ELTE TTK
MSc szakdolgozat matematikából

Maximáloperátor és Cantor-halmaz

Czeller Ildikó

matematikus szak
témavezető: Keleti Tamás egyetemi tanár
ELTE TTK, Analízis Tanszék

2016. május

Tartalomjegyzék

Tartalom 1

1. Bevezetés 2

1.1. Alapfogalmak . . . 2
1.2. Háttér, motiváció . . . 4
1.3. A fő eredmény . . . 6
1.4. A bizonyítás áttekintése . . . 6
1.5. Bizonyítás nélkül felhasznált, jól ismert tételek . . . 7

2. A fő eredmény bizonyítása 8

2.1. A 2.20. tétel bizonyítása . . . 16
2.2. A 2.22. tétel bizonyítása . . . 30
2.3. A 2.23. tétel bizonyítása . . . 43
2.4. A 1.18. tétel 2. és 3. pontjának bizonyítása . . . 47

3. Kapcsolódó eredmények 55

3.1. Differenciálás . . . 55
3.2. Maximáloperátorok és fedések kapcsolata . . . 58
3.3. Cantor-halmazokkal kapcsolatos eredmények . . . 59

A. Jelölések 61

B. A bizonyítás vizuális áttekintése 63

Irodalomjegyzék 65

1. Bevezetés

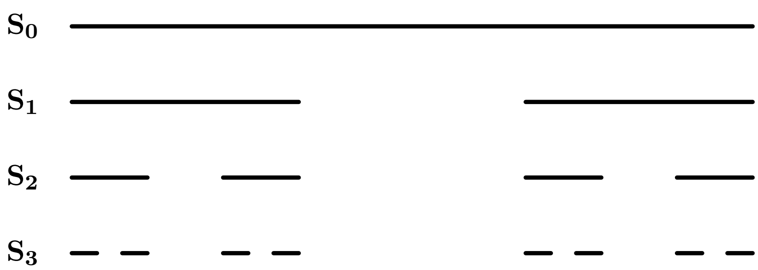
A dolgozat jelentős részében Laba és Pramanik [10]-beli cikkét dolgozom fel. Igyekeztem a nehezebben érthető részeket részletezni, az új fogalmakat példákkal megvilágítani. Több apró, és egy közepes, javítható hibát kijavítottam. Egyes bizonyításokat a cikknél jóval részletesebben kifejtek, míg másokat elhagytam, ahol úgy éreztem, azok a dolgozat lényegi tartalmához nem sokat adnának hozzá. A cikk fő eredménye egy speciális Cantor-halmazzal definiált maximáloperátor korlátossága $L^p(\mathbb{R})$-beli függvényekre. Végül bemutatom a fő eredmény közvetlen következményeit, és a jelenleg ismert, Cantor-halmazok hasonló példányainak uniójával kapcsolatos eredményeket.

Köszönetnyilvánítás: Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Keleti Tamásnak a témafelvetésért, a konzultációkért és értékes megjegyzéseiért.

1.1. Alapfogalmak

Ahogy a dolgozat címéből is kiderül, a szükséges alapfogalmak a Cantor-halmaz és a maximáloperátor, ezeket definiálom a következőkben.

1.1. Definíció. ([3]) *Triadikus Cantor-halmaz*nak nevezzük a következő iteráció eredményeképpen kapott halmazt. A k. generációs, más néven k. iteráció után kapott halmazt jelölje S_k, míg $S = \cap_{k=1}^{\infty} S_k$ jelölje a szokásos triadikus Cantor-halmazt. Az S_k halmaz 2^k darab $\frac{1}{3^k}$ hosszú zárt intervallumból áll, speciálisan véges sok intervallum uniója.



Ha nem hangsúlyozom külön, hogy a klasszikus, triadikus Cantor-halmazról van szó, a dolgozatban Cantor-halmaz alatt a következő definíció szerinti általános Cantor-halmazt értem.

1.2. Definíció. ([7]) Az $S \subset \mathbb{R}$ halmaz *egy Cantor-halmaz*, ha nemüres, nincsenek izolált pontjai, kompakt, és sehol sem sűrű.

A bizonyításban sok konstansra van szükség, ezért a Cantor-halmazra a szokásos C helyett az S jelölést használom. A dolgozat fő témája egy konkrét maximáloperátor korlátossága. A maximáloperátorok talán legismertebb példája a Hardy-Littlewood maximáloperátor:

1.3. Definíció. ([4]) Legyen $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ tetszőleges. Ekkor

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}y$$

definiálja az $M : f \mapsto Mf$ *Hardy-Littlewood maximáloperátor*t.

Az előző definícióban szokásos módon $\lambda(\cdot)$ jelöli egy halmaz Lebesgue-mértékét.

1.4. Jelölés. A Lebesgue-mértéket $\mathbb{R}$-beli halmazok esetén az egyszerűség kedvéért $|\cdot|$ fogja jelölni.

Természetes általánosítás, hogy gömbön kívül más halmazsorozattal is rá lehet zsugorodni egy pontra, innen adódik a következő definíció:

1.5. Definíció. ([10]) Legyen $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tetszőleges, míg $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ rögzített $\mathbb{R}$-beli fogyó halmazsorozat. Ekkor

$$\tilde{\mathcal{M}}f(x) = \sup_{\substack{r>0,\\ k\geq 1}} \frac{1}{|S_k|} \int_{S_k} |f(x+ry)| \,\mathrm{d}y$$

definiálja az $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ halmazsorozathoz tartozó $\tilde{\mathcal{M}} : f \mapsto \tilde{\mathcal{M}}f$ *maximáloperátor*t.

Például S_k lehet az 1.1. definícióban definiált triadikus Cantor-halmaz k. generációs intervallumrendszere. Sőt, ebben a dolgozatban S_k végig véges intervallumrendszer lesz. Az integrált S_k Lebesgue-mértékével normáljuk, így például $f = id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esetén $\tilde{\mathcal{M}}f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$. Vegyük észre, hogy az 1.3. definícióban definiált M operátor $d = 1$ esetén speciális esete $\tilde{\mathcal{M}}$-nek, megkapjuk az $S_k = [-1, 1]$ választással.

A $\phi_k = \dfrac{1}{|S_k|}\mathbb{1}_{S_k}$ sűrűségfüggvénnyel $\tilde{\mathcal{M}}$ a következő alakba írható:

$$\tilde{\mathcal{M}}f(x) = \sup_{\substack{r>0,\\ k\geq 1}} \int |f(x+ry)|\, \phi_k(y) \,\mathrm{d}y.$$

1.6. Jelölés. Legyen $\phi_k = \dfrac{1}{|S_k|}\mathbb{1}_{S_k}$ az S_k halmaz normált karakterisztikus függvénye.

Így természetesen

$$\int_{S_k} \phi_k = 1. \tag{1}$$

Az $\tilde{\mathcal{M}}$ operátor a következő átlagoló operátorok szuprémuma:

1.7. Definíció. ([10]) Rögzített r és k paraméterek esetén $A_{r,k}$ *átlagoló operátor*ról beszélhetünk, legyen

$$A_{r,k}f(x) = \int f(x+ry)\phi_k(y) \,\mathrm{d}y = \frac{1}{|S_k|} \int_{S_k} f(x+ry) \,\mathrm{d}y = \frac{1}{r|S_k|} \int_{x+rS_k} f(y) \,\mathrm{d}y.$$

Természetes általánosítása és egyszerűsítése a 1.5. definícióban definiált maximáloperátornak a következő:

1.8. Definíció. ([10]) Legyen $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tetszőleges, míg μ rögzített valószínűségi mérték.

$$\tilde{\mathfrak{M}}f(x) = \sup_{r>0} \int |f(x+ry)| \,\mathrm{d}\mu$$

definiálja a μ valószínűségi mértékhez tartozó $\tilde{\mathfrak{M}} : f \mapsto \tilde{\mathfrak{M}}f$ *maximáloperátor*t.

Ha a ϕ_k sűrűségek gyengén konvergálnak egy μ valószínűségi mértékhez, akkor fogjuk tekinteni a 1.8. definícióban definiált μ-höz tartozó $\tilde{\mathfrak{M}}$ maximál operátort. Ha ϕ_k gyengén konvergál $k \to \infty$ esetén, akkor természetesen a μ valószínűségi mérték tartója része $\cap_{k=1}^{\infty} S_k$-nak.

1.9. Jelölés. Az $S = \cap_{k=1}^{\infty} S_k$ halmaz jelöli az S_k halmazok metszetét.

Végül a Cantor-halmazos konstrukcióhoz csak karakterisztikus függvényekre fogom alkalmazni a $\tilde{\mathcal{M}}$ és $\tilde{\mathfrak{M}}$ operátorokra bizonyított maximálegyenlőtlenséget, de Stein [13]-beli és Bourgain [1]-beli eredményéhez hasonlóan Laba és Pramanik is általánosabban, L^p-beli függvényekre vizsgálta az operátorok tulajdonságait. Egyrészt $\|\tilde{\mathfrak{M}} f\|_p \leq C \cdot \|f\|_p$, másrészt $q > p$ esetén $\|\tilde{\mathfrak{M}} f\|_q \leq C \cdot \|f\|_p$ típusú egyenlőtlenséget szeretnénk bizonyítani. Utóbbihoz módosítani kell az operátorok definícióját:

1.10. Definíció. ([10])

$$\tilde{\mathcal{M}}^a f(x) = \sup_{\substack{r>0, \\ k\geq 1}} r^a \int |f(x+ry)|\, \phi_k(y)\, \mathrm{d}y = \sup_{\substack{r>0, \\ k\geq 1}} r^a A_{r,k} f(x),$$

$$\tilde{\mathfrak{M}}^a f(x) = \sup_{r>0} r^a \int |f(x+ry)|\, \mathrm{d}\mu.$$

A 2.3. fejezetből kiderül, hogy $\tilde{\mathcal{M}}^a$ az $a = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}$ választással teljesíti a $\|\tilde{\mathfrak{M}}^a f\|_q \leq C \cdot \|f\|_p$ típusú egyenlőtlenséget.

A fő eredmény megfogalmazásához szükség van még a következő alapvető fogalmak definiálására.

1.11. Definíció. ([3]) Egy A halmaz *Hausdorff-dimenziója*

$$dim_H(A) = \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) < \infty\},$$

ahol $\mathcal{H}^s(A)$ jelöli az A halmaz s-dimenziós Hausdorff-mértékét:

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{diam}\, A_n)^s : \ A \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n, \mathrm{diam}\, A_n < \delta\}.$$

1.12. Definíció. A $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ függvénysorozat *gyengén tart* ϕ-hez, ha minden f kompakt tartójú folytonos függvény esetén

$$\int f\phi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \int f\phi.$$

A Cantor-halmazokkal és Hausdorff-dimenzióval kapcsolatos eredmények áttekintésére egy jó forrás Falconer [3]-beli könyve.

1.2. Háttér, motiváció

A geometriai mértékelmélet talán legfontosabb témája a Kakeya problémakör, amelyben kérdés, hogy egy bizonyos tulajdonságokkal bíró halmaz mennyire lehet kicsi, elsőként a dimenzió szempontjából, majd a dimenzió tisztázása után mennyire lehet kicsi a dimenziónak megfelelő mértékkel mérve. A mértékelmélet másik fontos területe a maximáloperátorok és ehhez kapcsolódóan a differenciálási tételek vizsgálata. A két témakör összefonódásaként keletkezett a következő kérdéskör.

1.13. Kérdés. Mekkora lehet egy U halmaz dimenziója és mértéke, ha a B halmaz minden pontja körül tartalmaz egy S-sel hasonló halmazt?

A válasz természetesen függ mind B dimenziójától és mértékétől, mind S tulajdonságaitól, valamint a bennfoglaló valós vektortér dimenziójától. Továbbá a hasonlóságot is tágan kell értelmezni, változik aszerint, hogy csak egyállású hasonló halmazokat engedünk meg, esetleg forgatást megengedünk, de nagyítást nem, stb. Számos fontos eredmény van a folyamatosan fejlődő kérdéskörben, amelyeknek említeni is csak egy részét van lehetőségem ebben a dolgozatban. A legfontosabb, jelen dolgozat témáját motiváló eredmények mellett további kapcsolódó tételeket és nyitott kérdéseket a 3.3 fejezetben mutatok be.

A témakör legelső meghatározó eredménye E. Stein [13]-beli 1976-os ereménye, melyet 1986-ban követett J. Bourgain [1]-beli szorosan kapcsolódó eredménye, együtt egy kerek egészt alkotva. Stein $d \geq 3$ esetén bizonyított, míg Bourgain tisztázta a $d = 2$ esetet, eredményeiket közös tételben fogalmazom meg. A 1.8. definícióban definiált $\tilde{\mathfrak{M}}$ operátor d dimenzióra általánosított változatának speciális esetének tekinthető a következő gömbi maximáloperátor:

1.14. Definíció. ([13]) Legyen $d \geq 1$, jelölje $\mathbb{S}^{d-1}$ $\mathbb{R}^d$-ben az egységgömb felszínét, legyen σ egyenletes valószínűségi mérték $\mathbb{S}^{d-1}$-en. Ekkor

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x) = \sup_{r>0} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(x + ry)| \, \mathrm{d}\sigma(y)$$

definiálja a gömbfelszínhez tartozó $\tilde{\mathfrak{M}}_{\mathbb{S}^{d-1}} : f \mapsto \tilde{\mathfrak{M}}_{\mathbb{S}^{d-1}} f$ *gömbi maximáloperátor*t.

1.15. Tétel. *([13], [1]) A 1.14. definícióban definiált gömbi maximáloperátor $d \geq 2$ esetén korlátos $p > \dfrac{d}{d-1}$ esetén az $L^p(\mathbb{R}^d)$-beli függvényeken.*

Ebből a tételből később a Cantor-halmaz példáján a 3.3 következményben bemutatott gondolatmenettel egyszerűen következik, hogy ha egy pozitív Lebesgue-mértékű halmaz, mint középpontok köré egy-egy gömbfelszínt rajzolunk, az unió területe biztosan pozitív Lebesgue-mértékű lesz.

Másik irányba mutat a következő [8]-beli eredmény:

1.16. Tétel. *([8]) A sík minden pontja köré elhelyezhető egy tengelypárhuzamos négyzet úgy, hogy az unió Hausdorff-dimenziója 1. (Így természetesen a két dimenziós Lebesgue-mértéke bőven 0.)*

A geometriai mértékelméletben egyrészt központi téma a fraktálok, önhasonló halmazok vizsgálata, másrészt a mértékelméletben általában rengeteg kérdésre példa vagy ellenpélda egy megfelelő Cantor-halmaz, így elég természetesen adódik a következő kérdés.

1.17. Kérdés. Milyen tulajdonságú halmazt kaphatunk, ha egy halmaz minden pontja köré egy Cantor-halmaz hasonló példányát helyezzük el?

Ugyanakkor a gömbfelszínre és négyzetre, vagy általánosabb esetben politóp-vázakra vonatkozó eredmények nem érvényesek egy az egyben 1 dimenzió esetén. Ez csak erősíti azt, hogy ha 1 dimenzióban szeretnénk analóg eredményeket, akkor Cantor-halmazokat érdemes vizsgálni, hiszen $\mathbb{R}$ részsokaságai triviálisak.

A Cantor-halmazok családja olyannyira sokrétű, hogy a jelen dolgozat fő eredménye mellett több jelentős eredmény van, amelyek különböző tulajdonságú Cantor-halmazok létezését garantálják, ugyanakkor a klasszikus triadikus Cantor-halmazról a mai napig nem ismert, hogy hasonló példányainak uniója minimálisan mekkora lehet. Ez motivált a dolgozat témájának körüljárásában.

1.3. A fő eredmény

A tétel egységes megfogalmazása érdekében az $\frac{x}{0} = \infty$ konvenciót alkalmazzuk $x \in \mathbb{R}_{>0}$ esetén.

1.18. Tétel. *([10]) Tetszőleges $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{3}$ esetén létezik $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ halmazsorozat, melyre a következők mind igazak:*

1. *Minden $k \geq 0$-ra $S_k \subseteq [1,2]$ véges sok intervallum uniója, $S_{k+1} \subseteq S_k$ és $|S_k| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*
2. *Létezik egy μ valószínűségi mérték, amelyhez a ϕ_k normált karakterisztikus függvények gyengén konvergálnak.*
3. *Az $S = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$ halmaz Hausdorff-dimenziója $1 - \varepsilon$.*

Ha a p, q, a paraméterekre igazak a következők:

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} < p < \infty, \qquad p \leq q < \frac{1-\varepsilon}{2\cdot\varepsilon}, \qquad a = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}. \tag{2}$$

akkor ráadásul

4. *az $\tilde{\mathcal{M}}^a$ és $\tilde{\mathfrak{M}}^a$ operátorok korlátosak, mint $L^p(\mathbb{R}) \to L^q(\mathbb{R})$ operátorok, és*
5. *az $\tilde{\mathcal{M}}$ és $\tilde{\mathfrak{M}}$ operátorok korlátosak, mint $L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ operátorok.*

1.19. Megjegyzés.

- Az $\varepsilon = 0$ választással $1 < p \leq q < \infty$.
- Az $\varepsilon = \frac{1}{3}$ választással $2 < p < \infty$ és $p \leq q < 2$, azaz ekkor már nem marad olyan kitevőpár, amelyre bizonyítva lenne egy maximál-egyenlőtlenség.

1.20. Megjegyzés. Nyitott, hogy az $\varepsilon < \frac{1}{3}$, illetve a $q < \frac{1-\varepsilon}{2\cdot\varepsilon}$ feltételek élesek-e.

1.4. A bizonyítás áttekintése

A bizonyítás sarokköve először a következő korlátozott maximáloperátorokról belátni a megfelelő korlátosságot.

1.21. Definíció. ([10]) Legyen $\mathcal{M} : f \mapsto \mathcal{M}f$ a $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$-hoz tartozó *korlátozott maximál-operátor*:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{\substack{1<r<2 \\ 1\leq k}} \int |f(x+ry)|\, \phi_k(y)\, \mathrm{d}y.$$

Hasonlóan definiálhatjuk a μ valószínűségi mértékhez tartozó $\mathfrak{M} : f \mapsto \mathfrak{M}f$ korlátozott maximáloperátort:

$$\mathfrak{M}f(x) = \sup_{1<r<2} \int |f(x+ry)|\, \mathrm{d}\mu(y).$$

A bizonyítás négy nagyobb egységből áll össze. Logikai sorrendben első lépés, de a dolgozatban a harmadik részre hagyom, hogy a $\mathcal{M}$ és $\mathfrak{M}$ korlátozott operátorokra vonatkozó korlátosságból belássuk az $\tilde{\mathcal{M}}$ és $\tilde{\mathfrak{M}}$ nem korlátozott operátorokra vonatkozó eredményeket. Logikai sorrendben és a dolgozatban is második lépés, hogy az $\mathcal{M}$ és $\mathfrak{M}$ korlátozott operátorokra vonatkozó korlátosságot visszavezetjük egy megfelelően egyenletesen véletlen Cantor-iteráció létezésére. A dolgozat első részében belátjuk a bizonyítás harmadik lépését, miszerint van olyan $\{S_k\}$ Cantor-iterációval kapott halmazsorozat, amely kielégíti a megfelelő egyenletességi feltételeket, melyeket a 2.20. tétel kimondásakor pontosítok. Végül belátjuk az S Hausdorff-dimenziójára vonatkozó 1.18. tétel 3. pontját és a μ létezését kimondó 1.18. tétel 2. pontját.

A második és harmadik rész módszerei jóval általánosabbak, hasonló tételek bizonyításában találkozhatunk velük. Kisebb módosításokkal sikerrel tudjuk a jelen esetben is alkalmazni őket. Mindazonáltal itt is vannak figyelemreméltó eredmények, amelyek a bizonyítás kulcselemei. Az első rész viszont sokkal specifikusabb az adott problémára. A bizonyítás nagy része az alapvető mértékelméleti eszköztár ismeretében nem használ további erős eszközöket.

Mind a négy rész bizonyításához számos lemmára van szükség, ezek viszonyát igyekeznek szemléltetni a B függelékben található ábrák.

A bizonyítás megkezdése előtt kimondom azokat a fontosabb, ismertnek vett tételeket, melyek alapvető szerepet játszanak a dolgozatban.

1.5. Bizonyítás nélkül felhasznált, jól ismert tételek

A bizonyítás első részében a 2.20. tétel azt mondja ki, hogy egy folyamat során végig nem túl nagy a várható értéktől való eltérés nagy valószínűséggel. Ilyen állítások bizonyításának tipikus eszköze a Bernstein-egyenlőtlenség valamely formája. A Bernstein-egyenlőtlenségnek sok alakja van, mi az alábbit fogjuk használni:

1.22. Tétel (Bernstein-egyenlőtlenség, [6]). *$Z_1, \dots, Z_m$ jelöljön független valószínűségi változókat, amelyekre $|Z_j| \le 1$, $EZ_j = 0$ és $E|Z_j|^2 = \sigma_j^2$. Emellett σ legyen olyan valós szám, amelyre egyrészt $\sum \sigma_j^2 \le \sigma^2$, másrészt $6m\lambda \le \sigma^2$. Ekkor*

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{m} Z_j\right| \ge m\lambda\right) \le 4\exp\left(-\frac{m^2\lambda^2}{8\sigma^2}\right).$$

A következő definíció és két állítás az S halmaz Hausdorff-dimenziójának kiszámolását készíti elő:

1.23. Definíció. ([3]) Legyen $S \subset \mathbb{R}$ korlátos halmaz, $\tilde{N}_k$ jelölje az őt metsző 2^{-k} hosszú diadikus intervallumok számát. Ekkor S *alsó box dimenzió*ja

$$\underline{\dim}_B S = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log \tilde{N}_k}{\log 2^k}.$$

1.24. Lemma. *([3]) Minden S halmaz esetén*

$$dim_H S \le \underline{dim}_B S.$$

1.25. Tétel. *(Frostman lemma, [3])* $B \subset \mathbb{R}^d$ *Borel-halmaz,* $s \geq 0$ *esetén az alábbiak ekvivalensek:*

1. $\mathcal{H}^s(B) > 0$*, ahol* $\mathcal{H}^s$ *jelöli az* s *dimenziós Hausdorff-mértéket.*
2. *Létezik* μ *Borel mérték, amelyre* $\mu(B) > 0$ *és minden* $H \subset B$ *halmazra* $\mu(H) \leq C \cdot diam(H)^s$*.*

Több különböző bizonyítás is használja a rendkívül alapvető Hölder-egyenlőtlenséget:

1.26. Tétel. *(Hölder-egyenlőtlenség) Ha* f *és* g *mérhető, valós értékű függvények egy mértéktéren, akkor*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

1.27. Jelölés. Egymás *Hölder-konjugált*jainak nevezzük p-t és q-t, ha $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. A későbbiekben p Hölder-konjugáltját p'-vel fogjuk jelölni.

2. A fő eredmény bizonyítása

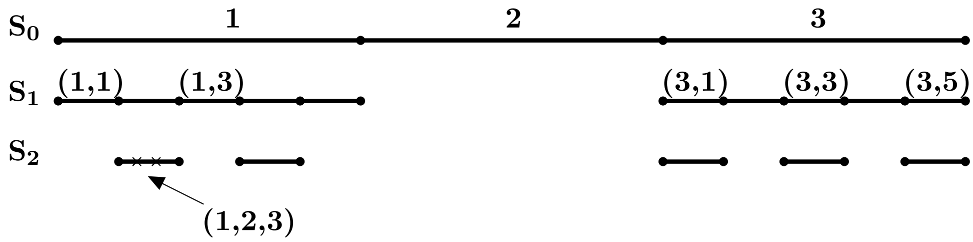
Először kimondom a négy fejezet fő tételeit, majd ezeket sorban bizonyítom.

Az első rész fő tételének kimondásához szükség van a következőkben definiált Cantor-iteráció fogalmára. Az S_k halmazok egy Cantor-típusú iterációval készülnek, ami a legáltalánosabb esetben a következőképpen fogalmazható. Kiindulunk egy intervallumból: $S_0 = [1, 2]$, majd iteratívan gyártjuk le az S_k halmazokat. Ha S_k már adott, és véges sok intervallum uniója, akkor minden intervallumot felosztunk kisebb intervallumokra, és ezek közül választunk néhányat.

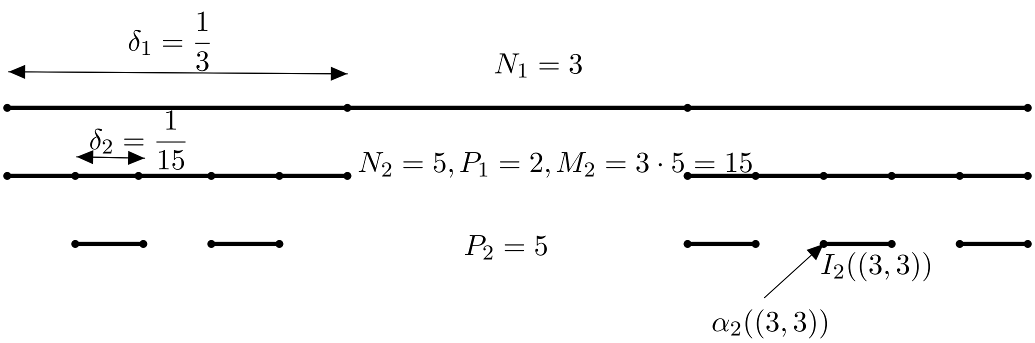
A dolgozatban egy ennél sokkal speciálisabb konstrukciót vizsgálunk, amelyben egyrészt a paraméterek választásában kisebb a szabadságunk, másrészt megjelenik a véletlen: a kis intervallumokat bizonyos szabályok szerint véletlenszerűen választjuk.

2.1. Definíció. ([10]) A *Cantor-iteráció*, és paramétereinek definíciója:

1. Kiindulunk az $S_0 = [1, 2]$ halmazból.
2. A k. lépésben minden előző lépés végén életben maradt intervallumot N_k darab δ_k hosszú intervallumra bontunk fel. Tehát $\delta_k = \dfrac{\delta_{k-1}}{N_k}$. Itt megkötés, hogy minden k-ra $N_k \leq N_{k+1}$.
3. A k. lépés végén potenciálisan kiválasztható δ_k hosszú intervallumok számát $M_k = N_1 N_2 \dots N_k$ jelöli.
4. Az intervallumokat multiindexekkel tudjuk azonosítani, amelyeket $\mathbf{i}$-vel jelölünk. A fentiek értelmében $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k) : 1 \leq i_j \leq N_j$ azonosít a k. lépés után egy intervallumot.



5. A k. lépésben potenciálisan szereplő összes δ_k hosszú intervallum multiindexeinek halmazát $\mathbb{I}_k$ jelöli:
$$\mathbb{I}_k = \{\mathbf{i} : \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k), 1 \le i_j \le N_j\}.$$
6. Az $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$ multiindexszel azonosított intervallum alsó végpontját $\alpha(\mathbf{i})$ jelöli :
$$\alpha(\mathbf{i}) = 1 + \frac{i_1 - 1}{N_1} + \dots + \frac{i_k - 1}{N_1 N_2 \dots N_k},$$
míg $I_k(\mathbf{i})$ jelöli magát az intervallumot:
$$I_k(\mathbf{i}) = [\alpha(\mathbf{i}), \alpha(\mathbf{i}) + \delta_k].$$



7. Minden k. generációs intervallumra $\mathbf{X}_k$ meghatározza, hogy az adott intervallumot megtartjuk, vagy eldobjuk. Azaz $\mathbf{X}_k = \{X_k(\mathbf{i}) : \mathbf{i} \in \mathbb{I}_k\}$, ahol $X_k(\mathbf{i})$ értéke 1 vagy 0.
8. A tétel bizonyításához szükséges tulajdonságokat az intervallumok véletlenszerű választásával biztosítjuk. Legyen $\mathbf{X}_1$ és $2 \le k$ esetén $\mathbf{Y}_k = \{Y_k(\mathbf{i}) : \mathbf{i} \in \mathbb{I}_k\}$ $\{0, 1\}$ értékű valószínűségi változók sorozata. A második lépéstől kezdve egy $I_k(\mathbf{i})$ intervallumot akkor tartunk meg, ha a szülője életben maradt az előző lépés végére, és ebben a lépésben a neki megfelelő $Y_k(\mathbf{i})$ valószínűségi változó értéke 1.
9. Az $\mathbf{X}_1$, illetve rögzített k-ra $\mathbf{Y}_k$ független, azonos eloszlású, p_k paraméterű Bernoulli valószínűségi változók sorozata. De különböző k-ra már más a p_k paraméter értéke. A Bernoulli-eloszlás p_k paramétere minden k esetén függ N_k-tól és egy meghatározott ε_k konstanstól: $p_k = N_k^{-\varepsilon_k}$. Később az N_k és ε_k paraméterek megfelelő választásával biztosítjuk, hogy a végül kapott S halmaz Hausdorff-dimenziója egyrészt $1-\varepsilon$ legyen, másrészt teljesítse a 1.18. tétel többi pontját.

10. Legyen P_k az $\mathbf{X}_k$ által meghatározott véletlen mennyiség: $P_k = |\{\mathbf{i} : X_k(\mathbf{i}) = 1\}|$ jelöli a k. lépés végére életben maradt összes δ_k hosszú intervallum számát.

11. Jelölje Q_k a k. lépés végén az intervallumok P_k számának feltételes várható értékét: $E(P_k|P_{k-1})$. Ez $k > 1$ és p_k paraméterű Bernoulli valószínűségi változók esetén $Q_k = P_{k-1}N_k p_k$.

