Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

A marginálisprobléma

diplomamunka

Írta: Bognár Barna
matematikus mesterszak

Témavezető: Laczkovich Miklós egyetemi tanár
Analízis Tanszék

Budapest, 2015.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Laczkovich Miklósnak, az érdekes témáért, a sok segítségért, amit a problémák megoldásához nyújtott, azért hogy ha elakadtunk, mindig volt egy jó ötlete, hogy mindemellett hagyott érvényesülni, és hogy a legapróbb részletekre is odafigyelve lektorálta a dolgozatomat – még akkor is, amikor nem minden tanácsát akartam megfogadni.

Szeretném továbbá megköszönni Huszár Kristóf barátomnak, hogy segítségemre volt néhány technikai probléma megoldásában.

És végül, de semmi esetre sem utolsósorban, szeretném megköszönni családomnak és barátaimnak, mindenkinek aki el tudott viselni a hosszú hónapok alatt, míg ezt a dolgozatot írtam.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

1949-ben az American Journal of Mathematics (az Újvilág legrégebbi folyamatosan kiadott matematikai folyóirata) közölt egy cikket George G. Lorentz [1] tollából, A Problem of Plane Measure címmel (lásd [5]). Bár a cikk nem lett különösebben sikeres (mind a mai napig csupán tucatnyi hivatkozás van rá), egy igen érdekes kérdést feszeget: vajon mi kell ahhoz, hogy egy síkbeli halmaz rekonstruálható legyen szekciómérték-függvényeinek ismeretében, és egyáltalán – mi kell ahhoz, hogy egy függvénypár tagjai előálljanak egy halmaz szekciómérték-függvényeiként? Különösen érdekes ez annak fényében, hogy nem olyan sokkal később, a ’70-es években, a számítógépek elterjedésével az ilyen és ehhez hasonló kérdések a számítógépes tomográfiás módszerek alapvető problémáivá váltak. (Nem véletlen, hogy a cikkre való hivatkozások nagy része tomográfiával foglalkozó alkalmazott matematikai írásokban található.)

Lorentz a valós síkon a problémát voltaképpen megoldotta: adott egy szükséges és elégséges feltételt, hogy mikor lehet konstruálni olyan halmazt, melynek szekciómérték-függvényei az adott függvények, sőt szükséges és elégséges feltételt adott a halmaz egyértelműségére is – minek kapcsán kiderül, hogy az egyértelműség egyáltalán nem mindig teljesül, lényegesen különböző halmazok szekciómértékei is lehetnek egyenlőek. Egyébiránt Lorentz megoldása kvázi konstruktív is – bár a teljes konstrukció végtelen sok lépést feltételezne, így vajólában nem kivitelezhető, de a bizonyítás módszere alapján minden valószínűség szerint adható volna egy a megoldást közelítő algoritmus is.

Mindemellett, körbelül az ’50-es évek végén, megjelent egy alapvetően elméleti kutatási terület a valószínűségszámításban, amely valamilyen értelemben kapcsolódott a Lorentz által felvetett kérdéshez: a marginálisok problémája, vagyis hogy valószínűségi mértékterek szorzatán milyen körülmények között tudunk egy valószínűségi mértéket találni, melynek marginálisai az eredeti terek adott valószínűségi mértékei, és ezen túl valamilyen plusz feltételt is teljesítenek. (Nyilván a kérdést plusz feltétel nélkül feltéve a válasz egyszerű – a két mérték hagyományos szorzatmértéke megfelelő lesz. Példákért lásd Volker Strassen

[1] Megelőzendő a kérdést, hogy „ez a Lorentz *az* a Lorentz-e”, tisztázzuk: George G. Lorentz (született Georg Rudolfovics Lorentz, 1910, Szentpétervár) oroszországi német származású amerikai matematikus volt. (Egyébiránt saját állítása szerint anyai ágon Dzsingisz mongol nagykán leszármazottja.) Nem összekeverendő Hendrik Antoon Lorentz Nobel-díjas holland fizikussal. A Lorentz-transzormáció és a fizikusok által Lorentz-eloszlásnak nevezett valószínűségi eloszlás – ezt a matematikusok inkább Cauchy-eloszlásként ismerik – ez utóbbi, míg a közgazdaságtanban ismert Lorentz-görbe Max Otto Lornetz amerikai közgazdász nevét viseli. George G. Lorentz-ről nevezték el ellenben az $L^{p,q}$ Lorentz-tereket, melyek az L^p függvényterek általánosításai. Fő kutatási területe egyébiránt az approximációelmélet volt.

További érdekesség, hogy hivatkozott cikkét – bár egy amerikai folyóiratban jelent meg – Németországban, a francia megszállási zónához tartozó Tübingenben írta. Ekkoriban a francia hatóságok nemkívánatos szovjet állampolgárként, az orosz hatóságok nemkívánatos németként, míg az amerikai hatóságok egyszerűen hontalanként tartották nyilván. Később ameriakai állampolgár lett. 2006 januárjában hunyt el.

[8] illetve Lovász László és Michael David Plummer írásait [6] 2.5. szakasz.) Ennek csúcspontja talán Jørgen Hoffmann-Jørgensen közel 300 oldalas írása (lásd [1]), melynek címe is „The General Marginal Problem”, és amely a valószínűségi mértékekre vonatkozó probléma egy igen általános alakját vizsgálja. (Konkrétan: legyen adott egy mérhető terünk, valamint innen mérhető függvények valószínűségi mértékterek egy tetszőleges számosságú családjába. Milyen szükséges illetve elégséges feltételek adhatók egy valószínűségi mérték létezésére az eredeti mérhető téren, hogy ennek képei pont a valószínűségi mértékterek már adott mértékei legyenek?)

Ezzel párhuzamosan, a ’60-as évek első felében, Hans G. Kellerer is elkezdett foglalkozni a marginálisproblémák bizonyos alakjaival. Kellerert eredetileg nem a marginálisprobléma érdekelte, hanem a halmazfelezés lehetségességének kérdését akarta megválaszolni, vagyis hogy a kétdimenziós tér egy halmazának mikor létezik olyan részhalmaza, melynek szekciómértékei mindenhol az eredeti szekciómértékek fele. Az összefüggés Lorentz kérdésével nyilvánvaló: [2] ismerjük, mely függvénypárok lehetnek halmazok marginálisfüggvényei, kérdés melyek azok, amelyek fele is megfelel ezeknek a feltételeknek – és ki kell még ezt egészíteni azzal, hogy az új halmaz része kell legyen az eredetinek, vagy általában: mely függvénypárok lehetnek egy adott halmaz részhalmazainak marginálisfüggvényei? Ez a megfogalmazás már kísértetiesen hasonlít a fent emlegetett valószínűségi problémakör bizonyos konkrét kérdéseire (például a Lovász–Plummer-könyvben tárgyalt problémára) – nem véletlen, hogy Strassen már említett, a témában megkerülhetetlen, cikke is hivatkozik Kellerer munkájára.

Kellerer elkezdte tehát vizsgálni ezt az általánosabb kérdést, sőt ennek még általánosabb eseteként azt is vizsgálta, hogy egy adott függvénynél pontonként nem nagyobb függvények között, mikor található adott marginálispárral rendelkező. Ez utóbbi problémát voltaképpen kerülő úton oldotta meg: először valamiféle diszkrét esetét (ahogy ő mondja, a „mátrixok problémáját”) vizsgálta (lásd [3] 3.2. tétel), majd erre visszavezetve megoldotta bizonyos speciális esetét a probléma mértékekre vonatkozó átfogalmazásának (konkrétan, hogy bizonyos feltételek mellett mikor létezik olyan adott marginálisú mérték mérhető terek szorzatán, melyet majorál egy adott mérték a szorzattéren – lásd [3] 4.2. tétel), és végül erre vezette vissza (a Radon–Nikodym-tétel segítségével) a függvényekre vonatkozó problémát ([3] 5.1. tétel), ahol is szükséges és elégséges feltételt adott arra, hogy két σ-véges mértéktér szorzatán mikor létezik a két téren adott f illetve g nemnegatív és majdnem mindenhol véges értékű mérhető függvényekhez, valamint a szorzattéren adott, majdnem mindenhol véges, nemnegatív és majdnem mindenhol véges marginálisú h függvényhez olyan nemnegatív függvény, melynek marginálisai f és g, valamint amely nem nagyobb h-nál.

Ezután Kellerer nekiállt bizonyítani a halmazokra vonatkozó állítást. Ennek eléréséhez egyik cikkében (lásd [4]) mindenféle furcsa „sűrűségi” állításokat fogalmazott meg a téglák halmazára vonatkozóan, atommentes mértékterek szorzatterén, majd ezen eredmények alapján bizonyította, hogy atommentes mértékterek mellett a fenti függvényes feladatnak van olyan megoldása is, amely egyszerűen a korlátozó függvény megszorítása egy mérhető

[2] Bár furcsamód Kellerer nem hivatkozik Lorentz cikkére, mindössze cikksorozatának második tagjában említi meg egy lábjegyzetben, hogy az írás befejezése után hívták fel a figyelmét Lorentz idevágó eredményére.

halmazra (lásd [4] 4.4. tétel) – ennek pedig már nyilvánvaló következményeként adódik, mikor is léteznek olyan részhalmazai egy adott halmaznak, melyek szekciómérték-függvényei szintén bizonyos előre adott függvények ([4] 5.1. tétel). Végül ezen eredményekre építve be is látta az eredetileg feltett halmazfelezési kérdést, sőt annál általánosabb eseteket is (lásd [4] 5. és 6. szakasz). [3]

Mint láthattuk, a marginálisprobléma rengeteg lazán kapcsolódó kérdést takar. Mi elsősorban Lorentz és Kellerer nyomán próbáltunk ezekből megoldani néhányat. Eredeti célunk a halmazok esetének egy minél általánosabb megoldása volt, ám a bizonyítás közben, mintegy mellékesen, születtek eredményeink a függvényekre vonatkozó probléma kapcsán is – sőt, Kellererhez hasonlóan, végül a halmazok esetét csak a függvények esetén „átvezetve" sikerült megoldanunk.

Meg kell említenünk, hogy a jelen írásban közölt eredmények részben erősebbek, részben gyengébbek Kellerer eredményenél: míg Kellerer tetszőleges majdnem mindig véges és nemnegatív marginálisfüggvényekkel dolgozik, mi integrálható és nemnegatív függvényekre szorítkoztunk – másfelől viszont Kellerernél a korlátozó függvény majdnem mindenhol véges marginálissal rendelkezik, míg mi azt tesszük fel, hogy minden véges mértékű halmazon integrálható, így a halmazokra való áttérésnél nem adódnak feltételeink a korlátozó halmazra, melynek részhalmazait keressük. Mindemellett viszont azt bizonyítjuk, hogy Kellerer eredeti feltételei (melyeket nem meglepő módon Kellerer-feltételeknek fogunk hívni) szükségesek és elégségesek az általunk vizsgált esetekben is.

A dolgozat első két fejezetében felidézünk és összefoglalunk pár olyan előismeretet, melyet a későbbiekben többször is használni fogunk, majd formalizáljuk az általunk megoldott problémákat, valamint bebizonyítjuk a feltételek szükségességét. A következő két részben megoldjuk a függvényekre vonatkozó problémát – először belátjuk, hogy a „nem túl nagy" függvények (mint a nevük is mutatja, azok melyek bizonyos értelemben olyan picik, hogy a náluk nagyobb függvények között lehet megoldás) integrálban megközelítik a kívánt függvényt, majd belátjuk, hogy ha függvényt megközelítenek nem túl nagy függvények, úgy az függvény létezik is, tehát a feladat valóban megoldható. Majd az 5. fejezetben belátjuk, hogy amennyiben a feladat megoldható, és a mértéktereink atommentesek is, úgy léteznek bizonyos speciális alakú megoldások, ennek pedig egyszerű következménye lesz a halmazok esetének megoldása. Végül pedig sorra veszünk néhány ellenpéldát, melyek mutatják az eredmények általánosíthatóságának korlátait.

Fontosnak tartom még megjegyezni hogy, bár mint a fentiek is mutatják, a dolgozat fő íve mutat valamiféle felületes hasonlóságot Kellerer módszereivel (például a „diszkretizálás" ötlete – bár ezt nálunk Lovász és Plummer munkája, nem pedig Kellerer módszere ihlette – vagy éppen a speciális alakú megoldás létezésének bizonyítása), a konkrét bizonyítások nagy része alapvetően más módon történik, mint az általunk ismert már létező eljárásoknál – sőt, azt hiszen bátran kijelenthetjük, hogy (talán Lorentz a valós esetre vonatkozó megoldását kivéve) valameilyen értelemben természetesebb is azoknál.

[3] Bár a mi témánk szempontjából fontos részek itt véget érnek, érdemes lehet még megemlíteni, hogy későbbi cikkeiben Kellerer a fenti eredményekre építve foglalkozott mértékterek kettőnél több tényezős szorzatain is függvények illetve mértékek marginálisaival.

1. fejezet

Definíciók, jelölések, előismeretek

Mielőtt belekezdenénk a téma részletes tárgyalásába, nem árt néhány fogalmi kérdést tisztázni. A továbbiakban a marginálisprobléma különböző alakjai fognak előkerülni, ezek bizonyításához kapcsolódóan szükségünk lesz néhány definícióra és jelölésre, illetve hasznos lesz felidéznünk pár ismertebb állítást, és bebizonyítnunk néhány kevésbé ismertet.

1.1. Halmazelméleti jelölések

Halmazok metszetére illetve uniójára a szokásos $\cap$ és $\bigcap$ illetve $\cup$ és $\bigcup$ jelöléseket alkalmazzuk. Amennyiben diszjunkt halmazok uniójáról beszélünk, úgy a $\sqcup$ és $\bigsqcup$ szimbólumokat használjuk. Halmazok különbsgét a $\setminus$ jellel, szimmetrikus differenciájukat pedig a $\triangle$ szimbólummal jelöljük. A részhalmazokra használt $\subset$ alatt nem feltétlenül szigorú tartalmazásra gondolunk, az egyenlőséget is megengedjük. Amennyiben adott valamiféle „alaphalmazunk", és adott annak egy részhalmaza, úgy a részhalmaz komplementerét felülvonással jelöljük. Például a $(Z, \mathcal{C})$ mérhető téren egy adott $C \in \mathcal{C}$ halmaz mellett a $\overline{C}$ jelölés alatt a $Z \setminus C$ halmazt értjük.

Egy $C \subset Z$ halmaz és a Z részhalmazain értelmezett $\mathcal{C}$ halmazrendszer esetén $\mathcal{C} \cap C$-vel a $\{D \cap C \mid D \in \mathcal{C}\}$ halmazok családját fogjuk jelölni. Speciálisan ha $(Z, \mathcal{C})$ egy mérhető tér és $C \in \mathcal{C}$, úgy $\mathcal{C} \cap C$ azon mérhető halmazok osztálya, melyek részei C-nek.

Amennyiben a C halmaz egy ismert Z „alaphalmaz" részhalmaza (például egy mértéktér mérhető halmaza), úgy definiálhatjuk a C halmaz χ_C karakterisztikus függvényét, amely Z-ből képez a $\{0, 1\}$ halmazba, értéke C-n konstans 1, azon kívül pedig konstans 0.

1.2. Mértékterek és szorzatuk

Mivel a továbbiakban legtöbbször két mérhető tér szorzatával fogunk foglalkozni, érdemes bevezetni ezekre egy fix jelölést: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ is jelöljön egy-egy mértékteret, vagyis legyen $\mathcal{A}$ az X halmaz részhalmazainak, $\mathcal{B}$ pedig az Y halmaz részhalmazainak egy σ-algebrája (ezek elemeit fogjuk a szokásos módon *mérhető halmazoknak* nevezni), a rajtuk értelmezett μ és ν mértékekkel (nemnegatív és σ-additív függvényekkel). A két mértéktér szorzatát egyszerűen $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$-vel fogjuk jelölni, ahol $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ alatt a két σ-algebra szorzatát, vagyis az $A \times B$ alakú halmazok által generált σ-algebrát értjük, ahol $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{B}$. A továbbiakban az ilyen $A \times B$ alakú hamazokat *tégláknak* nevezzük. Az $A \times B$ tégla (az X illetve Y téren vett) oldalain az A illetve B halmazokat értjük.

Mint ismert, a téglák halmazrendszere egy félgyűrűt alkot, vagyis téglák metszete tégla, két tégla különbsége pedig előáll más téglák véges (diszjunkt) uniójaként. Ebből a tulajdonságból következik, hogy a téglákon értelmezett természetes mértéket (ahol $A \times B$ mértéke $\mu(A) \cdot \nu(B)$) sztenderd módon ki tudjuk terjeszteni az $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ σ-algebrára: minden $C \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ halmazra C mértéke legyen

$$(\mu \times \nu)(C) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \cdot \nu(B_n) \,\middle|\, \forall n = 1, 2, \dots\ A_n \in \mathcal{A}, B_n \in \mathcal{B};\ \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n) \supset C \right\}.$$

Erről bizonyítható, hogy valóban mérték $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-n, vagyis $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ tényleg egy mértéktér lesz, melyben egy $A \times B$ tégla mértéke $\mu(A) \cdot \nu(B)$.

A szorzatmérték definíciójából következően minden pozitív ε-hoz és véges mértékű $C \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ halmazhoz létezik $(A_n \times B_n)_{n=1}^{\infty}$ téglasorozat, hogy $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n \supset C$, de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \cdot \nu(B_n) - (\mu \times \nu)(C) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor a téglasorozat első kellően sok tagját véve adódik, hogy létezik egy S mérhető halmaz, amely véges sok tégla uniója, és amelyre $(\mu \times \nu)(S \bigtriangleup C) < \varepsilon$.

Ha adottak $(A_i)_{i \in I}$ illetve $(B_j)_{j \in J}$ diszjunkt mérhető halmazaink az egyes tereken, valamely I illetve J indexhalmazzal, akkor az $\{A_i \times B_j \,|\, i \in I, j \in J\}$ halmazrendszerre téglarácsként fogunk hivatkozni. (A téglarács elemei nyilván diszjunkt téglák lesznek.) A téglarács X-re illetve Y-ra nézve vett vetületének az $(A_i)_{i \in I}$ illetve a $(B_j)_{j \in J}$ halmazrendszert nevezzük. Másfelől $(A_i)_{i \in I} \times (B_j)_{j \in J}$ alatt az általuk meghatározott téglarácsot értjük. (Bár ez a jelölés egybeesik a σ-algebrák szorzatának jelölésével, ez a későbbiekben nem fog félreértéseket okozni, hiszen a σ-algebrák csak a triviális esetben állnak diszjunkt halmazokból.)

