanis ha $\delta > 0$ olyan, hogy $B_\delta(z_0) \subseteq \mathbb{C} \setminus E$, akkor $|1/[(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2]| \leq C$, és így $z \in B_\delta(z_0)$ esetén

$$\left| \frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^2} \right| = \left| \frac{z - z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2} \right| \leq \delta C.$$

Tehát $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus E)$. Az f folytonossága $\mathbb{C}$-n hasonló módon következik abból, hogy az $1/(\zeta - z)$ függvény integrálható z körül, és E korlátos. Mivel továbbá $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$, kompakt halmazokon pedig f a folytonosság miatt korlátos, így korlátos az egész $\mathbb{C}$-n. Az f nem konstans, mert

$$\int_E \frac{z}{\zeta - z} dA(\zeta) = \int_E -1 dA(\zeta) + \int_E \frac{\zeta}{\zeta - z} dA(\zeta) = -\lambda(E) + \int_E \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} dA(\zeta),$$

és így $\lim_{z \to \infty} z f(z) = -\lambda(E)$.

Mivel f eltűnik a végtelenben, így végtelen körüli Laurent-sora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$ alakú, és ekkor elég nagy abszolút értékű z-re

$$f^2(z) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^{-n}.$$

Tehát az $f^2(1/z) \cdot 1/z^2$ integrálható a 0 egy környezetében, így f^2 integrálható a végtelen egy környezetében. De f^2 korlátos is, így $f^2 \in \mathcal{O}L^2(\mathbb{C} \setminus E)$. □

2.2. Tétel (Wiegerinck). *Legyen $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, és tegyük fel, hogy $\mathcal{O}L^2(D) \neq \{0\}$. Ekkor $\mathcal{O}L^2(D)$ végtelen dimenziós.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $\infty \in D$. Legyen ugyanis ellenkező esetben ϕ olyan Möbius-transzformáció, amelyre $\infty \in \phi(D)$. Ha az $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rendszer független $\mathcal{O}L^2(\phi(D))$-ben, akkor az $\{(f_n \circ \phi) \cdot \phi'\}_{n\in\mathbb{N}}$ rendszer nyilván független lesz $\mathcal{O}L^2(D)$-ben. Tegyük fel, hogy $0 \neq f \in \mathcal{O}L^2(D)$. Két esetet tekintünk.

Első eset: Az f egy racionális függvény. Ekkor

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, dA(z) = \infty,$$

ha ugyanis a nevezője nem konstans, akkor a gyökei környezetében nem integrálható. Ha viszont konstans, akkor a végtelenben való eltűnés miatt a számláló, és így a függvény is 0 volna. Továbbá mivel

$$\int_{D} |f(z)|^2 \, dA(z) < \infty,$$

így a $\mathbb{C} \setminus D$ kompakt halmaz pozitív mértékű, tehát az előző lemma miatt létezik egy g nem konstans korlátos függvény $\mathcal{O}L^2(D)$-ben. Ekkor $g^n \in \mathcal{O}L^2(D)$ minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra, és ezek a függvények függetlenek. Tegyük fel ugyanis, hogy

$$\lambda_1 g^{k_1} + \cdots + \lambda_l g^{k_l} = 0,$$

ahol $0 \neq \lambda_i \in \mathbb{C}$ $(1 \leq i \leq l)$, $1 \leq k_1 < \cdots < k_l$. Ekkor g^{k_1} kiemelhető, és így

$$\lambda_1 + \lambda_2 g^{k_2-k_1} + \cdots + \lambda_l g^{k_l-k_1} = 0,$$

tehát $-\lambda_1 \in \mathcal{O}L^2(D)$. De $\infty \in D$ miatt ekkor $\lambda_1 = 0$, ami lehetetlen.

Második eset: Az f nem racionális. Fejtsük Laurent-sorba a ∞ körül:

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k z^{-k}, \qquad c_m \neq 0, \qquad m \geq 2.$$

Itt $a_0 = 0$, hiszen $f(\infty) = 0$, és $a_1 = 0$ is teljesül, mert az $f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}$ függvény négyzetesen integrálható a 0 körül.

Konstruálunk egy olyan $g \in \mathcal{O}L^2(D)$ függvényt, amelynek a végtelen körüli Laurent-sorában az első m együttható 0. Legyenek $z_1, \ldots, z_{m+1} \in D$ tetszőleges különböző pontok, melyekben f nem tűnik el. A következő formában keressük g-t:

$$g(z) = \sum_{n=1}^{m+1} \frac{b_m(f(z) - f(z_n))}{z - z_n},$$

ahol $b_n \in \mathbb{C}$ később megválasztandó konstansok. Fejtsük Laurent-sorba g-t a végtelen körül:

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k}.$$

Belátjuk, hogy $k = 1, \ldots, m$-re

$$a_k = \sum_{n=1}^{m+1} -b_n f(z_n) z_n^{k-1}. \tag{2}$$

Ezek éppen a $g(1/z)$ függvény 0 körüli hatványsorának együtthatói, tehát a reziduum-tétel szerint

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{g(1/\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{m+1} b_n \int_{|\zeta|=R}\frac{f(1/\zeta)-f(z_n)}{(1-z_n\zeta)\zeta^k}d\zeta = \sum_{n=1}^{m+1} b_n \mathrm{rez}_0\left(\frac{f(1/z)-f(z_n)}{(1-z_nz)z^k}\right).$$

Itt az utolsó zárójelben lévő függvények reziduuma éppen az

$$\frac{f(1/z)-f(z_n)}{(1-z_nz)} = \left(\sum_{j=m}^{\infty} c_j z^j - f(z_n)\right)\sum_{l=0}^{\infty}(z_nz)^l$$

sor $(k-1)$-edik együtthatója. Mivel $k \leq m$, ez éppen $-f(z_n)z_n^{k-1}$, és így (2)-t beláttuk.

Mivel (2) egy egyenletrendszer az a_k együtthatókra, és $f(z_n) \neq 0$, így ez tetszőleges a_k értékek esetén megoldható, speciálisan választható mind 0-nak. Most $a_0 = a_1 = 0$, így a $g\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}$ függvény négyzetesen integrálható a 0 körül, vagyis g integrálható a végtelen egy környezetében, azaz egy elég nagy R sugarú körön kívül. Ha a z_i pontokat R-nél nagyobb abszolút értékűnek választjuk, akkor az $1/(z-z_i)$ függvények e körön belül már korlátosak. Továbbá $f \in \mathcal{O}L^2(D)$, ezért $g \in \mathcal{O}L^2(D)$, és g nem racionális, különben f is racionális volna, így speciálisan $g \neq 0$. Valamint g és f függetlenek, hiszen $c_m \neq 0$.

Legyen $m' > m$ minimális, melyre $a_{m'} \neq 0$. Ekkor hasonló konstrukcióval olyan $\mathcal{O}L^2(D)$-beli 0-tól különböző függvényt kapunk, amelynek végtelen körüli hatványsorában az első m' együttható 0. Az eljárást folytatva könnyen láthatóan végtelen sok független függvényt konstruálhatunk. □

Megjegyzés. A 4. fejezetben magasabb dimenzióban is értelmezzük majd a Bergman-tereket. Ebben az esetben viszont az előző tétel már nem igaz, tetszőleges $k > 0$-hoz található olyan D Reinhardt-tartomány $\mathbb{C}^2$-ben, amire $\dim \mathcal{O}L^2(D) = k$ (lásd [8]).

2.2. Bers tétele

Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány, ekkor az ezen a tartományon holomorf függvények algebrát alkotnak. Bers [2] tétele azt mondja ki, hogy ha D_1 és D_2 tartományok, akkor az $\mathcal{O}(D_1)$ és $\mathcal{O}(D_2)$ algebrák közti izomorfizmusokból visszanyerhető egy a tartományok közötti konform leképezés. Pontosabban igaz a következő

2.3. Tétel (Bers)**.** *Legyenek $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ tartományok, és tegyük fel, hogy $\varphi : \mathcal{O}(D_2) \to \mathcal{O}(D_1)$ egy $\mathbb{C}$-algebra homomorfizmus. Ekkor létezik pontosan egy $h : D_1 \to D_2$ holomorf függvény, melyre $f \in \mathcal{O}(D_2)$ esetén $\varphi(f) = f \circ h$. A φ leképezés pontosan akkor bijektív, ha h konform ráképezés.*

2.4. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány. Ekkor a $\chi : \mathcal{O}(D) \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-algebra homomorfizmusokat *karaktereknek* nevezzük.

Világos, hogy az l_z kiértékelő funkcionálok karakterek. A következő lemma szerint minden karakter ezek valamelyike.

2.5. Lemma. *Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány, és $0 \neq \chi : \mathcal{O}(D) \to \mathbb{C}$ karakter. Ekkor $\chi = l_{z_0}$, ahol $z_0 = \chi(id_D) \in D$.*

Bizonyítás. Mivel $\chi(1) = \chi(1 \cdot 1) = \chi(1) \cdot \chi(1)$, így $\chi(1) = 1$, vagy $\chi(1) = 0$. Utóbbi esetben tetszőleges $f \in \mathcal{O}(D)$-re $\chi(f) = \chi(f \cdot 1) = \chi(f) \cdot \chi(1) = 0$ volna, ami $\chi \neq 0$ miatt lehetetlen.

Legyen $z_0 = \chi(id_D)$, és $f(z) = z - z_0$. Ekkor $\chi(f) = \chi(id_D) - \chi(z_0) = z_0 - z_0 = 0$. Tegyük fel, hogy $z_0 \notin D$, ekkor $f^{-1} \in \mathcal{O}(D)$. Így

$$1 = \chi(1) = \chi(f \cdot f^{-1}) = \chi(f) \cdot \chi(f^{-1}) = 0,$$

ami lehetetlen, tehát $z_0 \in D$.

Legyen most $g \in \mathcal{O}(D)$ tetszőleges. Ekkor $g(z) = g(z_1) + f(z) \cdot h(z)$, ahol $h \in \mathcal{O}(D)$, így

$$\chi(g) = \chi(g(z_0)) + \chi(f) \cdot \chi(h) = g(z_0),$$

azaz $\chi = l_{z_0}$. $\square$

A tétel bizonyítása. Mivel olyan h függvényt szeretnénk kapni, amelyre $\varphi(f) = f \circ h$, így az egyetlen lehetséges választásunk $h = \varphi(id_{D_2})$.

Ha $a \in D_1$, akkor $l_a \circ \varphi$ egy karakter $\mathcal{O}(D_2)$-n, tehát a lemma szerint $l_a \circ \varphi = l_b$, ahol $b = l_b(id_{D_2}) = (l_a \circ \varphi)(id_{D_2}) = l_a(h) = h(a)$. Így $f \in \mathcal{O}(D_2)$ esetén

$$\varphi(f)(a) = l_a(\varphi(f)) = (l_a \circ \varphi)(f) = l_{h(a)}(f) = f(h(a)) = (f \circ h)(a)$$

minden $a \in D_1$-re. Azaz $\varphi(f) = f \circ h$ minden $f \in \mathcal{O}(D_2)$-re.

Tegyük fel, hogy $h : D_1 \to D_2$ konform leképezés. Legyen $g \in \mathcal{O}(D_1)$, és $f = g \circ h^{-1}$. Ekkor $\varphi(f) = f \circ h = g$, tehát φ szürjektív. Ha továbbá $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$, akkor $f_1 \circ h = f_2 \circ h$, így h^{-1}-zel komponálva $f_1 = f_2$ adódik, tehát φ izomorfizmus.

Tegyük fel most, hogy φ izomorfizmus, és legyen $a \in D_2$ tetszőleges. Ekkor l_a karakter $\mathcal{O}(D_2)$-n, így $l_a \circ \varphi^{-1}$ karakter $\mathcal{O}(D_1)$-en. Van tehát egy $b \in D_1$ pont, melyre $l_a \circ \varphi^{-1} = l_b$, azaz $l_a = l_b \circ \varphi$. Ekkor

$$a = l_a(id_{D_2}) = (l_b \circ \varphi)(id_{D_2}) = l_b(h) = h(b),$$

tehát h szürjektív. A fenti érvelés azt is mutatja, hogy b egyértelműen meghatározott, és így h injektív. $\square$

Vizsgáljuk meg az analóg kérdést a Bergman-tereken. Itt az izomorfizmusoknak az unitér leképezések felelnek meg, a karaktereknek pedig lineáris funkcionálok. A fenti tételben φ hatott a karaktereken, és ez a hatás lényeges információt hordozott a h függvényről. Ha $U : \mathcal{O}L^2(D_2) \to \mathcal{O}L^2(D_1)$ unitér, akkor U generál egy $U^* : \mathcal{O}L^2(D_1)^* \to \mathcal{O}L^2(D_2)^*$ unitér leképezést, melyet $\phi \in \mathcal{O}L^2(D_1)^*$ esetén az $U^*\phi := \phi \circ U$ definícióval adhatunk meg.

