Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Deák Sándor
Matematikus MSc

# Csomók topologikus génuszára vonatkozó becslések

Szakdolgozat

Témavezető:
Stipsicz András

Belső konzulens:
Szűcs András

Budapest, 2016

# Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Stipsicz Andrásnak az értékes, hasznos konzultációkért, amelyek felkeltették az érdeklődésem a téma iránt, és nagyban segítették annak átfogó megismerését. Továbbá köszönettel tartozom Szűcs Andrásnak, akinek az óráin elsajátíthattam az alapvető topológiai szemléletmódot, fogalmakat és módszereket.

# Tartalomjegyzék

# Bevezetés

Jelen dolgozatban a csomók alapvető topológiai jellemzőit, és az ezekkel kapcsolatos eredményeket tekintjük át, nagy hangsúlyt fektetve a különböző génuszokra, illetve az ezek között fennálló kapcsolatokra. Szemléletesen, csomónak nevezünk egy hurkot a 3-dimenziós Euklideszi térben. A csomóelmélet azt vizsgálja, hogy két csomó milyen feltételek mellett ekvivalens, azaz mikor deformálhatók át egymásba a 3-dimenziós térben folytonosan, önmetszés nélkül. Mint a topológia más területén, a csomóelméletben is a cél olyan invariánsok megtalálása, amelyek viszonylag könnyen számolhatók, ekvivalens csomókra azonos, különböző csomókra pedig lehetőleg különböző értéket adnak. A dolgozat írásakor még nem áll rendelkezésre olyan könnyen számolható invariáns, amely egy-egy értelmű megfeleltetést biztosítana a csomók ekvivalenciaosztályai, és valamilyen más matematikai struktúra elemei között.

A csomóinvariánsok tehát olyan függvények, amelyek a csomók ekvivalenciaosztályáról valamely $H$ halmazba képeznek. Ez a $H$ halmaz a génuszok esetén $\mathbb{N}$, a szignatúra esetén $\mathbb{Z}$, de sok esetben bonyolultabb struktúrája is lehet, például a csomóhoz rendelt Alexander polinom esetén $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, a csomók csoportjai kiszámításánál pedig csoportokat rendelünk az ekvivalenciaosztályokhoz. A közelmúltban felfedezett upszilon invariáns ([9]) pedig egy $[0,2]$ intervallumon értelmezett folytonos, valós értékű, szakaszonként lineáris függvényt rendel a csomókhoz. Konkrét esetekben a csomóinvariánsok számolása eltérő bonyolultságú, így a bonyolultabb invariánsok számolását nagy mértékben segíti az invariánsok közti becslések felfedezése. Például tórusz csomók Alexander polinomja a Fox kalkulus segítségével könnyen számolható, a 3-génusz viszont közvetlenül jóval nehezebben, mivel azonban ismert, hogy az Alexander polinom foka alulról becsli a 3-génuszt, így a tórusz csomók 3-génusza is könnyebben számolható. Ismert, hogy a fenti becslés megfordítása nem igaz, azaz az Alexander polinom foka lehet kisebb, mint a 3-génusz, viszont a 3-génusz helyett a topologikus génuszt írva már igaz lesz az egyenlőtlenség, azaz a topológikus génusz alulról becsli az Alexander polinom fokát. Sőt, ennél egy erősebb állítás is igaz, nevezetes az, hogy a topológikus génusz alulról becsli az algebrai génuszt (amely pedig alulról becsli az Alexander polinom fokát). A dolgozat fő célja ennek a becslésnek a bizonyítása, vagyis hogy tetszőleges $K$ csomó esetén

$$g_t(K) \leq g_a(K),$$

ahol $g_t$ a topológikus, $g_a$ pedig az algebrai génuszt jelöli. A bizonyítás két lépésben történik, először [5] alapján bebizonyítjuk, hogy triviális (azaz konstans 1) Alexander polinommal rendelkező csomók topológikus génusza 0. A bizonyítás kulcslépése Freedmann beágyazási tételének alkalmazása, amely kimondja, hogy egy 4-dimenziós peremes sokaságba immertált körlapok bizonyos feltételek teljesülése esetén a peremen kötött reguláris homotópiával diszjunkt, topológikusan lapos beágyazásokba vihetők át. Freedman tétele alkalmazásával az adott $K$ csomó egy Seifert felületének fogantyúi megfelelő műtéttel eltávolíthatók, így létrehozható egy olyan $D^4$-be ágyazott topológikusan lapos körlap, amely pereme $K$, így kapjuk, hogy $g_t(K) = 0$. A bizonyítás második lépése pedig az első lépésben bizonyított tétel felhasználásával $g_t(K) \leq g_a(K)$ bizonyítása, [3] és [1] alapján. A fordított egyenlőtlenség ebben az esetben sem igaz, viszont a Fox-Milnor feltételből kapunk egy szükséges feltételt ahhoz, hogy egy csomó topológikus génusza 0 legyen. Nevezetesen, ha egy csomó topológikus génusza 0, akkor az Alexander polinomja $f(t)f(t^{-1})$ alakú, megfelelő $f \in \mathbb{Z}[t]$ polinommal.

Az első fejezetben összefoglaljuk a csomókkal kapcsolatos alapvető fogalmakat, definiáljuk a Seifert felületet, a különböző génuszokat, az Alexander polinomot és a szignatúrát, illetve belátjuk ezek invarianciáját. Az invariancia belátásánál hivatkozni fogunk a Reidemeister-Singer tételre, amely szerint azonos csomókhoz tartozó Seifert felületek elegendő számú stabilizációval izotóp felületekké alakíthatók. A teljesség kedvéért kimondjuk Reidemeister tételét, amely szerint ekvivalens csomók diagrammjai három művelet (Reidemeister mozgások) alkalmazásával átalakíthatók egymásba. (A Reidemeister tételből egyszerűen következik a Reidemeister-Singer tétel, lásd például [8].)

A második fejezetben megfelelő előkészületek után kimondjuk Freedman tételét. Az előkészületekben definiáljuk az ekvivariáns metszési indexet, belátjuk ennek jól-definiáltságát (bal és jobbszorzás erejéig), majd bevezetjük a duális gömbök fogalmát.

A harmadik fejezetben Freedman tétele felhasználásával bizonyítjuk, hogy triviális Alexander polinommal rendelkező csomók topológikus génusza nulla, majd a negyedik fejezetben belátjuk, hogy az algebrai génusz felülről becsli a topológikus génuszt.

Az ötödik fejezetben bizonyítjuk a Fox-Milnor feltételt, illetve azt, hogy nulla topológikus génuszú csomók szignatúrája nulla (ez a tény könnyen adódik a Fox-Milnor feltétel bizonyításából).

A hatodik fejezetben a topológikus génusztól elszakadva a stabil konkordizmusgénuszt vizsgáljuk, melyről megállapítjuk, hogy szeminormát definiál a konkordizmuscsoport és a racionális számok tenzorszorzatán, továbbá bizonyos típusú tórusz csomók által generált altérre kiszámoljuk az egységgolyót.

A hetedik fejezetben vázlatosan, bizonyítások nélkül egy új, "algebraibb" definíciót adunk az Alexander polinomra. Ismertetjük a Fox kalkulust, amely segítségével csak a csomók csoportját használva meghatározható az Alexander polinom, és ezen eljárás segítségével kiszámoljuk a tórusz csomók Alexander polinomját.

A függelékben felületek első homológiáira vonatkozó állításokat bizonyítunk, definiáljuk az algebrai illetve geometriai szimplektikus bázist, belátjuk, hogy minden algebrai szimplektikus bázis reprezentálható geometriai szimplektikus bázissal. Az itt megfogalmazott állításokat többnyire a harmadik és negyedik fejezetben használjuk.

Az első fejezet [8] 2. fejezete és [7] alapján készültek, a második fejezet pedig részben [4] alapján. A harmadik fejezetben található bizonyítás az [5] cikkre épül, a 3.2 lemma kivételével, amely a [3] cikkben található. A 3.2 lemma helyett [5]-ben a szerzők eredetileg mátrixok $S$-ekvivalenciáira vonatkozó állítást használnak. A negyedik fejezet a [3] és [1] cikkekre épül, ezek egyes részeinek összemosásának tekinthető. Az ötödik és a hetedik fejezetben található állítások és bizonyítások a [7] könyvből származnak. A hatodik fejezet főtétele a 6.3 tétel, amely [6] 2. tételének általánosítása, legjobb tudásunk szerint még nem érhető el az irodalomban. A függelékben leírtak [2] 6. fejezetéből származnak.

## 1. Alapfogalmak

**1.1. Definíció.** *Csomónak nevezünk egy $S^1$-gyel diffeomorf, irányított $K \subset \mathbb{R}^3 \subset S^3$ részsokaságot, vagy ezzel ekvivalensen, egy $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \subset S^3$ beágyazás képét.*

A $K$ és $L$ csomókat ekvivalensnek mondjuk, ha izotópok, azaz ha létezik egy $H : S^1 \times I \to S^3$ reguláris homotópia, melyre $H(S^1, 0) = K$, $H(S^1, 1) = L$, és a $H(., t)$ függvény beágyazás minden $t$-re. Thom izotópia lemmája miatt ez ekvivalens azzal, hogy létezik $S^3$-nak olyan $\Phi : S^3 \times I \to S^3$ izotópiája (minden $t$-re $\Phi(., t)$ diffeomorfizmus), melyre $\Phi(., 0) = id_{S^3}$, és $\Phi(K, 1) = L$. A csomóelméletben az ekvivalens csomókat azonosnak tekintjük.

A csomókat célszerű a síkon ábrázolni: a $K \subset \mathbb{R}^3$ csomót merőlegesen vetítsük le egy $S \subset \mathbb{R}^3$ síkra (jelölje $\pi_S : \mathbb{R}^3 \to S$ a merőleges vetítés függvényét). Olyan $S$ síkokra szeretnénk csak vetíteni, melyek esetén $\pi_S|_K$ immerzió. Tekintsük azt a $\phi : K \to \mathbb{R}P^2$ sima leképezést, amely a csomó egy $p$ pontjához hozzárendeli az azon ponton átmenő érintőt az origóba tolva (azaz a $T_pK$ érintőteret). A Sard lemmából adódik, hogy $\phi(K)$ komplementere sűrű $\mathbb{R}P^2$-ben, tehát sűrűn vannak azok az irányok, amelyekre merőleges síkra vetítve $\pi_S|_K$ immerzió, legyen $S$ egy ilyen sík. Az öntranszverzalitási tételből adódik, hogy tetszőlegesen kicsi perturbációval elérhető, hogy $L := = \pi_S(K)$ öntranszverz legyen (ezt ugyanúgy $L$-lel jelöljük). Továbbá nyilvánvalóan az is elérhető, hogy $L$-nek ne legyenek 2-nél többszörös pontjai. Végül kapunk egy $L$ síkbeli, immertált, zárt, összefüggő görbét, melynek véges sok kétszeres ponton kívül nincs többszörös pontja. A kétszeres pontoknál a göbe megszakításával jelezzük, hogy a merőleges vetítést megelőzően melyik szakasz volt "felül". Az így kapott $\mathcal{D}$ halmazt a $K$ csomó diagrammjának nevezzük. Természetesen egy csomóhoz sok különböző diagramm tartozik.

Fordítva, a fenti tulajdonságokkal rendelkező minden $\mathcal{D}$ síkbeli halmaz reprezentál egy $L_{\mathcal{D}}$ csomót: a kettőspontok közelében a felső, folytonos szálat emeljük ki a harmadik dimenzióba. Könnyen látható, hogy $\mathcal{D}$ az $L_{\mathcal{D}}$ csomó egyik diagrammja, továbbá ha $\mathcal{D}$ a $K$ csomó diagrammja, akkor $K$ és $L_{\mathcal{D}}$ ekvivalensek.

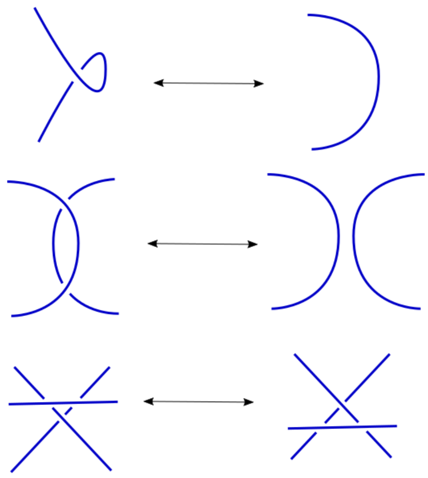
**Példák.**

- Az $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ standard beágyazást triviális csomónak nevezzük.
- Legyenek $p, q \in \mathbb{N}$ relatív prímek. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-ben az origót a $(p, q)$ ponttal összekötő $L$ szakaszt. Hasson $\mathbb{Z}^2$ csoport $\mathbb{R}^2$-n az eltolással. Ismert, hogy $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ a tórusz, melynek vehetjük a standard beágyazását $\mathbb{R}^3$-ba, így kapunk egy $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ leképezést. A $\varphi(L) \subset \mathbb{R}^3$ csomót $T(p, q)$-val jelöljük, és tórusz csomónak nevezzük. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy $T(p, q)$ valóban csomó.

Felmerül a kérdés, hogy két diagramm mikor reprezentál ekvivalens csomókat.

