Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Bencs Ferenc
Matematikus MSc

Stabil polinomok és alkalmazásaik

Szakdolgozat

Témavezető: Frenkel Péter

Budapest, 2015.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Már a középiskolás matematikatanulmányok során előkerül a polinom fogalma, illetve hogy azt a helyet, ahol a polinom zérus értéket vesz fel, a polinom gyökének nevezzük. Természetesen az ekkor előkerülő polinomok mind valós együtthatósak és egyváltozósak, és mivel a középiskolában felépített matematikai eszköztárral másodfokú polinomokig lehet könnyen vizsgálni a gyököket, az egyváltozós, valós együtthatós, másodfokú polinomokat tárgyalja a tananyag részletesen. Már ekkor hangsúlyos szerepet kap annak vizsgálata, hogy egy másodfokú polinomnak mikor van két valós megoldása.

Egyváltozós esetben a valós gyökök létezése alapján az egyváltozós polinomok egy részhalmazának elemeit definiálhatjuk ún. valós gyökű polinomként.

1.1. Definíció. *Egy $p \in \mathbb{C}[x]$ polinomot valós gyökűnek nevezünk, ha p minden gyöke valós szám.*

A valós együtthatós, valós gyökű polinomok sok érdekes tulajdonságot mutatnak, és emiatt a matematika több különböző területén is fontos szerepet játszanak: például az ortogonális polinomok elméletében, a lineáris algebrában vagy a kombinatorikában. Két valós gyökű polinom jól áll egymáshoz képest, ha a gyökeik valamilyen értelemben „szép" sorban követik egymást. Ezzel kapcsolatban több neves tétel is született (l. az Hermite–Biehler, vagy az Hermite–Kakeya–Obreschkoff tételeket a 3 fejezetben). Továbbá nevezetes tétel az alábbi, ami nagyon hasznos eszköznek bizonyult véges sorozatok logkonkávságának vizsgálatában, és amelyet mi is alkalmazni fogunk néhány tétel bizonyításában. Egy sorozat logkonkáv, ha tetszőleges elem négyzete nagyobb vagy egyenlő, mint a szomszédos tagok szorzata. Az alábbi tétel bizonyítása azon alapszik, hogy a deriválás és az együtthatósorozat megfordítása valós gyökű polinomból valós gyökűt állít elő, és hogy egy másodfokú polinom akkor és csak akkor valós gyökű, ha diszkriminánsa nemnegatív.

1.2. Tétel (Newton)**.** *Legyen $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ valós gyökű, n-edfokú polinom. Ekkor*

$$a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}\left(1+\frac{1}{i}\right)\left(1+\frac{1}{n-i}\right).$$

A valós gyökű polinom fogalmára tehát szép tételeket, bizonyításokat tudunk egyváltozós esetben felépíteni. Felmerül a kérdés, hogy vajon milyen fogalom általánosítja több változóban a valós gyökű polinomokat úgy, hogy a legtöbb egyváltozós tétel többváltozós változata a kibővített fogalommal érvényben maradjon. Kiderül, hogy ha a valós gyökű polinomok általánosítására több változóban az ún. stabil polinomok fogalmát vezetjük be, nemcsak az ismert tételek általánosítása adódik egyszerűen (l. 3 fejezetet), hanem egy új, igen hatékony matematikai eszközt kapunk. A stabil polinomok definiálásában Wagner konvencióját [12] követjük.

1.3. Definíció. *Legyen* $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$. *Egy* $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ *polinomot stabil polinomnak nevezünk, ha* f *az azonosan nulla polinom, vagy ha bármely* $\mathbf{z} \in \mathcal{H}^m$ *esetén* $f(\mathbf{z}) \neq 0$.

Egy $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ *polinomot valós stabil polinomnak nevezünk, ha stabil, és minden együtthatója valós szám.*

Könnyen látható, hogy egy f egyváltozós valós polinom akkor és csak akkor valós stabil, ha minden gyöke valós. Ugyanis ha f minden gyöke valós, akkor nyilván stabil is. Fordítva, ha $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gyöke az f polinomnak, akkor $\bar{\xi}$ is gyöke f-nek, mert az f valós együtthatós, és ξ vagy $\bar{\xi}$ biztosan eleme $\mathcal{H}$-nak, ami ellentmondásra vezet.

Az egyik legfontosabb eszköz Hurwitz tétele, mely lehetővé teszi azt, hogy ha egy polinomot előállítunk stabil polinomok limeszeként úgy, hogy a sorozat a $\mathcal{H}^n$ minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergál, akkor a limeszpolinom is stabil lesz.

1.4. Tétel (Hurwitz)**.** *Legyen* $\Omega \subseteq \mathbb{C}^m$ *egy összefüggő nyílt részhalmaz, és legyen* f_n *függvények olyan sorozata, amelyben mindegyik függvény analitikus* Ω*-n, és nincs zérusa* Ω*-ban. Tegyük fel, hogy* f_n *egyenletesen konvergál egy* f *függvényhez* Ω *minden kompakt részhalmazán. Ekkor* f *vagy azonosan 0, vagy nincs zérusa* Ω*-ban.*

A stabil polinomok segítségével a matematika igen különböző területein, például az algebrában, a gráfelméletben, a valószínűségszámításban és a kombinatorikában is elegáns bizonyításokat lehet adni különböző állításokra. Dolgozatom célja, hogy bemutassa ezt a fogalmat, a hozzá kapcsolódó legismertebb tételeket és a stabil polinomok alkalmazásának sokszínűségét néhány példán keresztül.

A dolgozat felépítése a következő: a 2 fejezetben néhány elemi tulajdonságát mutatjuk meg a stabil polinomoknak, majd kimondjuk a stabilitást őrző lineáris leképezésekre vonatkozó teljes karakterizációs tételt. Ezen tulajdonságokat néhány példán keresztül be is mutatjuk a 2.1 alfejezetben. A 3 fejezetben bemutatunk néhány egyváltozós valós gyökű polinomokkal kapcsolatos állítást és azok általánosítását stabil polinomokra, melyek alapját adják több neves tételnek. A 4 fejezetben bizonyítjuk a Johnson-sejtést [1], az 5 fejezetben bemutatjuk Gurvits bizonyítását Van der Waerden-sejtésre [12] nyomán, majd a 6.1 fejezetben Marcus, Spielman és Srivastava [9] cikke alapján bizonyítjuk végtelen sok d-reguláris, páros, Ramanujan-gráf létezését tetszőleges $d > 2$ fokszámválasztás mellett.

1.5. Jelölés. *A dolgozat során* $\mathbb{R}^+$ *a pozitív valós számok halmazát,* $\mathbb{R}_+$ *a nemnegatív valós számokat jelöli. Továbbá* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *változókból álló vektor. A dolgozatban egy* x_i *változó szerinti deriválást* ∂_{x_i} *jelöli, és ha félreértést nem okoz, akkor* ∂_i *az* i*-edik változó szerinti deriválást jelöli. Egy* $p(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ *esetén* $\deg_{x_i}(p)$ *az* x_i *fokát jelöli a* p *polinomban, és ha félreértést nem okoz, a* $\deg_i(p) = \deg_{x_i}(p)$ *rövidítést használjuk. Egy* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *multiindexre a* $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_m}$ *monom, és* $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$ *deriválásoperátor. Egy* $n \in \mathbb{N}$ *esetén az* $\{1, \ldots, n\}$ *halmazt jelöljük* $[n]$*-nel.*

2. Elemi tulajdonságok

Az alábbi fejezetben [12] és [3] cikkek alapján bizonyítunk néhány elemi tulajdonságot, melyek stabil polinomok előállításában játszanak később fontos szerepet. Az első lemmával arra világítunk rá, hogy a többváltozós stabilitás hogyan függ össze az egyváltozós stabilitás fogalmával.

2.1. Lemma. *Legyen $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$. Ekkor f akkor és csak akkor stabil, ha bármely $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in (\mathbb{R}^+)^m$ esetén $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}t) \in \mathbb{R}[t]$ stabil.*

Bizonyítás. Ha f stabil, és $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in (\mathbb{R}^+)^m$, akkor tetszőleges $z \in \mathcal{H}$ esetén $\mathbf{a} + \mathbf{b}z \in \mathcal{H}^m$, ezért $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}z) \neq 0$. A megfordításhoz legyen $\mathbf{z} \in \mathcal{H}^m$ rögzítve, és legyen $\mathbf{a} = \Re(\mathbf{z})$, és $\mathbf{b} = \Im(\mathbf{z})$. Ekkor $\mathbf{z} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, és $\mathbf{b} \in (\mathbb{R}^+)^m$, így a feltevés miatt az $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}t)$ polinom az $i \in \mathcal{H}$ helyen nem lehet nulla. Tehát tetszőleges $\mathbf{z} \in \mathcal{H}^m$ esetén $f(\mathbf{z}) \neq 0$. □

Ezen lemma lehetővé fogja tenni azt, hogy egyes állításokat visszavezethessünk egyváltozós stabil polinomokra vonatkozó állításokra. Erre fogunk majd példát látni 2.1 és 3 fejezetekben.

A következő lemmában bemutatunk néhány olyan leképezést, melyek segítségével már meglévő stabil polinomokból tudunk előállítani további stabil polinomokat.

2.2. Lemma. *A $\mathfrak{S}[x_1, \ldots, x_m]$ zárt az alábbi műveletekre.*

1. ***Permutáció*** *Bármely $\sigma : [m] \to [m]$ permutációra, $f \mapsto f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$*

2. ***Skálázás*** *Ha $c \in \mathbb{C}$, és $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^+)^m$, $f \mapsto cf(a_1x_1, \ldots, a_mx_m)$*

3. ***Diagonalizálás*** *Ha $i, j \in [m]$, $f \mapsto f(\mathbf{x})|_{x_i = x_j}$*

4. ***Specializálás*** *Ha $a \in \bar{\mathcal{H}}$, $f \mapsto f(a, x_2, \ldots, x_m)$*

5. ***Inverzió*** *Ha $\deg_1(f) = d$, $f \mapsto x^d f(-x_1^{-1}, x_2, \ldots, x_m)$*

6. ***Deriválás*** *$f \mapsto \partial_1 f(\mathbf{x})$*

Bizonyítás. 1. Mivel $\mathcal{H}^m$ zárt a koordináták permutációjára, ezért igaz a lemma 1 állítása.

2. Legyen $g = cf(a_1x_1, \ldots, a_mx_m)$. Mivel $\mathbf{a} \in (\mathbb{R}^+)^m$, ezért $\{(a_1z_1, \ldots, a_mz_m)^T \mid \mathbf{z} \in \in \mathcal{H}^m\} = \mathcal{H}^m$, így ha $c \neq 0$ akkor

$$\{g(z_1, \ldots, z_m) \mid \mathbf{z} \in \mathcal{H}^m\} = \{cf(z_1, \ldots, z_m) \mid \mathbf{z} \in \mathcal{H}^m\},$$

azaz g is stabil. Ha $c = 0$, akkor viszont g az azonosan 0 polinom, ami definíció alapján stabil.

3. Legyen $g = f(\mathbf{x})|_{x_i=x_j}$. Vegyük észre, hogy $A = \{\mathbf{z} \in \mathcal{H}^m \mid z_i = z_j\} \subseteq \mathcal{H}^m$, így

$$\{g(\mathbf{z}) \mid \mathbf{z} \in A\} \subseteq \{f(\mathbf{z}) \mid \mathbf{z} \in \mathcal{H}^m\},$$

azaz g is stabil.

4. Legyen $g = f(a, x_2, \ldots, x_m)$. Ha $a \in \mathcal{H}$, akkor $A = \{\mathbf{z} \in \mathcal{H}^m \mid z_1 = a\} \subseteq \mathcal{H}^m$, így

$$\{g(\mathbf{z}) \mid \mathbf{z} \in A\} \subseteq \{f(\mathbf{z}) \mid \mathbf{z} \in \mathcal{H}\},$$

így g is stabil.

Ha $a \in \bar{\mathcal{H}} \setminus \mathcal{H} = \mathbb{R}$, akkor definiáljuk a $g_n(\mathbf{x}) = f(a + 2^{-n}i, x_2, \ldots, x_m)$ sorozatot minden $n \in \mathbb{N}$-re. A konstrukció miatt $g_n \to g$, és mivel $a+2^{-n}i \in \mathcal{H}$, ezért a sorozat minden tagja stabil. Tehát g-t előállítottuk stabil polinomok limeszeként, ami a Hurwitz-tétel miatt stabil.

5. Legyen $g = x_1^d f(-x_1^{-1}, x_2, \ldots, x_m)$, ahol $\deg_1(f) = d$. Könnyen látható, hogy g polinom, és hogy $\{-z^{-1} \mid z \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}$, így

$$\{g(\mathbf{z}) \mid \mathbf{z} \in \mathcal{H}^m\} = \{f(\mathbf{z}) \mid \mathbf{z} \in \mathcal{H}^m\},$$

azaz g stabil polinom.

6. Legyen $g(x) = f(x, z_2, \ldots, z_m)$, ahol $z_i \in \mathcal{H}$ minden $2 \leq i \leq m$-re rögzített. Ekkor $g(x)$ stabil a lemma 4 része miatt, és $g'(x) = \partial_1 f(x, z_2, \ldots, z_m)$. Tehát azt kell belátnunk, hogy $g'(x)$ stabil. Legyenek ξ_i a g polinom gyökei (multiplicitással), melyekről g stabilitása miatt tudjuk, hogy $\Im(\xi_i) \leq 0$, és tegyük fel, hogy $z \in \mathcal{H}$. Ekkor

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum \frac{1}{z - \xi_i}.$$

Mivel $\Im(\xi_i) \leq 0$, ezért $\Im(z - \xi_i) > 0$, így $\frac{1}{z-\xi_i} \in -\mathcal{H}$, tehát $\frac{g'(z)}{g(z)} \in -\mathcal{H}$, speciálisan $\frac{g'(z)}{g(z)} \neq 0$, azaz $g'(z) \neq 0$. Tehát azt kaptuk, hogy $g'(x)$-nek nincs gyöke $\mathcal{H}$-ban, azaz $g'(x)$ stabil.

□

Vegyük észre, hogy amikor a deriválásoperátorról bizonyítottuk, hogy stabil polinomból stabil polinomot készít, akkor csak azt használtuk ki, hogy a deriválás után kapott polinom és az eredeti polinom hányadosa egy olyan függvény, amely $\mathcal{H}^n$-t $-\mathcal{H}$-ba képzi. Ez alapján egy m változós függvényt, ami a $\mathcal{H}^m$-et $-\mathcal{H}$-ba képzi, képzetesrész-negatív függvénynek nevezzük.

2.3. Állítás. *Legyen $c \in \mathcal{H}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (\mathbb{R}_+)^m$. Ekkor ha $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$ stabil, akkor*

$$g = \sum_{i=1}^{m} a_i(\partial_i f) - (c + \sum_{i=1}^{m} b_i x_i) f$$

is stabil.

Bizonyítás. Az előző lemma bizonyításából következik, hogy tetszőleges i-re a $\frac{\partial_i f}{f}$ képzetesrész-negatív függvény, így ezek pozitív együtthatós lineáris kombinációja is képzetesrész-negatív. Másrészt $-(c + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i)$ képzetesrész-negatív, így kapjuk, hogy $\frac{g}{f}$ képzetesrész-negatív, speciálisan g-nek nincs zérusa $\mathcal{H}^n$-ben. □

Tekintsünk a $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$-re, mint a monomok által feszített vektortérre, így az előző állításban szereplő $T : \mathbb{C}[\mathbf{x}] \to \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ leképezés lineáris leképezés. Felmerül a kérdés, hogy mely lineáris leképezések azok, amelyek stabil polinomot stabil polinomba képeznek.