Legyenek $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ tartományok, $\gamma : D_1 \to D_2$ konform ráképezés, $h \in \mathcal{O}L^2(D_2)$, ekkor az 1.16. állítás szerint

$$\int_{D_2} |h(z)|^2 \, dA(z) = \int_{D_1} |(h \circ \gamma)(z)|^2 \, |\gamma'(z)|^2 \, dA(z),$$

azaz az $F_\gamma : \mathcal{O}L^2(D_2) \to \mathcal{O}L^2(D_1)$, $h \mapsto (h \circ \gamma) \cdot \gamma'$ leképezés unitér.

Vizsgáljuk meg, hogy hat F_γ egy $l_z \in \mathcal{O}L^2(D_1)^*$ lineáris funkcionálon. Ha $z \in D_1$, $h \in \mathcal{O}L^2(D_2)$, akkor $(F_\gamma h)(z) = h(\gamma(z)) \cdot \gamma'(z)$, azaz $F_\gamma^* l_z = l_{\gamma(z)} \cdot \gamma'(z)$, vagyis l_z képe egy kiértékelő funkcionál konstansszorosa.

Lehetséges-e, hogy egy ilyen típusú hatás a fenti alakú unitér leképezést határoz meg, és ilyen esetben a két tartomány konform ekvivalens? A következő példa mutatja, hogy ilyen tételt biztosan nem fogunk kapni. Legyen $D_2 = \mathbb{D}_1 = \mathbb{D}$, $D_1 = \mathbb{D} \setminus \{0\}$, $U : D_2 \to D_1$ pedig az a leképezés, melyre $f \in \mathcal{O}L^2(D_2)$ esetén $Uf = f|_{D_1}$. Ez a leképezés nyilván normatartó és injektív, továbbá mivel a kipontozott körlapon minden négyzetesen integrálható függvény kiterjed a teljes körlapra, így szürjektív is, de D_1 és D_2 nem konform ekvivalens.

A fenti példában a D_1 tartomány határának volt egy izolált pontja, ez okozta a problémát. Kiderül azonban, hogy ha D_1 korlátos, és ∂D_1 „elég szép", akkor a tartományok konform ekvivalensek lesznek.

2.6. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$. Az mondjuk, hogy a $z \in \partial D$ L^2-*sorompópontja* a határnak, ha tetszőleges $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ z-hez tartó sorozatra létezik olyan $f \in \mathcal{O}L^2(D)$, melyre az $f(z_n)$ sorozatnak nincs véges határértéke.

2.7. Tétel. *Legyenek $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ tartományok, ahol D_1 korlátos, és ∂D_1 minden pontja L^2-sorompópont. Legyen továbbá $U : \mathcal{O}L^2(D_2) \to \mathcal{O}L^2(D_1)$ olyan unitér leképezés, melyre léteznek olyan $\gamma : D_1 \to D_2$ és $\lambda : D_1 \to \mathbb{C}$ függvények, hogy minden $z \in D_1$ esetén $U^* l_z = l_{\gamma(z)} \cdot \lambda(z)$. Ekkor $\gamma : D_1 \to D_2$ konform ráképezés, melyre $\gamma' = \eta \cdot \lambda$, ahol $\eta \in \mathbb{C}$, $|\eta| = 1$.*

Mielőtt rátérnénk a bizonyításra, vizsgáljuk meg, hogy milyen tartományok teljesítik a tétel feltételeit. Ha például ∂D_1 olyan, hogy minden pontjából húzható egy egyenes szakasz a D_1 külsejében, akkor ∂D_1 minden pontja L^2-sorompópont. Legyen ugyanis $z \in \partial D_1$, z_0 pedig egy a z-ből a D_1 külsejében húzott egyenes szakasz z-től különböző végpontja. Alkalmazzunk egy $\phi(z) = 1/(z - z_0)$ transzformációt. Ez a z_0 pontot a ∞-be viszi, $\phi(D_1)$ korlátos, az egyenes szakasz képe pedig egy $\phi(z)$-ből induló, a $\phi(D_1)$ tartomány komplementerében haladó e félegyenes. Eltolás és elforgatás után feltehető, hogy e éppen a negatív valós tengely. Ekkor az első fejezetben látottak szerint $1/\sqrt{w} \in \mathcal{O}L^2(\phi(D_1))$, és ez a függvény a 0-ban végtelenbe tart. Végül az $(f \circ \phi) \cdot \phi'$ függvény az 1.16. állítás szerint $\mathcal{O}L^2(D_1)$-ben van, és mivel a ϕ' a z egy környezetén korlátos, így a fenti függvény z-ben a végtelenbe tart.

Térjünk most rá a bizonyításra. Többször szükségünk lesz arra, hogy előírjuk a függvények viselkedését bizonyos pontokban (vagy épp a tartomány határánál). Az alábbiakban külön összegyűjtünk néhány ezzel kapcsolatos egyszerű állítást.

2.8. Állítás. *Legyen $0 \not\equiv f \in \mathcal{O}L^2(D)$, melyre valamely $z_0 \in D$ esetén $f(z_0) = 0$ k multiplicitással. Ekkor $g(z) = f(z)/(z - z_0)^k \in \mathcal{O}L^2(D)$, és $g(z_0) \neq 0$.*

Bizonyítás. A $g(z_0) \neq 0$ állítás nyilvánvaló. Van olyan $\delta > 0$, hogy $\overline{B}_\delta(z_0) \subseteq D$. A $\overline{B}_\delta(z_0)$ halmazon a g korlátos, és így $|g|^2$ integrálja véges. A $D \setminus \overline{B}_\delta(z_0)$ halmazon pedig

$$\int_{D\setminus\overline{B}_\delta(z_0)} \left|\frac{f(z)}{(z - z_0)^k}\right|^2 dA(z) \leq \frac{1}{\delta^{2k}} \int_{D\setminus\overline{B}_\delta(z_0)} |f(z)|^2 \, dA(z) \leq \frac{1}{\delta^{2k}} \int_D |f(z)|^2 \, dA(z) < \infty,$$

tehát $g \in \mathcal{O}L^2(D)$. □

Ha a fenti bizonyításban az $z - z_0$ kitevője helyére k helyett $(k-1)$-et írunk, akkor a következőt kapjuk:

2.9. Állítás. *Legyen $0 \not\equiv f \in \mathcal{O}L^2(D)$, melyre valamely $z_0 \in D$ esetén $f(z_0) = 0$ k multiplicitással. Ekkor van olyan $g \in \mathcal{O}L^2(D)$, melynek z_0-ban egyszeres nullhelye van.*

2.10. Állítás. *Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány, melyre $\mathcal{O}L^2(D) \neq \{0\}$. Ekkor*

(i) minden $z \in D$-re van olyan $0 \not\equiv f \in \mathcal{O}L^2(D)$, hogy $f(z) = 0$,

(ii) minden $z_1, z_2 \in D$-re van olyan $f \in \mathcal{O}L^2(D)$, melyre $f(z_1) = 0$, és $f(z_2) \neq 0$.

Bizonyítás. Az (i) bizonyításához legyen $0 \not\equiv f \in \mathcal{O}L^2(D)$ tetszőleges. Ha $f(z) = 0$, akkor f megfelel. Ellenkező esetben a 2.2. tétel szerint van olyan $g \in \mathcal{O}L^2(D)$, hogy f és g lineárisan függetlenek. Ha $g(z) = 0$, akkor g megfelel. Egyébként pedig van olyan $\mu \in \mathbb{C}$, melyre $f(z) - \mu g(z) = 0$, és ez a lineáris kombináció nem lehet az azonosan nulla függvény.

A (ii) állításhoz legyen most $z_1, z_2 \in D$, és $f \in \mathcal{O}L^2(D)$ olyan, hogy $f(z_1) = 0$. Ha most $f(z_2) \neq 0$, akkor készen vagyunk. Különben pedig a 2.8. állítás alkalmazásával megfelelő függvényt kapunk. $\square$

A tétel bizonyítása. A feltétel szerint tetszőleges $f \in \mathcal{O}L^2(D_2)$-re és $z \in D_1$-re

$$(Uf)(z) = l_z(Uf) = U^* l_z(f) = l_{\gamma(z)}(f) \cdot \lambda(z) = f(\gamma(z)) \cdot \lambda(z). \tag{3}$$

Mivel U unitér, ezért λ sehol sem tűnik el, ellenkező esetben valamely $z \in D_1$-re l_z képe az azonosan nulla funkcionál volna. Mivel van olyan $f \in \mathcal{O}L^2(D)$, melyre $f(z) \neq 0$, így $l_z \neq 0$, tehát a képe sem lehet a nulla funkcionál.

Legyen $\varphi \in \mathcal{O}L^2(D_2)^*$ tetszőleges, ekkor $\varphi = (UU^{-1})^*\varphi = (U^{-1})^*\varphi \circ U$, és U^{-1}-zel komponálva $\varphi \circ U^{-1} = (U^{-1})^*\varphi$ adódik. Mivel $l_z = (U^{-1})^*(l_{\gamma(z)} \cdot \lambda(z)) = \lambda(z)(U^{-1})^* l_{\gamma(z)}$, vagyis $(U^{-1})^* l_{\gamma(z)} = l_z/\lambda(z)$, így tetszőleges $f \in \mathcal{O}L^2(D_1)$ és $z \in D_1$ esetén

$$((U^{-1})^* l_{\gamma(z)})(f) = l_{\gamma(z)}(U^{-1}f) = (U^{-1}f)(\gamma(z)) = \frac{f(z)}{\lambda(z)}. \tag{4}$$

Belátjuk, hogy γ injektív. Tegyük fel, hogy $z_1, z_2 \in D_1$, $z_1 \neq z_2$, és $\gamma(z_1) = \gamma(z_2)$. Mivel $\mathcal{O}L^2(D_1) \neq \{0\}$, így a 2.10. állítás szerint van olyan $f \in \mathcal{O}L^2(D_1)$ függvény, amelyre $f(z_1) = 0$, és $f(z_2) \neq 0$. Ekkor (4) szerint

$$0 = \frac{f(z_1)}{\lambda(z_1)} = (U^{-1}f)(\gamma(z_1)) = (U^{-1}f)(\gamma(z_2)) = \frac{f(z_2)}{\lambda(z_2)},$$

ami lehetetlen.

Megmutatjuk, hogy γ folytonos. Tegyük fel az ellenkezőjét, és legyen $w \in D_1$ olyan, hogy γ nem folytonos w-ben. Ekkor van olyan w_n D_1-beli sorozat, melyre $\lim w_n = w$, de $\gamma(w_n) \not\to \gamma(w)$. Van tehát a $\gamma(w)$-nek olyan környezete, melyen kívül a $\gamma(w_n)$ sorozatnak végtelen sok tagja van. Átindexelés után feltehető, hogy minden $\gamma(w_n)$ ilyen. Ennek van egy $\gamma(w_{\nu_n})$ konvergens vagy ∞-hez tartó részsorozata, jelölje ennek határértékét u. Legyen $f \in \mathcal{O}L^2(D_2)$ tetszőleges, ekkor (3) szerint

$$f(\gamma(w))\lambda(w) = (Uf)(w) = \lim_{n\to\infty}(Uf)(w_{\nu_n}) = \lim_{n\to\infty} f(\gamma(w_{\nu_n}))\lambda(w_{\nu_n}).$$

Ha most $f \in \mathcal{O}L^2(D_2)$ olyan, hogy $\gamma(w)$-ben k multiplicitású gyöke van, akkor $g(z) = f(z)/(z - \gamma(w))^k \in \mathcal{O}L^2(D_2)$, és g nem tűnik el $\gamma(w)$-ben, így

$$0 = \frac{f(\gamma(w))}{g(\gamma(w))} = \frac{f(\gamma(w))\lambda(w)}{g(\gamma(w))\lambda(w)} = \frac{(Uf)(w)}{(Ug)(w)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(Uf)(w_{\nu_n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(Ug)(w_{\nu_n})} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(\gamma(w_{\nu_n}))\lambda(w_{\nu_n})}{\lim\limits_{n\to\infty} g(\gamma(w_{\nu_n}))\lambda(w_{\nu_n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(\gamma(w_{\nu_n}))\lambda(w_{\nu_n})}{g(\gamma(w_{\nu_n}))\lambda(w_{\nu_n})} = \lim_{n\to\infty}(\gamma(w_{\nu_n}) - \gamma(w))^k \neq 0,$$

mivel $u \neq \gamma(w)$, ez pedig ellentmondás.