**1.2. Tétel.** *[Reidemeister tétel] Két diagramm pontosan akkor reprezentál ekivalens csomókat, ha azok Reidemeister mozgások (1. ábra), és $S^3$ izotópiái alkalmazásával egymásba alakíthatók.*

*Bizonyítás.* Lásd például [8, B.1.1 tétel]. □



1. ábra. Reidemeister mozgások

**1.3. Definíció.** *Tekintsük a $K$ csomót.*

- *A $K$ csomó tükörképén azt az $m(K)$ csomót értjük, amelyet úgy kapunk, hogy $K$-t ($\mathbb{R}^3$-ban tekintve) tükrözzük egy síkra.*
- *$\bar{K}$-val jelöljük azt a csomót, amelyet a $K$ csomóból az irányítás megfordításával nyerünk.*

A csomók halmazán (ekvivalens csomókat azonosnak tekintve) bevezethetünk egy műveletet, amelyet összefüggő uniónak nevezünk. Legyen $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$ két csomó. Az egyik csomó eltolásával elérhető, hogy létezzen olyan $S \subset \mathbb{R}^3$ sík, amely szeparálja a $K_1$ és $K_2$ csomókat. Vegyünk egy olyan $f : I \times I \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ beágyzást, amelyre $f(I,0) \subset K_1$ és $f(I,1) \subset K_2$, $imf$ többi része diszjunk $K_1 \cup \cup K_2$-től, és egy szakaszban metszi az $S$ síkot, továbbá $\partial imf$-nek létezik olyan irányítása, amely a csomókba eső részen ellentétes az adott csomó irányításával. A

$$K = (K_1 \cup K_2 \cup \partial imf) \backslash (f(intI,0) \cup f(intI,1))$$

csomót nevezzük a $K_1$ és $K_2$ csomók összefüggő uniójának, és a $K_1 \# K_2$ szimbólummal jelöljük. Az összefüggő unió jól definiáltságához azt kell ellenőrizni, hogy különböző $f$ beágyazásokat használva ekvivalens csomókhoz jutunk. Ez pedig egyszerűen következik abból, hogy a fenti $K$ csomóban a $K_1 \cup \partial imf \backslash f(I,0)$ szakaszt elegendően kicsire összehúzva végigfuttathatjuk a $K_2 \backslash f(I,1)$ szakaszon.

**1.4. Megjegyzés.** *Könnyen látható, hogy a csomók halmaza (ekvivalens csomókat azonosnak tekintve) kommutatív, egységelemes félcsoport az összefüggő unióra nézve, ahol az egységelem a triviális csomó.*

A csomók osztályozásának legfőbb kiindulópontja, hogy olyan $S^3$-beli irányítható felületeket rendelünk egy $K$ csomóhoz, melynek határa $K$.

**1.5. Definíció.** *Egy $K \subset S^3$ csomó Seifert felületének nevezünk egy $\Sigma \subset S^3$ irányítható, kompakt, összefüggő felületet, ha $\partial \Sigma = K$ teljesül.*

**1.6. Állítás.** *Minden csomóhoz létezik Seifert felület.*

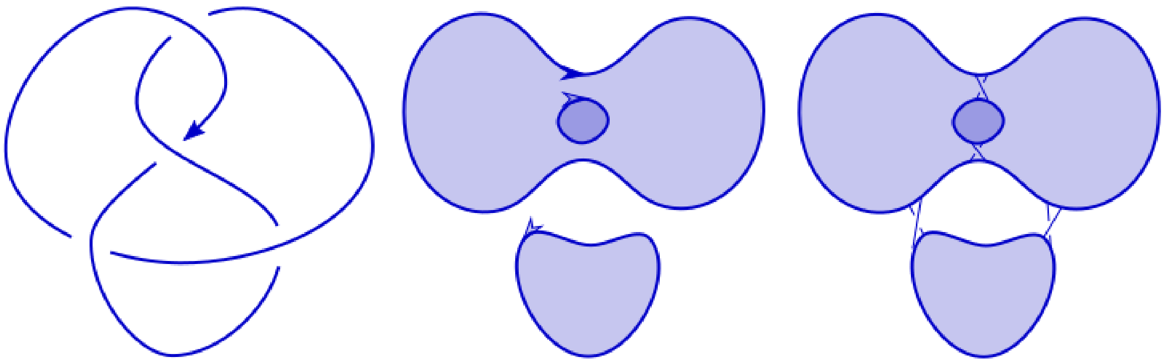
*Bizonyítás.* Tekintsük a $K$ csomó egy $\mathcal{D}$ diagrammját. A kettőspontokat oldjuk fel a 2. ábrán látható módon. Így páronként diszjunkt $S_i^1$ köröket kapunk.

2. ábra. A kettőspontok feloldása, ún. irányított feloldás.

Legyen $n_i \in \mathbb{N}$ azon körök száma, amelyek a belsejükben tartalmazzák $S_i^1$-et. Az $S_i^1$ köröket tekintsük a $\mathbb{R}^2 \times n_i$ síkban, majd, vegyük azokat a $D_i \in \mathbb{R}^2 \times n_i$ körlapokat, melyekre $\partial D_i = S_i^1$. Ezután a feloldott kettőspontok mentén ragasszuk össze a megfelelő körlapokat egy-egy csavart sávval. Így egy olyan $\Sigma$ felületet kapunk, amelyre $\partial\Sigma = K$ teljesül. Továbbá minden $D_i$ körlapot csak olyan $D_j$ körlapokkal ragasztottunk össze, amelyre $|n_j - n_i| = 1$ teljesül, ebből pedig következik, hogy $\Sigma$ irányítható. $\square$

**1.7. Megjegyzés.** *A fenti bizonyításban leírt eljárást Seifert algoritmusnak nevezik.*

A Seifert algoritmust a nyolcascsomó esetén a 3. ábra szemlélteti.



3. ábra. Seifert felület készítése a nyolcascsomóhoz.

A felületek klasszifikációja alapján egy $\Sigma$ Seifert felület diffeomorf egy $g(\Sigma)$ lyukú, $S^1$-gyel diffemorf peremű tórusszal, alkalmas $g(\Sigma) \in \mathbb{N}$ számra. Ezt a $g(\Sigma)$ számot nevezik a $\Sigma$ felület génuszának. Ekvivalensen, $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$, valamilyen $g \in \mathbb{N}$-re, amelyet a $\Sigma$ felület génuszának hívunk.

**Példa.** Tekintsük a $T(p, q)$ tórusz csomót, és annak egy olyan $\mathcal{D}$ diagrammját, melyet úgy kapunk, hogy a standard módon beágyazott $\mathbb{R}^3$-beli tóruszt a $z$ tengely mentén az $xy$ síkra vetítjük. A Seifert algoritmust alkalmazva, a kettőspontokat feloldva $p$ darab kört kapunk, az ezek által határolt körlapok diszjunkt unióját véve olyan teret kapunk, melynek Euler karakterisztikája $p$. Továbbá könnyen látható, hogy egy sáv ragasztása során az Euler karakterisztika 1-gyel csökken, és $q(p-1)$ sáv ragasztásával kapunk a diszjunk körlapokból egy $\Sigma$ Seifert felületet $T(p,q)$-hoz (mivel a $\mathcal{D}$ diagrammban $q(p-1)$ kettőspont van). Tehát $\chi(\Sigma) = p - q(p-1)$. Mivel $\Sigma$ egy irányítható felület egy peremkomponenssel, ezért $\chi(\Sigma) = 2 - 2g - 1$, ahol $g$ a $\Sigma$ felület génusza. A két egyenlőséget összevetve kapjuk, hogy $g = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$, tehát $g_3(T(p,q)) \leq \frac{(p-1)(q-1)}{2}$. (Később belátjuk, hogy valójában egyenlőség áll fenn.)

Egy csomóhoz több, egymással nem diffeomorf Seifert felület is tartozhat. Legyen $\Sigma \subset S^3$ a $K$ csomó egy Seifert felülete, és tekintsünk két különböző $p, q \in \Sigma \backslash \partial\Sigma$ pontot, továbbá egy $\gamma : I \hookrightarrow S^3$ egyszerű görbét, amelyre $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, $\gamma(intI) \subset S^3 \backslash \Sigma$, illetve $\langle \gamma'(0), N(p) \rangle \cdot \langle \gamma'(1), N(q) \rangle < 0$, ahol $N : \Sigma \to S^2$ a $\Sigma$ felület Gauss leképezése. (Az utolsó feltétel azt jelenti, hogy a $\gamma$ görbe a $\Sigma$ felületnek ugyanabból az oldalából indul ki, mint amelyikbe befut.) Legyen $V \subset \mathbb{R}^3$ a $\gamma$ egy csőszerű környezete, amelyről feltehető, hogy $V \cap \Sigma = D_1 \cup D_2$ két, egymástól és $\partial\Sigma$-tól diszjunkt körlap uniója. Készítsük el a $\Sigma'$ felületet úgy, hogy $\Sigma \backslash (D_1 \cup D_2)$ felülethez $\partial D_1$ és $\partial D_2$ mentén hozzáragasztjuk $\partial V$ megfelelő darabját. Nyilvánvaló, hogy $\Sigma'$ is $K$ egy Seifert felülete, továbbá $g(\Sigma') = g(\Sigma) + 1$.

**1.8. Definíció.** *A fent leír eljárást, amely során a $\Sigma$ Seifert felületből megkonstruáltuk a $\Sigma'$ Seifert felületet, stabilizációnak nevezzük.*

Természetesen adódó kérdés, hogy általában milyen kapcsolat áll fent egy rögzített $K$ csomóhoz tartozó Seifert felületek között.

**1.9. Tétel.** *[Reidemeister-Singer tétel] Legyen $\Sigma_1$ és $\Sigma_2$ a $K \subset S^3$ csomóhoz tartozó Seifert felület. Ekkor léteznek olyan $S^3$-ban izotóp $\Sigma_1'$ és $\Sigma_2'$ felületek, melyek $\Sigma_1$ illetve $\Sigma_2$ felületek elegendő számú stabilizációjával kaphatók.*

*Bizonyítás.* Lásd például [8, B.3.1 tétel]. □

**1.10. Definíció.** *Egy $K \subset S^3$ csomó 3-génusza a $g_3(K) := \min\{g(\Sigma) | \Sigma \subset S^3 \quad \partial\Sigma = K\}$ szám, vagyis a $K$-hoz tartozó Seifert felületek közül a minimális génuszú génusza.*

Könnyű látni, hogy ekvivalens csomók 3-génusza megegyezik. Legyenek ugyanis $K$, $L$ ekvivalens csomók, és $\Phi : S^3 \times I \to S^3$ a megfelelő izotópia, vagyis $\Phi(.,0) = id_{S^3}$, és $\Phi(K,1) = L$. Ekkor, ha $\Sigma$ a $K$ egy Seifert felülete, akkor $\Phi(\Sigma,1)$ egy $\Sigma$-val diffeomorf (sőt, izotóp) Seifert felülete $L$-nek.

Legyen $\Sigma \subset S^3$ a $K$ csomó egy Seifert felülete $g$ génusszal és rögzített irányítással. A továbbiakban egy $\gamma \subset \Sigma$ görbe esetén legyen $\gamma^{\uparrow} \subset S^3 \backslash \Sigma$ az a görbe, melyet úgy kapunk, hogy $\gamma$-t a $\Sigma$ irányítása által meghatározott irányban kitoljuk a $\Sigma$ felületből. Precízebben, legyen $T \subset S^3$ a $\Sigma$ egy csőszerű környezete. $\Sigma$ irányítása segítségével $T$-t azonosíthatjuk a $\Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ halmazzal, megfelelő $\varepsilon > 0$ esetén. Ezt az azonosítást használva legyen $\gamma^{\uparrow} = \gamma \times \varepsilon$.

Definiáljuk az $S_\Sigma : H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \times H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ bihomomorfizmust az alábbi módon. Az $x, y \in$ $\in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ homológiaelemeket reprezentáljuk a $\gamma_x$ illetve $\gamma_y$ egyszerű, zárt, esetleg többkomponensű görbékkel. Ekkor legyen $S_\Sigma(x,y) := lk(\gamma_x, \gamma_y^{\uparrow})$, ahol $lk$ az ($S^3$-beli) hurkolódási együtthatót jelöli. A Seifert forma jól definiáltságának ellenőrzéséhez csupán annyit kell megjegyezni, hogy ha $\gamma_x$ és $\gamma'_x$ az $x$ homológiaelem két megfelelő reprezentációja, akkor létezik olyan $F \subset \Sigma$ felület, melyre $\partial F = \gamma_x \cup -\gamma'_x$ (ahol a negatív jel az ellentétes irányítást jelöli), továbbá nyilvánvalóan $F \cap \gamma_y^{\uparrow} = \emptyset$. Hasonlóan, ha $\gamma_y$ és $\gamma'_y$ az $y$ két reprezentációja, illetve $G \subset \Sigma$ olyan felület, melyre $\partial G = \gamma_y \cup -\gamma'_y$, akkor a $G^{\uparrow} = G \times \varepsilon$ felületre $\partial G^{\uparrow} = \gamma_y^{\uparrow} \cup -\gamma_y'^{\uparrow}$, és $G^{\uparrow} \cap \gamma_x = \emptyset$.

**1.11. Definíció.** *A fent definiált $S_\Sigma : H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \times H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ bihomomorfizmust a $\Sigma$ felület Seifert formájának nevezzük. Ha $a_1, \dots, a_{2g}$ egy bázisa a $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ homológiának, akkor a Seifert forma ebben a bázisban felírt $V_\Sigma \in \mathbb{Z}^{2g \times 2g}$ mátrixát $\Sigma$ egy Seifert mátrixának nevezzük (tehát $(V_\Sigma)_{ij} = S(a_i, a_j)$).*

**1.12. Definíció.** *Legyen $V \in \mathbb{Z}^{2g \times 2g}$ a $K$ csomó $\Sigma$ Seifert felületének egy Seifert mátrixa. Ekkor a $\triangle_K(t) = \det(t^{\frac{1}{2}} V - t^{-\frac{1}{2}} V^T) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ Laurent polinomot a $K$ csomó (szimmetrizált) Alexander-polinomjának nevezzük.*

Az Alexander polinom csak asszociáltság erejéig (azaz $\pm t^n, n \in \mathbb{Z}$ egységgel való szorzás erejéig) van definiálva. A fenti definícióban megadott konkrét polinomot szimmetrizált Alexander-polinomnak nevezzük, és az Alexander-polinom fokán a szimmetrizált polinom fokát értjük. Jelen dolgozatban az Alexander polinom alatt mindig a szimmetrizált Alexander-polinomot értjük, ha nem jelezzük az ellenkezőjét. Az Alexander-polinom gyökeinek azokat a nullától különböző (komplex) számokat nevezzük, amelyek gyökeik az Alexander-polinom $\mathbb{Z}[t]$ gyűrűben levő egyik reprezentánsának. (Egy ilyen reprezentáns például a $\det(tV - V^T)$ polinom.)