Jelölje egy $\kappa \in \mathbb{N}^n$-re $\mathbb{C}_{\leq \kappa}[x_1, \ldots, x_n]$ azon komplex együtthatós polinomokat, melyekre minden $i \in [n]$ esetén az x_i foka legfeljebb κ_i. Könnyen bizonyítható, hogy egy $T : \mathbb{C}[\mathbf{x}] \to \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ lineáris leképezés akkor és csak akkor rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, ha tetszőleges $\kappa \in \mathbb{N}^n$ esetén a T megszorítva $\mathbb{C}_{\leq \kappa}[\mathbf{x}]$-re stabil polinomot stabil polinomba visz. Borcea és Brändén [2]-ban karakterizálták a $\mathbb{C}_{\leq \kappa}[\mathbf{x}] \to \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ stabilitást őrző, lineáris leképezéseket, és ezek segítségével a $\mathbb{C}[\mathbf{x}] \to \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ esetet is, amit az alábbi tételben foglalunk össze.

2.4. Tétel. *Legyen $\kappa \in \mathbb{N}^n$ rögzítve.*

1. *Egy $T : \mathbb{C}_\kappa[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ lineáris leképezés akkor és csak akkor visz stabil polinomot stabil polinomba, ha*

   a) vagy létezik $\nu : \mathbb{C}_\kappa[\mathbf{x}] \to \mathbb{C}$ funkcionál és $p \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ stabil polinom, hogy minden $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ esetén $T(f) = p \cdot \nu(f)$,

   b) vagy $G_T(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = T\left(\prod_{i=1}^n (x_i + y_i)^{\kappa_i}\right)$ polinom stabil polinom.

2. *Egy $T : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ lineáris leképezés akkor és csak akkor visz stabil polinomot stabil polinomba, ha*

   a) vagy létezik $\nu : \mathbb{C}[\mathbf{x}] \to \mathbb{C}$ funkcionál és $p \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ stabil polinom, hogy minden $f \in \mathbb{C}[x]$ esetén $T(f) = p \cdot \nu(f)$

   b) vagy $G_T(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = T\left(e^{-\sum_{i=1}^n x_i y_i}\right)$ előáll mint olyan stabil polinomok limesze, amelyek egyenletesen konvergálnak a $\mathcal{H}^n$ kompakt részhalmazain.

2.1. Példák

A következőkben bemutatunk néhány eddig jól ismert többváltozós polinomot, melyekről megmutatjuk, hogy stabil polinomok is. Ezek közül az első példa az elemi szimmetrikus polinomok.

2.5. Állítás. *Az elemi szimmetrikus polinomok stabilak.*

Bizonyítás. Legyen $s_k(x_1, \ldots, x_n)$ a k-adik elemi szimmetrikus polinom n változóval. Továbbá tekintsük a

$$g(x_1, \ldots, x_n, t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i t)$$

polinomot. Mivel $(1 - x_i t)$ stabil, így g is stabil, viszont

$$g(x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k s_k(x_1, \ldots, x_n)t^k.$$

Ekkor

$$(-1)^k \partial_t^k g\big|_{t=0} = (-1)^{2k} s_k = s_k,$$

ami stabil, mert deriválás, specializálás és skálázás alkalmazásával kaptuk a g stabil polinomból, azaz s_k stabil minden $k \in [n]$-re. □

A második példára – mint látni fogjuk – tekinthetünk úgy, mint a lineáris algebrából már jól ismert Hermite-mátrixok karakterisztikus polinomjainak többváltozós változatára.

2.6. Lemma. *Legyenek $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pozitív szemidefinit mátrixok és $A_0 \in \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Hermite-mátrix. Ekkor a*

$$f(\mathbf{x}) = \det(A_0 + A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n)$$

polinom stabil.

Bizonyítás. Hurwitz tétele alapján feltehető, hogy mindegyik A_i pozitív definit minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Ezután tekintsük a $g(t) = f(\mathbf{a}+\mathbf{b}t)$ polinomot, ahol $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ és $b_i > 0$. A 2.1 lemma alapján elegendő megmutatni, hogy $g(t)$ stabil, azaz valós gyökű. Legyen $A = A_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i A_i$, és $B = \sum_{i=1}^{n} b_i A_i$. A feltételek alapján A

Hermite-mátrix, és B pozitív definit, így $\det(B) \neq 0$, és létezik $B^{-\frac{1}{2}}$. Ezt felhasználva a következőt kapjuk:

$$g(t) = \det(A + tB) = \det(B)\det(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}} + tI),$$

ahol $B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}$ egy Hermite-mátrix. Tehát $g(-t)$ egy Hermite-mátrix karakterisztikus polinomjának skalárszorosa, vagyis $g(-t)$ gyökei valós számok, azaz $g(t)$ valós gyökű polinom. □

2.7. Megjegyzés. [Többváltozós Laplace-polinom] Legyen $G = (V, E)$ egy egyszerű gráf $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ csúcsokkal. Rögzítsük G-nek egy $\vec{E}$ irányítását, majd minden $\vec{e} = (v_i, v_j) \in \vec{E}$ élre legyen $a_e \in \mathbb{R}^n$ az a vektor, amelynek minden koordinátája 0, kivéve $(a_e)_i = -1$, $(a_e)_j = 1$. Legyen továbbá $Z = \mathrm{Diag}(z_1, \ldots, z_n)$ változókból álló mátrix, és minden $e \in E$ élre legyen w_e egy változó.

$$f_G(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \det\left(\sum_{e\in E} w_e \cdot a_e a_e^T + Z\right).$$

Az f_G független a megválasztott irányítástól (mert $a_e a_e^T$ mátrix független az irányítástól), és stabil polinom a 2.6 lemma alapján, illetve a lineáris algebrából ismert Cauchy–Binet-tétel segítségével bizonyítható, hogy a következőképpen is kifejezhető:

$$f_G(\mathbf{w}, \mathbf{z}) = \sum_{F\in\mathcal{F}^r(G)} \prod_{e\in E(F)} w_e \prod_{v_i\in\mathrm{roots}(F)} z_i,$$

ahol $\mathcal{F}^r(G)$ a G gráf összes gyökereztetett feszítő erdejét, a $\mathrm{roots}(F)$ az F gyökereinek halmazát és $E(F)$ az F éleinek halmazát jelöli. Egy feszítő erdő a gráf minden csúcsát tartalmazó körmentes részgráf, melynek minden összefüggőségi komponenséből ki van jelölve egy-egy csúcs. Ha minden w_i helyére -1-et helyettesítenénk, és az összes z_i változót x-re diagonalizálnánk, akkor éppen az ismert Laplace-polinomját kapnánk G gráfnak, amiről tudjuk, hogy valós gyökű polinom.

Ha az f_G polinomból meghatároznánk azon monomokat, melyek tartalmazzák a z_1 változót, de más $2 \leq k \leq n$-re z_k-t nem tartalmaznak, akkor pontosan azon gyökeres erdőkhöz tartozó monomokat kapnánk meg, melyek gyökere pontosan a v_1 csúcs, azaz a v_1-ből gyökereztetett feszítőfákhoz tartozó monomok. A következő polinomot, amit f_G-ből származtatunk a G gráf feszítőfa-polinomjának nevezzük:

$$T_G(\mathbf{w}) = \partial_{z_1} f_G(\mathbf{w},\mathbf{z})|_{\mathbf{z}=0} = \sum_{F\in\mathcal{T}(G)} \prod_{e\in E(F)} w_e,$$

ami szintén stabil, és ahol $\mathcal{T}(G)$ jelöli a G feszítőfáinak halmazát.

A feszítőfa-polinom segítségével egy érdekes problémára tudunk adni egy egyszerű bizonyítást. Partícionáljuk egy n csúcsú $G = (V(G), E(G))$ gráf élhalmazát $A_1, \dots, A_k, X, Y \subseteq E(G)$ halmazokra, és legyenek adottak $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ természetes számok. Ekkor jelölje s_j azon feszítőfák számát, melyek pontosan a_i élt használnak A_i halmazból minden $1 \le i \le k$ esetén, és X-ből j darab élt tartalmaznak. Ez utóbbi ekvivalens azzal, hogy Y-ból pontosan $(n-1) - \sum_{i=1}^k a_i - j$ élt tartalmaznak.

2.8. Következmény. *Az előbb definiált s_j sorozat logkonkáv, sőt az s_j-k egy valós gyökű polinom együtthatói.*

Bizonyítás. Legyen $M = \sum_{i=1}^k a_i$. A bizonyítás két részből áll: először bizonyítjuk, hogy $p(x) = \sum_{j=0}^{n-M} s_i x^i$ stabil, majd a Newton-tételre hivatkozva kapjuk, hogy az s_j sorozat logkonkáv.

Tekintsük a G gráf feszítő fáinak generáló polinomját, a $T_G(\mathbf{w})$-t. Legyenek $q_1, \dots, q_k, x, y$ változók, és minden $1 \le i \le k$ és $e \in A_i$ esetén diagonalizáljuk a w_e változót q_i-re, minden $e \in X$ esetén w_e változót x-re, és minden $e \in Y$ esetén w_e változót y-ra. Legyen az így nyert stabil polinom $Q(q_1, \dots, q_k, x, y) \in \mathbb{R}[q_1, \dots, q_k, x, y]$.

Ekkor az s_j pontosan a $q_1^{a_1} \dots q_k^{a_k} x^j y^{n-M-j}$ monom együtthatója a Q polinomban. Viszont azt az elemi szimmetrikus polinomoknál is láttuk, $\frac{1}{a_1!}\partial_{q_1} Q\big|_{q_1=0}$ éppen a $q_1^{a_1}$ együtthatópolinomja Q-ban, ami stabil a deriválás, specializáció és skálázás miatt. Majd az így kapott stabil polinomban a $q_2^{a_2}$ együtthatópolinomja is stabil, és így tovább. Tehát kapjuk, hogy $P(x,y) = \sum_{i=1}^{n-M} s_i x^i y^{n-M-j}$ stabil polinom, így $p(x) = P(x,1)$ is stabil, amiben x^i együtthatója éppen s_i. $\square$

Harmadik példaként vizsgáljuk az Euler-polinomokat, melyekről ismeretes, hogy valós gyökű polinomok. Most ennek a többváltozós változatáról megmutatjuk, hogy stabil. Legyen S_n a szimmetrikus csoport n elemen. Ekkor egy $\sigma \in S_n$-re definiáljuk az $A(\sigma) = \{\sigma(i) \mid \sigma(i-1) > \sigma(i), i \in [n]\}$ és $D(\sigma) = \{\sigma(i) \mid \sigma(i) < \sigma(i+1), i \in [n]\}$ halmazokat, ahol σ_0, σ_{n+1} legyen definíció szerint ∞. Így ezek segítségével a következő mód definiálhatjuk a többváltozós Euler-polinomot:

$$A_n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i\in A(\sigma)}x_i\prod_{i\in D(\sigma)}y_i.$$

Az egyváltozós Euler-polinomot úgy kapjuk, hogy minden y_i helyére 1-et helyettesítünk, és mindegyik x_i változó helyére x-et helyettesítünk. Ekkor az így kapott polinomban az x^{k+1} együtthatója azt számlálja, hogy hány olyan permutáció van, amiben k darab csökkenés van.

2.9. Állítás. *A többváltozós Euler-polinomok stabilak.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $n=1$, akkor $A_1(x_1,y_1)=x_1y_1$, ami nyilván stabil. Tegyük fel, hogy $A_n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ stabil. Rögzítsük a $2,\ldots,(n+1)$ elemek egy sorrendjét (azaz egy $\sigma\in S_n$-et, amiben az indexeket eltoljuk 1-gyel), majd vizsgáljuk, hogy hogyan változnak az ehhez tartozó A és D halmazok, ha az 1-est beszúrjuk az $(i-1)$-edik és az i-edik szám közé ($1\le i\le n+1$). Ha $\sigma_{i-1}>\sigma_i$, azaz σ_i egy lejtő vége, akkor $A'=A\cup\{1\}$, és $D'=D\cup\{1\}\setminus\{\sigma_i\}$. Ha $\sigma_{i-1}<\sigma_i$, azaz σ_{i-1} egy emelkedő eleje, akkor $A'=A\cup\{1\}\setminus\{\sigma_{i-1}\}$, és $D'=D\cup$ $\cup\{1\}$. Ez azt jelenti, hogy ha $w_\sigma(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\prod_{i\in A(\sigma)}x_i\prod_{i\in D(\sigma)}y_i$, akkor a lehetséges beszúrások után keletkező S_{n+1}-beli permutációkhoz tartozó monomok összege éppen

$$x_1y_1\left(\sum_{i=2}^{n+1}\partial_{x_i}+\sum_{i=2}^{n+1}\partial_{y_i}\right)w_\sigma(x_2,\ldots,x_{n+1},y_2,\ldots,y_{n+1}),$$

azaz

$$A_{n+1}(\mathbf{x},\mathbf{y})=x_1y_1\left(\sum_{i=2}^{n+1}\partial_{x_i}+\sum_{i=2}^{n+1}\partial_{y_i}\right)A_n(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*),$$

ahol $\mathbf{x}^*=(x_2,\ldots,x_{n+1})$ és $\mathbf{y}^*=(y_2,\ldots,y_{n+1})$. Viszont a $T=\left(\sum_{i=2}^{n+1}\partial_{x_i}+\sum_{i=2}^{n+1}\partial_{y_i}\right)$ leképezés stabil polinomot stabil polinomba visz a 2.3 lemma alapján, ezért A_{n+1} is stabil polinom. □

A negyedik példában a 2.4 tétel egy alkalmazását szeretném bemutatni egy gráfelméleti problémára. Legyen $G=(V,E)$ véges egyszerű gráf a $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ csúcsokon, és legyen adott egy $\lambda:E\to\mathbb{R}^+$ élsúlyozás. Egy $M\subseteq E$ élhalmazt párosításnak nevezünk, ha M semelyik két élének nincs közös csúcsa, és jelölje $\mathcal{M}(G)$ a

G gráf párosításainak halmazát. Definiáljuk a következő többváltozós polinomot

$$P_{G,\lambda}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{M\in\mathcal{M}(G)}(-1)^{|M|}\prod_{(v_i,v_j)\in M}\lambda_{(v_i,v_j)}x_ix_j,$$

amit a G gráf λ élsúlyozott párosítási polinomjának nevezünk. Erről a polinomról Heilmann és Lieb megmutatták [7], hogy stabil, melyet alább mi is bizonyítunk a 2.4 tétel felhasználásával.