Amennyiben az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértéktereket σ-végesnek feltételezzük, vagyis elvárjuk tőlük, hogy X illetve Y felbomoljon megszámlálhatóan sok $\mathcal{A}$-beli illetve $\mathcal{B}$-beli véges mértékű halmaz (diszjunkt) uniójára, úgy X és Y σ-véges felbontásai által előállított téglarács lefedi az egész $X \times Y$ teret, megszámlálható méretű és minden elemének mértéke véges – vagyis σ-véges mértékterek szorzata σ-véges lesz.

1.3. Atomos és atommentes mértékterek

Egy $(Z, \mathcal{C}, \xi)$ mértéktérben *atomnak* fogunk nevezni egy olyan $C \in \mathcal{C}$ halmazt, melynek minden D mérhető részhalmazára $\xi(D) = \xi(C)$ vagy $\xi(D) = 0$ teljesül. Azokat a mértéktereket, amelyek felbonthatók atomok diszjunkt uniójára *atomosnak* (vagy *teljesen atomosnak*), azokat pedig, melyekben nincsenek nem nullmértékű atomok (minden nullmértékű halmaz nyilvánvalóan atom) *atommentesnek* nevezzük.

A továbbiakban sokszor fogjuk használni a következő állítást:

1.1. Állítás. *A $(Z, \mathcal{C}, \xi)$ mértéktér pontosan akkor atommentes, ha minden $C \in \mathcal{C}$ halmazra és minden $0 \le \vartheta \le \xi(C)$ számra létezik egy $D \in \mathcal{C} \cap C$ halmaz, amelyre $\xi(D) = \vartheta$.*

Bizonyítás. (A bizonyíáts a Wikipedia vonatkozó szócikkében szereplő bizonyításvázlat alapján készült – lásd [9].)

Amennyiben a részhalmazfeltétel teljesül, úgy a tér atommentessége nyilvánvaló, elegendő tehát a másik irányt bizonyítanunk.

Ehhez a következőt fogjuk belátni: létezik egy $\mathcal{F} : [0, \xi(C)] \longrightarrow \mathcal{C} \cap C$ függvény, amely monoton a tartalmazásra nézve (vagyis ha $0 \leq s \leq t \leq \xi(C)$, akkor $\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t)$), illetve jobbinverze ξ-nek (vagyis minden $0 \leq t \leq \xi(C)$-re $\xi(\mathcal{F}(t)) = t$). Ha ezt beláttuk, úgy az $\mathcal{F}(\vartheta)$ halmaz létezése nyilván bizonyítja az állítást.

A keresett függvény létezését Zorn lemmájával fogjuk bebizonyítani: tekintsük azokat a függvényeket, melyek a fenti feltételeknek eleget tesznek, ám értelmezési tartományuk nem feltétlenül $[0, \xi(C)]$, hanem csak ennek egy részhalmaza. Az ilyen függvények nyilván részben rendezett halmazt alkotnak a tartalmazásra nézve, és ebben minden láncnak felső korlátja lesz a lánc uniója. Vagyis a Zorn-lemmát alkalmazva azt kapjuk, hogy van közöttük egy (tartalmazásra névze) maximális függvény – nevezzük ezt $\mathcal{F}$-nek. Be fogjuk látni, hogy $\mathcal{F}$ valóban megfelelő, vagyis az ő E értelmezési tartománya $[0, \xi(C)]$ lesz.

Először is vegyük észre, hogy az értelmezési tartomány zárt, hiszen akár alulról, akár felülről tartunk egy c számhoz egy E-beli $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozattal, úgy $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(e_n)$ illetve $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(e_n)$ mértéke pont c lesz, és a tartalmazási feltételeket is teljesíti – vagyis ha c nem volna E-beli, úgy $\mathcal{F}$ nem lehetne maximális.

Nyilvánvalóan látszik az is, hogy 0 és $\xi(C)$ is eleme E-nek: ha nem volnának azok, úgy $\mathcal{F}(0) = \emptyset$-zal illetve $\mathcal{F}(\xi(C)) = C$-vel kiegészíthetnénk $\mathcal{F}$-et. Továbbá ha $0 < c < \xi(C)$ és $c \notin E$, úgy (E zártsága miatt) létezik egy $b < c$ szám, hogy $b \in E$ és b maximális, valamint egy $d > c$ szám, hogy $d \in E$ és d minimális (d lehet ∞ is). Ekkor $\mathcal{F}(d) \setminus \mathcal{F}(b)$ egy mérhető halmaz, melynek mértéke $d - b$, tehát a tér atommentességéből adódóan van egy R mérhető részhalmaza, melynek mértéke szigorúan 0 és $d - b$ közé esik. Most tehát (b maximalitása és d minimalitása miatt) az $\mathcal{F}$ függvény nem értelmezett a $b + \xi(R)$ pontban, pedig itt $\mathcal{F}(b) \sqcup R$-ként értelmezve továbbra is megfelelő függvényt kapnánk – ez pedig ellentmond $\mathcal{F}$ maximalitásának. Vagyis E valóban megegyezik $[0, \xi(C)]$-vel, az állítást bebizonyítottuk.

q.e.d.

Amennyiben az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér atommentes, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ pedig σ-véges, úgy könnyen látható, hogy az $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ mértéktér is atommentes lesz.

1.4. Mérhető függvények

A $(Z, \mathcal{C})$ mérhető tér feletti mérhető függvényeken a kiterjesztett valós értékű (valós vagy $\pm\infty$ értékű), Borel-mérhető függvényeket értjük, vagyis azon r kiterjesztett valós értékű függvényeket, melyekre $\{z \in Z \,|\, r(z) \in B\} \in \mathcal{C}$ teljesül tetszőleges B Borel-halmaz mellett. Az ilyen típusú halmazokat röviden $\{r \in B\}$-vel fogjuk jelölni. Hasonlóan egy c konstansra az $\{r < c\}$ halmazon $\{z \in Z \,|\, r(z) < c\}$-t értjük, és ennek megfelelően értelmezzük az $\{r \leq c\}$, $\{r = c\}$, $\{r > c\}$, $\{r \geq c\}$ jelöléseket is.

Azokat a mérhető függvényeket a $(Z, \mathcal{C}, \xi)$ mértéktér felett, melyeknek integrálja létezik és véges *integrálható* függvényeknek fogjuk nevezni. Ennek megfelelően, ha egy C mérhető halmazon véges a függvényünk integrálja, úgy azt mondjuk, hogy a C halmazon integrálható. Jegyezzük meg, hogy amennyiben egy függvény integrálható egy C halmazon, úgy C-nek egy nullmértékű részhalmazán vehet csak fel $\pm\infty$ értéket. Fontos továbbá megemlítenünk, hogy amennyiben egy r mérhető függvény integrálható egy C halmazon, úgy az a rész, ahol a függvény értékei nem nullák egy σ-véges része lesz C-nek, vagyis az $\{r \neq 0\} \cap C$ halmaz felbomlik megszámlálhatóan sok véges mértékű halmaz uniójára – nyilván, hiszen az $\{n < |r| \leq n+1\}$ halmazok mértéke minden n természetes számra véges (különben r nem lenne integrálható), uniójuk pedig pont az $\{r \neq 0\}$ halmaz.

Mint tudjuk, egy $(Z, \mathcal{C}, \xi)$ σ-véges mértéktéren egy r és egy s mérhető függvény pontosan akkor egyezik meg majdnem mindenhol, ha minden $C \in \mathcal{C}$-re, ahol valamelyikük integrálja értelmes (de nem feltétlen véges), ott a másik integrálja is értelmes, és a két integrál megegyezik. Ezt a tulajdonságot (a σ-végesség miatt) elegendő a véges mértékű C halmazokon ellenőrizni. Speciálisan az r és s nemnegatív mérhető függvények pontosan akkor egyeznek meg (majdnem mindenhol), ha minden $C \in \mathcal{C}$ véges mértékű halmazra $\int_C r\, d\xi = \int_C s\, d\xi$. Hasonlóan $r \leq s$ pontosan akkor teljesül (majdnem mindenhol), ha minden $C \in \mathcal{C}$ véges mértékű halmazra $\int_C r\, d\xi \leq \int_C s\, d\xi$ teljesül.

Egy $(Z, \mathcal{C})$ mértéktéren adott mérhető s függvényt egyszerűnek nevezünk, ha értékkészlete véges, vagyis léteznek olyan $c_1, \ldots, c_n$ valós számok, hogy $\bigsqcup_{i=1}^{n} \{s = c_i\} = Z$. Könnyen látható, hogy minden r nemnegatív mérhető függvény megközelíthető (pontonként) nemnegatív egyszerű függvények monoton növekedő sorozatával. Ezt összevetve a monoton konvergencia tételével (mely szerint ha nemnegatív mérhető függvények egy sorozata monoton növekedően tart egy másik mérhető függvényhez, úgy ugyanez az integráljaikra is teljesül) azt kapjuk, hogy bármely r nemnegatív mérhető függvény megközelíthető alulról integrálban is egyszerű függvényekkel (vagyis van nemnegatív egyszerű függvények olyan sorozata, melyek sehol nem nagyobbak r-nél, és integráljaik tartanak r integráljához).

1.5. Az L^p terek és az L^2-beli gyenge konvergencia

Szükségünk lesz még különböző integrálhatósági tulajdonságokkal rendelkező függvények tereire is. Egy $p \geq 1$ valós számra, az adott $(Z, \mathcal{C}, \xi)$ mértéktér mellett az $L^p(Z, \mathcal{C}, \xi)$ jelölés alatt azon Z-n értelmezett mérhető r függvények halmazát értjük, melyekre $|r|^p$ integrálható (integrálja véges). (Ahol az egyértelműséget ez nem befolyásolja, $L^p(Z, \mathcal{C}, \xi)$-t rövidebben $L^p(Z)$-vel vagy egyszerűen L^p-vel is jelölhetjük.) Ez nyilvánvalóan vektortér lesz, sőt az is könnyen látható, hogy az

$$\|r\| = \left(\int\limits_Z |r|^p \, d\xi \right)^{\frac{1}{p}}$$

normával egy Banach-teret (vagyis teljes normált vektorteret) alkot.

(Jegyezzük meg, hogy valójában ez a struktúra nem egy vektortér. Csupán akkkor válik azzá, ha a nullmértékű halmazon különböző függvényeket azonosítjuk egymással. Tehát valójában L^p elemei a csak nullmértékű halmazon különböző függvények ekvivalenciaosztályai kell legyenek. Mivel azonban az egymástól csak nullmértékű hamazon eltérő függvényeket jelen munkánkban – a tárgyalt téma sajátosságai miatt – nem nagyon tudjuk, és nem is akarjuk megkülönböztetni, ezért a továbbiakban ennek az apró eltérésnek a hangsúlyozásától eltekintünk.)

Speciálisan $p = 2$-re (a „négyzetesen integrálható függvények” terére) teljesül még az is hogy Hilbert-teret alkot, vagyis a normát egy skalárszorzat definiálja:

$$\langle r, s\rangle = \int_Z r \cdot s \, d\xi.$$

Ezzel a skalárszorzattal definiálhatjuk a gyenge konvergencia fogalmát: egy $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ L^2-beli sorozat gyengén konvergens, ha minden $s \in L^2$ függvényre $\langle r_n, s\rangle$ konvergens. Ekkor (a Banach–Steinhaus-tétel, valamint a Riesz-féle reprezentációs tétel szerint) létezik egy $r \in L^2$ függvény, melyre minden s mellett $\lim_{n\to\infty}\langle r_n, s\rangle = \langle r, s\rangle$. Az r függvényt nevezzük az (r_n) sorozat gyenge limeszének, azt pedig, hogy az (r_n) sorozat gyengén tart r-hez $r_n \overset{w}{\to} r$-rel jelöljük.

Mint minden Hilbert-téren, úgy $L^2(Z)$-n is teljesül, hogy minden (normában) korlátos sorozatnak van gyengén konvergens részsorozata.

Jegyezzük meg, hogy ha $r_n \overset{w}{\to} r$ teljesül, úgy tetszőleges C véges mértékű halmazra

$$\int_C r_n \, d\xi = \int_Z r_n \cdot \chi_C \, d\xi \longrightarrow \int_Z r \cdot \chi_C \, d\xi = \int_C r \, d\xi,$$

hiszen χ_C négyzete önmaga, integrálja pedig $\xi(C)$, vagyis négyzetesen integrálható. Amennyiben $(Z, \mathcal{C}, \xi)$ σ-véges, és van egy R integrálható függvényünk, amely majorálja $|r_n|$-et minden n-re, úgy ez az összefüggés bármekkora mértékű C halmazra teljesül, hiszen C felbontható a véges mértékű $(C_j)_{j=1}^{\infty}$ halmazok diszjunkt uniójára, így

$$\lim_{n\to\infty} \int_C r_n \, d\xi = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{C_j} r_n \, d\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{C_j} r_n \, d\xi = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{C_j} r \, d\xi = \int_C r \, d\xi,$$

ahol a szumma és a limesz felcserélhetősége az (r_n) sorozat integrálható függvénnyel való majoráltságából következik, a nagy Lebesgue-tétel felhasználásával.

2. fejezet

A vizsgált marginálisproblémákról

Marginálisprobléma alatt rengeteg különböző kérdést értünk, melyek adott marginálisú mértékek, függvények illetve halmazok létezésével kapcsolatosak. Mi a függvényekre és a halmazokra vonatkozó bizonyos kérdésekkel fogunk foglalkozni. Mint látni fogjuk, a halmazok esete bizonyos értelemben egy erősebb állítás a függvényekre vonatkozó tételnél – ám szigorúbb feltételek mellett tudjuk csak belátni. (Az utolsó, 6. fejezetben azt is látni fogjuk, hogy ennek a különbségnek jelentősége van.)

2.1. A nemnegatív integrálható függvények felülről korlátozott problémája

A függvényekre vonatkozó marginálisproblémák vizsgálatához először is hasznos definiálnunk a függvények marginálisainak fogalmát:

2.1. Definíció. *Legyen adott egy h nemnegatív mérhető függvény az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és az $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ szorzatán. Ekkor h marginálisai alatt az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ téren értelmezett $h_X(x) = \int_Y h(x, y)\, d\nu(y)$ valamint az $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ téren értelmezett $h_Y(y) = \int_X h(x, y)\, d\mu(x)$ függvényeket értjük.*

A h_X függvényt a h függvény X-re (precízebben $(X, \mathcal{A}, \mu)$-re) vonatkozó vagy egyszerűen első marginálisának, a h_Y függvényt pedig h Y-ra vonatkozó vagy második marginálisának nevezzük; h marginálispárja alatt a (h_X, h_Y) függvénypárt értjük.

Megjegyzés. A definíció nem csak nemnegatív függvényekre működik, hanem bármely függvényre, melynek (a definícióban megadott) marginálisai (majdnem mindenhol) értelmesek – például integrálható függvényekre is. Bár mi nagyrészt nemnegatív függvényekkel foglalkozunk, szükségünk az integrálható függvényekre vonatkozó marginálisfogalomra is.

Mivel h nemnegatív (illetve integrálható) függvény, így – amennyiben a mértéktereink σ-végesek – a Fubini-tétel szerint h $X \times Y$-on vett integrálja megegyezik h_X X-en vett illetve h_Y Y-on vett integráljával is – vagyis a marginálisok integrálja is megegyezik egymással. Hasonlóan a h függvény $A \times Y$ illetve $X \times B$ típusú halmazokon vett integrálja egyenlő lesz h_X A-n vett illetve h_Y B-n vett integráljával.

Most megfogalmazhatjuk a marginálisprobléma általunk viszgált függvényekre vonatkozó alakját, a nemnegatív integrálható függvények felülről korlátozott problémáját:

Legyen adott egy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és egy $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértéktér, rajtuk egy-egy f illetve g nemnegatív mérhető függvénnyel, melyek integráhatóak is (integráljaik végesek). Legyen továbbá a mértékterek $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ szorzatán adva egy h nemnegatív mérhető függvény. Milyen feltételeket kell teljesítenie f-nek és g-nek, hogy létezzen egy k nemnegatív mérhető függvény a szorzattéren, melynek marginálispárja (majdnem mindenütt) megegyezik (f, g)-vel, és amelyre $k \leq h$ is teljesül?

Erre a problémára röviden a függvényekre vonatkozó problémaként (vagy a függvényekre vonatkozó feladatként) fogunk hivatkozni. Be fogjuk látni, hogy (bizonyos feltételek mellett) pontosan akkor létezik a fenti feladatot megoldó k függvény, ha az alábbi feltétel – melyet eredeti megfogalmazója után Kellerer-feltételnek nevezünk – teljesül:

2.2. Kellerer-feltétel. Azt mondjuk, hogy az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktéren adott f és az $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértéktéren adott g nemnegatív integrálható függvények teljesítik az $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ szorzattéren adott h nemnegatív mérhető függvényre vonatkozó Kellerer-feltételt, ha

$$\int_X f \, d\mu = \int_Y g \, d\nu =: \gamma,$$

továbbá minden $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{B}$ halmazra teljesül, hogy:

$$\gamma \leq \int_{A \times B} h \, d(\mu \times \nu) + \int_{\overline{A}} f \, d\mu + \int_{\overline{B}} g \, d\nu.$$

És akkor a függvényekre vonatkozó tételünk:

2.3. Tétel. *Legyen adott egy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ illetve egy $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértéktér, a rajtuk értelmezett f illetve g nemnegatív integrálható függvényekkel. Legyen továbbá adott egy h nemnegatív mérhető függvény a mértékterek $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ szorzatán, amely az $X \times Y$ tér minden véges mértékű részhalmazán integrálható. Pontosan akkor létezik egy k nemnegatív mérhető függvény a szorzattéren, melynek marginálisai majdnem mindenhol megegyeznek f-fel illetve g-vel, valamint amely legfeljebb nullmértékű halmazon nagyobb h-nál, ha f és g kielégítik a h-ra vonatkozó Kellerer-feltételt.*

Jegyezzük meg, hogy X illetve Y azon részeiről, melyeken f illetve g nulla értéket vesz fel el is felejtkezhetünk – ezeket a halmazokat azokhoz hozzácsapva, melyeken f-et illetve g-t integráljuk a feltétel ellenőrzésekor, könnyedén látható, hogy a Kellerer-feltételt elég az $\{f > 0\}$-ra és $\{g > 0\}$-ra megszorított mértékterek szorzatán megkövetelnünk. Ezt összevetve az 1.4. szakaszban írtakkal látható, hogy a mi esetünkben mindkét mértéktér σ-végesnek feltételezhető. Az f és g függvények integrálhatóságából az is következik, hogy feltételezhetjük, hogy f és g értékei mindenhol végesek, és hasonlóan az előbb feltett σ-végesség és a h véges hamazokon való integrálhatóságának feltétele együtt azt adja, hogy h-ról is feltehetjük, hogy mindenhol véges. (Lásd még a jelen szakaszt lezáró megjegyzést.)