**1.13. Állítás.** *Az Alexander polinom (asszociáltság erejéig) jól-definiált, és csomóinvariáns.*

*Bizonyítás.* Legyen $\Sigma$ a $K$ csomó egy Seifert felülete. Könnyen látható, hogy $\triangle_K$ nem függ a $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ bázisának választásától, hiszen ha egy adott bázisban a Seifert mátrix $V$, akkor egy másik bázisban $UVU^T$ alakú, megfelelő $U \in \mathbb{Z}^{2g \times 2g}$ mátrixra, melyre $\det U = \pm 1$, azaz

$$\det(t^{\frac{1}{2}} UVU^T - t^{-\frac{1}{2}} \left(UVU^T\right)^T) = \det(U(t^{\frac{1}{2}} V - t^{-\frac{1}{2}} V^T) U^T) = \det(t^{\frac{1}{2}} V - t^{-\frac{1}{2}} V^T).$$

Izotóp Seifert felületeknek nyilvánvalóan azonos a Seifert formájuk: $S^3$ egy $\phi : I \times S^3 \to S^3$ izotópiája során $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$-nak egy bázisát reprezentáló görbék $H_1(\phi(1, \Sigma), \mathbb{Z})$ egy bázisát reprezentáló görbéibe mennek át, miközben a hurkolódási együtthatók változatlanok maradnak. Tehát az 1.9 tétel szerint csupán azt kell ellenőrizni, hogy ha $\Sigma'$ felületet $\Sigma$-ból egy stabilizációval kapjuk, akkor az Alexander polinom nem változik. Legyen $V$ a $g$ génuszú $\Sigma$ felület egy Seifert mátrixa valamilyen $x_1, \dots, x_{2g}$ bázisban. Legyen $\gamma$ az a görbe, amely mentén a stabilizációt végrehajtjuk, és tekintsük $\gamma$-nak egy $\alpha$ meridiánját. Ekkor megfelelő $\beta \subset \Sigma'$ hurokkal $a = [\alpha], b = [\beta], x_1, \dots, x_{2g}$ a $H_1(\Sigma', \mathbb{Z})$ egy bázisát fogja adni, továbbá $S(a, a) = S(x_i, a) = S(a, x_i) = 0$ tetszőleges $i-re$; illetve $S(a, b) = 0$ és $S(b, a)$=1, vagy $S(a, b) = 1$ és $S(b, a) = 0$ teljesül ($\beta$-t megfelelően irányítva). Tegyük fel, hogy az első eset áll fenn (a második esetben teljesen analóg módon járunk el). Tekinsük a $b' = b - S(b, b)a$ és $x'_i = x_i - S(b, x_i)a$ elemeket. Ekkor az $a, b', x'_i, \dots, x'_{2g}$ bázisban a $\Sigma'$ felület $V'$

Seifert mátrixa

$$\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & v & & V & \\ 0 & & & & \end{array}$$

alakú. Tehát

$$\det(t^{\frac{1}{2}}V' - t^{-\frac{1}{2}}V'^T) = \det(t^{\frac{1}{2}}V - t^{-\frac{1}{2}}V^T)$$

□

**1.14. Állítás.** *A $K$, $K_1$ és $K_2$ csomókra igazak a következők:*

- $deg(\triangle_K) \leq g_3(K)$,
- $\triangle_K(1) = 1$,
- $\triangle_K(t) = \triangle_K(t^{-1})$,
- $\triangle_{K_1 \# K_2}(t) = \triangle_{K_1}(t)\triangle_{K_2}(t)$.

*Bizonyítás.* Határozzuk meg a $K$ csomó Alexander-polinomját a minimális génuszú $\Sigma$ Seifert felület segítségével. Ekkor a $V$ Seifert mátrix egy $2g_3(K)\times 2g_3(K)$ méretű mátrix, így az Alexander-polinom definíciójából triviálisan adódik a $deg(\triangle_K) \leq g_3(K)$ egyenőtlenség.

Könnyen látható, hogy $V - V^T$ a $\Sigma$ felület metszet formája (a megfelelő bázisban). Rögzítsünk a $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ homológiában egy algebrai szimplektius bázist, azaz olyan bázist, melyben a metszet forma mátrixa $\bigoplus_{i=1}^{g(\Sigma)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alakú. Ebben a bázisban $\triangle_K(1) = \det(V - V^T) = 1$.

Az Alexander-polinom definíciója alapján:

$$\triangle_K(t^{-1}) = \det(t^{-\frac{1}{2}}V - t^{\frac{1}{2}}V^T) = (-1)^{2g(\Sigma)}\det(t^{\frac{1}{2}}V^T - t^{-\frac{1}{2}}V) = \det(t^{\frac{1}{2}}V - t^{-\frac{1}{2}}V^T) = \triangle_K(t).$$

Legyenek $\Sigma_1$ és $\Sigma_2$ a $K_1$ illetve $K_2$ csomók Seifert felületei. Könnyen látható, hogy az a $\Sigma$ felület, amelyet úgy kapunk, hogy $\Sigma_1$-et és $\Sigma_2$-t a peremük egy kis részén összeragasztunk (az irányítással kompatibilis módon), a $K_1 \# K_2$ csomó Seifert felülete lesz, továbbá $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) = H_1(\Sigma_1, \mathbb{Z}) \oplus \oplus H_1(\Sigma_2, \mathbb{Z})$ teljesül. Vagyis ha $V_1$ és $V_2$ a megfelelő Seifert mátrixok, akkor $\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$ a $\Sigma$ egy Seifert mátrixa lesz, ebből pedig következik a $\triangle_{K_1 \# K_2}(t) = \triangle_{K_1}(t)\triangle_{K_2}(t)$ egyenlőség. □

**1.15. Definíció.** *A $K$ csomó $\sigma(K)$ szignatúrája alatt a $V + V^T$ mátrix szignatúráját értjük, ahol $V$ a $K$ csomó Seifert mátrixa. Általánosan, az $\omega \in S^1 \subset \mathbb{C}$ számhoz rendeljük hozzá az $(1-\omega)V + +(1-\bar{\omega})V^T$ hermitikus mátrix $\sigma_\omega(K)$ szignatúráját. Ezt az $S^1 \to \mathbb{Z}$ függvényt a $K$ csomó Tristram-Levine szignatúrafüggvényének nevezzük.*

**1.16. Megjegyzés.**
- *Az 1.13 állítás bizonyításában leírtakból következik, hogy a szignatúrafüggvény egy jól-definiált csomóinvariáns. Később látni fogjuk, hogy ennél több is igaz: a szignatúrafüggvény konkordizmusinvariáns.*

- *A szignatúrafüggvénynek csak az Alexander polinom gyökeiben lehet szakadási pontja, ezeken kívül pedig mindig páros értéket vesz fel. Ez egyből adódik az*

$$(1-\omega)V+(1-\bar{\omega})V^T=(\bar{\omega}-1)(\omega V-V^T)$$

*egyenlőségből, illetve abból, hogy $V$ egy "párosszor páros" méretű mátrix. Az is nyilvánvaló, hogy $\sigma_1(K)=0$, és $\sigma_{-1}(K)=\sigma(K)$.*

**1.17. Állítás.** *A szignatúrafüggvény additív, azaz tetszőleges $K_1$, $K_2$ csomó és $\omega\in S^1$ esetén*

$$\sigma_\omega(K_1\#K_2)=\sigma_\omega(K_1)+\sigma_\omega(K_2).$$

*Továbbá tetszőleges $K$ csomóra $\sigma_\omega(K)=-\sigma_\omega(m(K))$.*

*Bizonyítás.* Az 1.14 állítás bizonyításának utolsó lépése alapján, ha $V_i$ a $K_i$ csomó egy Seifert mátrixa ($i=1{,}2$), akkor a $\begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$ mátrix a $K_1\#K_2$ csomó Seifert mátrixa, ebből pedig következik az additivitás. A csomó tükörképére vonatkozó állítás pedig egyből következik az alábbi két észrevételből: ha $\Sigma$ a $K$ csomó Seifert felülete, akkor az $m(\Sigma)$ felület (azaz a $\Sigma$, egy síkra tükrözve) a $m(K)$ csomó Seifert felülete lesz, illetve tetszőleges diszjunkt, irányított $\alpha,\beta\in S^3$ hurkokra $lk(\alpha,\beta)=-lk(m(\alpha),m(\beta))$. □

**1.18. Definíció.** *Tekintsük a $K\subset S^3=\partial D^4$ csomó esetén az olyan $i:(\Sigma,\partial\Sigma)\hookrightarrow(D^4,S^3)$ sima beágyazásokat, ahol $\Sigma$ egy irányított, összefüggő felület, $S^3\cap i(\Sigma)=i(\partial\Sigma)=K$ tulajdonsággal. A $K$ csomó $g_4(K)$ 4-génuszának nevezzük az ilyen $\Sigma$ felületek közül a legkisebb génuszú génuszát. Ha $g_4(K)=0$, akkor $K$-t sima metszetcsomónak nevezzük.*

A 4-génusz és 3-génusz definíciójából adódik, hogy minden $K$ csomóra $g_4(K)\le g_3(K)$ teljesül, ugyanis ha $\Sigma$ a $K$ csomó $g_3(K)$ génuszú felülete, akkor ezt a $D^4$ golyóba "betolva" kapunk a fenti definícióban szereplő kritériumoknak eleget tevő felületet.

**1.19. Definíció.** *Tekintsük a $K\subset S^3=\partial D^4$ csomó esetén az $i:(\Sigma\times D^2,\partial\Sigma\times D^2)\hookrightarrow(D^4,S^3)$ folytonos beágyazásokat, ahol $\Sigma$ egy irányított, összefüggő felület, $S^3\cap i(\Sigma\times D^2)=i(\partial\Sigma\times D^2)=K\times\times D^2$ tulajdonsággal. A $K$ csomó $g_t(K)$ topologikus génuszának nevezzük az ilyen $\Sigma$ felületek közül a legkisebb génuszú génuszát. Ha $g_t(K)=0$, akkor $K$-t topologikus metszetcsomónak nevezzük.*

A definícióban szereplő beágyazásra úgy is lehet gondolni, mint egy olyan $i:(\Sigma,\partial\Sigma)\hookrightarrow(D^4,S^3)$, $S^3\cap i(\Sigma)=i(\partial\Sigma)=K$ folytonos beágyazás, amelynek létezik $i(\Sigma)\times D^2$ alakú csőszerű környezete. Az ilyen $i$ beágyazásokat topologikusan lapos beágyazásnak nevezzük. A fenti definícióban azért követeljük meg, hogy $i$ ne csak folytonos, hanem topologikusan lapos beágyazás is legyen, mert ellenkező esetben minden $K$ csomó topologikus metszetcsomó lenne: a ${}^{K\times[0,1]}/_{K\times 0}\subset{}^{S^3\times[0,1]}/_{S^3\times 0}==D^4$ kúp egy folytonosan beágyazott körlap, melynek pereme $K$. Nyilvánvalóan tetszőleges $K$ csomóra teljesül a $g_t(K)\le g_4(K)$ egyenlőtlenség.

**1.20. Definíció.** *A $K_1$ és $K_2$ csomók konkordánsak ($K_1\sim K_2$), ha létezik olyan $f:S^1\times I\hookrightarrow S^3\times\times I$ sima beágyazás, melyre $f(S^1{,}0)=K_1\times\{0\}$, és $f(S^1{,}1)=K_2\times\{1\}$. Azaz két csomó konkordáns, ha van köztük nulla génuszú kobordizmus. A $K$ csomó konkordizmus génuszát a $g_c(K):==\min\{g_3(L)|\quad L\sim K\}$ képlettel definiáljuk.*

**1.21. Állítás.** • *$K \sim L$ pontosan akkor igaz, ha $K\#m(L)$ sima metszetcsomó.*

- *A konkordizmus reláció kompatibilis az összefüggő unióval.*
- *A konkordizmus szerinti ekvivalenciaosztályok halmaza (jele: $\mathcal{C}$) Abel csoport az összefüggő unióra nézve.*

*Bizonyítás.* $K \sim L$ esetén legyen $f: S^1 \times [0.5,1] \hookrightarrow S^3 \times [0.5,1]$ a megfelelő kobordizmus, melyre $f(S^1,0.5) = L \times 0.5$ és $f(S^1,1) = K \times 1$. Tekintsük az $S^3 \times [0.5,1]$ teret a $D^4$ golyó gömbgyűrűjeként. A $W := Im(f)$ sokaság egy alkalmas izotópiájával (a henger egy hajlításával) elérhető, hogy $\partial W$ $S^3 \times 0.5$ térbe eső része $S^3 \times 1 = \partial D^4$ gömbbe kerüljön. Így kapunk egy $W' \subset D^4$ fogantyút, melyre $\partial W' = K \cup m(L) \subset \partial D^4$, továbbá könnyen látható, hogy ez a $W'$ fogantyú átműthető egy olyan $D^4$-beli körlappá, melynek pereme a $\partial D^4$-beli $K\#m(L)$. Fordítva, ha $K\#m(L)$ sima metszetcsomó, akkor a fenti eljárást visszafelé elvégezve kapjuk, hogy $K \sim L$.

Legyen $K_1 \sim L_1$ és $K_2 \sim L_2$. Az előzőekből következik, hogy ekkor $K_1\#m(L_1)$ és $K_2\#m(L_2)$ sima metszetcsomók. Ekkor nyilván $K_1\#m(L_1)\#K_2\#m(L_2)$ is sima metszetcsomó, de

$$K_1\#m(L_1)\#K_2\#m(L_2) = K_1\#K_2\#m(L_1)\#m(L_2) = K_1\#K_2\#m(L_1\#L_2),$$

tehát $(K_1\#K_2) \sim (L_1\#L_2)$.