12. Jelölje S_k a k. lépés végén a megmaradt intervallumok unióját, azaz $S_k = \bigcup\{I_k(\mathbf{i}) : X_k(\mathbf{i}) = 1\}$. A konstrukcióból adódik, hogy $\{S_k\}$ fogyó halmazsorozat, de emellett azt is feltesszük, és később a paraméterek választásával garantáljuk, hogy $|S_k| \to 0$.

2.2. Jelölés. Ha $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k)$ egy $k \geq j$ hosszú multiindex, akkor $\mathbf{i}|_j = (i_1, \ldots, i_j)$ jelöli az első j eleméből álló multiindexet. Tehát $I_j(\mathbf{i}|_j)$ őse $I_k(\mathbf{i})$-nek. A szülő multiindexét jelölje $sz(\mathbf{i})$, azaz $\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k$ esetén $\mathbf{i}|_{k-1}$-et.

Különböző paraméterértékek választása fogja igazolni a fő eredményt különböző ε esetén.

A bizonyítás során felmerülő fogalmak nagyrészét definiálni kell már az első rész fő állításának kimondásához, így most több definíció fog következni egymás után.

A bizonyítás fontos eleme, hogy S_k n darab affin képének metszetét vizsgáljuk. Ehhez a következő definíciókat vezetjük be. Egy affin transzformációt jellemezhetünk egy eltolási és egy nyújtási paraméterrel. A nyújtási paramétert mindig az $[1, 2]$ intervallumból választjuk, ekkor persze az eltolási paramétert csak a $[-4, 0]$ intervallumból érdemes választani, mivel $S_k \subset [1, 2]$, így különben biztosan $\emptyset$ lenne a metszet. A számunkra érdekes n darab affin transzformációt tehát n darab ilyen eltolás – nyújtás párral kódolhatjuk, ezek tere legyen $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big([-4, 0] \times [1, 2]\Big)^n$. Jelöljön A_n egy A-ból választott konkrét elemet, precízebben:

2.3. Jelölés. Ha $\{c_l\}_1^n$ $[-4, 0]$-beli számok sorozata, míg $\{r_l\}_1^n$ $[1, 2]$-beli számok sorozata, akkor A_n jelölje az ezekből képzett n darab affin transzformáció sorozatát:

$$A_n = \Big\{(c_l, r_l) \in [-4, 0] \times [1, 2] : 1 \leq l \leq n\Big\}.$$

A randomizált módon konstruált S_k halmazok affin képeinek metszetét szeretnénk vizsgálni. Ehhez először hasznos randomizálás nélkül megérteni a metszetek lehetséges típusait. Az összes lehetséges randomizált módon kapott metszetek közös építőkövei az intervallum n-esek és azok affin képeinek metszetei. Hiszen $\bigcap_{l=1}^{n}(c_l + r_l S_k) \neq \emptyset$ pontosan akkor, ha létezik $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n$, hogy $\forall l$ $I_k(\mathbf{i}_l) \subset S_k$ és $\bigcap_{l=1}^{n}(c_l + r_l I_k(\mathbf{i}_l)) \neq \emptyset$. Így már adódik, hogy a következő $\mathbb{F}(A_n, k)$ halmazt vizsgáljuk:

2.4. Definíció. ([10]) Adott A_n és k esetén $\mathbb{F}(A_n, k)$ azon intervallum n-esek halmaza, amelyek affin képeinek metszete nemüres.

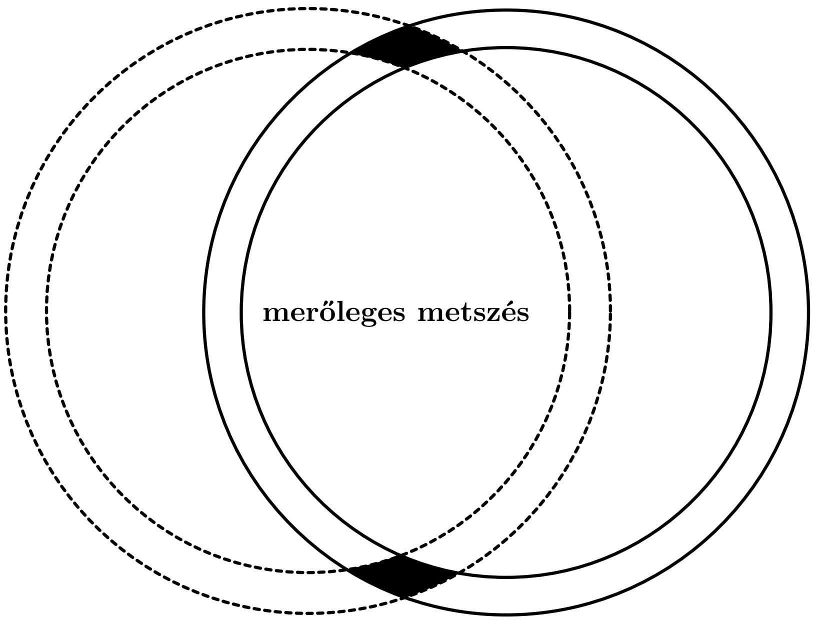
$$\mathbb{F}(A_n, k) = \left\{(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n) : \mathbf{i}_l \in \mathbb{I}_k, \bigcap_{l=1}^{n}(c_l + r_l I_k(\mathbf{i}_l)) \neq \emptyset\right\}.$$

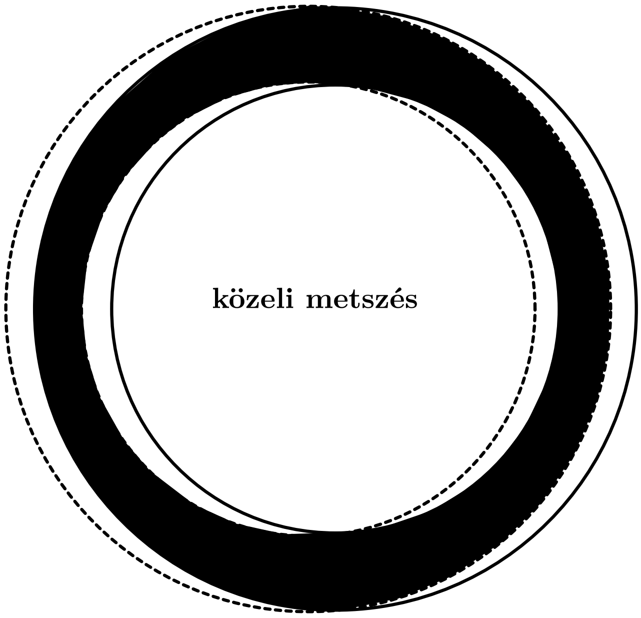
2.5. Megjegyzés. Az $\mathbb{F}(A_n, k)$ halmaz a k, $\{N_j\}_{j=1}^k$ és A_n paraméterektől függ kizárólag. Ha a kontextusból a paraméterek világosak vagy tetszőlegesek, csak az $\mathbb{F}$ jelölést fogjuk használni.

Az $\mathbb{F}$ halmaznak nem önmagában az elemei érdekesek, hanem olyan jellegű megkötések, hogy bizonyos típusú elemből nem lehet benne túl sok. Ilyen jellegű állítások közül kézenfekvő, hogy az l. affin transzformációhoz tartozó intervallum hány különböző lehet, és hányszor ismétlődhet. Ehhez bevezetjük a következő jelölést:

2.6. Jelölés. Jelölje π_l az $\mathbb{F} \to \mathbb{I}_k$ projekciót az l. koordinátára.

Bourgain [1]-beli bizonyításában két körgyűrű metszete két típusú lehet attól függően, hogy a körgyűrűk „közel” vagy „távol” helyezkednek el egymástól. Ennek analógiájára most is két típusú metszést különböztetünk meg: közeli vagy távoli intervallumok metszik egymást.





Közelien metszőek azok az intervallum n-esek, ahol van legalább két közeli intervallum, míg merőlegesen metszőek a többiek. Az a megkötés, hogy a két közeli intervallumnak ráadásul a szülője is legyen azonos, csak a könnyebb kezelhetőség miatt fontos, és nem rontja el a becsléseinket, hiszen a közeli intervallum-párok nagy részénél a szülő is azonos.

2.7. Definíció. ([10]) Rögzített $\mathbb{F}$ esetén a *közelien metsző* intervallum n-esek halmaza legyen

$$\mathbb{F}_{int} = \{(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n) \in \mathbb{F} : \exists l \neq l' : sz(\mathbf{i}_l) = sz(\mathbf{i}_{l'}) \text{ és } |\alpha(\mathbf{i}_l) - \alpha(\mathbf{i}_{l'})| \leq 4\delta_k\},$$

míg a *merőlegesen metsző*eké

$$\mathbb{F}_{tr} = \mathbb{F} \setminus \mathbb{F}_{int}.$$

2.8. Jelölés. Jelölje $\mathbb{F}_{int}(s,t) \subset \mathbb{F}_{int}$ azt a részhalmazt, ahol az s, t indexek miatt teljesül a feltétel:

$$\mathbb{F}_{int}(s,t) = \Big\{(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n) \in \mathbb{F} : sz(\mathbf{i}_s) = sz(\mathbf{i}_t) \text{ és } |\alpha(\mathbf{i}_s) - \alpha(\mathbf{i}_t)| \leq 4\delta_k\Big\}.$$

Természetesen végül az S_k halmazok affin képeinek metszetét szeretnénk megérteni, ehhez kézenfekvően módosítjuk az előbbi definíciókat.

2.9. Definíció. ([10]) Az (S_k, A_n) pár L *darab közeli metszés*t határoz meg, ha

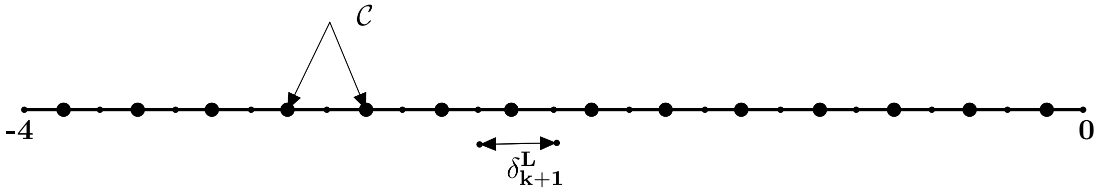
$$|\mathbb{F}_{int} \cap \{(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n) : \forall l\, X_k(\mathbf{i}_l) = 1\}| = L.$$

Hasonlóan L *darab merőleges metszés*t határoz meg, ha

$$|\mathbb{F}_{tr} \cap \{(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n) : \forall l\, X_k(\mathbf{i}_l) = 1\}| = L.$$

Megkönnyíti a dolgunkat, ha minden k-ra csak véges sok A_n halmazt kell figyelembe venni. Másrészt várható, hogy nem vesztünk lényegesen a későbbi becsléseinkből, ha kellően sűrűen választunk vizsgálandó A_n halmazokat.

2.10. Definíció. ([10]) Fix L és k esetén $\mathcal{C} \subset [-4, 0]$ legyen $4\delta_{k+1}^{-L}$ elemszámú halmaz, melynek elemei $\dfrac{2m+1}{2\delta_{k+1}^{-L}}$ alakú számok. Hasonlóan $\mathcal{R} \subset [1, 2]$ legyen δ_{k+1}^{-L} elemszámú halmaz, melynek elemei $\dfrac{2m+1}{2\delta_{k+1}^{-L}}$ alakú számok.



Jelölje $\mathfrak{A}(k, L)$ azon lehetséges A_n-ek halmazát, ahol minden eltolási paramétert $\mathcal{C}$-ből, és minden nyújtási paramétert $\mathcal{R}$-ből választunk:

2.11. Jelölés.

$$\mathfrak{A}(k, L) = \Big\{ \{(c_l, r_l)\}_{l=1}^{n} : \forall l \, c_l \in \mathcal{C}, r_l \in \mathcal{R} \Big\}.$$

2.12. Lemma. *([10]) Az $\mathfrak{A}(k, L)$ elemeinek száma $4^n \delta_{k+1}^{-2Ln}$.*

Bizonyítás: Egymástól függetlenül n darab c értéket választhatunk egyenként $4\delta_{k+1}^{-L}$ félének, hasonlóan n darab r értéket választhatunk egyenként δ_{k+1}^{-L} félének.

□

Később amikor rögzített k és L paraméterekkel dolgozunk, $\mathfrak{A}(k, L)$ helyett csak az egyszerűbb $\mathfrak{A}$ jelölést használom. Korábban már láttuk, hogy rögzített k és $\{N_j\}_{j=1}^{k}$ paraméterek mellett minden A_n meghatároz egy $\mathbb{F}(A_n, k)$ halmazt, amely felbomlik $\mathbb{F}(A_n, k) = \mathbb{F}_{int}(A_n, k) \cup \mathbb{F}_{tr}(A_n, k)$ alakban. Érdekelnek minket azon eltolási- és nyújtási paraméter halmazok, amelyek „kevés" közeli metszésre adnak lehetőséget. Ezek lesznek a tipikusan merőleges metszést biztosító paraméter n-esek, innen az $\mathfrak{A}_{tr}$ jelölés. Egy később lerögzített ε_0 konstans definiálja, hogy ebben az esetben mit értünk „kevés" alatt. Ki fog derülni, hogy az $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ választás megfelelő.

2.13. Definíció. ([10]) *Kevés* közeli metszés van, ha a közeli metszések L száma legfeljebb $P_k^{1-\varepsilon_0}$, ahol ε_0 később rögzített konstans.

2.14. Definíció. ([10]) Rögzített $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(k, L)$ esetén legyen

$$\mathfrak{A}_{tr} = \{A_n \in \mathfrak{A} : |\mathbb{F}_{int}(A_n, k)| < P_k^{1-\varepsilon_0}\}$$

azon affin transzformáció n-esek halmaza, amelyek esetén a közeli metszések száma kevés, míg a többit jelölje

$$\mathfrak{A}_{int} = \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_{tr} = \{A_n \in \mathfrak{A} : |\mathbb{F}_{int}(A_n, k)| \geq P_k^{1-\varepsilon_0}\}.$$

2.15. Definíció. ([10]) Az $f_1, \dots, f_n$ függvények A_n *szerinti korrelációja* legyen

$$\Lambda(A_n, f_1, \dots, f_n) = \int \prod_{l=1}^{n} f_l \left(\frac{z - c_l}{r_l} \right) \mathrm{d}z. \tag{3}$$

Ha $f = f_1 = \dots = f_n$, akkor a $\Lambda(A_n, f_1, \dots, f_n) = \Lambda(A_n, f)$ egyszerűsítő jelölést használjuk.

2.16. Jelölés. Jelöljük σ_k-val $\phi_{k+1} - \phi_k$-t.

A következő definíció azt fejezi ki, hogy fontos tulajdonság az, ha a kevés közeli metszésből következik, hogy a σ_k föggvény n-szeres korrelációja is kicsi. A korreláció kicsisége és a közeli metszések alacsony száma is egy-egy konstanssal tehető precízzé.

2.17. Definíció. ([10]) Legyen $C_0(k, n, \varepsilon_0)$ egy később definiált elég kicsi konstans, ekkor *merőleges korrelációs feltétel*nek nevezzük a következőt:

$$\forall A_n \in \mathfrak{A}_{tr} : \ |\Lambda(A_n, \sigma_k)| \le C_0(k, n, \varepsilon_0).$$

Egy egyszerűsítő jelölés bevezetése maradt hátra a tétel kimondása előtt, mely könnyebbé teszi az S_k-t felépítő intervallumok kezelését akár külön-külön, akár együtt.

2.18. Jelölés. Jelölje $P_{k+1}(\mathbf{i})$ az $I_k(\mathbf{i})$ intervallumon belül kiválasztott $k+1$. generációs intervallumok számát, azaz $P_{k+1} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k} P_{k+1}(\mathbf{i})$. Hasonlóan $Q_{k+1}(\mathbf{i})$ jelöli a k. lépés befejezése után az $I_k(\mathbf{i})$ intervallumban várhatóan kiválasztott intervallumok számát, azaz $Q_{k+1} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k} Q_{k+1}(\mathbf{i})$. Ráadásul a várható érték nem függ az intervallum indexétől, csak attól, hogy életben van-e az adott intervallum, így $Q_{k+1} = P_k Q_{k+1}(\mathbf{i})$, ahol $\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k$ tetszőleges. Hasonlóan $P_{k+m+1}(\mathbf{i})$ jelölje az $I_k(\mathbf{i})$ intervallumon belül kiválasztott $k+m+1$. generációs intervallumok számát, azaz

$$P_{k+m+1}(\mathbf{i}) = \sum_{\substack{(\mathbf{i},\mathbf{j}): \\ (\mathbf{i},\mathbf{j})|_k = \mathbf{i}}} X_{k+m+1}(\mathbf{i}, \mathbf{j}). \tag{4}$$

Jelölje $Q_{k+m+1}(\mathbf{i})$ az $I_k(\mathbf{i})$ intervallumon belül a $k+m$. lépés befejezése után várhatóan kiválasztott intervallumok számát, azaz

$$Q_{k+m+1}(\mathbf{i}) = P_{k+m}(\mathbf{i}) N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}}.$$

2.19. Megjegyzés. A fenti jelölés értelmében természetesen

$$P_{k+1}(\mathbf{i}) = \sum_{\bar{\mathbf{i}} : \, \bar{\mathbf{i}}|_k = \mathbf{i}} X_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}), \text{ és} \tag{5}$$

$$Q_{k+1}(\mathbf{i}) = N_{k+1} p_{k+1}. \tag{6}$$

2.20. Tétel. *([10]) Legyen $B = 10$ abszolút konstans, N_j és ε_j értékét pedig a következőképpen választjuk: N egy rögzített elegendően nagy konstans, melyről a bizonyításból fog kiderülni, hogy mennyire kell nagynak lennie. Az $\varepsilon = 0$ esethez az $N_k = N \cdot N^k = N^{k+1}$, $\varepsilon_k = \dfrac{1}{k+1}$ választással, míg az $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{3}$ esethez az $N_k = N^k$, $\varepsilon_k = \varepsilon$ választással pozitív valószínűséggel a 2.1. definícióban definiált Cantor-iterációval kapott $\{S_k\}$ halmazsorozatra a következők mind teljesülnek:*

1. *A várható darabszámnak átlagosan minden lépésben legalább a felét, és legfeljebb a kétszeresét választjuk ki, azaz*

$$2^{-k}\prod_{j=1}^{k}N_j^{1-\varepsilon_j}\le P_k\le 2^k\prod_{j=1}^{k}N_j^{1-\varepsilon_j}.$$

2. *Az előző lépés eredményére vett feltételes várható értéktől más mértékkel mérve sem túl nagy az eltérés:*

$$|P_k-Q_k|\le B\sqrt{Q_k}.$$

3. *A 2.17. definícióban definiált merőleges korrelációs feltétel teljesül a következő konstanssal:*

$$C_0(k,n,\varepsilon_0)=C_0(k,n,\frac{1}{2})=f_1(n)2^{k(n+\frac{3}{2})}\left[\prod_{j=1}^{k+1}N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})}\right][V(k,n)]^{\frac{1}{2}}.$$

Itt a következő jelöléseket használtuk:

$$f_1(n)=4^{n+2}2^{\frac{n(n+1)}{2}}n!B, \tag{7}$$

$$V(k,n)=\ln\left(4^{2n}2^{\frac{n(n-1)}{2}}n!B\prod_{j=1}^{k+1}N_j^{2Ln}\right). \tag{8}$$

Itt $f_1(n)$ értékéből csak azt fogjuk használni, hogy a B globális konstanson kívül csak n-től függ.

4. *Egy intervallumon belül sem túl nagy az eltérés az előző lépés eredményére vett feltételes várható értéktől:*

$$\sup_{\mathbf{i}:X_k(i)=1}|P_{k+1}(\mathbf{i})-Q_{k+1}(\mathbf{i})|\le\left[8N_{k+1}^{1-\varepsilon_{k+1}}\ln(4BP_k)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

2.21. Megjegyzés. Itt N_k meghatározásában az fontos, hogy $\dfrac{\prod_{j=1}^{k}N_j}{N_{k+1}}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0.$

A második részben bizonyított tétel a következő:

2.22. Tétel. *([10]) Ha egy $\{S_k\}$ halmazsorozat teljesíti a 2.20. tétel minden pontját, akkor a hozzá tartozó $\mathcal{M}$ és $\mathfrak{M}$ korlátozott operátorok korlátosak minden $1<p,q$ esetén, mint $L^p[0,1]\to L^q(\mathbb{R})$ operátorok, és minden $1<p\le q$ esetén, mint $L^p(\mathbb{R})\to L^q(\mathbb{R})$ operátorok.*

Míg a harmadik részben az alábbiakat bizonyítom:

2.23. Tétel. *([10]) Ha egy $\{S_k\}$ halmazsorozat teljesíti a 2.20. tétel minden pontját és emellett a hozzá tartozó $\mathcal{M}$ és $\mathfrak{M}$ korlátozott operátorok korlátosak, akkor a 1.18. tétel 4. pontja szerint a (2)-ben rögzített p és a paraméterek esetén $\tilde{\mathcal{M}}^a$ és $\tilde{\mathfrak{M}}^a$ is korlátos. Az $a=0$ választással kapjuk, hogy $\tilde{\mathcal{M}}$ és $\tilde{\mathfrak{M}}$ operátorok is korlátosak.*

Végül a negyedik részben a 1.18. tétel 2. és 3. pontját látom be.

2.1. A 2.20. tétel bizonyítása

A megfelelő $\{S_k\}$ halmazsorozat létezését úgy látjuk be, hogy megmutatjuk, hogy a Cantor-iteráció minden lépésében pozitív valószínűséggel olyan S_k halmazt választunk, ami egyrészt az adott lépés feltételeit kielégíti, másrészt lehetővé teszi a Cantor-iteráció megfelelő folytatását. $B = 10$ választással az 1, 2. és 4. pontok is legalább $1 - B^{-1}$ valószínűséggel teljesülnek, így együtt is legalább $1 - 3B^{-1}$ valószínűséggel teljesülnek. Továbbá ha ez a három pont teljesül, akkor a 3. pont is teljesül legalább $1 - B^{-1}$ valószínűséggel. Mivel B választása szerint $4B^{-1} < 10$, így a bizonyítás kész.

2.24. Lemma. *([10]) A 2.1. definícióból közvetlenül adódnak a következő összefüggések:*

$$|S_k| = P_k \delta_k, \tag{9}$$

$$Q_k = P_{k-1} N_k N_k^{-\varepsilon_k} = P_{k-1} N_k^{1-\varepsilon_k}, \tag{10}$$

$$N_k = \frac{M_k}{M_{k-1}}, \tag{11}$$

$$M_k = \prod_{j=1}^{k} N_j = \delta_k^{-1}, \tag{12}$$

$$\delta_k = \prod_{j=1}^{k} N_j^{-1}, \tag{13}$$

$$\delta_{k+1}^{-1} = N_{k+1} \delta_k^{-1} = \prod_{j=1}^{k+1} N_j, \tag{14}$$

$$\frac{1}{P_k \delta_k} = p_{k+1} \frac{1}{Q_{k+1} \delta_{k+1}}, \tag{15}$$

$$2 \le k \text{ esetén } X_k(\mathbf{i}) = X_{k-1}(\mathbf{i}|_{k-1}) \cdot Y_k(\mathbf{i}). \tag{16}$$

2.25. Megjegyzés. A bizonyítás során több különböző helyen, de csak alsó korlátoknak kell teljesülnie N-re, így N biztosan választható úgy, hogy egyszerre az összes feltételt kielégítse.

A következő összefüggés ugyan a 2.20. tétel következménye, de már a bizonyítás közben is felhasználhatjuk, mert indukcióval bizonyítunk.

2.26. Következmény. *([10]) Ha egy $\{S_k\}$ sorozatra igaz a 2.20. tétel 1. pontja, akkor a következő becslések is igazak:*

$$2^{-k} \prod_{j=1}^{k} N_j^{\varepsilon_j - 1} \le P_k^{-1} \le 2^k \prod_{j=1}^{k} N_j^{\varepsilon_j - 1},$$

$$2^{-k} \prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\varepsilon_j - 1} \le Q_{k+1}^{-1} \le 2^k \prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\varepsilon_j - 1},$$

$$2^{-k} \prod_{j=1}^{k+1} N_j^{1-\varepsilon_j} \le Q_{k+1} \le 2^k \prod_{j=1}^{k+1} N_j^{1-\varepsilon_j}.$$

Bizonyítás: Közvetlenül adódik (10)-ből a 2.20. tétel 1. pontja alapján.

□

Bizonyítás: (A 2.20. tétel 1. és 2. pontjának bizonyítása) A bizonyítás egyik kulcsa indukció k-ra, míg a másik kulcsa visszavezetni megfelelő szereposztással a 1.22. lemmában kimondott Bernstein-egyenlőtlenségre.

Legyen N választása olyan, hogy $6B \le N_1^{\frac{1-\varepsilon_1}{2}}$, és tekintsük először a $k = 1$ esetet. Legyen $Z_i = X_1(\mathbf{i}_i) - p_1$, $m = N_1$, $\sigma^2 = N_1 p_1$ és $\lambda = BN_1^{\frac{-(1+\varepsilon_1)}{2}}$. Ezzel a szereposztással alkalmazható a 1.22. lemma-beli Bernstein-egyenlőtlenség, ugyanis $EZ_i = 0$, $|Z_i| \le 1$, a Z_i valószínűségi változók függetlenek, $\sum E|Z_j|^2 = N_1 p_1(1-p_1) \le N_1 p_1 = \sigma^2$, és

$$6m\lambda = 6N_1 BN_1^{\frac{-(1+\varepsilon_1)}{2}} = 6BN_1^{\frac{1-\varepsilon_1}{2}} \le N_1^{\frac{1-\varepsilon_1}{2}} N_1^{\frac{1-\varepsilon_1}{2}} = N_1^{1-\varepsilon_1} = N_1 p_1 = \sigma^2.$$

A Bernstein-egyenlőtlenség $\sum Z_i$-t becsüli, ez nekünk a következők miatt lesz hasznos: $\sum_{i=1}^{N_1} Z_i = \sum_{i=1}^{N_1} X_1(\mathbf{i}_i) - p_1 = P_1 - N_1 p_1 = P_1 - Q_1$, $m\lambda = BN_1^{\frac{1-\varepsilon_1}{2}} = B\sqrt{N_1 p_1} = B\sqrt{Q_1}$.