A Kellerer-feltétel szükségessége egyébként könnyen látható, méghozzá a tételünknél jóval általánosabb körülmények között:

2.4. Állítás. *Amennyiben a függvényekre vonatkozó feladat megoldható, valamint f illetve g csak egy-egy σ-véges halmazon nem nullák (ami integrálható függvények esetén mindig teljeseül), úgy f és g mindenképpen kielégítik a Kellerer-feltételt.*

Bizonyítás. Legyen k a feladat egy megoldása. Mivel f és g tartói (azon halmazok, ahol ők nemnullák) σ-végesek, k tartója pedig lényegében része ezek szorzatának (hiszen f és g az ő marginálisai majdnem mindenhol), így k tartója is σ-véges lesz. Ekkor alkalmazhatjuk a Fubini-tételt, és így tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{B}$ halmazokra:

$$\gamma = \int\limits_{X\times Y} k\, d(\mu\times\nu) \leq \int\limits_{A\times B} k\, d(\mu\times\nu) + \int\limits_{\overline{A}\times Y} k\, d(\mu\times\nu) + \int\limits_{X\times\overline{B}} k\, d(\mu\times\nu) \leq$$
$$\leq \int\limits_{A\times B} h\, d(\mu\times\nu) + \int\limits_{\overline{A}} f\, d\mu + \int\limits_{\overline{B}} g\, d\nu,$$

hiszen $(A\times B)\cup(\overline{A}\times Y)\cup(X\times\overline{B}) = X\times Y$, a h függvény (majdnem mindenhol) majorálja k-t, és f valamint g (majndem mindenhol) k marginálisai.

q.e.d.

Megjegyzés. Mint a 2.3. tétel kimondásánál illetve a fenti állítás bizonyításánál is láttuk, állandóan kitételeket kell tennünk a majdnem mindenhol teljesülő összefüggésekre. Ez abból adódik, hogy a Kellerer-feltétel kizárólag függvények integráljairól szól, ezáltal nem különbözteti meg a nullmértékű halmazon eltérő függvényeket. Éppen ezért a továbbiakban mi is így teszünk: akkor is, ha ezt külön nem jelezzük, azonosnak fogjuk tekinteni a nullmértékű halmazon eltérő függvényeket, illetve a nullmértékű halmazban eltérő (nullmértékű szimmetrikus differenciával rendelkező) halmazokat.

Hasonló módon egy mérhető függvénytől nem feltétlenül várjuk el, hogy mindenhol értelmezve legyen, csak azt, hogy egy nullmértékű halmaztól eltekintve legyen értelmes.

2.2. A véges mértékű részhalmazokra vonatkozó feladat

A függvények esetére vonatkozó 2.3. tételt fogjuk felhasználni a halmazok esetének vizsgálathoz. Ezt nyilván megtehetjük, hiszen egy halmazt azonosíthatjuk az ő karakterisztikus függvényével, így tekinthetünk rá függvényként is. Egy szorzatmértéktér mérhető részhalmazának karakterisztikus függvénye mérhető függvény, marginálisai pedig pontosan megegyeznek a halmaz úgynevezett szekciómérték-függvényeivel, melyeket az alábbi módon definiálunk:

2.5. Definíció. *Legyen adott egy C mérhető halmaz két mértéktér $(X\times Y, \mathcal{A}\times\mathcal{B}, \mu\times\nu)$ szorzatában. Ekkor C szekciómérték-függvényei (vagy röviden szekciófüggvényei, esetleg marginálisai) alatt az $x \mapsto \nu(\{y \in Y \mid (x,y) \in C\})$ illetve $y \mapsto \mu(\{x \in X \mid (x,y) \in C\})$ függvényeket értjük.*

A függvénymarginálisokhoz hasonlóan ezeket az X-re illetve Y-ra vett, vagy egyszerűen első és második szekciómérték-függvényeknek nevezzük.

Halmazok marginálisai nyilvánvalóan nem lesznek mindig karakterisztikus függvények (ha úgy tetszik: halmazok), viszont adott („egydimenziós") függvények mellett kereshetünk olyan halmazt, melynek ezek a függvények lesznek a marginálisai. A függvények problémájának ebben a speciális esetében a korlátozó függvény létezése nyilván csak mérsékelten értelmes – a megoldást egy 0-1 értékű függvény alakjában keressük, így azon halmazon, melyen a korlátozó függvény értéke kisebb 1-nél, a megoldásfüggvény értéke csak 0 lehet.

Vagyis a korlátozó függvényről is feltehető, hogy 0-1 értékű, azaz karakterisztikus függvény. Így az adott szekciómérték-függvényekkel rendelkező halmazt egy másik halmaz részhalmazaként keressük. Ez adja a marginálisprobléma általunk vizsgált halmazos alakját (a véges mértékű részhalmazokra vonatkozó marginálisproblémát):

Legyen adott egy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és egy $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértéktér, rajtuk egy-egy f illetve g nemnegatív mérhető függvénnyel, melyek integrálhatóak is. Legyen továbbá az $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ szorzattéren adva egy M mérhető (de nem feltétlenül véges mértékű) halmaz. Milyen feltételeket kell teljesítenie f-nek és g-nek, hogy létezzen egy U mérhető halmaz a szorzattéren, melynek marginálispárja (majdnem mindig) megegyezik (f, g)-vel, és amelyre $U \subset M$?

Ekkor a fenti 2.2. Kellerer-feltételt átfogalmazhatjuk a halmazok esetére:

2.6. Kellerer-feltétel. Azt mondjuk, hogy az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktéren adott f és az $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértéktéren adott g nemnegatív integrálható függvények teljesítik az $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ szorzattéren adott M mérhető halmazra vonatkozó Kellerer-feltételt, ha

$$\int_X f \, d\mu = \int_Y g \, d\nu =: \gamma,$$

továbbá minden $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{B}$ halmazra teljesül, hogy:

$$\gamma \leq (\mu \times \nu) \left((A \times B) \cap M \right) + \int_{\overline{A}} f \, d\mu + \int_{\overline{B}} g \, d\nu.$$

A Kellerer-feltétel szükségessége a 2.4. állítás alapján itt is nyilvánvaló. A függvények esetére vonatkozó 2.3. tételnek, illetve bizonyos speciális alakú (függvény)megoldások létezésére vonatkozó későbbi tételünk következménye lesz a halmazokra vonatkozó Kellerer-feltétel elégségessége megfelelő körülmények között:

2.7. Tétel. *Legyen adott egy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ illetve egy $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ atommentes mértéktér, a rajtuk értelmezett f illetve g nemnegatív integrálható függvényekkel. Legyen továbbá adott egy M mérhető halmaz a mértékterek $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ szorzatán. Pontosan akkor létezik egy U mérhető részhalmaza M-nek, melynek marginálisai majdnem mindenhol megegyeznek f-fel illetve g-vel, ha f és g kielégítik az M-re vonatkozó Kellerer-feltételt.*

Az előző szakaszban, a 2.3. tétel után tett megjegyzés itt is érvényes – feltételezhetjük, hogy a tereink σ-végesek. Érdemes kiemelnünk továbbá, hogy a függvények esetéhez képest megjelenik pluszfeltételként a mértékterek atommentessége. Erre a speciális alakú megoldások tételének bizonyításához lesz szükségünk (5.1. tétel).

Megjegyzendő, hogy a tétel ebben a formában nem is lehet igaz az atommentesség feltétele nélkül – mindenképpen szükséges feltennünk, hogy az f illetve g függvények értékei „megfelelőek”, vagyis (majdnem mindig) egy-egy $\mathcal{B}$-beli illetve $\mathcal{A}$-beli halmaz ν illetve μ szerinti mértékei, hiszen máskülönben nem lehetnének egy mérhető halmaz szekciómértékei, holott a Kellerer-feltételt kielégíthetik. (A 2.4. állítás alapján ez könnyen látható.) Azonban a 6. fejezetben látni fogjuk, hogy még ez az extra feltétel sem feltétlen elegendő.

3. fejezet

Atomos terek és a keresett függvény megközelítése

Miután tisztáztuk, mivel is akarunk foglalkozni, ideje elkezdenünk felépíteni a bizonyításunkat. Mivel a függvényekre vonatkozó marginálisproblémát megoldó függvényeket valamilyen értelemben diszkrét módon tudjuk jól közelíteni, első lépésként szükségünk lesz némi kombinatorikára.

3.1. Ford–Fulkerson és az atomos szorzattér

Ebben a szakaszban meg fogjuk oldani a függvényekre vonatkozó marginálisproblémát véges sok véges mértékű atomból álló teljesen atomos mértékterek esetén. Bár ezt az eredményt közvetlenül nem használjuk fel a későbbiekben, a hozzá vezető bizonyítás gondolatait használni fogjuk az általános eset bizonyításához. Illendő továbbá megemlítenünk, hogy a bizonyítást Lovász László és Michael D. Plummer munkája ihlette, akik könyvükben rámutatnak a marginálisprobléma és a folyamok elmélete közötti összefüggésre (lásd [6] 2.5. szakasz).

Tegyük fel hát, hogy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ két teljesen atomos mértéktér (lásd 1.3. szakasz), és tegyük fel, hogy mindkettőben csak véges sok (lényegesen különböző) atom van, és ezek is mind véges mértékűek. Könnyen látható, hogy ekkor feltehetjük: a mértékterek pontjai megegyeznek a (nem nullmértékű) atomokkal. (Mint már említettük, nem kívánjuk megkülönböztetni a „majdnem mindig azonos” dolgokat egymástól – tekintve, hogy halmazok mértékeivel, függvények integráljaival illetve marginálisfüggvényekkel dolgozunk, erre voltaképpen nem is lenne lehetőségünk.) Ekkor mindkét tér véges sok pontból áll, az $\mathcal{A}$ illetve $\mathcal{B}$ σ-algebrák pedig az X illetve Y terek hatványhalmazai lesznek. (Éppen ezért kényelmi okokból az egyetlen pontból álló $\{x\} \subset X$ illetve $\{y\} \subset Y$ halmazokra egyszerűen x-ként illetve y-ként fogunk hivatkozni.) Nyilván a mértékterek $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ szorzata is atomos lesz. (Az itteni atomok az eredeti terek atomjainak szorzatai lesznek.)

Jegyezzük meg, hogy a mérhető függvények az atomokon (egy nullmértékű halmaz kivételével) konstans értéket vesznek fel – ezért is tehetjük meg, hogy pontoknak tekintjük őket. És így, ha két függvény integrálja egy atomon valamilyen relációban áll egymással (egyenlők, az egyik kisebb a másiknál, stb.), ugyanez teljesül a függvények értékeire is.

Legyenek tehát adottak az f illetve g nemnegatív függvények az X illetve Y tereken, valamint a szorzattéren legyen adott egy h nemnegatív és mérhető függvény, melyek értékei végesek. (Mivel véges sok véges mértékű atomból áll a terünk, így mértéke véges, és az integrálhatóság feltétele ekvivalens a függvény végesértékűségével.)

Konstruáljuk most meg a következő Γ irányított gráfot, az élein adott kapacitásokkal:

- A gráf csúcsai legyenek egy a pont, X elemei, Y elemei és egy z pont. (Feltesszük, hogy $a, z \notin X \cup Y$).
- Az a pontból mutasson egy-egy irányított él X minden x pontjába. Ezek kapacitása legyen $f(x) \cdot \mu(x)$, vagyis az f függvény integrálja x-en.
- X minden x pontjából vezessen egy él Y minden y pontjába. Ezek kapacitása legyen $h(x, y) \cdot \mu(x)\nu(y)$, vagyis h integrálja $x \times y$-on.
- Y minden pontjából mutasson egy él z-be, rajtuk $g(y) \cdot \nu(y)$ $(y \in Y)$ kapacitással (ez a g függvény y-on vett integrálja).

Vegyük észre, hogy a szorzattér bármely mérhető függvénye kölcsönösen egyértelműen megfelel egy Γ-n adott folyamnak – az r függvény értékei legyenek az $\overrightarrow{xy}$ $(x \in X,\ y \in Y)$ éleken felvett folyamértékek $1/(\mu(x)\nu(y))$-szorosai (így a folyam értéke a függvény $x \times y$-on vett integráljával egyezik meg), ekkor $\overrightarrow{ax}$ folyamértékei r X szerinti marginálisának x-en vett integráljai ($\mu(x)$-szeresei), $\overrightarrow{yz}$ folyamértékei az Y szerint vett marginálisának y-on vett integráljaival ($\nu(y)$-szorosaival) egyeznek meg. A folyam értéke pedig r integráljával lesz egyenlő.

Ezzel a megfeleltetéssel a megengedett folyamokhoz pontosan azok a függvények tartoznak, melyek h-nál sehol sem nagyobbak, és melyek marginálisai sem nagyobbak f-nél illetve g-nél.

Tegyük fel most, hogy f és g kielégítik a Kellerer-feltételt. Ha sikerülne egy olyan nemnegatív és megengedett folyamot találnunk, melynek értéke megegyezik f (és így g) integráljával, az ahhoz tartozó függvény megoldaná a marginálisproblémát. (Mivel feltettük, hogy f és g integrálhatóak, így ha egy függvény marginálisai nemnegatívok, sehol nem nagyobbak f-nél illetve g-nél, viszont integráljuk megegyezik f illetve g integráljával, úgy a függvény marginálisai majdnem mindig megegyeznek f-fel illetve g-vel.)

Mivel X és Y véges sok pontból állnak, valamint f és g integrálja véges, így elegendő lenne látnunk, hogy minden vágás értéke legalább γ lesz. (Emlékeztetőül: γ-val f illetve g integráljának értékét jelöltük.) Ekkor ugyanis a Ford–Fulkerson-tétel alapján a maximális megengedett folyam értéke legalább γ lenne – vagyis a hozzá tartozó függvény kielégítené a feltételeket.

Legyen tehát egy vágásuk, melynek egyik felébe a, $A \subset X$ és $B \subset Y$ tartozik. Ekkor a gráf kapacitásfüggvényét c-vel jelölve, vágás értéke:

$$\sum_{x \notin A} c(\overrightarrow{ax}) + \sum_{x \in A, y \notin B} c(\overrightarrow{xy}) + \sum_{y \in B} c(\overrightarrow{yz}) = \int_{\overline{A}} f\, d\mu + \int_{A \times \overline{B}} h\, d(\mu \times \nu) + \int_{B} g\, d\nu \geq \gamma,$$

ahol az egyenlőtlenség a 2.2. Kellerer-feltétel az A és $\overline{B}$ halmazokra felírva.

Tehát bebizonyítottuk a következő tételt:

3.1. Tétel. *Legyenek* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *és* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *teljesen atomos mértékterek, melyekben csak véges sok (lényegileg különböző) nem nullmértékű atom van, és ezek mértéke is mind véges. Legyenek rajtuk adva az* f *illetve* g *nemnegatív mérhető függvények, valamint legyen adva az ő* $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ *szorzatterükön egy* h *nemnegatív mérhető függvény, melyek értékei (majdnem mindenhol) végesek. Ezen feltételek mellett pontosan akkor létezik egy* k *nemnegatív mérhető függvény a szorzattéren, melynek marginálisai (majdnem mindenhol)* f *és* g*, valamint amely (nullmértékű halmaz kivételével) sehol sem nagyobb a* h *függvénynél, ha* f *és* g *kielégítik a* h *függvényre vonatkozó Kellerer-feltételt.*

Megjegyzés. Mint már említettük, amennyiben a halmazokra vonatkozó marginálisproblémát akarjuk megoldani, úgy további megszorításokat kell tegyünk az f és g függvényekre: fel kell tennünk, hogy f illetve g értékei „megfelelőek”, azaz értékeik egy-egy $\mathcal{B}$-beli illetve $\mathcal{A}$-beli halmaz mértékével egyeznek meg.

Ám (mint a 6. részben látni fogjuk) ez önmagában még nem elegendő a teljesen atomos halmazok esetének megoldásához. Egy speciális esetben viszont elegendő: méghozzá akkor, ha feltesszük, hogy az eredeti terek minden atomja azonos (véges) mértékű – feltehető, hogy ez az érték mindkét térre 1. (Amennyiben az atomok végtelen mértékűek lennének valamelyik térben, úgy f illetve g integrálhatóságából következően a reménybeli szekciómérték-függvényeink nulla integrálúak lennének.) Ezen feltételezések mellett f és g egészértékű lesz. Sőt, észrevehetjük, hogy itt X és Y végességének feltételezése sem szükséges: erre Γ végességének biztosításához volt szükségünk, de mivel f és g integrálható és egészértékű, így véges sok pont (egy véges mértékű halmaz) kivételével mindenhol 0 lesz. Ebből következően Γ-ben bármilyen megengedett folyam csak bizonyos (f-től és g-től függő) véges sok élen lehet nemnulla értékű. Tehát az ezek által generált részgráfot véve egy véges problémát kell megoldanunk.

Most nyilvánvalóan Γ minden élének kapacitása egész szám lesz, így a maximális folyam is választható egészértékűnek – tehát a hozzá tartozó függvény is egészértékű, azaz (mivel a χ_M 0-1 értékű függvény korlátozza) egy halmaz karakterisztikus függvénye lesz.

Tehát a diszkrét esetben (teljesen atomos, csupa azonos és véges mértékű atomból álló mértékterek esetében) a halmazokra vonatkozó marginálisprobléma pontosan akkor megoldható, ha f *illetve* g *minden értéke a* Y *illetve* X *atommértékének egész többszörösöse, valamint* f *és* g *kielégíti a Kellerer-feltételt.*

3.2. A „nem túl nagy” függvények szuprémuma

Ebben a szakaszban megpróbáljuk belátni, hogy – a 2.3. tétel feltételei mellett – a függvényekre vonatkozó marginálisproblémát megoldó függvény (akár létezik, akár nem) valamilyen értelemben megközelíthető bizonyos függvényekkel, melyeket „nem túl nagy” függvényeknek fogunk nevezni.

Legyen tehát adott egy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ illetve egy $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértéktér, és legyen rajtuk adva az f illetve g nemnegatív és integrálható függvény, valamint legyen adott a két tér szorzatán a nemnegatív és mérhető h függvény is. További megszorításként fel kell teleznünk, hogy a h függvény minden véges mértékű halmazon integrálható. Tegyük fel azt is, hogy f és g kielégíti a h-ra vonatkozó 2.2. Kellerer-feltételt. Az f és g függvények integrálja ekkor megegyezik, ezt a (véges) értéket γ-val fogjuk jelölni, továbbá (mint a 11. oldalon megjegyeztük) feltehetjük, hogy a mértéktereink σ-végesek.

Adott f, g és h mellett olyan nemnegatív függvényeket nevezünk *„nem túl nagynak”*, melyek sehol sem nagyobbak h-nál, és marginálisaik sem nagyobbak f-nél illetve g-nél.

Egy nem túl nagy függvény integrálja nyilván soha nem nagyobb γ-nál, és ha az integrálja egyenlő γ-val, akkor ő megoldása lesz a feladatnak. (Az, hogy az integrál soha nem nagyobb γ-nál a Fubini-tétel egyenes következménye. Ahhoz, hogy a γ integrálú nem túl nagy függvény megfelelő lesz, a Fubini-tételből és a függvények nemnegativitásából látható.)