Legyen $w \in D_1$, $f, g \in \mathcal{O}L^2(D_2)$ pedig olyanok, hogy $g(\gamma(w)) \neq 0$, továbbá f-nek és így f/g-nek $\gamma(w)$-ben egyszeres gyöke van. Ekkor a lokális értékeloszlás tétele szerint f/g injektív és véges a $\gamma(w)$ egy B környezetében, és az inverze is holomorf. A γ folytonossága miatt van a w-nek olyan B' környezete, hogy $\gamma(B') \subseteq B$. Ekkor $z \in B'$ esetén

$$\frac{(Uf)(z)}{(Ug)(z)} = \frac{f(\gamma(z))\lambda(z)}{g(\gamma(z))\lambda(z)} = \frac{f}{g}(\gamma(z)),$$

ahol a bal oldalon egy B'-n meromorf függvény áll, a jobb oldal viszont mindenhol véges B'-n, így a bal oldali függvény holomorf. Továbbá

$$\left(\left(\frac{f}{g}\right)^{-1} \circ \frac{Uf}{Ug}\right)(z) = \gamma(z),$$

vagyis γ holomorf a B'-n, speciálisan w-ben is. Mivel w tetszőleges volt, így γ holomorf az egész D_1-en. Továbbá tetszőleges $f \in \mathcal{O}L^2(D_2)$ esetén $Uf/(f \circ \gamma) = \lambda$, így λ is holomorf.

Belátjuk, hogy γ szürjektív. Tegyük fel indirekt, hogy $\gamma(D_1) \subsetneqq D_2$. A γ függvény nem konstans, mert injektív, ezért nyílt leképezés, így $\gamma(D_1)$ nyílt halmaz, és $\exists\, z \in \partial\gamma(D_1) \cap D_2$. Legyen $\delta > 0$ olyan, hogy $\overline{B}_\delta(z) \subseteq D_2$ teljesüljön.

Megmutatjuk, hogy a $\partial\gamma(D_1) \cap B_\delta(z)$ halmaz végtelen. Ellenkező esetben volna izolált pontja, tehát volna olyan $z_0 \in D_2$, hogy valamely D_{z_0} z_0 körüli kipontozott körlapon a γ^{-1} függvény értelmes, és $\gamma^{-1}(D_{z_0})$ korlátos (mivel D_1 része). Ezért γ^{-1}-nek a z_0 megszüntethető szingularitása. De a kiterjesztett függvény z_0-ban $\gamma^{-1}(D_{z_0})$-beli értéket kell felvegyen, mert egyébként a $D_{z_0} \cup \{z_0\}$ halmaz képe vagy nem volna nyílt, vagy pedig a ∂D_1-nek volna izolált pontja (ami nem volna L^2-sorompópont). Ám ekkor egy olyan holomorf függvényt kapnánk, amelynek két pontban megegyezik az értéke, ezeken kívül pedig injektív, ez pedig lehetetlen.

A $\partial\gamma(D_1) \cap B_\delta(z)$ halmaz tehát végtelen és korlátos, így $\partial\gamma(D_1)$-nek van D_2-ben torlódási pontja. Legyen $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \partial\gamma(D_1) \cap D_2$ egy ehhez torlódó pontsorozat, és legyen w ennek egy tetszőleges pontja. Legyen a $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \gamma(D_1) \subseteq D_2$ olyan sorozat, melyre $\lim z_n = w$, ekkor a $\gamma^{-1}(z_n)$ sorozatnak a D_1 korlátossága miatt van konvergens részsorozata. Átindexelés után feltehetjük, hogy $\gamma^{-1}(z_n)$ ilyen.

A γ folytonossága miatt $\lim \gamma^{-1}(z_n) = u$ a D_1 tartomány valamely határpontja. Ha $\lambda(\gamma^{-1}(z_n))$ nem tart a végtelenhez, akkor van olyan részsorozata, melynek létezik a véges v határértéke. Átindexelés után feltehető, hogy a fenti sorozat ilyen. Legyen $g_1 \in \mathcal{O}L^2(D_1)$ olyan, melyre nem létezik a $\lim_{n\to\infty} g_1(\gamma^{-1}(z_n))$ véges határérték. Tekintsünk egy olyan $\sigma(n)$ részsorozatot, amely mentén van (véges vagy végtelen) határértéke az előbbi sorozatnak. Ha most $h_1 = U^{-1}g_1$, akkor (3) miatt

$$\lim_{n\to\infty} g_1(\gamma^{-1}(z_{\sigma(n)})) = \lim_{n\to\infty} (Uh_1)(\gamma^{-1}(z_{\sigma(n)})) = \lim_{n\to\infty} h_1(z_{\sigma(n)})\lambda(\gamma^{-1}(z_{\sigma(n)})) = h_1(w) \cdot v \neq \infty,$$

tehát az összes ilyen határérték meg kell egyezzen, ami lehetetlen.

Így tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(\gamma^{-1}(z_n)) = \infty$. Viszont ha $g_2 \in \mathcal{O}L^2(D_1)$ korlátos függvény, akkor (4) miatt

$$(U^{-1}g_2)(w) = \lim_{n\to\infty} (U^{-1}g_2)(z_n) = \lim_{n\to\infty} (U^{-1}g_2)(\gamma(\gamma^{-1}(z_n))) = \lim_{n\to\infty} \frac{g_2(\gamma^{-1}(z_n))}{\lambda(\gamma^{-1}(z_n))} = 0.$$

Mivel w a $\{w_n\}$ torlódó pontsorozat tetszőleges eleme volt, és minden ponthoz választhatjuk ugyanazt a g_2 függvényt, így $U^{-1}g_2$ eltűnik egy torlódó pontsorozat mentén, tehát az azonosan 0 függvény, ami U^{-1} unitér volta miatt lehetetlen.

Végül belátjuk, hogy $\gamma' = \eta \cdot \lambda$, ahol η egység hosszú komplex szám. Legyen $0 \neq h \in \mathcal{O}L^2(D_2)$, ekkor

$$\|h\|^2 = \int_{D_2} |h(z)|^2 \, dA(z) = \int_{D_1} |h(\gamma(w))|^2 \, |\gamma'(w)|^2 \, dA(w),$$

vagyis $(h \circ \gamma) \cdot \gamma' \in \mathcal{O}L^2(D_1)$. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$-re $(h \circ \gamma) \cdot (\gamma')^{n+1}/\lambda^n \in \mathcal{O}L^2(D_1)$, és $\|(h \circ \gamma) \cdot (\gamma')^{n+1}/\lambda^n\| = \|h\|$ (ezt tehát $n = 0$-ra már láttuk). Ekkor (4) szerint

$$\|h\|^2 = \left\| \frac{(h \circ \gamma) \cdot (\gamma')^{n+1}}{\lambda^n} \right\|^2 = \left\| U^{-1} \frac{(h \circ \gamma) \cdot (\gamma')^{n+1}}{\lambda^n} \right\|^2 =$$

$$= \int_{D_2} \left| \frac{h(z)\gamma'(\gamma^{-1}(z))^{n+1}}{\lambda(\gamma^{-1}(z))^{n+1}} \right|^2 dA(z) = \int_{D_1} \left| \frac{h(\gamma(w))\gamma'(w)^{n+2}}{\lambda(w)^{n+1}} \right|^2 dA(w),$$

azaz $(h \circ \gamma) \cdot (\gamma')^{n+2}/\lambda^{n+1} \in \mathcal{O}L^2(D_1)$, és $\|(h \circ \gamma) \cdot (\gamma')^{n+2}/\lambda^{n+1}\| = \|h\|$. Tehát ez minden $n \in \mathbb{N}$-re igaz, és így a fenti átalakítást használva az $f = |(\gamma' \circ \gamma^{-1})/(\lambda \circ \gamma^{-1})|^2$ pozitív folytonos függvényre

$$\int_{D_2} |h(z)|^2 \, f^k(z) \, dA(z) = \|h\|^2$$

adódik minden $k \in \mathbb{N}$-re.

Megmutatjuk, hogy $f \equiv 1$. Az $\{f > 1\}$ halmaz nyílt f folytonossága miatt, tegyük fel, hogy nem üres, legyen x egy pontja, $\varepsilon, \delta > 0$ pedig olyanok, hogy $y \in B_\delta(x)$ esetén $f(y) > 1 + \varepsilon$ teljesüljön. Ekkor

$$\|h\|^2 = \int_{D_2} |h(z)|^2 \, f^k(z) \, dA(z) \geq \int_{B_\delta(x)} |h(z)|^2 \, f^k(z) \, dA(z) \geq (1+\varepsilon)^k \cdot \int_{B_\delta(x)} |h(z)|^2 \, dA(z).$$

A $|h(z)|^2$ nemnegatív folytonos függvény, ami nem tűnik el $B_\delta(x)$-en, mert különben az unicitás tétel miatt h azonosan nulla volna, így az utolsó integrál pozitív és véges. Most $k \to \infty$ esetén a jobb oldal ∞-hez tart ellentmondva $\|h\|$ végességének. Tehát $f \leq 1$, így $0 \leq f - f^2$, továbbá

$$\int_{D_2} |h(z)|^2 \, (f(z) - f^2(z)) \, dA(z) = 0,$$

amiből $|h|^2 \, (f - f^2)$ folytonos nem negatív függvény volta miatt $|h|^2 f = |h|^2 f^2$, továbbá $h(z)$-nek D_2 minden kompakt részhalmazán csak véges sok gyöke lehet, így például minden zárt gömbön $f(z) = f^2(z)$ véges sok pont kivételével. De f folytonos és pozitív, így minden kompakt D_2 beli zárt gömbön, vagyis minden $z \in D_2$-re $f(z) = 1$.

Azt kaptuk tehát, hogy $|(\gamma' \circ \gamma^{-1})/(\lambda \circ \gamma^{-1})| = 1$, ekkor a $(\gamma' \circ \gamma^{-1})/(\lambda \circ \gamma^{-1})$ függvény a $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ halmazba képez, ami $(\gamma' \circ \gamma^{-1})/(\lambda \circ \gamma^{-1})$ holomorf volta miatt csak akkor lehetséges, ha a hányados konstans. Azaz van olyan 1 hosszú komplex η szám, melyre $\gamma' \circ \gamma^{-1} = \eta \cdot (\lambda \circ \gamma^{-1})$, vagyis $\gamma' = \eta \cdot \lambda$. □

A fenti bizonyításban a D_1-re tett feltételeket csak a γ szürjektivitásának igazolásánál használtuk ki, ha tehát ez utóbbit feltesszük, akkor a D_1-re tett feltételek elhagyhatók:

2.11. Következmény. *Legyenek $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ tartományok, és $U : \mathcal{O}L^2(D_2) \to \mathcal{O}L^2(D_1)$ olyan unitér leképezés, melyre léteznek olyan $\gamma : D_1 \to D_2$ és $\lambda : D_1 \to \mathbb{C}$ függvények, hogy γ szürjektív, és minden $z \in D_1$ esetén $U^* l_z = l_{\gamma(z)} \cdot \lambda(z)$. Ekkor $\gamma : D_1 \to D_2$ konform ráképezés, melyre $\gamma' = \eta \cdot \lambda$, ahol $\eta \in \mathbb{C}$, $|\eta| = 1$.*

3. A reprodukáló magfüggvény alkalmazásai

3.1. Bergman-terek az egységkörön

Ebben a pontban csak a $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ egységkörhöz tartozó $\mathcal{A}^p = \mathcal{O}L^p(\mathbb{D})$ Bergman-terekkel foglalkozunk. Az eddigiekkel szemben most az $f \in \mathcal{A}^p$ függvény normájának definíciójánál a $\sigma = \frac{1}{\pi}dA(z)$ normalizált mértékre vonatkozó integrált használjuk:

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Meg fogjuk mutatni, hogy ha $1 < p < \infty$, és $1/p + 1/q = 1$, akkor az $\mathcal{A}^q$ tér megfeleltethető az $\mathcal{A}^p$ tér duálisának. Előbb azonban belátjuk, hogy a polinomok sűrűn vannak az $\mathcal{A}^p$ térben. Ez a tény fontos szerepet játszik majd a Bergman-projekció definíciójánál, amely segédeszközül szolgál majd a duális térre vonatkozó állítás bizonyításánál.