Emellett $\dfrac{m^2\lambda^2}{8\sigma^2} = \dfrac{\left(BN_1^{\frac{1-\varepsilon_1}{2}}\right)^2}{8N_1^{1-\varepsilon_1}} = \dfrac{B^2}{8}$. Tehát a Bernstein-egyenlőtlenség alapján

$$\mathbb{P}\left(|P_1 - Q_1| > B\sqrt{Q_1}\right) \le 4\exp\left(-\frac{B^2}{8}\right) < B^{-1},$$

$$\mathbb{P}\left(|P_1 - Q_1| \le B\sqrt{Q_1}\right) \ge 1 - B^{-1},$$

azaz legalább $1 - B^{-1}$ valószínűséggel

$$|P_1 - Q_1| \le B\sqrt{Q_1}.$$

Ha $\mathbf{X}_1$ olyan, hogy a hozzá tartozó P_1 értékre $|P_1 - Q_1| \le B\sqrt{Q_1}$, akkor P_1 benne van az $[Q_1 - B\sqrt{Q_1}, Q_1 + B\sqrt{Q_1}]$ intervallumban. Azaz

$$N_1^{1-\varepsilon_1}(1 - BN_1^{-\frac{1-\varepsilon_1}{2}}) = Q_1 - BN_1^{\frac{1-\varepsilon_1}{2}} \le P_1 \le Q_1 + BN_1^{\frac{1-\varepsilon_1}{2}} \le N_1^{1-\varepsilon_1}(1 + BN_1^{-\frac{1-\varepsilon_1}{2}}).$$

$$\frac{1}{2} \le 1 - \frac{1}{6} \le 1 - BN_1^{-\frac{1-\varepsilon_1}{2}} \le 1 + BN_1^{-\frac{1-\varepsilon_1}{2}} \le 1 + \frac{1}{6} \le 2, \text{ tehát}$$

$$\frac{1}{2}N_1^{1-\varepsilon_1} \le P_1 \le 2N_1^{1-\varepsilon_1}.$$

Most belátjuk az állítást $k+1$-re, ha az indukciós hipotézis szerint k-ra igaz. Legyen $\bar{\mathbf{i}} = (\mathbf{i}, i_{k+1})$ és

$$Z_{\mathbf{i}} = \frac{1}{N_{k+1}} \sum_{i_{k+1}=1}^{N_{k+1}} [Y_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}) - p_{k+1}].$$

A $\{Z_{\mathbf{i}} : \mathbf{i} \in \mathbb{I}_k,\ X_k(\mathbf{i}) = 1\}$ valószínűségi változókra az

$$m = P_k,$$

$$\sigma^2 = P_k p_{k+1} N_{k+1}^{-1},$$

$$\lambda = B\left(\frac{p_{k+1}}{P_k N_{k+1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

szereposztással alkalmazható a 1.22. lemma-beli Bernstein-egyenlőtlenség, ugyanis $EZ_i = 0$, $|Z_i| \le 1$, a Z_i valószínűségi változók függetlenek, valamint

$$\sum E|Z_j|^2 = P_k N_{k+1}^{-1} p_{k+1}(1-p_{k+1}) \le P_k p_{k+1} N_{k+1}^{-1} = \sigma^2,$$

és $\sigma^2 = P_k N_{k+1}^{-1-\varepsilon_{k+1}}$ miatt

$$6m\lambda = 6P_k B\left(\frac{p_{k+1}}{P_k N_{k+1}}\right)^{\frac{1}{2}} = 6BP_k N_{k+1}^{\frac{-1-\varepsilon_{k+1}}{2}} P_k^{-\frac{1}{2}} \le N_1^{\frac{1-\varepsilon_1}{2}} P_k^{\frac{1}{2}} N_{k+1}^{\frac{-1-\varepsilon_{k+1}}{2}} \le \sigma^2.$$

Az utolsó egyenlőtlenség

$$N_1^{\frac{1-\varepsilon_1}{2}} \le N_{k+1}^{\frac{-1-\varepsilon_{k+1}}{2}} P_k^{\frac{1}{2}}$$

miatt teljesül, hiszen az indukciós hipotézis szerint

$$P_k^{\frac{1}{2}} \ge 2^{-\frac{k}{2}} \prod_{j=1}^{k} N_j^{\frac{1-\varepsilon_j}{2}},$$

másrészt N_{k+1} választása szerint nem túl nagy se N_k-hoz, se M_k-hoz képest. Ekkor

$$m\lambda = BP_k^{\frac{1}{2}} N_{k+1}^{\frac{-1-\varepsilon_{k+1}}{2}},$$

$$B\sqrt{Q_{k+1}} = B\sqrt{P_k N_{k+1} p_{k+1}} = BP_k^{\frac{1}{2}} N_{k+1}^{\frac{1-\varepsilon_{k+1}}{2}} = N_{k+1} BP_k P_k^{-\frac{1}{2}} N_{k+1}^{\frac{-1-\varepsilon_{k+1}}{2}} = N_{k+1} m\lambda.$$

$$(m\lambda)^2 = \left(BP_k^{\frac{1}{2}} N_{k+1}^{\frac{-1-\varepsilon_{k+1}}{2}}\right)^2 = B^2 P_k N_{k+1}^{-1-\varepsilon_{k+1}},$$

$$\frac{m^2\lambda^2}{8\sigma^2} = \frac{B^2 P_k N_{k+1}^{-1-\varepsilon_{k+1}}}{P_k N_{k+1}^{-1-\varepsilon_{k+1}}} = \frac{B^2}{8}.$$

$$\sum Z_{\mathbf{i}} = \frac{1}{N_{k+1}}\left(P_{k+1} - P_k N_{k+1} p_{k+1}\right) = \frac{1}{N_{k+1}}\left(P_{k+1} - Q_{k+1}\right).$$

Tehát a Bernstein-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum Z_{\mathbf{i}}\right| \ge m\lambda\right) = \mathbb{P}\left(\left|N_{k+1}\sum Z_{\mathbf{i}}\right| \ge N_{k+1} m\lambda\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(|P_{k+1} - Q_{k+1}| \ge B\sqrt{Q_{k+1}}\right) \le 4\exp\left(-\frac{B^2}{8}\right) < B^{-1}.$$

Tehát legalább $1 - B^{-1}$ valószínűséggel

$$|P_{k+1} - Q_{k+1}| \ge B\sqrt{Q_{k+1}},$$

$$1 - \frac{B}{\sqrt{Q_{k+1}}} \le \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \le 1 + \frac{B}{\sqrt{Q_{k+1}}}.$$

Ezzel a második részt beláttuk $k+1$-re.

Végül (10) szerint $Q_{k+1} = P_{k+1} N_{k+1}^{1-\varepsilon_{k+1}}$, másrészt az indukciós hipotézis szerint az első rész igaz k-ra,

$$2^{-k}\prod_{j=1}^{k} N_j^{1-\varepsilon_j} \cdot N_{k+1}^{1-\varepsilon_{k+1}} \le Q_{k+1} \le 2^k \prod_{j=1}^{k} N_j^{1-\varepsilon_j} \cdot N_{k+1}^{1-\varepsilon_{k+1}}. \tag{17}$$

Ebből speciálisan, ha N_1 elegendően nagy,

$$Q_{k+1} \geq 2^{-k} \prod_{j=1}^{k+1} N_j^{1-\varepsilon_j} \geq 2^{-k} \prod_{j=1}^{k+1} N_1^{1-\varepsilon_1} \geq B^2,$$

$$\frac{B}{\sqrt{Q_{k+1}}} \leq \frac{1}{2}.$$

Tehát $\frac{1}{2} \leq \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \leq 2$, ezt megszorozva (17)-tel adódik az első állítás $k+1$-re.

□

Bizonyítás: (A 2.20. tétel 4. pontjának bizonyítása) A bizonyítás kulcsa ismét a Bernstein-egyenlőtlenség felhasználása megfelelő konstansokkal. A 2.18. definíció értelmében

$$P_{k+1}(\mathbf{i}) - Q_{k+1}(\mathbf{i}) = \sum_{\bar{\mathbf{i}}:\bar{\mathbf{i}}|_k=\mathbf{i}} Y_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}) - p_{k+1},$$

így legyenek $Z_j = Y_{k+1}(\mathbf{i}, i^j_{k+1}) - p_{k+1}$ 0 várható értékű, független valószínűségi változók. $|Z_j| \leq 1$, $\sum \sigma_j^2 = N_{k+1}p_{k+1}(1-p_{k+1}) \leq N_{k+1}p_{k+1} =: \sigma^2$. Tehát $m = N_{k+1}$. A

$$\lambda = \left(\frac{8p_{k+1}\ln(4BP_k)}{N_{k+1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

választással $6m\lambda \leq \sigma^2$ is teljesül, így alkalmazható a Bernstein-egyenlőtlenség.

$$\frac{m^2\lambda^2}{8\sigma^2} = \ln(4BP_k),$$

így éppen azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(|P_{k+1}(\mathbf{i}) - Q_{k+1}(\mathbf{i})| > [8N_{k+1}p_{k+1}\ln(4BP_k)]^{\frac{1}{2}}\right) \leq \frac{1}{BP_k}.$$

Összesen P_k féleképpen tudjuk kiválasztani az $\mathbf{i}$ intervallumot, így legalább $1 - B^{-1}$ valószínűséggel minden $\mathbf{i}$ esetén

$$|P_{k+1}(\mathbf{i}) - Q_{k+1}(\mathbf{i})| \leq [8N_{k+1}p_{k+1}\ln(4BP_k)]^{\frac{1}{2}}.$$

A bizonyításból az is látszik, hogy a Bernstein-egyenlőtlenség alkalmazása éppen az adott konstanst adja.

□

A bizonyításhoz elengedhetetlen a következő segéd, „majdnem σ_k” függvény definiálása. A 1.22. lemma-beli Bernstein-egyenlőtlenség alkalmazhatósága érdekében a σ_k becsléséről áttérünk $\overline{\sigma}_k$ becslésére. $\overline{\sigma}_k$ megfelelő becslése mellett természetesen az áttéréssel járó maradéktagot is becsülnünk kell. Emlékeztetőül $\sigma_k = \frac{1}{P_{k+1}\delta_{k+1}}\mathbb{1}_{S_{k+1}} - \frac{1}{P_k\delta_k}\mathbb{1}_{S_k}$.

2.27. Definíció. ([10])

$$\overline{\sigma}_k = \frac{1}{Q_{k+1}\delta_{k+1}}\mathbb{1}_{S_{k+1}} - \frac{1}{P_k\delta_k}\mathbb{1}_{S_k}.$$

Bizonyítás: (A 2.20. tétel 3. pontjának bizonyítása) A 2.28. lemma biztosítja, hogy elegendő legyen a

$$\sup_{A_n \in \mathfrak{A}_{tr}} |\Lambda(A_n, \overline{\sigma}_k)|$$

kifejezést felülről becsülni. Rögzítsük le $A_n \in \mathfrak{A}_{tr}$-t. Ekkor

$$\mathbb{1}_{S_k} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k} X_k(\mathbf{i}) \mathbb{1}_{I_k(\mathbf{i})} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k} X_k(\mathbf{i}) \sum_{\bar{\mathbf{i}} \colon \bar{\mathbf{i}}|_k = \mathbf{i}} \mathbb{1}_{I_{k+1}(\bar{\mathbf{i}})},$$

$$\mathbb{1}_{S_{k+1}} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k} X_k(\mathbf{i}) \sum_{\bar{\mathbf{i}} \colon \bar{\mathbf{i}}|_k = \mathbf{i}} Y_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}) \mathbb{1}_{I_{k+1}(\bar{\mathbf{i}})}.$$

Továbbá (15) szerint

$$\frac{1}{P_k \delta_k} = p_{k+1} \frac{1}{Q_{k+1}\delta_{k+1}}, \text{ így}$$

$$\overline{\sigma}_k = \frac{1}{Q_{k+1}\delta_{k+1}} \mathbb{1}_{S_{k+1}} - \frac{1}{P_k \delta_k} \mathbb{1}_{S_k} = \frac{1}{Q_{k+1}\delta_{k+1}} \left(\mathbb{1}_{S_{k+1}} - p_{k+1} \mathbb{1}_{S_k} \right).$$

Behelyettesítve és a közös tagokat kiemelve kapjuk, hogy

$$\overline{\sigma}_k = \frac{1}{Q_{k+1}\delta_{k+1}} \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k} X_k(\mathbf{i}) \sum_{\bar{\mathbf{i}} \colon \bar{\mathbf{i}}|_k = \mathbf{i}} (Y_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}) - p_{k+1}) \mathbb{1}_{I_{k+1}(\bar{\mathbf{i}})}.$$

$$\prod_{l=1}^{n} \mathbb{1}_{I_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l)} \left(\frac{z - c_l}{r_l} \right) = \mathbb{1}_{\cap_{l=1}^{n} (c_l + r_l I_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l))}(z) \le \mathbb{1}_{\cap_{l=1}^{n} (c_l + r_l I_k(\mathbf{i}_l))}(z).$$

Mindezt összevetve, a szorzásokat kibontva

$$\prod_{l=1}^{n} \overline{\sigma}_k \left(\frac{z - c_l}{r_l} \right) =$$

$$= \frac{1}{(Q_{k+1}\delta_{k+1})^n} \sum_{(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n)} \left[\prod_{l=1}^{n} X_k(\mathbf{i}_l) \sum_{\substack{(\bar{\mathbf{i}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{i}}_n) \\ \mathbf{i}_l = \bar{\mathbf{i}}_l|_k}} \left(\prod_{l=1}^{n} (Y_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l) - p_{k+1}) \right) \mathbb{1}_{\cap_{l=1}^{n} (c_l + r_l I_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l))}(z) \right].$$

A kifejezés $(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n) \notin \mathbb{F}$ esetén biztosan 0, $(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n) \in \mathbb{F}$ esetén pedig külön vizsgálhatjuk aszerint, hogy $(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n) \in \mathbb{F}_{int}$ vagy $(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n) \in \mathbb{F}_{tr}$. Így

$$\Lambda(A_n, \overline{\sigma}_k) =$$

$$\frac{1}{(Q_{k+1}\delta_{k+1})^n} \sum_{(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n) \in \mathbb{F}_{int}} \left[\prod_{l=1}^{n} X_k(\mathbf{i}_l) \sum_{\substack{(\bar{\mathbf{i}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{i}}_n) \\ \mathbf{i}_l = \bar{\mathbf{i}}_l|_k}} \left(\prod_{l=1}^{n} (Y_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l) - p_{k+1}) \right) \left| \bigcap_{l=1}^{n} (c_l + r_l I_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l)) \right| \right] +$$

$$+ \frac{1}{(Q_{k+1}\delta_{k+1})^n} \sum_{(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n) \in \mathbb{F}_{tr}} \left[\prod_{l=1}^{n} X_k(\mathbf{i}_l) \sum_{\substack{(\bar{\mathbf{i}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{i}}_n) \\ \mathbf{i}_l = \bar{\mathbf{i}}_l|_k}} \left(\prod_{l=1}^{n} (Y_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l) - p_{k+1}) \right) \left| \bigcap_{l=1}^{n} (c_l + r_l I_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l)) \right| \right] =$$

$$= \frac{1}{(Q_{k+1}\delta_{k+1})^n} \left(\Xi_{int} + \Xi_{tr} \right).$$

A 2.30. és 2.31. lemmákban külön fogjuk becsülni Ξ_{int} és Ξ_{tr} értékét. Ezek felhasználásával a bizonyítás befejezése:

$$\sup_{A_n \in \mathfrak{A}_{tr}} |\Lambda(A_n, \sigma_k)| \leq$$
$$\leq 2^{2n+2} B 2^{k+\frac{3}{2}} \left[\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})} \right] +$$
$$+ 2^{2n-1} 2^{k(n+1-\varepsilon_0)} \left[\prod_{j=1}^{k} N_j^{-\varepsilon_0+\varepsilon_j(n+\varepsilon_0-1)} \right] N_{k+1}^{n\varepsilon_{k+1}} +$$
$$+ f_3(n) 2^{k(n+\frac{1}{2})} \left[\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})} \right] [V(k,n)]^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq f_1(n) 2^{k(n+\frac{3}{2})} \left[\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})} \right] [V(k,n)]^{\frac{1}{2}} .$$

Itt $f_3(n)$ értékét ld. (18)-ban, míg $f_1(n)$ értékét ld. (7)-ben.

□

2.28. Lemma. *([10]) Ha a $k+1$. lépésben teljesül a 2.20. tétel első két pontja, akkor a 2.17. definícióban definiált merőleges korrelációs feltétel teljesül a következő korláttal:*

$$C_0(k,n,\varepsilon_0) = \sup_{A_n \in \mathfrak{A}_{tr}} |\Lambda(A_n, \overline{\sigma}_k)| + 2^{2n+2} B 2^{k+\frac{3}{2}} \left[\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})} \right].$$

Bizonyítás: A 2.27. definíció alapján

$$\sigma_k = \overline{\sigma}_k + \left(\frac{1}{P_{k+1}\delta_{k+1}} - \frac{1}{Q_{k+1}\delta_{k+1}} \right) \mathbb{1}_{S_{k+1}} = \overline{\sigma}_k + e_k.$$

Az összeg alakban felírt függvények korrelációja felbontható két tagra: az összegből mind az n tagban az első összeadandó szerepel, vagy nem. Azaz

$$u_l = \begin{cases} \overline{\sigma}_k & \text{if } \lambda_l = 0 \\ e_k & \text{if } \lambda_l = 1 \end{cases} \text{ jelöléssel}$$

$$\Lambda(A_n, \sigma_k) = \Lambda(A_n, \overline{\sigma}_k + e_k) =$$
$$= \sum_{\lambda \in \{0,1\}^n} \Lambda(A_n, u_1, \ldots, u_n) = \Lambda(A_n, \overline{\sigma}_k) + \sum_{\substack{\lambda \in \{0,1\}^n \\ |\lambda| \geq 1}} \Lambda(A_n, u_1, \ldots, u_n).$$

Tehát elég belátni, hogy

$$\sum_{\substack{\lambda \in \{0,1\}^n \\ |\lambda| \geq 1}} \Lambda(A_n, u_1, \ldots, u_n) \leq 2^{2n+2} B 2^{k+\frac{3}{2}} \left[\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})} \right].$$

Először megbecsüljük az integrandus szorzótényezőit: $\overline{\sigma}_k$-t és e_k-t külön-külön. Mivel $S_{k+1} \subset S_k$, így

$$|\overline{\sigma}_k| \leq \left(\frac{1}{Q_{k+1}\delta_{k+1}} + \frac{1}{P_k\delta_k} \right) \mathbb{1}_{S_k}.$$

Mivel (14) alapján $\delta_{k+1}^{-1} = N_{k+1}\delta_k^{-1}$ és (10) alapján $Q_{k+1} = P_k N_{k+1} N_{k+1}^{-\varepsilon_{k+1}}$, így

$$|\overline{\sigma}_k| \leq \left(\frac{1}{Q_{k+1}\delta_{k+1}} + \frac{1}{P_k\delta_k}\right)\mathbb{1}_{S_k} = \left(\frac{N_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{P_k\delta_k} + \frac{1}{P_k\delta_k}\right)\mathbb{1}_{S_k} \leq 2\frac{N_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{P_k\delta_k}\mathbb{1}_{S_k}.$$

A 2.20. tétel első részét k-ra alkalmazva

$$P_k^{-1} \leq 2^k \prod_{j=1}^{k} N_j^{\varepsilon_j - 1}.$$

Emellett (13) szerint $\delta_k^{-1} = \prod_{j=1}^{k} N_j$, így

$$|\overline{\sigma}_k| \leq 2\frac{N_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}}{P_k\delta_k}\mathbb{1}_{S_k} \leq 2^{k+1}\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\varepsilon_j}\mathbb{1}_{S_k}.$$

A 2.20. tétel második részét alkalmazva $k+1$-re

$$|Q_{k+1} - P_{k+1}| \leq B\sqrt{Q_{k+1}}, \text{ így}$$

$$|e_k| = \left(\frac{1}{P_{k+1}\delta_{k+1}} - \frac{1}{Q_{k+1}\delta_{k+1}}\right)\mathbb{1}_{S_{k+1}} = \frac{|Q_{k+1} - P_{k+1}|}{P_{k+1}Q_{k+1}\delta_{k+1}}\mathbb{1}_{S_{k+1}} \leq$$
$$\leq \frac{B\sqrt{Q_{k+1}}}{P_{k+1}Q_{k+1}\delta_{k+1}}\mathbb{1}_{S_{k+1}} = \frac{B}{P_{k+1}\sqrt{Q_{k+1}}\delta_{k+1}}\mathbb{1}_{S_{k+1}}.$$

A 2.20. tétel első részét alkalmazva k-ra és $k+1$-re is egyrészt

$$P_{k+1}^{-1} \leq 2^{k+1}\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\varepsilon_j - 1}, \text{ másrészt}$$

$$Q_{k+1}^{-\frac{1}{2}} = P_k^{-\frac{1}{2}} N_{k+1}^{-\frac{1}{2}} N_{k+1}^{\frac{\varepsilon_{k+1}}{2}} \leq 2^{\frac{k}{2}}\prod_{j=1}^{k} N_j^{\frac{\varepsilon_j - 1}{2}} N_{k+1}^{\frac{\varepsilon_{k+1}-1}{2}} = 2^{\frac{k}{2}}\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\frac{\varepsilon_j - 1}{2}}.$$

A (14) alapján $\delta_{k+1}^{-1} = \prod_{j=1}^{k+1} N_j$ helyettesítéssel

$$|e_k| \leq \frac{B}{P_{k+1}\sqrt{Q_{k+1}}\delta_{k+1}}\mathbb{1}_{S_{k+1}} \leq B \cdot \left[2^{k+1}\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\varepsilon_j - 1}\right] \cdot \left[2^{\frac{k}{2}}\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\frac{\varepsilon_j - 1}{2}}\right] \cdot \left[\prod_{j=1}^{k+1} N_j\right]\mathbb{1}_{S_{k+1}} =$$
$$= B2^{\frac{3}{2}k+1}\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\frac{-1+3\varepsilon_j}{2}}\mathbb{1}_{S_{k+1}}.$$

Ha minden j-re N_j nagyobb egy megfelelő N korlátnál, akkor az $|e_k|$-ra adott felső korlát kisebb az $\overline{\sigma}_k$-ra adott felső korlátnál:

$$B2^{\frac{3}{2}k+1}\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\frac{-1+3\varepsilon_j}{2}}\mathbb{1}_{S_{k+1}} \leq 2^{k+1}\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\varepsilon_j}\mathbb{1}_{S_k}.$$

Tehát a szorzótényező minden tagját becsülhetjük felülről az $\overline{\sigma}_k$-ra vonatkozó becsléssel. Az derül ki, hogy elegendően jó felső korlátot kapunk, ha egyetlen tag kivételével tényleg minden tagot $\overline{\sigma}_k$-val becsülünk felülről.

Rögzített $\lambda, \sum_l \lambda_l \geq 1$ esetén legyen s tetszőleges index, amire $\lambda_s = 1$. Definíció szerint $u_s\left(\frac{\cdot - c_s}{r_s}\right)$ értéke a $c_s + r_s S_{k+1}$ halmazon kívül mindenütt 0, így $|\Lambda(A_n, u_1, \ldots, u_n)|$ értéke is azonosan 0 az $c_s + r_s S_{k+1}$ halmazon kívül. Így $z \in S_{k+1}$ választással

$$|\Lambda(A_n, u_1, \ldots, u_n)| \leq |c_s + r_s S_{k+1}| \cdot |\overline{\sigma}_k(z)|^{n-1} \cdot |e_k(z)|.$$

A fenti felső korlátokat és $r_s \leq 2$-t, (9) szerint $|S_{k+1}| = P_{k+1}\delta_{k+1}$-t behelyettesítve

$$|\Lambda(A_n, u_1, \ldots, u_n)| \leq 2P_{k+1}\delta_{k+1}\left(2^{k+1}\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\varepsilon_j}\right)^{n-1} \cdot \left(B2^{\frac{3}{2}k+1}\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\frac{-1+3\varepsilon_j}{2}}\right) \leq$$

$$\leq 2 \cdot \left(2^{k+1}\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{1-\varepsilon_j}\right)\left(\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-1}\right)\left(2^{k+1}\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\varepsilon_j}\right)^{n-1} \cdot \left(B2^{\frac{3}{2}k+1}\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\frac{-1+3\varepsilon_j}{2}}\right) =$$

$$= 2^{n+2+k(n+\frac{3}{2})}B\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})} = 2^{n+2}B2^{k(n+\frac{3}{2})}\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})}.$$

$2^n - 1 \leq 2^n$ ilyen tényezőt kell összeadni, mindegyiket így felülről becsülve:

$$\sum_{\substack{\lambda\in\{0,1\}^n \\ |\lambda|\geq 1}} \Lambda(A_n, u_1, \ldots, u_n) \leq 2^n \cdot 2^{n+2}B2^{k(n+\frac{3}{2})}\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})} =$$

$$= 2^{2n+2}B2^{k(n+\frac{3}{2})}\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})}.$$

Ezzel készen vagyunk.

□

2.29. Definíció. ([10]) A 2.20. tétel 3. pontjának bizonyítása szerint legyen

$$\Xi_{int} = \sum_{(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n)\in\mathbb{F}_{int}}\left[\prod_{l=1}^n X_k(\mathbf{i}_l)\sum_{\substack{(\bar{\mathbf{i}}_1,\ldots,\bar{\mathbf{i}}_n) \\ \mathbf{i}_l=\bar{\mathbf{i}}_l|_k}}\left(\prod_{l=1}^n (Y_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l) - p_{k+1})\right)\left|\bigcap_{l=1}^n (c_l + r_l I_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l))\right|\right],$$

$$\Xi_{tr} = \sum_{(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n)\in\mathbb{F}_{tr}}\left[\prod_{l=1}^n X_k(\mathbf{i}_l)\sum_{\substack{(\bar{\mathbf{i}}_1,\ldots,\bar{\mathbf{i}}_n) \\ \mathbf{i}_l=\bar{\mathbf{i}}_l|_k}}\left(\prod_{l=1}^n (Y_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l) - p_{k+1})\right)\left|\bigcap_{l=1}^n (c_l + r_l I_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l))\right|\right].$$

2.30. Lemma. *([10]) A 2.20. tétel 3. pontjának bizonyításában kapott kifejezés egyik fele a következőképpen becsülhető felülről:*

$$\frac{1}{(Q_{k+1}\delta_{k+1})^n}\Xi_{int} \leq 2^{2n-1}2^{k(n+1-\varepsilon_0)}\left[\prod_{j=1}^k N_j^{-\varepsilon_0+\varepsilon_j(n+\varepsilon_0-1)}\right] N_{k+1}^{n\varepsilon_{k+1}}.$$

2.31. Lemma. *([10]) Míg a 2.20. tétel 3. pontjának bizonyításában kapott kifejezés másik fele a következőképpen becsülhető felülről: $1 - B^{-1}$ valószínűséggel*

$$\frac{1}{(Q_{k+1}\delta_{k+1})^n}|\Xi_{tr}| \leq f_3(n) 2^{k(n+\frac{1}{2})} \left[\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})}\right] [V(k,n)]^{\frac{1}{2}} .$$

Itt $f_3(n)$ pontos értéke a következő, de csak annak lesz jelentősége, hogy kizárólag n-től függ.

$$f_3(n) = 4^{n+\frac{1}{2}} 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \tag{18}$$

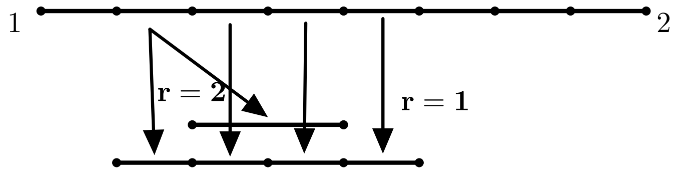
A 2.30. és 2.31. lemmák bizonyításához két lemmára is szükség lesz, amelyekhez ráadásul több kisebb lemmán keresztül vezet az út, következzenek most ezek.

2.32. Lemma. *([10]) Legyen A_n, és így $\mathbb{F}(A_n) = \mathbb{F}$ rögzített. Az l. kivételével szintén rögzítsük le A_n többi $n-1$ eleméhez tartozó intervallumokat: $\{\mathbf{i}_{l'}\}_{l' \neq l}$. Ez már szinte egyértelműen meghatározza az $\mathbf{i}_l$ intervallumot, amire $(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n) \in \mathbb{F}$: legfeljebb négy darab szomszédos δ_k hosszú intervallum lehet, amire mind $(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_n) \in \mathbb{F}$.*

Bizonyítás: Az $n = 2$ esetben két metsző intervallum hossza között a különbség legfeljebb kétszeres lehet, így egy rögzített intervallumot legfeljebb négy másik, szükségképpen szomszédos intervallum metszhet. $n > 2$ esetén a további $n-2$ lerögzített intervallum csak további feltételeket szab, tehát a szóbajövő intervallumok száma ennél csak kisebb lehetne az általános esetben.

□

2.33. Megjegyzés. Egyenlőség akkor teljesülhet, ha $n-1$ intervallumhoz tartozó nyújtási paraméter $r_{l'} = 2$, míg $r_l = 1$ és az eltolási paraméterek is megfelelőek, például az ábrán látható módon mindegyik 0.



2.34. Lemma. *([10]) Minden A_n és k paraméterek esetén $\mathbb{F}(A_n, k)$ felbontható 4^{n-1} részre, amelyeken belül már az összes π_l projekció injektív.*

Bizonyítás: Teljes indukcióval bizonyítunk, az $n = 2$ esettel kezdve. Definiáljunk egy $G = (A, B, E)$ páros gráfot, ahol $A = B = \mathbb{I}_k$, és $(\mathbf{i}_A, \mathbf{i}_B) \in E \Leftrightarrow (\mathbf{i}_A, \mathbf{i}_B) \in \mathbb{F}$. A gráf minden csúcsának foka legfeljebb 4 a 2.32. lemma $n = 2$ esete alapján, tehát felbomlik 4 darab ≤ 1 fokú részgráfra. Az, hogy A-ban minden csúcs foka ≤ 1, éppen azt jelenti, hogy π_1 injektív $\mathbb{F}$ adott részgráf által definiált részhalmazán, míg az, hogy B-ben minden csúcs foka ≤ 1, π_2 injektivitásával ekvivalens.

Most tegyük fel, hogy minden $2 \leq k \leq n$ esetén igaz az állítás, és belátjuk $n+1$-re. Rögzítsük k-t és A_{n+1}-et, A_n legyen A_{n+1} első n eleme. Az indukciós hipotézis alapján $\mathbb{F}(A_n)$ felbomlik 4^{n-1} részre, tekintsünk egy tetszőleges nemüreset ezek közül. Ismét definiálunk egy $G=(A,B,E)$ páros gráfot. Az A halmaz elemei legyenek $\mathbb{F}(A_n)$ adott részhalmazba eső elemei, $B := \mathbb{I}_k$, és $((\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n),\mathbf{i}_B) \in E \Leftrightarrow (\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n,\mathbf{i}_B) \in \mathbb{F}(A_{n+1})$. Ekkor a 2.32. lemma alapján A minden elemének foka legfeljebb 4. Szintén a 2.32. lemma alapján B minden eleme legfeljebb 4 különböző $\mathbf{i}_1$-et tartalmazó csúccsal lehet összekötve, de feltevésünk szerint A-n π_1 injektív, így B elemeinek foka is legfeljebb 4. Tehát G ismét felbomlik 4 darab ≤ 1 fokú részgráfra, ami biztosítja az összes projekció injektivitását. Mind a 4^{n-1} részt további 4 részre bontottuk, így összességében megkaptuk $\mathbb{F}(A_{n+1})$ 4^n részre történő felbontását.

□

2.35. Lemma. *([10]) Adott $(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n)$ esetén legfeljebb $4^{n-1}N_{k+1}$ darab olyan $(\bar{\mathbf{i}}_1\ldots,\bar{\mathbf{i}}_n)$ van, amelyre $\bar{\mathbf{i}}_l|_k = \mathbf{i}_l$ (azaz $sz(\bar{\mathbf{i}}_l) = \mathbf{i}_l$) és*

$$\bigcap_{l=1}^{n}(c_l + r_l I_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l)) \neq \emptyset.$$

Bizonyítás: Bontsuk fel $\mathbb{F}(A_n, k+1)$-et a 2.34. lemma alapján 4^{n-1} részre, amelyeken belül π_1 injektív. Adott $\mathbf{i}_1$ esetén $\bar{\mathbf{i}}_1$ értéke legfeljebb $N+1$ különböző lehet, tehát minden rész legfeljebb $N+1$ elemű, így összesen legfeljebb $4^{n-1}N_{k+1}$ elemünk van.