A célunk tehát az, hogy belássuk: nem túl nagy függvényekkel meg tudjuk közelíteni integrálban a (feltételezett) megoldást. Precízebben: a nem túl nagy függvények halmazát $\mathcal{K}$-val jelölve teljesül a

$$\sup\left\{ \int\limits_{X\times Y} k\, d(\mu\times\nu) \,\middle|\, k\in\mathcal{K} \right\} = \gamma$$

összefüggés. Ennek eléréséhez meg fogjuk próbálni valamilyen értelemben „diszkretizálni” a problémát.

Először is rögzítsünk egy pozitív ε számot. Mint az 1.4. szakaszban láttuk, f-hez található egy olyan mérhető f_ε függvény, amelyre:

- $0 \le f_\varepsilon \le f$;
- f_ε egyszerű, vagyis csak véges sok értéket vesz fel;
- $\{f_\varepsilon > 0\}$ (a továbbiakban: X') véges mértékű;
- $0 \le \int_X (f - f_\varepsilon)\, d\mu < \varepsilon$.

Az első kettő és az utolsó pontról a már hivatkozott 1.4. szakaszban leírtuk, miért tehető fel. A harmadik pont pedig f_ε egyszerűségének és az utolsó pontnak nyilvánvaló következménye: mivel f integrálja véges, f_ε-é ennél nem nagyobb (de nemnegatív), továbbá mivel f_ε nemnegatív és egyszerű, így ahol f_ε nemnulla, ott van minimális értéke, tehát egy véges mértékű halmaz kivételével mindenhol 0 értéket vesz fel.

Nyilván teljesen hasonlóan választható egy g_ε mérhető függvény is, melyre:

- $0 \le g_\varepsilon \le g$;
- g_ε egyszerű, vagyis csak véges sok értéket vesz fel;
- $\{g_\varepsilon > 0\}$ (a továbbiakban: Y') véges mértékű;
- $0 \le \int_Y (g - g_\varepsilon)\, d\mu < \varepsilon$.

Most szeretnénk egy hasonló tulajdonságokkal rendelkező h_ε függvényt is találni, ám itt szükségünk lesz egy plusz feltételre: fel kell tennünk, hogy az $X \times Y$ szorzattér előáll egy véges téglarács (lásd 1.2. szakasz) alakjában (pontosabban egy téglarács uniójaként), ahol a téglarács elemein h_ε konstans, legalábbis azon a részen, ahol erre szükségünk lesz:

az $X' \times Y'$ téglán. Viszont ezt csak úgy tudjuk elérni, hogy elhagyjuk a $h_\varepsilon \leq h$ feltételt, és ennek megfelelően $\int_{X \times Y} |h - h_\varepsilon| \, d(\mu \times \nu) < \varepsilon$-t tételezünk fel.

A h_ε függvényt $X' \times Y'$-n kívül h-val egyenlőnek fogjuk definiálni, tehát elég a fentieket az $X' \times Y'$ halmazok megcsinálnunk. (Nyilván ha ott van egy véges téglarács, az „kiterjeszthető" az egészre is.) Most h integrálható $X' \times Y'$-n, hiszen ez véges mértékű (láttuk, hogy mind X' mind Y' az, h-ról pedig feltételeztük, hogy minden véges mértékű halmazon integrálható). Vegyünk itt egy h' egyszerű függvényt, amelyre teljesül, hogy ő nemnegatív, és integrálban ε-nal közelíti h-t, vagyis $\int_{X' \times Y'} |h - h'| \, d(\mu \times \nu) < \varepsilon$.

Ezt a h'-t fogjuk a nekünk megfelelő módon átalakítani. Legyenek h' nemnulla értékei $c_1 < c_2 < \cdots < c_r$. Ekkor $\{h' = c_1\}$ (mint már erre utaltunk az 1.2. szakaszban) megközelíthető véges sok tégla (diszjunkt) uniójával – nevezzük ezt az uniót S_1-nek – tetszőleges $\eta > 0$ pontossággal. Mivel h' korlátos, így η-t elég picire választva elérhető, hogy S_1-en h' értékét c_1-re változtatva $\{h' = c_1\} \setminus S_1$-en pedig nullává téve még mindig ne sértsünk meg semmilyen feltételt, melyet h'-re tettünk. Másképp fogalmazva: feltehető, hogy h' a c_1 értéket véges sok tégla unióján veszi fel.

Nyilván hasonló módon feltehető, h' minden nemnulla értéket téglák véges unióján vesz fel. (Ehhez többször ki kell használnunk a téglák félgyűrű tulajdonságát. Amennyiben például $S_1 = \{h' = c_1\}$ téglák véges uniója, előfordulhat, hogy a $\{h' = c_2\}$-t közelítő S_2 téglarendszer ebbe belemetsz. Ám a félgyűrű tulajdonság miatt $S_1 \setminus S_2$ is téglák véges uniója lesz.) Ekkor az $X' \times Y' \setminus \{h' \neq 0\}$ halmaz is felbomlik téglák diszjunkt uniójára (szintén a téglák halmazának félgyűrű tulajdonsága miatt). Diszjunkt téglák véges uniója pedig nyilván „generál" egy véges téglarácsot, hogy az eredeti téglák a téglarács elemeinek (diszjunkt) uniói legyenek.

Vagyis a h_ε függvényt $X' \times Y'$-n h'-vel, azon kívül pedig h-val egyenlőnek definiálva sikerült előállítanunk egy h_ε függvényt, melyre teljesül:

- $h_\varepsilon \geq 0$;
- $h_\varepsilon|_{X' \times Y'}$ egyszerű, vagyis h_ε az $X' \times Y'$ halmazon csak véges sok értéket vesz fel;
- $X' \times Y'$ felbomlik egy olyan véges $\mathcal{R}$ téglaráccsá ($\bigcup \mathcal{R} = X' \times Y'$ teljesül egy $\mathcal{R}$ véges téglarácsra), melynek elemein h_ε konstans;
- $0 \leq \int_{X \times Y} |h - h_\varepsilon| \, d(\mu \times \nu) = \int_{X' \times Y'} |h - h_\varepsilon| \, d(\mu \times \nu) < \varepsilon$.

Most szeretnénk elérni, hogy $f_\varepsilon|_{X'}$ nívóhalmazai és $\mathcal{R}$ X'-re vett vetülete megegyezzenek egymással – pontosabban, hogy f_ε konstans legyen $\mathcal{R}$ vetületének elemein. Ez nyilván elérhető, hiszen $f_\varepsilon|_{X'}$ nívóhalmazainak rendszerét (az $\{f_\varepsilon = c\}$ alakú halmazokat – ez véges sok diszjunkt nemüres halmaz, plusz az üreshalmaz lesz) $\mathcal{P}$-vel, $\mathcal{R}$ X'-re vett vetületét vetületét $\mathcal{X}$-szel, Y'-re vett vetületét pedig $\mathcal{Y}$-nal jelölve, a $\mathcal{P} \cup \mathcal{X}$ rendszer diszjunktizáltját (vagyis a $\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m C_j\right)$ halmazok rendszerét, ahol az A_i-k és C_j-k mind különbözőek és lefedik $\mathcal{P} \cup \mathcal{X}$-et) pedig $\mathcal{P}'$-nek nevezve $\mathcal{R}$ helyettesíthető $\mathcal{P}' \times \mathcal{Y}$-nal – ez már teljesíti a kívánt feltételt. Vagyis feltehető, hogy f_ε konstans az $\mathcal{R}$ téglarács X'-re vett vetületének minden elemén, és nyilván hasonlóan feltehető, hogy g_ε konstans az $\mathcal{R}$ Y'-re vett vetületének minden elemén.

Végső soron tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett elő tudtunk állítani egy $\mathcal{R}$ véges téglarácsot, valamint olyan f_ε, g_ε illetve h_ε X-en, Y-on illetve $X \times Y$-on értelmezett nemnegatív mérhető függvényeket, melyekre:

- $0 \leq f_\varepsilon \leq f$, $0 \leq g_\varepsilon \leq g$, $h_\varepsilon \geq 0$;
- $\mathcal{R}$ elemein h_ε, megfelelő oldalaikon pedig f_ε illetve g_ε konstansok;
- $\mathcal{R}$ megfelelő vetületein kívül f_ε illetve g_ε csak a 0 értéket veszi fel;
- $0 \leq \int_X (f - f_\varepsilon)\, d\mu,\ \int_Y (g - g_\varepsilon)\, d\nu,\ \int_{X\times Y} |h - h_\varepsilon|\, d(\mu \times \nu) < \varepsilon.$

Most a teljesen atomos esethez hasonlóan elkészíthetünk egy Γ irányított gráfot, élein adott kapacitásokkal. Nevezzük $\mathcal{R}$ X-re vett vetületét $\mathcal{X}$-nek, Y-ra vett vetületét pedig $\mathcal{Y}$-nak. Ekkor:

- Γ csúcsai legyenek egy a pont, $\mathcal{X}$ elemei, $\mathcal{Y}$ elemei valamint egy z pont (feltesszük, hogy $a, z \notin \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$);
- mutassanak a-ból élek $\mathcal{X}$ minden A elemébe, kapacitásuk pedig legyen f_ε itt felvett értékének $\mu(A)$-szorosa, vagyis $\int_A f_\varepsilon\, d\mu$;
- mutassanak Γ-nak további élei $\mathcal{X}$ minden A eleméből $\mathcal{Y}$ minden B elemébe, kapcitásuk pedig legyen h_ε itt felvett értékének $\mu(A)\nu(B)$-szerese, vagyis $\int_{A\times B} h_\varepsilon\, d(\mu \times \nu)$;
- ezen felül legyenek Γ-ban $\mathcal{Y}$ minden B eleméből z-be mutató élek, ezek kapacitása pedig legyen g_ε B-n felvett értékének $\nu(B)$-szerese, vagyis $\int_B g_\varepsilon\, d\nu$;
- ne legyenek további élei Γ-nak.

Ekkor Γ egy véges gráf lesz.

Most (szintén az atomos esethez hasonlóan) a Γ-n értelmezett (nemnegatív) megengedett folyamok megfelelnek olyan $X \times Y$-on értelmezett függvényeknek, melyek értéke $\mathcal{R}$ elemein kívül mindig 0, $\mathcal{R}$ elemein konstansok, marginálisaik nem nagyobbak f_ε-nál illetve g_ε-nál, valamint értékei sehol nem nagyobbak h_ε-nál. Valóban, ha adott egy megengedett folyamunk, akkor az $X \times Y$-on értelmezett függvényt $\mathcal{R}$ elemein kívül 0-nak, $\mathcal{R}$ egy $A \times B$ elemén pedig a folyam $\overrightarrow{AB}$-n felvett értékének $1/(\mu(A)\nu(B))$-szereseként definiálva ezek a feltételek mind teljesülni fognak, a függvény integrálja pedig a folyam értéke lesz. (Lásd a teljesen atomos eset részletezését a 15. oldalon.)

Következőnek meg kellene becsülnünk egy vágás értékét. Legyen a vágásunk olyan, hogy az egyik felébe tartozzon az a pont, az oda tartozó $\mathcal{X}$-beli elemek uniója legyen A, az $\mathcal{Y}$-belieké pedig B. Az $\bigcup \mathcal{X}$ illetve az $\bigcup \mathcal{Y}$ halmazra pedig alkalmazzuk a már használt X' illetve Y' jelölést. Ekkor a vágás értéke:

$$\int\limits_{X'\setminus A} f_\varepsilon\, d\mu + \int\limits_{A\times(Y'\setminus B)} h_\varepsilon\, d(\mu \times \nu) + \int\limits_{B} g_\varepsilon\, d\nu = \int\limits_{\overline{A}} f_\varepsilon\, d\mu + \int\limits_{A\times(Y'\setminus B)} h_\varepsilon\, d(\mu \times \nu) + \int\limits_{\overline{Y'}\cup B} g_\varepsilon\, d\nu \geq$$

$$\geq \int\limits_{\overline{A}} f\, d\mu - \varepsilon + \int\limits_{A\times(Y'\setminus B)} h\, d(\mu \times \nu) - \varepsilon + \int\limits_{\overline{Y'}\cup B} g\, d\nu - \varepsilon \geq \gamma - 3\varepsilon,$$

ahol az egyenlőség abból adódik, hogy f_ε illetve g_ε X'-n illetve Y'-n kívül 0 értéket vesznek fel, az első egyenlőtlenség $0 \leq f_\varepsilon \leq f$, $0 \leq g_\varepsilon \leq g$ valamint az $f - f_\varepsilon$, $g - g_\varepsilon$ és $|h - h_\varepsilon|$ függvények integráljaira tett feltételek következménye, a második egyenlőtlenség pedig a 2.2. Kellerer-feltétel közvetlen alkalmazása.

Vegyünk tehát egy maximális megengedett folyamot, a hozzá tartozó függvény neve legyen k', és $\min(k', h)$-t nevezzük $k_{4\varepsilon}$-nak. Ekkor $k_{4\varepsilon}$-ra teljesül, hogy:

- $k_{4\varepsilon}$ nemnegatív;

- $k_{4\varepsilon}$ marginálisai nem nagyobbak f-nél illetve g-nél, hiszen $k_{4\varepsilon}$ nem nagyobb k'-nél, mindkettő nemnegatív, k' marginálisai pedig nem nagyobbak f_ε-nál illetve g_ε-nál, ezek pedig nem nagyobbak f-nél illetve g-nél;

- $k_{4\varepsilon}$ sehol nem nagyobb h-nál;

- $\int_{X\times Y} k_{4\varepsilon}\, d(\mu\times\nu) \geq \gamma - 4\varepsilon$, hiszem k' integrálja a maximális folyam értékével egyezik meg, azaz legalább $\gamma - 3\varepsilon$, továbbá k' nem nagyobb h_ε-nál, így $\min(k', h)$ integrálja k'-énél legfeljebb ε-nal lehet kisebb (mivel $\int_{X\times Y} |h - h_\varepsilon|\, d(\mu\times\nu) < \varepsilon$).

Vagyis minden $\varepsilon > 0$-ra előállítottunk egy k_ε nem túl nagy függvényt, melynek integrálja legfeljebb ε-nal kisebb γ-nál. Másfelől a nem túl nagy függvények integrája szükségszerűen nem nagyobb f integráljánál, γ-nál. Így valóban beláttuk a

$$\sup\left\{ \int\limits_{X\times Y} k\, d(\mu\times\nu) \,\middle|\, k \in \mathcal{K} \right\} = \gamma$$

összefüggést.

4. fejezet

A függvények esetének megoldása

Ebben a fejezetben szeretnénk belátni a 2.3. tételt. Az előző részben bizonyítottuk, hogy a tétel feltételei mellett a nem túl nagy függvények (lásd 17. oldal) integráljainak szuprémuma az f és g függvények közös γ integrálja. Tehát ha sikerülne igazolnunk, hogy a szuprémum előáll maximumként, azaz van egy nem túl nagy függvény γ integrállal, akkor a függvényes eset bizonyításával készen lennénk (mint azt már a nem túl nagy függvények fogalmának bevezetésekor megállapítottuk).

Legyen tehát adott egy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és egy $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértéktér, rajtuk az f és g nemnegatív integrálható függvényekkel, valamint a szorzattéren értelmezett h nemnegatív mérhető függvény, amelyről feltesszük, hogy majdnem mindenhol véges értékű, és melyre f és g kielégíti a 2.2. Kellerer-feltételt - és így a 11. oldalon írtak szerint feltehetjük azt is, hogy a mértéktereink σ-végesek. (Ebben a fejezetben arra, hogy h véges mértékű halmazokon integrálható nem lesz szükségünk, a véges értékűség gyengébb feltétele elegendő lesz. Az erősebb feltételt voltaképpen csak az előző fejezetben használtuk ki, megfelelő atomos közelítés megkonstruálásához – lásd a h_ε függvény konstrukcióját a 18. oldalon.)

Vegyük most nem túl nagy függvények (a szorzattér nemnegatív mérhető függvényei, melyek marginálisai nem nagyobbak f-nél illetve g-nél, maguk pedig nem nagyobbak h-nál) egy $\left(k^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozatát, melyekre

$$\int_{X\times Y} k^{(n)}\, d(\mu \times \nu) \longrightarrow \gamma$$

teljesül. (Bár a 2.3. tétel bizonyításához azt az esetet kell használnunk, ahol γ az f és g függvények közös integrálja, a bizonyítás bármely γ érték mellett helyes lesz. A nem túl nagy függvények definíciója alapján ez az érték nem lehet nagyobb f és g integráljánál, így mindig véges.)

4.1. Az integrálható és négyzetesen integrálható eset

Most vegyük észre, hogy ha h négyzetesen integrálható és integrálható is volna (vagyis benne lenne $L^2(X \times Y) \cap L^1(X \times Y)$-ban), úgy (a $0 \le k^{(n)} \le h$-ból adódóan) minden n-re $k^{(n)} \in L^2$ és $\|k^{(n)}\| \le \|h\|$ is teljesülne (az L^2-normával) – vagyis találhatnánk $\left(k^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$-nek egy gyengén konvergens részsorozatát (lásd az 1.5. szakaszt). Feltehetnénk tehát, hogy a $\left(k^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozat gyengén konvergens, gyenge limesze pedig a k függvény. Ekkor, mivel a $k^{(n)}$ függvényeket majorálja az integrálható h függvény, ezért

$$\int\limits_{X\times Y} k\, d(\mu\times\nu) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{X\times Y} k^{(n)}\, d(\mu\times\nu) = \gamma$$

következne (lásd az 1.5. szakaszt). Vagyis ebben az esetben elég belátnunk, hogy k nem túl nagy függvény. Ehhez két dolgot kell ellenőrizni: hogy nemnegatív, de sehol nem nagyobb h-nál; illetve hogy marginálisai sehol nem nagyobbak f-nél illetve g-nél.

Mivel minden n pozitív egészre $k^{(n)} \leq h$, így minden véges mértékű $C \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}$ halmazra:

$$\int\limits_{C} k\, d(\mu\times\nu) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{C} k^{(n)}\, d(\mu\times\nu) \leq \int\limits_{C} h\, d(\mu\times\nu),$$

amiből $k \leq h$ adódik (hiszen $(X\times Y, \mathcal{A}\times\mathcal{B}, \mu\times\nu)$-ról feltehettük, hogy σ-véges, lásd 1.4. szakasz). A k függvény nemnegatívitása ugyanilyen módon látható (a fentit h helyett az azonosan 0 függvényre és fordított irányú egyenlőtlenségre alkalmazva).