2.10. Tétel (Heilmann–Lieb)**.** *Az előbb definiált $P_{G,\lambda}(\mathbf{x})$ stabil polinom.*

Bizonyítás. Legyen d a gráf legnagyobb fokszáma, és legyen $P(\mathbf{x})=\prod_{(v_i,v_j)\in E}(1-\lambda_{(v_i,v_j)}x_ix_j)$. Mivel $1-\lambda_{(v_i,v_j)}x_ix_j$ stabil polinom, ezért a P is stabil, sőt x_i foka P-ben megegyezik a v_i fokszámával. Legyen $\kappa=(d,\dots,d)\in\mathbb{N}$ rögzítve, és legyen $T:\mathbb{C}_\kappa[\mathbf{x}]\to\mathbb{C}[x]$ az a leképezés, mely egy monomhoz 0-t rendel, ha valamelyik változója legalább másodfokon szerepel benne, különben identikusan hat. Ekkor $T(P(\mathbf{x}))=P_{G,\lambda}(\mathbf{x})$. Tehát elég megmutatnunk, hogy a T stabil polinomot stabil polinomba képez. A 2.4 tétel alapján elegendő ellenőrizni, hogy a G_T polinom stabil. Ekkor

$$\begin{aligned}G_T(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)&=T\left(\prod_{i=1}^n(x_i+y_i)^d\right)=T\left(\prod_{i=1}^n\sum_{j=1}^d\binom{d}{j}x_i^jy_i^{d-j}\right)=\\&=\sum_{S\subseteq[n]}\left(\prod_{i\in S}dx_iy_i^{d-1}\right)\left(\prod_{i\notin S}y_i^d\right)=\prod_{i=1}^n y_i^{d-1}\left(\sum_{S\subseteq[n]}\prod_{i\in S}(dx_i)\prod_{i\notin S}y_i\right)=\\&=\prod_{i=1}^n y_i^{d-1}\prod_{i=1}^n(dx_i+y_i),\end{aligned}$$

ami stabil polinom, mert stabil polinomok szorzata. Tehát a T leképezés a stabil tulajdonságot őrző leképezés, ezért $P_{G,\lambda}(\mathbf{x})$ stabil. $\square$

Tegyük fel, hogy $\lambda:E\to\mathbb{R}^+$ az azonosan 1 élsúlyozás, és legyen $M_G(x)=P_{G,\lambda}(x,\dots,x)\in\mathbb{R}[x]$ a diagonalizálással nyert polinom, a G polinom módosított párosítási polinomja. Ekkor

$$M_G(x)=\sum_{M\in\mathcal{M}(G)}(-1)^{|M|}x^{2k}=\sum_{k=0}(-1)^km_k(G)x^{2k}$$

stabil polinom, ahol $m_k(G)$ a k méretű párosítások számát jelöli.

2.11. Következmény. *Tetszőleges G gráf esetén az $m_k(G)$ sorozat logkonkáv, sőt egy valós gyökű polinom együtthatósorozata.*

Bizonyítás. Legyen $p(z) = \sum_{i=0} m_i(G)z^i$, és tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan $\xi \in \mathcal{H}$, hogy $p(\xi) = 0$. Ekkor létezik $\nu \in \mathcal{H}$, hogy $\nu^2 = -\xi$, ami ellentmondás, ugyanis $0 \neq M_G(\nu) = \sum_{k=0}(-1)^k m_k(G)\nu^{2k} = \sum_{k=0} m_k(G)\xi^k = p(\xi) = 0$. Tehát $p(z)$ valós gyökű, így a Newton-tétel alapján az együtthatósorozat logkonkáv. $\square$

3. Valós gyökű polinomok láncolódása és általánosításai

A következőkben az egyváltozós polinomok egymáshoz képesti viszonyát fogjuk kezdetben vizsgálni, majd ezen tulajdonságok közül megpróbálunk néhányat átültetni többváltozós stabil polinomokra. A felépítésben a [12] cikket követjük.

3.1. Definíció. *Legyenek $f, g \in \mathbb{R}[x]$ valós gyökű polinomok, és tegyük fel, hogy f gyökei $\nu_1 \leq \ldots \leq \nu_k$, és g gyökei $\theta_1 \leq \ldots \leq \theta_l$. Azt mondjuk, hogy az f és g gyökei egybeláncolódnak (néha röviden f és g egybeláncolódnak), ha f és g gyökei növekvő sorrendbe rendezhetők úgy, hogy f és g gyökei felváltva kövessék egymást, azaz vagy $\nu_1 \leq \theta_1 \leq \nu_2 \leq \theta_3 \leq \ldots$ vagy $\theta_1 \leq \nu_1 \leq \theta_2 \leq \nu_3 \leq \ldots$ teljesül.*

Ha f és g valós gyökű, n-edfokú polinomok, akkor van közös láncoló polinomjuk, ha létezik olyan h valós gyökű, n-edfokú polinom, mely egybeláncolja f gyökeit is és g gyökeit is, és h legkisebb gyöke kisebb f és g legkisebb gyökénél.

A következő lemma nagyon hasznos eszköz lesz a későbbiekben.

3.2. Lemma. *Legyenek $f, g \in \mathbb{R}[x]$ polinomok úgy, hogy g stabil, és fg-nek csak egyszeres gyökei vannak. Tegyük fel, hogy $\deg f \leq \deg g$, és legyenek $\theta_1 < \cdots < \theta_l$ a g gyökei, és legyen $\hat{g}_i = \frac{g}{x-\theta_i}$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. *f stabil, és f és g gyökei egybeláncolódnak,*
2. *Az $f(\theta_1), \ldots, f(\theta_l)$ sorozat tagjainak előjelei váltakoznak,*
3. *Az $f = ag + \sum_{i=1}^{l} b_i \hat{g}_i$ egyértelmű felbontásban minden b_i előjele azonos.*

Bizonyítás. (1)$\Rightarrow$(2) Mivel f és g gyökei egybeláncolódnak, ezért tetszőleges $1 \leq$ $\leq i \leq l-1$-re létezik f-nek pontosan 1 gyöke a $]\theta_i, \theta_{i+1}[$ intervallumban, így viszont az $f(\theta_i)$ sorozatban az előjeleknek váltakozniuk kell.

(2)$\Rightarrow$(1) Az f folytonossága miatt kapjuk, hogy minden $1 \leq i \leq l-1$ esetén páratlan sok gyöke van f-nek a $]\theta_i, \theta_{i+1}[$ intervallumban. Ha van olyan intervallum, melyben legalább 3 gyöke is van f-nek, akkor összesen legalább $l+1$ gyöke lenne f-nek, ami ellentmond a feltételnek. Tehát f-nek minden $]\theta_i, \theta_{i+1}[$ intervallumban pontosan egy gyöke van, és legfeljebb egy olyan ν gyöke van, ami nincs $[\theta_1, \theta_l]$-ben. Viszont $\nu \in \mathbb{R}$, mert f valós együtthatós.

(2)$\Leftrightarrow$(3) Először az f ilyen alakú felírása egyértelmű, ugyanis ha $f = ag + \sum_{i=1}^{l} b_i\hat{g}_i$, és $f = a'g + \sum_{i=1}^{l} b'_i\hat{g}_i$, akkor tetszőleges θ_j-re

$$0 = (a - a')g(\theta_j) + \sum_{i=1}^{l}(b_i - b'_i)\hat{g}_i(\theta_j) = (b_j - b'_j)\hat{g}_j(\theta_j) = b_j - b'_j,$$

hiszen $\hat{g}_j(\theta_j) \neq 0$. Másrészt létezik ez a felbontás, mert f foka legfeljebb g fokával egyenlő, sőt a felírásban szereplő együtthatók a következő módon adhatóak meg: $b_i = \frac{f(\theta_i)}{\hat{g}_i(\theta_i)}$.

Továbbá

$$\hat{g}_j(\theta_j)\hat{g}_{j+1}(\theta_{j+1}) = c^2\prod_{i\neq j}(\theta_j - \theta_i)\prod_{i\neq j+1}(\theta_{j+1} - \theta_i) =$$
$$= -c^2\left(\prod_{i\neq j,j+1}(\theta_j - \theta_i)(\theta_{j+1} - \theta_i)\right)(\theta_j - \theta_{j+1})^2 < 0$$

miatt a $\hat{g}_i(\theta_i)$ sorozat is váltakozó előjelű. Viszont ezeket egybevetve kapjuk, hogy az $f(\theta_i)$ sorozat váltakozó előjelűsége ekvivalens azzal, hogy a $b_i = \frac{f(\theta_i)}{\hat{g}_i(\theta_i)}$ sorozat azonos előjelű. $\square$

A következő két lemmában bizonyítani fogjuk, hogy véges sok valós stabil polinom által generált kúp akkor és csak akkor részhalmaza a valós stabil polinomok halmazának, ha van közös láncoló polinomjuk.

3.3. Következmény. *Legyenek $f, g \in \mathbb{R}[x]$ pozitív főegyütthatós, n-edfokú, stabil polinomok. Ekkor az f-nek és g-nek akkor és csak akkor van közös láncoló polinomja, ha bármely $\lambda \in [0,1]$ esetén $\lambda f + (1-\lambda)g$ stabil.*

Bizonyítás. Elegendő abban az esetben bizonyítanunk, amikor fg minden gyökének egyszeres a multiplicitása. Tegyük fel, hogy f-nek és g-nek van h közös láncoló polinomja, amiről feltehető, hogy pozitív főegyütthatós, n-edfokú, és aminek a legkisebb gyöke kisebb, mint f és g legkisebb gyöke. Legyen θ_n a h polinom legnagyobb gyöke, amire az eddigi feltevéseink alapján $0 < f(\theta_n), g(\theta_n)$ teljesül. Használva a 3.2 lemma

3-asbeli felírást kapjuk, hogy

$$f = ah + \sum_{i=1}^{n} b_i \hat{h}_i,$$
$$g = a'h + \sum_{i=1}^{n} b'_i \hat{h}_i,$$

ahol minden b_i és b'_i-nek ugyanaz az előjele, mert $b_n b'_n = \frac{f(\theta_n)g(\theta_n)}{\hat{h}_n^2(\theta_n)} > 0$. Viszont ekkor

$$\lambda f + \mu g = (\lambda a + \mu a')h + \sum_{i=1}^{n} (\lambda b_i + \mu b'_i)\hat{h}_i$$

felírás és a 3.2 lemma alapján $\lambda f + \mu g$ stabil.

A megfordításhoz legyenek fg gyökei rendre $\alpha_1 < \cdots < \alpha_{2n}$, és $\alpha_0 = \infty$. Válasszunk minden $0 \leq i \leq n-1$-re egy $\theta_i \in]\alpha_2 i, \alpha_{2i+1}[$ valós számot, és legyen $h \in \mathbb{R}[x]$ az a pozitív főegyütthatós, n-edfokú polinom, melynek gyökei éppen a θ_i-k. Mivel az fg váltakozó előjelű az $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ intervallumokon, és fg főegyütthatója pozitív, így kapjuk, hogy $0 < fg(\theta_i) = f(\theta_i)g(\theta_i)$, azaz f és g a θ_i pontokban azonos előjelűek, tehát $(\lambda f + \mu g)(\theta_i) \neq 0$. Tegyük fel, hogy $\alpha_{2i}, \alpha_{2i+1} \in]\theta_i, \theta_{i+1}[$ az f gyökei. A feltevés alapján van egy homotópia, ami összeköti ezt a két gyököt g két gyökével úgy, hogy közben nem érintheti az intervallum végpontjait, ami ellentmondásra vezet. Tehát tetszőleges $1 \leq i \leq n-1$-re $]\theta_i, \theta_{i+1}[$-ben pontosan 1 gyöke van f-nek és g-nek, azaz h közös láncoló polinom. □

Az előző lemma általánosításaként kapjuk a következő lemmát, ami meglepően hasznos eszköznek bizonyult valós gyökű polinomok előállításához. Például ezen lemma segítségével bizonyította Chudnovsky és Seymour, hogy a karommentes gráfok függetlenségi polinomja valós gyökű [4], illetve Marcus, Spielman és Srivastava a Kadison–Singer-sejtést [10].

3.4. Lemma. *Legyenek $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{R}[x]$ egyváltozós, n-edfokú, pozitív főegyütthatós polinomok. Ekkor $f_1, \ldots, f_k$-nak akkor és csak akkor van közös láncoló polinomja, ha tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ esetén $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$ stabil.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az f_i-k tetszőleges konvex kombinációja stabil, de nincs közös láncoló polinomjuk. Ez azt jelenti, hogy az összes polinom gyökét sorba téve lenne olyan k-adik legnagyobb gyök, ami kisebb mint egy másik polinom $k+1$-edik gyöke, azaz ennek a kettőnek nincs közös láncoló polinomja. Ellenben erre a két polinomra teljesül az, hogy tetszőleges konvex kombináció stabil, amiről viszont megmutattuk, hogy azt jelenti, hogy a két polinomnak van közös láncoló polinomja, így ez ellentmondásra vezet. Tehát van egyszerre közös láncoló polinom.

A megfordítás hasonlóan megy a $k=2$ esethez. Feltehető, hogy semelyik két polinomnak nincs közös gyöke, és tegyük fel, hogy h egy közös láncoló polinom, ami n-edfokú pozitív főegyütthatós, és legkisebb gyöke kisebb az összes f_i legkisebb gyökénél. Ekkor tetszőleges $f_j = a^j h + \sum_{i=1}^n b_i^j \hat{h}_i$, ahol minden $b_i^j > 0$. Ez viszont azt jelenti, hogy tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [0{,}1]$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ esetén

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j f_j = \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j a^j \right) h + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j b_i^j \right) \hat{h}_i$$

felírásban minden $\hat{h}_i$ együtthatója pozitív, azaz $\sum_{j=1}^k \lambda_j f_j$ stabil.

□

A következő két tételben arra keressük a választ, hogy két valós gyökű polinom által generált altér mikor lesz részhalmaza a valós gyökű polinomok halmazának, illetve ez hogy függ össze a komplex együtthatós stabil polinomokkal. Ezen vizsgálatok előtt jellemezzük az egybeláncolódó polinomokat a következő fogalom segítségével.

3.5. Definíció. *Az $f, g \in \mathbb{C}[x]$ esetén definiáljuk a Wronski-zárójelet a következőképpen:*

$$W[f,g] = f'g - fg' \in \mathbb{C}[x].$$

Az $f, g \in \mathbb{R}[x]$ stabil polinomokat jó állásúaknak nevezzük, ha $W[f,g](x) \leq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, vagy ha $f \equiv 0$ vagy $g \equiv 0$. Ha f és g jó állásúak, akkor jelölje ezt $f \ll g$.

3.6. Lemma. *Legyenek $f, g \in \mathbb{R}[x]$ stabil polinomok. Ekkor f és g gyökei akkor és csak akkor láncolódnak egybe, ha $f \ll g$ vagy $f \gg g$.*

Bizonyítás. Elegendő abban az esetben bizonyítanunk, amikor fg minden gyökének egyszeres a multiplicitása, illetve az is feltehető, hogy $\deg f \leq \deg g = l$. Legyenek g gyökei $\theta_1 < \dots < \theta_l$, és a 3.2 lemma alapján írjuk fel f-et $f = ag + \sum_{i=1}^l b_i \hat{g}_i$

alakban. Tegyük fel, hogy f és g gyökei egybeláncolódnak. Ekkor mindegyik b_i-nek azonos az előjele, így a

$$W[f,g] = f'g - fg' = \sum_{i=1}^{l} \frac{-b_i g^2}{(x-\theta_i)^2}$$

felírásban minden tag előjele azonos. Ez viszont pont azt jelenti, hogy $W[f,g](x)$ azonos előjelű minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Tegyük fel, hogy $f \ll g$, azaz $W[f,g](x) < 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor minden $i \in [d]$ esetén $W[f,g](\theta_i) = -f(\theta_i)\hat{g}_i(\theta_i) = -b_i\hat{g}^2(\theta_i) < 0$, azaz mindegyik b_i-nek azonos az előjele, azaz f és g gyökei egybeláncolódnak. Ha $f \gg g$, akkor hasonlóan kapjuk a kívánt állítást. $\square$

3.7. Tétel (Hermite–Kakeya–Obreschkoff)**.** *Legyenek $f, g \in \mathbb{R}[x]$ stabil polinomok. Ekkor $f \ll g$ vagy $f \gg g$ (azaz f és g egybeláncolódnak) akkor és csak akkor, ha $af + bg \in \mathfrak{S}_{\mathbb{R}}[x]$ stabil minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén.*

Bizonyítás. Elegendő a tételt abban az esetben bizonyítani, amikor fg minden gyökének egyszeres a multiplicitása. A változók cseréjével feltehető, hogy $\deg(f) \leq \leq \deg(g)$. Legyenek $\theta_1, \ldots, \theta_l$ a g gyökei.