□

2.36. Lemma. *([10]) Rögzített $A_n \in \mathfrak{A}$ esetén $\mathbb{F}_{tr}$ felosztható $n!4^{n-1}$ részre, melyekre az összes π_l projekciófüggvény injektív és ugyanaz a permutáció határozza meg az $(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n)$ intervallumok nagyságszerinti sorrendjét. Precízebben minden részhez létezik egy π permutáció, hogy minden ebbe a részbe eső $(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n)$ esetén*

$$\alpha_k(\mathbf{i}_{\pi(1)}) < \ldots < \alpha_k(\mathbf{i}_{\pi(n)}).$$

Bizonyítás: Az 2.34. lemma által biztosított 4^{n-1} osztály mindegyikét fogjuk $n!$ részre továbbosztani, így a projekciófüggvények injektivitása már biztosítva van. $\mathbb{F}_{tr}$-be azok az intervallum n-esek kerültek, amelyekre nincs két legfeljebb 4 lépésre lévő, speciálisan amelyek elemei különbözőek. Így minden elemhez egyértelműen tartozik egy permutáció, amely meghatározza az intervallumok nagyságszerinti sorrendjét. Az n elem permutációinak száma $n!$, így készen vagyunk. Hasonlóan eredményre vezet, ha először létrehozunk $n!$ darab osztályt, amelyekben az intervallumok nagyságszerinti sorrendje a π permutáció szerinti, majd ezeket osztjuk tovább 4^{n-1} részre a 2.34. lemma alapján.

□

2.37. Jelölés. Jelölje $\mathcal{F}_\pi$ a 2.36. lemma szerinti felosztásban $\mathbb{F}_{tr}$ összes elemét, amelyben az intervallumok nagyságszerinti sorrendje π-szerinti, azaz

$$\alpha_k(\mathbf{i}_{\pi(1)}) < \ldots < \alpha_k(\mathbf{i}_{\pi(n)}),$$

és emellett az összes projekciófüggvény injektív.

2.38. Lemma. *([10]) Rögzített $A_n \in \mathfrak{A}$ esetén $\mathbb{F}_{tr}$ felosztható $n!4^{n-1}2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ részre, amelyeken belül egyrészt az intervallumok nagyságszerinti sorrendje π-szerinti, másrészt a projekciófüggvények injektivitásánál egy erősebb tulajdonság is teljesül: nincs olyan eleme $\mathbb{I}_k$-nak, amely – akár különböző indexű helyeken – többször előfordulna. Azaz ha $\mathcal{F}'$ jelöl egy részt, akkor tetszőleges s, t indexekre $\mathbf{i} \in \pi_s(\mathcal{F}')$ esetén $\mathbf{i} \notin \pi_t(\mathcal{F}')$.*

Bizonyítás: A 2.36. lemma alapján elég egy rögzített π-re megmutatni, hogy $\mathcal{F}_\pi$ felbontható $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ megfelelő részre. Az s, t párok száma $\dfrac{n(n-1)}{2}$, és ha páronként különböznek az adott indexű helyeken előforduló intervallumok, akkor összesen is csupa különböző szerepel, így elegendő rögzített s és t indexekre megmutatni, hogy $\mathcal{F}_\pi$ egy tetszőleges része további két részre bontható, amelyeken belül $\mathbf{i} \in \pi_s(\mathcal{F}')$ esetén $\mathbf{i} \notin \pi_t(\mathcal{F}')$ és fordítva $\mathbf{i} \in \pi_t(\mathcal{F}')$ esetén $\mathbf{i} \notin \pi_s(\mathcal{F}')$.

Legyen tehát π, s, és t rögzített. A bizonyítás erejéig jelölje $\mathbf{i} < \mathbf{j}$, ha $\alpha_k(\mathbf{i}) < \alpha_k(\mathbf{j})$. Jelöljön $\mathbf{i}_m$ egy s. helyen álló intervallumot, $\mathbf{j}_m$ pedig egy t. helyen álló intervallumot. Feltehetjük, hogy π olyan, hogy minden m-re $\mathbf{i}_m < \mathbf{j}_m$. Továbbá π_s és π_t injektivitása miatt tetszőleges $\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k$ összesen legfeljebb kétszer szerepelhet, egyszer az s. és egyszer a t. indexű helyen. Így nem olyan meglepő, hogy a két részre bontás sikerülhet. Hozzunk létre egy A-val és B-vel jelölt osztályt, ezeket sorban fogjuk feltölteni. A legkisebb intervallumot jelölje $\mathbf{i}_0$, párját $\mathbf{j}_0$, az ő rendszerük kerüljön A-ba. Ezután ha létezik $\mathbf{i}_1$, amire $\mathbf{j}_0 = \mathbf{i}_1$, ennek szükségképpen B-be kell kerülnie. Felváltva rakjuk az elemeket a másik osztályba, amíg el nem akadunk. $\mathbf{i}_m < \mathbf{j}_m$ miatt csak úgy akadhatunk el $\mathbf{i}_l, \mathbf{j}_l$ után, ha nem létezik $\mathbf{i}_m$, amire $\mathbf{i}_m = \mathbf{j}_l$. Ekkor kezdjük elölről, a maradék intervallumok közül van egy legkisebb, ami szükségképpen nem egyezik meg egyik $\mathbf{j}_m$ intervallummal sem, ő és párja kerüljenek A-ba. Az eljárás befejeztével A-ban és B-ben is csupa különböző intervallum fordul elő. A legkiegyensúlyozottabb akkor lesz a két osztály, ha egyetlen nagy láncban követik egymást az elemek.

Az eljárás szemléltetése az intervallumokat egész számokkal jelölve:

A	**B**
1,2	2,3
3,5	5,6
7,11	
8,9	
13,15	15,16
16,18	18,20

□

Bizonyítás: (A 2.30. lemma bizonyítása) Mivel $A_n \in \mathfrak{A}_{tr}$, így a Ξ_{int} összeg kevesebb, mint $P_k^{1-\varepsilon_0}$ tagú, és a 2.35. lemma alapján rögzített $(\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n) \in \mathbb{F}_{int}$ esetén a belső összegnek legfeljebb $4^{n-1} N_{k+1}$ tagja van. Másrészt

$$\left| \bigcap_{l=1}^{n} (c_l + r_l I_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l)) \right| \leq 2\delta_{k+1},$$

$\prod_{l=1}^{n} (Y_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l) - p_{k+1})$ pedig 1-gyel becsülhető felülről, hiszen n darab 1-nél kisebb abszolútértékű szám szorzata. A 2.20. tétel első pontját k-ra alkalmazva

$$P_k \leq 2^k \prod_{j=1}^{k} N_j^{1-\varepsilon_j},$$

$$P_k^{1-\varepsilon_0} \leq 2^{k(1-\varepsilon_0)} \prod_{j=1}^{k} N_j^{(1-\varepsilon_j)(1-\varepsilon_0)}.$$

Így

$$|\Xi_{int}| \leq P_k^{1-\varepsilon_0} 4^{n-1} N_{k+1} 2\delta_{k+1} \leq 2^{k(1-\varepsilon_0)} \prod_{j=1}^{k} N_j^{(1-\varepsilon_j)(1-\varepsilon_0)} 4^{n-1} N_{k+1} 2 \prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-1} =$$

$$= 2^{2n-1} 2^{k(1-\varepsilon_0)} \prod_{j=1}^{k} N_j^{-\varepsilon_0 + \varepsilon_j(\varepsilon_0 - 1)}.$$

Szintén a 2.20. tétel első pontja alapján

$$P_k^{-n} \leq 2^{kn} \prod_{j=1}^{k} N_j^{(\varepsilon_j - 1)n}. \text{ Így}$$

$$\frac{1}{(Q_{k+1}\delta_{k+1})^n} = \left(P_k N_{k+1} N_{k+1}^{-\varepsilon_{k+1}} \prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-1} \right)^{-n} \leq$$

$$\leq \left(2^{kn} \prod_{j=1}^{k} N_j^{(\varepsilon_j - 1)n} \right) \prod_{j=1}^{k} N_j^n N_{k+1}^{n\varepsilon_{k+1}} = 2^{kn} \prod_{j=1}^{k+1} N_j^{n\varepsilon_j}.$$

$$\frac{1}{(Q_{k+1}\delta_{k+1})^n} |\Xi_{int}| \leq \left(2^{kn} \prod_{j=1}^{k+1} N_j^{n\varepsilon_j} \right) \cdot \left(2^{2n-1} 2^{k(1-\varepsilon_0)} \prod_{j=1}^{k} N_j^{-\varepsilon_0 + \varepsilon_j(\varepsilon_0 - 1)} \right) =$$

$$= 2^{2n-1} 2^{k(n+1-\varepsilon_0)} \left[\prod_{j=1}^{k} N_j^{-\varepsilon_0 + \varepsilon_j(n + \varepsilon_0 - 1)} \right] N_{k+1}^{n\varepsilon_{k+1}}.$$

□

Bizonyítás: (A 2.31. lemma bizonyítása) Az 2.29. definíció alapján

$$\Xi_{tr} = \sum_{(\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_n) \in \mathbb{F}_{tr}} \left[\prod_{l=1}^{n} X_k(\mathbf{i}_l) \sum_{\substack{(\bar{\mathbf{i}}_1, \dots, \bar{\mathbf{i}}_n) \\ \mathbf{i}_l = \bar{\mathbf{i}}_l|_k}} \left(\prod_{l=1}^{n} (Y_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l) - p_{k+1}) \right) \left| \bigcap_{l=1}^{n} (c_l + r_l I_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l)) \right| \right].$$

Rögzítsünk le a 2.38. lemma alapján egy $\mathcal{F}'$ osztályt, ami a lemma feltételeit mind teljesíti. Az $n!4^n 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ darab osztályra ugyanazt a becslést fogjuk használni.

$$\Xi_{tr} = \sum_{\mathcal{F}'} \sum_{(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n)\in\mathcal{F}'} \left[\prod_{l=1}^{n} X_k(\mathbf{i}_l) \sum_{\substack{(\bar{\mathbf{i}}_1,\ldots,\bar{\mathbf{i}}_n)\\ \mathbf{i}_l=\bar{\mathbf{i}}_l|_k}} \left(\prod_{l=1}^{n} (Y_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l) - p_{k+1}) \right) \left| \bigcap_{l=1}^{n} (c_l + r_l I_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l)) \right| \right] =$$

$$= \sum_{\mathcal{F}'} \Xi_{\mathcal{F}'}.$$

Rögzítsünk le egy $\mathcal{F}'$ osztályt és számozzuk be azon elemeit, amelyekre $\prod_{l=1}^{n} X_k(\mathbf{i}_l) = 1$, $(\mathbf{i}_1^j, \ldots, \mathbf{i}_n^j) : 1 \leq j \leq T$-vel. Jelölje

$$W_j = \sum_{\substack{(\bar{\mathbf{i}}_1,\ldots,\bar{\mathbf{i}}_n)\\ \mathbf{i}_l^j=\bar{\mathbf{i}}_l|_k}} \left(\prod_{l=1}^{n} (Y_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l) - p_{k+1}) \right) \left| \bigcap_{l=1}^{n} (c_l + r_l I_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l)) \right|.$$

Szintén a 2.38. lemmából adódik, hogy a W_j valószínűségi változók függetlenek.

$$E\left(\prod_{l=1}^{n} (Y_{k+1}(\bar{\mathbf{i}}_l) - p_{k+1}) \right) = 0$$

miatt $EW_j = 0$. Minden l esetén $\bar{\mathbf{i}}_l$ egy $k+1$ hosszú multiindex, így W_j egy N_{k+1}^n tagú összeg. Azonban a 2.35. lemma alapján legfeljebb $4^{n-1}N_{k+1}$ olyan tag lehet, amire a metszet nemüres. Az összes nemüres metszet mértékét felülről becsülhetjük $2\delta_{k+1}$-gyel. A paraméterek megfelelő megválasztásával a Bernstein-egyenlőtlenséget szeretnénk használni. Ehhez

$$E|W_j|^2 \leq 4^{n-1} N_{k+1} p_{k+1}(1-p_{k+1}) 4\delta_{k+1}^2,$$

$$\sum E|W_j|^2 \leq T 4^n N_{k+1} p_{k+1} \delta_{k+1}^2 =: \sigma^2.$$

Természetesen $m = T$. A λ értéke tetszőleges $\frac{\sigma^2}{6T} = \frac{4^n N_{k+1} p_{k+1} \delta_{k+1}^2}{6}$-nél kisebb szám lehet. Emellett a $|W_j| \leq 1$ is teljesül, hiszen az összeg a 2.35. lemma miatt legfeljebb $4^{n-1}N_{k+1}$ darab $\leq 2\delta_{k+1}$ tagból áll. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\Xi_{\mathcal{F}'} \geq T\lambda\right) \leq 4 \exp\left(-\frac{T^2\lambda^2}{8\sigma^2} \right).$$

Az osztályok száma miatt

$$\mathbb{P}\left(\Xi_{tr} > n!4^{n-1}2^{\frac{n(n-1)}{2}} T\lambda \right) \leq n!4^{n-1}2^{\frac{n(n-1)}{2}} 4 \exp\left(-\frac{T^2\lambda^2}{8\sigma^2} \right).$$

A 2.12. lemma alapján $\mathfrak{A}_{tr}$ elemszáma legfeljebb $4^n \delta_{k+1}^{-2Ln}$, így legalább

$$1 - 4^n \delta_{k+1}^{-2Ln} \cdot \left[n!4^n 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \exp\left(-\frac{T^2\lambda^2}{8\sigma^2} \right) \right]$$

valószínűséggel minden $A \in \mathfrak{A}_{tr}$ esetén

$$\Xi_{tr} \leq n!4^{n-1}2^{\frac{n(n-1)}{2}} T\lambda.$$

$$4^n\delta_{k+1}^{-2Ln}\cdot\left[n!4^n2^{\frac{n(n-1)}{2}}\exp\left(-\frac{T^2\lambda^2}{8\sigma^2}\right)\right]\le B^{-1} \tag{19}$$

és $6\lambda T\le\sigma^2$ esetén

$$n!4^{n-1}2^{\frac{n(n-1)}{2}}T\lambda$$

jó felső korlát lesz.

Válasszuk úgy λ értékét, hogy az (19) egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesüljön: (14) alapján

$$4^{2n}2^{\frac{n(n-1)}{2}}n!B\prod_{j=1}^{k+1}N_j^{2Ln}=\exp\left(\frac{T^2\lambda^2}{8\sigma^2}\right),$$

(8) alapján

$$\frac{1}{T}\sqrt{8}\sqrt{\sigma^2}\left[\ln\left(4^{2n}2^{\frac{n(n-1)}{2}}n!B\prod_{j=1}^{k+1}N_j^{2Ln}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{T}\sqrt{8}\sqrt{\sigma^2}\,[V(k,n)]^{\frac{1}{2}}=\lambda,$$

így σ^2 behelyettesítésével

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sqrt{8}\sqrt{4^nN_{k+1}p_{k+1}\delta_{k+1}^2}\,[V(k,n)]^{\frac{1}{2}}=\lambda,$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}}2^{n+\frac{3}{2}}N_{k+1}^{\frac{1-\varepsilon_{k+1}}{2}}\prod_{j=1}^{k+1}N_j^{-1}\,[V(k,n)]^{\frac{1}{2}}=\lambda.$$

Tehát

$$n!4^{n-1}2^{\frac{n(n-1)}{2}}T\lambda=\sqrt{T}4^{n+\frac{1}{2}}2^{\frac{n(n+1)}{2}}N_{k+1}^{\frac{1-\varepsilon_{k+1}}{2}}\prod_{j=1}^{k+1}N_j^{-1}\,[V(k,n)]^{\frac{1}{2}}.$$

$T\le P_k$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$n!4^{n-1}2^{\frac{n(n-1)}{2}}T\lambda\le\sqrt{P_k}4^{n+\frac{1}{2}}2^{\frac{n(n+1)}{2}}N_{k+1}^{\frac{1-\varepsilon_{k+1}}{2}}\prod_{j=1}^{k+1}N_j^{-1}\,[V(k,n)]^{\frac{1}{2}}.$$

A 2.20. tétel 1. pontja alapján

$$n!4^{n-1}2^{\frac{n(n-1)}{2}}T\lambda\le 2^{\frac{k}{2}}\prod_{j=1}^{k+1}N_j^{\frac{-1-\varepsilon_j}{2}}4^{n+\frac{1}{2}}2^{\frac{n(n+1)}{2}}\,[V(k,n)]^{\frac{1}{2}}.$$

Tehát a 2.26. következmény alapján

$$\frac{1}{(Q_{k+1}\delta_{k+1})^n}|\Xi_{tr}|\le\left(2^{kn}\prod_{j=1}^{k+1}N_j^{n\varepsilon_j}\right)2^{\frac{k}{2}}\prod_{j=1}^{k+1}N_j^{\frac{-1-\varepsilon_j}{2}}4^{n+\frac{1}{2}}2^{\frac{n(n+1)}{2}}\,[V(k,n)]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=2^{k(n+\frac{1}{2})}4^{n+\frac{1}{2}}2^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{j=1}^{k+1}N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})}\,[V(k,n)]^{\frac{1}{2}}.$$

□

2.2. A 2.22. tétel bizonyítása

A függelékben található vizuális áttekintésen is látható, hogy a bizonyításnak több fő lépcsője van, amelyek mindegyikéhez több lemmára is szükség van. Először kimondom a fontosabb állításokat, majd ezeket sorban bizonyítom a hozzájuk tartozó lemmákkal együtt. Már az állítások kimondásához is több definícióra van szükség, ezekkel kezdem.

2.39. Állítás. *([10]) A* $[0,1]$ *tartójú függvények halmazán korlátosak az 1.21. definícióban definiált* $\mathcal{M}$ *és* $\mathfrak{M}$ *leszűkített operátorok minden* $1 < p, q$ *esetén.*

Szokásos technika egy operátor összegre bontása, ezt szolgálja a következő definíció.

2.40. Definíció. ([10]) Legyen $\mathcal{M}_k : f \mapsto \mathcal{M}_k f$ a σ_k-hoz tartozó korlátozott maximáloperátor, ahol σ_k a 2.16. definíció szerint $\phi_{k+1} - \phi_k$-et jelöli:

$$\mathcal{M}_k f(x) = \sup_{1<r<2} \left| \int f(x+ry)\, \sigma_k(y)\, \mathrm{d}y \right| .$$

2.41. Állítás. *([10]) Ha* $2 \le q_0 \le \dfrac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$ *és* $\dfrac{q_0}{q_0-1} < p$*, létezik* p*-től függő* $\eta(p) > 0$ *konstans és* C_{p,q_0}*, hogy minden* $f \in L^p[0,1]$*-re*

$$\|\mathcal{M}_k f\|_{(q_0-1)p} \le C_{p,q_0} 2^{-k\eta(p)} \|f\|_p. \tag{20}$$

Két új operátort és függvényt is bevezetünk.

2.42. Definíció. ([10]) Adott c, r függvények esetén legyen

$$V_{k,x}(z) = \sigma_k \left(\frac{z - c(x)}{r(x)} \right),$$

$$\Phi_k f(x) = \int f(z) V_{k,x}(z)\, \mathrm{d}z,$$

$$\Phi_k^* g(z) = \int f(x) V_{k,x}(z)\, \mathrm{d}x.$$

2.43. Állítás. *([10]) Legyen* $2 \le q_0 \le \dfrac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$ *rögzített, ekkor* $p > \dfrac{q_0}{q_0-1}$ *esetén van olyan* $\eta(p) > 0$ *konstans, amellyel* $2^{-k\eta(p)}$ *felső korlát* $\Phi_k : L^p[0,1] \to L^{p(q_0-1)}[-4,0]$ *operátor operátornormájára.*

Az affin transzformációk terének diszkretizálása motiválja a következő definíciókat is:

2.44. Definíció. ([10]) Rögzítsünk le egy $f \in C_c[0,1]$ függvényt, és tekintsük az 2.40. definícióban definiált $\mathcal{M}_k$ operátort. Ekkor létezik egy $\hat{r}_f$ mérhető függvény, hogy

$$\mathcal{M}_k f(x) \le 2 \left| \int f(x + \hat{r}_f(x) y) \sigma_k(y)\, \mathrm{d}y \right|,$$

hiszen az operátor definíciójában a jobb oldal szuprémumát kell venni $r \in [1,2]$-re. Az $\hat{r}_f$ függvény választható lépcsős függvénynek, innen látszik, hogy mérhetőnek is választható.

2.45. Definíció. ([10]) Legyen $c : [-4,0] \to [-4,0]$, amire $c(x)$ az x-hez legközelebbi $\mathcal{C}$-beli pont, míg legyen $\tilde{r} : [1,2] \to [1,2]$, amire $\tilde{r}(x)$ az x-hez legközelebbi $\mathcal{R}$-beli pont. Ezután f esetén a 2.44. definíció alapján legyen $r_f(x) = \tilde{r}(\hat{r}_f(x))$. Ha a kontextusból világos, r_f helyett az r jelölést fogjuk erre a függvényre használni.

Így már beszélhetünk az $\{S_k\}$ halmazsorozathoz tartozó Φ_k^* operátorról, hiszen $\{S_k\}$ definiálja $\mathcal{M}_k$-t, ahhoz tartozik a c és r függvény(család), amelyekkel már definiálhatóak az Φ_k és Φ_k^* operátorok.

2.46. Állítás. *([10]) A 2.20. tétel által biztosított $\{S_k\}$ sorozathoz tartozó Φ_k^* operátorra a következő felső korláttal igaz a leszűkített erős korlátosság:*

$$\sup_{\Omega\subset[0,1]} \frac{\|\Phi_k^* \mathbb{1}_\Omega\|_n}{|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}} \leq f_1(n)^{\frac{1}{n}} 2^{k(1+\frac{3}{2n})} \left[\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{n}} [V(k,n)]^{\frac{1}{2n}} \left[N_{k+1}^{1-\varepsilon_{k+1}}\right]^{\frac{1}{2n}}.$$

Először az 2.46. állításhoz szükséges lemmákat bizonyítom.

2.47. Lemma. *([10]) Ha sok, n^2-nél lényegesen több közeli metszés van, akkor kell lennie legalább két közeli eltolási paraméternek: $|\mathbb{F}_{int}(A_n,k)| \geq L$ esetén*

$$\min\{|c_l - c_{l'}| : l \neq l'\} \leq \min(4, 5 \cdot 4^n n(n-1)/L).$$

Bizonyítás: Rögzítsünk le egy tetszőleges A_n-et, amire $|\mathbb{F}_{int}(A_n,k)| \geq L$, és a továbbiakban jelölje $\mathbb{F}_{int}(A_n,k)$-et $\mathbb{F}_{int}$. Az index párok száma $\binom{n}{2}$, így skatulya-elv alapján létezik $s \neq t$, amire

$$|\mathbb{F}_{int}(s,t)| \geq \frac{L}{\binom{n}{2}}.$$

Legyen $(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n) \in \mathbb{F}_{int}(s,t)$ tetszőleges. Minden nyújtási paraméter ≤ 2, ezért metsző k. generációs intervallumok bal végpontjának távolsága legfeljebb $2\delta_k$:

$$|(c_s + r_s\alpha_k(\mathbf{i}_s)) - (c_t + r_t\alpha_k(\mathbf{i}_t))| \leq 2\delta_k.$$

Másrészt $(\mathbf{i}_1,\ldots,\mathbf{i}_n) \in \mathbb{F}_{int}(s,t)$ miatt definíció szerint

$$|\alpha_k(\mathbf{i}_s) - \alpha_k(\mathbf{i}_t)| \leq 4\delta_k, \text{ így } r_t \leq 2 \text{ miatt}$$

$$r_t \cdot |\alpha_k(\mathbf{i}_s) - \alpha_k(\mathbf{i}_t)| \leq 2 \cdot 4\delta_k.$$

Háromszög-egyenlőtlenség és a fenti két egyenlőtlenség alapján

$$|(c_s - c_t) + (r_s - r_t)\alpha_k(\mathbf{i}_s)| \leq 10\delta_k, \text{ és így}$$

$$|(c_s - c_t)\cdot\alpha_k(\mathbf{j}_s) + (r_s - r_t)\alpha_k(\mathbf{i}_s)\cdot\alpha_k(\mathbf{j}_s)| \leq 10\delta_k \cdot \alpha_k(\mathbf{j}_s). \tag{21}$$

Ha $\mathbb{F}_{int}(s,t)$ egy másik eleme $(\mathbf{j}_1,\ldots,\mathbf{j}_n)$, arra szintén

$$|(c_s - c_t) + (r_s - r_t)\alpha_k(\mathbf{j}_s)| \leq 10\delta_k, \text{ és így}$$

$$|(c_s - c_t)\cdot\alpha_k(\mathbf{i}_s) + (r_s - r_t)\alpha_k(\mathbf{j}_s)\cdot\alpha_k(\mathbf{i}_s)| \leq 10\delta_k \cdot \alpha_k(\mathbf{i}_s). \tag{22}$$

A (21) és (22) egyenlőtlenségeket összeadva a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$|c_s - c_t||\alpha_k(\mathbf{i}_s) - \alpha_k(\mathbf{j}_s)| =$$

$$|(c_s - c_t)\alpha_k(\mathbf{i}_s) + (r_s - r_t)\alpha_k(\mathbf{i}_s)\alpha_k(\mathbf{j}_s) - (c_s - c_t)\alpha_k(\mathbf{j}_s) - (r_s - r_t)\alpha_k(\mathbf{i}_s)\alpha_k(\mathbf{j}_s)| \leq$$

$$\leq 10\delta_k\alpha_k(\mathbf{i}_s) + 10\delta_k\alpha_k(\mathbf{j}_s) \leq 10\delta_k(2+2) = 40\delta_k,$$

azaz

$$|c_s - c_t||\alpha_k(\mathbf{i}_s) - \alpha_k(\mathbf{j}_s)| \leq 40\delta_k. \tag{23}$$

Most készen lennénk, ha $|\alpha_k(\mathbf{i}_s) - \alpha_k(\mathbf{j}_s)|$-ra tudunk megfelelő alsó korlátot mondani valamely esetben. Injektivitás esetén van esélyünk jó alsó korlátra, így adódik a következő gondolatmenet. Az 2.34. lemma alapján $\mathbb{F}_{int}(s,t)$ felbontható 4^{n-1} részre, hogy azokon belül az összes π_l projekció injektív, speciálisan π_s is. A 4^{n-1} darab rész közül a legnagyobbnak legalább

$$\frac{L}{\binom{n}{2}4^{n-1}} = \frac{L}{2^{2n-3}n(n-1)}$$

eleme van, amelyekre $\mathbf{i}_s$, és így $\alpha_k(\mathbf{i}_s)$ csupa különböző. Két szomszédos intervallum távolsága legalább δ_k, így a két szélső, legtávolabbi intervallumokra

$$|\alpha_k(\mathbf{i}_s) - \alpha_k(\mathbf{j}_s)| \geq \frac{L\delta_k}{2^{2n-3}n(n-1)}.$$

Így a (23) egyenlőtlenség alapján

$$|c_s - c_t| \leq \frac{40\delta_k}{\frac{L\delta_k}{2^{2n-3}n(n-1)}} = \frac{5\cdot 4^n n(n-1)}{L}.$$

□

A következő lemma a korrelációra egy teljesen általános és egyszerű felső becslést ad, ami nem használja ki A_n-nek semmilyen speciális tulajdonságát.

2.48. Lemma. *([10]) Minden $k \geq 1$ és $A_n \in \mathfrak{A}$ esetén*

$$|\Lambda(A_n, \sigma_k)| \leq \frac{2^{n+1}}{(P_{k+1}\delta_{k+1})^{n-1}}.$$

Itt a 2.15. definíció szerint $\Lambda(A_n, \sigma_k)$ jelöli a σ_k függvény n-szeres korrelációját A_n-re nézve.