És ehhez hasonlóan kaphatjuk a marginálok nem túl nagyságát is. Vegyünk egy tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ véges mértékű halmazt. A h függvényről feltettük, hogy integrálható, és minden n-re majorálja $k^{(n)}$-et, tehát:

$$\int\limits_{A} \left(\int\limits_{Y} k(x,y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int\limits_{A\times Y} k(x,y)\, d(\mu\times\nu)(x,y) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A\times Y} k^{(n)}(x,y)\, d(\mu\times\nu)(x,y) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A} \left(\int\limits_{Y} k^{(n)}(x,y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x) \leq \int\limits_{A} f(x)\, d\mu(x)$$

teljesül, vagyis k első marginálisa sehol nem nagyobb f-nél. A másik marginálisra vonatkozó feltétel ugyanígy adódik.

Tehát sikerült bebizonyítanunk, hogy amennyiben h integrálható és négyzetesen integrálható is, valamint f és g kielégítik a h-ra vonatkozó Kellerer-feltételt (lásd 2.2.), úgy valóban előállítható a marginálisproblémát megoldó függvény.

4.2. Az általános eset

Adott tehát $k^{(n)}$ nem túl nagy függvények egy sorozata, melyek integrálja γ-hoz tart.

Nevezzük minden n pozitív egészre $f^{(n)}$-nek illetve $g^{(n)}$-nek $k^{(n)}$ X-re illetve Y-ra vett marginálisát. Ekkor

$$\int\limits_{X} f^{(n)}\, d\mu = \int\limits_{Y} g^{(n)}\, d\nu = \int\limits_{X\times Y} k^{(n)}\, d(\mu\times\nu) \longrightarrow \gamma$$

teljesül. Szeretnénk ezekből az $f^{(n)}$ illetve $g^{(n)}$ függvényekből egy valamilyen értelemben gyengén konvergens részsorozatot kiválasztani.

Ehhez először is partícionáljuk háromféle módon $X\times Y$-t, majd vegyük ezeknek a metszetét: vagyis állítsunk elő egy $\mathcal{D}$, egy $\mathcal{H}$ és egy $\mathcal{R}$ halmazrendszert, melyek elemei diszjunkt mérhető halmazok, és mindhárom uniója az egész $X \times Y$. Ezek metszete alatt a

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{R} := \{ D \cap H \cap R \mid D \in \mathcal{D}, H \in \mathcal{H}, R \in \mathcal{R} \}$$

halmazrendszert értjük, mely nyilvánvalóan megint csak egy (mérhető) partícionálása lesz $X \times Y$-nak.

A $\mathcal{D}$ halmazrendszer legyen egyszerűen $X \times Y$ felbontása megszámlálhatóan sok véges mértékű halmazra.

A $\mathcal{H}$ partícionálást olyannak választjuk, hogy megszámlálhatóan sok elemből álljon, és minden elemén h integrálható és négyzetesen integrálható is legyen. Például megtehető ez úgy, hogy $\mathcal{D}$ elemeit továbbdaraboljuk az $\{ \{ m \le h < m+1 \} \mid m = 0, 1, 2, \dots \}$ halmazrendszerrel.

Az $\mathcal{R}$ halmazrendszert $\mathcal{H}$-hoz hasonlóan állítjuk elő, csak ez egy megszámlálható téglarács lesz, melynek minden elemének oldalain f illetve g négyzetesen integrálható. (Felbontjuk ilyen halmazok diszjunkt uniójára X-et illetve Y-t, és ezeket összeszorozzuk – a felbontások létezése $\mathcal{H}$ előállításához hasonlóan láthatók.)

Most tehát a $\mathcal{D} \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{R}$ rendszer elemi megszámlálhatóan sokan vannak, nevezzük őket $C_1, C_2, \dots$-nek. Minden j pozitív egészre legyen $k_j^{(n)} := k^{(n)} \cdot \chi_{C_j}$, marginálisait pedig nevezzük $f_j^{(n)}$-nek illetve $g_j^{(n)}$-nek. Legyen továbbá $h_j := h \cdot \chi_{C_j}$

A fenti definíciók alapján látható, hogy a C_j halmazok, valamint a $k_j^{(n)}$, $f_j^{(n)}$, $g_j^{(n)}$ függvények kielégítik a következő feltételeket:

- C_j mértéke véges minden j-re;
- a C_j halmazok vetületein f illetve g négyzetesen integrálható;
- minden j pozitív egészre $0 \le k_j^{(n)}, f_j^{(n)}, g_j^{(n)}, h_j$;
- $k_j^{(n)} \le h_j$, tetszőleges j esetén;
- $\sum_{j=1}^{\infty} k_j^{(n)} = k^{(n)} \le h$, $\sum_{j=1}^{\infty} f_j^{(n)} = f^{(n)} \le f$, $\sum_{j=1}^{\infty} g_j^{(n)} = g^{(n)} \le g$, és természetesen $\sum_{j=1}^{\infty} h_j = h$;
- $k_j^{(n)}$, $f_j^{(n)}$ illetve $g_j^{(n)}$ is integrálható valamint négyzetesen integrálható ($X \times Y$-on, X-en illetve Y-on), minden j pozitív egész mellett;
- $f_j^{(n)}$ és $g_j^{(n)}$ kielégítik a h_j-re vonatkozó 2.2. Kellerer-feltételt, hiszen $k_j^{(n)}$ marginálisai, és $k_j^{(n)} \le h_j$, bármely j-re (lásd a 2.4. állítást).

Mivel minden j pozitív egész számra az $\left(f_j^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozat elemei mind négyzetesen integrálhatóak, továbbá sehol sem nagyobbak $f \cdot \chi_{\pi_X(C_j)}$-nél (ahol $\pi_X(D)$ alatt a $D \subset X \times Y$ halmaz X-re vett vetületét értjük), amely szintén négyzetesen integrálható, így a sorozat az L^2-normában korlátos is, vagyis ki tudunk választani belőle egy gyengén konvergens részsorozatot.

Válasszunk ki tehát egy gyengén konvergens részt $f_1^{(n)}$-ből, legyen a határértéke $\widetilde{f}_1$. Most ritkítsuk tovább az így kapott részsorozatot, hogy $f_2^{(n)}$ is tartson egy $\widetilde{f}_2$ függvényhez, és folytassuk ezt minden j-re. Ekkor az „átlós sorozat” mentén minden j-re konvergens lesz $f_j^{(n)}$.

(Precízen: Létezik egy $n_{1,1}, n_{1,2}, \ldots$ sorozat, hogy $f_1^{(n_{1,1})}, f_1^{(n_{1,2})}, \ldots$ gyengén konvergens, határértéke $\widetilde{f}_1$. Létezik ehhez hasonlóan minden $l \geq 2$-re az $n_{l-1,1}, n_{l-1,2}, \ldots$ sorozatnak egy $n_{l,1}, n_{l,2}, \ldots$ részsorozata, hogy $f_l^{(n_{l,1})}, f_l^{(n_{l,2})}, \ldots$ is gyengén tart egy $\widetilde{f}_l$ függvényhez. Ekkor minden j pozitív egészre $f_j^{(n_{1,1})}, f_j^{(n_{2,2})}, \ldots$ gyengén konvergál $\widetilde{f}_j$-hez.)

Tehát feltehetjük, hogy minden j-re az $f_j^{(n)}$ sorozat gyengén konvergens, gyenge limesze pedig $\widetilde{f}_j$. Nyilván hasonlóan feltehető az is, hogy a $g_j^{(n)}$ sorozatok is tartanak valamely $\widetilde{g}_j$ függvényekhez.

Most szeretnénk olyan nemnegatív $\widetilde{k}_j$ függvényeket előállítani, melyeknek marginálisai $\widetilde{f}_j$ illetve $\widetilde{g}_j$, valamint nem nagyobbak h_j-nél. Ehhez (az előző szakaszban tárgyaltak szerint) elég volna belátni, hogy $\widetilde{f}_j$ és $\widetilde{g}_j$ kielégítik a h_j-re vonatkozó Kellerer-feltételt, hiszen h_j integrálható és négyzetesen integrálható is.

Vegyünk tehát egy tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{B}$ halmazt. Ezekre (mivel $f_j^{(n)}$-et majorálja az integráható f, $g_j^{(n)}$-et pedig az integrálható g függvény):

$$\int_X \widetilde{f}_j \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_j^{(n)} \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_Y g_j^{(n)} \, d\nu = \int_Y \widetilde{g}_j \, d\nu,$$

hiszen $f_j^{(n)}$ és $g_j^{(n)}$ integrálja minden n-re megegyezik egymással (mindkettő $k_j^{(n)}$ integrálja); valamint:

$$\begin{aligned}\int_{A\times B} h_j \, d(\mu\times\nu) + \int_{\overline{A}} \widetilde{f}_j \, d\mu + \int_{\overline{B}} \widetilde{g}_j \, d\nu &= \int_{A\times B} h_j \, d(\mu\times\nu) + \lim_{n\to\infty}\int_{\overline{A}} f_j^{(n)} \, d\mu + \lim_{n\to\infty}\int_{\overline{B}} g_j^{(n)} \, d\nu = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\int_{A\times B} h_j \, d(\mu\times\nu) + \int_{\overline{A}} f_j^{(n)} \, d\mu + \int_{\overline{B}} g_j^{(n)} \, d\nu\right] \geq \lim_{n\to\infty}\int_X f_j^{(n)} \, d\mu = \\ &= \int_X \widetilde{f}_j \, d\mu = \int_Y \widetilde{g}_j \, d\nu,\end{aligned}$$

ahol az egyenlőtlenség abból következik, hogy (mint már megállapítottuk) $f_j^{(n)}$ és $g_j^{(n)}$ minden j és n mellett kielégítik a h_j-re vonatkozó Kellerer-feltételt.

Vagyis $\widetilde{f}_j$ és $\widetilde{g}_j$ valóban eleget tesznek a h_j-re vonatkozó Kellerer-feltételnek, így létezik hozzájuk egy $0 \leq \widetilde{k}_j \leq h_j$ függvény, melynek pont $\widetilde{f}_j$ és $\widetilde{g}_j$ a marginálisai. Azt szeretnénk most belátni, hogy a $\widetilde{k} := \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{k}_j$ függvény kielégíti a feltételeinket: egy nem túl nagy függvény lesz, γ integrállal.

A $\widetilde{k}_j \leq h_j$ összefüggést már beláttuk (igazából így állítottuk elő $\widetilde{k}_j$-t), így az összegükre vonatkozó $\widetilde{k} = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{k}_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} h_j = h$ is nyilvánvalóan adódik.

Mivel $\widetilde{k} = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{k}_j$, így $\widetilde{k}$ marginálisai nyilván a $\sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{f}_j$ illetve $\sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{g}_j$ függvények lesznek. (A függvények nemnegativitása miatt az integrálképzés és az összegzés felcserélhető.) Vagyis azt kéne látnunk, hogy $\sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{f}_j \leq f$ iletve $\sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{g}_j \leq g$. Nyilván elegendő az egyiket bizonyítanunk (a másik teljesen hasonlóan működik). Vegyünk tehát egy tetszőleges véges mértékű $A \in \mathcal{A}$ halmazt. Erre:

$$\int\limits_A \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{f}_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f_j^{(n)} \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_A f_j^{(n)} \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A f^{(n)} \, d\mu \leq \int\limits_A f \, d\mu,$$

hiszen $f_j^{(n)}$-et minden j és n mellett majorálja az integrálható f függvény, így a határértékképzés és az összegzés felcserélhető. (Az integrálás és az összegzés felcserélhetősége megint csak a függvények nemnegativitásából adódik.)

Tehát már csak azt kellene belátnunk, hogy $\widetilde{k}$ integrálja valóban γ lesz. Ez is az eddigiekhez hasonlóan bizonyítható:

$$\begin{aligned}\int\limits_{X\times Y} \widetilde{k} \, d(\mu\times\nu) &= \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{X\times Y} \widetilde{k}_j \, d(\mu\times\nu) = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_X \widetilde{f}_j \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_j^{(n)} \, d\mu = \\ &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \sum_{j=1}^{\infty} f_j^{(n)} \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f^{(n)} \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{X\times Y} k^{(n)} \, d(\mu\times\nu) = \gamma,\end{aligned}$$

ahol az első egyenlőség $\widetilde{k}$ definíciójából (illetve a $\widetilde{k}_j$ függvények nemnegativitásából) adódik, a második a $\widetilde{k}_j$ függvények definíciójának következménye, a következő $\widetilde{f}_j$ konstrukciójából következik, a szumma és a limesz illetve az integrál felcserélhetősége megint csak a nemnegativitásból illetve az $f_j^{(n)}$ függvények majoráltságából adódik (f majorálja őket és integrálható), utána $f_j^{(n)}$ definícióját használjuk ki ($\sum_{j=1}^{\infty} k_j^{(n)} = k^{(n)}$, tehát a nemnegativitás miatt a marginálisaikra is hasonló teljesül), végül pedig $f^{(n)}$ illetve $k^{(n)}$ definíciója adja az egyenlőségeket.

Vagyis $\widetilde{k}$ valóban egy nemnegatív mérhető függény lesz, amely sehol sem nagyobb h-nál, marginálisai pedig f-nél illetve g-nél. Ezzel a marginálisprobléma függvényekre vonatkozó esetét megoldottuk, bebizonyítottuk a 2.3. tételt.

5. fejezet

A speciális alakú megoldás és a halmazok esete

Ebben a fejezetben, a halmazokra a 2.2. szakaszban megfogalmazott kérdés megválaszolásának érdekében, bizonyos speciális alakú megoldások létezését bizonyítjuk. Az ehhez kapcsolódó tételünk a következő lesz:

5.1. Tétel. *Legyen adott egy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és egy $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-véges és atommentes mértékterünk, legyen továbbá adott a két tér $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ szorzatán egy nemnegatív mérhető h függvény, amely egy nullmértékű halmaz kivételével véges értékeket vesz fel. Bármely k mérhető függvényhez a szorzattéren, amely kielégíti a $0 \leq k \leq h$ feltételt (majdnem mindenhol), létezik egy U halmaz, hogy k és $h \cdot \chi_U$ marginálisai (egy nullmértékű halmaz kivételével) megegyeznek.*

Az adott k függvény X illetve Y szerinti marginálisait, az előző részek szokásainak megfelelően, f-fel illetve g-vel fogjuk jelölni.

A tételt a következő módon fogjuk bizonyítani: először bizonyos speciális feltételeket kielégítő h függvény mellett látjuk be, hogy a megoldások halmaza a négyzetesen integrálható függvények L^2 terének egy gyenge* kompakt részhalmaza lesz. Ekkor a Krein–Milman-tétel szerint (lásd 5.5. tétel) van a megoldáshalmaznak egy extrém pontja. Ezután bebizonyítjuk, hogy a megoldáshalmaz extrém pontjai mindig $h \cdot \chi_U$ alakúak, végül az általános esetet visszavezetjük az ilyen speciális h-k esetére.

5.1. A topologikus vektorterekről illetve az L^2 térről

Topologikus vektortér alatt olyan halmazokat értünk, melyek el vannak látva egy vektortér struktúrával és egy topológiával is, ráadásul ezek „kompatibilisek”, abban az értelmeben, hogy a vektortérműveletek (a vektorok összeadása illetve skalárral való szorzása) folytonosak az adott topológiára nézve. (Az összeadás esetén természetesen a tér önmagával vett direktszorzatán értelmezett szorzattopológiára nézve folytonos. Vagyis a vektorterünket V-vel jelölve a $V \times V \longrightarrow V$, $(u, v) \mapsto u + v$ leképezés folytonosságát követeljük meg, ahol a $V \times V$ téren a V-ből örökölt szorzattopológia adott.)

Ezeknek a feltételeknek nyilván megfelel bármilyen normált tér, így $L^2(Z, \mathcal{C}, \xi)$ is egy tetszőleges $(Z, \mathcal{C}, \xi)$ mértéktér mellett. Mivel nekünk csak erre az esetre lesz szükségünk, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy a vektortereink valós vektorterek (bár az állítások mind bizonyíthatók általánosabb esetben is).

Vegyünk egy V topologikus vektorteret, és az ő V^* duális terét (a rajta értelmezett folytonos lineáris funkcionálok terét), és tegyük fel, hogy V^* elválasztja V elemeit (vagyis bármely V bármely két eleméhez létezik egy V^*-beli elem, amely értékei különbözőek a két vektoron). Nyilván a duális téren is természetes módon tudjuk értelmezni az összeadás és a skalárral való szorzás műveletét, tehát a duális tér is egy vektortér lesz. Vegyük észre, hogy V tetszőleges v elemére a V^*-on értelmezett, $\Lambda \mapsto \Lambda(v)$ leképezés egy lineáris funkcionál. V^* gyenge* topológiáján az ilyen alakú leképezések által generált topológiát fogjuk érteni. Könnyen látható, hogy ez egy vektortopológia lesz, vagyis V^* a gyenge* topológiával egy topologikus vektorteret alkot.

Riesz reprezentácós tétele szerint az L^2 tér duálisa önmaga – hiszen (mint az 1.5. szakaszban már megjegyeztük) L^2 egy valós Hilbert-teret alkot az $\langle r, s\rangle = \int_Z r \cdot s \, d\xi$ skalárszorzattal. Mivel pedig minden $C \in \mathcal{C}$ véges mértékű halmazra χ_C négyzetesen integrálható (négyzete önmaga, integrálja $\xi(C)$), így $r \mapsto \int_C r \, d\xi$ egy folytonos lineáris leképezés lesz – vagyis amennyiben $(Z, \mathcal{C}, \xi)$ σ-véges (és mi csak ezzel az esettel foglalkozunk), úgy (az 1.4. szakaszban írtak szerint) L^2 duálisa elválasztja L^2 pontjait.

Szükségünk lesz még az operátornorma fogalmára is. Egy adott V normált téren minden Λ folytonos lineáris funkcionálra a $\sup\{\, |\Lambda(v)| \mid v \in V \ \|v\| = 1\}$ érték véges. Ezt nevezzük Λ normájának. Könnyen látható, hogy ez valóban egy norma lesz V^*-on, sőt Riesz reprezentációs tétele kimondja azt is, hogy amennyiben V egy Hilbert-tér, úgy V elemeinek operátornormája meg fog egyezni a „hagyományos" normájukkal. (Mint fent már megjegyeztük, egy valós Hilbert-tér duálisa mingig önmaga.)

A fentiek szerint tehát L^2-re (a rajta értelmezett gyenge* topológia mellett) alkalmazhatjuk Banach és Alaoglu tételét:

5.2. Tétel (Banach–Alaoglu)**.** *Egy V normált téren, melynek elemeit szétválasztja V^*, bármely M pozitív számra a legfeljebb M normájú folytonos lineáris funkcionálok K halmaza a gyenge* topológia szerinti kompakt része lesz V^*-nak.*

Bizonyítás. (A bizonyítás lényegében megegyezik Walter Rudin bizonyításával – lásd [7] 3.15.)