3.1. Tétel. *A polinomok az A^p terek sűrű részhalmazát alkotják, ha $0 < p < \infty$. Vagyis minden $f \in A^p$ függvényhez és $\varepsilon > 0$-hoz van olyan Q polinom, melyre $\|f - Q\|_p < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{A}^p$, és $0 < \rho < 1$ esetén legyen $f_\rho(z) = f(\rho z)$. Ekkor f_ρ holomorf egy 1-nél nagyobb sugarú körlapon, így a hatványsora egyenletesen konvergál hozzá $\mathbb{D}$-n. Ezért elég belátni, hogy $\|f - f_\rho\|_p \to 0$, ha $\rho \to 1$.

Az 1.6. következmény szerint az

$$M_p(r, f) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\varphi})\right|^p d\varphi\right\}^{\frac{1}{p}}$$

függvény r-ben monoton növő. Vegyük észre továbbá, hogy $M_p(r, f_\rho) = M_p(\rho r, f)$, így az 1.2. lemma szerint

$$M_p(r, f - f_\rho)^p \leq 2^p(M_p(r, f)^p + M_p(r, f_\rho)^p) \leq 2^{p+1}M_p(r, f)^p.$$

Az $f \in \mathcal{A}^p$ feltétel miatt létezik az $\int_0^1 M_p(r, f)^p r dr$ integrál, továbbá az f_ρ függvény egyenletesen tart az f függvényhez a $\mathbb{D}$ összes kompakt részhalmazán, ha $\rho \to 1$. Ugyanis ha $|z| \leq \delta < 1$, akkor f-et sorba fejtve

$$|f(z) - f(\rho z)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(1 - \rho)z^n\right| \leq (1 - \rho)\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, \delta^n.$$

Ezért $M_p(r, f - f_\rho)^p \to 0$ minden $0 \leq r < 1$-re, ha $\rho \to 1$. Tehát alkalmazható a Lebesgue-tétel, így

$$\|f - f_\rho\|_p^p = 2\int_0^1 M_p(r, f - f_\rho)^p r dr \to 0,$$

ha $\rho \to 1$, amivel az állítást beláttuk. $\square$

Az $\mathcal{A}^2$ tér zárt altere az $L^2(\mathbb{D})$ térnek. Legyen P az L^2 tér ortogonális projekciója az $\mathcal{A}^2$ térre, ekkor az 1.12. tétel 3. pontja, valamint az 1.17. tétel szerint minden $f \in L^2(D)$-re

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(1 - \bar{\zeta}z)^2} d\sigma(\zeta).$$

Mivel a polinomok sűrű részhalmazt alkotnak $\mathcal{A}^p$-ben, így a fenti integrál előállítja az $\mathcal{A}^1$-beli függvényeket is, továbbá $L^1(\mathbb{D})$-n definiál egy operátort, melyre minden $f \in L^1(\mathbb{D})$ esetén $Pf \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, és ha $f \in \mathcal{A}^1$, akkor $Pf = f$. Ezt az operátort *Bergman-projekciónak* nevezzük.

Megmutatjuk, hogy a Bergman-projekció $p > 1$-re korlátos az $L^p(\mathbb{D})$ téren, és képe az $\mathcal{A}^p$ tér. Szükségünk lesz a következő lemmára.

3.2. Lemma. *Legyenek $1 < t < s$ valós számok. Ekkor van olyan csak s-től és t-től függő C konstans, melyre minden $z \in \mathbb{D}$ esetén*

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|)^{t-2}}{|1-\overline{z}\zeta|^s} d\sigma(\zeta) \le C(1-|z|)^{t-s}.$$

Bizonyítás. Elegendő az állítást a $z = \rho \ge 0$ esetben bizonyítani. Ugyanis ha $z = \rho e^{i\varphi}$, ahol $\rho \ge 0$, akkor $|z| = \rho$, és a $\zeta = e^{i\varphi}\xi$ helyettesítéssel az integráltranszformációs formulát az 1.16. állítás bizonyításában látottak szerint alkalmazva

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|)^{t-2}}{|1-\rho e^{-i\varphi}\zeta|^s} d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\xi|)^{t-2}}{|1-\rho\xi|^s} \left|e^{i\varphi}\right|^2 d\sigma(\xi) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\xi|)^{t-2}}{|1-\rho\xi|^s} d\sigma(\xi).$$

Ha $\rho \le \frac{1}{2}$, akkor $|1-\rho\zeta|^s \ge (1-\rho)^s \ge 1/2^s$, így

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|)^{t-2}}{|1-\overline{z}\zeta|^s} d\sigma(\zeta) \le \frac{1}{(1-\rho)^s} \int_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|)^{t-2} d\sigma(\zeta) =$$

$$= \frac{(1-\rho)^{t-s}}{(1-\rho)^t} \int_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|)^{t-2} d\sigma(\zeta) \le 2^t (1-\rho)^{t-s} \int_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|)^{t-2} d\sigma(\zeta),$$

továbbá $t > 1$ miatt az $(1-|\zeta|)^{t-2}$ függvény integrálható:

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|)^{t-2} dA(\zeta) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(1-r)^{t-2} dr d\varphi \le$$

$$\le \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r)^{t-2} dr d\varphi = 2\pi \left[-\frac{(1-r)^{t-1}}{t-1}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{t-1}.$$

Így ebben az esetben (figyelembe véve, hogy $\sigma = \frac{1}{\pi} dA(z)$) a $C = 2^{t+1}(t-1)^{-1}$ megfelel.

Legyen most $\rho > 1/2$, azaz $1/(2\rho) < 1$. Először becsüljük meg az integrált az egységkör egy kompakt részén:

$$\int_{|\zeta| \le \frac{1}{2\rho}} \frac{(1-|\zeta|)^{t-2}}{|1-\overline{z}\zeta|^s} d\sigma(\zeta) \le 2^s \int_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|)^{t-2} d\sigma(\zeta) \le C(1-\rho)^{t-s},$$

mivel $t - s < 0$.

Hátra van még az

$$\int_{|\zeta| > \frac{1}{2\rho}} \frac{(1-|\zeta|)^{t-2}}{|1-\overline{z}\zeta|^s} d\sigma(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{2\rho}}^1 r(1-r)^{t-2} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1-2\rho r\cos\varphi + \rho^2 r^2)^{s/2}} dr$$

integrál becslése. Mivel $\sin x \ge 2x/\pi$, ha $0 \le x \le \pi/2$, így

$$1 - 2\rho r\cos\varphi + \rho^2 r^2 = (1-\rho r)^2 + 4\rho r \sin^2(\varphi/2) \ge (1-\rho r)^2 + 4\rho r \varphi^2/\pi^2.$$

Tehát $r > 1/(2\rho)$ esetén

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1-2\rho r\cos\varphi+\rho^2 r^2)^{s/2}} \le \frac{1}{(1-\rho r)^s}\int_0^\pi \left(1+\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\varphi}{1-\rho r}\right)^2\right)^{-s/2} d\varphi \le$$

$$\le \frac{1}{(1-\rho r)^{s-1}}\int_0^\infty \left(1+\frac{2}{\pi^2}u^2\right)^{-s/2} du = C(1-\rho r)^{1-s},$$

ugyanis $s > 1$ miatt a fenti integrál konvergens. Vagyis $\rho < 1$ miatt

$$\int_{|\zeta|>\frac{1}{2\rho}} \frac{(1-|\zeta|)^{t-2}}{|1-\overline{z}\zeta|^s} d\sigma(\zeta) \le C\int_0^1 \frac{(1-r)^{t-2}}{(1-\rho r)^{s-1}} r dr \le$$

$$\le C\int_0^1 (1-r)^{t-s-1} dr = C\left[\frac{-(1-r)^{t-s}}{t-s}\right]_0^1 = \frac{C}{s-t} \le C'(1-\rho)^{t-s}.$$

Ezzel a lemmát beláttuk. □

3.3. Tétel. *Ha $1 < p < \infty$, akkor a P Bergman-projekció korlátos operátor $L^p(\mathbb{D})$-ből $\mathcal{A}^p$-re.*

Bizonyítás. Mivel P megszorítása $\mathcal{A}^p$-re az identitás, továbbá Pf holomorf minden $f \in L^p(\mathbb{D})$-re, így elég megmutatni, hogy P korlátos operátor $L^p(\mathbb{D})$-ből önmagába. De ha $f \in L^p(\mathbb{D})$, és $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, akkor a Hölder-egyenlőtlenség szerint

$$|Pf(z)| \le \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(\zeta)|}{\left|1-\overline{\zeta}z\right|^2} d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|)^{-\frac{1}{pq}} \frac{|f(\zeta)|}{\left|1-\overline{\zeta}z\right|^2}(1-|\zeta|)^{\frac{1}{pq}} d\sigma(\zeta) \le J_1(z)^{\frac{1}{q}} J_2(z)^{\frac{1}{p}},$$

ahol

$$J_1(z) = \int_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|)^{-\frac{1}{p}} \frac{1}{\left|1-\overline{\zeta}z\right|^2} d\sigma(\zeta), \qquad J_2(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(\zeta)|^p}{\left|1-\overline{\zeta}z\right|^2}(1-|\zeta|)^{\frac{1}{q}} d\sigma(\zeta).$$

Az előző lemmát az $s = 2$, $t = 2-1/p$ számokra alkalmazva $|J_1(z)| \le C(1-|z|)^{-1/p}$. Ezt és a Fubini-tételt felhasználva

$$\int_{\mathbb{D}} |Pf(z)|^p \, d\sigma(z) \le \int_{\mathbb{D}} J_1(z)^{\frac{p}{q}} J_2(z) d\sigma(z) \le$$

$$\le C\int_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{-\frac{1}{q}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(\zeta)|^p}{\left|1-\overline{\zeta}z\right|^2}(1-|\zeta|)^{\frac{1}{q}} d\sigma(\zeta) d\sigma(z) =$$

$$= C\int_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|)^{\frac{1}{q}} |f(\zeta)|^p \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|)^{-\frac{1}{q}}}{\left|1-\overline{\zeta}z\right|^2} d\sigma(z) d\sigma(\zeta) \le$$

$$\le C'\int_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|)^{\frac{1}{q}} |f(\zeta)|^p (1-|\zeta|)^{-\frac{1}{q}} d\sigma(\zeta) = C'\int_{\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta),$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségnél ismét az előző lemmát alkalmaztuk az $s = 2$, $t = 2-1/q$ számokra. Mivel a C' konstans csak p-től függ, így a tételt bebizonyítottuk. □

A fenti bizonyítás valójában erősebb eredményt ad, melyet a későbbiek miatt most egy következményben megfogalmazunk:

3.4. Következmény. *Ha $1 < p < \infty$, akkor a $Tf(z) = \int_{\mathbb{D}} \left|1 - z\overline{\zeta}\right|^{-2} f(\zeta) d\sigma(\zeta)$ hozzárendelés egy $L^p(\mathbb{D}) \to L^p(\mathbb{D})$ korlátos operátort definiál.*

Ha X Banach-tér, akkor X^* jelöli a duálisát, mely a $\|\phi\| = \sup_{\|x\|=1} |\phi(x)|$ normával ellátva szintén Banach-tér. A Riesz-reprezentációs tétel szerint $1 < p < \infty$ esetén az L^p tér izometrikusan izomorf az L^q térrel, ahol $1/p + 1/q = 1$. A megfeleltetést a

$$\phi(f) = \int_{\mathbb{D}} f g d\sigma$$

képlet adja, ahol $\phi \in L^p(\mathbb{D})^*$, és $g \in L^q(\mathbb{D})$.