Azt már tudjuk, hogy $\mathcal{C}$ az összefüggő unióra nézve kommutatív, egységelemes félcsoport, tehát csak azt kell belátni, hogy minden csomónak van inverze. $K \sim K$ miatt $K\#m(K)$ sima metszetcsomó, vagyis $\mathcal{C}$-ben az egységelemet reprezentálja. Tehát azt kaptuk, hogy tetszőleges $K$ csomónak létezik inverze (a konkordizmus csoportban), mégpedig $-K = m(K)$. □

**1.22. Megjegyzés.** *A $\mathcal{C}$ Abel csoportot a csomók konkordizmuscsoportjának nevezik. A későbbiekben a műveletet $\#$ helyett egyszerűen $+$ jellel fogjuk jelölni.*

**1.23. Definíció.** *Legyen $\Sigma$ a $K$ csomó egy Seifert felülete. Az $U \leq H_1(\Sigma,\mathbb{Z})$ részcsoportot Alexander-triviálisnak nevezzük, ha $\Sigma$ egy $S$ Seifert formájának az $U$-ra történő megszorításának triviális (konstans 1) az Alexander polinomja, azaz ha a $V$ mátrix reprezentálja az $S|_{U\times U}$ formát valamilyen bázisban, akkor $\det\left(t^{\frac{1}{2}}V - t^{-\frac{1}{2}}V^T\right) = 1$. A $K$ csomó algebrai génuszát az alábbi módon definiáljuk:*

$$g_a(K) = \min\left\{g(\Sigma) - \frac{rank(U)}{2} | \partial\Sigma = K, \quad U \leq H_1(\Sigma,\mathbb{Z}) \text{ Alexander triviális részcsoport}\right\}.$$

**1.24. Állítás.** *A fent definiált génuszok mind szubadditívak, azaz tetszőleges $K_1$ és $K_2$ csomó esetén*

$$g(K_1\#K_2) \leq g(K_1) + g(K_2),$$

*ahol $g \in \{g_3, g_4, g_t, g_c, g_a\}$.*

*Bizonyítás.* Az egyenlőtlenség a $g_3$, $g_4$ és $g_t$ génuszok esetén abból következik, hogy a $K_1$-hez illetve a $K_2$-höz tartozó megfelelő felületeket a peremük egy kis részénél összeragasztva megfelelő felületet kapunk a $K_1\#K_2$ csomóhoz. (Jelöljük a $\Sigma_1$-ből és $\Sigma_2$-ből készített felületet $\Sigma_1\natural\Sigma_2$-vel.) $g_3$ szubadditivitásából adódik $g_c$ szubadditivitása is:

$$g_c(K_1\#K_2) \leq g(\Sigma_1\natural\Sigma_2) = g(\Sigma_1) + g(\Sigma_2) = g_c(K_1) + g_c(K_2),$$

ha a $\Sigma_i$ felületeket úgy választjuk, hogy $g(\Sigma_i) = g_c(K_i)$ teljesüljön ($i = 1{,}2$). Továbbá ha $U_1$ és $U_2$ a $K_1$ és a $K_2$ csomók egy-egy Alexander triviális részcsoportjai, akkor $U_1 \oplus U_2$ a $K_1\#K_2$ csomó Alexander triviális részcsoportja lesz, így

$$g_a(K_1\#K_2) \leq g(\Sigma_1 \natural \Sigma_2) - \frac{rank(U_1) + rank(U_2)}{2} = g(\Sigma_1) - \frac{rank(U_1)}{2} + g(\Sigma_2) - \frac{rank(U_2)}{2} = g_a(K_1) + g_a(K_2),$$

$\Sigma_1, \Sigma_2, U_1$ és $U_2$ megfelelő választásával. □

**1.25. Megjegyzés.** *A $g_3$ génuszra az additivitás is igaz, azaz $g_3(K_1\#K_2) = g_3(K_1) + g_3(K_2)$, lásd például [7, 2.4 tétel].*

## 2. Freedman tétele

Legyenek $A$ és $B$ komplementer dimenziós, irányított, zárt sokaságok az $M$ irányított, zárt sokaságba immertálva, azaz tekintsük az $f : A \looparrowright M$ és $g : B \looparrowright M$ immerziókat, ahol $\dim A + \dim B = \dim M$. (A jelölések egyszerűsítése érdekében $f(A)$-t $f$-fel, $g(B)$-t pedig $g$-vel azonosítjuk.) Alkalmazzuk $f$ és $g$ metszési indexére az $f \cdot g$ jelölést. A következőkben a metszési indexet szeretnénk általánosítani olyan módon, hogy a $\mathbb{Z}[\pi]$ csoportgyűrűbe képezzen, ahol $\pi = \pi_1(M)$ a bennfoglaló tér fundamentális csoportját jelöli. Ezt a metszési indexet $\lambda(f, g)$-vel fogjuk jelölni, és ekvivariáns metszési indexnek nevezzük.

Az ekvivariáns metszési indexet csak egyszeresen összefüggő immertált sokaságokra definiáljuk, így tegyük fel, hogy $A$, $B$ és $M$ összefüggő, továbbá $A$ és $B$ egyszeresen összefüggő sokaságok. Tekintsük az $f \cap g$ halmazt. A transzverazitási tétel miatt feltehető, hogy ez nulldimenziós (kompakt) sokaság, azaz véges sok pontból áll. Először rögzítsünk egy $x_0 \in f \cap g$ pontot és egy $\eta_{x_0} : I \to M$ görbét, amely $M$ bázispontjából indul, és $x_0$-ban végződik. ($f \cap g = \emptyset$ esetén legyen $\lambda(f, g) = 0$). Minden $x \in f \cap g$ ponthoz hozzárendelünk egy $h_x \in \pi$ és egy $\varepsilon_x \in \{-1{,}1\}$ elemet az alábbi módon. Vegyük az $\alpha^x_{x_0}, \beta^{x_0}_x : I \to f \cup g$, görbéket, melyekre $\alpha^x_{x_0}(0) = \beta^{x_0}_x(1) = x_0$, $\alpha^x_{x_0}(1) = \beta^{x_0}_x(0) = x$, $\alpha^x_{x_0} \subset f$ és $\beta^{x_0}_x \subset g$ feltételek teljesülnek, továbbá megfelelő $\tilde{\alpha}^x_{x_0} \subset A$ és $\tilde{\beta}^{x_0}_x \subset B$ görbékkel $\alpha^x_{x_0} = f \circ \tilde{\alpha}^x_{x_0}$ és $\beta^{x_0}_x = g \circ \tilde{\beta}^{x_0}_x$. Legyen $h_x = [\eta_{x_0} * \alpha^x_{x_0} * \beta^{x_0}_x * \bar{\eta}_{x_0}]$, vagyis az adott hurok által reprezentált fundamentális csoportbeli elem (a $*$ jel az összefűzésre utal). (Az $\tilde{\alpha}^x_{x_0}$ és $\tilde{\beta}^{x_0}_x$ görbék létezését a jól-definiáltság bizonyításában fogjuk kihasználni.) Az $\varepsilon_x$ pedig legyen $1$, ha $f$ és $g$ $x$-beli érintőterei (ilyen sorrendben) az $M$ irányítása által meghatározott irányítással generálják $M$ $x$-beli érintőterét, ellenkező esetben pedig legyen $\varepsilon_x = -1$.

**2.1. Definíció.** *A fenti jelölésekkel az $f : A \looparrowright M$ és $g : B \looparrowright M$ immerziók képeinek ekvivariáns metszési indexét a*

$$\lambda(f, g) = \sum_{x \in f \cap g} \varepsilon_x h_x$$

*képlettel definiáljuk.*

**2.2. Állítás.** *A $\lambda(f, g) \in \mathbb{Z}[\pi]$ ekvivariáns metszési index $\pi$-beli elemekkel történő jobbról, illetve balról szorzás erejéig jól definiált.*

*Bizonyítás.* $f$ és $g$ legyenek először transzverzálisak egymásra. Tegyük fel, hogy $\eta_{x_0}$ helyett egy $\eta' x_0$ görbét választunk. Ekkor tetszőleges $x \in f \cap g$ pontra

$$[\eta'_{x_0} * \alpha^x_{x_0} * \beta^{x_0}_x * \bar{\eta}'_{x_0}] = [\eta'_{x_0} * \bar{\eta}_{x_0} * \eta_{x_0} * \alpha^x_{x_0} * \beta^{x_0}_x * \bar{\eta}_{x_0} * \eta_{x_0} \bar{\eta}'_{x_0}] = [\eta'_{x_0} * \bar{\eta}_{x_0}][\eta_{x_0} * \alpha^x_{x_0} * \beta^{x_0}_x * \bar{\eta}_{x_0}][\eta'_{x_0} * \bar{\eta}_{x_0}]^{-1}$$

teljesül, tehát $\lambda(f,g)$ konjugálás erejéig független $\eta_{x_0}$ megválasztásától.

Most válasszunk $x_0$ helyett egy másik $x'_0 \in f \cap g$ pontot. Ekkor tetszőleges $x \in f \cap g$ pontra

$$[\eta_{x'_0} * \alpha^x_{x'_0} * \beta^{x'_0}_x * \bar{\eta}_{x'_0}] = [\eta_{x'_0} * \alpha^{x_0}_{x'_0} * \alpha^x_{x_0} * \beta^{x_0}_x * \beta^{x'_0}_{x_0} * \bar{\eta}_{x'_0}] = [\eta_{x'_0} * \alpha^{x_0}_{x'_0} * \bar{\eta}_{x_0}][\eta_{x_0} * \alpha^x_{x_0} * \beta^{x_0}_x * \bar{\eta}_{x_0}][\eta_{x_0} * \beta^{x'_0}_{x_0} * \bar{\eta}_{x'_0}],$$

amely bizonyítja, hogy $\lambda(f,g)$ balról illetve jobbról szorzás erejéig független $x_0$ megválasztásától.

Mivel $A$ és $B$ egyszeresen összefüggő, $\lambda(f,g)$ független az $\alpha^x_{x_0}$ és $\beta^{x_0}_x$ (vagyis az $\tilde{\alpha}^x_{x_0}$ és $\tilde{\beta}^{x_0}_x$) görbék megválasztásától.

Ha $f$ és $g$ nem transzverzális egymásra, akkor jól ismert, hogy például $f$ egy reguláris homotópiájával transzverzálissá tehetők, tehát azt kell belátni, $\lambda(f,g)$ független ezen homotópia megválasztásától. Ehhez elegendő belátni, hogy regulárisan homotóp $f_0, f_1 : A \looparrowright M$, $g$-re transzverzális immerziókra $\lambda(f_0,g) = \lambda(f_1,g)$.

Legyen $H : I \times A \to M$ egy reguláris homotópia $f_0$ és $f_1$ között (amelyről feltehető, hogy minden $t \in I$-re $H(t,A)$ transzverzális $g$-re). Először belátjuk, hogy ha $f_0 \cap g$ két, $x_1$ és $x_2$ pontban különbözik $f_1 \cap g$-től (például $f_1 \cap g = (f_0 \cap g) \cup \{x_1, x_2\}$), akkor $h_{x_1} = h_{x_2}$ és $\varepsilon_{x_1} = -\varepsilon_{x_2}$. Utóbbi egyenlőség jól ismert, az előbbi belátásához pedig vegyük észre, hogy a $h_{x_1}$ és $h_{x_2}$ elemeket definiáló hurkok homotópia erejéig csak egy olyan $f_1 \circ \gamma$, $g \circ \sigma$, $x_1$ és $x_2$ közötti görbékben különböznek egymástól, ahol $\gamma \subset A$ és $\sigma \subset B$. A $H$ homotópia segítségével kaphatunk egy végpontokon kötött homotópiát $f_1 \circ \gamma$ és egy $g$-beli görbe, nevezetesen a $g \cap H(I,\gamma)$ között. Könnyen meggondolható, hogy ez a görbe előáll $g \circ \tilde{\sigma}$ alakban, megfelelő $\tilde{\sigma} \subset B$ görbével (abban az esetben is, ha $H(I,\gamma)$ esetleg $g$ többszörös pontjait is metszi). Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $x_1$ és $x_2$ egyszeres pontjai $g$-nek, ebből pedig kapjuk, hogy $\tilde{\sigma}$ és $\sigma$ végpontjai megegyeznek, így ők $B$-ben kötötten homotópok. Összességében kaptunk egy végpontokon kötött homotópiát $f_1 \circ \gamma$ és $g \circ \sigma$ között. Ha a $H$ homotópia során $H(t,A) \cap g$ halmaz pontjai "mozognak", a fenti gondolatmenethez hasonlóan, a $H$ homotópia biztosítja a megfelelő görbék közti homotópiát. $\square$

**2.3. Megjegyzés.** *A definícióban szereplő jelölésekkel*

$$\lambda(g,f) = \sum_{x \in f \cap g} (-1)^n \varepsilon_x h_x^{-1},$$

*ahol $n \in \mathbb{N}$ a dimenzióktól függő konstans. Tehát általában $\lambda(f,g) \neq \lambda(g,f)$, így az ekvivariáns önmetszési index nem definiálható $\mathbb{Z}[\pi]$-beli elemként. Tekintsük a $h - (-1)^n h^{-1}$, $h \in \pi$ elemek által generált $I \triangleleft \mathbb{Z}[\pi]$ ideált. Ekkor az ekvivariáns önmetszési index egy ${}^{\mathbb{Z}[\pi]}/_{I}$ gyűrűbeli elemként definiálható. A továbbiakban az ekvivariáns önmetszési indexet ebben a faktorgyűrűben fogjuk érteni.*

Legyen $M$ egy 4-dimenziós irányított kompakt sokaság, egy rögzített $p$ bázisponttal, és tekintsük az $[f], [g] \in \pi_2(M)$ elemeket, melyeknél feltehető, hogy $f, g : S^2 \looparrowright M$ függvények immerziók. (A továbbiakban a "[.]" zárójelet elhagyva fogunk hivatkozni a megfelelő immerzió által reprezentált homotópiacsoport elemére.) Ebben az esetben $\lambda(f,g)$ nem csak bal illetve jobbszorzás erejéig definiálható, hanem jól meghatározott, $\mathbb{Z}[\pi]$-beli elemként is ($\pi=\pi_1(M)$, ahogy eddig), mivel $x_0 \in f \cap g$ pontot választhatjuk a $p$ bázispontnak, az $\eta_{x_0}$ utat pedig a konstans útnak.