A V tér minden v elemére, és minden K-beli Λ elemre $\Lambda(v)$ a $[-M \cdot \|v\|, M \cdot \|v\|]$ intervallumba esik. Tekintsük tehát a

$$\Pi := \prod_{v \in V} [-M \cdot \|v\|, M \cdot \|v\|] = \{\, \varphi : V \longrightarrow \mathbb{R} \mid \forall v \in V \ \ |\varphi(v)| \leq M \cdot \|v\|\}$$

függvényhalmazt. A legfeljebb M normájú V^*-beli funkcionálok nyilván mind benne vannak Π-ben.

A Π halmaz (Tyihonov tétele szerint) kompakt lesz a szorzattopológiában. Másfelől vegyük észre, hogy amennyiben Π szorzattopológiáját megszorítjuk K-ra, úgy pont a K-ra megszorított gyenge* topológiát kapjuk – a két topológia definíciója pontosan megegyezik itt. Vagyis ha be tudnánk látni, hogy K (a szorzattopológia szerint) zárt része Π-nek, úgy belátnánk azt is, hogy K gyenge* kompakt.

Vegyük hát K lezártját Π-ben, és tekintsük ennek egy Φ elemét. Azt kéne belátnunk, hogy Φ folytonos és lineáris.

A halmazok lezártjának definíciója alapján Φ minden környezete tartalmazza K egy elemét. Vagyis tetszőleges ε pozitív számra, u és v vektorokra, valamint α és β skalárra létezik egy olyan Λ lineáris funkcionál V^*-ban, hogy Φ és Λ értéke u-ban, v-ben és $(\alpha \cdot u + \beta \cdot v)$-ben is legfeljebb ε-nal tér el egymástól. Ekkor:

$$|\Phi(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) - \alpha \cdot \Phi(u) - \beta \cdot \Phi(v)| = |\, [\Phi(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) - \Lambda(\alpha \cdot u + \beta \cdot v)] - \\ - [\alpha \cdot \Phi(u) - \alpha \cdot \Lambda(u)] - [\beta \cdot \Phi(v) - \beta \cdot \Lambda(v)] \,| \leq (1 + |\alpha| + |\beta|) \cdot \varepsilon$$

minden pozitív ε-ra teljesül – vagyis Φ valóban lineáris.

A függvény folytonossára innen pedig már nyilvánvaló, hiszen (mint Π minden eleme) ő egy korlátos funkcionál, a lineáris funkcionálokon pedig a folytonosság és a korlátosság feltétele megegyezik. (Emlékeztetőül: a nemnulla lineáris funkcionálok értékkészlete soha nem korlátos. Egy normált tér korlátos funkcionálja alatt az egységgömbön korlátos funkcionálokat értjük. Így nyilván, ha minden $u, v \in V$-re $|\Phi(u - v)| \leq \|u - v\| \cdot M$, úgy a linearitás miatt Φ folytonos lesz.)

q.e.d.

5.3. Következmény. A fentiek alapján tehát tetszőleges Hilbert-tér, így egy σ-véges $(Z, \mathcal{C}, \xi)$ mértéktér esetén $L^2(Z, \mathcal{C}, \xi)$ tetszőleges sugarú 0 középpontú zárt gömbjei kompaktak lesznek a gyenge* topológia szerint.

5.2. Az extrém pontok szerepe és a speciális alakú megoldás

A problémát először abban a speciális esetben fogjuk megoldani, amikor a korlátozó h függvény négyzetesen integrálható ($L^2(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$-beli), és egy pozitív, de véges mértékű $C \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ halmazon kívül azonosan 0. Az általános esetet erre fogjuk visszavezetni.

A plusz feltétel mellett bármely $0 \leq k \leq h$ függvény négyzetesen integrálható lesz, és k L^2-normája nem lesz nagyobb h L^2-normájánál – vagyis azon nemnegatív függvények $\mathcal{M}$ halmaza, melyek nem nagyobbak h-nál, marginálisaik pedig f-fel és g-vel egyeznek meg (majdnem mindig), L^2 egy (normában) korlátos részhalmaza lesz. Így a Banach–Alaoglu-tétel alapján, ha be tudnánk látni, hogy $\mathcal{M}$ egy zárt halmaz L^2 gyenge* topológiája szerint, akkor belátnánk azt is, hogy $\mathcal{M}$ gyenge* kompakt. Ehhez elegendőek a következők:

- A nemnegatív függvények gyenge* zárt halmazt alkotnak L^2-ben, hiszen ha egy függvény (pozitív mértékű halmazon) negatív, akkor ezt a pozitív mértékű halmazt véges mértékűnek választva az ezen vett integrál negatív, így az ugyanezen halmazon negatív integrálú függvények egy gyenge* nyílt halmazt alkotnak, melynek elemei között nincsenek nemnegatív függvények.

- Minden $D \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ véges mértékű halmazra a $\varphi \mapsto \int_D \varphi \, d(\mu \times \nu)$ függvény egy folytonos lineáris funkcionál L^2-n. Tehát azon L^2-beli függvények halmaza, melyek integrálja itt nem nagyobb az $\int_D h \, d(\mu \times \nu)$ konstansnál egy gyenge* zárt halmazt alkotnak. Az összes D-re ezen halmazok metszete így szintén gyenge* zárt lesz, vagyis a h-nál lényegében sehol (nullmértékű halmaz kivételével) nem nagyobb függvények halmaza egy gyenge* zárt halmaz. (Lásd 1.4. szakasz.)

- Az előzőhöz hasonlóan a $\varphi \mapsto \int_{(A\times Y)\cap C} \varphi\, d(\mu\times\nu)$ valamint $\varphi \mapsto \int_{(X\times B)\cap C} \varphi\, d(\mu\times\nu)$ funkcionálok mentén az $\int_A f\, d\mu$ valamint $\int_B g\, d\nu$ konstansokkal való *megegyezést* vizsgálva nyilvánvalóan látható, hogy az adott véges mértékű C halmazon kívül azonosan 0 értékű és adott marginálisú függvények gyenge* zárt halmazt alkotnak L^2 C-n kívül azonosan 0 függvényei között – melynek részhalmazát alkotják a h-nál nem nagyobb nemnegatív függvények.

Vagyis a keresett $\mathcal{M}$ megoldáshalmaz gyenge* zárt része a h-nál nemnagyobb normájú függvények gyenge* kompakt halmazának, így maga is gyenge* kompakt.

Most ideje felidéznünk, mit értünk egy vektortér részhalmazának extrém részhalmaza alatt:

5.4. Definíció. *A V vektortér K részhalmazának az $\emptyset \neq E \subset K$ halmaz egy extrém része, ha E egyetlen e pontjához sem létezik olyan u és v pont K-ban, hogy nem mindkettő eleme E-nek, de e az $\overline{uv}$ szakasz belső pontja. Másképp: ha létezik olyan $0 < \lambda < 1$ skalár, hogy valamely $u, v \in K$ pontokra $\lambda \cdot u + (1-\lambda) \cdot v = e$, úgy $u, v \in E$ is teljesül.*

K extrém pontjai alatt nyilván az egyetlen pontból álló extrém halmazokat értjük (pontosabban ezek egyetlen elemét). A definícióból könnyen látható, hogy e pontosan akkor extrém pontja K-nak, ha nem létezik olyan v nemnulla vektor V-ben, melyre $e+v$ és $e-v$ is eleme K-nak.

Jegyezzük meg, hogy a V vektortér tetszőleges K részhalmaza önmagának extrém része lesz. Könnyen látható továbbá, hogy amennyiben extrém halmazok (tetszőlegesen nagy számosságú rendszerének) metszete nem üres, úgy ő is egy extrém halmaz lesz. Így zárt és kompakt extrém halmazok nemüres metszete szintén egy zárt kompakt extrém halmazt alkot. Speciálisan egy Hausdorff-féle topológiával rendelkező topologikus vektortérben egy halmaz kompakt extrém részeinek nemüres metszete maga is kompakt extrém részhalmaz.

5.5. Tétel (Krein–Milman)**.** *Legyen V egy topologikus vektortér, melynek duális tere elválasztja V pontjait. Legyen a K halmaz V egy kompakt nemüres részhalmaza. Ekkor K-nak van extrém pontja.*

Bizonyítás. (A bizonyításhoz Rudin vonatkozó munkája szolgált alapul – lásd [7] 3.21.)

Először is vegyük észre, hogy mivel V^* pontjai elválasztják V elemeit, V topológiája nyilván Hausdorff.

Nevezzük K kompakt extrém részhalmazainak rendszerét $\mathcal{E}$-nek. Ekkor $\mathcal{E}$ nyilván nem üres, hiszen $K \in \mathcal{E}$ teljesül. Legyen most $E \in \mathcal{E}$, $\Lambda \in V^*$. Definiáljuk az E halmaz E_Λ részhalmazát azon pontok halmazaként, ahol Λ felveszi a maximumát E-ben. (Mivel Λ folytonos, E pedig kompakt, így Λ-nak van maximuma E-n.) Vegyük E_Λ egy e elemét, továbbá vegyük K-nak egy u és egy v pontját, melyekhez létezik olyan $0 < \lambda < 1$ skalár, hogy $\lambda \cdot u + (1-\lambda) \cdot v = e$. Mivel $e \in E_\Lambda \subset E$, ami egy extrém halmaz, így $u, v \in E$. Másfelől $\Lambda(e) = \lambda \cdot \Lambda(u) + (1-\lambda) \cdot \Lambda(v)$, ahol $\Lambda(e)$ a Λ függény maximuma E-n – tehát az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $\Lambda(u)$ és $\Lambda(v)$ is ugyanez a maximumérték lesz. Így $E \supset E_\Lambda \in \mathcal{E}$ teljesül, minden $E \in \mathcal{E}$ és $\Lambda \in V^*$ esetén.

Az $\mathcal{E}$ elemei által alkotott (a tartalmazásra nézve vett) láncok részben rendezett halmazt alkotnak a tartalmazásra nézve. (Vagyis $\mathcal{E}$ azon $\mathcal{E}'$ részhalmazai, melyeknek tetszőleges E_1 és E_2 elemére $E_1 \subset E_2$ vagy $E_2 \subset E_1$ teljesül, egy részben rendezett halmazt alkotnak az $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}''$ relációval.) A láncok láncainak uniói nyilván szintén láncok lesznek, tehát alkalmazhatjuk a Zorn-lemmát – találhatunk egy $\mathcal{E}'$ maximális láncot $\mathcal{E}$-ben. Mivel $\mathcal{E}'$ kompakt nem üres extrém halmazok egy nem üres lánca, így $E' := \bigcap \mathcal{E}'$ is egy nemüres kompakt extrém halmaz lesz. (A lánctulajdonság miatt $\mathcal{E}'$ elemei kielégítik a véges metszetek feltételét, és kompaktak is, tehát metszetük nem üres). Vegyük észre, hogy E' minimális elem (a tartalmazásra nézve) $\mathcal{E}$-ben, hiszen ha nem így volna, úgy E' egy kompakt extrém részhalmazával bővíthetnénk az $\mathcal{E}'$ láncot, vagyis az nem lenne maximális. Így minden Λ folytonos lineáris funkcionálra $E'_\Lambda = E'$ is teljesülni fog, azaz E'-n minden folytonos lineáris funkcionál konstans. Azonban a folytonos lineáris funkcionálok elválasztják V pontjait – következésképpen E' egyetlen pontból áll, tehát E' egy extrém pontja K-nak.

q.e.d.

A fentieket az $\mathcal{M}$ gyenge* kompakt megoldáshalmazra alkalmazva láthatjuk, hogy $\mathcal{M}$-nek létezik extrém pontja. (Az elemek elválasztásának feltételét az előző szakaszban már tárgyaltuk.)

Megjegyzés. A Krein–Milman-tételnek egy erősebb változata azt állítja, hogy a fenti feltételek mellett, ha a K halmaz nem csak kompakt, hanem konvex is, K a saját extrém pontjainak konvex burkával egyezik meg.

Nagyon egyszerűen ellenőrizhető, hogy az $\mathcal{M}$ halmazunk egy konvex halmaz is lesz. Tehát $\mathcal{M}$ a saját extrém pontjainak konvex burka. Nemsokára belátjuk, hogy $\mathcal{M}$ extrém pontjai a $h \cdot \chi_U$ alakú függvények – vagyis $\mathcal{M}$ az ilyen speciális alakú függvények konvex kombinációiból, pontosabban ezek halmazának lezártjából áll.

Tehát a feladatnak pontosan akkor létezik (lényegében) egyértelmű megoldása, ha $h \cdot \chi_U$ alakú megoldásból csak egyetlen egy létezik. (Ez nem feltétlen jelenti azt, hogy U lényegében egyértelmű, hiszen ha h egy pozitív mértékű hamazon 0, úgy ezt nyugodtan hozzávehetjük vagy elhagyhatjuk U-ból, $h \cdot \chi_U$ ettől nem változik.)

Vizsgáljuk hát meg $\mathcal{M}$ extrém pontjait. Mint már megállapítottuk, $\mathcal{M}$ extrém pontjai pontosan azok a $k \in \mathcal{M}$ függvények lesznek, melyre nem létezik olyan p négyzetesen integrálható függvény, hogy $k + p$ és $k - p$ is $\mathcal{M}$-beli, vagyis nemnegatívak, egyikük sem nagyobb h-nál, margniálisaik pedig f és g.

Vegyük észre, hogy amennyiben létezik ilyen p függvény, úgy annak marginálisai (majdnem mindenhol) konstans 0 értéket vesznek fel. Továbbá, amennyiben létezik ilyen függvény, úgy a $\{k = 0\}$ halmazon és a $\{k = h\}$ halmazon is 0 értéket kell felvennie, hiszen máskülönben $k-p$ vagy $k+p$ megsértené a $0 \leq k+p, k-p \leq h$ feltételt. Ebből következően a $h \cdot \chi_U$ alakú megoldásfüggvények valóban $\mathcal{M}$ extrém pontjai lesznek.

Másfelől ha $k \in \mathcal{M}$, és $\{0 < k < h\}$ mértéke pozitív, úgy létezik egy pozitív ε szám, melyre az $\{\varepsilon < k < h - \varepsilon\}$ halmaz is pozitív mértékű lesz. Vagyis ha van egy olyan p mérhető függvény, amely $\{\varepsilon < k < h - \varepsilon\}$ egy véges, de pozitív mértékű P részhalmazán nem nulla, korlátos, marginálisai (majdnem mindenhol) konstans nullák, és P-n kívül (majdnem mindenhol) azonosan 0, úgy $k - \eta \cdot p$ és $k + \eta \cdot p$ is $\mathcal{M}$-beli lesz egy megfelelő $\eta \neq 0$ konstans mellett. Tehát ekkor k nem extrém pontja $\mathcal{M}$-nek.

A következő szakaszban teljes általánosságban fogjuk látni a fenti feltételeknek megfelelő p függvény létezését, ezzel bebizonyítva a $h \cdot \chi_U$ alakú megoldás létezését, a h-ra tett speciális feltételek mellett. De mielőtt ezt az önálló állítást belátnánk, bizonyítsuk be, hogy ezek a speciális feltételek elhagyhatóak.

Mint láttuk, fel tudjuk bontani a terünket megszámlálhatóan sok olyan $C_1, C_2, \dots$ halmazra, melyek véges mértékűek, és melyeken h négyzetesen integrálható. (Lásd 23. oldal. Ehhez általában egy r mérhető függvény mellett elég feltenni, hogy a mértékterünk σ-véges és r értéke majdnem mindenhol véges.) Minden ilyen halmazra tekintve a $k \cdot \chi_{C_j}$ függvény marginálisait, a $h \cdot \chi_{C_j}$ korlátozó függvénnyel egy megoldható marginálisproblémát kapunk, ahol a korlátozó függvény négyzetesen integrálható, és egy véges mértékű halmazon kívül azonosan 0. Vagyis ezeknek a megszorított problémának létezik $\chi_{U_j} \cdot h \cdot \chi_{C_j}$ alakú megoldása. Nyilván feltételezhetjük, hogy U_j része C_j-nek minden j mellett, és így ezen megoldások $\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{U_j} \cdot h = \chi_U \cdot h$ összege (ahol U-val $\bigsqcup_{j=1}^{\infty} U_j$-t jelöljük) nyilván megoldja az eredeti feladatot. Tehát az 5.1. tételt bebizonyítottuk.

Ebből pedig már adódik a halmazok esetére vonatkozó tétel is: mivel χ_M minden véges mértékű halmazon nyilvánvalóan integrálható, így a halmazokra vonatkozó feladatnak a már bizonyított 2.3. tétel szerint van függvény alakú megoldása (és feltehetjük, hogy a mértéktereink σ-végesek). Ekkor az imént bizonyított 5.1. tétel szerint létezik egy $\chi_M \cdot \chi_U$ alakú megoldás is – vagyis az $U \cap M$ halmaz kielégíti a feltételeket, amivel a 2.7. tételt bebizonyítottuk.

5.3. A p függvény létezése

Adott tehát egy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ illetve egy $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-véges és atommentes mértékterünk. Legyen adott ezek $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ szorzatán egy pozitív, de véges mértékű P halmaz. Azt szeretnénk bizonyítani, hogy ekkor létezik egy p mérhető függvény $X \times Y$-on, amelyre a következők teljesülnek:

- p a P halmazon kívül (majdnem) mindenhol azonosan 0;
- p egy pozitív mértékű halmazon nemnulla;
- p korlátos;
- p marginálisai (majdnem mindenhol) azonosan 0 értéket vesznek fel (p korlátos és egy véges mértékű halmazon kívül nulla, így integrálható).

A megfelelő függvény létezése a valós síkon könnyen látható, így megpróbáljuk a probléma megoldását visszavezetni a valós esetre. Ehhez készíteni fogunk két függvényt, Φ-t illetve Ψ-t, melyek X-ből illetve Y-ból képeznek a valós számegyenesbe, mérhetőek és bizonyos értelemben mértéktartóak is. Ha ezeket a függvényeket megfelelően konstruáljuk, úgy a P halmaz „átemelhető” lesz a valós sík egy $\widetilde{P}$ Borel-halmazává, itt tudunk csinálni egy megfelelő $\widetilde{p}$ függvényt, melyet majd „visszaemelünk” $X \times Y$-ba – és már csak be kell látni, hogy az eredmény megfelelő lesz.

A P halmazt az 1.2. szakaszban írtak alapján elő tudjuk állítani – egy nullmértékű halmaz kivételével – $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} R_{n,i}$ alakban, ahol $R_{n,i}$ minden n-re és i-re egy tégla lesz.

Tegyük fel először, hogy X mértéke véges, így feltehetjük, hogy ez a mérték 1.

Bontsuk most fel X-et minden n pozitív egészre $1/n$ mértékű halmazok diszjunkt uniójára (az atommentesség miatt ezt megtehetjük), és rendezzük sorrendbe az így kapott megszámlálhatóan sok halmazt, valamint az $R_{n,i}$ téglák X-beli oldalait – legyenek ezek az $A_1, A_2, \dots$ halmazok. Azt szeretnénk elérni, hogy ezeket a halmazokat Φ valamilyen értelemben megőrizze. (Az $R_{n,i}$-k oldalainál erre nyilván azért lesz szükségünk, hogy $\Phi \times \Psi$ ugyanilyen értelemben megőrizze a P halmazt is; míg a „kicsi halmazok" az atommentesség megtartásához kellenek.)