Lényegében ugyanilyen megfeleltetés létesíthető az $(\mathcal{A}^p)^*$ és $\mathcal{A}^q$ között, de lényeges különbség, hogy $p \neq 2$ esetén ez az azonosítás nem lesz izometria. Azonban a normák ekvivalensek lesznek.

3.5. Tétel. *Ha $1 < p < \infty$, akkor az $(\mathcal{A}^p)^*$ tér izomorf az $\mathcal{A}^q$ térrel, ahol $1/p + 1/q = 1$. Minden $\phi \in (\mathcal{A}^p)^*$ funkcionálhoz van pontosan egy olyan $g \in \mathcal{A}^q$ függvény, melyre*

$$\phi(f) = \phi_g(f) = \int_{\mathbb{D}} f \overline{g} \, d\sigma$$

minden $f \in \mathcal{A}^p$ esetén. Az $(\mathcal{A}^p)^*$ és az $\mathcal{A}^q$ terek normái ekvivalensek, pontosabban van olyan $C > 0$ konstans, melyre $\|\phi\| \leq \|g\|_q \leq C\|\phi\|$.

Bizonyítás. A Hölder-egyenlőtlenségből azonnal következik, hogy a fenti integrállal definiált funkcionál minden $g \in \mathcal{A}^q$ esetén korlátos, és $\|\phi_g\| \leq \|g\|_q$. Továbbá mivel $\phi_g(z^n) = \overline{a}_n/(n+1)$, ahol a_n a g hatványsorának n-edik együtthatója, így $\phi_{g_1} = \phi_{g_2}$ esetén $g_1 = g_2$.

A Hahn–Banach-tétel szerint minden $\phi \in (\mathcal{A}^p)^*$ funkcionál kiterjeszthető egy $\Phi \in L^p(\mathbb{D})^*$ funkcionállá úgy, hogy $\|\Phi\| = \|\phi\|$ teljesül. A Riesz-reprezentációs tétel szerint van olyan $h \in L^q(\mathbb{D})$ függvény, hogy $\|\Phi\| = \|h\|_q$, és $\Phi(f) = \int_{\mathbb{D}} f \overline{h} \, d\sigma$ minden $f \in \mathcal{A}^p$ esetén. Legyen $g = Ph$, ahol P a Bergman-projekció. A 3.3. tétel szerint van olyan $C > 0$ konstans, melyre $\|g\|_q \leq C\|h\|_q = C\|\phi\|$. Továbbá minden $f \in \mathcal{A}^p$ esetén

$$\phi(f) = \Phi(f) = \int_{\mathbb{D}} f \overline{h} \, d\sigma = \int_{\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(1 - z\overline{\zeta})^2} \, d\sigma(\zeta) \, \overline{h(z)} \, d\sigma(z) =$$

$$= \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{h(z)}}{(1 - z\overline{\zeta})^2} \, d\sigma(z) \, d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) \overline{g(\zeta)} \, d\sigma(\zeta) = \phi_g(f).$$

Az integrálok felcserélhetősége a fenti számolásban a Fubini-tétel és a 3.4. következmény következménye. □

Megjegyzés. A fenti bizonyítás a $p = 1$ esetre nem alkalmazható, mert a Bergman-projekció ekkor nem korlátos operátor. Az $(\mathcal{A}^1)^*$ tér reprezentálható az ún. Bloch-tér segítségével, a részletekért lásd pl. a [4] könyvet.

3.2. A Bergman-metrika

Ebben a pontban a Bergman-terek reprodukáló magfüggvénye segítségével metrikát definiálunk majd a $\mathbb{C}$-beli tartományokon. Itt metrika alatt a szokásostól eltérő fogalmat értünk, melyet hamarosan definiálunk. Azt is látni fogjuk, hogy ennek segítségével a tér, melyen a metrikát értelmeztük, a klasszikus értelemben vett metrikus térré tehető.

Először némi technikai előkészületként tárgyalunk néhány állítást a

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

operátorokkal kapcsolatban. A Cauchy–Riemann-egyenletekből adódik, hogy egy $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ valós értelemben deriválható függvényre $\partial f/\partial \overline{z} = 0$ pontosan akkor teljesül, ha f holomorf, és ekkor $\partial f/\partial z = f'$, illetve $\partial \overline{f}/\partial \overline{z} = \overline{f'}$. Az is ugyanígy látható, hogy $\partial f/\partial z = 0$ pontosan akkor, ha f antiholomorf (azaz $\overline{f}$ holomorf), és ekkor $\overline{\partial f/\partial \overline{z}} = \overline{f}\,'$.

Szintén egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a Laplace-operátor a következőképp írható:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Ismert, hogy ha f egy sehol el nem tűnő holomorf függvény a $D \subseteq \mathbb{C}$ tartományon, akkor $\log|f|^2$ harmonikus, azaz $\Delta(\log|f|^2) = 0$.

A $\partial/\partial z$ és $\partial/\partial \overline{z}$ operátorok lineárisak, a szorzat deriváltjára vonatkozó szabály a valós esettel analóg, ezt nem részletezzük. A láncszabály azonban egy fokkal bonyolultabb, ezt a következő lemmában foglaljuk össze:

3.6. Lemma (Láncszabály)**.** *Legyenek f és g olyan $\mathbb{C}$-be képező folytonosan differenciálható függvények, melyekre $f \circ g$ értelmezve van egy $D \subseteq \mathbb{C}$ tartományon. Ekkor*

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z))\frac{\partial g}{\partial z}(z) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z))\frac{\partial \overline{g}}{\partial z}(z),$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f \circ g)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z))\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z))\frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}}(z).$$

Ha speciálisan f vagy g holomorf, akkor

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z))\frac{\partial g}{\partial z}(z),$$

továbbá ha f ill. g holomorf, akkor

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f \circ g)(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(g(z))\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z), \qquad \textit{ill.} \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f \circ g)(z) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g(z))\frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}}(z).$$

Bizonyítás. Az utolsó három formula az első kettő alapján nyilvánvaló. Csak az első egyenlőség bizonyítását vázoljuk, a második bizonyítása hasonló.

Legyen $g(z) = \alpha(z) + i\beta(z)$, ahol α és β valós értékű függvények, és alkalmazzuk a $\partial/\partial x$ és a $\partial/\partial y$ operátorokra vonatkozó láncszabályt:

$$\frac{\partial}{\partial z}(f \circ g) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(f \circ g) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y} - i\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial y}\right).$$

Ebből a

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)$$

egyenlőségek felhasználásával némi számolás után adódik az állítás. □

3.7. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány, ekkor egy $\rho : D \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ nemnegatív folytonos függvényt *metrikának* nevezünk. Ha ρ metrika D-n, $z \in D$, $\xi \in \mathbb{C}$, akkor azt mondjuk, hogy ξ *hossza* z*-nél* $\|\xi\|_{\rho,z} = \rho(z) \cdot |\xi|$, ahol $|\cdot|$ a szokásos euklideszi hosszúságot jelöli.

Példák. Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány, és legyen $\rho \equiv 1$ a D-n. Ekkor $z \in D$, $\xi \in \mathbb{C}$ esetén $\|\xi\|_{\rho,z} = \rho(z) \cdot |\xi| = |\xi|$, tehát ξ hossza független a z választásától, és megegyezik a szokásos euklideszi vektorhosszal. Ezt a metrikát *euklideszi metrikának* nevezzük.

Tekintsük most a $\mathbb{D}$ egységkört, és legyen $\rho(z) = (1 - |z|^2)^{-1}$. Ezt a metrikát *Poincaré-metrikának* nevezzük. Legyen $\xi \in \mathbb{C}$, ekkor

$$\|\xi\|_{\rho,0} = \rho(0) \cdot |\xi| = |\xi|\,, \qquad \|\xi\|_{\rho,1/2} = \rho(1/2) \cdot |\xi| = \frac{4}{3}\,|\xi|\,.$$

Látható, hogy z-vel az egységkör határához közelítve a vektorhosszak is növekednek.

Ha $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható síkgörbe, akkor a hosszát az

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\; dt$$

formulával definiál(hat)juk. Hogy ez a definíció valóban olyan tulajdonságokkal rendelkezik, amit az intuíciónk alapján elvárunk, az heurisztikus meggondolások alapján könnyen látható, azonban szigorúan véve a fenti formulával értelmezzük a görbe hosszát. Ez a hossz az érintővektor hosszától függ. A metrika fenti definíciója hátterében az a meggondolás áll, hogy az érintő hosszát a görbe elhelyezkedésétől is függővé tehetjük, és ezzel a görbehossz egy általánosabb definícióját adhatjuk meg:

3.8. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány, ρ metrika D-n, $\gamma : [a,b] \to D$ pedig folytonosan differenciálható görbe. Ekkor γ *hosszát a* ρ *metrikában* az

$$l_\rho(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\rho,\gamma(t)}\, dt$$

formulával definiáljuk. A szakaszosan folytonosan differenciálható görbék hosszát a folytonosan differenciálható szakaszok hosszának összegeként definiáljuk.

Helyettesítéses integrálással adódik, hogy a definíció független a paraméterezéstől. Számoljuk ki most a görbehosszakat a fenti példákban. Egyszerűen látszik, hogy az euklideszi metrikában a görbehossz definíciója megegyezik a klasszikus definícióval, így ezek az értékek megegyeznek.

Tekintsük most a $\mathbb{D}$ egységkört a ρ Poincaré-metrikával, és legyen $\varepsilon > 0$. Meghatározzuk a $\gamma(t) = t$, $0 \le t \le 1 - \varepsilon$ görbe hosszát. A definíció szerint

$$\begin{aligned} l_\rho(\gamma) &= \int_0^{1-\varepsilon} \|\gamma'(t)\|_{\rho,\gamma(t)}\, dt = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2}\, dt = \\ &= \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1-t^2}\, dt = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1-t}\, dt + \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1+t}\, dt \right) = \\ &= -\frac{1}{2}\left[\log(1-t)\right]_0^{1-\varepsilon} + \frac{1}{2}\left[\log(1+t)\right]_0^{1-\varepsilon} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy ha ε kicsi, a hossz nagy, pontosabban $\lim_{\varepsilon \to 0+} l_\rho(\gamma) = \infty$. Tehát az egységkör határa - legalábbis a fenti görbe mentén - „végtelen messze” van az origótól.

3.9. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány, ρ metrika D-n, és $z, w \in D$. Ekkor z és w *távolságát* a

$$d_\rho(z,w) = \inf\{l_\rho(\gamma) : \gamma \in C_D(z,w)\}$$

képlettel definiáljuk, ahol $C_D(z,w)$ jelöli azon szakaszonként folytonosan differenciálható $\gamma : [0,1] \to D$ görbék halmazát, melyekre $\gamma(0) = z$, és $\gamma(1) = w$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy ezzel a távolságfüggvénnyel D egy metrikus tér. Megjegyezzük, hogy $z, w \in D$ esetén nem feltétlenül létezik olyan z-t és w-t összekötő γ görbe, melynek képe a D tartományban van, és $l_\rho(\gamma) = d_\rho(z, w)$. Ez attól függ, hogy D mint a d_ρ távolságfüggvénnyel ellátott metrikus tér teljes-e. Viszonylag könnyen megmutatható, hogy az egységkört a Poincaré-metrikával ellátva az origót a $0 < t < 1$ ponttal összekötő fenti görbe minimális hosszúságú. Ennek a bizonyítása és a Poincaré-metrika tulajdonságainak részletes tárgyalása megtalálható például a [7] könyvben.

3.10. Definíció. Legyenek $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ tartományok, $f : D_1 \to D_2$ folytonosan differenciálható leképezés izolált zérushelyekkel, és legyen ρ metrika D_2-n. Ekkor a ρ f *szerinti visszahúzottját* az

$$f^*\rho(z) = \rho(f(z)) \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|$$

formulával definiáljuk.

3.11. Definíció. Legyenek $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ tartományok, ρ_i metrika D_i-n $(i = 1, 2)$, és legyen $f : D_1 \to D_2$ holomorf ráképezés. Ha $f^*\rho_2(z) = \rho_1(z)$ minden $z \in D_1$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy f *izometria* a (D_1, ρ_1) és (D_2, ρ_2) párok között.