Tegyük fel, hogy f és g gyökei egybeláncolódnak. Ekkor az $f = \alpha g + \sum_{i=1}^{l} b_i\hat{g}_i$ alakban minden b_i azonos előjelű, így

$$af + bg = (a\alpha + a)g + \sum_{i=1}^{l} ab_i\hat{g}_i.$$

Ekkor viszont a lemma alapján $af + bg$ és g gyökei ismételten egybeláncolódnak, és $af + bg$ stabil.

Tegyük fel, hogy $af + bg$ stabil minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén. Ha f és g egymás skalárszorosai, akkor az állítás nyilván igaz. Tehát tegyük fel azt is, hogy f és g nem egymás skalárszorosai. A cél az, hogy megmutassuk, hogy az összes b_i azonos előjelű, viszont ehhez először azt mutatjuk meg, hogy az $\Im\left(\frac{f}{g}\right)$ függvény előjele állandó az egész $\mathcal{H}$-n. Indirekt tegyük fel, hogy van $z_1 \in \mathcal{H}$ és $z_2 \in \mathcal{H}$, hogy $\Im\left(\frac{f}{g}\right)$-nek ezeken a helyeken eltérő előjele van. Az $\mathcal{H}$ összefüggősége miatt létezik olyan $z_0 \in \mathcal{H}$, hogy $\Im\left(\frac{f(z_0)}{g(z_0)}\right) = 0$, azaz $f(z_0)$ és $g(z_0)$ egy félegyenesre esnek. Másként ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy van $a \in \mathbb{R}$, hogy $f(z_0) - ag(z_0) = 0$. Mivel

$z_0 \in \mathcal{H}$, így ez csak úgy lehetséges, ha $f - ag \equiv 0$, ami ellentmondásra vezet. Tehát $\Im\left(\frac{f}{g}\right)$ azonos előjelű $\mathcal{H}$-n. Tegyük fel, hogy azonosan pozitív az előjel, és tekintsük a $z_n = \theta_j + i\frac{1}{n} \in \mathcal{H}$ sorozat mentén $\Im\left(\frac{f}{g}\right)$-t:

$$0 < \Im\left(\frac{f(z_n)}{g(z_n)}\right) = \Im\left(\sum_{i \neq j} \frac{b_i}{\theta_j - \theta_i + \frac{i}{n}}\right) + \Im(-b_j in) \to -b_j \cdot \infty,$$

azaz $b_j < 0$ tetszőleges j esetén. Tehát mindegyik b_i előjele azonos a felbontásban. Ha $\Im\left(\frac{f}{g}\right)$ azonosan negatív, akkor hasonlóan fejezhetjük be a bizonyítást. $\square$

A következő tétel karakterizálja az egyváltozós komplex együtthatós stabil polinomokat a valós együtthatós stabil polinomok segítségével.

3.8. Tétel (Hermite–Biehler)**.** *Legyenek $f, g \in \mathbb{R}[x]$. Az f és g stabil polinomok, és $f \ll g$ akkor és csak akkor, ha $g + if \in \mathbb{C}[x]$ stabil.*

Bizonyítás. Hasonlóan az eddigi bizonyításokhoz, itt is elegendő abban az esetben bizonyítani, amikor fg-nek minden gyöke egyszeres. Feltehető, hogy $\deg f \leq \deg g$, mert $g+if$ konjugálásával nem változik a stabilitás, és az éppen a $\tilde{g} = -f$ és $\tilde(f) = g$ helyettesítéssel nyerhető, és $W[\tilde{f}, \tilde{g}] = W[g, -f] = W[f, g]$ nem változik.

Tegyük fel, hogy $f \ll g$. Ekkor az előző bizonyítás alapján $\Im\left(\frac{f}{g}\right)(z) \leq 0$ minden $z \in \mathcal{H}$ esetén. Legyen $z \in \mathcal{H}$ rögzítve, ekkor

$$\begin{aligned} \Re\left(1 + \frac{if(z)}{g(z)}\right) &= 1 - \Im\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) \geq 1 \neq 0 \\ \Rightarrow g(z)\left(1 + \frac{if}{g}\right) &= g(z) + if(z) \neq 0. \end{aligned}$$

A megfordításhoz tegyük fel, hogy $g(x) + if(x) = c\prod_{i=1}^{d}(x - \theta_i)$, ahol minden $\Im(\theta_i) \leq 0$ a feltevés alapján. Legyen $z \in \mathcal{H}$ rögzítve. Mivel θ_i gyökök a valós egyenes alatt vannak, és z a valós egyenes felett, ezért z tükörképe – a $\bar{z}$ – közelebb van a θ_i-hez, mint z. Formálisan megfogalmazva ez azt jelenti, hogy $|z - \theta_i| \geq |\bar{z} - \theta_i|$ $\forall i \in [d]$

esetén. Ebből viszont a következők következnek.

$$\begin{aligned}
|g(z)+if(z)| \geq |g(\bar{z})+if(\bar{z})| = |\overline{g(\bar{z})+if(\bar{z})}| = |g(z)-if(z)| \\
\Leftrightarrow \left|1+i\frac{f(z)}{g(z)}\right| \geq \left|1-i\frac{f(z)}{g(z)}\right| \\
\Leftrightarrow \left(1-\Im\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)\right)^2 + \left(\Re\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)\right)^2 \geq \left(1+\Im\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)\right)^2 + \left(\Re\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)\right)^2 \\
\Leftrightarrow \Im\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) \leq 0
\end{aligned}$$

Tekintsük a $g + yf \in \mathbb{R}[x, y]$ polinomot. Ez a polinom stabil, mert ha $z_1 \in \mathcal{H}$, és $g(z_1) + z_2 f(z_1) = 0$, akkor az előbbi levezetés miatt $\Im(z_2) = \Im\left(\frac{f(z_1)}{g(z_1)}\right) \leq 0$. Deriválás és specializálás segítségével kapjuk, hogy f és g stabil polinomok. Ezek után hasonlóan fejezhetjük be a bizonyítást, mint az előző tételnél láthattuk. □

Ezek után felmerül a kérdés, hogy ezen fogalmakat át lehet-e „örökíteni" a stabil polinomokra, illetve ha igen, hogyan. A megoldás kulcsa az Hermite–Biehler tétel, amit definícióként emelünk át.

3.9. Definíció. *Legyen $f, g \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ polinomok. Ekkor az f és g jó állásúak, jelölve $f \ll g$, ha $g + if \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ stabil.*

Néhány egyszerűbb tulajdonságot látunk be az alábbi lemmában, majd ezen tételek és lemmák felhasználásával bizonyítjuk az Hermite–Kakeya–Obreschkoff-tétel többváltozós változatát.

3.10. Lemma. *Legyen $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. $f \ll g$,
2. $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$,$\mathbf{b} \in (\mathbb{R}^+)^n$ *esetén* $f(\mathbf{a}+\mathbf{b}t), g(\mathbf{a}+\mathbf{b}t) \in \mathbb{R}[t]$ *stabilak és* $f(\mathbf{a}+\mathbf{b}t) \ll$ $\ll g(\mathbf{a}+\mathbf{b}t)$,
3. $g + yf \in \mathbb{R}[\mathbf{x}, y]$ *stabil.*

Bizonyítás. (1)⇒(2) Legyen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in (\mathbb{R}^+)^n$ rögzítve, és legyen $\hat{f}(t) = f(\mathbf{a} +$ $+\mathbf{b}t) \in \mathbb{R}[t]$, és $\hat{g} = g(\mathbf{a}+\mathbf{b}t) \in \mathbb{R}[t]$. Tehát azt kell megmutatnunk, hogy $\hat{f} \ll \hat{g}$, és $\hat{f}, \hat{g}$ stabil polinomok. Definíció alapján $g + if$ stabil, amiből a 2.1 lemma alapján következik, hogy $\hat{g}+i\hat{f}$ is stabil, ami viszont Hermite–Biehler tétele szerint ekvivalens azzal, hogy $\hat{f} \ll \hat{g}$, és $\hat{f}, \hat{g}$ stabil polinomok.

(2)⇒(3) A 2.1 lemma alapján elegendő megmutatnunk, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in (\mathbb{R}^+)^n$ esetén $f(\mathbf{a}+\mathbf{b}t) + (a+bt)g(\mathbf{a}+\mathbf{b}t) \in \mathbb{R}[t]$ stabil. Legyen $\hat{f}(t) = f(\mathbf{a}+\mathbf{b}t) \in \mathbb{R}[t]$, és $\hat{g} = g(\mathbf{a}+\mathbf{b}t) \in \mathbb{R}[t]$. Ekkor a feltevés alapján $\hat{f} \ll \hat{g}$ és $\hat{f}, \hat{g}$ stabilak. Az Hermite–Kakeya–Obreschkoff-tétel alapján tetszőleges $\hat{f}$ és $\hat{g}$ tetszőleges lineáris kombinációja stabil, ami megegyezik $b\hat{f}$ és $\hat{g} + a\hat{f}$ lineáris kombinációival. Tehát $b\hat{f}$ és $\hat{g} + a\hat{f}$ gyökei egybeláncolódnak, és $W[b\hat{f}, \hat{g} + a\hat{f}] = \\ = bW[\hat{f}, \hat{g}] \leq 0$, azaz $b\hat{f} \ll \hat{g} + a\hat{f}$, ami az Hermite–Biehler tétel alapján $\hat{g} + a\hat{f} + ib\hat{g}$ stabil.

(3)⇒(1) Triviális, mert $i \in \mathcal{H}$-t helyettesítve y helyére stabil polinomot kapunk.

$\square$

3.11. Tétel (többváltozós Hermite–Kakeya–Obreschkoff)**.** *Legyenek $f, g \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$. Ekkor $f \ll g$ vagy $f \gg g$ akkor és csak akkor, ha $af + bg \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ stabil minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f \ll g$, és legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Ekkor az előző lemma alapján $g + yf \in \mathbb{C}[\mathbf{x}, y]$ stabil polinom. Skálázással és helyettesítéssel kapjuk, hogy $bg + (a+i)f \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ stabil polinom. Ez viszont ismét az előző lemmát használva azt jelenti, hogy $f \ll af + bg$. Ebből következik, hogy $af + bg + yf$ stabil, speciálisan $af + bg \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ stabil.

Tegyük fel, hogy $af + bg \in \mathbb{R}[x]$ stabil minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén. Legyen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, és $\mathbf{b} \in (\mathbb{R}^+)^n$, és legyen definiálva $\hat{f}(t) = f(\mathbf{a}+\mathbf{b}t) \in \mathbb{R}[t]$ és $\hat{g}(t) = g(\mathbf{a}+\mathbf{b}t) \in \\ \in \mathbb{R}[t]$. Mivel tetszőleges $a\hat{f} + b\hat{g}$ lineáris kombináció stabil, ezért az Hermite–Kakeya–Obreschkoff-tétel alapján vagy $\hat{f} \ll \hat{g}$, vagy $\hat{f} \gg \hat{g}$.

Ha f és g egymás skalárszorosa, akkor nyilván $f \ll g$ és $g \ll f$ is teljesül. Tehát feltehetjük, hogy f és g nem egymás skalárszorosai. Ekkor azt fogjuk belátni, hogy nem létezik $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in (\mathbb{R}^+)^n$, hogy $f(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 t) \ll g(\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 t)$ és $f(\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 t) \gg g(\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 t)$. Tegyük fel indirekt, hogy van ilyen. Mivel $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^+)^n$ összefüggő, ezért a folytonosság miatt létezik olyan $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{b}_0 \in (\mathbb{R}^+)^n$, hogy $f(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 t) \ll g(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 t)$ és $f(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 t) \gg g(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 t)$, azaz $W[f(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 t), g(\mathbf{a}_0 + \\ + \mathbf{b}_0 t)] \equiv 0$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ez viszont azt jelenti, hogy $\frac{f(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 t)}{g(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 t)}$ hányadosa konstans, mert

$$\partial_t \left(\frac{f(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 t)}{g(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 t)} \right) = \frac{W[f(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 t), g(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 t)]}{g^2(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0 t)} = 0.$$

Tehát létezik $c, d \in \mathbb{R}$, hogy $cf(\mathbf{a}_0+\mathbf{b}_0 t) = dg(\mathbf{a}_0+\mathbf{b}_0 t)$. Másrészt $h = cf - dg \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ stabil, úgy, hogy $h(\mathbf{a}_0 + i\mathbf{b}_0) = 0$. Mivel $(\mathbf{a}_0 + i\mathbf{b}_0) \in \mathcal{H}^n$, ezért $h \equiv 0$, tehát $cf = dg$, ami ellentmondás.

Tehát tegyük fel, hogy tetszőleges $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{b} \in (\mathbb{R}^+)^n$ esetén $f(\mathbf{a}+\mathbf{b}t) \ll g(\mathbf{a}+ + \mathbf{b}t)$, ami az előző lemma miatt azt jelenti, hogy $f \ll g$. Ha tetszőleges $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{b} \in (\mathbb{R}^+)^n$ esetén $f(\mathbf{a}+\mathbf{b}t) \gg g(\mathbf{a}+\mathbf{b}t)$, akkor hasonlóan kapnánk az előző lemma alapján, hogy $f \gg g$. $\square$

Vegyük észre, hogy a bizonyítás során azt is bizonyítottuk, hogy ha $f, g \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ nem egymás skalárszorosai, akkor $f \ll g$ akkor és csak akkor, ha tetszőleges $a, b \in \in \mathbb{R}$ esetén $af + bg \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ stabil polinom, és tetszőleges $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in (\mathbb{R}^+)^n$ esetén $W[f(\mathbf{a}+\mathbf{b}t), g(\mathbf{a}+\mathbf{b}t)] \leq 0$. Ha $W_j[f,g] = (\partial_j f) \cdot g - f \cdot (\partial_j g)$ jelölést használjuk, akkor a

$$W[f(\mathbf{a}+\mathbf{b}t), g(\mathbf{a}+\mathbf{b}t)] = \sum_{i=1}^{n} b_j W_j[f,g](\mathbf{a}+\mathbf{b}t)$$

azonosság alapján kapjuk a következő állítást.

3.12. Következmény. *Legyen $f, g \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ polinomok, és tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $af + bg \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ stabil polinomok. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

1. *tetszőleges $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in (\mathbb{R}^+)^n$ esetén $W[f(\mathbf{a}+\mathbf{b}t), g(\mathbf{a}+\mathbf{b}t)] \leq 0$ (azaz $f \ll g$),*

2. *tetszőleges $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ esetén $W_j[f,g](\mathbf{a}) \leq 0$.*

Bizonyítás. Ha f és g egymás skalárszorosai, akkor nyilván ekvivalens a két állítás. Tehát tegyük fel, hogy f, g nem egymás skalárszorosai.