Definiáljuk most a következő ϕ leképezést: X minden x elemét képezzük bele $[0,1]$-be úgy, hogy $\phi(x)$ n-edik számjegye a hármas számrendszerben pontosan akkor legyen 2, ha $x \in A_n$, amúgy legyen 0. Ezzel X-et voltaképpen a $\mathfrak{C}$ Cantor-halmazba képezzük. (Emlékeztetőül: a Cantor-halmaz azon $[0,1]$-beli számok halmaza, melyek hármas számrendszerben felírt alakja csak 0 és 2 számjegyeket tartalmaz. Ez egy kontinuum számosságú, ám a Lebesgue-mérték szerint nullmértékű Borel-halmaz.)

Ez a leképezés mérhető, így generál egy $\varrho(C) := \mu\left(\phi^{-1}(C)\right)$ Borel-mértéket a Cantor-halmazon, vagy ha úgy tetszik egy $\mathfrak{C}$-re koncentrált Borel-mértéket a $[0,1]$-en, amely valószínűségi mérték lesz. Valóban, mivel a Borel-halmazok σ-algebráját generálják a $(k/3^n, (k+1)/3^n)$ alakú intervallumok, ezek ősképei pedig pedig mérhető halmazok, így ϕ tényleg mérhető lesz. (Konkrétan: ezek az ősképek vagy üresek, vagy az $1, \dots, n$ számok valamely σ permutációjára és valamely $l = 0, 1, \dots, n$-re a $\left(\bigcap_{i=1}^{l} A_{\sigma(i)}\right) \setminus \left(\bigcup_{i=l+1}^{n} A_{\sigma(i)}\right)$ halmaz.) Éppen így látható az is, hogy az A_n halmazok pedig előállnak ϕ szerint konkrét Borel-halmazok ősképeként – minden n-re létezik egy C_n Borel-halmaz, hogy $\phi^{-1}(C_n) = A_n$, és nyilván ekkor $\varrho(C_n) = \mu(A_n)$ is teljesül.

Szükségünk lesz még arra is, hogy ϱ szerint minden pont mértéke 0. Valóban, mivel az $A_1, A_2, \dots$ halmazok közé felvettük minden n-re X egy $1/n$ mértékű halmazokra való diszjunkt felbontását, így ha egy $[0,1]$-beli t pont ősképe nem üres, akkor minden n-re benne van egy $1/n$ mértékű halmazban – vagyis maga nullmértékű.

Most már csak annyit kellene belátnunk, hogy $[0,1]$ a rajta értelmezett ϱ mértékkel és a Borel-halmazokkal egy a $[0,1]$ sztenderd Borel-mértéktérrel izomorf mértékteret alkot, vagyis létezik egy bijekció $[0,1]$-ből $[0,1]$-be, amely Borel-mérhető, melynek inverze is Borel-mérhető, és mértéktartó is (ezt nyilván elég az egyik irányra ellenőrizni). Ezt sokkal általánosabban látjuk be:

5.6. Állítás. *Legyen adott* $[0,1]$ *két kontinuum számosságú Borel-halmaza. Ezek között mindig létezik egy Borel-izomorfizmus, vagyis egy olyan bijekció, amely Borel-mérhető és inverze is Borel-mérhető.*

A fenti állítás bizonyításától (hosszára, illetve fő témánkkal való nem túl szoros kapcsolatára való tekintettel) eltekintünk. A bizonyítás (pontosabban egy sokkal általánosabb tétel) megtalálható Alexander Kechris leíró-halmazelméleti monográfiájában (lásd [2] 15.B).

Erre építve pedig már belátható az általános tétel (melyet szintén Kechris munkája alapján bizonyítunk, lásd [2] 17.41. tétel).

5.7. Tétel. *Legyen adott* ϱ *valószínűségi mérték a* $[0,1]$ *Borel-halmazain, melyre nézve* *minden pont mértéke* 0*. Ekkor a* $[0,1]$ *Borel-mértéktér a* ϱ *mértékkel izomorf lesz a sztenderd (Lebesgue-mértékkel ellátott)* $[0,1]$ *Borel-mértéktérrel.*

Bizonyítás. Tekintsük a következő függvényt a $[0,1]$-en: $\varphi(t) := \varrho([0,t])$. A φ függvény nyilván monoton növekedő, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, és könnyen látható, hogy folytonos is, így φ képtere a teljes $[0,1]$ lesz. (Mivel a függvény monoton, ezért egy I intervallum ősképe egy J intervallum lesz, tehát a folytonossághoz azt kéne látnunk, hogy ha I zárt $[0,1]$-ben, úgy J is az lesz. Vegyünk egy $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ monoton csökkenő illetve növekvő és konvergens sorozatot J-ből, melynek határértéke t. Azt kelene bizonyítnunk, hogy $t \in J$ teljesül. Felhasználva, hogy ϱ szerint minden pont nullmértékű, a $[0,t_n]$ intervallumok metszetétek illetve uniójának ϱ szerinti mértéke megegyezik egyfelől $[0,t]$ mértékével, másfelől ez φ definíciója alapján a $\varphi(t_n)$ értékek határértéke lesz, amely – I zártságából adódóan – benne van I-ben. Vagyis t eleme J-nek, φ valóban folytonos.)

Egy folytonos függvény mindig Borel-mérhető, így értelmezni tudjuk a φ által generált $\varrho \circ \varphi^{-1}$ mértéket $[0,1]$-en. A $[0,1]$ minden s eleméhez létezik egy maximális $[0,1]$-beli t szám (a folytonosság miatt), hogy $s = \varphi(t)$. Ekkor $\varrho \circ \varphi^{-1}([0,s]) = \varrho([0,t]) = \varphi(t) = s$. Mivel pedig a $[0,s]$ alakú intervallumok generálják a $[0,1]$ Borel-halmazait, így $\varrho \circ \varphi^{-1}$ meg fog egyezni a Lebesgue-mértékkel.

Bár első ránézésre úgy tűnhet, sajnos még nem vagyunk készen a bizonyítással, hiszen φ nem feltétlenül egy bijekció – előfordulhat, hogy vannak $[0,1]$-nek intervallumai, melyek ϱ szerinti mértéke 0, így φ szerinti képük mindössze egyetlen pont. Ezt másképp megfogalmazva: a $[0,1]$ egységszakasznak lehetnek olyan pontjai, melyek φ szerinti ősképe nem egyetlen pont, hanem egy valódi szakasz. (A φ függvény monotonitása garantálja, hogy egy pont ősképe valamiféle szakasz lesz. Tekintve, hogy φ képtere az egész $[0,1]$ intervallum, ez egy nemüres intervallum, vagyis vagy valódi intervallum vagy egyetlen pont.) Ám ilyen pontokból csak megszámlálhatóan sok lehet, hiszen ősképeik diszjunkt intervallumok $[0,1]$-ben – tehát ezen pontok M halmaza nullmértékű.

Jelöljük $\varphi^{-1}(M)$-met N-nel. Vegyük a $[0,1]$-nek egy a Lebesgue-mérték szerint nullmértékű, de kontinuum számosságú Q Borel-halmazát (például a $\mathfrak{C}$ Cantor-halmazt), és φ szerinti ősképét nevezzük R-nek. Az R halmaz nyilván nullmértékű lesz ϱ szerint, és ő is kontinuum számosságú. Tehát $M \cup Q$ egy kontinuum számosságú, nullmértékű Borel-halmaz $[0,1]$-ben, az ő φ szerinti ősképe pedig $N \cup R$ egy szintén kontinuum számosságú Borel-halmaz, amely ϱ szerint nullmértékű, vagyis az 5.6. állítás szerint létezik köztük egy φ' Borel-izomorfizmus, egy bijekció, amely $N \cup R$-ből képez $M \cup Q$-ba, és ő maga, valamint inverze is Borel-mérhető.

Amennyiben most be tudnánk látni, hogy φ egy Borel-izomorfizmus $[0,1] \setminus (N \cup R)$-en is, úgy készen lennénk a bizonyítással – φ inverze mértéktartó itt is ($N \cup R$ és képe is nullmértékű), így a $\widetilde{\varphi}$ leképezést φ'-ként értelmezve $N \cup R$-en, és φ-ként értelmezve azon kívül valóban egy mértéktér-izomorfizmust kapnánk a ϱ mértékkel ellátott $[0,1]$ térből a sztenderd $[0,1]$ Borel-mértéktérre.

Az pedig, hogy φ a $[0,1] \setminus (N \cup R)$-re megszorítva Borel-izomorfizmus könnyen látható. Az N halmaz definíciója alapján nyilván bijekció lesz. Mint már említettük, egy folytonos függvény mindig Borel-mérhető, φ folytonosságát már láttuk, tehát elég volna belátnunk, hogy φ^{-1} is folytonos – vagyis hogy egy $[0,1] \setminus (N \cup R)$-beli zárt halmaz φ szerinti képe zárt lesz $[0,1] \setminus (M \cup Q)$-ban. Ez pedig a bijekció folytonosságából és monotonitásából nyilvánvaló. (Vegyük $[0,1]\setminus(N\cup R)$ egy Z zárt halmazát, és vegyünk ennek a képében egy $s_1, s_2, \ldots$ konvergens sorozatot, s határétékkel. Azt kéne látnunk, hogy s benne van $\varphi(Z)$-ben. Az $s_1, s_2, \ldots$ sorozat és az s pont együtt egy zárt halmazt alkot, így ennek ősképe is zárt – hiszen φ folytonos – vagyis kompakt, hiszen $[0,1]$ is kompakt. Ezért az $s_1, s_2, \ldots$ pontok $t_1, t_2, \ldots$ ősképeiből ki tudunk választani egy konvergens részsorozatot, melynek határértéke – φ folytonosságábó adódóan – csak s φ szerinti ősképe lehet. Másfelől a t_n értékek Z-beliek, Z zárt, így határértékük is Z-beli, vagyis s eleme Z képének.)

q.e.d.

Tehát most van egy ϕ mérhető leképezésünk X-ből a $[0,1]$-be, ez generálja a $[0,1]$ Borel-halmazain a ϱ mértéket, és az így kapott mértéktér és a $[0,1]$-en értelmezett sztenderd Borel-mértéktér között van egy φ izomorfizmus. Nevezzük most Φ-nek a $\varphi\circ\phi$ függvényt. Ekkor Φ-re nyilván igazak a következők:

- Φ mérhető, hiszen minden C Borel-halmazra a $[0,1]$-ben $\varphi^{-1}(C)$ egy Borel-halmaz, így ennek ϕ szerinti ősképe mérhető;
- Φ mentén minden C Borel halmaz ősképének mértéke $\lambda(C)$, hiszen $\varphi^{-1}(C)$ ϱ szerinti mértéke ennyi, és ϱ definíciója alapján ekkor $\mu\left(\Phi^{-1}(C)\right)$ is $\lambda(C)$ lesz;
- minden n pozitív egészre létezik egy D_n Borel-halmaz a $[0,1]$-ben, melynek Φ szerinti ősképe A_n, hiszen minden n-re létezett egy C_n Borel-halmaz, melyre $\phi^{-1}(C_n)=A_n$, így $D_n := \varphi(C_n)$ megfelelő lesz.

Abban az esetben, ha X mértéke nem 1, de véges, nyilván ugyanezt elmondhatjuk a $[0,1]$ szakasz helyett a $[0,\mu(X)]$ szakasszal, ha pedig X mértéke végtelen, akkor (a σ-végességet kihasználva) feldarabolhatjuk őt az 1 mértékű $X_0, X_1, X_2, \ldots$ halmazokra, melyeken megkonstruálhatjuk külön-külön a hozzájuk tartozó Φ_i függvényeket (az $A_n\cap X_i$ halmazok mellett). Vegyük észre, hogy mivel minden pont mértéke 0 a $[0,1]$-ben, így például a $[0,1]$ racionális számai és az 1-nél kisebb racionális számai között egy bijekciót létesítve, Φ-t pedig ezzel tovább komponálva (az irracionális számokat a helyükön hagyva) feltehetjük, hogy Φ képtere nem a $[0,1]$, hanem a $[0,1)$ intervallum – a Φ-re tett feltételek ettől nem változnak. Most a Φ_i+i függvények unióját véve minden i természetes számra, kapunk egy Φ függvényt, amely $[0,\infty)$-re képez, és szintén rendelkezik a fenti tulajdonságokkal.

Most a $[0,\infty] := [0,\infty)$ jelölést alkalmazva azt kaptuk, hogy létezik egy Φ függvény X-ből $[0,\mu(X)]$-be képező függvény, melyre:

- Φ mérhető;
- $[0,\mu(X)]$ minden C Borel-halmazára $\mu\left(\Phi^{-1}(C)\right)=\lambda(C)$;
- minden n pozitív egészre létezik egy olyan D_n Borel-halmaz, amelyre $A_n=\Phi^{-1}(D_n)$ teljesül.

Nyilván teljesen hasonlóan előállíthatunk egy Ψ függvényt Y-ból $[0,\nu(Y)]$-ba, melyre a (többek között az $R_{n,i}$ téglák Y-ra vett oldalait is tartalmazó) $B_1, B_2, \ldots$ halmazsorozat mellett teljesül hogy:

- Ψ mérhető;

- $[0, \nu(Y)]$ minden C Borel-halmazára $\nu\left(\Psi^{-1}(C)\right) = \lambda(C)$;
- minden n pozitív egészre létezik egy E_n Borel-halmaz, melyre $B_n = \Psi^{-1}(E_n)$.

Ekkor a $\Phi \times \Psi$ függvény az $X \times Y$-t képezi $[0, \mu(X)] \times [0, \nu(Y)]$-ba, a következő módon:

- $\Phi \times \Psi$ mérhető;
- $[0, \mu(X)] \times [0, \nu(Y)]$ minden C Borel-halmazára $(\Phi \times \Psi)^{-1}(C)$ mértéke $\mu \times \nu$ szerint megegyezik C Lebesgue-mértékével, hiszen a Borel-féle σ-algebrák szorzata ezeken a tereken a szorzattér Borel-halmazainak σ-algebrája lesz;
- a P halmazhoz létezik egy $\widetilde{P}$ Borel-halmaz, melynek ősképe csak nullmértékű halmazban tér el P-től, hiszen az $R_{n,i}$ téglák oldalaihoz létezik egy-egy $D_{n,i}$ illetve $E_{n,i}$ Borel-halmaz, melyek ősképei pont a tégla megfelelő oldalai lesznek, így az ezekből előállított $\widetilde{P} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} (D_{n,i} \times E_{n,i})$ halmaz ősképe valóban (majdnem) P lesz.

Most szeretnénk a $\widetilde{P}$ halmazon megoldani a feladatot. Mivel $\widetilde{P}$ egy Borel-halmaz, ezért tudjuk, hogy létezik egy I és egy J pozitív mértékű nyílt intervallum $[0, 1]$-ben, hogy az $I \times J$ téglának legalább 4/5-öd részét kitölti $\widetilde{P}$, vagyis $\lambda\left((I \times J) \cap \widetilde{P}\right) \geq 4/5 \cdot \lambda(I)\lambda(J)$. (Nyilván, hiszen a Lebesgue-mérték definíciója alapján létezik intervallum oldalú téglák egy megszámlálható uniója, melynek Lebesgue-mértéke legfeljebb $\widetilde{P}$ Lebesgue-mértékének kevesebb, mint 5/4-ed része, és fedik $\widetilde{P}$-ot, tehát a téglák valamelyikébe legalább 4/5 részben belemetsz P. Az intervallum nyíltságának feltételezése pedig nem változtat sem a tégla, sem a metszet mértékén.)

Felezzük most meg az I és a J intervallumot is (a valós felezőpontjánál), és bontsuk őket szét a nyílt I_1 és I_2 illetve J_1 és J_2 intervallumokra (az eredeti intervallumok felezőpontjait kihagyva). Ekkor $(I_1 \times J_1)$, $(I_1 \times J_2)$, $(I_2 \times J_1)$ és $(I_2 \times J_2)$ uniója egy nullmértékű halmaztól eltekintve kiadja $I \times J$-t. Nevezzük el ezeknek a tégláknak illetve P-nek a metszetét rendre P_{11}-nek, P_{12}-nek, P_{21}-nek illetve P_{22}-nek. Most toljuk el az $I_i \times J_j$ $(i, j = 1, 2)$ téglákat $I_1 \times J_1$-re (mivel ezek a téglák mind egybevágóak, ez nyilván megtehető). Vegyük itt a P_{ij} halmazok képeinek metszetét. Mivel P kitöltötte $I \times J$ legalább 4/5 részét, így a metszet pozitív mértékű lesz (mértéke legalább $(1/4 - 1/5) \cdot \lambda(I)\lambda(J)$). Most toljuk vissza a metszetet mind a négy $I_i \times J_j$ téglára, és nevezzük a képeket P'_{ij}-nek, uniójukat P'-nek.

Definiáljuk $\widetilde{p}$-ot konstans 1-nek P'_{11}-en és P'_{22}-n illetve -1-nek P'_{12}-n és P'_{21}-en. A P'_{ij} halmazok definíciójából nyilvánvalóan következik, hogy $\widetilde{p}$ Borel-mérhető, korlátos, nemnulla pozitív mértékű P' halmazon, $\widetilde{P}$-n kívül 0, és minden marginálisa azonosan 0.

Most „emeljük vissza” $\widetilde{p}$-ot a $\Phi \times \Psi$ függvény inverze segítségével $X \times Y$-ba, vagyis definiáljuk a p függvényt $\widetilde{p} \circ (\Phi \times \Psi)$-ként. Azt szeretnénk bebizonyítani, hogy ez a p függvény kielégíti a feltételeinket.

- Mivel $\widetilde{p}$ csak $\widetilde{P}$-on nem nulla, így p csak $\widetilde{P}$ ($\Phi \times \Psi$ szerinti) ősképén nem nulla, de ez (majdnem) egybeesik P-vel
- A $\{\widetilde{p} \neq 0\}$ halmaz egy pozitív mértékű Borel-halmaz – így ősképe egy pozitív mértékű mérhető halmaz lesz $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-ben, és pont ez lesz az a rész, ahol p nem nulla.
- A p függvény nyilván korlátos, hiszen $\widetilde{p}$ is az.

- Egy adott $x \in X$ pontra a p függvény X szerinti marginálisának értéke x-ben a $p(x,y)$ függvény Y-on vett (y szerinti) integrálja lesz. Mivel p értékei csak 0 és ± 1 lehetnek, így ez megegyeik $[\nu\,(y \in Y \mid p(x,y) = 1) - \nu\,(y \in Y \mid p(x,y) = -1)]$-gyel. De az $\{\, y \in Y \mid p(x,y) = \pm 1\}$ halmazok pont az $\{\, s \in [0, \nu(Y)] \mid \widetilde{p}(\Phi(x), s) = \pm 1\}$ halmazok őspépei lesznek Ψ szerint. Vagyis a két halmaz mértéke megegyezik (és véges), így a marginálisfüggvény azonosan 0 – és nyilván hasonló igaz p másik marginálisára is.