A következő állítás mutatja ennek az elnevezésnek a jogosságát:

3.12. Állítás. *Legyenek $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ tartományok a ρ_1, ρ_2 metrikával. Ha $f : D_1 \to D_2$ izometria a (D_1, ρ_1) és (D_2, ρ_2) párok között, akkor*

(i) minden $\gamma : [a, b] \to D_1$ folytonosan differenciálható görbe esetén $f \circ \gamma$ is folytonosan differenciálható, és $l_{\rho_1}(\gamma) = l_{\rho_2}(f \circ \gamma)$,

(ii) ha $z, w \in D_1$, akkor $d_{\rho_1}(z, w) = d_{\rho_2}(f(z), f(w))$,

(iii) az f leképezés bijekció, így f^{-1} létezik, és szintén izometria.

Bizonyítás. Az $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ következtetések egyszerűen adódnak, így elegendő az első állítást bizonyítani. Definíció szerint

$$l_{\rho_2}(f \circ \gamma) = \int_a^b \|(f \circ \gamma)'(t)\|_{\rho_2,(f\circ\gamma)(t)}\, dt = \int_a^b \left\|\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\right\|_{\rho_2,(f\circ\gamma)(t)} dt,$$

továbbá

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\right\|_{\rho_2,(f\circ\gamma)(t)} = \left|\frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))\right| \cdot |\gamma'(t)| \cdot \rho_2(f(\gamma(t))) = \|\gamma'(t)\|_{f^*\rho_2,\gamma(t)} = \|\gamma'(t)\|_{\rho_1,\gamma(t)},$$

mert f izometria. Vagyis

$$l_{\rho_2}(f \circ \gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\rho_1,\gamma(t)}\, dt = l_{\rho_1}(\gamma),$$

ami épp az első állítás. □

Az alábbiakban a Bergman-terek reprodukáló magfüggvénye segítségével definiálunk egy metrikát $\mathbb{C}$ tartományain, melyre nézve a konform leképezések izometriák lesznek. Legyen tehát $D \subseteq \mathbb{C}$ olyan tartomány, melyre $\mathcal{O}L^2(D) \neq \{0\}$, $K(z, w)$ pedig a hozzá tartozó magfüggvény. Belátjuk, hogy a $K(z, z)$ függvény pozitív. Legyen a $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ egy ortonormált bázis $\mathcal{O}L^2(D)$-n, ekkor az 1.13. tétel szerint $K(z, z) = \sum_n |\phi_n(z)|^2$. Ha $K(z, z) = 0$ lenne, akkor a jobb oldalon az összeg összes tagja 0 volna. Tehát a bázis összes eleme, és így az $\mathcal{O}L^2(D)$ tér összes eleme eltűnne a z pontban, ami a 2.8. állítás miatt lehetetlen. Értelmes tehát a $\log K(z, z)$ függvény. Ennek segítségével definiáljuk a Bergman-metrikát:

3.13. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ tartomány, $K_D(z,w)$ az $\mathcal{O}L^2(D)$ tér reprodukáló magfüggvénye, ekkor a

$$\rho_D(z) = \rho(z) = \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \log K_D(z,z)}$$

formulával definiált metrikát *Bergman-metrikának* nevezzük.

Belátjuk, hogy a gyökjel alatt álló kifejezés pozitív, tehát valóban metrikát definiáltunk. Legyen ismét $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ az $\mathcal{O}L^2(D)$ egy bázisa, ekkor

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \log K(z,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\sum_n \phi_n(z)\overline{\phi_n(z)}} \cdot \sum_n \phi_n(z)\overline{\phi_n'(z)}\right] = \\ = -\frac{1}{\left(\sum_n \phi_n(z)\overline{\phi_n(z)}\right)^2} \cdot \sum_n \phi_n'(z)\overline{\phi_n(z)} \cdot \sum_n \phi_n(z)\overline{\phi_n'(z)} + \\ + \frac{1}{\sum_n \phi_n(z)\overline{\phi_n(z)}} \cdot \sum_n \phi_n'(z)\overline{\phi_n'(z)} = \\ = \frac{1}{\sum_n |\phi_n(z)|^2}\left[\sum_n |\phi_n'(z)|^2 - \frac{1}{\sum_n |\phi_n(z)|^2} \cdot \left|\sum_n \phi_n(z)\overline{\phi_n'(z)}\right|^2\right],\end{aligned} \tag{5}$$

ahol a deriválást azért lehet tagonként elvégezni, mert az adott sorok kompakt halmazokon egyenletesen konvergensek. A zárójelben lévő kifejezés a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség miatt nemnegatív, sőt valójában pozitív, mert $\phi_n(z)$ nem egyezhet meg $\phi_n'(z)$ valamely fix nem nulla konstansszorosával minden n-re. Ez legegyszerűbben úgy látszik, ha - mivel a kifejezés értéke független a bázis választásától - a ϕ_0 elemet úgy választjuk, hogy annak z-ben egyszeres nullhelye legyen (ez a 2.9. állítás szerint megtehető), majd kiegészítjük a(z egy elemű) rendszert ortonormált bázissá.

Most vizsgáljuk meg, hogyan írható fel a tartományhoz tartozó magfüggvény egy konform leképezés segítségével.

3.14. Lemma. *Legyenek $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ konform ekvivalens tartományok, melyekre az $\mathcal{O}L^2(D_i)$ tér nem triviális, és legyen $\gamma : D_1 \to D_2$ pedig konform ráképezés. Ekkor minden $z, w \in D_1$-re*

$$K_{D_1}(z,w) = \gamma'(z) \cdot K_{D_2}(\gamma(z),\gamma(w)) \cdot \overline{\gamma'(w)}.$$

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{O}L^2(D_1)$, ekkor a $\zeta = \gamma(w)$ helyettesítést alkalmazva az 1.16. állítás szerint

$$\begin{aligned}\int_{D_1} \gamma'(z) \cdot K_{D_2}(\gamma(z),\gamma(w)) \cdot \overline{\gamma'(w)} f(w)\, dA(w) = \\ = \int_{D_2} \gamma'(z) \cdot K_{D_2}(\gamma(z),\gamma(\gamma^{-1}(\zeta))) \cdot \overline{\gamma'(\gamma^{-1}(\zeta))} f(\gamma^{-1}(\zeta)) \left|(\gamma^{-1})'(\zeta)\right|^2 dA(\zeta) = \\ = \int_{D_2} \gamma'(z) \cdot K_{D_2}(\gamma(z),\zeta) \cdot \overline{\gamma'(\gamma^{-1}(\zeta))} f(\gamma^{-1}(\zeta)) \frac{1}{\gamma'(\gamma^{-1}(\zeta))\overline{\gamma'(\gamma^{-1}(\zeta))}}\, dA(\zeta) = \\ = \int_{D_2} \gamma'(z) \cdot K_{D_2}(\gamma(z),\zeta) \cdot f(\gamma^{-1}(\zeta)) \frac{1}{\gamma'(\gamma^{-1}(\zeta))}\, dA(\zeta) = \\ = \gamma'(z) \cdot \int_{D_2} K_{D_2}(\gamma(z),\zeta) \cdot g(\zeta)\, dA(\zeta),\end{aligned}$$

ahol $g(\zeta) = f(\gamma^{-1}(\zeta)) \cdot \dfrac{1}{\gamma'(\gamma^{-1}(\zeta))}$.

Az 1.16. állítás alkalmazásával látható, hogy $g \in \mathcal{O}L^2(D_2)$, ezért a fenti integrál értéke éppen $g(\gamma(z))$, azaz

$$\int_{D_1} \gamma'(z) \cdot K_{D_2}(\gamma(z), \gamma(w)) \cdot \overline{\gamma'(w)} f(w)\, dA(w) = \gamma'(z) \cdot g(\gamma(z)) = f(z).$$

Mivel a $\phi(w) = \gamma'(z) \cdot K_{D_2}(\gamma(z), \gamma(w)) \cdot \overline{\gamma'(w)}$ függvény konjugáltja (szintén az 1.16. állítás miatt) $\mathcal{O}L^2(D_2)$-ben van, így az 1.12. tétel 6. pontja szerint ez megegyezik a reprodukáló magfüggvénnyel. □

3.15. Tétel. *Legyenek $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ konform ekvivalens tartományok, melyekre az $\mathcal{O}L^2(D_i)$ tér nem triviális, és legyen $\gamma : D_1 \to D_2$ konform leképezés. Ekkor $\gamma^* \rho_{D_2}(z) = \rho_{D_1}(z)$ minden $z \in D_1$ esetén, azaz γ izometria a (D_1, ρ_{D_1}) és (D_2, ρ_{D_2}) párok között.*

Bizonyítás. A definíció szerint

$$\gamma^* \rho_{D_2}(w) = \rho_{D_2}(\gamma(w)) \cdot |\gamma'(w)| = \sqrt{\gamma'(w) \left[\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \log K_{D_2}(z,z)\right]\Big|_{z=\gamma(w)} \overline{\gamma'(w)}}.$$

A láncszabály alkalmazásával látható (figyelembe véve, hogy γ holomorf), hogy a gyökjel alatt lévő kifejezés éppen

$$\frac{\partial^2}{\partial w \partial \overline{w}} \log K_{D_2}(\gamma(w), \gamma(w)).$$

Ha ehhez még hozzáadjuk a $0 = \frac{1}{4}\Delta(\log |\gamma'|^2)$ kifejezést, amely γ konform volta miatt értelmes a γ értelmezési tartományán, akkor az előző lemma miatt

$$\gamma^* \rho_{D_2}(w) = \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial w \partial \overline{w}} \log \left[\gamma'(w) \cdot K_{D_2}(\gamma(w), \gamma(w)) \cdot \overline{\gamma'(w)}\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial w \partial \overline{w}} \log K_{D_1}(w,w)} = \rho_{D_1}(w),$$

ami éppen a tétel állítása. □

Számoljuk ki végül a Bergman-metrikát a $\mathbb{D}$ egységkör esetén. Az 1.17. tétel szerint ekkor

$$K(z,w) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(1 - z\overline{w})^2},$$

azaz

$$\log K(z,z) = \log \left[\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\left(1 - |z|^2\right)^2}\right] = -\log \pi - 2\log(1 - |z|^2).$$

Tehát a láncszabályt alkalmazva

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \log K(z,z) = \frac{-2}{1 - |z|^2} \cdot (-z) = \frac{2z}{1 - |z|^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \log K(z.z) = \frac{2}{\left(1 - |z|^2\right)^2},$$

vagyis $\rho_{\mathbb{D}}(z) = \sqrt{2}/(1 - |z|^2)$, ami éppen a Poincaré-metrika $\sqrt{2}$-szöröse. Az eddigiek következménye, hogy a Poincaré-metrikában az egységkör automorfizmusai izometriák. A Bergman-metrika további alkalmazásai találhatók például a [7] könyvben.

4. Súlyozott Bergman-terek

Ebben a fejezetben általánosítjuk a Bergman-terek definícióját. Egyrészt $\mathbb{C}$-beli tartományok helyett magasabb dimenziós terekben is tekinthetjük a négyzetesen integrálható holomorf függvények terét, másrészt súlyozhatjuk is a függvényeket. A korábbiakhoz hasonlóan így Hilbert-tereket kapunk. Az első fejezetben láttuk, hogy $\mathcal{O}L^2(\mathbb{C}) = \{0\}$, azonban a Segal–Bargmann-terek példája mutatja majd, hogy megfelelő súllyal ellátva már találhatunk négyzetesen integrálható holomorf függvényt az egész síkon, sőt $\mathbb{C}^n$-ben is.

4.1. Definíció és alapvető tulajdonságok

4.1. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{C}^n$ tartomány, $\alpha : D \to \mathbb{R}_{>0}$ folytonos függvény, ekkor az

$$\mathcal{O}L^2(D, \alpha) = \left\{ f \in \mathcal{O}(D) : \int_D |f(z)|^2 \, \alpha(z) \, dz < \infty \right\}$$

teret (súlyozott) *Bergman-térnek* nevezzük, ahol most a z szerinti integrál a $2n$ dimenziós Lebesgue-mérték szerinti integrált jelöli a $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ téren. A fenti integrál négyzetgyökét az f függvény *normájának* nevezzük, és $\|f\|_\alpha$-val vagy $\|f\|$-val jelöljük. Az $\alpha : D \to \mathbb{R}_{>0}$ folytonos függvényeket *súlyfüggvényeknek* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy $\mathcal{O}L^2(D, \alpha)$ lineáris altere az $L^2(D, \alpha)$ Hilbert-térnek, amely a D-n α-val súlyozva négyzetesen integrálható függvények tere, és a skalárszorzatot az

$$\langle f, g \rangle_{L^2(D,\alpha)} = \int_D f(z)\overline{g(z)}\alpha(z) \, dz$$

integrállal definiáljuk.