Bizonyítás: A $\Lambda(A_n, \sigma_k)$ 2.15. és σ_k 2.16. definíciója szerint

$$|\Lambda(A_n, \sigma_k)| = \left| \int \prod_{l=1}^{n} \left(\phi_{k+1}\left(\frac{z-c_l}{r_l}\right) - \phi_k\left(\frac{z-c_l}{r_l}\right)\right) \mathrm{d}z \right| =$$

$$= \left| \sum_{\lambda\in\{0,1\}^n} \int (-1)^{|\lambda|} \prod_{l=1}^{n} \phi_{k+\lambda_l}\left(\frac{z-c_l}{r_l}\right) \mathrm{d}z \right| \leq \sum_{\lambda\in\{0,1\}^n} \left| \int (-1)^{|\lambda|} \prod_{l=1}^{n} \phi_{k+\lambda_l}\left(\frac{z-c_l}{r_l}\right) \mathrm{d}z \right| =$$

$$= \sum_{\lambda\in\{0,1\}^n} \left| \int \prod_{l=1}^{n} \phi_{k+\lambda_l}\left(\frac{z-c_l}{r_l}\right) \mathrm{d}z \right| = \sum_{\lambda\in\{0,1\}^n} |\Lambda(A_n, \phi_{k+\lambda_1}, \ldots, \phi_{k+\lambda_n})|.$$

Pontosan $2^n - 1$ lehetséges λ választás van, amire $|\lambda| \geq 1$. Rögzítsünk le egy ilyet, és s legyen egy tetszőleges index, amire $\lambda_s = 1$. Ekkor a szorzótényezők között szerepel ϕ_{k+1}, azaz az S_{k+1} halmazon kívül biztosan 0 az integrandus. Az S_{k+1} halmazon viszont minden tag lehetséges értéke 0, $|S_k|^{-1}$ vagy $|S_{k+1}|^{-1}$. Becsülhetünk minden szorzótényezőt a lehetséges legnagyobb értékkel, $|S_{k+1}|^{-1} = (P_{k+1}\delta_{k+1})^{-1}$-zel, így

$$|\Lambda(A_n, \phi_{k+\lambda_1}, \dots, \phi_{k+\lambda_n})| \leq (P_{k+1}\delta_{k+1})^{-n} \int \mathbb{1}_{S_{k+1}} \left(\frac{z - c_s}{r_s}\right) \mathrm{d}z.$$

Mivel $r_s \leq 2$, így $\int \mathbb{1}_{S_{k+1}} \left(\frac{z-c_s}{r_s}\right) \mathrm{d}z \leq 2|S_{k+1}| = 2P_{k+1}\delta_{k+1}$. Összegezve

$$|\Lambda(A_n, \phi_{k+\lambda_1}, \dots, \phi_{k+\lambda_n})| \leq 2(P_{k+1}\delta_{k+1})^{-n+1},$$

$$\sum_{\substack{\lambda \in \{0,1\}^n \\ |\lambda| \geq 1}} |\Lambda(A_n, \phi_{k+\lambda_1}, \dots, \phi_{k+\lambda_n})| \leq (2^n - 1) \cdot 2 \cdot (P_{k+1}\delta_{k+1})^{-n+1}.$$

Hasonló becsléssel $\lambda \equiv 0$ esetén $|\Lambda(A_n, \phi_k)| \leq 2 \cdot (P_k\delta_k)^{-n+1} \leq 2 \cdot (P_{k+1}\delta_{k+1})^{-n+1}$. Összegeze a kívánt eredményt kapjuk.

□

2.49. Állítás. *([10]) Van egy C abszolút konstans, hogy ha van olyan ε_0, amivel teljesül a 2.17. definícióban definiált merőleges korrelációs feltétel, akkor*

$$\sup_{\Omega \subset [0,1]} \frac{\|\Phi_k^* \mathbb{1}_\Omega\|_n}{|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}} \leq C \left[\max\left(\frac{2^n n^4 P_k^{\varepsilon_0 - 1}}{(P_{k+1}\delta_{k+1})^{n-1}}, C_0(k, n, \varepsilon_0) \right) \right]^{\frac{1}{n}}. \tag{24}$$

Bizonyítás: A bizonyítás a 2.47. és 2.48. lemmákra támaszkodik. A Φ_k^* definíciójában szereplő $c(x), r(x)$ természetesen a 2.45. definíció alapján $\mathbb{1}_\Omega$-hoz tartozó c, r függvények. A Φ_k^* definíciója alapján

$$\|\Phi_k^* \mathbb{1}_\Omega\|_n^n = \left\| \int_\Omega V_{k,x}(\cdot) \, \mathrm{d}x \right\|_n^n = \int \left(\int_\Omega V_{k,x}(z) \, \mathrm{d}x \right)^n \mathrm{d}z =$$

$$= \int \prod_{j=1}^n \left(\int_\Omega V_{k,x_j}(z) \, \mathrm{d}x_j \right) \mathrm{d}z = \int_{\Omega^n} \left(\int \prod_{j=1}^n V_{k,x_j}(z) \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n.$$

Minden $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ értékhez tartozik egy A_n, amivel az integrandus értéke éppen $\Lambda(A_n, \sigma_k)$: ezt $A_n^{\mathbf{x}} = A_n(x_1, \dots, x_n) = \{(c(x_l), r(x_l))\}_{l=1}^n$ választással biztosítjuk. Így az $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{tr} \cup \mathfrak{A}_{tr}$ felbontást vissza lehet húzni Ω^n-re:

$$\Theta_{int/tr} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \Omega^n : A_n(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{A}_{int/tr}\}.$$

Tehát

$$\int_{\Omega^n} \left(\int \prod_{j=1}^n V_{k,x_j}(z) \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\Theta_{int}} \Lambda(A_n^{\mathbf{x}}, \sigma_k) \, \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\Theta_{tr}} \Lambda(A_n^{\mathbf{x}}, \sigma_k) \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

A feltétel és $\Theta_{tr} \subset \Omega^n$ alapján Θ_{tr}-en

$$\int_{\Theta_{tr}} \Lambda(A_n^{\mathbf{x}}, \sigma_k) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \leq C_0(k, n, \varepsilon_0)|\Omega|^n.$$

A belső metszések L számára Θ_{int}-en $\mathfrak{A}_{int}$ definíciója alapján $L \geq P_k^{1-\varepsilon_0}$. Tehát alkalmazhatjuk a 2.47. lemmát az $L = P_k^{1-\varepsilon_0}$ választással, azaz $\mathbf{x} \in \Theta_{int}$ esetén létezik s és t, hogy

$$|c(x_s) - c(x_t)| \leq \frac{5 \cdot 4^n n(n-1)}{P_k^{1-\varepsilon_0}}.$$

A c függvény és $\mathcal{C}$ definíciója alapján $|x_l - c(x_l)| \leq \delta_{k+1}^L \leq \delta_k^L$.

$$|x_s - x_t| \leq |c(x_s) - c(x_t)| + 2\delta_k^L \leq \frac{5 \cdot 4^n n(n-1) + 2}{P_k^{1-\varepsilon_0}} \leq \frac{10 \cdot 4^n n(n-1)}{P_k^{1-\varepsilon_0}},$$

ahol az utolsó előtti egyenlőtlenség $\delta_k^L \leq L^{-1} \leq (P_k^{1-\varepsilon_0})^{-1}$ miatt teljesül. Tehát

$$\Theta_{int} \subset \left\{ \mathbf{x} \in \Omega^n : \exists s \neq t, \text{ amire } |x_s - x_t| \leq \frac{10 \cdot 4^n n(n-1)}{P_k^{1-\varepsilon_0}} \right\}.$$

Legyen $\Omega_s = \{x \in \Omega : |x - x_s| \leq \frac{10 \cdot 4^n n(n-1)}{P_k^{1-\varepsilon_0}}$. Így az unión integrálást az integrálok összegével felülről becsülve, majd a 2.48. lemmát alkalmazva

$$\int_{\Theta_{int}} \Lambda(A_n^{\mathbf{x}}, \sigma_k)\, \mathrm{d}\mathbf{x} \leq \sum_{s \neq t} \int \left[\int_{\Omega_s} \Lambda(A_n^{\mathbf{x}}, \sigma_k)\, \mathrm{d}x_s \right] \prod_{l \neq s} \mathrm{d}x_l \leq$$

$$\leq \frac{2^{n+1}}{(P_{k+1}\delta_{k+1})^{n-1}} \sum_{s \neq t} \int \left[\int_{\Omega_s} \mathrm{d}x_s \right] \prod_{l \neq s} \mathrm{d}x_l.$$

$$\int \left[\int_{\Omega_s} \mathrm{d}x_s \right] \prod_{l \neq s} \mathrm{d}x_l \leq \frac{10 \cdot 4^n n(n-1)}{P_k^{1-\varepsilon_0}} |\Omega|^{n-1},$$

így

$$\int_{\Theta_{int}} \Lambda(A_n^{\mathbf{x}}, \sigma_k)\, \mathrm{d}\mathbf{x} \leq n(n-1) \frac{2^{n+1}}{(P_{k+1}\delta_{k+1})^{n-1}} \frac{10 \cdot 4^n n(n-1)}{P_k^{1-\varepsilon_0}} |\Omega|^{n-1} \leq$$

$$\leq n^2 \frac{2 \cdot 2^n}{(P_{k+1}\delta_{k+1})^{n-1}} \frac{10 \cdot 4^n n^2}{P_k^{1-\varepsilon_0}} |\Omega|^{n-1} = 20 \cdot 4^n \frac{2^n n^4 P_k^{\varepsilon_0 - 1}}{(P_{k+1}\delta_{k+1})^{n-1}} |\Omega|^{n-1}.$$

Tehát $\Omega \subset [0,1]$ miatt $|\Omega|^n < |\Omega|^{n-1}$, és így

$$\|\Phi_k^* \mathbb{1}_\Omega\|_n^n \leq \left(C_0(k,n,\varepsilon_0) + 20 \frac{4^n 2^n n^4 P_k^{\varepsilon_0 - 1}}{(P_{k+1}\delta_{k+1})^{n-1}} \right) |\Omega|^{n-1},$$

$$\frac{\|\Phi_k^* \mathbb{1}_\Omega\|_n}{|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}} \leq \left(C_0(k,n,\varepsilon_0) + 20 \frac{4^n 2^n n^4 P_k^{\varepsilon_0 - 1}}{(P_{k+1}\delta_{k+1})^{n-1}} \right)^{\frac{1}{n}} \leq$$

$$\leq C \max \left[\left(C_0(k,n,\varepsilon_0), \frac{4^n 2^n n^4 P_k^{\varepsilon_0 - 1}}{(P_{k+1}\delta_{k+1})^{n-1}} \right) \right]^{\frac{1}{n}}.$$

A jobb oldal független Ω-tól, így készen vagyunk.

$\square$

Bizonyítás: (A 2.46. állítás bizonyítása) A 2.49. állításban a felső korláthoz két érték maximumát kell venni, ebből az egyik a 2.20. tétel 3. pontja szerinti $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ választással $\frac{2^n n^4 P_k^{-\frac{1}{2}}}{(P_{k+1}\delta_{k+1})^{(n-1)}}$. A 2.20. tétel 2.26. következménye szerint

$$P_k^{-1} \leq 2^k \prod_{j=1}^{k} N_j^{\varepsilon_j - 1}, \text{ négyzetgyököt vonva}$$

$$P_k^{-\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{k}{2}} \prod_{j=1}^{k} N_j^{\frac{\varepsilon_j - 1}{2}}, \ k+1\text{-re felírva}$$

$$P_{k+1}^{-1} \leq 2^k \prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\varepsilon_j - 1}.$$

$$\delta_{k+1}^{-1} = M_{k+1} = \prod_{j=1}^{k+1} N_j, \text{ az utolsó kettőt összeszorozva}$$

$$(P_{k+1}\delta_{k+1})^{-1} \leq 2^{k+1} \prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\varepsilon_j}, \text{ hatványozva}$$

$$(P_{k+1}\delta_{k+1})^{-(n-1)} \leq 2^{(k+1)(n-1)} \prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\varepsilon_j (n-1)}.$$

$$P_k^{-\frac{1}{2}} \cdot (P_{k+1}\delta_{k+1})^{-(n-1)} \leq 2^{\frac{k}{2}+(k+1)(n-1)} \prod_{j=1}^{k} N_j^{\varepsilon_j(n-1)+\frac{\varepsilon_j - 1}{2}} \cdot N_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}(n-1)},$$

$$\frac{2^n n^4 P_k^{-\frac{1}{2}}}{(P_{k+1}\delta_{k+1})^{(n-1)}} \leq 2^n n^4 2^{\frac{k}{2}+(k+1)(n-1)} \prod_{j=1}^{k} N_j^{\varepsilon_j(n-1)+\frac{\varepsilon_j - 1}{2}} \cdot N_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}(n-1)},$$

a kitevőket átcsoportosítva

$$\frac{2^n n^4 P_k^{-\frac{1}{2}}}{(P_{k+1}\delta_{k+1})^{(n-1)}} \leq 2^{2n-1} n^4 2^{k(n-\frac{1}{2})} \left[\prod_{j=1}^{k} N_j^{\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}\right] \cdot N_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}(n-1)}.$$

A maximum második tagja a 2.20. tétel 3. pontja szerinti $C_0(k, n, \frac{1}{2})$ érték:

$$C_0\left(k, n, \frac{1}{2}\right) = f_1(n) 2^{k(n+\frac{3}{2})} \left[\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})}\right] [V(k,n)]^{\frac{1}{2}}.$$

Ezek közül a nagyobbik n. gyöke a felső korlát:

$$\left(\frac{2^n n^4 P_k^{-\frac{1}{2}}}{(P_{k+1}\delta_{k+1})^{(n-1)}}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 4 \cdot 2^{\frac{-1}{n}} (n^4)^{\frac{1}{n}} 2^{k(1-\frac{1}{2n})} \left[\prod_{j=1}^{k} N_j^{\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{n}} \cdot N_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}(1-\frac{1}{n})} =$$

$$= 4 \cdot 2^{\frac{-1}{n}} (n^4)^{\frac{1}{n}} 2^{k(1-\frac{1}{2n})} \left[\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{n}} \left[N_{k+1}^{1-\varepsilon_{k+1}}\right]^{\frac{1}{2n}},$$

$$C_0\left(k,n,\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = f_1(n)^{\frac{1}{n}} 2^{k(1+\frac{3}{2n})} \left[\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{n}} [V(k,n)]^{\frac{1}{2n}}.$$

A két tag maximumánál biztosan nagyobb a következő felső korlát:

$$\sup_{\Omega\subset[0,1]} \frac{\|\Phi_k^* \mathbb{1}_\Omega\|_n}{|\Omega|^{\frac{n-1}{n}}} \le \hat{C}\left[\max\left(\frac{2^n n^4 P_k^{\varepsilon_0-1}}{(P_{k+1}\delta_{k+1})^{n-1}}, C_0(k,n,\varepsilon_0)\right)\right]^{\frac{1}{n}} \le$$

$$\le f_1(n)^{\frac{1}{n}} 2^{k(1+\frac{3}{2n})} \left[\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{n}} [V(k,n)]^{\frac{1}{2n}} \left[N_{k+1}^{1-\varepsilon_{k+1}}\right]^{\frac{1}{2n}}.$$

□

Az eddigieken kívül a 2.43. állítás bizonyításához még két lemmára szükség van.

2.50. Állítás. *([10]) A 2.42. definícióban definiált Φ_k, Φ_k^* operátorokra és $q_0 \ge 2$ esetén, ha Φ_k^*-ra igaz a következő leszűkített erős korlátosság:*

$$\exists \eta > 0: \ \|\Phi_k^* \mathbb{1}_\Omega\|_{q_0} \le 2^{-k\eta}|\Omega|^{\frac{q_0-1}{q_0}} \ \ \forall \Omega \subset [0,1], \tag{25}$$

akkor $p > \dfrac{q_0}{q_0-1}$ esetén egy p-től függő $\eta(p)$ konstanssal Φ_k korlátos mint $L^p[0,1] \to L^{p(q_0-1)}[-4,0]$ operátor, és a korlát $2^{-k\eta(p)}$. Azaz minden $f \in L^p[0,1]$-re $\Phi_k f \in L^{p(q_0-1)}$ és

$$\|\Phi_k f\|_{p(q_0-1)} \le 2^{-k\eta(p)}\|f\|_p. \tag{26}$$

Az állítás bizonyítása megtalálható [10]-ben. Nem használ mást $|\Phi_k^* \mathbb{1}_\Omega| \le 2$-n kívül, ami a jelen problémára lenne specifikus.

2.51. Állítás. *([10]) Ha N elég nagy, akkor a 2.20. tétel által biztosított $\{S_k\}$ halmazsorozatra $2 \le q_0 \le \dfrac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$ esetén teljesül (25).*

Bizonyítás: A bizonyítás alapja az 2.46. állítás. A domináns tag $\left[\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{n}}$, elég nagy N esetén a többi tag (7) és (8) alapján elhanyagolható, innen behelyettesítéssel adódik a $2^{-k\eta(n)}$ alakú felső korlát ha q_0 páros egész, míg q_0 köztes értékeire interpoláció alapján.

Az $\varepsilon = 0$ eset bizonyítása: Emlékeztetőül $N_k = N^{k+1}, \varepsilon_k = \dfrac{1}{k+1}$, így

$$\left[\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{1-\varepsilon_j}\right)^{-\frac{1}{2n}} \left[\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\varepsilon_j(1-\frac{1}{n})}\right] =$$

$$= N^{-\frac{(k+1)(k+2)}{4n}} N^{(k+1)(1-\frac{1}{n})} = N^{-\frac{k^2}{4n}+k(1-\frac{4}{4n})-\frac{2}{4n}+1-\frac{1}{n}}.$$

Tehát $\eta(n) = \dfrac{1}{4n} > 0$ jó felső korlát.

Az $\varepsilon > 0$ eset bizonyítása: Emlékeztetőül $N_k = N^k, \varepsilon_k = \varepsilon$, így

$$\left[\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{-\frac{1}{2}+\varepsilon_j(n-\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{j=1}^{k+1} N_j\right)^{-\frac{1}{2n}} \left[\prod_{j=1}^{k+1} N_j^{\varepsilon_j(1-\frac{1}{2n})}\right] =$$

$$= N^{-\frac{(k+1)(k+2)}{4n}} N^{\varepsilon(1-\frac{1}{2n})\frac{(k+1)(k+2)}{2}} = N^{-\frac{(k+1)(k+2)}{4n}(1-\varepsilon(2n-1))}.$$

Tehát $\dfrac{(1-\varepsilon(2n-1))}{4n}$ jó felső korlát, ha pozitív, azaz ha

$$\varepsilon < \frac{1}{2n-1}. \tag{27}$$

Így interpoláció segítségével az állításnak megfelelően minden $q_0 < \dfrac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$ esetén tudjuk a $2^{-k\eta(n)}$ alakú felső korlátot biztosítani.

□

Bizonyítás: (A 2.43. állítás bizonyítása) A 2.50. és 2.51. állításokból közvetlenül következik.

□

Az 2.41. állítás bizonyításához az eddigieken kívül két további lemmára van szükség.

2.52. Lemma. *([10]) Legyen $0 < t < 1$, $\frac{1}{2} < r, s < 2$, $\eta < \frac{t}{2}$, $|r-s| < \eta$. Ekkor minden olyan $x, y \in \mathbb{R}$ számpárra, amelyre $|x-y| < \eta$,*

$$|[x, x+rt]\Delta[y, y+st]| \leq 3\eta.$$

Bizonyítás: Az x és y szerepe szimmetrikus, így $x \leq y$ feltehető. A feltételek szerint $y - x = |x-y| < \eta < \frac{t}{2} < rt$, azaz $y < x + rt$ így a két intervallum nem lehet diszjunkt. Két eset lehetséges, $x + rt < y + st$ vagy $x + rt \geq y + st$.

Az első esetben $|[x, x+rt]\Delta[y, y+st]| = (y-x)+(y+st-x-rt) = 2(y-x)+t(s-r) \leq 3\eta$, míg a második esetben $|[x, x+rt]\Delta[y, y+st]| = (y-x)+(x+rt-y-st) = t(r-s) \leq \eta$.

□

A következő állítás azt fejezi ki, hogy egy $\mathcal{E}_k$ elég kicsi maradéktagtól eltekintve $\mathcal{M}_k$ jól becsülhető 2.42. definícióban definiált Φ_k-val.

2.53. Állítás. *([10]) Minden $1 < p < \infty$ számhoz léteznek $L(p), \eta(p) > 0$ konstansok, hogy minden f $C_c([0,1])$-beli függvényre*

1. $\mathcal{M}_k f(x) \leq 4|\Phi_k f(x)| + \mathcal{E}_k f(x)$,

2. $\Phi_k f$ *és* $\mathcal{E}_k f$ *tartója is része* $[-4,0]$*-nak, valamint*

3. $\|\mathcal{E}_k f\|_q \le C_{p,q} 2^{-k\eta(p)} \|f\|_p$.

Bizonyítás: Az $\hat{r}$ 2.44. definíciójához használt gondolatmenet alapján

$$\mathcal{M}_k f(x) \le 2\left|\int f(x+\hat{r}_f(x)y)\sigma_k(y)\,\mathrm{d}y\right|,$$

$\mathrm{d}y$-ról $\mathrm{d}z = \mathrm{d}(x+\hat{r}(x)y)$-ra való áttéréssel $\hat{r} \le 2$ miatt

$$\mathcal{M}_k f(x) \le 4\left|\int f(z)\sigma_k\left(\frac{z-x}{\hat{r}(x)}\right)\mathrm{d}z\right| =$$

$$= 4\left|\int f(z)\left[\sigma_k\left(\frac{z-x}{\hat{r}(x)}\right) - \sigma_k\left(\frac{z-c(x)}{r(x)}\right) + \sigma_k\left(\frac{z-c(x)}{r(x)}\right)\right]\mathrm{d}z\right| \le$$

$$\le 4\left|\int f(z)\sigma_k\left(\frac{z-c(x)}{r(x)}\right)\mathrm{d}z\right| + 4\left|\int f(z)\left[\sigma_k\left(\frac{z-x}{\hat{r}(x)}\right) - \sigma_k\left(\frac{z-c(x)}{r(x)}\right)\right]\mathrm{d}z\right| =$$

$$= 4|\Phi_k f(x)| + \mathcal{E}_k f(x)$$

$$\text{az } \mathcal{E}_k f(x) = 4\left|\int f(z)\left[\sigma_k\left(\frac{z-x}{\hat{r}(x)}\right) - \sigma_k\left(\frac{z-c(x)}{r(x)}\right)\right]\mathrm{d}z\right| \text{ választással.}$$

Az $\mathcal{M}_k f$ tartója $[-4,0]$-ban van, ezért $\Phi_k f$ és $\mathcal{E}_k f$ tartója is. Azt kell belátni, hogy $\mathcal{E}_k f$ tényleg a maradéktag szerepét játssza, azaz teljesül rá a kívánt korlátosság. Mivel $\sigma_k = \phi_{k+1} - \phi_k$, így

$$|\mathcal{E}_k f(x)| \le$$

$$\le 4\left|\int f(z)\left[\phi_{k+1}\left(\frac{z-x}{\hat{r}(x)}\right) - \phi_{k+1}\left(\frac{z-c(x)}{r(x)}\right)\right]\mathrm{d}z\right| +$$

$$+ 4\left|\int f(z)\left[\phi_k\left(\frac{z-x}{\hat{r}(x)}\right) - \phi_k\left(\frac{z-c(x)}{r(x)}\right)\right]\mathrm{d}z\right|.$$

Pontonként fogunk becsülni, tehát rögzítsük le $x \in [-4,0]$-t, és legyen i olyan, hogy $c(x) = c_i \in \mathcal{C}$, valamint j olyan, hogy $r(x) = r_j \in \mathcal{R}$. A két összeadandót külön-külön, de ugyanazzal a módszerrel tudjuk becsülni. A 1.26. lemma-beli Hölder-egyenlőtlenség közvetlen alkalmazásával a (p,p') Hölder-konjugált kitevő-párra

$$\left|\int f(z)\left[\phi_{k+1}\left(\frac{z-x}{\hat{r}(x)}\right) - \phi_{k+1}\left(\frac{z-c(x)}{r(x)}\right)\right]\mathrm{d}z\right| \le \|f\|_p \left\|\phi_{k+1}\left(\frac{\cdot - x}{\hat{r}(x)}\right) - \phi_{k+1}\left(\frac{\cdot - c_i}{r_j}\right)\right\|_{p'}.$$

Továbbá $\phi_{k+1} = \dfrac{1}{P_{k+1}\delta_{k+1}} \displaystyle\sum_{m=1}^{P_{k+1}} \mathbb{1}_{I_{k+1}(\mathbf{i}_m)}$, ahol $\mathbf{i}_m$ végigfut azokon a $\mathbf{i} \in \mathbb{I}_{k+1}$ multiindexeken, amikre $X_{k+1}(\mathbf{i}) = 1$.

$$\mathbb{1}_{I_{k+1}(\mathbf{i}_m)}\left(\frac{\cdot - x}{\hat{r}(x)}\right) = \mathbb{1}_{x+\hat{r}(x)I_{k+1}(\mathbf{i}_m)}, \text{ így}$$

$$\left\|\phi_{k+1}\left(\frac{\cdot - x}{\hat{r}(x)}\right) - \phi_{k+1}\left(\frac{\cdot - c_i}{r_j(x)}\right)\right\|_{p'} = \frac{1}{P_{k+1}\delta_{k+1}}\left\|\sum_{m=1}^{P_{k+1}}\left(\mathbb{1}_{x+\hat{r}(x)I_{k+1}(\mathbf{i}_m)} - \mathbb{1}_{c_i+r_jI_{k+1}(\mathbf{i}_m)}\right)\right\|_{p'}.$$

Az összeg abszolút értéke mindenütt legfeljebb kettő, hiszen diszjunkt intervallumok két különböző transzformáltjának karakterisztikus függvényeit adjuk össze. Így $\|\ast\|_{p'} \le$

$2^{\frac{1}{p'}}\|*\|_1^{\frac{1}{p'}}$. Háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva, és azt, hogy karakterisztikus függvény integrálja a halmaz Lebesgue-mértéke,

$$\left\|\sum_{m=1}^{P_{k+1}}\left(\mathbb{1}_{x+\hat{r}(x)I_{k+1}(\mathbf{i}_m)}-\mathbb{1}_{c_i+r_jI_{k+1}(\mathbf{i}_m)}\right)\right\|_{p'}\leq$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{m=1}^{P_{k+1}}|[x+\hat{r}(x)I_{k+1}(\mathbf{i}_m)]\Delta[c_i+r_jI_{k+1}(\mathbf{i}_m)]|\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

A szimmetrikus differencia mértékére a 2.52. lemmát alkalmazhatjuk. A c_i, r_j értékek definíciója alapján $|x-c_i|\leq\delta_{k+1}^L/2$, $|\hat{r}(x)-r_j|\leq\delta_{k+1}^L/2$, $t=|I_{k+1}(\mathbf{i}_m)|=\delta_{k+1}$. A két intervallum bal végpontja $x+\hat{r}(x)\alpha_{k+1}(I_{k+1}(\mathbf{i}_m))$, illetve $c_i+r_j\alpha_{k+1}(I_{k+1}(\mathbf{i}_m))$, ezek távolsága legfeljebb $\delta_{k+1}^L/2+\delta_{k+1}^L/2\cdot 2\leq 2\delta_{k+1}^L =: \eta_0$. Ha L elegendően nagy, $4\delta_{k+1}^L=2\eta_0<t=\delta_{k+1}$. Így a lemma minden feltétele teljesül, tehát a szimmetrikus differencia Lebesgue-mértéke felülről becsülhető $3\eta_0=6\delta_{k+1}^L$-nel. Az eddigiek alapján

$$\left\|\phi_{k+1}\left(\frac{\cdot-x}{\hat{r}(x)}\right)-\phi_{k+1}\left(\frac{\cdot-c_i}{r_j(x)}\right)\right\|_{p'}\leq\frac{2^{\frac{1}{p'}}}{P_{k+1}\delta_{k+1}}\left(P_{k+1}6\delta_{k+1}^L\right)^{\frac{1}{p'}}=12^{\frac{1}{p'}}\delta_{k+1}^{\frac{L}{p'}-1}\cdot P_{k+1}^{-\frac{1}{p}}.$$

Itt az utolsó egyenlőség azért teljesül, mert p és p' Hölder-konjugált kitevőpárok, így $\frac{1}{p'}-1=-\frac{1}{p}$. $P_{k+1}^{-\frac{1}{p}}\leq 1$, és $\delta_{k+1}=\prod_{j=1}^{k+1}N_j^{-1}\leq 2^{-(k+1)}$, így $\delta_{k+1}^{\frac{L}{p'}-1}\leq 2^{-(k+1)(\frac{L}{p'}-1)}$. Rögzített p-re tudjuk L-t olyan nagyra választani, hogy az $\eta=\frac{L}{p'}-1$ választás eleget tesz az $\eta>0$ feltételnek. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\left\|\phi_{k+1}\left(\frac{\cdot-x}{\hat{r}(x)}\right)-\phi_{k+1}\left(\frac{\cdot-c_i}{r_j(x)}\right)\right\|_{p'}\leq C2^{-(k+1)\eta},$$

$$\left\|\phi_{k}\left(\frac{\cdot-x}{\hat{r}(x)}\right)-\phi_{k}\left(\frac{\cdot-c_i}{r_j(x)}\right)\right\|_{p'}\leq C2^{-k\eta},$$

$$|\mathcal{E}_kf(x)|\leq 4\|f\|_p\left(C2^{-(k+1)\eta}+C2^{-k\eta}\right)\leq C_1\|f\|_p2^{-k\eta}.$$

Az $\mathcal{E}_kf$ tartója része $[-4,0]$-nak, így

$$\|\mathcal{E}_kf\|_q\leq\left(\int\left(C_1\|f\|_p2^{-k\eta}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq C_{p,q}\|f\|_p2^{-k\eta}.$$

Ezzel az állítást beláttuk.

□

BIZONYÍTÁS: (A 2.41. állítás bizonyítása) A bizonyítás a 2.53. és 2.43. állításokra épül. A 2.53. állítás szerint $2\leq q_0\leq\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$ esetén

$$\|\mathcal{E}_kf\|_{p(q_0-1)}\leq C_{p,p(q_0-1)}2^{-k\eta(p)}\|f\|_p. \tag{28}$$

A 2.43. állítás szerint

$$\|\Phi_kf\|_{p(q_0-1)}\leq 2^{-k\eta(p)}\|f\|_p. \tag{29}$$

Szintén a 2.53. állítás alapján

$$\|\mathcal{M}_k f\|_{p(q_0-1)} \leq 4\|\Phi_k f\|_{p(q_0-1)} + \|\mathcal{E}_k f\|_{p(q_0-1)},$$

(28) és (29) szerint

$$\|\mathcal{M}_k f\|_{p(q_0-1)} \leq (4 + C_{p,p(q_0-1)})2^{-k\eta(p)}\|f\|_p = C_{p,q_0}2^{-k\eta(p)}\|f\|_p$$

a C_{p,q_0} konstans megfelelő megválasztásával.