Tegyük fel, hogy tetszőleges $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in (\mathbb{R}^+)^n$ esetén $W[f(\mathbf{a}+\mathbf{b}t), g(\mathbf{a}+\mathbf{b}t)] \leq \leq 0$. Ekkor rögzítsünk egy $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ elemet. Legyen $e_j \in \mathbb{R}^n$ az a vektor, melynek a j-edik koordinátája 1, és a többi 0. Ekkor ha $\mathbf{b}$ tart az e_j-hez $(\mathbb{R}^+)^n$-ben, akkor az előző képlet alapján

$$0 \geq W[f(\mathbf{a}+\mathbf{b}t), g(\mathbf{a}+\mathbf{b}t)]\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} b_j W_j[f,g](\mathbf{a}+\mathbf{b}t)\Big|_{t=0} \to W_j[f,g](\mathbf{a}).$$

A megfordításhoz legyen tetszőleges $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in (\mathbb{R}^+)^n$ és $t \in \mathbb{R}$ rögzítve. Ekkor

$\mathbf{a} + \mathbf{b}t \in \mathbb{R}^n$, így a következmény előtti összefüggés és a feltevés alapján

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n} b_j W_j[f, g](\mathbf{a} + \mathbf{b}t) = W[f(\mathbf{a} + \mathbf{b}t), g(\mathbf{a} + \mathbf{b}t)].$$

$\square$

4. Kevert determináns

Az alábbi fejezetben [1] cikk alapján a Johnson-sejtést igazoljuk. Egy $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_k) \in \in \mathbb{R}^{n\times kn}$ mátrixra definiáljuk a kevert determinánst az alábbi módon:

$$\operatorname{Det}(\mathcal{A}) = \sum_{(S_1,\ldots,S_k)\in\Pi_n} \prod_{i=1}^{k} \det(A_i[S_i]),$$

ahol Π_n jelöli az $[n] = \{1, \ldots, n\}$ halmaz rendezett partícióinak halmazát, és $A_i[S_i]$ jelöli az S_i által indexelt sorok és oszlopok által meghatározott részmátrixot A_i-ben. Egy rendezett partícióban megengedjük, hogy a tagok akár üres halmazok is legyenek. Továbbá jelölje $A_i(S_i)$ az $A_i[[n]\backslash S_i]$-t, illetve ha $S_i = \{j\}$ egyelemű halmaz, akkor $A_i(\{j\}) = A(j)$.

Egy p valós gyökű polinom inerciája a $\iota(p) = (\iota_(p), \iota_0(p), \iota_+(p))$ hármas, ahol $\iota_-(p)$ a p negatív gyökeinek számát, $\iota_+(p)$ a p pozitív gyökeinek számát jelöli, és $\iota_0(p)$ a 0 multiplicitását a p-ben.

Az alábbi sejtést az 1980-as években fogalmazta meg Johnson, melyet 2008-ban Borcea és Brändén bizonyítottak stabil polinomok segítségével.

4.1. Tétel (Johnson-sejtés). *Legyenek $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, és tegyük fel, hogy A pozitív definit, és B hermitikus, ekkor*

1. *Det$(xA, -B)$ valós gyökű polinom,*
2. *minden $j \in [n]$-re Det$(xA, -B)$ és Det$(xA(j), -B(j))$ gyökei egybeláncolódnak,*
3. *a B karakterisztikus polinomjának, azaz Det$(xI, -B)$-nek, és Det$(xA, -B)$-nak az inerciája megegyezik.*

A bizonyításhoz Borcea és Brändén a következő többváltozós esetet látták be.

4.2. Tétel. *Legyenek $l, m, n \geq 1$ egészek, és minden $h \in [l]$-re és $i \in [m]$-re legyen $B_h, A_{h_i} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ úgy, hogy A_{h_i} pozitív szemidefinit, és B_h hermitikus. Legyen*

$$L_h = \sum_{i=1}^{m} x_i A_{h_i} + B_h,$$

és $\mathcal{L} = (L_1, \ldots, L_l)$. Ekkor

1. *$Det(\mathcal{L}) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$ stabil polinom,*

2. *minden $j \in [n]$-re $Det(\mathcal{L}) + yDet(\mathcal{L}(j)) \in \mathfrak{S}_{\mathbb{R}}[x_1, \ldots, x_m, y]$ stabil, ahol $\mathcal{L}(j) = = (L_1(j), \ldots, L_l(j))$.*

Bizonyítás. Legyen $Y = \mathrm{Diag}(y_1, \ldots, y_n)$ változókat tartalmazó diagonális mátrix. Ekkor tetszőleges $h \in [l]$ esetén a

$$\det(Y + L_h) = \sum_{S \subseteq [n]} \mathbf{y}^S \det(L_h(S)) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$$

polinom a 2.6 lemma alapján stabil. Invertálva az $y_1, \ldots, y_n$ változókra kapjuk, hogy

$$\det(I - YL_h) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} \mathbf{y}^S \det(L_h[S]) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$$

is stabil. Így $\prod_{i=1}^m \det(I - YL_h)$ valós stabil polinom, melyben $y_1 \cdot \ldots \cdot y_n$ együtthatója éppen $\mathrm{Det}(\mathcal{L})$, azaz

$$\mathrm{Det}(\mathcal{L}) = \partial_{y_1} \ldots \partial_{y_n} \prod_{i=1}^m \det(I - YL_h)|_{\mathbf{y}=0},$$

ami a specializáció és deriválás miatt stabil.

A második rész bizonyításához legyen j rögzítve, és legyen $L_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olyan mátrix, melynek minden eleme nulla, kivéve $(L_0)_{j,j}$, ami legyen y mint változó. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(L_0, L_1, \ldots, L_m) &= \sum_{(S_0, \ldots, S_k) \in \Pi_n} \prod_{i=0}^k \det(A_i[S_i]) = \\ = \sum_{\substack{(S_0, \ldots, S_k) \in \Pi_n \\ S_0 = \emptyset}} \prod_{i=0}^k \det(A_i[S_i]) &+ \sum_{\substack{(S_0, \ldots, S_k) \in \Pi_n \\ S_0 = \{j\}}} \prod_{i=0}^k \det(A_i[S_i]) + \\ &+ \sum_{\substack{(S_0, \ldots, S_k) \in \Pi_n \\ S_0 \neq \emptyset, \{j\}}} \prod_{i=0}^k \det(A_i[S_i]) = \\ &= \mathrm{Det}(\mathcal{L}) + y\mathrm{Det}(\mathcal{L}(j)),\end{aligned}$$

ami az első rész értelmében stabil. □

4.1 Tétel bizonyítása: Az első részt közvetlenül kapjuk az előbb bizonyított tétel első állításából. A második rész az előző tétel második része, és a 3.10 lemma alapján $\mathrm{Det}(xA(j), -B(j)) \ll \mathrm{Det}(xA, -B)$. A harmadik rész bizonyításához jelölje $\tau = (\tau_-, \tau_0, \tau_+)$ a $\det(Ix - B)$ inerciáját, és $\nu = (\nu_-, \nu_0, \nu_+)$ az $f(x) = \mathrm{Det}(xA, -B)$ polinom inerciáját.

Először azt bizonyítjuk, hogy $\tau_0 = \nu_0$. Definíció alapján tudjuk, hogy τ_0 egyenlő a B mátrix képterének kodimenziójával, azaz

$$k = \tau_0 = k = \min\{|S| \mid S \subseteq [n], \det(B(S)) \neq 0\}.$$

Az egyik optimumhelyet jelölje $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$. Mivel tetszőleges $S \subseteq [n]$-re $\deg(\det(xA[S])) = 0$ vagy $|S|$, így

$$f(x) = \mathrm{Det}(xA, -B) = \sum_{S \subseteq [n]} \det(xA[S]) \det(-B(S)) = \sum_{S \subseteq [n], |S| \geq k} \det(xA[S]) \det(-B(S))$$

biztosan osztható x^k-nal, azaz $\tau_0 \leq \nu_0$.

Másrészt $f(0) = \det(-B)$, ezért ha $k = 0$, akkor ν_0 is 0. Tegyük fel, hogy $k > 0$, és legyen minden $0 \leq i \leq k$-ra $f_i(x) = \mathrm{Det}(xA(t_1, \ldots, t_i), -B(\{t_1, \ldots, t_i\}))$. Speciálisan $f_0(x) = f(x)$. A második rész alapján minden $0 \leq i < k$-ra f_i és f_{i+1} gyökei egybeláncolódnak, és $\deg(f_i) > \deg(f_{i+1})$, ezért

$$\nu_0 = \iota_0(f_0) \geq \iota_0(f_1) + 1 \geq \ldots \geq \iota_0(f_k) + k = 0 + k = k,$$

ahol $\iota_0(f_k) = 0$, mert $f_k(0) = \det(-B(T)) \neq 0$. Tehát $\tau_0 = \nu_0$.

Továbbá mivel A pozitív definit, ezért $\deg(f) = n = \deg(\det(Ix - B))$. Tehát elég belátnunk, hogy $\tau_+ = \nu_+$. Tegyük fel, hogy $\tau_+ \neq \nu_+$. Tekintsük az I és A mátrixok konvex kombinációit: minden $t \in [0{,}1]$-re $A_t = (1-t)I + tA$. Mivel I és A is pozitív definit, ezért ezek pozitív együtthatós lineáris kombinációja is, így az eddigiek alapján minden $t \in [0{,}1]$ esetén $f_t(x) = \det(xA_t, -B)$ valós gyökű, n-edfokú polinom, és $\iota_0(f_t) = k$. Viszont $\tau_+ \neq \nu_+$, és a folytonosság miatt kell lennie egy olyan $\lambda \in [0{,}1]$-nek, hogy $\iota_0(f_\lambda) \neq \tau_0$, ami ellentmondás. $\square$

Borcea és Brändén ugyanezen cikkükben az előző tétel segítségével pozitív szemidefinit mátrixok minorjaira adtak becsléseket, melyek közül néhányat alább ismertetünk. Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix, és definiáljuk a j-edik szimmetrikus Fisher-szorzatot a következőképpen:

$$\sigma_j(A) = \sum_{S\subseteq[n],|S|=j} \det(A[S])\det(A(S)),$$

és legyen $\hat{\sigma}_j(A) = \binom{n}{j}^{-1}\sigma_j(A)$ a j-edik átlagolt Fisher-szorzat.

4.3. Következmény. *Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ pozitív szemidefinit mátrix. Ekkor*

1. $\hat{\sigma}_j(A)^2 \geq \hat{\sigma}_{j-1}(A)\hat{\sigma}_{j+1}(A)$ *minden* $1 \leq j \leq n-1$,
2. $\hat{\sigma}_0(A) \leq \hat{\sigma}_1(A) \leq \ldots \hat{\sigma}_{[n/2]}(A)$.
3. *Sőt, ha* $\det(A) = d > 0$, *akkor*

$$\frac{\hat{\sigma}_1(A)}{d} \geq \left(\frac{\hat{\sigma}_2(A)}{d}\right)^{1/2} \geq \ldots \geq \left(\frac{\hat{\sigma}_n(A)}{d}\right)^{1/n} = 1.$$

Bizonyítás. Hurwitz tétele alapján elegendő pozitív definit A mátrixokra bizonyítani a következményeket. Tekintsük az $f(x) = \mathrm{Det}(xA, -A)$ polinomot. Ekkor definíció alapján

$$f(x) = \mathrm{Det}(xA, -A) = \sum_{S\subseteq[n]} \det(xA[S])\det(-A(S)) =$$

$$= \sum_{S\subseteq[n]} (-1)^{n-|S|}x^{|S|}\det(A[S])\det(A(S)) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\sigma_j(A)x^j.$$

Így az $f(x)$ polinomra alkalmazva az 1.2 tételt kapjuk az 1 állítást.

Mivel $\sigma_j(A)$ sorozat minden tagja pozitív, így $\hat{\sigma}_j(A)$ sorozat unimodális, azaz egy pontig monoton nő, azután monoton csökken. Másrészt $\sigma_j(A) = \sigma_{n-j}(A)$, azaz $\hat{\sigma}_j(A) = \hat{\sigma}_{n-j}(A)$. Így az unimodalitás miatt a maximális elemnek a sorozat közepén kell elhelyezkednie, így kapjuk a a 2 állításunkat.

A 3 részt az $f(x)$ gyökeire felírt szimmetrikus közepek közti egyenlőtlenségből kapjuk. □

5. Stabil polinomok kapacitása

Gurvits vette észre, hogy nemnegatív mátrixokhoz definiálható stabil polinom, melyből kiszámítható és becslés készíthető az adott mátrix permanensére. Ennek speciális eseteként majd megkapjuk a Van der Waerden-sejtést, és Schrijver azon tételére egy új bizonyítást, mely a páros gráfok teljes párosításainak számára ad alsó becslést. Ehhez előbb ebben a fejezetben bizonyítjuk a szükséges technikai lemmákat és a főtételt, melyet a következő alfejezetben az előbb említett sejtésekre adunk bizonyításokat. Ez a rész a [8] és a [12] cikkek idevonatkozó részei alapján készült, melyek a [6] cikket is feldolgozzák.

Az alábbi sorozat rendkívül fontos lesz a továbbiakban, ezért ezt előre definiálom.

$$G(d) = \begin{cases} \left(\frac{d-1}{d}\right)^{d-1}, & \text{ha } d > 0, \\ 1, & \text{ha } d = 0. \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy $G(0) = G(1) = 1$, és $G(d)$ szigorúan monoton csökken, ha $d \geq 1$.

Továbbá egy $f \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ nemnegatív együtthatós m változós polinomra definiáljuk a kapacitást a következőképpen:

$$\operatorname{Cap}(f) = \inf_{\mathbf{c}>0} \frac{f(\mathbf{c})}{c_1 \cdot \ldots \cdot c_m}.$$

A főtétel, amit be szeretnénk látni, egy speciális nemnegatív együtthatós stabil polinomban az egyik együtthatót fogja összehasonlítani az előbb definiált Cap paraméterrel. Ehhez először a következő kulcsfontosságú egyváltozós lemmát fogjuk belátni.

5.1. Lemma. *Legyen $f \in \mathbb{R}_+[x]$ egyváltozós, stabil polinom, és $d = \deg(f)$. Ekkor*

$$f'(0) \geq Cap(f)G(d), \tag{5.0.1}$$

és ha $Cap(f) > 0$, akkor egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $d \leq 1$ vagy $f = c(x+\xi)^d$ valamely $\xi > 0$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. Mivel $f'(0)$ az f egyik együtthatója, így kapjuk, hogy $f'(0) \geq 0$. Azaz ha $\operatorname{Cap}(f) = 0$, az állítást igazoltuk. Tegyük fel, hogy $\operatorname{Cap}(f) \neq 0$.

– Ha $d = 0$, akkor $f'(0) = 0 = \operatorname{Cap}(f) = \operatorname{Cap}(f)G(0)$.

– Ha $d = 1$, akkor feltehető, hogy $f(x) = ax + b$, és így $f'(0) = a = \inf_{c>0} \frac{ac+b}{c} = $ $= \mathrm{Cap}(f) = \mathrm{Cap}(f)G(1)$.

– Ha $d > 1$, két aleset van.

- Ha $f(0) = 0$, akkor

$$f'(0) = \lim_{c \to 0} \frac{f(c) - 0}{c - 0} \geq \mathrm{Cap}(f) > \mathrm{Cap}(f)G(d),$$

ahol az utolsó becslésben azt használtuk, hogy $1 = G(1) > G(d)$, ha $d > 1$.