4.2. Tétel. *Ha $D \subseteq \mathbb{C}^n$, α súlyfüggvény D-n, $z \in D$, és $f \in \mathcal{O}L^2(D, \alpha)$, akkor*

$$|f(z)|^2 \le C\|f\|_\alpha^2,$$

ahol C egy z-től függő konstans. Vagyis az l_z kiértékelő funkcionál korlátos.

Bizonyítás. Legyen $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\Delta(z, s)$ pedig egy z középpontú, s sugarú policilinder, vagyis

$$\Delta(z, s) = \{w \in \mathbb{C}^n : |w_k - z_k| < s, \, k = 1, \ldots, n\},$$

melyre $\overline{\Delta}(z, s) \subseteq D$. Ha $f \in \mathcal{O}(D)$, akkor

$$f(z) = \frac{1}{(s^2\pi)^n} \int_{\Delta(z,s)} f(z) \, dz.$$

Ezt az $n = 1$ esetben láttuk az 1.3. pont elején. Az $n > 1$ esetben az állítást szukcesszív integrálással kapjuk.

Legyen $1_{\Delta(z,s)} \in L^2(D, \alpha)$ a $\Delta(z, s)$ halmaz indikátorfüggvénye, vagyis amely 1-et vesz fel ezen a halmazon, minden más helyen pedig 0-t. Ekkor $f \in \mathcal{O}L^2(D, \alpha)$ esetén

$$f(z) = \frac{1}{(s^2\pi)^n} \int_D 1_{\Delta(z,s)}(z) \frac{1}{\alpha(z)} f(z)\alpha(z) \, dz = \frac{1}{(s^2\pi)^n} \left\langle 1_{\Delta(z,s)} \frac{1}{\alpha}, f \right\rangle_{L^2(D,\alpha)},$$

így a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség szerint

$$|f(z)|^2 \leq \frac{1}{(s^2\pi)^{2n}} \left\| 1_{\Delta(z,s)} \frac{1}{\alpha} \right\|^2_{L^2(D,\alpha)} \|f\|^2_{L^2(D,\alpha)}.$$

Mivel $1/\alpha$ folytonos a $\overline{\Delta}(z,s)$ halmazon, így $\Delta(z,s)$ -en korlátos, ezért az $1_{\Delta(z,s)} \cdot 1/\alpha$ függvény fenti normája véges. Ezzel az állítást beláttuk. □

4.3. Tétel. *Az $\mathcal{O}L^2(D,\alpha)$ tér zárt altere az $L^2(D,\alpha)$ térnek, ezért Hilbert-tér.*

Bizonyítás. Az előző bizonyításból látszik, hogy $z \in D$ esetén van z-nek olyan U_z környezete, hogy $w \in U_z$, $f \in \mathcal{O}L^2(D,\alpha)$ esetén

$$|f(w)|^2 \leq C_z \|f\|^2_\alpha,$$

ahol C_z csak z-től függő konstans.

Tegyük fel, hogy $\{f_n\} \subseteq \mathcal{O}L^2(D,\alpha)$, $f \in L^2(D,\alpha)$, és $f_n \to f$ L^2-ben. Ekkor f_n Cauchy-sorozat $L^2(D,\alpha)$-ban, így

$$\sup_{w \in U_z} |f_n(w) - f_m(w)| \leq \sqrt{C_z} \|f_n - f_m\|_\alpha \to 0,$$

ha $n, m \to \infty$. Tehát az f_n sorozat lokálisan egyenletesen konvergál egy f függvényhez, amely a Weierstrass-tétel szerint holomorf, azaz $f \in \mathcal{O}L^2(D,\alpha)$. □

Az 1.12. és az 1.13. tételek megfelelői a súlyozott Bergman-terekben is igazak, van tehát reprodukáló magfüggvény, amely pontosan úgy áll elő egy ortonormált bázisból, ahogy a súly nélküli egy dimenziós esetben. A bizonyítások szóról szóra megegyeznek az említett tételek bizonyításával, csupán az integrálokba bele kell írni szorzóként az α súlyfüggvényt.

4.2. A Segal–Bargmann-terek

Ebben a pontban röviden bemutatjuk a súlyozott Bergman-terek egyik fontos példáját. A Segal–Bargmann-terek elmélete alkalmazható például a kvantummechanikában (lásd [6]). Mi most csak a legalapvetőbb tulajdonságok tárgyalására szorítkozunk.

4.4. Definíció. Legyen $t > 0$, ekkor az $\mathcal{O}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_t)$ tereket, ahol $\mu_t(z) = (\pi t)^{-n} e^{-|z|^2/t}$, *Segal–Bargmann-tereknek* nevezzük.

Az alábbiakban kiszámoljuk a Segal–Bargmann-terek reprodukáló magfüggvényét. Tegyük fel először, hogy a dimenzió $n = 1$. Első lépésben megmutatjuk, hogy a $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ rendszer ortogonális. Először is ez a rendszer valóban benne van az $\mathcal{O}L^2(\mathbb{C}, \mu_t)$ térben. Ugyanis $k = 0$ esetén

$$\frac{1}{\pi t} \int_{\mathbb{C}} 1^2 e^{-|z|^2/t} \, dz = \frac{1}{\pi t} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2/t} r \, dr \, d\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[e^{-r^2/t} \right]_0^\infty d\varphi = 1,$$

továbbá ha $k > 1$, akkor

$$\|z^k\|^2 = \frac{1}{\pi t} \int_{\mathbb{C}} \left| z^k \right|^2 e^{-|z|^2/t} \, dz = \frac{1}{\pi t} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r^{2k+1} e^{-r^2/t} \, dr \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi t} \int_0^{2\pi} \left(\left[-\frac{t}{2} r^{2k} e^{-r^2/t} \right]_0^\infty + kt \int_0^\infty r^{2k-1} e^{-r^2/t} \, dr \right) d\varphi =$$

$$= kt \frac{1}{\pi t} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r^{2k-1} e^{-r^2/t} \, dr \, d\varphi = kt \|z^{k-1}\|^2,$$

amiből indukcióval $\|z^k\|^2 = k!t^k$ adódik. Megmutatjuk, hogy a rendszer ortogonális:

$$\langle z^k, z^l \rangle = \frac{1}{\pi t}\int_{\mathbb{C}} z^k \overline{z^l} e^{-|z|^2/t}\,dz = \frac{1}{\pi t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r^k e^{ik\varphi} r^l e^{-il\varphi} e^{-r^2/t} r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi t}\int_0^{\infty} r^{(k+l+1)} e^{-r^2/t}\int_0^{2\pi} e^{i(k-l)\varphi}\,d\varphi\,dr = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \neq l, \\ k!t^k, & \text{ha } k = l. \end{cases}$$

Végül belátjuk, hogy ez a rendszer teljes. Ehhez elegendő megmutatni, hogy ha egy $f \in \mathcal{O}L^2(\mathbb{C}, \mu_t)$ függvényre $\langle f, z^k \rangle = 0$ minden $k \in \mathbb{N}$-re, akkor $f = 0$. Legyen $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, ekkor

$$\langle f, z^k \rangle = \frac{1}{\pi t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(re^{i\varphi}) r^{k+1} e^{-ik\varphi} e^{-r^2/t}\,dr\,d\varphi =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\pi t}\int_0^{R}\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) r^{k+1} e^{-ik\varphi} e^{-r^2/t}\,d\varphi\,dr$$

a Lebesgue-tétel miatt. Mivel f hatványsora egyenletesen konvergál a $|z| \leq R$ halmazon, így az integrál és a szumma felcserélhető:

$$\langle f, z^k \rangle = \lim_{R\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\pi t}\int_0^{R}\int_0^{2\pi} a_j r^j e^{ij\varphi} r^{k+1} e^{-ik\varphi} e^{-r^2/t}\,d\varphi\,dr = \frac{2a_k}{t}\int_0^{\infty} r^{2k+1} e^{-r^2/t}\,dr.$$

Ha tehát $\langle f, z^k \rangle = 0$, akkor $a_k = 0$ minden $k \in \mathbb{N}$-re, azaz $f = 0$. Tehát a $\{z^k/\sqrt{k!t^k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ortonormált bázis az $\mathcal{O}L^2(\mathbb{C}, \mu_t)$ térben. Így a reprodukáló magfüggvény

$$K(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\sqrt{k!t^k}}\cdot\frac{\overline{w^k}}{\sqrt{k!t^k}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{z\overline{w}}{t}\right)^k = e^{z\overline{w}/t}.$$

Ha a dimenziószám n, akkor a következő képlet érvényes:

4.5. Tétel. *Az $\mathcal{O}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_t)$ tér reprodukáló magfüggvénye $K(z, w) = e^{z\cdot\overline{w}/t}$, ahol $z \cdot \overline{w} = z_1\overline{w}_1 + \cdots + z_n\overline{w}_n$. Speciálisan minden $z \in \mathbb{C}^n$, $f \in \mathcal{O}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_t)$ esetén $|f(z)|^2 \leq e^{|z|^2/t}\|f\|^2$.*

Bizonyítás. Az $n = 1$ esetet már beláttuk. Legyen $K(z, w) = e^{z\cdot\overline{w}/t}$, ekkor $\overline{K(z, w)}$ fix z esetén holomorf w-ben, hiszen minden változójában holomorf. Továbbá $\overline{K(z, w)} \in \mathcal{O}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_t)$, mint w függvénye. Ugyanis

$$\int_{\mathbb{C}^n}\left|e^{\overline{z}\cdot w/t}\right|^2 e^{-|w|^2/t}dw = \int_{\mathbb{C}^n} e^{2\mathrm{Re}\,(\overline{z}\cdot w/t)} e^{-|w|^2/t}dw =$$

$$= \int_{\mathbb{C}}\cdots\int_{\mathbb{C}}\prod_{j=1}^{n} e^{(2\mathrm{Re}\,(\overline{z_j}w_j)-|w_j|^2)/t}dw_1\ldots dw_n,$$

és ez a függvény könnyen láthatóan integrálható az összes változójában.

Ha most $f \in \mathcal{O}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_t)$, akkor

$$\int_{\mathbb{C}^n} f(w)e^{z\cdot\overline{w}}\mu_t(w)dw = \int_{\mathbb{C}}\cdots\int_{\mathbb{C}} e^{z_1\overline{w}_1/t}\ldots e^{z_n\overline{w}_n/t} f(w_1, \ldots, w_n)\frac{dw_1}{\pi t}\cdots\frac{dw_n}{\pi t}.$$

Legyen $z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n$ fix, és $f_i(w) = (z_1, \dots, z_{i-1}, w, z_{i+1}, \dots, z_n)$. Ekkor $f_i \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, és ha tudnánk, hogy $f_i \in \mathcal{O}L^2(\mathbb{C}, \mu_t)$ minden $1 \leq i \leq n$-re, akkor változónként elvégezve a fenti integrálást

$$\int_{\mathbb{C}^n} f(w) e^{z \cdot \overline{w}/t} \mu_t(w) dw = f(z)$$

adódna. Elegendő tehát igazolni, hogy $f \in \mathcal{O}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_t)$ esetén $f_i \in \mathcal{O}L^2(\mathbb{C}, \mu_t)$. Ha f polinom, akkor f_i is az, így $f_i \in \mathcal{O}L^2(\mathbb{C}, \mu_t)$. Ezért elég megmutatni, hogy a poliomok sűrű halmazt alkotnak $\mathcal{O}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_t)$-ben, mert ekkor ha $f \in \mathcal{O}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_t)$ tetszőleges, és $Q \in \mathcal{O}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_t)$ polinom, melyre $\|f - Q\| < \varepsilon$, akkor

$$\left| \int_{\mathbb{C}^n} f(w) e^{z \cdot \overline{w}/t} \mu_t(w) dw - f(z) \right| \leq \left| \int_{\mathbb{C}^n} f(w) e^{z \cdot \overline{w}/t} \mu_t(w) dw - Q(z) \right| + |Q(z) - f(z)| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{C}^n} \left| (f(w) - Q(w)) e^{z \cdot \overline{w}/t} \right| \mu_t(w) dw + C_z \|f - Q\| \leq$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f(w) - Q(w)|^2 \mu_t(w) dw \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{C}^n} \left| e^{z \cdot \overline{w}/t}) \right|^2 \mu_t(w) dw \right)^{\frac{1}{2}} + C_z \|f - Q\| =$$

$$\leq C'_z \|f - Q\| \leq C'_z \varepsilon,$$

ahol felhasználtuk a Hölder-egyenlőtlenséget, a kiértékelő funkcionál korlátosságát és azt, hogy $e^{z \cdot \overline{w}/t} \in \mathcal{O}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_t)$. A polinomok sűrűsége viszont az egy dimenziós számoláshoz hasonlóan adódik, felhasználva, hogy minden $f \in \mathcal{O}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_z)$ hatványsorba fejthető, amely tetszőleges kompakt halmazon egyenletesen konvergál. Ebből az állítás az 1.12. tétel 6. pontjának a súlyozott Bergman-terekre vonatkozó megfelelőjéből következik. □

4.6. Definíció. Legyen $t > 0$, $a \in \mathbb{C}^n$, ekkor a $T_a : \mathcal{O}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_t) \to \mathcal{O}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_t)$, $T_a f(z) = e^{-|a|^2/(2t)} e^{z \cdot \overline{a}/t} f(z - a)$ lineáris transzformációt *unitér eltolásnak* nevezzük.