Jól ismert, hogy a fundamentális csoportnak megadható egy hatása a többi homotópiacsoporton, és igazolhatók a következő egyenlőségek.

**2.4. Állítás.** *Minden $f,g,h \in \pi_2(M)$ és $\gamma \in \pi$ esetén teljesülnek az alábbiak:*

- $\lambda(f+g,h) = \lambda(f,g)+\lambda(g,h)$,
- $\lambda(\gamma \cdot f, g) = \gamma \cdot \lambda(f,g)$,
- $\lambda(f, \gamma \cdot g) = \lambda(f,g) \cdot \gamma^{-1}$.

*Bizonyítás.* $\lambda$ additivitása triviálisan teljesül. $\dim\gamma+\dim g=1+2<4$ miatt feltehető, hogy $\gamma\cap g=\emptyset$, így amikor $\gamma \cdot f$ elemet immerzióval közelítjük, feltehető, hogy a $\gamma$-nak megfelelő rész diszjunkt $g$-től. Továbbá könnyen adódik, hogy $\lambda(\gamma\cdot,g)$ számolásában megjelenő $h_x$-ek megegyeznek a $\gamma\tilde{h}_x$-ekkel, ahol $\tilde{h}_x$-ek a $\lambda(f,g)$ számolásánál megjelenő elemek. Ebből már egyszerűen adódnak a homogenitásra vonatkozó egyenlőségek. □

**2.5. Megjegyzés.** *Meggondolható, hogy az ekvivariáns metszési index általánosítható kompakt peremes sokaságokra is: ha $A,B,M$ kompakt, esetleg peremes sokaságok, akkor az $f:(A,\partial A) \looparrowright (M,\partial M)$ és $g:(B,\partial B) \looparrowright (M,\partial M)$ immerziók $\lambda(f,g)$ ekvivariáns metszési indexe (peremet perembe képező reguláris homotópia erejéig) a fentiekkel analóg módon definiálható.*

**2.6. Definíció.** *Legyen $N$ egy 4-dimenziós, peremes, kompakt sokaság, és $\triangle_i:(D^2,\partial D^2) \looparrowright (N,\partial N)$ a körlap immerziói. A $\triangle_i$ immerziók duális gömbjeinek nevezzük azokat az $f_i: S^2 \looparrowright N$ tüskézett (azaz a normálnyaláb egy rögzített trivializálásával ellátott) immerziókat, melyekre $\lambda(f_i,\triangle_j)=\delta_i^j$, ahol*

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 \in \pi_1(N) & ha \quad i=j, \\ 0 & ha \quad i \neq j. \end{cases}$$

A következő lemma alapján a dulális gömbök létezésének igazolásához nem kell közvetlenül a duális gömböket megkonstruálni.

**2.7. Lemma.** *A $\triangle_i: D^2 \looparrowright M$ immerziókhoz (ahol $M$ egy 4 dimenziós kompakt sokaság) pontosan akkor léteznek $f_i$ duális gömbök, ha léteznek olyan $g_i: S^2 \looparrowright M$ tüskézett immerziók, amelyekre $\lambda(g_i,\triangle_i)=1$ minden $i$-re, és $i<j$ esetén $\lambda(g_i,\triangle_j)=0$.*

*Bizonyítás.* Legyen $f_1 := g_1$, és

$$f_i := g_i - \sum_{k=1}^{i-1} \lambda(g_i,\triangle_k)\cdot f_k,$$

ahol az $f_i, g_i$ immerziókat $\pi_2(M)$-beli elemként tekintjük. Felhasználva a 2.4 állítást, egyszerű számolással adódik, hogy $f_i$-k duális gömbjei lesznek a $\triangle_i$ immerzióknak. □

**2.8. Tétel** (Freedman beágyazási tétele)**.** *Legyen $N$ egy 4 dimenziós peremes sokaság és $\triangle_i:(D^2,S^1) \looparrowright (N,\partial N)$ véges sok immerzió, melyek a peremen beágyazások, továbbá tegyük fel, hogy*

$\lambda(\triangle_i, \triangle_j) = 0$ *minden* $i, j$*-re. Ha N fundamentális csoportja "jó", és léteznek duális gömbök a* $\triangle_i$ *immerziókhoz, akkor létezik olyan, a peremen kötött homotópia, amely a* $\triangle_i$*-ket páronként diszjunkt, topologikusan lapos beágyazásokba viszi át.*

**2.9. Megjegyzés.**

- *Freedman tételének* $4$*-nél magasabb dimenziókra vonatkozó változata is igaz, kevesebb feltétellel: a duális gömbök létezése nem szükséges. Ez a változat egyszerűbb a* $4$*-dimenziós esetnél, és a Whitney trükk alkalmazásával bizonyítható be (ismert, hogy* $4$*-dimenzióban a Whitney trükk nem működik).*
- *Az* $N$ *sokaság fundamentális csoportjára vonatkozó "jó" feltétellel jelen dolgozatban nem foglalkozunk, csupán annyit jegyzünk meg, hogy a feloldható csoportok jónak számítanak, és az általunk vizsgált konkrét esetben* $\pi_1(N) = \mathbb{Z}$ *fog teljesülni.*
- *Ismert, hogy a duális gömbök létezése valóban szükséges feltétel. Azonban még nem ismert, hogy a fundamentális csoportra vonatkozó feltevés valóban szükséges-e.*

# 3. Csomók triviális Alexander polinommal

A fejezet célja a következő tétel bebizonyítása, Freedman tételének felhasználásával.

**3.1. Tétel.** *Ha a* $K$ *csomóra* $\triangle_K \equiv 1$ *teljesül, akkor* $g_t(K) = 0$*, azaz* $K$ *topologikus metszetcsomó.*

Látni fogjuk, hogy a bizonyítás egyik kulcslépése a Seifert mátrix megfelelő alakra hozása. Először ezzel kapcsolatban bizonyítunk egy lemmát.

**3.2. Lemma.** *Legyen* $\Sigma \subset S^3$ *a* $K$ *csomó* $g$ *génuszú Seifert felülete. Ekkor létezik olyan bázisa* $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$*-nek, melyben a Seifert forma mátrixa az alábbi alakú:*

$$\left[\begin{array}{cc|c}
\begin{array}{c|cc} M_{2d} & v_{g-d} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline v_{g-d}^T & 0 & 0 \\ 0 \ \cdots \ 0 & 1 & 0 \end{array} & & \begin{matrix} v_1 & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix}\end{matrix} \\
 & \ddots & \\ \hline
\multicolumn{2}{c|}{\begin{matrix} v_1^T \\ 0\ \ 0\ \ \cdots\ \ 0\ \ 0\end{matrix}} & \begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}
\end{array}\right]$$

*ahol* $M_{2d} \in \mathbb{Z}^{2d\times 2d}$*,* $\det M_{2d} \neq 0$*, és* $v_i \in \mathbb{Z}^{2g-2i}$ *oszlopvektorok, továbbá* $d = \deg \triangle_K$*.*

*Bizonyítás.* Legyen $M_{2g}$ a Seifert forma mátrixa egy tetszőleges bázisban. Ha $\det M_{2g} \neq 0$ akkor készen vagyunk, mivel ebben az esetben $d = g$. (A szimmetrizált Alxander polinomban a $t^g$ tag együtthatója pontosan $\det M_{2g}$.) Ellenkező esetben megfelelő bázistranszformációval elérhető, hogy $M_{2g}$ utolsó oszlopa csak $0$-kat tartalmazzon, például választhatunk egy primitív elemet $M_{2g}$ magjából, és ezt kiterjeszthetjük egy bázissá. Az 1.14 állítás alapján $\det(M_{2g} - M_{2g}^T) = 1$, vagyis $M_{2g}-M_{2g}^T$ utolsó sorában levő elemek, (amelyek megegyeznek $M_{2g}$ utolsó sorában levő elemekkel) legnagyobb közös osztója 1, vagyis léteznek $a_1,\dots,a_{2g-1}\in\mathbb{Z}$ számok, melyekre

$$S\left(x_{2g},\sum_{i=1}^{2g-1}a_ix_i\right)=\sum_{i=1}^{2g-1}a_iS(x_{2g},x_i)=1,$$

ahol $x_1,\dots,x_{2g}$ az aktuális $H_1(\Sigma,\mathbb{Z})$-beli bázis. Legyen $z=\sum_{i=1}^{2g-1}a_ix_i$, amely egy primitív elem, mivel az $a_i$ számok legnagyobb közös osztója csak $1$ lehet. Kiegészítve a $\{z,x_{2g}\}$ halmazt egy $\{y_1,\dots,y_{2g-2},z,x_{2g}\}$ bázissá, majd $y_i$ elemeket az $y_i'=y_i-S(x_{2g},y_i)z$ elemekre cserélve olyan bázist kapunk, melyben a Seifert mátrix

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} & & & & 0\\ & M_{2g-2} & & w_1 & \vdots\\ & & & & 0\\ \hline & v_1^T & & \xi & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

alakú, ahol $M_{2g-2}\in\mathbb{Z}^{(2g-2)\times(2g-2)}$, $\xi\in\mathbb{Z}$ és $v_1,w_1\in\mathbb{Z}^{2g-2}$ oszlopvektorok. Hajtsunk végre egy újabb bázistranszformációt, legyen $y_i''=y_i'-(w_i-v_i)x_{2g}$ minden $i=1,\dots,2g-2$ esetén, $z'=z-\xi x_{2g}$, és tekintsük a $\{y_1'',\dots,y_{2g-2}'',z',x_{2g}\}$ bázist. Egyszerű számolás mutatja, hogy ebben a bázisban a Seifert forma mátrixa

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} & & & & 0\\ & \tilde{M}_{2g-2} & & v_1 & \vdots\\ & & & & 0\\ \hline & v_1^T & & 0 & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

alakú, megfelelő $\tilde{M}_{2g-2}\in\mathbb{Z}^{(2g-2)\times(2g-2)}$ mátrixra. Így indukcióval adódik a Seifert forma mátrixára vonatkozó állítás. A $d=\deg\triangle_K$ egyenlőség pedig azonnal adódik az Alexander polinom fenti formájú Seifert mátrixból történő kiszámításából:

$$\triangle_K(t)=\det\left(t^{\frac{1}{2}}M_{2d}-t^{-\frac{1}{2}}M_{2d}^T\right).$$

$\square$

**3.3. Megjegyzés.** *Vegyük észre, hogy a fenti bizonyításban az $M_{2g}$ Seifert mátrixszal kapcsolatban csak azt használtuk fel, hogy $\det\left(M_{2g}-M_{2g}^T\right)=1$ teljesül. Tehát ha $M_{2g}$ helyett a Seifert formának csak egy $U\le H_1(\Sigma,\mathbb{Z})$ Alexander triviális részcsoportra való megszorításának mátrixát vizsgáljuk, a fenti lemma továbbra is érvényben marad.*

*A 3.1 tétel bizonyítása.* Válasszunk egy $g$ génuszú $\Sigma\subset S^3$ Seifert felületet a $K$ csomóhoz. $\triangle_K\equiv 1$ miatt a 3.2 alapján valamilyen $\{x_1,y_1,\dots,x_g,y_g\}$bázisban a $V$ Seifert mátrix

$$
\left[\begin{array}{cc|ccc|cc}
0 & 0 & v_{g-1} & 0 & & & \\
1 & 0 & & 0 & & & 0 \\ \cline{1-4}
v_{g-1}^T & & 0 & 0 & & v_1 & \vdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & 0 \\
 & & & & \ddots & & \\ \hline
 & & v_1^T & & & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

alakú. $V - V^T = \bigoplus_{i=1}^{g} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ miatt $\{x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g\}$ egy algebrai szimplektikus bázis (lásd 8.1 definíció). Tehát a függelékben található 8.6 állítás alapján léteznek olyan $s_1, l_1, \ldots, s_g, l_g \subset \Sigma$ összefüggő, egyszerű, zárt görbék, amelyek geometriai szimplektikus bázist (lásd 8.2 definíció) alkotnak, és amelyekre $[s_i] = y_i$, $[l_i] = x_i$ teljesül.

Tekintsük a $\Sigma$ felületet a $\Sigma' = \Sigma \times \{1\} \cup K \times [1{,}1.5] \subset {}^{S^3 \times [0,1.5]}/_{S^3 \times \{0\}} = D^4_{1.5}$ felület részeként. Továbbá rögzítsük a $\Sigma$ felület $\nu(\Sigma \subset D^4_{1.5})$ normálnyalábjának $\nu(\Sigma \subset D^4_{1.5}) \cong \nu(S^3 \subset D_{1.5}) \times \nu(\Sigma \subset$ $\subset S^3) \cong \mathbb{R}^2$ trivializációját, és tekintsük $\Sigma$-nak ezzel a trivializációval koordinátázott $\Sigma \times I_1 \times$ $\times I_2$ csőszerű környezetét, ahol $I_1 = [0.9{,}1.1]$, és $I_2 = [-\varepsilon, \varepsilon]$, elegendően kicsi $\varepsilon > 0$ számra. Ilyen jelölések mellett egy $\alpha \subset \Sigma$ görbe jelentse az $\alpha \times 1 \times 0$ görbét, $\alpha^{\uparrow}$ pedig az $\alpha \times 1 \times \varepsilon$ görbét. Legyen $N = \overline{D^4_{1.5} \setminus W}$, ahol $W$ a $\Sigma'$ felület $D^4_{1.5}$-beli csőszerű környezete, melyben a $\Sigma \subset \Sigma'$-nak megfelelő csőszerű környezet $\Sigma \times I_1 \times I_2$.