□

Az 2.39. lemma bizonyításához az eddigieken kívül még három apró lemmára van szükség.

2.54. Jelölés. Vezessük be az $\mathcal{N}f(x) = \sup_{1<r<2} A_{r,1}f(x)$ jelölést.

2.55. Lemma. *([10]) Az 1.21 és 2.40. definíciók, valamint a 2.54. jelölés szerint*

$$\mathcal{M}f \leq \mathcal{N}f + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k|f|.$$

Bizonyítás: A háromszög-egyenlőtlenségből közvetlenül következik $\mathcal{M} = A_{r,1} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$ miatt.

□

2.56. Lemma. *([10]) Tetszőleges p, q párra, ha p Hölder-konjugáltját p'-vel jelöljük, akkor*

$$\|\mathcal{N}f\|_q \leq 4^{\frac{1}{q}} C_{p'}\|f\|_p.$$

Bizonyítás: Az $\mathcal{N}f$ tartójának átmérője legfeljebb 4, így $\|\mathcal{N}f\|_q \leq 4^{\frac{1}{q}}\|\mathcal{N}f\|_\infty$. Az $\mathcal{N}$ és $A_{r,1}$ 1.7-beli definíciója alapján

$$\|\mathcal{N}f\|_\infty = \sup_x \sup_{1<r<2} \int |f(x+ry)||\phi_1(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Itt ϕ_1-ről azt tudjuk, hogy tartója része $[1,2]$-nek, és $|\phi_1(x)| \leq 2$, hiszen két karakterisztikus függvény különbsége. A Hölder-egyenlőtlenség alapján

$$\sup_x \sup_{1<r<2} \int |f(x+ry)||\phi_1(y)|\,\mathrm{d}y = \sup_x \sup_{1<r<2} \int |f(z)| \frac{\phi_1\left(\frac{z-x}{r}\right)}{r}\,\mathrm{d}z \leq$$

$$\leq \|f\|_p \sup_x \sup_{1<r<2} \left\| \frac{\phi_1\left(\frac{\cdot-x}{r}\right)}{r} \right\|_{p'} \leq C_{p'}\|f\|_p.$$

□

2.57. Lemma. *A Hölder-egyenlőtlenségből következik, hogy $1 < p < q$ esetén*

$$\|f\|_p \leq \lambda(\operatorname{supp} f)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_q,$$

ahol $\lambda(\cdot)$ jelöli a Lebesgue-mértéket.

Bizonyítás: (A 2.39. állítás bizonyítása) A 2.41. állítás alapján $\frac{q_0}{q_0-1} < p$ és $2 \leq q_0 \leq \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$ teljesülése esetén

$$\|\mathcal{M}_k f\|_{(q_0-1)p} \leq C_{p,q_0} 2^{-k\eta(p)}\|f\|_p. \tag{30}$$

Az $\varepsilon = 0$ esetben legyen $1 < p, q$ tetszőleges. Ekkor q_0 választható olyan nagynak, hogy $q_0 > q$ és $\frac{q_0}{q_0-1} < p$ is teljesül, így persze $(q_0-1)p > q_0 > q$ is teljesül. Mivel $\operatorname{supp}\mathcal{M}_k f \subset [-4,0]$, így a 2.57. lemmát a q és $p(q_0-1)$ kitevőkre alkalmazva

$$\|\mathcal{M}_k f\|_q \leq 4^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p(q_0-1)}}\|\mathcal{M}_k f\|_{p(q_0-1)}. \tag{31}$$

A (30) és (31) egyenlőtlenségekből együtt azt kapjuk, hogy tetszőleges $1 < p, q$ esetén

$$\|\mathcal{M}_k f\|_q \leq C_{p,q} 2^{-k\eta(p)}\|f\|_p.$$

Ezt k-ban összegezve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k f\|_q \leq C_{p,q}\|f\|_p,$$

ahol a $C_{p,q}$ konstansba beépítettem $\eta(p)$ értékét is. Az 2.55. lemma alapján tehát $\mathcal{M}$ korlátos, mint $L^p[0,1] \to L^q[-4,0]$ operátor.

Az $\varepsilon > 0$ esetben p, q legyen tetszőleges, amelyekre

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} < p, \text{ és } 1 < q < \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}p.$$

Ekkor

$$p' = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} < \frac{1+2\varepsilon}{2\varepsilon}.$$

Legyen q_0 olyan, hogy

$$p' < q_0 < \frac{1+2\varepsilon}{2\varepsilon} \text{ és } q < (q_0-1)p.$$

Ez megtehető, hiszen q választása szerint $q < \left(\frac{1+2\varepsilon}{2\varepsilon} - 1\right)p$. Ekkor a q és $(q_0-1)p$ kitevőkre alkalmazva a 2.57. lemmát, kapjuk (31)-t. Tehát

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} < p \text{ és } 1 < q < \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}p$$

esetén

$$\|\mathcal{M}_k f\|_q \leq C_{p,q} 2^{-k\eta(p)}\|f\|_p,$$

hiszen q_0 tetszőlegesen közel választható $\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$-hoz. Ismét k-ban összegezve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k f\|_q \leq C_{p,q}\|f\|_p,$$

ahol a $C_{p,q}$ konstansba beépítettem $\eta(p)$ értékét is. Az 2.55. lemma alapján tehát $\mathcal{M}$ korlátos, mint $L^p[0,1] \to L^q[-4,0]$ operátor.

Ha létezik μ, és így a hozzá tartozó $\mathfrak{M}$, akkor a fentiekből közvetlenül rá is igaz a korlátosság.

$\square$

Mindebből a következő lemmával kiegészítve már közvetlenül következik a 1.18. tétel 5. pontja. A lemma $p \leq q$ esetén igaz, így $\varepsilon < \dfrac{1}{3}$ szükséges ahhoz, hogy legyenek az összes feltételt kielégítő p, q kitevők. A következő lemma biztosította, hogy a maximáloperátorokat elég legyen $[0,1]$-en értelmezett függvényekre vizsgálni:

2.58. Lemma. *([10]) Ha minden f $L^p([0,1])$-beli függvényre adott $p \leq q$ és $0 < A$ esetén*

$$\|\mathcal{M}f\|_q \leq A\|f\|_p,$$

akkor minden f $L^p(\mathbb{R})$-beli függvényre ugyanezen p, q. és A értékek mellett

$$\|\mathcal{M}f\|_q \leq A4^{\frac{q-1}{q}}\|f\|_p.$$

Bizonyítás: Mivel $f = \lim_{R\to\infty} f \cdot \chi_{[-R,R]}$, ezért elég kompakt tartójú függvényekre belátni az állítást. Legyen $\mathrm{supp}(f) \subset [-R, R]$. Ekkor f felírható $f = \sum_{i=-R}^{R-1} f_i$ alakban, ahol $\mathrm{supp}(f_i) \subset [i, i+1]$. Mivel $S_0 \subset [1,2]$ és $1 \leq r \leq 2$, ezért az $x \mapsto f_i(x+ry) : y \in S$ függvény tartója része $[i-4, i]$-nek, és így $\mathrm{supp}(\mathcal{M}f_i) \subset [i-4, i]$. Szükségképpen a számegyenes minden pontjában legfeljebb 4 darab $\mathcal{M}f_i$ alakú függvény vehet fel $\neq 0$ értéket.

$$\mathcal{M}(\sum_i f_i) =$$

$$= \sup \int |\sum_i f_i(x+ry)| \,\mathrm{d}y \leq \sup \sum_i \int |f_i(x+ry)| \,\mathrm{d}y \leq \sum_i \sup \int f_i(x+ry) \,\mathrm{d}y =$$

$$= \sum_i \mathcal{M}f_i.$$

$$\left\|\sum_i \mathcal{M}f_i\right\|_q^q = \int \left(\sum_i \mathcal{M}f_i\right)^q \leq 4^{q-1} \sum_i \int (\mathcal{M}f_i)^q = 4^{q-1} \sum_i \|\mathcal{M}f_i\|_q^q,$$

hiszen pontonként azt használjuk, hogy $(a+b+c+d)^q \leq 4^{q-1}(a^q + b^q + c^q + d^q)$ a hatványközepek közötti egyenlőtlenség alapján. Tehát f_i-re alkalmazva a feltevést

$$\|\mathcal{M}f\|_q^q \leq 4^{q-1} \sum_i \|\mathcal{M}f_i\|_q^q \leq 4^{q-1} \sum_i A^q \|f_i\|_p^q.$$

Az f_i függvények tartója diszjunkt, ezért $\|f\|_p^p = \sum_i \|f_i\|_p^p$. Másrészt $\dfrac{q}{p} \geq 1$ esetén

$$\sum_i (\|f_i\|_p^p)^{\frac{q}{p}} \leq \left(\sum_i \|f_i\|_p^p\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Tehát
$$\sum_i \|f_i\|_p^q = \sum_i (\|f_i\|_p^p)^{\frac{q}{p}} \le \left(\|f\|_p^p\right)^{\frac{q}{p}} = \|f\|_p^q.$$
Összegezve
$$\|\mathcal{M}f\|_q^q \le 4^{q-1}A^q\|f\|_p^q, \text{ innen}$$
$$\|\mathcal{M}f\|_q \le 4^{\frac{q-1}{q}}A\|f\|_p.$$
□

2.3. A 2.23. tétel bizonyítása

A bizonyításban közvetlenül nem is az $\mathcal{M}$, $\mathfrak{M}$ operátorok korlátosságát fogjuk felhasználni, hanem $\mathcal{M}_k$ korlátosságát a 2.41. állítás szerint. A bizonyítás fontosabb pontjait foglalom össze, a számolásokat nem részletezem, ahol nem tartalmaznak érdekes gondolatot. A bizonyítás alapvetően két dologra épít, egyrészt egyenlőtlenségek közötti interpolációra különböző kitevők esetén, másrészt az intervallumok előállítására diadikus intervallumok uniójaként. Elegendő $\tilde{\mathcal{M}}^a$-ra bizonyítani, μ létezése esetén az egyenlőtlenségek automatikusan teljesülnek $\tilde{\mathfrak{M}}^a$-ra is.

Az f függvény összegre bontásához szükséges a következő definíció:

2.59. Definíció. ([10]) Jelölje $\mathcal{D}_s$ a 2^{-s} élhosszú diadikus kockák által generált σ-algebrát. Emellett legyen $\Delta_s f = E(f|\mathcal{D}_{s+1}) - E(f|\mathcal{D}_s)$.

2.60. Megjegyzés. A jelen egydimenziós esetben a feltételes várható érték definíciója szerint ha $E(f|\mathcal{D}_s) = 0$, akkor f integrálja minden $\mathcal{D}_s$-beli 2^{-s} hosszú diadikus intervallumon 0.

A 2.59. definícióból $f = \lim_{m\to\infty} E(f|\mathcal{D}_m)$ miatt közvetlenül következik, hogy f felírható a következő, Haar-felbontásnak nevezett alakban:

2.61. Lemma. *([10]) Minden $m \in \mathbb{Z}$ esetén*
$$f = E(f|\mathcal{D}_m) + \sum_{s=m}^{\infty} E(f|\mathcal{D}_{s+1}) - E(f|\mathcal{D}_s) = E(f|\mathcal{D}_m) + \sum_{s=m}^{\infty} \Delta_s f.$$

A 2.61. lemma alapján minden $m \in \mathbb{Z}$ esetén
$$A_{r,k}f = A_{r,k}E(f|\mathcal{D}_m) + \sum_{s=m}^{\infty} A_{r,k}\Delta_s f.$$
A 1.10. definíció alapján $\tilde{\mathcal{M}}^a f = \sup_{r>0}\sup_{k\ge1} r^a A_{r,k} f$. Minden $0 < r$ esetén van olyan $m \in \mathbb{Z}$, amivel $1 \le r2^m \le 2$, így $\tilde{\mathcal{M}}^a f$ a következő alakba írható:
$$\tilde{\mathcal{M}}^a f = \sup_{m\in\mathbb{Z}} \sup_{\substack{k\ge1\\1\le r2^m\le2}} r^a A_{r,k} f = \sup_{m\in\mathbb{Z}} \sup_{\substack{k\ge1\\1\le r2^m\le2}} r^a \left[|A_{r,k}E(f|\mathcal{D}_m)| + \left|\sum_{s=m}^{\infty} A_{r,k}\Delta_s f\right|\right].$$
Így
$$\tilde{\mathcal{M}}^a f \le \sup_{m\in\mathbb{Z}} \sup_{\substack{k\ge1\\1\le r2^m\le2}} r^a |A_{r,k}E(f|\mathcal{D}_m)| + \sup_{m\in\mathbb{Z}} \sup_{\substack{k\ge1\\1\le r2^m\le2}} r^a \left|\sum_{s=m}^{\infty} A_{r,k}\Delta_s f\right|. \tag{32}$$

Az összeg két tagját külön tudjuk becsülni. Az első tag becslése a következő két lemmából adódik, amelyek kimondásához először bevezetünk egy jelölést.

2.62. Jelölés. ([10])
$$f_a^*(x) = \sup_{r>0} r^{a-1} \int_{|y|<r} |f(x-y)|\, dy.$$

2.63. Lemma. *([10]) Minden $0 \leq a < 1$ esetén van egy C_a konstans, hogy minden $f \in L^p(\mathbb{R})$ esetén*
$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} \sup_{\substack{k\geq 1 \\ 1\leq r2^m \leq 2}} r^a |A_{r,k}E(f|\mathcal{D}_m)| \leq C_a f_a^*(x).$$

A bizonyítás kulcsa, hogy a diadikus intervallumokra bontás miatt $E(f|\mathcal{D}_m)$ lépcsősfüggvény, aminek ráadásul az értékkészletének elemszáma is egy konstanssal korlátozható.

2.64. Lemma. *([10]) Legyenek $1 < p \leq q$, hozzájuk $a = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Ekkor az $f \mapsto f_a^*$ operátor korlátos, mint $L^p(\mathbb{R}) \to L^q(\mathbb{R})$ operátor.*

A bizonyítás egyenes következménye a következő Young-egyenlőtlenség-variációnak, amelyhez még egy definícióra szükségünk van.

2.65. Definíció. ([6]) Jelölje $L^{p,w}(\mathbb{R})$ azt a *gyenge L^p* függvénycsaládot, amelynek elemeire van olyan C konstans, hogy minden $t > 0$-ra
$$\lambda(\{x : f(x) > t\}) \leq \frac{C^p}{t^p}.$$

2.66. Lemma. *([6]) Legyenek $1 < p, q, r$ olyanok, amelyekre*
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1. \tag{33}$$
Ha $f \in L^p(\mathbb{R})$ és $g \in L^q(\mathbb{R})$, és $*$ jelöli a konvolúciót, akkor $f * g \in L^r(\mathbb{R})$, és
$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$
Az egyenlőtlenség úgy is igaz, ha $g \notin L^q(\mathbb{R})$, de $g \in L^{q,w}(\mathbb{R})$ teljesül, ekkor van egy olyan C konstans, hogy
$$\|f * g\|_r \leq C\|f\|_p.$$

Bizonyítás: (Az 2.64. lemma bizonyítása) A 2.66. lemmát a következő szereposztással használjuk:
$$f \in L^p(\mathbb{R}),\ r = q,\ q = \frac{1}{1-a},\ g = |\cdot|^{a-1} \in L^{q,w}(\mathbb{R}).$$
Így $a = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ miatt
$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + (1-a),$$
azaz teljesülnek a 2.66. lemma feltételei. Tehát
$$\|f * |\cdot|^{a-1}\|_q \leq C\|f\|_p,$$

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| \cdot |x-z|^{a-1} \,\mathrm{d}z \right\|_q \leq C\|f\|_p.$$

Ha $p = q$, akkor alkalmazhatjuk a Hardy-Littlewood maximáloperátor korlátosságát, míg $p < q$ esetén

$$f_a^*(x) = \sup_{r>0} r^{a-1} \int_{|y|<r} |f(x-y)| \,\mathrm{d}y = \sup_{r>0} r^{a-1} \int_{|x-z|<r} |f(z)| \,\mathrm{d}z \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| \cdot |x-z|^{a-1} \,\mathrm{d}z,$$

így készen vagyunk.

□

2.67. Lemma. *([10]) Az (32) első tagjának q-normája felülről becsülhető $C\|f\|_p$-vel.*

A (32) második tagjának becslése összetettebb. Egyrészt külön kell választani a $q \leq 2$ és $q > 2$ esetet, másrészt a Young-egyenlőtlenség diszkrét változata mellett használja az általánosított Minkowski integrál-egyenlőtlenséget és a Littlewood-Paley elmélet egy állítását is.

2.68. Lemma. *([12]) Az általánosított Minkowski integrál-egyenlőtlenség a következőket mondja ki. Ha h mérhető és a következő egyenlőtlenség mindkét oldala értelmes, akkor*

$$\left[\int \left| \int h(x,y) \,\mathrm{d}y \right|^p \,\mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int \left[\int |h(x,y)|^p \,\mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}y.$$

Itt felhívnám a figyelmet az integrálok sorrendjének felcserélődésére. Az állítás analógja igaz diszkrét esetben is, azaz

$$\left[\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left| \int h_m(y) \,\mathrm{d}y \right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int \left[\sum_{m\in\mathbb{Z}} |h_m(y)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}y.$$

2.69. Lemma. *([14]) Legyen $1 < p < 2$ esetén $f \in L^p(\mathbb{R})$. Ha a $h_m f$ függvények ortogonálisak és $hf = \sum_{m\in\mathbb{Z}} h_m f$, akkor minden $1 < p < 2$ esetén létezik egy C_p konstans, amivel*

$$\left\| \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |h_m f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq C_p \|f\|_p.$$

2.70. Lemma. *([10]) Minden $f \in L^p(\mathbb{R})$-re $1 < p < 2$ esetén*

$$\left[\sum_{m\in\mathbb{Z}} \|\Delta_m f\|_p^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq C_p \|f\|_p.$$

Bizonyítás: A 2.68. lemmát a $h_m(y) = \Delta_m f(y)^p$ szereposztással a $\dfrac{2}{p}$ kitevőre felírva

$$\left[\sum_{m\in\mathbb{Z}} \left| \int (\Delta_m f)^p(y) \,\mathrm{d}y \right|^{\frac{2}{p}} \right]^{\frac{p}{2}} \leq \int \left[\sum_{m\in\mathbb{Z}} |(\Delta_m f)^p(y)|^{\frac{2}{p}} \right]^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}y.$$

Így az egyenlőtlenséget $\frac{1}{p}$. hatványra emelve

$$\left[\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\int(\Delta_m f)^p(y)\,\mathrm{d}y\right|^{\frac{2}{p}}\right]^{\frac{1}{2}} \le \left(\int\left(\left[\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\Delta_m f(y)|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right)^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\left[\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\Delta_m f(y)|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_p.$$

$$\left[\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\int(\Delta_m f)^p(y)\,\mathrm{d}y\right|^{\frac{2}{p}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{m\in\mathbb{Z}}\|\Delta_m f\|_p^2\right]^{\frac{1}{2}}, \text{ így}$$

$$\left[\sum_{m\in\mathbb{Z}}\|\Delta_m f\|_p^2\right]^{\frac{1}{2}} \le \left\|\left[\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\Delta_m f(y)|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_p. \tag{34}$$

A 2.69. lemmát a Δ_m operátorokra alkalmazva (34) felhasználásával

$$\left[\sum_{m\in\mathbb{Z}}\|\Delta_m f\|_p^2\right]^{\frac{1}{2}} \le \left\|\left[\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\Delta_m f(y)|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_p \le C_p\|f\|_p.$$

□

Fontos módszer az interpoláció, ami alatt olyan tételek családját értem, hogy ha egy egyenlőtlenség igaz két kitevőre, akkor igaz a közbülső kitevőkre is. Vagy ha igaz két kitevőpárra, akkor igaz a közbülső (kollineáris hármast alkotó) kitevőpárokra is. (Az $\left(\frac{1}{p_i}, \frac{1}{q_i}\right)$ pároknak kell kollineárisaknak lennie.)

A következő definíció segít abban, hogy tetszőleges r értékről egy diadikus szorzótényezővel áttérhessünk 1 és 2 közé.

2.71. Definíció. ([10]) Jelölje $f^{(m)}$ azt a függvényt, amelyre $f^{(m)}(x) = f(2^{-m}\cdot x)$.

A feltételes várható érték definíciója szerint $E(\Delta_m f|\mathcal{D}_m) = 0$, így a 2.71. definíció alapján $E((\Delta_{s+m}f)^{(m)}|\mathcal{D}_s) = 0$. Megfelelő összegrebontás után ez mutatja, hogy érdemes vizsgálni minden $s \ge 0$ esetén az $E(f|\mathcal{D}_s) = 0$ esetet.

2.72. Állítás. *([10]) Legyen η olyan, hogy minden $0 \le s$ esetén minden $f \in L^p(\mathbb{R})$-re amelyre $E(f|\mathcal{D}_s) = 0$, teljesül*

$$\|\mathcal{M}_k f\|_q \le C2^{-\eta k}\|f\|_p.$$

Ekkor minden m egész számra és $f \in L^p(\mathbb{R})$ függvényre

$$\left\|\sup_{\substack{k\ge 1\\ 1\le r2^m\le 2}}|A_{r,k}(\Delta_{s+m}f)|\right\|_q \le C2^{ma-\eta\sqrt{s}}\|\Delta_{s+m}f\|_p.$$

A bizonyításhoz a következő lemmára van szükség:

2.73. Lemma. *([10]) Legyen $1 < p, q, \eta_0$ olyan, hogy minden $[0,1]$ tartójú f függvényre*

$$\|\mathcal{M}_k f\|_q \le C2^{-\eta_0 k}\|f\|_p.$$

Ekkor létezik $\eta > 0$, hogy minden $0 \le s$ esetén minden $f \in L^p(\mathbb{R})$ amelyre $E(f|\mathcal{D}_s) = 0$, teljesül

$$\|\mathcal{M}f\|_q \le C2^{-\eta\sqrt{s}}\|f\|_p.$$

Ennek bizonyításában a kulcs, hogy egy tetszőleges intervallum nagyrészt olyan diadikus intervallumok uniójaként írható fel, amin az integrál 0 az $E(f|\mathcal{D}_s) = 0$ feltevés szerint.

2.74. Lemma. *([10]) Az (32) második tagjának q-normája $2 \leq q$ esetén felülről becsülhető $C\|f\|_p$-vel.*

A $q < 2$ esethez még az eddigiek mellett további definíciókra és lemmákra van szükség:

2.75. Definíció. ([10]) Jelölje $C(p, q, R)$ azt a legkisebb valós számot, amivel minden $f \in L^p(\mathbb{R})$ függvényre

$$\left\| \sup_{-R \leq m \leq R} \sup_{1 \leq r \leq 2} \sup_{1 \leq k} 2^{-ma} |A_{r,k} f| \right\|_q \leq C(p, q, R) \cdot \|f\|_p.$$

2.76. Lemma. *([10]) A 2.75. definícióban definiált $C(p, q, R)$ konstans jóldefiniált, azaz mindig egy véges szám.*

Az eddigiek alapján a következő lemmát kell belátni:

2.77. Lemma. *([10]) A $C(p, q, R)$ konstans választható R-től függetlennek is, azaz R-ben egyenletesen korlátos.*

A bizonyítás alapja ismét interpoláció, de most kitevőpárokra.

2.78. Lemma. *([10]) Az (32) második tagjának q-normája $2 > q$ esetén felülről becsülhető $C\|f\|_p$-vel.*

2.4. A 1.18. tétel 2. és 3. pontjának bizonyítása

2.79. Lemma. *([10]) Az S_k halmazok konstrukciójánál használt 2.1. definíció szerinti jelöléseket használva egyrészt*

1. *$dim_H(S) \leq \liminf_{k \to \infty} \log(P_k)/\log(M_k)$, másrészt*
2. *$dim_H(S) \geq \liminf_{k \to \infty} \log(P_k/N_k)/\log(M_{k-1})$.*

Bizonyítás:

1. Az S_k halmazt fedi P_k darab M_k^{-1} átmérőjű halmaz (az őt alkotó intervallumok), és $M_k^{-1} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$, így az alsó box dimenzió 1.23. definíciójából közvetlenül

$$\underline{\dim}_B(S) \leq \liminf_{k \to \infty} \log(P_k)/\log(M_k).$$

   Másrészt a 1.24. lemma szerint $\dim_H(S) \leq \underline{\dim}_B(S)$.

2. A 1.25. lemmában kimondott Frostman lemmát fogjuk használni, tehát definiálni kell egy megfelelő ν mértéket S-en. Ha $\mathbf{i}$ egy k. generációs multiindex, legyen $w(\mathbf{i}) = 0$, ha $X_k(\mathbf{i}) = 0$, különben P_k^{-1}. Egy $F \subset [1, 2]$ halmazra legyen

$$\nu(F) = \liminf_{j \to \infty} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} w(\mathbf{i}_l) : F \subset \bigcup I_{|\mathbf{i}_l|}(\mathbf{i}), \, \mathbf{i}_l \in \bigcup_{k \geq j} \mathbb{I}_k \right\}.$$

Így ν Borel-mérték, amire $\nu(S) > 0$. Elegendő $F \subset [1,2]$ intervallumokra belátni, hogy $\nu(F) \leq C|F|^s$ ahhoz, hogy a $dim_H S \geq s$ állítást belássuk.

Legyen $s < \liminf_{k\to\infty} \log(P_k/N_k)/\log(M_{k-1})$ tetszőleges rögzített. Ha k elég nagy, akkor $s < \log(P_k/N_k)/\log(M_{k-1})$, azaz átrendezve $N_k M_{k-1}^s / P_k < 1$.

$$\lim_{j\to\infty} \inf \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} w(\mathbf{i}_l) : F \subset \bigcup I_{|\mathbf{i}_l|}(\mathbf{i}), \, \mathbf{i}_l \in \bigcup_{k\geq j} \mathbb{I}_k \right\} = \sup\inf\left\{\dots\right\},$$

így $\delta_k < |F| < \delta_{k-1}$ esetén elegendő azokra a fedésekre infimumot venni, amelyekben $\mathbb{I}_k$ elemeivel fedünk. Ekkor F biztosan lefedhető min $\left[2N_k, \frac{|F|}{\delta_k}\right]$ darab elemével $\mathbb{I}_k$-nak, tehát

$$\nu(F) \leq P_k^{-1} \min\left[2N_k, \frac{|F|}{\delta_k}\right] \leq P_k^{-1}(2N_k)^{1-s}\left(\frac{|F|}{\delta_k}\right)^s, \text{ így } \frac{\nu(F)}{|F|^s} \leq P_k^{-1}(2N_k)^{1-s}\delta_k^{-s}.$$

Ha $P_k^{-1}(2N_k)^{1-s}\delta_k^{-s}$ k-ban egyenletesen korlátos, akkor minden F intervallumra $\frac{\nu(F)}{|F|^s} \leq C_s$, azaz a Frostman lemma alapján $\dim_H F \geq s$.

$$P_k^{-1}(2N_k)^{1-s}\delta_k^{-s} = 2^{1-s}P_k^{-1}N_k N_k^{-s}\delta_k^{-s} = 2^{1-s}(N_k M_{k-1}^s P_k^{-1}) M_k^{-s}\delta_k^{-s} \leq 2^{1-s}.$$

Az utolsó egyenlőtlenséghez egyrészt az $N_k M_{k-1}^s/P_k < 1$, másrészt az $M_k\delta_k = 1$ összefüggést használtuk.

□

2.80. Állítás. *([10]) Ha N elég nagy, akkor a 2.20. tétel által biztosított $\{S_k\}$ halmazsorozatra*

$$dim_H(S) = 1 - \varepsilon.$$

Bizonyítás: Emlékeztetőül az $\varepsilon = 0$ esetben az $N_k = N^{k+1}$, $\varepsilon_k = \frac{1}{k+1}$ paraméterválasztásról mutatjuk meg, hogy 1 Hausdorff-dimenziót eredményez, míg az $\varepsilon > 0$ esetben $N_k = N^k, \varepsilon_k = \varepsilon$.

Az $\varepsilon = 0$ eset bizonyítása: Egyrészt

$$M_k = \prod_{j=1}^{k} N_j = \prod_{j=1}^{k} N^{j+1} = N^k \prod_{j=1}^{k} N^j = N^{k+k(k+1)/2} = N^{k(k+3)/2}, \tag{35}$$

másrészt 2.20. tétel 1. pontja alapján

$$2^{-k}\prod_{j=1}^{k}\left(N^{j+1}\right)^{1-\frac{1}{j+1}} \leq P_k \leq 2^k \prod_{j=1}^{k}\left(N^{j+1}\right)^{1-\frac{1}{j+1}},$$

$$N_j p_j = N_j^{1-\varepsilon_j} = \left(N^{j+1}\right)^{1-\frac{1}{j+1}} = N^j, \text{ így} \tag{36}$$

$$2^{-k}N^{k(k+1)/2} \leq P_k \leq N^{k(k+1)/2}.$$

A 2.79. lemma alapján a paraméterek értékeit behelyettesítve

$$\dim_H(S) \geq \lim \inf_{k\to\infty} \log(P_k/N_k)/\log(M_{k-1}) \geq$$

$$\geq \lim \inf_{k\to\infty} \frac{\log(2^{-k}N^{k(k+1)/2-(k+1)})}{\log(N^{(k-1)(k+2)/2})} = \lim \inf_{k\to\infty} \frac{\log(2^{-k}N^{(k-1)(k+1)/2})}{\log(N^{(k-1)(k+2)/2})} = 1.$$

Tehát S Hausdorff-dimenziója pontosan 1.