A definícióból az sem feltétlenül világos, hogy T_a a Segal–Bargmann-teret egyáltalán magára képezi. Valójában azonban T_a unitér minden $a \in \mathbb{C}^n$ esetén.

4.7. Tétel. *Ha $a \in \mathbb{C}^n$, akkor a fent definiált T_a leképezés unitér, és $a, b \in \mathbb{C}^n$ esetén $T_a T_b = e^{-i \mathrm{Im}\,(a \cdot \bar{b})/t} T_{a+b}$.*

Bizonyítás. Ha $f \in \mathcal{O}L^2(\mathbb{C}^n, \mu_t)$, és $a \in \mathbb{C}^n$, akkor $T_a f$ nyilván holomorf. Mivel

$$|z - a|^2 = \sum_{k=1}^{n} (z_k - a_k) \overline{(z_k - a_k)} = \sum_{k=1}^{n} (z_k \overline{z}_k + a_k \overline{a}_k - a_k \overline{z}_k - z_k \overline{a}_k) = |z|^2 + |a|^2 - 2\mathrm{Re}\,(z \cdot \overline{a}),$$

így

$$\left| e^{-|a|^2/(2t)} e^{z \cdot \overline{a}/t} f(z - a) \right|^2 e^{-|z|^2/t} = |f(z - a)|^2 e^{-|a|^2/t} e^{2\mathrm{Re}\,(z \cdot \overline{a})/t} e^{-|z|^2/t} = |f(z - a)| e^{-|z-a|^2/t}$$

Most $(\pi t)^{-n}$-nel való szorzás és integrálás után azt kapjuk, hogy $\|T_a f\|^2 = \|f\|^2$, tehát T_a normatartó.

Az invertálhatósághoz elegendő belátni a $T_a T_b$ szorzatra vonatkozó formulát, hiszen abból már következik, hogy $(T_a)^{-1} = T_{-a}$. A fenti számoláshoz hasonlóan adódik, hogy $a, b \in \mathbb{C}^n$

esetén $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\mathrm{Re}\,(a \cdot \overline{b})$, tehát

$$T_a T_b f = e^{-|a|^2/(2t)} e^{z\cdot\overline{a}/t} e^{-|b|^2/(2t)} e^{(z-a)\cdot\overline{b}/t} f(z-a-b) =$$

$$= e^{-|a|^2/(2t)} e^{-|b|^2/(2t)} e^{-a\cdot\overline{b}/t} e^{z\cdot(\overline{a}+\overline{b})/t} f(z-(a+b)) =$$

$$= e^{-|a+b|^2/(2t)} e^{-i\mathrm{Im}\,(a\cdot\overline{b})/t} e^{z\cdot\overline{(a+b)}/t} f(z-(a+b)) = e^{-i\mathrm{Im}\,(a\cdot\overline{b})/t} T_{a+b} f,$$

ami éppen az állítás. □

Az unitér eltolások segítségével is meghatározható a Segal–Bargmann-terek reprodukáló magfüggvénye az $n=1$ esetben. Ekkor ugyanis $f \in \mathcal{O}L^2(\mathbb{C}, \mu_t)$ esetén a Cauchy-formulát felhasználva

$$\int_{\mathbb{C}} f(w)\mu_t(w)dw = \frac{1}{\pi t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(re^{i\varphi})e^{-r^2/t} r dr\, d\varphi =$$

$$\frac{1}{\pi t}\int_0^{\infty} e^{-r^2/t} r \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) d\varphi\, dr = -f(0)\int_0^{\infty} -\frac{2}{t} r e^{-r^2/t} dr = -f(0)\left[e^{-r^2/t}\right]_0^{\infty} = f(0),$$

azaz $f(0) = \langle f, 1\rangle$. Most

$$(T_{-a}f)(0) = \langle T_{-a}f, 1\rangle = \langle T_a T_{-a} f, T_a 1\rangle = \langle f, T_a 1\rangle\,,$$

vagyis

$$e^{-|a|^2/(2t)} e^{-z\cdot\overline{a}/t} f(z+a)|_{z=0} = e^{-|a|^2/(2t)} f(a) = \langle f, T_a 1\rangle\,,$$

$$f(a) = \left\langle f, e^{|a|^2/(2t)} T_a 1\right\rangle.$$

Tehát az 1.12. tétel 6. pontjának a súlyozott Bergman-terekre vonatkozó megfelelője szerint

$$\overline{K(a,u)} = e^{|a|^2/(2t)} T_a 1(u) = e^{|a|^2/(2t)} e^{-|a|^2/(2t)} e^{u\cdot\overline{a}/t} = e^{u\cdot\overline{a}/t}.$$

Mivel a mérték, amit használunk, nem normatartó, így ahhoz, hogy T_a izometria legyen, az $f(z-a)$-t be kellett szorozni $\mu_t(z-a)/\mu_t(z)$-vel. Ezt most meg lehet tenni, mert olyan a súlyfüggvényünk, hogy a fenti tört egy holomorf függvény abszolút értékének a négyzete. Az alábbiakban le fogjuk írni azokat a sima súlyfüggvényeket $\mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartományain, amik rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal.

4.8. Lemma. *Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, és $\alpha : D \to \mathbb{R}_{>0}$ sima függvény. Ekkor pontosan akkor létezik olyan ϕ holomorf függvény, melyre $|\phi|^2 = \alpha$, ha $\log\alpha$ harmonikus.*

Bizonyítás. A feltétel szükségessége nyilvánvaló. Legyen tehát $\log\alpha$ harmonikus. Mivel D egyszeresen összefüggő, így van olyan $f \in \mathcal{O}(D)$, melyre $\mathrm{Re}\, f = \log\alpha$. Ekkor $e^{f/2} \in \mathcal{O}(D)$, és $\left|e^{f/2}\right|^2 = e^{\log\alpha} = \alpha$. □

Ha $D \subseteq \mathbb{C}^n$ tartomány, α súlyfüggvény D-n, és ϕ egy sehol el nem tűnő holomorf függvény, akkor $f \in \mathcal{O}L^2(D,\alpha)$ esetén

$$\int_D |f(z)|^2\, \alpha(z)\, dz = \int_D |\phi(z) f(z)|^2\, \frac{\alpha(z)}{|\phi(z)|^2}\, dz.$$

Tehát az $f \mapsto \phi f$ egy unitér leképezés az $\mathcal{O}L^2(D,\alpha)$ térből az $\mathcal{O}L^2(D, \alpha/\left|\phi\right|^2)$ térbe.

4.9. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{C}^n$ tartomány, α és β pedig súlyfüggvények D-n. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\mathcal{O}L^2(D,\alpha)$ és $\mathcal{O}L^2(D,\beta)$ terek *holomorf ekvivalensek*, ha létezik egy sehol el nem tűnő ϕ holomorf függvény D-n, melyre $\beta = \alpha/|\phi|^2$. Az $\mathcal{O}L^2(D,\alpha) \to \mathcal{O}L^2(D,\beta)$ $f \mapsto \phi f$ leképezést *holomorf ekvivalenciának* nevezzük.

4.10. Tétel. *Legyen $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{>0}$ sima függvény, melyre $\mathcal{O}L^2(\mathbb{C},\alpha) \neq \{0\}$. Ha minden $a \in \mathbb{C}$-re van olyan ϕ_a holomorf függvény, melyre a $T_a f(z) = \phi_a(z) f(z-a)$ leképezés unitér $\mathcal{O}L^2(\mathbb{C},\alpha)$-n, akkor $\mathcal{O}L^2(\mathbb{C},\alpha)$ holomorf ekvivalens valamelyik Segal–Bargmann-térrel.*

Bizonyítás. A 4.8. lemma szerint azt kell belátni, hogy valamely $t > 0$-ra

$$\log((\pi t)\alpha(z)/e^{-|z|^2/t}) = \log(\pi t) + \log\alpha(z) - |z|^2/t$$

harmonikus, azaz $\Delta \log \alpha(z) = 4/t$. A feltétel szerint minden $a \in \mathbb{C}$-re van olyan ϕ_a holomorf függvény, hogy minden $f \in \mathcal{O}L^2(\mathbb{C},\alpha)$ esetén

$$\int_{\mathbb{C}} |\phi_a(z) f(z-a)|^2 \alpha(z)\, dz = \int_{\mathbb{C}} |f(z-a)|^2 \alpha(z-a)\, dz = \int_{\mathbb{C}} |f(z-a)|^2 \frac{\alpha(z-a)}{\alpha(z)} \alpha(z)\, dz,$$

azaz

$$\int_{\mathbb{C}} \left| \left(\phi_a(z) - \frac{\alpha^2(z-a)}{\alpha^2(z)} \right) f(z-a) \right|^2 \alpha(z)\, dz = 0.$$

Mivel folytonos nem negatív függvényt integrálunk, $\alpha > 0$ miatt a fenti egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha

$$\phi_a(z) f(z-a) = \frac{\alpha^2(z-a)}{\alpha^2(z)}$$

minden $z \in \mathbb{C}$-re. A bal oldali függvény holomorf, így

$$0 = \Delta \log |\phi_a(z) f(z-a)|^2 = 2(\Delta \log \alpha(z-a) - \Delta \log \alpha(z))$$

minden $a \in \mathbb{C}$ esetén, tehát $\Delta \log \alpha$ konstans. Meg kel még mutatni, hogy pozitív. Ha negatív volna, akkor az $\mathcal{O}L^2(\mathbb{C},\alpha)$ tér holomorf ekvivalens volna az $\mathcal{O}L^2(\mathbb{C}, e^{|z|^2/t})$ térrel valamely pozitív t-re. Ez utóbbi tér viszont csak a 0 függvényt tartalmazza, mert az összes eleme végtelenben eltűnő egészfüggvény. Mivel az $\mathcal{O}L^2(\mathbb{C},\alpha)$ tér nem triviális, így az állítást beláttuk. □

Hivatkozások

[1] S. Bergman, *The kernel function and conformal mapping*, Second revised edition, Amer. Math. Soc., Providence (1970)

[2] L. Bers, *On rings of analytic functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 311-315.

[3] L. Carleson, *Selected problems on exceptional sets*, Princeton: Van Nostrand (1967)

[4] P. L. Duren, A. Schuster, *Bergman spaces*, Math. Surveys Monogr. **100**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2004)

[5] J. Garnett, *Analytic capacity and measure*, Lecture Notes in Math. **297** Berlin-Heidelberg-New York: Springer (1972)

[6] B. C. Hall, *Holomorphic methods in analysis and mathematical physics*, In: „First Summer School in Analysis and Mathematical Physics" (S. Pérez Esteva and C. Villegas Blas, Eds.), Contemp. Math. **260**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2000), 1-59.

[7] S. Krantz, *Complex analysis: the geometric viewpoint*, Second edition, Amer. Math. Soc. (2004)

[8] J. Wiegerinck, *Domains with finite-dimensional Bergman space*, Math. Z. **187** (1984), 559-562.