Vegyünk olyan $\triangle_i : (D^2, \partial D^2) \looparrowright (N, \partial N)$ immerziókat, melyekre $\triangle_i(\partial D^2) = s_i^{\uparrow}$, $\triangle_i(D^2_{0.5}) \subset D^4_{0.5}$, továbbá az $r$ sugarú $S^1_r$ körökre $r \in [0.5{,}1]$ esetén $\triangle_i(S^1_r) = s_i \times r \times \varepsilon$. Ilyen immerziók valóban léteznek, például az ${}^{s_i \times [0,1] \times \varepsilon}/_{s_i \times 0 \times \varepsilon}$ kúpokat a csúcsoknál módosítva megfelelő immerziókat kapunk. Azt szeretnénk belátni a Freedman tétel alkalmazásával, hogy ezek a $\triangle_i$ immerziók a peremen kötött reguláris homotópiával $N$-ben páronként diszjunkt topologikusan lapos beágyazásokba vihetők át. Ebből már következne, hogy $\Sigma_1$ az $s_i$ görbék mentén átműthető egy topologikusan lapos $0$ génuszú felületté, vagyis $g_t(K) = 0$ teljesülne. Tehát már csak a Freedmann tétel kritériumainak teljesülését kell ellenőrizni.

$$\triangle_i \cdot \triangle_j = lk(s_i^{\uparrow}, s_j^{\uparrow}) = lk(s_i, s_j^{\uparrow}) = S(y_i, y_j) = 0$$

teljesül, és $\triangle_i \cap \triangle_j$ része a $D^4_{0.5}$ golyónak, azaz $N$ egy egyszeresen összefüggő részének, így létezik $g \in \pi_1(N)$, melyre $\lambda(\triangle_i, \triangle_j) = (\triangle_i \cdot \triangle_j)\, g = 0$.

Belátjuk, hogy $N$ fundamentális csoportjára vonatkozó feltétel teljesül, pontosabban hogy $\pi_1(N) \cong \mathbb{Z}$. Először a $H_1(N, \mathbb{Z})$ homológiát számoljuk ki az Alexander dualitás segítségével (vagy az 5.2 lemmából):

$$H_1(N, \mathbb{Z}) \cong H^2(\Sigma', \partial\Sigma') \cong \mathbb{Z}.$$

Továbbá feltehetjük, hogy a $D^4_{1.5}$ golyón értelmezett $f$ sugárfüggvény $\Sigma$-ra vett megszorítása egy Morse függvénye $\Sigma$-nak, ennek kritikus pontjaiból nyert cellafelbontás komplemeter felbontása adja $N$ alábbi cellafelbontását:

- 0 cella: 1 darab (origó),

- 1 cella: 1 darab ($\Sigma$ minimuma),
- 2 cella: $2g$ darab ($\Sigma$ egy indexű kirtikus pontjai).

Tehát $N$ homotópikus ekvivalencia erejéig egy $S^1$-hez ragasztott $2g$ darab $D_i^2$ körlap. A $D_i^2$ ragasztóleképezéseinek foka csak 0 lehet, mivel ellenkező esetben $\pi_1(N) \cong \mathbb{Z}_n$ teljesülne valammilyen $n \in \mathbb{Z}$ számra, ez pedig ellentmond annak, hogy $H_1(N,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Tehát az összes ragasztóleképezés foka 0, így $N$ homotóp ekvivalens egy $S^1$ és $2g$ darab $S^2$ csokrával (egypontú uniójával), amiből következik, hogy $\pi_1(N) \cong \mathbb{Z}$.

Még hátravan a duális gömbök megkonstruálása. Ehhez tekintsük az alábbi $\mathcal{T}_i \subset N$ beágyazott tóruszokat, amelyekre

$$\mathcal{T}_i := l_i \times S_t^1, \quad \text{ahol} \quad S_t^1 := [0.8,1.2] \times \{-2\varepsilon, 2\varepsilon\} \cup \{0.8,1.2\} \times [-2\varepsilon, 2\varepsilon].$$

A $\mathcal{T}_i$ tóruszok a $\triangle_i$ körlapok duálisai, abban az értelemben, hogy $|\mathcal{T}_i \cap \triangle_j| = |(l_i \cap s_j) \times 0.8 \times \varepsilon| = \delta_i^j$. Ezen tóruszok segítségével konstruáljuk majd meg a duális gömböket. Vegyünk olyan $\triangle_i' : D_{0.8}^2 \looparrowright N$ immerziókat, melyekre $\triangle_i'(\partial D_{0.8}^2) = l_i \times 0.8 \times 0 \subset \mathcal{T}_i$, $\triangle_i'(D_{0.5}^2) \subset D_{0.5}^4$, továbbá az $r$ sugarú $S_r^1$ körökre $r \in [0.5,0.8]$ esetén $\triangle_i'(S_r^1) = l_i \times r \times 0$. Ezután tekintsük az $S_i = l_i \times 0.8 \times [-\varepsilon, 0] \subset \mathcal{T}_i$ szalagot, és vegyünk fel egy origón átmenő $H \subset \mathbb{R}^4$ hipersíkot, amely nem metszi $W$-t és a $\triangle_i$ körlapokat. Az $lk(l_i, l_i^{\uparrow}) = 0$ feltétel miatt $S_i$ két peremének egymással vett hurkolódási száma 0, így egy megfelelő $L : S^1 \times I \times I \to S^3$ reguláris homotópiával $S_i$ a standard módon beágyazott $S_i'$ szalagba vihető át (ehhez az $lk(l_i, l_i^{\uparrow}) = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ feltétel is elég volna), továbbá feltehető, hogy $S_i'$ középvonala a $H$ hipersíkban van, fala pedig merőleges $H$-ra. Valósítsuk meg ezt a homotópiát a $S^3 \times [0.8,0.9] \subset \subset D^4$ gömbgyűrűben, és ragasszuk $\triangle_i' \cup (\mathcal{T}_i \backslash S_i)$-hez a peremének (azaz $l_i \times 0.8 \times -\varepsilon$-nak) az $L$ homotópia szerinti képét. Jelöljük az így kapott körlapot $\triangle_i''$-vel, tehát $\partial \triangle_i''$ az $S_i'$ szalag egyik pereme. Vegyünk fel egy $(u_1, u_2)$ tüskézést $\triangle_i''$-n. (Pontosabban, a $(\triangle_i'')^* \left(\nu(im \triangle_i'' \subset D^4)\right)$ nyaláb egy trivializációját, amely létezik, mivel $D^2$ felett minden nyaláb triviális.) Legyen $T \in End(\mathbb{R}^4)$ a $H$ hipersíkra történő tükrözés. Tekintsük a $g_i = \triangle_i'' \cup S_i' \cup T(\triangle_i'')$ gömböt, ahol a ragasztást a peremek mentén végezzük, illetve a $T(\triangle_i'')$ immertált körlapon vegyük a $T \circ (u_1, u_2) \circ T$ tüskézését. Mivel $D^4$ sugáriránya, és az $S_i'$ szalag normálvektora fixpontjai $T$-nek (illetve ezek generálják a $\nu(S_i' \subset D^4)$ normálnyalábot), $S_i'$ peremein kapott tüskézések megegyeznek, abban az értelemben, hogy $x \in \partial S_i' \cap \triangle_i''$ esetén $(u_1(x), u_2(x)) = (T(u_1(x)), T(u_2(x)))$. Ebből következik, hogy a tüskézés kiterjeszthető $S_i'$-re, tehát $g_i$ tüskézhető, továbbá $g_i \subset N$. Mivel $i \leq j$ esetén $lk(l_i, s_j^{\uparrow}) = S(x_i, y_j) = = 0$, tehát $lk(l_i \times 0.8 \times -\varepsilon, s_j \times 0.8 \times \varepsilon) = 0$; feltehető az is, hogy $g_i$-nek az $S_i$ szalag homotópiájából származó része nem metszi $\triangle_j$-t; továbbá $T(\triangle_i'') \cap \triangle_j = \emptyset$ is teljesül a $H$ hipersíkra vonatkozó feltétel miatt. Összességében azt kaptuk, hogy $i \leq j$ esetén $g_i \cap \triangle_j = (\triangle_i' \cup \mathcal{T}_i) \cap \triangle_j$, és ennek a metszetnek a $\triangle_i' \cap \triangle_j$ része benne van $D_{0.5}^4$-ben, azaz $N$ egy egyszeresen összefüggő részében. Ezek alapján az ekvivariáns metszési indexek $i \leq j$ esetén

$$\lambda(g_i, \triangle_j) = \delta_i^j + (\triangle_i' \cdot \triangle_j)h = \delta_i^j + lk(l_i, s_j^{\uparrow})h = \delta_i^j,$$

ahol $h \in \pi_1(N)$. Vagyis

$$\lambda(g_i, \triangle_i) = 1, \quad \text{és} \quad \lambda(g_i, \triangle_j) = 0, \quad \text{ha} \quad i < j,$$

tehát a 2.7 lemma alapján léteznek duális gömbök a $\triangle_i$ körlapokhoz. Ezzel beláttuk a 3.1 tételt.

□

# 4. Az algebrai és a topologikus génusz kapcsolata

Az előző fejezetben beláttuk, hogy triviális Alexander polinommal rendelkező csomók topologikus metszetcsomók (3.1 tétel). Ennek egy általánosításának tekinthető az az állítás, amely szerint az Alexander-polinom foka felülről becsli a topologikus génuszt. Ebben a fejezetben egy ennél erősebb állítást fogunk bizonyítani, nevezetesen azt, hogy az algebrai génusz felülről becsli a topologikus génuszt.

Először azt látjuk be, hogy az Alexander polinom fokát alulról becsli az algebrai génusz.

**4.1. Állítás.** *Minden $K$ csomóra $g_a(K) \leq \deg \triangle_K$.*

*Bizonyítás.* Legyen $\Sigma$ a $K$ csomó egy $g$ génuszú Seifert felülete. Vegyünk fel egy $\{x_1, \dots, x_{2g}\}$ bázist $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$-ben, amelyben a Seifert mátrix 3.2 lemmabeli alakú. Ekkor $U = \langle x_{2d+1}, \dots, x_{2g} \rangle$ Alexander-triviális részcsoport, és $g - \frac{rank(U)}{2} = d$. □

**4.2. Tétel.** *Minden $K$ csomóra $g_t(K) \leq g_a(K)$.*

*Bizonyítás.* Legyen $\Sigma$ a $K$ egy $g$ génuszú Seifert felülete, és $U \leq H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ Alexander-triviális részcsoport, amelyre $g_a(K) = g - k$, ahol $k = \frac{rank(U)}{2}$. A 3.3 megjegyzés alapján felvehető $U$-ban egy olyan $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$ bázis, melyben az $S|_{U \times U}$ forma $M_{2k}$ Seifert mátrixa

$$\left[\begin{array}{cc|cc c|cc}
0 & 0 & & 0 & & & \\
1 & 0 & v_{k-1} & 0 & & & 0\\
v_{k-1}^T & & 0 & 0 & & v_1 & \vdots\\
0 & 0 & 1 & 0 & & & 0\\
& & & & \ddots & & \\
\hline
& & v_1^T & & & 0 & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]$$

alakú. Mivel $M_{2k} - M_{2k}^T = \bigoplus_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, így $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$ egy algebrai szimplektikus bázis $U$-hoz. Emellett az $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$ elemek primitívek $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$-ben. Ugyanis ha például $x_i = na$, valamilyen $n \in \mathbb{Z}$ számra és $a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ elemre, akkor $1 = x_i \cdot y_i = n(a \cdot y_i)$ miatt csak $|n| = 1$ lehetséges.

A függelékben található 8.6 állítás alapján az $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$ elemek reprezentálhatók a $\gamma_1, \sigma_1, \dots, \gamma_k, \sigma_k$ egyszerű, zárt, összefüggő görbékkel, amelyek $U$ egy geometriai szimplektikus bázisát alkotják. A 8.3 megjegyzés alapján ez a bázis kiterjeszthető megfelelő $\gamma_{k+1}, \sigma_{k+1}, \dots, \gamma_g, \sigma_g$ görbékkel a $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ egy geometriai szimplektikus bázisává.

Tekintsük az $F = \Sigma \backslash \{\gamma_1, \sigma_1, \dots, \gamma_g, \sigma_g, K\}$ felületet. Vizsgáljuk meg mi történik, amikor $\Sigma$-t felvágjuk a $\gamma_1$, majd a $\sigma_1$ mentén. $\Sigma \backslash \gamma_1$ összefüggő, ellenkező esetben $\gamma_1$ nullhomológ lenne. Tehát $\gamma_1$ elhagyásával olyan felületet kapunk, melynek génusza eggyel kisebb $\Sigma$ génuszánál, és a pereme három $S^1$-gyel homeomorf komponensből áll, amelyek közül kettőt összeköt a $\sigma_1$ görbe. Így $\sigma_1$-et is elhagyva olyan $F_1$ felületet kapunk, amelyre $g(F_1) = g(\Sigma) - 1$, és $\partial F_1 = S^1 \cup \partial \Sigma$. Most hagyjuk el $F_1$-ből a $\gamma_2$ és $\sigma_2$ görbéket. Az előző esethet hasonlóan $F_1 \backslash \gamma_2$ összefüggő, mivel ellenkező esetben

$x_2$ előállna $x_1$ és $y_1$ lineáris kombinációjaként. $\sigma_2$ görbét is elhagyva kapjuk az $F_2$ felületet, melyre $g(F_2) = g(F_1) - 1$, és $\partial F_2 = S^1 \cup \partial F_1$. A fentiekből indukcióval adódik, hogy $F$ homeomorf a $g+1$ pontban kilyukasztott $S^2$-vel. Emiatt létezik olyan $L \subset \Sigma$ egyszerű, zárt, összefüggő görbe, amely nem metszi a $\gamma_i, \sigma_i$ hurkokat, továbbá $\Sigma \backslash L$ a $\Sigma_1$ és $\Sigma_2$ összefüggő felületek diszjunkt uniója, ahol $\{\gamma_1, \sigma_1, \ldots, \gamma_k, \sigma_k\} \subset \Sigma_1$, illetve $\{\gamma_{k+1}, \sigma_{k+1}, \ldots, \gamma_g, \sigma_g, K\} \subset \Sigma_2$ teljesül. A konstrukció alapján $\Sigma_1$ az $L$ csomó Seifert felülete, továbbá $U = H_1(\Sigma_1, \mathbb{Z})$, így az $L$ csomó Alexander polinomja triviális. A 3.1 tétel alapján létezik olyan $\triangle : D^2 \hookrightarrow D^4$ topologikusan lapos beágyazás, amelyre $\partial \triangle = L$. Tekintsük a $\Sigma' = \triangle \cup \Sigma_2$ felületet, ahol a ragasztást $L$ mentén végezzük (és $\Sigma_2 \backslash K$-t a $D^4$ belsejébe toljuk). Így kapunk egy $g_a(K)$ génuszú $D^4$-be ágyazott topologikusan lapos felületet, amelyre $\partial \Sigma' = K$. Ezzel beláttuk a 4.2 tételt. $\square$

[1] rávilágít arra, hogy a $g_t(K) \leq g_a(K)$ egyenlőtlenség valóban erősebb becslést ad a topologikus génuszra, mint a $g_t(K) \leq \deg \triangle_K$ becslés. A hetedik fejezetben látni fogjuk, hogy tórusz csomók esetén a $g_t(K) \leq \deg \triangle_K$ becslés nem ad új információt, mivel ebben az eseben $\deg \triangle_K = g_3(K)$, a $g_t(K) \leq g_3(K)$ egyenlőtlenség pedig nyilvánvaló. Azonban bizonyos tórusz csomók esetén a $g_a(K) < g_3(K)$ szigorú egyenlőtlenség teljesül, amelyből következik, hogy ezekre a csomókra $g_t(K) < g_3(K)$. Pontosabban, igaz az alábbi állítás (a bizonyítás [1]-ben található).