Tehát konstruáltunk egy p függvényt, mely kielégíti a kívánt feltételeket – vagyis az 5.1. és a 2.7. tételeket valóban bebizonyítottuk.

6. fejezet

Speciális esetek, a Kellerer-feltétel elégtelensége

Ebben a részben példákat adunk a Kellerer-feltétel elégtelenségére, bizonyos (a tételeinknél gyengébb) feltételek mellett. Ezek részben a függvényes feladatra adnak ellenpéldát (6.1. szakasz), míg máskor csak a halmazok esetére vonatkoznak (hiszen például a 6.2. szakaszban tárgyalt feltételek mellett a függvényes esetben a Kellerer-feltétel elégséges is).

A 2.3. (függvényekre vonatkozó) és a 2.7. (halmazokra vonatkozó) tételben is feltételeztük, hogy a marginálisfüggvényeink integrálhatóak, így feltehettük, hogy a mértéktereink σ-végesek. Az ezen feltételt nem teljesítő függvényeknek és tereknek vizsgáljuk meg egy speciális esetét a 6.3. szakaszban. Ezen kívül a 2.3. tételnél a korlátozó h függvény véges mértékű halmazokon való integrálhatóságának feltételét hagyjuk el a 6.1. szakaszban, míg a 2.7. tétel plusz feltételének (a mértékterek atommentességének) szükségességét bizonyítjuk a 6.2. részben.

Vegyük észre, hogy (mint azt már a 16. oldalon is megjegyeztük) a halmazok eseténél mindenképpen fel kell tennünk, hogy f és g értékei megfelelőek abban az értelemben, hogy f értékei (majdnem) mind $\mathcal{B}$-beli halmazok mértékeivel, g értékei pedig $\mathcal{A}$-beli halmazok mértékeivel egyeznek meg.

6.1. A „túl nagy” h függvény esete

A legkézenfekvőbb először a h függvényre tett furcsa feltételt gyengíteni, vagyis olyan h függvénnyel foglalkozni, melynek nem véges az integrálja minden véges mértékű halmazon.

Vegyük például a $[0,1]$ mértékteret (a Borel-halmazokkal és a Lebesgue-mértékkel), és tekintsük ennek az önmagával vett szorzatát. Definiáljuk itt a h függvényt a következő módon:

$$h(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{x-y} & \text{, ha } x > y \\ 0 & \text{, ha } x \leq y \end{cases},$$

továbbá definiáljuk az f és a g függvényt azonosan 1-nek. Ezek kielégítik a 2.3. tétel feltételeit, a h függvény véges halmazon való integrálhatóságának kivételével – hiszen h

integrálja végtelen, az egységnégyzet mértéke pedig 1. (A h függvény integrálja $x = 0$ kivételével minden fix x mellett végtelen. Így Fubini-tétele szerint a teljes integrál is végtelen lesz.)

Most lássuk be, hogy bármely A és B Borel-halmazra a $[0, 1]$-ből teljesül a 2.2. Kellerer-feltétel. Vagyis azt kell ellenőriznünk, hogy

$$1 \le \int\limits_{A\times B} h\,d\lambda + \lambda\left(\overline{A}\right) + \lambda\left(\overline{B}\right),$$

ami ekvivalens a következővel:

$$\lambda(A\cup B) - 1 + \lambda(A\cap B) = \lambda(A) + \lambda(B) - 1 \le \int\limits_{A\times B} h\,d\lambda.$$

(Mind az egy, mind a két dimenziós Lebesgue-mértéket λ-val jelöljük.)

Tekintve, hogy A és B is része a $[0, 1]$ szakasznak, a bizonyítani kívánt egyenlőtlenség bal oldala felülről becsülhető $\lambda(A \cap B)$-vel, míg jobb oldala alulról becsülhető az $\int_{(A\cap B)\times(A\cap B)} h\,d\lambda$ kifejezéssel. Vagyis elegendő lenne belátnunk, hogy a $[0, 1]$ szakasz tetszőleges C Borel-halmazára a

$$\lambda(C) \le \int\limits_{C\times C} h\,d\lambda$$

összefüggés teljesül.

Viszont nem nehéz látni, hogy (amennyiben C nem nullmértékű), a jobb oldalon szereplő integrál valójában végtelen lesz. Először írjuk át az integrált más alakra:

$$\int\limits_{C\times C} h\,d\lambda = \int\limits_{t=0}^{1} \int\limits_{\substack{x\in C\\ x-t\in C}} h(x, x-t)\,dx\,dt = \int\limits_{t=0}^{1} \frac{1}{t}\cdot\lambda\left(C\cap(C+t)\right)\,dt.$$

A C halmazhoz találhatunk olyan $I_1, \dots, I_n$ diszjunkt intervallumokat, hogy ezek uniója $\lambda(C)/4$-nél kevesebbel tér el C-től, vagyis $\lambda\left(C \triangle \bigsqcup_{i=1}^{n} I_i\right) < \lambda(C)/4$. Így minden t-re

$$\begin{aligned}\lambda\left(C\cap(C+t)\right) > \lambda\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} I_i \cap \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} I_i + t\right)\right) - 2\cdot\frac{\lambda(C)}{4} \ge \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda\left(I_i\right) - t\right) - \frac{\lambda(C)}{2} =\\ = \lambda\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} I_i\right) - n\cdot t - \frac{\lambda(C)}{2} > \frac{\lambda(C)}{4} - n\cdot t\end{aligned}$$

teljesül, vagyis kellően pici $t > 0$-ra (létezik egy $\eta > 0$, hogy minden $0 < t < \eta$-ra) C-nek és $(C + t)$-nek a metszete legalább $\lambda(C)/5$ mértékű. Tehát a fentiek szerint:

$$\int\limits_{C\times C} h\,d\lambda = \int\limits_{t=0}^{1} \frac{1}{t}\cdot\lambda\left(C\cap(C+t)\right)\,dt \ge \int\limits_{t=0}^{\eta} \frac{1}{t}\cdot\frac{\lambda(C)}{5}\,dt = \infty,$$

ami nyilván nagyobb $\lambda(C)$-nél. Ha pedig $\lambda(C) = 0$ akkor az integrál is 0, így megint csak nem lehet kisebb $\lambda(C)$-nél.

Most már látjuk, hogy h illetve a két konstans 1 függvény kielégítik a Kellerer-feltételt. A következőkben be fogjuk látni, hogy ennek ellénre nincs olyan k függvény az egységnégyzet felett, melynek marginálisai (majdnem mindenhol) azonosan 1-ek, de sehol nem nagyobb h-nál.

Ha létezne ilyen k függvény, úgy az ő integrálja (Fubini tétele szerint) 1 kellene legyen. Nevezzük el az $\{(x, y) \in [0, 1]^2 \,|\, x > y\}$ háromszöget (vagyis azt a területet, ahol h nem nulla) H-nak. A k függvény nyilván csak H-n vehet fel nemnulla értéket.

Mivel az f függvény azonosan 1, így k integrálja a $[0, 1/2] \times [0, 1]$ területen 1/2, és hasonlóan 1/2 a $[0, 1] \times [1/2, 1]$-en is. Ám ennek a két sávnak a metszete kívül esik H-n vagyis a két terület unióján vett integrálja k-nak 1 kell legyen – azaz az ezek unióján kívüli részen ($(1/2, 1] \times [0, 1/2)$-en) k a 0 értéket veszi fel (majdnem mindenhol). Tehát k nemnulla értéket csak azon a két H-hoz hasonló háromszögön vehet fel, melyeket H-ból a fenti négyzetet kivágva kapunk.

Ezekre viszont teljesen hasonló elmondható, csupán feleekkora értékekkel. Vagyis hasonlóan látható, hogy a k függvény az $(1/4, 1/2] \times [0, 1/4)$ illetve a $(3/4, 1] \times [1/2, 3/4)$ négyzeten is azonosan 0. Ezt folytatva a „H-ból kizárt” négyzetek uniója lefedi az egész H-t – vagyis k majdnem mindenhol 0 értéket vesz fel, ami ellentmond annak, hogy k integrálja 1 kellene legyen. Tehát nem létezhet megfelelő k függvény.

Ebből következik, hogy a h függvény véges halmazokon való integrálhatósága nem hagyható el a 2.3. tétel feltételei közül.

6.2. Szorzatterek atomos tényezővel

Legyen adott egy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és egy $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértéktér. Ebben a szakaszban azt fogjuk feltételezni, hogy:

- $\mathcal{A}$-nak van egy pozitív, de véges mértékű C eleme;
- $\mathcal{B}$-ben van egy pozitív, de véges mértékű V atom;
- $\mathcal{B}$-ben van egy $\nu(V)$-nél kisebb, de pozitív mértékű W halmaz;
- $\mathcal{A}$-nak van egy $(\nu(W)/\nu(V)) \cdot \mu(C)$ mértékű részhamaza.

Jegyezzük meg, hogy bár az $(X, \mathcal{A}, \mu)$-re tett feltételek meglehetősen szokatlannak tűnhetnek, bármely atommentes (sőt bármely nem teljesen atomos) mértéktér kielégíti őket.

A fenti feltételek mellett ellenpéldával fogjuk igazolni, hogy a Kellerer-feltétel teljesülése nem elégséges M megfelelő U részhalmazának létezéséhez.

Ehhez válasszuk M-nek (tetszés szerint) az egész $X \times Y$ teret, vagy ennek $C \times (W \cup V)$ részhalmazát. (Ez utóbbi például véges mértékű lesz, ami mutatja, hogy M véges mértékűségének feltételezése sem jelent megoldást a problémára.)

Az f függvényt definiáljuk a C halmazon $\nu(W)$-nek, azon kívül 0-nak, g-t pedig definiáljuk V-n azonosan $(\nu(W)/\nu(V)) \cdot \mu(C)$-nek, és mindenhol máshol 0-nak. Ezek nemnegatív integrálható függvények lesznek, melyek értékei $\mathcal{B}$ illetve $\mathcal{A}$ elemeinek mértékeiként is előálnak.

Először lássuk be, hogy nincs olyan eleme $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-nek, melynek ezek marginálisfüggvényei lehetnének. Valóban, mivel g csak a V halmazon nemnulla, így (nullmértékűtől eltenintve)

$X \times V$ része kellene legyen a feltételezett U halmazunk. Azonban V-nek (mivel ő egy atom és mértéke nagyobb W-énél) nincsen $\nu(W)$ mértékű részhalmaza (holott f definíciója azt követelné meg, hogy U majdnem minden Y szerinti szekciója 0 vagy $\nu(W)$ mértékű legyen). Tehát valóban nem létezik ilyen halmaz.

Másfelől be fogjuk látni, hogy f és g kielégíti a Kellerer-feltételt. A 11. oldalon írtak szerint ezt elegendő az $M = X \times Y$ esetre bizonyítani. Mindkét függvény integrálja $\nu(W) \cdot \mu(C)$, tehát elegendő azt látnunk, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ és $B \in \mathcal{B}$ halmazokra

$$\nu(W) \cdot \mu(C) \leq \mu(A) \cdot \nu(B) + \mu(C \setminus A) \cdot \nu(W) + \nu(V \setminus B) \cdot \frac{\nu(W)}{\nu(V)} \cdot \mu(C)$$

teljesül.

Mivel V egy atom, így $\nu(V \setminus B)$ csak a $\nu(V)$ és a 0 értéket veheti fel. Az első esetben a jobboldali összeg utolsó tagja pont $\nu(W) \cdot \mu(C)$ lesz, tehát az egyenlőtlenség teljesül. A második esetben $\nu(B) \geq \nu(V) > \nu(W)$ is teljesül, vagyis a jobboldali összeget alulról tudjuk becsülni a $\mu(A) \cdot \nu(W) + \mu(C \setminus A) \cdot \nu(W) \geq \mu(C) \cdot \nu(W)$ értékkel, így a kívánt egyenlőtlenség megint csak teljesülni fog.

Tehát ebben az esetben a Kellerer-feltétel valóban nem lesz elégséges, még a „megfelelőértékűség” feltételével kiegészítve sem. Jegyezzük meg, hogy (a szakasz elején írtak szerint) ez azt is jelenti, hogy egy teljesen atomos és egy atommentes mértéktér szorzatán a halmazokra vonatkozó Kellerer-feltétel soha nem lesz elégséges feltétele a keresett halmaz létezésének, még akkor sem, ha kiegészítjük a megfelelőértékűség feltételével.

6.3. A 0-∞ mértékterek esete

A mértéktereknek egy elég speciális változata az, ahol minden halmaz mértéke csak nulla és végtelen lehet. Szigorúan véve ezek teljesen atomos mértékterek, melyek minden atomja azonos mértékű (hiszen a végtelen mértékű halmazok részhalmazainak mértéke is vagy nulla vagy végtelen), ám ez a mérték nem véges, ezért sok szempontból másképp viselkednek, mint véges mértékű atomokból áló társaik.

Legyen tehát $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ is egy-egy ilyen 0-∞ mértéktér. Nyilván az integrálható függvények ebben az esetben majdnem mindenhol azonosan nullák, tehát az integrálhatóság feltételétől érdemes eltekintenünk. Vegyünk a két térről egy f illetve g nemnegatív mérhető függvényt, melyek integrálja végtelen. Vegyük észre, hogy egy ilyen speciális szorzattéren bármely nemnegatív mérhető függvény marginálisai csak a 0 és ∞ értékeket tudják felvenni – valóban egy függvény „adott pont feletti” integrálja csak 0 és ∞ lehet. Hasonlóképpen, ebben az esetben nem csak a nullmértékű halmazokon értelmezett függvényeket nem tudjuk megkülönböztetni egymástól az integrálok segítségével, hanem a függvények pozitív értékei között sem tudunk különbséget tenni – ha egy 0-∞ mértéktéren egy függvény pozitív értékét megváltoztatjuk egy másik pozitív értékre, semmilyen halmazon nem változik az integrálja. Éppen ezért (a 2.2. szakaszban tárgyaltakhoz hasonlóan) feltehetjük, hogy h egy karakterisztikus függvény, és ekkor k-t is csak karakterisztikus függvény formájában van értelme keresni. Tehát voltaképpen csak a halmazos feladattal kell foglalkoznunk.

Ekkor viszont a 2.6. Kellerer-feltételt ellenőrizendő annyit kell belátnunk, hogy az egyenl jobb oldala, vagyis a

$$(\mu \times \nu)((A \times B) \cap M) + \int\limits_{\overline{A}} f \, d\mu + \int\limits_{\overline{B}} g \, d\nu$$

kifejezés értéke mindig végtelen. Az $\int_{\overline{A}} f \, d\mu$ érték csak akkor lehet 0, ha f az A-n kívül (majdnem mindenhol) azonosan nulla. Viszont mivel f integrálja végtelen, ez azt jelenti, hogy A mértéke pozitív, így végtelen. Hasonló igaz $\int_{\overline{B}} g \, d\nu$-re is. Tehát amennyiben ezek mindketten nullák, $(A \times B) \cap M$ mértéke megegyezik $\{f > 0\} \times \{g > 0\} \cap M$ mértékével. Viszont mint már a 11. oldalon is megemlítettük, az egész problémát elegendő ezen a téglán vizsgálni. Ha pedig az integrálok valamelyike nem nulla, úgy (a terek 0-∞ értékűségéből adódóan) az csak végtelen lehet. Tehát a Kellerer-feltétel pontosan akkor teljesül, ha M és $\{f = \infty\} \times \{g = \infty\}$ metszete nem nullmértékű.

Most már csak azt kéne megállapítanunk, hogy két ilyen 0-∞ értékű és végtelen integrálú függvényhez, melyek kielégítik a Kellerer-feltételt, vajon mindig van-e olyan halmaz, melynek ők a szekciómértékeik. Ez viszont megint könnyű feladat, hiszen a mértékterek 0-∞ tulajdonságából adódóan $\{f = \infty\}$ és $\{g = \infty\}$ is végtelen mértékű lesz. Tehát pontosan akkor van megfelelő halmaz, ha $\{f = \infty\} \times \{g = \infty\} \cap M$ megfelelő. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha (majdnem) minden $x \in \{f = \infty\}$-re illetve $y \in \{g = \infty\}$-re az M halmaz x illetve y szerinti szekciómértéke is végtelen. Ami nyilván nem lesz mindig igaz, például ha f és g azonosan végtelen, M egy $X' \times Y'$ tégla, ahol X', $\overline{X'}$, Y' és $\overline{Y'}$ mértéke is végtelen, akkor a fentiek szerint a függvényeink kielégítik a Kellerer-feltételt, ám nem létezik megfelelő halmaz.

Tehát ebben az esetben „megfelelő értékű" függvények mellett az integrálok megegyezése és végtelenségük esetén $\{f = \infty\} \times \{g = \infty\} \cap M$ végtelen mértékűsége ekvivalens a Kellerer-feltétellel, de előfordulhat, hogy a halmazokra vonatkozó Kellerer-feltétel nem elégséges, és így (mint feljebb már megállapítottuk) a függvényekre vonatkozó Kellerer-feltétel sem lehet az.

Irodalomjegyzék

[1] J. Hoffmann-Jørgensen: The General Marginal Problem, *Functional Analysis II* 77-367. Lecture Notes in Mathematics Vol. 1242. Springer, 1987.

[2] A. S. Kechris: *Classical Descriptive Set Theory.* Graduate Texts in Mathematics Vol. 156. Springer-Verlag, 1995.

[3] H. G. Kellerer: Funktionen auf Produkträumen mit vorgegebenen Marginal-Funktionen, *Mathematische Annalen.* Vol. 144. No. 4. 323-344. Springer, 1961 augusztus.

[4] H. G. Kellerer: Die Schnittmaß-Funktionen meßbarer Teilmengen eines Produktraumes, *Mathematische Annalen.* Vol. 146. No. 2 103-128. Springer, 1962 április.

[5] G. G. Lorentz: A Problem of Plane Measure, *American Journal of Mathematics* Vol. 71. No. 2. 417-426. Johns Hopkins University Press, 1949. április.

[6] L. Lovász, M. D. Plummer: *Mathcing Theory.* North-Holland Mathematics Studies Vol. 121. Annals of Discrete Mathematics Vol. 29. North-Holland; Akadémiai Kiadó, 1986.

[7] W. Rudin: *Functional Analysis.* McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill, 1973.

[8] V. Strassen: The Existence of Probability Measures with Given Marginals, *Annals of Mathematical Statistics* Vol. 36. No. 2. 423-439. Institute of Mathematical Statistics, 1965 április.

[9] Wikipedia: *Atom (measure theory).* `http://en.wikipedia.org/wiki/Atom_(measure_theory)`, 2015. 05. 16.