- Ha $f(0) \neq 0$. Ekkor feltehető $f(0) = 1$ egy megfelelő konstanssal való szorzás után, ugyanis $(cf)'(0) = cf'(0)$, és $\mathrm{Cap}(cf) = c\mathrm{Cap}(f)$. Ezek után írjuk fel f-et a következő alakban:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{d} (1 + a_i x),$$

ahol $\sum_{i=1}^{d} a_i = f'(0)$. Ha $c > 0$ rögzített valós szám, akkor

$$\mathrm{Cap}(f)c \leq f(c) = \left(\sqrt[d]{\prod_{i=1}^{d} (1 + a_i c)} \right)^d \leq \tag{5.0.2}$$
$$\leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{d} (1 + a_i c)}{d} \right)^d = \left(1 + f'(0)\frac{c}{d}\right)^d,$$

amiben a második becslésnél a számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget használtuk. Legyen $h(c) = \left(1 + f'(0)\frac{c}{d}\right)^d$, és erre is használjuk a számtani-mértani közepet a következőképpen:

$$h(c) = d^d \left(\frac{(d-1)\frac{1}{d-1} + f'(0)\frac{c}{d}}{d} \right)^d \geq d^d \left(\frac{f'(0)c}{d(d-1)^{d-1}} \right) = \frac{f'(0)c}{G(d)},$$

ahol egyenlőség áll fenn $c = c_* = \frac{d}{f'(0)(d-1)}$ esetén. Így kapjuk, hogy

$$\mathrm{Cap}(f) \leq \mathrm{Cap}(h) = \frac{h(c_*)}{c_*} = \frac{f'(0)}{G(d)}.$$

Ebben az alesetben $\mathrm{Cap}(f)G(d) = f'(0)$ csak úgy lehetséges, ha az (5.0.2) egyenlőtlenségben használt számtani-mértani egyenlőségben minden tag egyenlő az $c = c_*$ helyettesítéssel, azaz bármely $i, j \in [d]$-re $a_i = a_j$. Ez viszont azt jelenti, hogy $f(x) = (1 + \xi x)^d$ alakba írható.

$\square$

A következőben lemmában az m változós, m-edfokú, nemnegatív együtthatós polinomokra „emeljük" tovább az előbb belátott lemmát.

5.2. Lemma. *Legyen $f \in \mathbb{R}_+[x_1, \ldots, x_m]$ stabil, homogén, m-edfokú polinom. Legyen $g = \partial_m f|_{x_m=0}$. Ekkor*

$$Cap(g) \geq G(\deg_m f)Cap(f).$$

Bizonyítás. A bizonyítás ötlete az, hogy az első $m-1$ változót rögzítve visszavezetjük az előző lemmára az állítást. Ha $\deg_m(f) = 0$, akkor az állítás triviálisan igaz. Tegyük fel, hogy $d = \deg_m(f) \geq 1$. Legyen $\mathbf{c} \in (\mathbb{R}^+)^{m-1}$ rögzített, és legyen $p(x) = f(\mathbf{c}, x)$. Ekkor p valós stabil polinom a 2.2 lemma 4 része miatt, illetve nem azonosan 0 polinom, hiszen f nemnegatív együtthatós polinom. Így alkalmazhatjuk az előző lemmát, és kapjuk, hogy

$$g(c) = p'(0) \geq G(d)\mathrm{Cap}(p) \geq G(d)\mathrm{Cap}(f).$$

Tehát az előző becslés igaz minden $c \in (\mathbb{R}^+)^n$ esetén. Viszont f homogenitása miatt g is homogén, sőt $\deg(g) = m - 1$. Így kapjuk $c \in (\mathbb{R}^+)^{m-1}$ esetén

$$\frac{g(c)}{c_1 \cdot \ldots \cdot c_{m-1}} = g(bc_1, \ldots, bc_{m-1}) \geq G(d)\mathrm{Cap}(f),$$

ahol $b = (\prod_{i=1}^{m-1} c_i)^{-1/(m-1)} > 0$. Tehát azt kaptuk, hogy $\mathrm{Cap}(g) \geq G(d)\mathrm{Cap}(f)$. $\square$

Vegyük észre, hogy az előző lemmában kapott g polinom nemnegatív együtthatós, $m - 1$-edfokú, $m - 1$ változós, így erre induktívan ismét használhatjuk a lemmát, egészen addig, míg egy konstans polinomot nem kapunk.

5.3. Tétel. *Legyen $f \in \mathbb{R}_+[x_1, \ldots, x_m]$ stabil, homogén, m-edfokú polinom, és legyen $d_i = \deg_i(f)$. Jelölje továbbá $\partial^{\mathbf{1}} = \partial_1 \ldots \partial_m$-et. Ekkor*

$$\partial^{\mathbf{1}} f(\mathbf{0}) \geq Cap(f) \prod_{i=2}^{m} G(\min(d_i, i)).$$

Bizonyítás. Legyen $g_m = f$, és legyen továbbá $g_{i-1} = \partial_i g_i|_{x_i=0}$ minden $1 \leq i \leq m$ esetén. Ekkor 2.2 lemma alapján mindegyik g_i valós stabil polinom, sőt nemnegatív együtthatós, hiszen f is az volt, tehát kapjuk az előző lemma alapján, hogy $\mathrm{Cap}(g_{i-1}) \geq G(\deg_i(g_i))\mathrm{Cap}(g_i)$. Nyilván $\deg_i(g_i) \leq \deg_i(f)$, viszont azt is tudjuk, hogy g_i vagy azonosan 0 polinom, vagy pontosan i-edfokú homogén polinom, ezért $\deg_i(g_i) \leq i$. Használva, hogy a $G(d)$ sorozat monoton csökken, kapjuk, hogy $G(\deg_i(g_i)) \geq G(\min(i, d_i))$, azaz

$$g_0 = \partial^{\mathbf{1}} f(\mathbf{0}) = \mathrm{Cap}(g_0) \geq \mathrm{Cap}(g_1) G(\min(d_1{,}1)) \geq \ldots \geq \mathrm{Cap}(f) \prod_{i=2}^{m} G(\min(d_i, i)).$$

□

Ezen tétel speciális eseteként kapunk egy általános alsó korlátot az ilyen jellegű polinomok $\partial^{\mathbf{1}} f(\mathbf{0})$ értékére, ha kihasználjuk azt, hogy $\min(i, d_i) \leq i$ és $G(d)$ monoton csökken.

5.4. Következmény. *Legyen $f \in \mathbb{R}_+[x_1, \ldots, x_m]$ stabil, homogén, m-edfokú polinom. Ekkor*

$$\partial^{\mathbf{1}} f(\mathbf{0}) \geq \frac{m!}{m^m} Cap(f).$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha léteznek $a_i \in \mathbb{R}_+$ számok minden $i \in [m]$ esetén úgy, hogy

$$f(\mathbf{x}) = (a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m)^m.$$

Bizonyítás. Mivel $\min(d_i, i) \leq i$, és $G(d)$ monoton csökken, kapjuk, hogy

$$\prod_{i=2}^{m} G(\min(d_i, i)) \geq \prod_{i=2}^{m} G(i) = \prod_{i=2}^{m} \left(\frac{i-1}{i}\right)^{i-1} = \frac{m!}{m^m}.$$

Az egyenlőséget a változók száma szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha egyváltozós a polinom, akkor az 5.1 lemma szerint kész vagyunk. Tegyük fel, hogy $m > 1$. Ekkor $d_m = m$, és teljes indukció miatt $g = \partial f|_{x_m=0} = (a'_1 x_1 + \cdots + a'_{m-1} x_{m-1})^{m-1}$ valamely $a'_i \in \mathbb{R}_+$ számokra, ahol $1 \leq i \leq m-1$. Másrészt az 5.1 lemma alapján, ha $C \in \mathbb{R}^+$ jelöli az x_m^m együtthatóját f-ben, akkor létezik $h : \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $f = C(h + x_m)^m$ alakba írható. Ezek alapján

$$\begin{aligned}\partial_m f|_{x_m=0} &= mCh^{m-1} = (a'_1 x_1 + \dots + a'_{m-1}x_{m-1})^{m-1}\\ &\Rightarrow h = \frac{a'_1}{\sqrt[m-1]{mC}}x_1 + \dots + \frac{a'_{m-1}}{\sqrt[m-1]{mC}}x_{m-1}\\ \Rightarrow f = &\left(\frac{a'_1\sqrt[m]{C}}{\sqrt[m-1]{mC}}x_1 + \dots + \frac{a'_{m-1}\sqrt[m]{C}}{\sqrt[m-1]{mC}}x_{m-1} + \sqrt[m]{C}x_m\right)^m.\end{aligned}$$

□

A következő lemma a kapacitás meghatározásához ad segítséget.

5.5. Lemma. *Legyen $f \in \mathbb{R}_+[x_1, \dots, x_m]$ homogén, m-edfokú polinom. Tegyük fel, hogy létezik $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^+$ és $\delta \in \mathbb{R}$, hogy minden $i \in [m]$ esetén*

$$\partial_i f(b_1, \dots, b_m) = \frac{\delta}{b_i}.$$

Ekkor $Cap(f) = \frac{\delta}{\prod_{i\in[m]} b_i}$

Bizonyítás. Legyen $C = \prod_{i\in[m]} b_i$, és $b'_i = \frac{b_i}{\sqrt[m]{C}}$. Mivel $\partial_i f$ egy $(m-1)$-edfokú, homogén polinom, ezért kapjuk, hogy

$$\partial_i f(b'_1, \dots, b'_m) = \frac{1}{(\sqrt[m]{C})^{m-1}}\partial_i f(b_1, \dots, b_m) = \frac{\delta}{(\sqrt[m]{C})^{m-1} \cdot b_i} = \frac{\delta C^{-1}}{b'_i},$$

azaz feltehető, hogy $C = 1$.

Mivel $m \cdot f = \sum_{i=1}^m x_i \partial_i f$, így kapjuk, hogy $f(b_1, \dots, b_m) = \frac{m\delta}{m} = \delta$. Tegyük fel, hogy $f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m} a(\alpha)x^\alpha$, továbbá legyen $\mathbf{c} \in (\mathbb{R}^+)^n$ rögzítve, ekkor

$$f(c) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m} a(\alpha)c^\alpha = \delta \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m} \frac{a(\alpha)b^\alpha}{\delta}\frac{c^\alpha}{b^\alpha} \geq$$

$$\geq \delta \prod_{\alpha\in\mathbb{N}^m}\left(\frac{c^\alpha}{b^\alpha}\right)^{\frac{a(\alpha)b^\alpha}{\delta}} = \delta\prod_{i=1}^m\left(\frac{c_i}{b_i}\right)^{\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^m}\alpha_i\frac{a(\alpha)b^\alpha}{\delta}} = \delta\prod_{i=1}^m \frac{c_i}{b_i} = \delta\prod_{i=1}^m c_i.$$

Tehát $\delta \geq \mathrm{Cap}(f) \geq \delta$, azaz $\mathrm{Cap}(f) = \delta$. □

5.1. A Van der Waerden-sejtés

Ebben az alfejezetben az 5.3 tételt fogjuk alkalmazni nemnegatív elemű mátrixok permanensére. Bizonyítani fogjuk a Van der Waerden-sejtést, ami azt állítja, hogy egy $n \times n$-es duplán sztochasztikus mátrix permanense legalább akkora, mint annak a mátrixnak, aminek minden eleme egyenlő, azaz $\frac{n!}{n^n}$. A sejtést megelőzte Erdős és Rényi sejtése, melyet 1979-ben Bang, Friedland és Voorhoeve bizonyítottak, miszerint egy $n \times n$-es duplán sztochasztikus mátrix permanense legalább e^{-n}. Végül az 1980-as években Falikman és Egorychev bizonyították a Van der Waerden-sejtést.

A továbbiakban folytatjuk Gurvits megközelítését a [12] cikk nyomán.

Minden $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra definiáljuk a következő n változós polinomot:

$$p_A(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j,$$

ahol $\mathbf{a}_i$-k az A mátrix sorai, illetve $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ változókból álló vektor. Tehát p_A homogén n-edfokú polinom. Sőt

$$\mathrm{per} A = \partial_1 \partial_2 \ldots \partial_n p_A|_{\mathbf{x}=0}.$$

5.6. Következmény (Gurvits-korlát)**.** *Legyen $A \in (\mathbb{R}_+)^{n \times n}$. Jelölje λ_i az A i-edik oszlopában a nem 0 elemek számát. Ekkor*

$$perA \geq Cap(p_A) \prod_{i=1}^{n} G(\min(i, \lambda_i(p_A))).$$

Bizonyítás. Tekintsük a p_A polinomot. Vegyük észre, hogy $\lambda_i = \deg_i(p_A)$, így ha p_A polinomról be tudnánk bizonyítani, hogy stabil, akkor az 5.3 tétel értelmében kész lennénk.

Legyen $\mathbf{z} \in \mathcal{H}^n$, ekkor tetszőleges $1 \leq i \leq n$ esetén $\Im(a_{i,j} z_i) > 0$, azaz $\Im(\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{z} \rangle) >$ > 0, tehát $\prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{z} \rangle \neq 0$. Tehát p_A stabil, nemnegatív együtthatós, homogén polinom n változóban, és foka n. □

A továbbiakban jelölje $\mathbf{1}$ a csupa 1-esekből álló vektort. Egy $A \in (\mathbb{R}_+)^{n \times n}$ mátrixot duplán sztochasztikusnak nevezünk, ha $A\mathbf{1} = A^T\mathbf{1} = \mathbf{1}$, azaz A minden sor és oszlopösszege 1.

5.7. Lemma. *Legyen $A \in (\mathbb{R}_+)^{n\times n}$ duplán sztochasztikus mátrix. Ekkor*

$$Cap(p_A) = 1.$$

Bizonyítás. Az 5.5 lemmát fogjuk használni a $\mathbf{b} = \mathbf{1}$ szereposztásban. Legyen $1 \leq$ $\leq j \leq n$ rögzítve, ekkor

$$\partial_j p_A|_{\mathbf{x}=\mathbf{1}} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \prod_{k\neq i} \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{1}\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

Tehát az 5.5 lemma feltételei p_A polinomra teljesülnek a $\mathbf{b} = \mathbf{1}$ és $\delta = 1$ választással, így $\mathrm{Cap}(p_A) = 1$. □

5.8. Megjegyzés. Felmerülhet a kérdés, hogy egy $A \in (\mathbb{R}^+)^{n\times n}$ pozitív elemű mátrix esetén hogyan tudjuk kiszámolni a $\mathrm{Cap}(p_A)$ értéket. Sinkhorn bizonyította és egy közelítő algoritmust is adott arra a [11] cikkében, hogy tetszőleges $A \in (\mathbb{R}^+)^{n\times n}$ mátrix esetén létezik egyértelműen egy $T_A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ duplán sztochasztikus mátrix és $D = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n), E = \mathrm{Diag}(e_1, \dots, e_n) \in (\mathbb{R}^+)^{n\times n}$ mátrixok úgy, hogy $A = DT_AE$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az 5.5 lemma feltételeit teljesíti a $\delta = \prod_i^n d_i$ és $b_i = \frac{1}{e_i}$ választás. Kapjuk tehát, hogy $\mathrm{Cap}(p_A) = \prod_{i=1}^n d_i e_i = \det(DE)$.

5.9. Következmény (Van der Waerden-sejtés)**.** *Legyen $A \in (\mathbb{R}_+)^{n\times n}$ duplán sztochasztikus mátrix. Ekkor*

$$perA \geq \frac{n!}{n^n},$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha A a csupa $\frac{1}{n}$-et tartalmazó mátrix.

Bizonyítás. Használjuk az 5.6 következményt az 5.7 lemma felhasználásával, így kapjuk, hogy $\mathrm{per}A \geq \frac{n!}{n^n}$.