Az $\varepsilon > 0$ eset bizonyítása: Egyrészt

$$M_k = \prod_{j=1}^{k} N_j = \prod_{j=1}^{k} N^j = N^{k(k+1)/2}, \tag{37}$$

másrészt 2.20. tétel 1. pontja alapján

$$2^{-k} \prod_{j=1}^{k} \left(N^j\right)^{1-\varepsilon} \leq P_k \leq 2^k \left(N^j\right)^{1-\varepsilon},$$

$$2^{-k} N^{k(k+1)/2(1-\varepsilon)} \leq P_k \leq N^{k(k+1)/2(1-\varepsilon)}.$$

Most a 2.79. lemma alapján a paraméterek értékeit behelyettesítve alulról és felülről is becsülnünk kell a dimenziót.

$$\dim_H(S) \leq \lim \inf_{k\to\infty} \log(P_k)/\log(M_k) \geq$$

$$\geq \lim \inf_{k\to\infty} \frac{\log(2^k N^{k(k+1)/2(1-\varepsilon)})}{\log(N^{(k)(k+1)/2})} = 1 - \varepsilon.$$

Továbbá

$$\dim_H(S) \geq \lim \inf_{k\to\infty} \log(P_k/N_k)/\log(M_{k-1}) \geq$$

$$\geq \lim \inf_{k\to\infty} \frac{\log(2^{-k} N^{k(k+1)/2(1-\varepsilon)-(k)})}{\log(N^{(k)(k-1)/2})} = 1 - \varepsilon.$$

Ezzel beláttuk a 1.18. tétel 3. pontját.

□

A μ határérték létezéséhez arra van szükség, hogy az S_k halmaz sűrűsége az $[1,2]$ intervallumon belül viszonylag egyenletes legyen, ezt teszi precízzé a következő definíció.

2.81. Definíció. ([10]) Emlékeztetőül a 1.6. jelölés szerint ϕ_k jelölte az S_k halmaz normált karakterisztikus függvényét, azaz $\frac{1}{S_k}\mathbb{1}_{S_k}$-t. Az intervallumok választása *közelítőleg egyenletes*, ha

$$\sup_{k' \colon k' \geq k} \sum_{\mathbf{i} \colon X_k(\mathbf{i})=1} \left| \int_{I_k(\mathbf{i})} \phi_{k'}(x) - \phi_k(x)\, \mathrm{d}x \right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0. \tag{38}$$

2.82. Megjegyzés. Ha $S_{k'}$-nek az összes $I_k(\mathbf{i}) \subset S_k$ intervallumba ugyanakkora része esik, akkor minden $I_k(\mathbf{i})$-re $\int_{I_k(\mathbf{i})} \phi_{k'}(x) - \phi_k(x)\, \mathrm{d}x = 0$, hiszen a ϕ_k normált karakterisztikus függvény.

A következő lemma igazolja a 2.81. definíció jogosságát, miszerint (38) teljesülése esetén $\{\phi_k\}$ valóban gyengén konvergál egy μ valószínűségi mértékhez.

2.83. Lemma. *([10]) Ha az intervallumok választása közelítőleg egyenletes a 2.81. definícióban definiált értelemben, akkor létezik* $[1,2]$*-n értelmezett* μ *valószínűségi mérték, amihez a* ϕ_k *függvények gyengén konvergálnak.*

Bizonyítás: A gyenge konvergencia definíciója értelmében legyen f tetszőleges folytonos függvény $[0,1]$-en, és elegendő belátni, hogy ekkor az $\left\{\int f\phi_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ függvénysorozat Cauchy. Rögzítsük le $\varepsilon > 0$-t is. Később definiáljuk ennek függvényében $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ értékét. Az f egy kompakt halmazon folytonos függvény, tehát $\exists\delta > 0$, hogy $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon_1$. Legyen K olyan küszöbindex, hogy egyrészt $k \geq K$ esetén $\delta_k < \delta$, másrészt

$$\sup_{k'\colon k'\geq k} \sum_{\mathbf{i}\colon X_k(\mathbf{i})=1} \left| \int_{I_k(\mathbf{i})} \phi_{k'}(x) - \phi_k(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon_2.$$

Legyen $\{x_k(\mathbf{i})\}$ egy δ_k-háló S_k-ban, amire $I_k(\mathbf{i})$ pontjaitól $x_k(\mathbf{i})$ legfeljebb δ_k távolságra van. Ekkor minden $k' \geq k \geq K$ esetén

$$\left| \int f\phi_{k'} - \int f\phi_k \right| =$$

$$= \left| \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{I}_k} \int_{I_k(\mathbf{i})} f(\phi_{k'}-\phi_k) \right| = \left| \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{I}_k} \int_{I_k(\mathbf{i})} [f(x) - f(x_k(\mathbf{i})) + f(x_k(\mathbf{i}))](\phi_{k'}-\phi_k)(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{I}_k} \int_{I_k(\mathbf{i})} |[f(x) - f(x_k(\mathbf{i}))](\phi_{k'}-\phi_k)(x)|\,\mathrm{d}x + \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{I}_k} |f(x_k(\mathbf{i}))| \left| \int_{I_k(\mathbf{i})} (\phi_{k'}-\phi_k)(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon_1 \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{I}_k} \int_{I_k(\mathbf{i})} |(\phi_{k'}-\phi_k)(x)|\,\mathrm{d}x + \|f\|_\infty \sum_{\mathbf{i}\in\mathbb{I}_k} \left| \int_{I_k(\mathbf{i})} (\phi_{k'}-\phi_k)(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon_1 \left(\int_{S_k} |\phi_{k'}| + \int_{S_k} |\phi_k| \right) + \|f\|_\infty \varepsilon_2 \leq 2\varepsilon_1 + \|f\|_\infty \varepsilon_2 \leq \varepsilon,$$

ha $\varepsilon_1 = \varepsilon/4$ és $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}$ például. Tehát teljesül a Cauchy-kritérium, így készen vagyunk.

□

Végül következik a bizonyítás lényegi része, miszerint a 2.20. tétel pontjait kielégítő $\{S_k\}$ halmazsorozatra teljesül (38). Ez a bizonyítás is több lemmára bomlik, elsőként belátjuk, hogy a Cantor-iterációról elég belátni egy könnyebben kezelhető feltételt.

2.84. Állítás. *([10]) Ha a 2.20. tétel által biztosított* $\{S_k\}$ *sorozat paramétereire még az is igaz, hogy*

$$\exists\,\gamma > 0: \ \sup_k \frac{2^{(5+\gamma)k}\ln(M_k)}{N_{k+1}^{1-\varepsilon_{k+1}}} \leq \frac{1}{32}, \tag{39}$$

akkor $\{\phi_k\}$ *gyengén konvergál egy* S *tartójú* μ *valószínűségi mértékhez.*

A bizonyításhoz szükség lesz a 2.20. tétel 4. pontjának alábbi következményére.

2.85. Lemma. *([10]) Legyen $\{S_k\}$ olyan, ami teljesíti a 2.20. tétel pontjait, és emellett a 2.84. állítás feltétele is teljesül rá, ekkor minden $1 \le k$, $0 \le m$, $\mathbf{i}$ esetén, ha $X_k(\mathbf{i}) = 1$, akkor*

$$2^{-m}\left[\prod_{r=1}^{m} N_{k+r}^{1-\varepsilon_{k+r}}\right] \le P_{k+m}(\mathbf{i}) \le 2^m \left[\prod_{r=1}^{m} N_{k+r}^{1-\varepsilon_{k+r}}\right].$$

Bizonyítás: Az m paraméterre vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $m = 0$, akkor az állítás üres, az alsó és a felső korlát, valamint $X_k(\mathbf{i})$ értéke is 1. A 2.20. tétel 4. pontját $k+m$-re felírva: minden $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, párra, amire $X_{k+m}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 1$

$$|P_{k+m+1}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) - Q_{k+m+1}(\mathbf{i}, \mathbf{j})| \le \left[8N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}} \ln(4BP_{k+m})\right]^{\frac{1}{2}}.$$

A $\mathbf{j}$ multiindexekre összegezve és

$$\sum_{\mathbf{j}} Q_{k+m+1}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = Q_{k+m+1}(\mathbf{i}) \text{ felhasználásával,}$$

mivel $X_{k+m+1}(\mathbf{i}, \bar{\mathbf{j}}) = 1$ esetén biztosan $X_{k+m}(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 1$,

$$|P_{k+m+1}(\mathbf{i}) - Q_{k+m+1}(\mathbf{i})| \le P_{k+m}(\mathbf{i}) \left[8N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}} \ln(4BP_{k+m})\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Leosztva $P_{k+m}(\mathbf{i})N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}} = Q_{k+m+1}(\mathbf{i})$-vel

$$\left|\frac{P_{k+m+1}(\mathbf{i})}{Q_{k+m+1}(\mathbf{i})} - 1\right| \le \left(\frac{\ln(4BP_{k+m})}{8N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

A 2.84. állítás feltételét k helyett $m+k$-ra felírva

$$\sup_{k+m} \frac{2^{(5+\gamma)(k+m)} \ln(M_{k+m})}{N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}}} \le \frac{1}{32},$$

innen

$$\frac{\ln(4BP_{k+m})}{8N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}}} \le \frac{1}{4},$$

$$\left(\frac{\ln(4BP_{k+m})}{8N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}}}\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2}.$$

Tehát

$$\frac{1}{2} \le \frac{P_{k+m+1}(\mathbf{i})}{Q_{k+m+1}(\mathbf{i})} \le \frac{3}{2} < 2,$$

$$\frac{1}{2}N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}} \le \frac{P_{k+m+1}(\mathbf{i})}{P_{k+m}(\mathbf{i})} \le 2N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}}.$$

Ezt megszorozva az m-re vonatkozó indukciós feltevéssel éppen a kívánt állítást kapjuk $m+1$-re.

□

Bizonyítás: (A 2.84. állítás bizonyítása.) Az 2.83. lemma alapján a cél

$$\sup_{k'\colon k'\geq k} \sum_{\mathbf{i}\colon X_k(\mathbf{i})=1} \left| \int_{I_k(\mathbf{i})} \phi_{k'}(x) - \phi_k(x)\,\mathrm{d}x \right|$$

értékére megfelelő felső becslést adni. Először a véges összeget végtelennel, majd a P_k tagú összeg minden tagját a legnagyobb összeadandóval felülről becsülve kapjuk, hogy

$$\sup_{k'\colon k'\geq k} \sum_{\mathbf{i}\colon X_k(\mathbf{i})=1} \left| \int_{I_k(\mathbf{i})} \phi_{k'}(x) - \phi_k(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\mathbf{i}\colon X_k(\mathbf{i})=1} \sum_{m=0}^{\infty} \left| \int_{I_k(\mathbf{i})} \sigma_{k+m}(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq P_k \sup_{\mathbf{i}\colon X_k(\mathbf{i})=1} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \left| \int_{I_k(\mathbf{i})} \sigma_{k+m}(x)\,\mathrm{d}x \right| \right].$$

Tehát elég belátni, hogy minden $\mathbf{i}$-re, amire $X_k(\mathbf{i})=1$,

$$P_k \sum_{m=0}^{\infty} \left| \int_{I_k(\mathbf{i})} \sigma_{k+m}(x)\,\mathrm{d}x \right|$$

felülről becsülhető egy $k\to\infty$ esetén 0-hoz tartó kifejezéssel. Fix $\mathbf{i}$ és m esetén fogunk becsülni, majd m-ben összegzünk. Emlékeztetőül $\sigma_{k+m} = \phi_{k+m+1} - \phi_{k+m}$. Az S_k definíciója és karakterisztikus függvény integrálja alapján (4) felhasználásával

$$\int_{I_k(\mathbf{i})} \mathbb{1}_{S_{k+m+1}} = P_{k+m+1}(\mathbf{i}) \cdot \delta_{k+m+1},\ \text{így}$$

$$\int_{I_k(\mathbf{i})} \phi_{k+m+1} = \frac{1}{P_{k+m+1}\delta_{k+m+1}} \int_{I_k(\mathbf{i})} \mathbb{1}_{S_{k+m+1}} = \frac{1}{P_{k+m+1}} P_{k+m+1}(\mathbf{i}).$$

Hasonlóan ϕ_{k+m}-re

$$\int_{I_k(\mathbf{i})} \phi_{k+m} = \frac{1}{P_{k+m}} P_{k+m}(\mathbf{i}).$$

Így

$$\int_{I_k(\mathbf{i})} \sigma_{k+m} = \frac{1}{P_{k+m+1}} P_{k+m+1}(\mathbf{i}) - \frac{1}{P_{k+m}} P_{k+m}(\mathbf{i}).$$

Továbbá

$$\frac{1}{P_{k+m}} P_{k+m}(\mathbf{i}) = \frac{N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}}}{Q_{k+m+1}} P_{k+m}(\mathbf{i}) = \frac{1}{Q_{k+m+1}} Q_{k+m+1}(\mathbf{i}).$$

Összegezve

$$\int_{I_k(\mathbf{i})} \sigma_{k+m} = \frac{1}{P_{k+m+1}} P_{k+m+1}(\mathbf{i}) - \frac{1}{Q_{k+m+1}} P_{k+m+1}(\mathbf{i}) +$$

$$+ \frac{1}{Q_{k+m+1}} P_{k+m+1}(\mathbf{i}) - \frac{1}{P_{k+m}} P_{k+m}(\mathbf{i}) =$$

$$= \left[\frac{1}{P_{k+m+1}} - \frac{1}{Q_{k+m+1}} \right] P_{k+m+1}(\mathbf{i}) + \frac{1}{Q_{k+m+1}} \left[P_{k+m+1}(\mathbf{i}) - Q_{k+m+1}(\mathbf{i}) \right] =$$

$$=: \Xi_1 + \Xi_2.$$

A továbbiakban Ξ_1, Ξ_2-t külön fogjuk megbecsülni. A 2.20. tétel második pontját $k+m+1$-re felírva

$$\frac{|Q_{k+m+1} - P_{k+m+1}|}{Q_{k+m+1}} \leq \frac{B}{\sqrt{Q_{k+m+1}}}.$$

A 2.85. lemmát m helyett $m+1$-re felírva

$$P_{k+m+1}(\mathbf{i}) \leq 2^{m+1} \left[\prod_{j=1}^{m+1} N_{k+j}^{1-\varepsilon_{k+j}} \right].$$

Így

$$|\Xi_1| = \frac{|Q_{k+m+1} - P_{k+m+1}|}{P_{k+m+1} Q_{k+m+1}} P_{k+m+1}(\mathbf{i}) \leq \frac{1}{P_{k+m+1}} \frac{B}{\sqrt{Q_{k+m+1}}} 2^{m+1} \left[\prod_{j=1}^{m+1} N_{k+j}^{1-\varepsilon_{k+j}} \right].$$

A 2.20. tétel 4. pontja alapján

$$|P_{k+m+1}(\mathbf{i}) - Q_{k+m+1}(\mathbf{i})| = \left| \sum_{\mathbf{j}\colon |\mathbf{j}|=m} X_{k+m}(\mathbf{i},\mathbf{j}) \left(P_{k+m+1}(\mathbf{i},\mathbf{j}) - Q_{k+m+1}(\mathbf{i},\mathbf{j}) \right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\mathbf{j}\colon |\mathbf{j}|=m} X_{k+m} \left[8N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}} \ln(BP_{k+m}) \right]^{\frac{1}{2}} = P_{k+m}(\mathbf{i}) \left[8N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}} \ln(BP_{k+m}) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ismét a 2.85. lemmát m-re alkalmazva kapjuk, hogy

$$P_{k+m}(\mathbf{i}) \leq 2^{m} \left[\prod_{j=1}^{m} N_{k+j}^{1-\varepsilon_{k+j}} \right].$$

Így

$$|\Xi_2| \leq \frac{1}{Q_{k+m+1}} 2^{m} \left[\prod_{j=1}^{m} N_{k+j}^{1-\varepsilon_{k+j}} \right] \cdot \left[8N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}} \ln(BP_{k+m}) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Végül $P_k|\Xi_1 + \Xi_2|$-t kell becsülnünk, ehhez P_k-t, P_{k+m+1}^{-1}-t, Q_{k+m+1}^{-1}-t és $Q_{k+m+1}^{-\frac{1}{2}}$-t is felülről becsüljük a 2.20. tétel 2.26. következménye alapján.

$$P_k \leq 2^k \prod_{j=1}^{k} N_j^{1-\varepsilon_j},$$

$$P_{k+m+1}^{-1} \leq 2^{k+m+1} \prod_{j=1}^{k+m+1} N_j^{\varepsilon_j - 1},$$

$$P_{k+m}^{-1} \leq 2^{k+m} \prod_{j=1}^{k+m} N_j^{\varepsilon_j - 1},$$

$$Q_{k+m+1}^{-1} \leq 2^{k+m} \prod_{j=1}^{k+m+1} N_j^{\varepsilon_j - 1},$$

$$Q_{k+m+1}^{-\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{k+m}{2}} \prod_{j=1}^{k+m+1} N_j^{\frac{\varepsilon_j - 1}{2}}.$$

Mindezeket behelyettesítve és a lehetséges összevonásokat elvégezve

$$P_k|\Xi_1| \leq$$

$$\leq B \left(2^k \prod_{j=1}^{k} N_j^{1-\varepsilon_j} \right) \left(2^{k+m+1} \prod_{j=1}^{k+m+1} N_j^{\varepsilon_j - 1} \right) \left(2^{\frac{k+m}{2}} \prod_{j=1}^{k+m+1} N_j^{\frac{\varepsilon_j - 1}{2}} \right) 2^{m+1} \left[\prod_{j=1}^{m+1} N_{k+j}^{1-\varepsilon_{k+j}} \right] =$$

$$= B2^k \left(\prod_{j=1}^{k+m+1} N_j^{1-\varepsilon_j}\right) \left(2^{k+m+1} \prod_{j=1}^{k+m+1} N_j^{\varepsilon_j - 1}\right) \left(2^{\frac{k+m}{2}} \prod_{j=1}^{k+m+1} N_j^{\frac{\varepsilon_j-1}{2}}\right) 2^{m+1} =$$

$$= B2^{\frac{5}{2}(k+m)+2} \left[\prod_{j=1}^{k+m+1} N_j^{\frac{\varepsilon_j-1}{2}}\right].$$

$$P_k|\Xi_2| \leq$$

$$\leq \left(2^k \prod_{j=1}^{k} N_j^{1-\varepsilon_j}\right) \left(2^{k+m} \prod_{j=1}^{k+m+1} N_j^{\varepsilon_j-1}\right) 2^m \left[\prod_{j=1}^{m} N_{k+j}^{1-\varepsilon_{k+j}}\right] \cdot \left[8N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}} \ln(BP_{k+m})\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{2(k+m)} \left[8N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}} \ln(BP_{k+m})\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$P_k|\Xi_1 + \Xi_2| \leq B2^{\frac{5}{2}(k+m)+2} \left[\prod_{j=1}^{k+m+1} N_j^{\frac{\varepsilon_j-1}{2}}\right] + 2^{2(k+m)} \left[8N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}} \ln(BP_{k+m})\right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2B2^{\frac{5}{2}(k+m)+2} \left[N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}} \ln(BP_{k+m})\right]^{\frac{1}{2}} = 2B2^{\frac{5}{2}(k+m+1)} \left[N_{k+m+1}^{1-\varepsilon_{k+m+1}} \ln(BP_{k+m})\right]^{\frac{1}{2}}.$$

A lemma feltételét k helyett $k+m$-re felírva és gyököt vonva

$$\frac{2^{\frac{5}{2}(k+m)+\frac{k+m}{2}\gamma} \ln(M_{k+m})^{\frac{1}{2}}}{N_{k+m+1}^{\frac{1-\varepsilon_{k+m+1}}{2}}} \leq \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{2^{\frac{5}{2}(k+m+1)+\frac{k+m}{2}\gamma} \ln(M_{k+m})^{\frac{1}{2}}}{N_{k+m+1}^{\frac{1-\varepsilon_{k+m+1}}{2}}} \leq 1,$$

$$\frac{2^{\frac{5}{2}(k+m+1)} \ln(M_{k+m})^{\frac{1}{2}}}{N_{k+m+1}^{\frac{1-\varepsilon_{k+m+1}}{2}}} \leq 2^{-\frac{k+m}{2}\gamma},$$

így $BP_{k+m} \leq M_{k+m}$ miatt

$$P_k|\Xi_1 + \Xi_2| \leq 2B2^{-\frac{k+m}{2}\gamma}.$$

Végül m-ben összegezve

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_k|\Xi_1 + \Xi_2| \leq 2B\frac{2^{-k\frac{\gamma}{2}}}{1-2^{-\frac{\gamma}{2}}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

$$\sup_{\mathbf{i}} \sum_{m=0}^{\infty} P_k|\Xi_1 + \Xi_2| \leq 2B\frac{2^{-k\frac{\gamma}{2}}}{1-2^{-\frac{\gamma}{2}}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

$\square$

2.86. Lemma. *([10]) Ha N elég nagy, akkor a 2.20. tétel által biztosított $\{S_k\}$ halmazsorozatra (2.84) teljesül a $\gamma = 1$ választással.*

Bizonyítás: Emlékeztetőül az $\varepsilon = 0$ esetben az $N_k = N^{k+1}$, $\varepsilon_k = \dfrac{1}{k+1}$ paraméterválasztásról mutatjuk meg, hogy 1 Hausdorff-dimenziót eredményez, míg az $\varepsilon > 0$ esetben $N_k = N^k, \varepsilon_k = \varepsilon$.

Az $\varepsilon = 0$ eset bizonyítása: (2.84)-ba $\gamma = 1$ helyettesítésével

$$\sup_k \frac{2^{(5+1)k} \ln(M_k)}{N_{k+1}^{1-\varepsilon_{k+1}}} \leq \frac{1}{32} \text{ kell,}$$

ehhez (35) és (36) alapján

$$\frac{2^{(5+1)k} \ln(M_k)}{N_{k+1}^{1-\varepsilon_{k+1}}} = 2^{6k} \frac{\ln\left(N^{\frac{k(k+3)}{2}}\right)}{N^{k+1}} = 2^{6k-1} k(k+3) \frac{\ln(N)}{N^{k+1}} < \frac{1}{32},$$

ha N elég nagy.

A $\varepsilon > 0$ eset bizonyítása: (2.84)-ba $\gamma = 1$ helyettesítésével

$$\sup_k \frac{2^{(5+1)k} \ln(M_k)}{N_{k+1}^{1-\varepsilon_{k+1}}} \leq \frac{1}{32} \text{ kell,}$$

ehhez (37) és $N_{k+1} = N^{k+1}$ alapján

$$\frac{2^{(5+1)k} \ln(M_k)}{N_{k+1}^{1-\varepsilon_{k+1}}} = 2^{6k} \frac{\ln\left(N^{\frac{k(k+1)}{2}}\right)}{N^{(k+1)(1-\varepsilon)}} = 2^{6k-1} k(k+1) \frac{\ln(N)}{N^{(k+1)(1-\varepsilon)}} < \frac{1}{32},$$

ha N elég nagy.

$\square$

Ezzel befejeztük a 1.18. tétel 2. pontjának bizonyítását.

3. Kapcsolódó eredmények

3.1. Differenciálás

A mértékelméletben érdekelnek minket a differenciálási tulajdonságok, a klasszikus Lebesgue-féle sűrűségi tételhez hasonlóan a bizonyított maximál-egyenlőtlenségekből most is említésre méltó differenciálási tulajdonságok következnek. Ehhez először lerögzítjük, jelen esetben pontosan mit értünk differenciálás alatt. Általában beszélhetünk arról, hogy egy $\mathcal{S}$ halmazrendszer differenciál egy $\mathcal{F}$ függvényosztályt:

3.1. Definíció. ([4]) Legyen $(X, \mathcal{A}, \nu)$ mértéktér, és minden x-re $\mathcal{S}(x) \subset \mathcal{A}$ halmazrendszer. Továbbá legyen '$\longrightarrow$' konvergenciafogalom, ami meghatározza, hogy $S_k^x \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$ teljesül-e, ahol $S_k^x \in \mathcal{S}(x)$ minden k esetén. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{S}$ *differenciálja az $\mathcal{F}$ függvényosztályt*, ha $\forall f \in \mathcal{F}$, ν-m.m $x \in X$, $\forall S_k^x \to x$ esetén

$$\frac{1}{\nu(S_k^x)} \int_{S_k^x} f(y)\,\mathrm{d}\nu(y) \to f(x).$$

A 3.1. definíció megfelelői a dolgozatban tárgyalt esetekre az alábbi differenciálás fogalmak.

3.2. Definíció. ([10]) Legyen $p \in (1, \infty)$ rögzített.

- Az $\mathcal{S} = \{rS_k \,:\, k \geq 1,\, r > 0\}$ halmazrendszer *differenciálja az $L^p(\mathbb{R})$ függvényosztályt*, ha m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\lim_{r\to 0}\sup_k \left|\frac{1}{r|S_k|}\int_{x+rS_k} f(y)\,\mathrm{d}y - f(x)\right| = \lim_{r\to 0}\sup_k \left|A_{r,k}f(x) - f(x)\right| = 0.$$
- A μ mérték *differenciálja az $L^p(\mathbb{R})$ függvényosztályt*, ha m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\lim_{r\to 0}\left|\int f(x+ry)\,\mathrm{d}\mu(y) - f(x)\right| = 0.$$

A differenciálási tulajdonság bizonyítása a megfelelő maximáloperátor korlátosságából az analóg tételek bizonyításához hasonlóan megy.

3.3. Következmény. *(Az 1.18. tétel következménye, [10]) Legyen $\{S_k\}$ a 1.18. tétel által biztosított sorozat, míg $\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} < p < \infty$ tetszőleges. Ekkor a következők igazak:*

1. *Az $\mathcal{S}$ minden p-re differenciálja $L^p(\mathbb{R})$-t a 3.2. definícióban definiált értelemben.*
2. *A μ minden p-re differenciálja $L^p(\mathbb{R})$-t a 3.2. definícióban definiált értelemben.*

Bizonyítás: Legyen $\{S_k\}$ olyan, ami teljesíti a 1.18. tétel 5. pontját, azaz a hozzátartozó $\tilde{\mathcal{M}}$ operátor minden $\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} < p < \infty$ esetén korlátos, mint $L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ operátor, ahol ε olyan, hogy $S = \bigcap S_k$ Hausdorff-dimenziója $1-\varepsilon$. Rögzítsünk le egy ilyen p-t, és erre fogjuk belátni, hogy $\mathcal{S} = \{rS_k \,:\, k \geq 1, r > 0\}$ differenciálja $L^p(\mathbb{R})$-t a 3.2. definícióban definiált értelemben. Azaz a definíció értelmében m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\lim_{r\to 0}\sup_k \left|A_{r,k}f(x) - f(x)\right| = 0.$$
Ezzel ekvivalens, hogy minden $t > 0$ esetén m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\lim_{r\to 0}\sup_k \left|A_{r,k}f(x) - f(x)\right| <= t, \text{ azaz}$$
$$\left|\left\{x \,:\, \lim_{r\to 0}\sup_k \left|A_{r,k}f(x) - f(x)\right| > t\right\}\right| = 0.$$
Legyen most $t > 0$ tetszőlegesen rögzített érték. Az $\mathcal{S}$ a $[0,1]$-en értelmezett folytonos függvényeket biztosan differenciálja, ezért legyen $f_\varepsilon \in C([0,1])$.
$$\left|\left\{x \,:\, \lim_{r\to 0}\sup_k \left|A_{r,k}f(x) - f(x)\right| > t\right\}\right| = \left|\left\{x \,:\, \lim_{r\to 0}\sup_k \left|A_{r,k}(f-f_\varepsilon)(x) - (f-f_\varepsilon)(x)\right| > t\right\}\right| \leq$$
a háromszög-egyenlőtlenség alapján
$$\leq \left|\left\{x \,:\, \lim_{r\to 0}\sup_k \left|A_{r,k}(f-f_\varepsilon)(x) > \frac{t}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x \,:\, |f-f_\varepsilon|(x) > \frac{t}{2}\right\}\right|.$$
Egyrészt a 1.5. definíció alapján $\lim_{r\to 0}\sup_k \left|A_{r,k}(f-f_\varepsilon)(x)\right| = \tilde{\mathcal{M}}(f-f_\varepsilon)(x)$, másrészt tetszőleges g függvényre $|\{x : g(x) > t\}| \leq \dfrac{\|g\|_p^p}{t^p}$, így
$$\left|\left\{x \,:\, \lim_{r\to 0}\sup_k \left|A_{r,k}f(x) - f(x)\right| > t\right\}\right| \leq \frac{\|\tilde{\mathcal{M}}(f-f_\varepsilon)\|_p^p}{(\frac{t}{2})^p} + \frac{\|f-f_\varepsilon\|_p^p}{(\frac{t}{2})^p}.$$

A $\tilde{\mathcal{M}}$ operátor korlátossága miatt minden ε-hoz választható f_ε úgy, hogy $\|f - f_\varepsilon\|_p$ annyira kicsi, hogy még

$$\frac{\|\tilde{\mathcal{M}}(f - f_\varepsilon)\|_p^p}{(\frac{t}{2})^p} + \frac{\|f - f_\varepsilon\|_p^p}{(\frac{t}{2})^p} < \varepsilon$$

is teljesül. Ezzel készen vagyunk $\mathcal{S}$ differenciálási tulajdonságával. A μ differenciálási tulajdonsága teljesen hasonlóan következik $\tilde{\mathfrak{M}}$ korlátosságából.