**4.3. Állítás.** *Tórusz csomókra igaz az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{g_t(T(n,m))}{g_3(T(n,m))} \leq \frac{4}{5}.$$

## 5. Fox-Milnor feltétel

Ebben a fejezetben belátunk egy szükséges feltételt arra vonatkozólag, hogy egy $K$ csomó topologikus metszetcsomó.

**5.1. Tétel.** *[Fox-Milnor feltétel] Legyen $K \subset S^3$ egy topologikus metszetcsomó. Ekkor létezik olyan $f \in \mathbb{Z}[t]$ polinom, melyre*

$$\triangle_K(t) = f(t) f(t^{-1})$$

*teljesül.*

A fenti tétel bizonyításához szükségünk lesz néhány lemmára. Először is vegyük észre, hogy tetszőleges $K \subset S^3$ csomóra $H_1(S^3 \backslash K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ teljesül, továbbá a generátor a $K$ csomó meridiánjának felel meg. Ez könnyen adódik például a csomók csoportjára vonatkozó Wirtinger reprezentációból.

**5.2. Lemma.** *Tekintsük a $K \subset S^3 = \partial D^4$ csomót és egy $\Sigma \subset D^4$ topologikusan lapos felületet, melyre $\partial \Sigma = K$. Ekkor az $S^3 \backslash K \hookrightarrow D^4 \backslash \Sigma$ beágyazás izomorfizmust indukál a $H_1(S^3 \backslash K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ és a $H_1(D^4 \backslash \Sigma, \mathbb{Z})$ homológiák között.*

*Bizonyítás.* Legyen $N = \Sigma \times I^2$ a $\Sigma$ felület egy $D^4$-beli csőszerű környezete. A Mayer-Vietoris tételt alkalmazva az $N$ illetve $\overline{D^4 \backslash N}$ terekre, és felhasználva, hogy $N \cap \overline{D^4 \backslash N} = \Sigma \times \partial I^2$, kapjuk a következő egzakt sorozatot (a homológiákat $\mathbb{Z}$ együtthatóval tekintve).

$$0 = H_2(D^4) \longrightarrow H_1(\Sigma \times \partial I^2) \xrightarrow{i_* \oplus j_*} H_1(N) \oplus H_1(\overline{D^4 \backslash N}) \longrightarrow H_1(D^4) = 0,$$

ahol $i_*$ és $j_*$ a megfelelő beágyazások által indukált homomorfizmus. Az egzaktság miatt tehát $i_* \oplus j_*$ izomorfizmus. Természetesen

$$H_1(\Sigma \times \partial I^2) = H_1(\Sigma) \oplus H_1(\partial I^2),$$

illetve $i_*(H_1(\partial I^2)) = 0$, így $i_*|_{H_1(\Sigma)} : H_1(\Sigma) \to H_1(N)$ izmorfizmus, mivel $\Sigma$ deformációs retraktuma $N$-nek. Vagyis $j_*|_{H_1(\partial I^2)} \to H_1(\overline{D^4 \backslash N})$ is izomorfizmus, tehát generátort generátorba visz. $H_1(\partial I^2)$ generátorát viszont pontosan a $K$ csomó meridiánja reprezentálja, amiből már következik az állítás. □

**5.3. Lemma.** *Tekintsük az $f_1 : \Sigma_1 \to D^4$ és $f_1 : \Sigma_2 \to D^4$ folytonos leképezéseket, ahol $\Sigma_1$ és $\Sigma_2$ irányítható felületek. Továbbá feltesszük, hogy $f_1(\Sigma_1) \cap f_2(\Sigma_2) = \emptyset$, illetve $f_i$ a $\Sigma_i$ határára megszorítva homomorfizmus a $K_i \subset S^3$ csomókra. Ekkor $lk(K_1, K_2) = 0$.*

*Bizonyítás.* Feltehető, hogy az $f_i$ leképezések általános helyzetűek, azaz kettőspontokon kívül nincsenek más szingularitásaik. Tekinsünk például egy $p \in f_1(\Sigma_1)$ kettőspontot. Lokálisan e kettőspont egy $f_1(\Sigma_1)$-beli kis környezete két általános helyzetű sík $\mathbb{R}^4$-ben. Ezen kis környezet metszete egy $p$ körüli $D^4_p$ golyó $S^3_p$ peremével két csomóból áll, azaz egy kétkomponensű $L$ lánc. A csomókra vonatkozó 1.6 állítással analóg módon belátható, hogy minden láncnak van Seifert felülete. Legyen $\Sigma$ az $L$ lánc egy Seifert felülete, majd $f_1(\Sigma_1) \backslash D^4_p$-ben $L$-hez ragasszuk oda $\Sigma$-t. Ezzel megszüntettük a $p$ kettőspontot.

A fenti eljárással, a kettőspontokat megszüntetve olyan $D^4$- beli diszjunkt felületeket kapunk, amelyek határai a $K_i$ csomók. Ebből már következik, hogy $lk(K_1, K_2) = 0$. □

**5.4. Lemma.** *Legyen $K$ egy topológikus metszetcsomó, és $D \subset D^4$ egy topológikusan lapos körlap, melyre $\partial D = K$. Továbbá legyen $\Sigma \subset S^3$ a $K$ egy Seifert felülete. Ekkor létezik olyan $M \subset D^4$ irányítható 3-sokaság, amelyre $\partial M = \Sigma \cup D$ és $M \cap S^3 = \Sigma$, és amelynek van $M \times [-\varepsilon, \varepsilon] \subset D^4$ alakú csőszerű környezete.*

*Bizonyítás.* Legyen $N \subset D^4$ a $D$ körlap egy csőszerű környezete, azaz $N = D \times I^2$. Meg fogunk adni egy olyan $\phi : \overline{D^4 \backslash N} \to S^1 \subset \mathbb{C}$ leképezést, amelyre $\phi^{-1}(1)$ lesz a keresett sokaság. Definiáljuk $\overline{S^3 \backslash N}$-en $\phi$-t úgy, hogy $\Sigma \backslash N$ egy $S^3$-beli csőszerű $(\Sigma \backslash N) \times [-1{,}1]$ környezetén a $[-1{,}1]$-re történő projekció és a $t \mapsto e^{it}$ leképezések kompozíciója legyen, $\overline{S^3 \backslash N}$ többi részére pedig konstans $-1$-ként terjesszük ki. $\partial \overline{D^4 \backslash N}$ többi részén, azaz $D \times \partial I^2$-en pedig $\phi$ legyen olyan, hogy valamely $p \in \partial I^2$ pontra $\phi(D \times p) = 1$ és $1 \notin \phi(D \times (\partial I^2 \backslash p))$ teljesüljön. (Ilyen kiterjesztése $\phi$-nek nyilván létezik, tekinsük például a $\partial I^2 = S^1$ azonosítást.) $\phi$-t még ki kell terjeszteni $int(D^4 \backslash N)$-re. Ehhez tekintsük $D^4 \backslash N$ egy szimpliciális felbontását. Legyen $F$ egy $int(D^4 \backslash N)$-beli 1-szimplexekből álló feszítő fa, $\phi$ ezen legyen tetszőleges. A többi 1-szimplexre terjesszük ki $\phi$-t az alábbi módon. Ha $\Delta^1$ egy olyan 1-szimplex, amin $\phi$ még nincs definiálva, akkor vegyünk egy $c$ 1-ciklust, amelyben $\Delta^1$ és $F$ elemei szerepelnek. Ez a ciklus az 5.2 lemma miatt homológ egy $S^3 \backslash N$-ben levő $\tilde{c}$ 1-ciklussal. Definiáljuk $\phi$-t $\Delta^1$-en úgy, hogy $\phi_*[c] = \phi_*[\tilde{c}] \in H_1(S^1, \mathbb{Z})$ teljesüljön. Ekkor $\phi$ a 2-szimplexekre is kiterjeszthető, mivel egy $\Delta^2$ 2-szimplex esetén $\partial \Delta^2$ homológ egy $\hat{c} \subset S^3 \backslash N$ ciklussal, amely (az 5.2 lemma miatt) nullhomológ $S^3 \backslash N$-ben, így $\phi_*[\partial \Delta^2] = \phi_*[\hat{c}] = 0$. Mivel minden $i > 1$ esetén tetszőleges $S^i \to S^1$ leképezés pontrahúzható, $\phi$ kiterjed a 3- és 4-szimplexekre is.

$\phi$-t tekinthetjük egy szimpliciális leképezésnek $S^1$ egy olyan felbontására vonatkozólag, amelyben $1 \in S^1$ nem csúcs. Ekkor a $\phi^{-1}(1)$ halmaz valóban egy 3-sokaság lesz, amelynek pereme $\Sigma \cup \cup (D \times p)$, a megfelelő csőszerű környezet pedig $\phi^{-1}(J)$ lesz, ahol $J \subset S^1$ az 1 elegendően kicsi környezete. □

**5.5. Lemma.** *Legyen $M$ egy kompakt, irányítható 3-sokaság, amelyre $\partial M$ egy összefüggő, $g$ génuszú felület. Ekkor az $i : \partial M \hookrightarrow M$ beágyazás által indukált $i_* : H_1(\partial M, \mathbb{Q}) \to H_1(M, \mathbb{Q})$ leképezés magja egy $g$ dimenziós vektortér.*

*Bizonyítás.* Tekintsük az alábbi kommutatív diagrammot, ahol a sorok az $(M, \partial M)$ térpárra vonatkozó homológiák, illetve kohomológiák hosszú egzakt sorozatai, a függőleges leképezések pedig a Poincaré dualitásnak felelnek meg.

$$\begin{array}{ccccc} H_2(M, \partial M, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\partial} & H_1(\partial M, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{i_*} & H_1(M, \mathbb{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1(M, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{i^*} & H^1(\partial M, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\delta} & H^2(M, \partial M, \mathbb{Q}) \end{array}$$

Mivel $\mathbb{Q}$ osztható Abel csoport, tetszőleges $A$ Abel csoportra $Ext(A, \mathbb{Q}) = 0$, így az univerzális együtthatók tételének alkalmazásával kapjuk, hogy $H^1(M, \mathbb{Q})$ a $H_1(M, \mathbb{Q})$ vektortér duálisa, illetve $i^*$ az $i_*$ lineáris leképezés duálisa. Ebből adódik, hogy ha $r(.)$ jelöli a lineáris leképezések rangját, akkor $r(i_*) = r(i^*)$ (ez az egyenlőség például abból látható, hogy ha $i_*$-ot egy $B$ mátrix reprezentálja egy rögzített bázisban, akkor a duális bázisban $i^*$-ot $B^T$ reprezentálja). Továbbá, mivel a függőleges nyilak izomorfizmusok, $i_*$ és $\delta$ azonos rangúak. Az egzaktság miatt pedig $\delta$ magja megegyezik $i^*$ képével, így kapjuk, hogy

$$r(i^*) = dim\,(H_1(\partial M, \mathbb{Q})) - r(\delta) = 2g - r(i_*),$$

összességében tehát $r(i_*) = g$, amiből az is következik, hogy $i_*$ magja szintén $g$ dimenziós. □

**5.6. Következmény.** *Létezik olyan $[f_1], \ldots, [f_{2g}]$ bázis $H_1(\partial M, \mathbb{Z})$-ben, melyre $[f_1], \ldots, [f_g]$ elemek nullhomológok $H_1(M, \mathbb{Q})$-ban.*

*Bizonyítás.* Felhasználva, hogy tetszőleges $A$ Abel csoportra $Tor(A, \mathbb{Q}) = 0$, az univerzális együtthatók tétele alapján $H_1(\partial M, \mathbb{Q}) = H_1(\partial M, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$. Legyen $U \leq H_1(\partial M, \mathbb{Q})$ az 5.5 lemmában levő leképezés magja. Vegyük ennek egy olyan bázisát, amely elemei $H_1(\partial M, \mathbb{Z})$-ben vannak, és legyen $\widetilde{U} \leq H_1(\partial M, \mathbb{Z})$ az ezen bázis által generált Abel csoport (nyilván $\widetilde{U} \otimes \mathbb{Q} = U$ teljesül). Ekkor $\mathbb{Z}^{2g}/_{\widetilde{U}} = {}^{A}/_{\widetilde{U}} \oplus {}^{B}/_{\widetilde{U}}$, megfelelő $\widetilde{U} \leq A \leq \mathbb{Z}^{2g}$ és $\widetilde{U} \leq B \leq \mathbb{Z}^{2g}$ részcsoportokra, melyekre ${}^{A}/_{\widetilde{U}}$ szabad csoport, ${}^{B}/_{\widetilde{U}}$ pedig torziócsoport. Nyilván $B \otimes \mathbb{Q} \geq U$ teljesül. Továbbá ha $b \in B$, akkor létezik $n$, melyre $nb \in \widetilde{U}$, azaz $b \in U$ vagyis $B \subset U$, de ekkor $B \otimes \mathbb{Q} \leq U$ is teljesül. Tehát $B \otimes \mathbb{Q} = U$, így $B$ egy bázisát véve, majd azt ${}^{A}/_{\widetilde{U}}$ bázisával kiegészítve kapjuk a megfelelő bázist. □