Tegyük fel, hogy A-ra egyenlőség áll fenn. Ez azt jelenti, hogy ekkor létezik $\mathbf{q} \in (\mathbb{R}_+)^n$, hogy

$$p_A = \prod_{i=1}^{n} \langle a_i, \mathbf{x}\rangle = \left(\sum_{j=1}^{n} q_j x_j\right)^n$$

$$\Rightarrow \forall j \in [n] : \ \partial_j p_A|_{\mathbf{x}=\mathbf{1}} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1 = nq_j$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{q} = \frac{1}{n}\mathbf{1}$$

Másrészt p_A kétféle felírása miatt A minden sora a $\mathbf{q}$ skalárszorosa kell hogy legyen, tehát

$$\begin{aligned} \forall i \in [n]\ \exists \beta_i \in \mathbb{R}:\ \beta_j a_j &= \mathbf{1} \\ \Rightarrow \forall i \in [n]:\ \beta_i \langle a_i, \mathbf{1} \rangle = \beta_i &= \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = n \\ \Rightarrow \forall i \in [n]:\ a_i &= \frac{1}{n}\mathbf{1}. \end{aligned}$$

□

5.10. Következmény (Schrijver-korlát)**.** *Legyen A egy nemnegatív egészekből álló, $n \times n$-es mátrix, melyben minden sorösszeg és oszlopösszeg k. Ekkor*

$$perA \geq \left(\frac{(k-1)^{k-1}}{k^{k-2}} \right)^n.$$

Bizonyítás. Legyen $B = \frac{1}{k}A$. Mivel A minden eleme nemnegatív egész szám, ezért A tetszőleges oszlopában legfeljebb k darab nem nulla szám áll, így B-nek is tetszőleges oszlopában legfeljebb k darab nem 0 szám áll. Speciálisan $\lambda_i(p_A) \leq k$. Továbbá B duplán sztochasztikus, így használhatjuk az 5.6 következményt. Kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \text{per}A = k^n \text{per}B \geq k^n \prod_{i=2}^{n} G(\min(i, d_i)) \geq \\ \geq k^n \prod_{i=2}^{k} G(\min(i, d_i)) \prod_{i=k+1}^{n} G(\min(i, k, d_i)) \geq \\ \geq k^n G(k)^n = \left(\frac{k(k-1)^{k-1}}{k^{k-1}} \right)^n = \left(\frac{(k-1)^{k-1}}{k^{k-2}} \right)^n. \end{aligned}$$

□

Az előző tétel páros multigráfokra a következőt jelenti. Legyen adott egy k reguláris $G = (A, B; E)$ páros multigráf. Ekkor a két színosztály mérete megegyezik, és ezt a méretet jelölje n. Készítsük el azt az $n \times n$-es méretű M mátrixot, melynek sorai A, oszlopai B elemeivel vannak indexelve, és $M_{a,b}$ legyen egyenlő az a és b közti élek számával.

Azt állítjuk, hogy M permanense épp a teljes párosítások számát adja meg G-ben. Ezt úgy láthatjuk, hogy a permanensre úgy gondolunk, mint kifejtési tagok összegére. Pozitív kifejtési tagot úgy kaphatunk, ha a szorzatban minden tényező nem nulla, ami azt jelenti, hogy épp olyan indexpárokat választottunk ki, melyek közt van él, azaz egy teljes párosítást jelöltünk így ki.

Mivel M nemnegatív egész számokból álló mátrix, és M tetszőleges oszlopösszege és sorösszege k, így az előző tételt alkalmazva kapjuk a következő állítást.

5.11. Állítás. *Legyen $G = (A, B; E)$ egy k-reguláris páros multigráf $2n$ csúcson. Jelölje $P(G)$ a G gráf teljes párosításainak számát. Ekkor*

$$P(G) \geq \left(\frac{(k-1)^{k-1}}{k^{k-2}}\right)^n.$$

5.12. Megjegyzés. Az előző állítást Schrijver bizonyította először, sőt azt is belátta, hogy az előző állítás aszimptotikusan éles. Ezen kívül Wanless még azt is belátta, hogy 0,1 elemű mátrixokra (azaz egyszerű gráfokra) megszorítva is igaz ez a következő értelemben. Legyenek $n \geq k$ pozitív egészek, és legyen

$$\mu(k, n) = \min\{\mathrm{per}M \mid M \in \{0{,}1\}^{n\times n}, M\mathbf{1} = M^T\mathbf{1} = k\mathbf{1}\}.$$

Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mu(k, n)} = \frac{(k-1)^{k-1}}{k^{k-2}}.$$

5.13. Megjegyzés. [Kevert diszkrimináns] Legyen $\mathcal{A} = (A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{R}^{n\times n^2}$, és definiáljuk $\mathcal{A}$ mátrixra a kevert diszkriminánst a következőképpen:

$$\mathrm{Disc}(\mathcal{A}) = \partial_1 \ldots \partial_n \det\left(\sum_{i=1}^n x_i A_i\right)\Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}.$$

Vegyük észre, hogy tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix permanense megkapható annak a mátrixnak a kevert diszkriminánsaként, melynek A_i részmátrixa az A mátrix i-edik oszlopából képzett diagonális mátrix, ugyanis ekkor $\det(\sum_{i=1}^n x_i A_i) = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{i,j}$.

Bapat a következő módon általánosította a Van der Waerden-sejtést:

5.14. Tétel (Bapat-sejtés)**.** *Legyen*

$$\Omega(n) = \{(A_1\ A_2\ \ldots\ A_n) \in \mathbb{R}^{n\times n^2} \mid \sum_{i=1}^{n} A_i = I, \forall i \in [n] : A_i \succeq 0, tr(A_i) = 1\}.$$

Ekkor tetszőleges $\mathcal{A} \in \Omega(n)$ *esetén*

$$Disc(\mathcal{A}) \geq \frac{n!}{n^n}.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A} \in \Omega(n)$ rögzítve, és legyen $g(x_1, \ldots, x_n) = \det(\sum_{i=1}^{n} x_i A_i)$. Ekkor a g egy n változós n-edfokú nemnegatív együtthatós polinom, ami stabil a 2.6 lemma alapján.

Másrészt tetszőleges i-re

$$(\partial_i g)(1,\ldots,1) = \sum_{j=1}^{n} (A_i)_{j,j} = \mathrm{tr}(A_i) = 1,$$

azaz az 5.5 lemma alapján $\mathrm{Cap}(g) = 1$, és így az 5.3 tételbe behelyettesítve kapjuk, hogy:

$$\mathrm{Disc}(\mathcal{A}) = \partial_1 \ldots \partial_n g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \geq \frac{n!}{n^n}.$$

□

6. Láncolt családok

Az alábbi fejezetben [9] cikket mutatjuk be, mely alapját képezi a [10]-beli eredményeknek. Az egyváltozós stabil polinomok egy érdekes tulajdonságát fogjuk megvizsgálni, melynek segítségével a következő részben bizonyítani fogjuk, hogy végtelen sok d-reguláris páros Ramanujan-gráf van.

Valószínűségszámításban gyakran használt gondolat, hogy egy véges várható értékű X valószínűségi változó esetén van olyan érték, amit X felvesz, és legfeljebb $\mathbb{E}(X)$. Ellenben ha X polinom értékű valószínűségi változó, akkor nem feltétlen igaz az, hogy ha ρ az $\mathbb{E}(X)$ legnagyobb gyöke, akkor van olyan polinom az X értékkészletében, melynek legnagyobb gyöke legfeljebb ρ. Viszont ha többet is felteszünk a polinomokról, akkor ez a tulajdonság már teljesül. Ezt fogalmazza meg a következő kulcsfontosságú lemma.

6.1. Lemma. *Legyenek $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{R}[x]$ egyváltozós n-edfokú polinomok pozitív főegyütthatóval. Legyen $f_\emptyset = \sum_{i=1}^k f_k$. Ha $f_1, \ldots, f_n$-nek van közös láncolója, akkor van olyan i index, hogy f_i legnagyobb gyöke legfeljebb $f_\emptyset$ legnagyobb gyöke.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy g egy $(n-1)$-edfokú polinom, ami egyszerre láncolja egybe $f_1, \ldots, f_n$ polinomok gyökeit. Jelölje ρ_{n-1} a g legnagyobb gyökét. A feltételek alapján $f_i(\rho_{n-1}) \leq 0$, hiszen mindegyik $f_i(x)$ pozitív kellően nagy x esetén, és mindegyiknek van ρ_{n-1}-nél nagyobb gyöke. Tehát $f_\emptyset(\rho_{n-1}) \leq 0$. Hasonlóan $f_\emptyset(x)$ pozitív kellően nagy x esetén, ezért $f_\emptyset$ legnagyobb gyöke, amit jelöljön β_n, legalább ρ_{n-1}.

Mivel $0 = \sum_{i=1}^k f_i(\beta_n)$, ezért van olyan i index, hogy $f_i(\beta_n) \geq 0$. Ekkor ezen f_i megfelelő, ugyanis $f_i(\rho_{n-1}) \leq 0 \leq f_i(\beta_n)$, azaz f_i legnagyobb gyöke legalább ρ_{n-1}, és legfeljebb β_n. □

6.2. Definíció. *Legyenek $S_1, \ldots, S_m$ véges halmazok, és minden $(s_1, \ldots, s_m) \in S_1 \times \times \ldots \times S_m$-re legyen adott egy $f_{s_1,\ldots,s_m}(x)$ pozitív főegyütthatós, n-edfokú, valós gyökű polinom. Legyen továbbá*

$$f_{s_1,\ldots,s_k}(x) = \sum_{(s_{k+1},\ldots,s_m)\in S_{k+1}\times S_n} f_{s_1,\ldots,s_m}(x),$$

és

$$f_\emptyset(x) = \sum_{(s_1,\ldots,s_m)\in S_1\times\ldots\times S_n} f_{s_1,\ldots,s_m}.$$

Az $\{f_{s_1,\ldots,s_m}\}$ rendszert láncolt családnak nevezzük, ha tetszőleges $0 \leq k \leq m-1$-re az $\{f_{s_1,\ldots,s_k,t}\}_{t\in S_{k+1}}$ polinomoknak van közös láncoló polinomja.

6.3. Tétel. *Legyenek $S_1,\ldots,S_m$ véges halmazok, és $\{f_{s_1,\ldots,s_m}\}$ láncolt család. Ekkor van olyan $(s_1,\ldots,s_m) \in S_1 \times \ldots \times S_m$, hogy $f_{s_1,\ldots,s_m}$ legnagyobb gyöke legfeljebb akkora, mint $f_\emptyset$ legnagyobb gyöke.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval bizonyítjuk az előbb bizonyított lemma felhasználásával. Először is az $\{f_t\}_{t\in S_1}$-nek a feltételek alapján van közös láncoló polinomja, így kapjuk, hogy van olyan s_1 index, hogy f_{s_1} legnagyobb gyöke legfeljebb $\sum_{t\in S_1} f_t = f_\emptyset$ legnagyobb gyöke.

Tegyük fel, hogy $1 \leq k \leq n-1$-re van olyan $(s_1,\ldots,s_k) \in S_1 \times \ldots \times S_m$, hogy $f_{s_1,\ldots,s_k}$ legnagyobb gyöke kisebb vagy egyenlő, mint $f_\emptyset$ legnagyobb gyöke. Ellenben $\{f_{s_1,\ldots,s_k,t}\}_{t\in S_t}$-re ismét teljesülnek a lemma feltételei, így van olyan s_{k+1}, hogy $f_{s_1,\ldots,s_{k+1}}$ legnagyobb gyöke kisebb vagy egyenlő, mint $f_{s_1,\ldots,s_k}$ legnagyobb gyöke, ami az indukció miatt kisebb vagy egyenlő, mint $f_\emptyset$ legnagyobb gyöke. □

6.1. Páros Ramanujan-gráfok

A gráfelmélet egyik fontos területét alkotják a gráfok spektrumával kapcsolatos vizsgálatok. Egy egyszerű véges gráf spektruma megegyezik a szomszédsági mátrix sajátértékeinek összességével. Ezen invariánsok segítségével könnyen meg tudjuk állapítani a gráf néhány tulajdonságát. Például egy összefüggő d-reguláris gráfnak a legnagyobb sajátértéke éppen d, ami a csupa 1 sajátvektorhoz tartozik. Továbbá egy d-reguláris G gráf akkor és csak akkor páros, ha legkisebb sajátértéke $-d$. Így egy d-reguláris gráf triviális sajátértékeinek nevezzük a d, illetve – ha van – a $-d$ sajátértékeket. A nemtriviális sajátértékek közül a legnagyobb abszolút értékűnek a hossza nagyban befolyásolja egy véletlen bolyongás eloszlásának konvergenciasebességét. Alon és Boppana megmutatta, hogy tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén csak véges sok olyan d-reguláris gráf van, melynek minden nemtriviális sajátértéke legfeljebb $2\sqrt{d-1} - \epsilon$ abszolút értékű.

6.4. Definíció. *Egy d-reguláris gráfot Ramanujannak nevezünk, ha minden nemtriviális sajátérték abszolút értéke legfeljebb $2\sqrt{d-1}$.*

Felmerül a kérdés, hogy van-e végtelen sok olyan d-reguláris gráf, melynek minden nemtriviális sajátértéke legfeljebb $2\sqrt{d-1}$. A következőkben bizonyítani fogjuk, hogy létezik végtelen sok d-reguláris, páros Ramanujan-gráf tetszőleges $d > 3$ fokszám esetén.

Legyen $G = (V(G), E(G))$ egy egyszerű gráf, és $s \in \{-1,1\}^E$. Ekkor az s-hez tartozó 2-rétű G^s fedő gráfot úgy kapjuk G-ből, hogy minden $u \in V(G)$ csúcsot megduplázunk (ezek legyenek u_0 és u_1), majd minden $e = (u, v) \in E(G)$ esetén, ha $s_e = 1$, akkor $(u_0, v_0), (u_1, v_1) \in E(G^s)$, és ha $s_e = -1$, akkor $(u_0, v_1), (u_1, v_0) \in$ $\in E(G^s)$. Legyen $A(G)$ a G gráf szomszédsági mátrixa, és legyen $A^s(G)$ az s által élsúlyozott G gráf szomszédsági mátrixa.

A bizonyítás a következő lépésekből tevődik össze. Vegyünk egy gráfot, és ennek tekintsük egy 2-fedését. Ekkor az így létrejött gráf spektruma megegyezik a G gráf spektrumának és a G ± 1 súlyozott szomszédsági mátrix spektrumának uniójával. Tehát a 2-fedés második legnagyobb sajátértéke vagy G második legnagyobb sajátértéke, vagy a G^s legnagyobb sajátértéke. Abban bízunk, hogy ha G Ramanujan-gráf volt, akkor találunk olyan s felemelését, hogy továbbra is Ramanujan maradjon. Ez a már előbb vázolt technikákon fog múlni, ugyanis azt mutatjuk meg, hogy az összes lehetséges súlyozással ellátott mátrix karakterisztikus polinomja egy láncolt családot alkot. Így elegendő a karakterisztikus polinomok átlagának legnagyobb gyökét meghatározni. Erről megmutatható, hogy ez éppen a G gráf párosítási polinomja, mely sokat vizsgált objektum az algebrai gráfelméletben, és az itt ismeretes eredmények felhasználásával adódik, hogy a legnagyobb gyöke az átlagpolinomnak $2\sqrt{d-1}$, ami azt jelenti, hogy van olyan 2-felemelés, hogy ha a gráf Ramanujan volt és páros, akkor az is marad.

6.5. Állítás. *Tetszőleges $s \in \{-1,1\}^E$ esetén G^s sajátértékei éppen $A(G)$ és $A^s(G)$ sajátértékeinek összessége.*

Bizonyítás. Legyen $n = |V(G)|$ a G gráf csúcsszáma. Azt fogjuk megmutatni, hogy $A(G^s) \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ mátrix átkonjugálható $\begin{pmatrix} A(G) & D \\ 0 & A^s(G) \end{pmatrix}$-be. Először is $A(G^s)$ mátrixot képzeljük úgy el, hogy az $A^s(G)$ mátrixban minden 1-est $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixra, minden -1-est $A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixra és minden 0-t $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixra írjuk át. Legyen $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, és legyen $B = \mathrm{Diag}(C, \ldots, C) \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$.