□

Az $\{S_k\}$ sorozathoz tartozó μ valószínűségi mérték nem abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve (sőt, szinguláris), így a következő állítás bizonyítja, hogy a differenciálási tulajdonság $p = 1$ esetén biztosan nem teljesül.

3.4. Állítás. *([10], D. Preiss) Legyen μ olyan $\mathbb{R}$-en értelmezett valószínűségi mérték, amire $\mu|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ nem abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve. Ekkor van olyan $f \in L^1(\mathbb{R})$, amit nem differenciál.*

Bizonyítás: A nem differenciálás elégséges feltétele, hogy minden $x \in \mathbb{R}$-re a

$$\left\{r \in \mathbb{R}_{>0} : \int f(x + ry)\,\mathrm{d}\mu(y) \neq f(x)\right\} \subset \left\{r \in \mathbb{R}_{>0} : \int f(x + ry)\,\mathrm{d}\mu(y) = \infty\right\} =: Z_x$$

jelöléssel Z_x sűrű $\mathbb{R}_{>0}$-ban. Mivel $\mu|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ nem abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve, ezért $\exists x_0 \neq 0$, amire

$$\frac{\mu(x_0 - r, x_0 + r)}{2r} \xrightarrow[r\to 0]{} \infty.$$

Könnyebben kezelhető a végtelenhez tartás, ha a kifejezést minoráljuk egy végtelenhez tartó folytonos függvénnyel: legyen $\delta > 0$ és $\eta : (0, \delta) \to [0, \infty)$ olyan, hogy η szigorúan motonon csökken (azaz $r \to 0$ esetén szigorúan monoton nő), $\eta(r) \xrightarrow[r\to 0]{} \infty$, és

$$\frac{\mu(x_0 - r, x_0 + r)}{2r} \geq \eta(r), \text{ ahol értelmes.}$$

A későbbi kényelem érdekében 0-val kiterjesztjük $(0, \infty)$-re η-t, majd folytonossá tesszük, így a fenti feltételek potenciálisan egy kisebb δ-val teljesülnek.

Legyen g η-hoz folytonos és $L^1(0, \infty)$-beli függvény, amire $t > 0$ esetén

$$\int_0^\infty g(x)\eta(tg(x))\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Legyen $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ sűrű $\mathbb{R}$-ben, és legyen

$$f(x) = \sum_{x_j \in (x-\delta, x+\delta)} 2^{-j} g^{-1}(x - x_j).$$

$$h(x) = \begin{cases} g^{-1}(|x|) & \text{ha } |x| < \delta, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad \text{jelöléssel}$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^\infty 2^{-j} h(x - x_j).$$

Mivel h értékkészlete nemnegatív, így

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty |\{x\,:\,h(x)>t\}|\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty |\{x\,:\,h(x)>t \text{ és } x>0\}|\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}t.$$

A $g \in L^1$ feltevés szerint tehát $\int h(x)\,\mathrm{d}x \leq \infty$.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \sum 2^{-j} h(x-x_j)\,\mathrm{d}x = \sum 2^{-j} \int h(x-x_j)\,\mathrm{d}x = \int h(x)\,\mathrm{d}x,$$

azaz $f \in L^1(\mathbb{R})$. Erről az f függvényről fogjuk megmutatni, hogy a hozzá tartozó Z_x sűrű. Minden intervallumba esik valamilyen j-re $\frac{x_j - x}{x_0}$ alakú pont, tehát elegendő, ha minden j-re, az $r = \frac{x_j - x}{x_0}$ jelöléssel $\int f(x+ry)\,\mathrm{d}\mu(y) = \infty$.

$$\int f(x+ry)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int \sum 2^{-j} h(x+ry-x_j)\,\mathrm{d}\mu(y) \geq \sum 2^{-j} \int h(x-x_j+ry)\,\mathrm{d}\mu(y),$$

így elegendő, ha minden j-re $\int h(x-x_j+ry)\,\mathrm{d}\mu(y) = \infty$. $x - x_j = -rx_0$, így

$$\int h(x-x_j+ry)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int h(r(y-x_0))\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_0^\infty \mu\Big(\{y\,:\,h(r(y-x_0))>t\}\Big)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty \mu\left(\left\{y\,:\,|y-x_0| < \frac{g(t)}{r}\right\}\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mu\left(x_0 - \frac{g(t)}{r}, x_0 + \frac{g(t)}{r}\right)\,\mathrm{d}t \geq$$

μ definíciója alapján

$$\geq \int_0^\infty \frac{g(t)}{r}\eta\left(\frac{g(t)}{r}\right)\,\mathrm{d}t = \infty$$

g választása miatt.

□

3.2. Maximáloperátorok és fedések kapcsolata

3.5. Következmény. *(A 1.18. tétel következménye, a gondolatmenet [9]-t követi.) Legyen $\{S_k\}$ a 1.18. tétel által biztosított sorozat, és $S = \bigcap S_k$. Ennek hasonló példányait nem lehet úgy $[0,1]$ minden pontja körül elhelyezni, hogy az unió Lebesgue-mértéke 0 legyen.*

Bizonyítás: Legyen U az uniója S hasonló példányainak. Indirekt bizonyítunk, azaz legyen U nullmértékű. Minden p-re $\chi_U \in L^p$, így χ_U-ra felírhatjuk, hogy $\tilde{\mathfrak{M}}$ korlátos. Mivel $\lambda(U) = 0$, így $\|\chi_U\|_p = 0$, így szükségképpen $\|\tilde{\mathfrak{M}}\chi_U\|_p = 0$. Azaz $\tilde{\mathfrak{M}}$ definíciója alapján

$$\int \left(\sup_{r>0} \int |\chi_U(x+ry)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^p \,\mathrm{d}x = 0.$$

Nemnegativitás miatt ez csak úgy teljesülhet, ha m.m. $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sup_{r>0} \int |\chi_U(x+ry)|\,\mathrm{d}\mu(y) = 0.$$

De pozitív mértékű azon x-ek halmaza, amire egyrészt van r_x, hogy $x + rS \subset U$, másrészt minden $r > 0$-ra, így r_x-re is $\int |\chi_U(x+ry)|\,\mathrm{d}\mu(y) = 0$. Ez viszont ellentmondás.

□

3.3. Cantor-halmazokkal kapcsolatos eredmények

Ebben a fejezetben elsősorban T. Keleti [9]-beli összefoglaló cikkére támaszkodom. Újra megfogalmazom a 1.13. kérdést precízebben, Cantor-halmazokkal kapcsolatban.

3.6. Kérdés. Legyen C egy Cantor-halmaz, $S, B \subset \mathbb{R}$ pedig olyanok, hogy B az S minden pontja körül tartalmazza C egy nagyított példányát, azaz $x \in S$ esetén van olyan r_x, amire $x + r_x C \subset B$. Ekkor mennyire lehet pici B S méretének és C további tulajdonságainak függvényében?

A 1.18. tétel és annak 3.5. következménye szerint $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{3}$ esetén van $1-\varepsilon$ Hausdorff-dimenziójú Cantor-halmaz, amelynek nagyított példányait egy pozitív Lebesgue-mértékű halmaz pontjai körül elhelyezve az unió is biztosan pozitív Lebesgue-mértékű. A. Máthé friss eredménye alapján azonban nem minden Cantor-halmazra igazak a fentiek.

3.7. Tétel. *(A. Máthé, [11]) Minden $0 < \varepsilon < 1$ esetén létezik egy $1 - \varepsilon$ Hausdorff-dimenziójú Cantor-halmaz, amelynek nagyított példányait még a teljes $\mathbb{R}$ pontjai köré is el lehet úgy helyezni, hogy az unió 0 Lebesgue-mértékű legyen, pontosabban az unió Hausdorff-dimenziója $\frac{2-\varepsilon}{2} < 1$ legyen.*

3.8. Megjegyzés. Természetesen egyéb Cantor-halmazokra csak akkor érdekes a kérdés, ha $0 \notin C$, különben az unió biztosan tartalmazza a középpontokat mind, így legalább akkora a Lebesgue-mértéke, mint S-nek.

3.9. Kérdés. Ha $C \subset [0, 1]$ a triadikus Cantor-halmaz, akkor $C - \frac{1}{2}$ nagyított példányai elhelyezhetőek-e egy pozitív mértékű halmaz, mint középpontok körül úgy, hogy az unió Lebesgue-mértéke 0 legyen?

Gyengébb, de szintén megoldatlan általánosan minden Cantor-halmazra a következő kérdés. Az unió tartalmazza a Cantor-halmaz egy példányát, így annál kisebb Hausdorff-dimenziós biztosan nem lehet.

3.10. Kérdés. Ha $\mathbb{R}$ pontjai köré helyezzük el a C $1-\varepsilon$ dimenziós Cantor-halmaz nagyított példányait, lehetséges-e, hogy az unió is $1 - \varepsilon$ dimenziós?

Nemleges választ várunk, és ezt Cantor-halmazok egy viszonylag általános családjára M. Hochman [5]-ben be is bizonyította. A szóban forgó család definíciója:

3.11. Definíció. Egy C Cantor-halmaz *porózus*, ha minden elég kicsi intervallumnak elkerüli egy fix arányú részét, azaz léteznek $\delta > 0$ és $r_0 > 0$ konstansok, hogy minden r_0-nál rövidebb, r hosszú intervallumban van δr hosszú rész, ami nem tartalmaz C-beli pontot.

Hochman porózus Cantor-halmazokra még erősebbet bizonyított:

3.12. Tétel. *([5]) Legyen C tetszőleges porózus Cantor-halmaz. Ha egy pozitív Hausdorff-mértékű kompakt S halmaz pontjai köré elhelyezzük C nagyított példányait, akkor az unió Hausdorff-dimenziója szigorúan nagyobb S Hausdorff-dimenziójánál. Sőt, van olyan δ, ami csak a C és S halmazok dimenziójától függ, maguktól a halmazoktól nem, amire $dim_H B > dim_H C + \delta$.*

Ahhoz, hogy az unió dimenziója legalább $\frac{1}{2}$ legyen, jóval kevesebb is elég. Az alábbi állítás Bourgain egy friss, [2]-beli eredményének következménye A. Máthé megfigyelése alapján.

3.13. Tétel. *([2], [11]) Legyen $C \subset \mathbb{R}$ olyan kompakt halmaz, amelynek a Hausdorff-dimenziója pozitív. Ha a B Borel-halmaz tartalmazza C egy nagyított példányát $\mathbb{R}$ minden pontja körül, akkor $dim_H B \geq \frac{1}{2}$.*

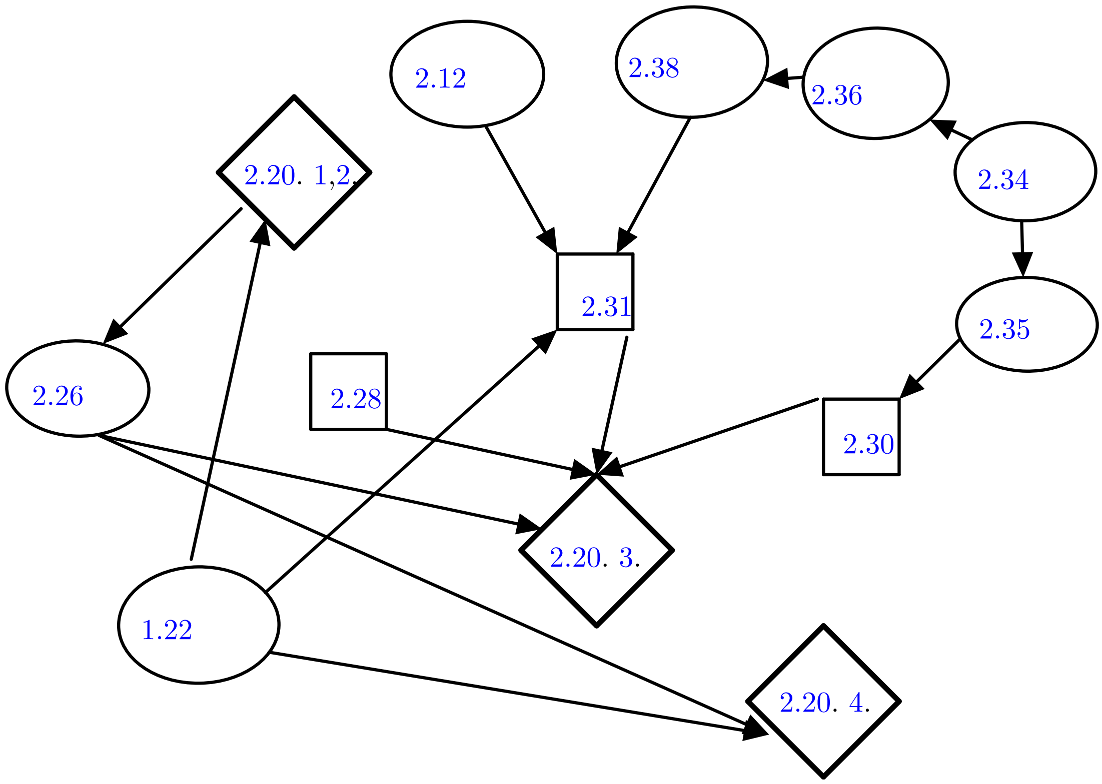
A. Jelölések

$\mathfrak{A}(k,L)$	2.11	$\{\,\{(c_l,r_l)\}_{l=1}^n : \forall l\; c_l \in \mathcal{C}, r_l \in \mathcal{R}\}$
$\mathfrak{A}_{tr}$	2.14	$\{A_n \in \mathfrak{A} : \lvert\mathbb{F}_{int}(A_n)\rvert < P_k^{1-\varepsilon_0}\}$
A		$\bigcup_{n=1}^{\infty} ([-4,0]\times[1,2])^n$
A_n	2.3	$\{(c_l,r_l) \in [-4,0]\times[1,2] : 1 \le l \le n\}$
$\alpha(\mathbf{i})$	2.1	$\mathbf{i}$-nek megfelelő intervallum alsó végpontja
$A(x_1,\dots,x_n)$	2.49	$\{(c(x_l),r(x_l))\}_{l=1}^n \in \mathfrak{A}$
$A_{r,k}f(x)$	1.7	$\int f(x+ry)\phi_k(y)\,\mathrm{d}y$
$C_c[0,1]$		folytonos és kompakt tartójú, $[0,1]$-ben értelmezett függvény
$\mathfrak{C},\mathfrak{R}$	2.10	$\dfrac{2m+1}{2\delta_{k+1}^L}$ alakú számok halmaza $[-4,0]$, illetve $[1,2]$-ben
$c(x),r(x)$	2.45	x-től függő $\mathfrak{C}$, illetve $\mathfrak{R}$-beli pont
δ_k	2.1	k. lépésben szereplő intervallumok hossza
$\mathcal{D}$	2.59	diadikus intervallumok által generált σ-algebra
$\Delta_m f$	2.59	$E(f\mid\mathcal{D}_{m+1}) - E(f\mid\mathcal{D}_m)$
$\mathbb{F}(A_n,k)$	2.4	$\left\{(\mathbf{i}_1,\dots,\mathbf{i}_n) : \mathbf{i}_l \in \mathbb{I}_k, \bigcap_{l=1}^n (c_l + r_l I_k(\mathbf{i}_l)) \neq \emptyset\right\}$
$\mathbb{F}_{int}(s,t)$	2.8	$\{(\mathbf{i}_1,\dots,\mathbf{i}_n) \in \mathbb{F} : sz(\mathbf{i}_s) = sz(\mathbf{i}_t)$ és $\lvert\alpha(\mathbf{i}_s) - \alpha(\mathbf{i}_t)\rvert \le 4\delta_k\}$
$\mathbb{F}_{int}$	2.7	$\{(\mathbf{i}_1,\dots,\mathbf{i}_n) \in \mathbb{F} : \exists l \neq l' : sz(\mathbf{i}_l) = sz(\mathbf{i}_{l'})$ és $\lvert\alpha(\mathbf{i}_l) - \alpha(\mathbf{i}_{l'})\rvert \le 4\delta_k\}$
$\mathbb{F}_{tr}$	2.7	$\mathbb{F} \setminus \mathbb{F}_{int}$
$f^{(m)}(x)$	2.71	$f(2^{-m}\cdot x)$
$f_a^*(x)$	2.62	$\sup_{r>0} r^{a-1} \int_{\lvert y\rvert<r} \lvert f(x-y)\rvert\,\mathrm{d}y$
$\mathbf{i}$	2.1	k. lépésben szereplő intervallumot azonosító multiindex
$\mathbb{I}_k$	2.1	k. lépésben szereplő összes intervallum multiindexének halmaza
$I_k(\mathbf{i})$	2.1	$\mathbf{i}$-nek megfelelő intervallum
$\mathbf{i}\vert_j$	2.1	$\mathbf{i}$ első j koordinátájából álló multiindex
$\Lambda(A_n,f_1,\dots,f_n)$	2.15	$\int \prod_{l=1}^n f_l\left(\dfrac{z-c_l}{r_l}\right)\mathrm{d}z$
$\tilde{\mathcal{M}}$	1.5	$\tilde{\mathcal{M}}f(x) = \sup_{r>0,k\ge1} \int \lvert f(x+ry)\rvert\,\phi_k(y)\,\mathrm{d}y$
$\tilde{\mathfrak{M}}$	1.8	$\tilde{\mathfrak{M}}f(x) = \sup_{r>0} \int \lvert f(x+ry)\rvert\,\mathrm{d}\mu$

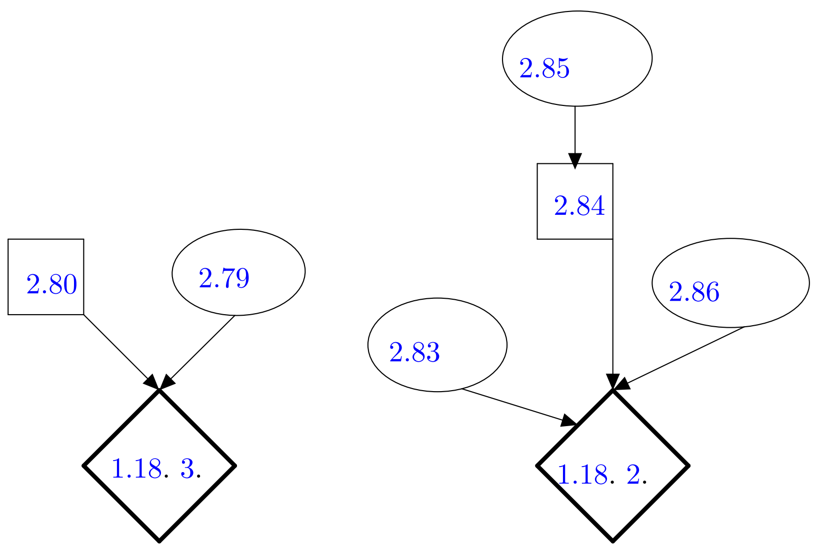
$\tilde{\mathcal{M}}^a$	1.10	$\tilde{\mathcal{M}}^a f(x) = \sup_{r>0,k\geq 1} r^a \int \lvert f(x+ry)\rvert\, \phi_k(y)\,\mathrm{d}y$
$\tilde{\mathfrak{M}}^a$	1.10	$\tilde{\mathfrak{M}}^a f(x) = \sup_{r>0} r^a \int \lvert f(x+ry)\rvert\,\mathrm{d}\mu$
$\mathcal{M}$	1.21	$\mathcal{M} f(x) = \sup_{1<r<2,k\geq 1} \int \lvert f(x+ry)\, \phi_k(y)\,\mathrm{d}y$
$\mathfrak{M}$	1.21	$\mathfrak{M} f(x) = \sup_{1<r<2} \int \lvert f(x+ry)\rvert\,\mathrm{d}\mu$
M_k	2.1	k. lépésben szereplő összes intervallum száma
$\mathcal{M}_k$	2.40	$\mathcal{M}_k f(x) = \sup_{1<r<2} \left\lvert \int f(x+ry)\,\sigma_k(y)\,\mathrm{d}y \right\rvert$
m.m		majdnem minden, Lebesgue-értelemben
N_k	2.1	k. lépésben ennyi részre osztunk egy intervallumot
$\mathcal{N}$	2.54	$\mathcal{N} f(x) = \sup_{1<r<2} A_{r,1} f(x)$
P_k	2.1	k. lépés végén a kiválasztott intervallumok száma
p_k	2.1	$Y_k(\mathbf{i})$ paramétere, azaz várható értéke
π_l	2.6	$\mathbb{F} \to \mathbb{I}_k$ projekció az l. koordinátára
$P_{k+1}(\mathbf{i})$	2.18	az $I_k(\mathbf{i})$ intervallumon belül kiválasztott intervallumok száma
$\Phi_k f(x)$	2.42	$\int f(z) V_{k,x}(z)\,\mathrm{d}z$
$\Phi_k^* g(z)$	2.42	$\int f(x) V_{k,x}(z)\,\mathrm{d}x$
ϕ_k	1.6	$\frac{1}{\lvert S_k\rvert} \mathbb{1}_{S_k}$
$Q_{k+1}(\mathbf{i})$	2.18	az $I_k(\mathbf{i})$ intervallumon belül kiválasztott intervallumok várható száma
$\hat{r}$	2.44	
$sz(\mathbf{i})$	2.1	$\mathbf{i}$ szülője, azaz $\mathbf{i}\vert_{k-1}$ ha $\mathbf{i} \in \mathbb{I}_k$
$\mathcal{S}$	3.2	$\{rS_k \,:\, k \geq 1,\, r > 0\}$
σ_k	2.16	$\phi_{k+1} - \phi_k$
$\overline{\sigma}_k$	2.27	$\frac{1}{Q_{k+1}\delta_{k+1}} \mathbb{1}_{S_{k+1}} - \frac{1}{P_k \delta_k} \mathbb{1}_{S_k}$
S_k	2.1	k. iterációs lépés után kapott intervallumrendszer uniója
S	1.9	$\cap_{k=1}^{\infty} S_k$
$V_{k,x}(z)$	2.42	$\sigma_k \left(\frac{z - c(x)}{r(x)} \right)$
$X_k(\mathbf{i})$	2.1	értéke 1, ha $I_k(\mathbf{i})$-t beválasztottuk, különben 0.

B. A bizonyítás vizuális áttekintése

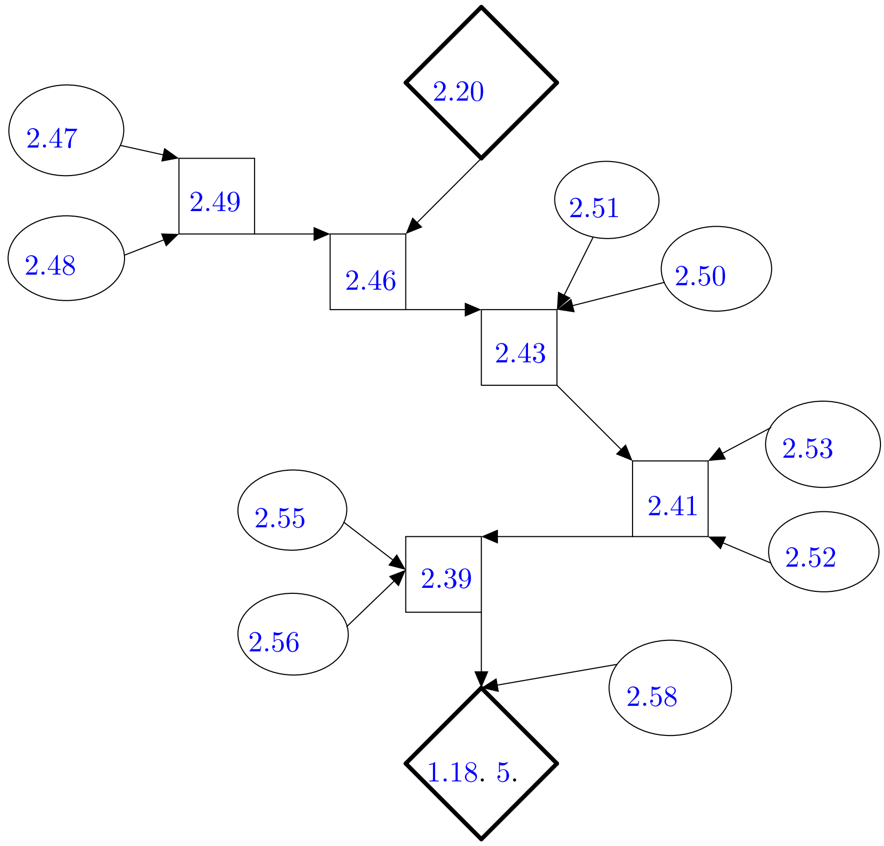
Elfordított négyzet jelöli a tételeket, négyzet az állításokat és ellipszis a lemmákat. Elsőként a bizonyítás első részének áttekintése:



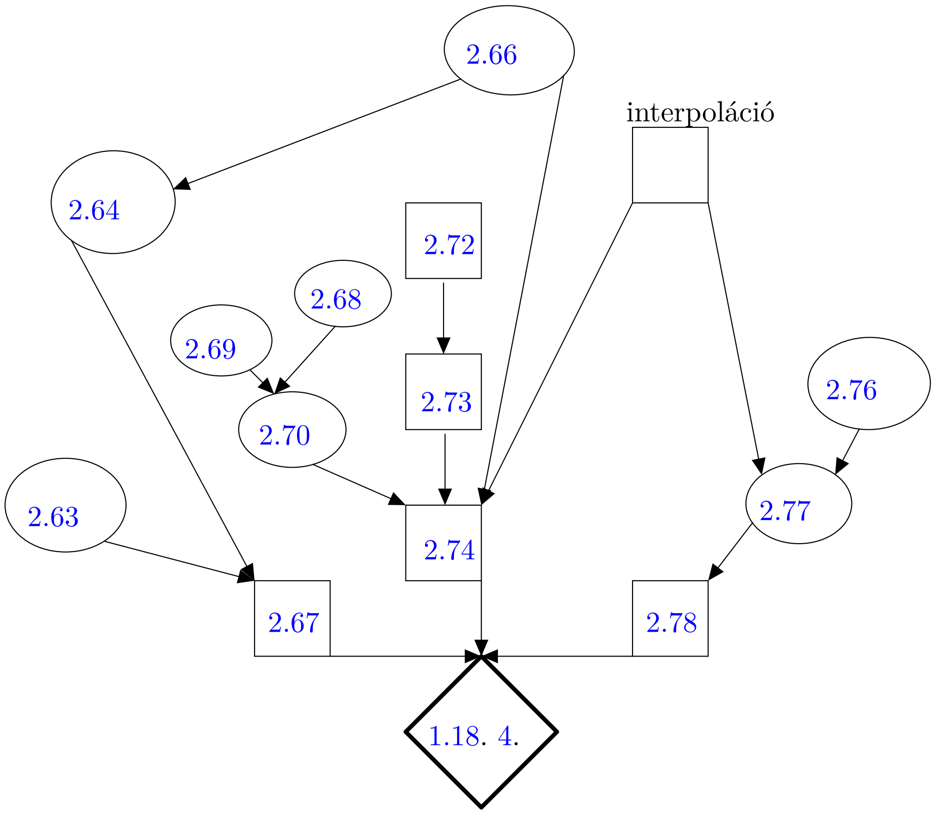
A bizonyítás negyedik részének áttekintése:



A második rész bizonyításának áttekintése:



A harmadik rész bizonyításának áttekintése:



Hivatkozások

[1] J. Bourgain: Averages in the plane over convex curves and maximal operators. Journal d'Analyse Mathématique December 1986, Volume 47, Issue 1, pp 69-85 DOI: 10.1007/BF02792533.

[2] J. Bourgain: The discretized sum-product and projection theorems. Journal d'Analyse Mathématique October 2010, Volume 112, Issue 1, pp 193-236.

[3] K. Falconer, The geometry of fractal sets. Cambridge University Press (July 25, 1986) DOI: 10.1017/CBO9780511623738.

[4] M. de Guzmán: Real variable methods in Fourier analysis, North-Holland Pub. Co., 1981.

[5] M. Hochman: Some problems on the boundary of fractal geometry and additive combinatorics, publikálás előtt.

[6] M. Hazewinkel: Encyclopedia of Mathematics, Springer, ISBN 978-1-55608-010-4.

[7] A. Kechris: Classical Descriptive Set Theory, Springer, 1995, DOI: 10.1007/978-1-4612-4190-4.

[8] T. Keleti, D. T. Nagy, P. Shmerkin: Squares and their centers. To appear in Journal d'Analyse Mathematique.

[9] T. Keleti: Small union with large set of centers, publikálás előtt.

[10] Łaba, Izabella; Pramanik, Malabika. Maximal operators and differentiation theorems for sparse sets. Duke Math. J. 158 (2011), no. 3, 347–411. doi:10.1215/00127094-1345644. http://projecteuclid.org/euclid.dmj/1306934359.

[11] A. Máthé, kézirat.

[12] Anton R. Schep: Minkowski's Integral Inequality for Function Norms, Chapter Operator Theory in Function Spaces and Banach Lattices, Volume 75 of the series Operator Theory Advances and Applications pp 299-308.

[13] E. M. Stein: Maximal functions: spherical means. Proceedings of the National Academy of Sciences 07/1976; 73(7):2174-5. DOI: 10.1073/pnas.73.7.2174.

[14] M. Wilson: Littlewood-Paley Theory and Exponential-Square Integrability, Springer, 2006, DOI: 10.1007/978-3-540-74587-7.