Ekkor $Q = B^{-1}AB$-ben az u_0, u_1 sorok és v_0, v_1 oszlopok által meghatározott részmátrix vagy $C^{-1}A_1C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ha $s_{u,v} = 1$, vagy $C^{-1}A_{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ha $s_{u,v} = -1$, vagy $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ha u és v közt nincs él. Vegyük észre, hogy tetszőleges $u, v \in V(G)$ esetén $Q_{u_1,v_0} = 0$. Ez viszont azt jelenti, hogy az oszlopok és sorok permutálásával Q a kívánt alakra hozható. $\square$

Legyen $\mu_G(x)$ a G gráfhoz tartozó párosítási polinom, melyet a következő módon definiálhatunk a módosított párosítási polinom segítségével:

$$\mu_G(x) = x^n M_G(x^{-1}) = \sum_{k=0} (-1)^k m_k(G) x^{n-2k}.$$

Ez polinom a 2.10 tétel és a 2.2 lemma alapján stabil polinom. Másrészt azt is bizonyította Heilmann és Lieb [7], hogy egy legfeljebb d fokú gráf esetén $\mu_G(x)$ legnagyobb gyöke legfeljebb $2\sqrt{d-1}$.

A következő tétellel azt mutatta meg Godsil és Gutman, hogy ha a G gráf minden élét egymástól függetlenül, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel súlyozzuk ± 1-el, akkor a karakterisztikus polinom várható értéke éppen $\mu_G(x)$.

6.6. Állítás ([5]). *Legyen $G = (V(G), E(G))$ egyszerű véges gráf m éllel. Ekkor*

$$\sum_{s \in \{-1,1\}^{E(G)}} \det(xI - A^s(G)) = 2^m \mu_G(x).$$

Ezen tételek alapján tehát elég belátni azt, hogy $\{\det(xI - A^s(G))\}_{s \in \{-1,1\}^E}$ láncolt család, amihez a következő elégséges lemmán keresztül fogunk eljutni. (Megjegyezném, hogy általánosabban is igaz az alábbi lemma, amikor az S halmazokról nincs kikötve, hogy 2 eleműek, és a bizonyítás is hasonló.)

6.7. Lemma. *Legyen $S = \{-1,1\}$, és minden $s \in S^l$ esetén legyen adott egy $f_s(x) \in \in \mathbb{R}[x]$ pozitív főegyütthatós n-edfokú polinom. Ha tetszőleges $p \in [0,1]^l$ esetén*

$$\sum_{s \in S^l} \left(\prod_{s_i = 1} p_i \right) \left(\prod_{s_i = -1} (1 - p_i) \right) f_s(x)$$

stabil, akkor $\{f_s\}_{s \in S^l}$ láncolt család.

Bizonyítás. A feltétel alapján nyilván az összes f_s polinom stabil, tehát csak azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $1 \leq i \leq l-1$ és $(s_1, \dots, s_i) \in S^i$ esetén $\{f_{s_1,\dots,s_i,t}\}_{t\in S}$ polinomoknak van közös láncoló polinomjuk. Ez a 6.3 tétel alapján ekvivalens azzal, hogy tetszőleges $\lambda \in [0,1]$ esetén $\lambda f_{s_1,\dots,s_i,1} + (1-\lambda) f_{s_1,\dots,s_i,-1}$ stabil. Viszont ez igaz, ugyanis ha $p \in [0,1]^l$ a következő:

$$p_j = \begin{cases} 1 & \text{, ha } 1 \leq j \leq i \text{ és } s_j = 1; \\ 0 & \text{, ha } 1 \leq j \leq i \text{ és } s_j = -1; \\ \lambda & \text{, ha } j = i+1; \\ \frac{1}{2} & \text{, különben;} \end{cases}$$

akkor

$$\lambda f_{s_1,\dots,s_i,1} + (1-\lambda) f_{s_1,\dots,s_i,-1} = \sum_{s\in S^l} \left(\prod_{s_i=1} p_i \right) \left(\prod_{s_i=-1} (1-p_i) \right) f_s(x),$$

ami a feltétel alapján stabil. □

Mielőtt még bizonyítanánk, hogy az előző lemma feltétele teljesül a $\{\det(xI - A^s(G))\}_{s\in\{-1,1\}^E}$ rendszerre, egy technikai lemmát bizonyítunk.

6.8. Lemma. *Ha* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *invertálható mátrix, és* $a, b \in \mathbb{R}^n$, *akkor tetszőleges* $p \in [0,1]$ *esetén*

$$(1+p\partial_y+(1-p)\partial_z)\det(A+yaa^T+zbb^T)|_{y=0,z=0} = p\det(A+aa^T)+(1-p)\det(A+bb^T).$$

Bizonyítás. Ismeretes, hogy tetszőleges $u, v \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\det(A+uv^T) = \det(A)\det(1+v^TA^{-1}u)$$

, így $\partial_t(\det(A+taa^T)) = \det(A)(1+a^TA^{-1}a)$. Tehát

$$\begin{aligned} (1+p\partial_y+(1-p)\partial_z)\det(A+yaa^T+zbb^T)|_{y=0,z=0} &= \\ = \det(A)(1+pa^TA^{-1}a+(1-p)b^TA^{-1}b) &= \\ = p\det(A)(1+a^TA^{-1}a)+(1-p)\det(A)(b^TA^{-1}b) &= \\ = p\det(A+aa^T)+(1-p)\det(A+bb^T). \end{aligned}$$

□

6.9. Tétel. *Legyen $G = (V(G), E(G))$ egyszerű véges gráf $m = |E(G)|$ éllel, és $f_s(x)$ az $A^s(G)$ mátrix karakterisztikus polinomja. Legyen $p_e \in [0,1]$ tetszőleges minden $e \in$ $\in E(G)$ esetén. Ekkor a*

$$\sum_{s\in\{-1,1\}^E} \left(\prod_{s_e=1} p_e\right)\left(\prod_{s_e=-1} (1-p_e)\right) f_s(x) \in \mathbb{R}[x]$$

polinom stabil.

Bizonyítás. A bizonyítás ötlete az, hogy definiáljunk egy többváltozós stabil polinomot, majd stabilitást őrző leképezésekkel állítsuk elő a fentebb említett polinomot. A megfelelő többváltozós polinomot a többváltozós Laplace-polinomhoz hasonlóan állítjuk elő.

Rögzítsük G-nek egy irányítását. Legyen $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\vec{E}(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$, és minden $e = (v_i, v_j) \in \vec{E}(G)$ esetén legyen $a_e \in \mathbb{R}^n$ az a vektor, melynek minden koordinátája 0, kivéve $(a_e)_i = -1$ és $(a_e)_j = 1$, továbbá legyen $b_e \in \mathbb{R}^n$ az vektor, melynek minden koordinátája 0, kivéve $(b_e)_i = (b_e)_j = 1$. Jelölje továbbá d_i a v_i fokát a G gráfban, és legyen d a legnagyobb fokszám, ekkor tetszőleges $s \in \{-1,1\}^E$ esetén

$$dI - A^s(G) = \sum_{e\in\vec{E}(G):s_e=1} a_e a_e^T + \sum_{e\in E(\vec{G}):s_e\neq 1} b_e b_e^T + D,$$

ahol $D = \mathrm{Diag}(d - d_1, \dots, d - d_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitív szemidefinit mátrix. Vegyük észre, hogy $dI - A^s(G)$ mátrix független a G-n választott irányítástól.

Legyen minden $e_k \in E(G)$-re egy y_k és egy z_k változó, és legyen

$$Q(x, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m) = \det\left(xI + D + \sum_{i=1}^m y_i a_{e_i} a_{e_i}^T + \sum_{i=1}^m z_i b_{e_i} b_{e_i}^T\right).$$

Mivel minden $e \in \vec{E}(G)$-re $a_e a_e^T$ és $b_e b_e^T$ pozitív szemidefinit, és D is pozitív szemidefinit, így az előbb definiált Q valós együtthatós polinom a 2.6 lemma alapján stabil.

Legyen $p \in [0,1]^E$ rögzítve, és jelölje $T_i = (1 + p_i\partial_{y_i} + (1 - p_i)\partial_{z_i})$ leképezést, Z_{y_i} az $y_i = 0$ helyettesítést és Z_{z_i} a $z_i = 0$ helyettesítést minden $1 \le i \le m$-re. A T_i, Z_{y_i} és Z_{z_i} leképezések stabil polinomot stabil polinomba képeznek a 2.2 lemma és a 2.3

állítás alapján, így

$$P(x) = \left(\prod_{i=1}^{n}(Z_{y_i} Z_{z_i} T_i)\right) Q(x, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}[x]$$

stabil, és az előző lemma alapján

$$\begin{aligned} P(x) = \sum_{s\in\{-1,1\}^E} \left(\prod_{\substack{i\in[m]:\\ s_{e_i}=1}} p_i\right)\left(\prod_{\substack{i\in[m]:\\ s_{e_i}=-1}} (1-p_i)\right) \det(xI + D + \sum_{\substack{i\in[m]:\\ s_{e_i}=1}} a_i a_i^T + \sum_{\substack{i\in[m]:\\ s_{e_i}\neq 1}} b_i b_i^T) = \\ = \sum_{s\in\{-1,1\}^E} \left(\prod_{\substack{i\in[m]:\\ s_{e_i}=1}} p_i\right)\left(\prod_{\substack{i\in[m]:\\ s_{e_i}=-1}} (1-p_i)\right) \det(xI + dI - A^s(G)) = \\ = \sum_{s\in\{-1,1\}^E} \left(\prod_{\substack{i\in[m]:\\ s_{e_i}=1}} p_i\right)\left(\prod_{\substack{i\in[m]:\\ s_{e_i}=-1}} (1-p_i)\right) \det((x+d)I - A^s(G)) \end{aligned}$$

stabil valós együtthatós polinom. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$P(x-d) = \sum_{s\in\{-1,1\}^E} \left(\prod_{\substack{e\in E\\ s_e=1}} p_e\right)\left(\prod_{\substack{e\in E\\ s_e=-1}} (1-p_e)\right) f_s(x)$$

stabil. □

Tehát ezek alapján $\{\det(xI - A^s(G))\}_{s\in\{-1,+1\}^E}$ láncolt polinomcsalád, így $\mu_G(x)$ legnagyobb gyöke $2\sqrt{d-1}$-nél kisebb vagy egyenlő, azaz van olyan $s \in \{-1,+1\}^E$, hogy $\det(xI - A^s(G))$ legnagyobb gyöke kisebb vagy egyenlő, mint $2\sqrt{d-1}$. Tehát G^s új sajátértékei kisebbek vagy egyenlőek, mint $2\sqrt{d-1}$.

6.10. Tétel. *Minden $d > 3$ esetén van végtelen sok páros Ramanujan-gráf.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a G páros gráfnak a λ sajátértéke, és a λ-hoz tartozó v sajátvektor. Válasszunk ki egy színosztályt, és szorozzuk meg v azon koordinátáit (-1)-gyel, melyek ebbe az osztályba esnek. Ekkor az így kapott v' vektor sajátvektor, és $-\lambda$ sajátértékhez fog tartozni. Tehát a páros gráfok spektruma a 0-ra nézve szimmetrikus.

Tekintsük a $K_{d,d}$ a d-reguláris teljes páros gráfot. Ennek a sajátértékei a $\pm d$ és a 0. Tehát a $K_{d,d}$ egy Ramanujan-gráf.

Tegyük fel, hogy G egy n csúcson páros Ramanujan-gráf, azaz a második legnagyobb abszolút értékű gyök legfeljebb $2\sqrt{d-1}$. A tétel előtti gondolatmenet alapján van egy olyan 2-rétű fedő gráfja G-nek, hogy a G^s új sajátértékei legfeljebb $2\sqrt{d-1}$-ek. Viszont tetszőleges 2-rétű felemelése a páros gráfnak továbbra is páros, ezért az új sajátértékekre az is igaz, hogy a legnagyobb abszolút értékű sajátérték hossza legfeljebb $2\sqrt{d-1}$, azaz G^s páros Ramanujan-gráf $2n$ csúcson. □

6.11. Megjegyzés. A bizonyítási technikát átültetve Marcus, Spielman és Srivastava bizonyították az alábbi tételt [10], aminek segítségével belátták a Kadison–Singer-sejtést. Ez azt mondja ki, hogy ha $X_1, \dots, X_m$ független, véges értékkészletű, azonos dimenziós komplex vektorértékű valószínűségi változók, melyekre teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}(X_i X_i^*) = I$$

és valamely pozitív ϵ mellett minden $1 \le i \le m$-re

$$\mathbb{E}(||X_i||^2) \le \epsilon,$$

akkor

$$\mathbb{P}\left(||\sum_{i=1}^{m} X_i X_i^*|| \le (1+\sqrt{\epsilon})^2 \right) > 0.$$

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Frenkel Péternek az általa felvetett témát, a számos építő jellegű megjegyzését, hozzászólását, kérdésfelvetéseit és munkám lelkiismeretes ellenőrzését, amellyel jelentősen hozzájárult a szakdolgozatom elkészítésében. Szintén köszönöm, hogy kérdéseimmel bármikor bátran fordulhattam hozzá.

Külön köszönöm Bokányi Eszternek a dolgozat helyesírásának ellenőrzésében nyújtott segítségét.

Hivatkozások

[1] J. Borcea and P. Brändén, *Applications of stable polynomials to mixed determinants: Johnson's conjectures, unimodality, and symmetrized Fischer products*, Duke Mathematical Journal, 143 (2008), pp. 205–223.

[2] ——, *The Lee-Yang and Pólya-Schur programs. I. linear operators preserving stability*, Inventiones Mathematicae, 177 (2009), pp. 541–569.

[3] Y. B. Choe, J. G. Oxley, A. D. Sokal, and D. G. Wagner, *Homogeneous multivariate polynomials with the half-plane property*, Advances in Applied Mathematics, 32 (2004), pp. 88–187.

[4] M. Chudnovsky and P. Seymour, *The roots of the independence polynomial of a clawfree graph*, Journal of Combinatorial Theory. Series B, 97 (2007), pp. 350–357.

[5] C. D. Godsil and I. Gutman, *On the theory of the matching polynomial*, Journal of Graph Theory, 5 (1981), pp. 137–144.

[6] L. Gurvits, *The Van der Waerden conjecture for mixed discriminants*, Advances in Mathematics, 200 (2006), pp. 435–454.

[7] O. J. Heilmann and E. H. Lieb, *Theory of monomer-dimer systems*, Communications in Mathematical Physics, 25 (1972), pp. 190–232.

[8] M. Laurent and A. Schrijver, *On Leonid Gurvits's proof for permanents*, American Mathematical Monthly, 117 (2010), pp. 903–911.

[9] A. Marcus, D. a. Spielman, and N. Srivastava, *Interlacing families I: Bipartite Ramanujan graphs of all degrees*, Proceedings - Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS, (2013), pp. 529–537.

[10] A. W. Marcus, D. a. Spielman, and N. Srivastava, *Interlacing families II: Mixed characteristic polynomials and the Kadison-Singer problem*, arXiv preprint arXiv:1306.3969, (2013), pp. 1–21.

[11] R. Sinkhorn, *Institute of Mathematical Statistics is collaborating with JSTOR to digitize, preserve, and extend access to The Annals of Mathematical Statistics.*, Statistics, 35 (1964), pp. 876—-879.

[12] D. G. Wagner, *Multivariate stable polynomials: Theory and applications*, Bulletin of the American Mathematical Society, 48 (2011), pp. 53–84.