**5.7. Állítás.** *Legyen $K$ egy topológikus metszetcsomó, és $\Sigma$ a $K$ egy $g$ génuszú Seifert felülete. Ekkor létezik olyan bázisa $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$-nek, melyben a Seifert mátrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & P \\ Q & R \end{pmatrix}$$

*alakú, ahol $P, Q, R \in \mathbb{Z}^{g \times g}$.*

*Bizonyítás.* Legyen $D \subset D^4$ egy beágyazott körlap, melyre $\partial D = K$. Az 5.4 lemma alapján léteik olyan $M$ sokaság $M \times [-\varepsilon, \varepsilon] \subset D^4$ alakú környezettel, melyre $\partial M = D \cup \Sigma$. Legyen $[f_1], \ldots, [f_{2g}]$ az 5.6 következményben levő bázisa $H_1(\partial M, \mathbb{Z})$-nek, továbbá reprezentáljuk $[f_i]$-t egy irányított, egyszerű, zárt, összefüggő görbével. (Ilyen reprezentációk léteznek a függelékben található 8.5 lemma alapján.) Mivel $i \leq g$ esetén $[f_i]$ nullhomológ $H_1(M, \mathbb{Q}) = H_1(M, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$-ban, létezik $n_i >$ $> 0$, melyre $n_i[f_i]$ nullhomológ $H_1(M, \mathbb{Z})$-ben. Reprezentáljuk $n_i[f_i]$-t $n_i f_i$-vel, azaz $f_i$-nek $n_i$ darab példányával. Tehát $n_i f_i$ a határa egy $M$-beli 2-láncnak, ebből következik, hogy határol egy immertált, irányítható $\Sigma_i$ felületet $M$-ben. Továbbá feltehető, hogy $n_i f_i^{\uparrow}$ pedig határa a $\Sigma_i^{\uparrow} = \Sigma_i \times \varepsilon \subset$ $\subset M \times \varepsilon$ felületnek. Így az 5.3 lemma alapján $0 = lk(n_i f_i, n_j f_j^{\uparrow}) = n_i n_j lk(f_i, f_j^{\uparrow})$, tehát $lk(f_i, f_j^{\uparrow}) = 0$, amelyből már következik az állítás. □

*Az 5.1 tétel bizonyítása.* A 5.7 állításból már következik az 5.1 tétel, ugyanis $\triangle_K(t)$ egyenlő a

$$\begin{pmatrix} 0 & t^{\frac{1}{2}} P - t^{-\frac{1}{2}} Q^T \\ t^{\frac{1}{2}} Q - t^{-\frac{1}{2}} P^T & t^{\frac{1}{2}} R - t^{-\frac{1}{2}} R^T \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsával, azaz

$$\triangle_K(t) = (-1)^g \det\left(t^{\frac{1}{2}} P - t^{-\frac{1}{2}} Q^T\right) \det\left(t^{\frac{1}{2}} Q - t^{-\frac{1}{2}} P^T\right) = \det\left(tP - Q^T\right) \det\left(t^{-1} P - Q^T\right).$$

□

Az 5.7 állítás segítségével az is könnyen belátható, hogy egy topológikus metszetcsomó szignatúrafüggvénye 0.

**5.8. Állítás.** *Ha $K$ egy topológikus metszetcsomó, akkor $\sigma_\omega(K) = 0$ minden olyan $\omega \in S^1$ esetén, amely nem gyöke $\triangle_K$-nak.*

Mivel $\sigma_\omega(K)$ egy szimmetrikus reguláris mátrix szignatúrája, amely tekinthető egy szimmetrikus nemelfajuló, az első változóban lineáris, a másodikban pedig antilineáris formának, az 5.8 állítás egyből következik az 5.7 állításból és az alábbi lemmából.

**5.9. Lemma.** *Legyen $V$ egy $2n$ dimenziós komplex vektortér egy $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ nemelfajuló, első változóban lineáris, másodikban antilineáris formával, amely $V$ egy $n$ dimenziós alterén eltűnik. Ekkor $\sigma(\beta)$=0, azaz $\beta$ szignatúrája 0.*

*Bizonyítás.* Legyen $U \leq V$ olyan $n$ dimenziós altér, amelyen $\beta$ eltűnik. Tekintsünk egy $u_1, \ldots, u_n \in$ $\in U$ bázist és egy $v \in V$ vektort, amelyre $\beta(u_1, v) \neq 0$ teljesül. (Ilyen $v$ vektor létezik a nemelfajultság miatt.) Legyen $W$ az $u_1$ és $v$ vektorok által generált altér. Ekkor $\beta|_W$ mátrixa az $u_1, v$ bázisban $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ \bar{a} & b \end{pmatrix}$ alakú, megfelelő $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ számokkal. $\det B < 0$ miatt $\beta|_W$ nemelfajuló, és $\sigma(\beta|W) = 0$. Tekintsük a $2(n-1)$ dimenziós $W^\perp$ alteret, amelyben az $u_i - \frac{\beta(u_i, v)}{\beta(u_1, v)} u_1$, $i = 2, \ldots, n$ vektorok egy olyan $n-1$ dimenziós alteret feszítenek ki, amelyen $\beta$ eltűnik. Így $n$-re vonatkozó indukcióval adódik az állítás. □

# 6. Tórusz csomók lineáris kombinációja

Tekinsük a $\mathcal{C}\otimes\mathbb{Q}$ (mint $\mathbb{Z}$ feletti modulusok közötti) tenzorszorzatot, amely egy vektortér $\mathbb{Q}$ felett. Informálisan, $\mathcal{C}\otimes\mathbb{Q}$ halmaz elemei véges sok konkordizmusosztály racionális együtthatós lineáris kombinációi. Ezen a vektortéren fogunk egy szeminormát definiálni a konkordizmus génusz segítségével.

**6.1. Definíció.** *A $K$ csomó stabli konkordizmus génuszának hívjuk a*

$$g_c^s(K)=\lim_{n\to\infty}\frac{g_c(nK)}{n}$$

*határértéket.*

**6.2. Állítás.** *A stabil konkordizmus génusz jól-definiált, és*

$$g_c^s(K)=\inf\left\{\frac{g_c(nK)}{n}|\quad n\in\mathbb{N}\right\}.$$

*Bizonyítás.* A konkordizmus génusz szubadditív (lásd 1.24 állítás), így $g_c(nK)\leq ng_c(K)$ teljesül, tehát tetszőleges $n$, és $m$ mellett

$$\frac{g_c(nmK)}{nm}\leq\frac{ng_c(m)K}{nm}=\leq\frac{g_c(mK)}{m}.$$

Legyen $L=\inf\left\{\frac{g_c(nK)}{n}|\quad n\in\mathbb{N}\right\}$. Ekkor minden $\varepsilon>0$ számra létezik $N\in\mathbb{N}$, melyre $\frac{g_c(NK)}{N}\leq L+$ $+\frac{\varepsilon}{2}$. Tetszőleges $n\in\mathbb{N}$ számot felírhatunk $n=aN+b$ alakban, ahol $0\leq b<N$. Legyen továbbá $B=\max\{g_c(bK)|\quad 0\leq b<N\}$. Ismét kihasználva $g_c$ szubadditivitását,

$$\frac{g_c(nK)}{n}\leq\frac{ag_c(NK)}{aN+b}+\frac{g_c(bK)}{aN+b}\leq\frac{g_c(NK)}{N}+\frac{B}{aN}\leq L+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{B}{aN}$$

adódik. Ha $n$ olyan nagy, hogy $\frac{B}{aN}\leq\frac{\varepsilon}{2}$ teljesül, akkor

$$L\leq\frac{g_c(nK)}{n}\leq L+\varepsilon,$$

azaz a konkordizmus definícjában szereplő határárték létezik, és megegyezik $L$-lel. □

A fentiek alapján az is adódik, hogy a stabil konkordizmus génusz homogén, azaz $k\in\mathbb{N}$ esetén

$$g_c^s(kK)=\lim_{n\to\infty}\frac{g_c(nkK)}{n}=\lim_{nk\to\infty}\frac{g_c(nkK)}{\frac{nk}{k}}=k\lim_{nk\to\infty}\frac{g_c(nkK)}{nk}=kg_c^s(K).$$

$k<0$ esetén pedig

$$g_c^s(kK)=g_c^s(-k(-K))=-kg_c^s(-K)=-kg_c^s(m(K))=-kg_c^s(K),$$

tehát összességében $g_c(nK)=|n|g_c(K)$ tetszőleges $n\in\mathbb{Z}$ és $K$ csomó esetén. Terjesszük ki a stabil konkordizmus génusz függvényt a $\mathcal{C}\otimes\mathbb{Q}$ vektortérre, a

$$g_c^s\left(\frac{p}{q}K\right):=\frac{g_c^s(pK)}{|q|}$$

képlet segítségével (ahol $p,q\in\mathbb{Z}$). Az előzőek alapján $g_c^s$ egy szeminorma $\mathcal{C}\otimes\mathbb{Q}$-n. A stabil konkordancia génusz megértését segíti, ha meghatározzuk az általa indukált egységgolyót a $\mathcal{C}\otimes\mathbb{Q}$ tér alterein. A továbbiakban a következő tételt fogjuk bizonyítani, amely legjobb tudásunk szerint még nem áll rendelkezésre az irodalomban.

**6.3. Tétel.** *Legyen $T(p,q)$, és $T(r,s)$ két olyan tórusz csomó, amelyekre nem léteznek olyan $a,b,c,d>$ $>1$ egész számok, melyekre $a|p, b|q, c|r, d|s$, illetve $ab=cd$ teljesül. Legyen továbbá $B$ a két tórusz csomó által generált altéren a null-elem körüli zárt egységgolyó. Ekkor*

$$B=\left\{xT(p,q)+yT(r,s) \quad | \quad x,y\in\mathbb{Q}, \quad \deg(\triangle_{T(p,q)})|x|+\deg(\triangle_{T(r,s)})|y|\leq 1\right\}.$$

**6.4. Megjegyzés.** *Ebben a fejezetben egy $K$ csomó $\triangle_K$ Alexander polinomján a $\det(tV-V^T)$ polinomot fogjuk érteni. Az Alexander polinom foka jelentse továbbra is a szimmetrizált Alexander polinom fokát.*

**6.5. Megjegyzés.** *A hetedik fejezetben belátjuk, hogy $\triangle_{T(p,q)}(t)=\frac{(t^{pq}-1)(t-1)}{(t^p-1)(t^q-1)}$. Könnyen látható, hogy a $\triangle_{T(p,q)}$ polinomot kifejezhetjük a $\phi_n$ n-edik körosztási polinomok segítségével:*

$$\triangle_{T(p,q)}=\prod_{a|p,a>1,b|q,b>1}\phi_{ab}.$$

*Ebből a felírásból látszik, hogy a fenti tételben a tórusz csomókra megfogalmazott feltétel azzal ekvivalens, hogy az Alexander polinomjaik relatív prímek.*

A 6.3 tétel bizonyításához szükségünk lesz néhány definícióra és lemmára.

**6.6. Definíció.** *Tekintsük a $K$ csomó $\sigma_\omega(K)$ Tristram-Levin szignatúráját (ahol $\omega\in S^1\subset\mathbb{C}$). Legyen $j_\omega(K)\in\mathbb{Z}$ az a szám, amennyit a szignatúrafüggvény $\omega$-ban ugrik, azaz $\omega=e^{it_0}$ esetén*

$$j_\omega(K)=\lim_{t\searrow t_0}\sigma_{e^{it}}(K)-\lim_{t\nearrow t_0}\sigma_{e^{it}}(K).$$

*Ezt a $j(K)$ függvényt a $K$ csomó ugrás függvényének nevezik.*

Az 1.16 megjegyzés alapján $j(K)$ csak az Alexander polinom gyökeinél vehet fel nem nulla értéket, továbbá minden $\omega\in S^1$ esetén $j_\omega(K)$ páros.

**6.7. Lemma.** *Legyen $\omega\in S^1$. Ekkor $|j_\omega(K)|=2x$ megfelelő $x\in\mathbb{Z}$ számra, amelyre*

*i)* $x\leq mult(\omega,\triangle_K)$, *ahol* $mult(\omega,\triangle_K)$ *az* $\omega$ *multipicitása a* $\triangle_K$ *polinomban,*

*ii)* $x\equiv mult(\omega,\triangle_K) \quad mod \quad 2$,

*iii)* $j_\omega(K)=-j_{\bar\omega}(K)$.

*Bizonyítás.* Tekintsük a $B_\omega=(1-\omega)V+(1-\bar\omega)V^T=(1-\omega)V+(1-\omega^{-1})V^T$ mátrixot tetszőleges $\omega\in S^1$-re, ahol $V\in\mathbb{Z}^{n\times n}$ jelöli a Seifert mátrixot. A szignatúrafüggvény definíciójából és az 1.16 megjegyzésből adódik, hogy $\sigma_\omega=\det B_\omega=(\omega^{-1}-1)^n\triangle_K(\omega)$. Mivel $B_\omega$ hermitikus, és (legfeljebb véges sok $\omega$ kivételével) nemelfajuló, tekinthetjük az általa meghatározott $\mathcal{B}_\omega$ skalárszorzást a $\mathbb{C}^n$ vektortéren. Először azt szeretnénk elérni, hogy megfelelő, $1$ determinánsú $A_\omega$ bázistranszformációval $A_\omega^TB_\omega A_\omega$ diagonális legyen, azaz olyan bázist keresünk, melyben a $\mathcal{B}_\omega$ mátrixa diagonális. $\det B_\omega\neq 0$ miatt $B_\omega$ első sorának van nemnulla eleme, és feltehető, hogy véges sok $\omega$ kivételével $b_{11}\neq 0$ ($b_{11}=0$ esetén a $v_1$ vektort cseréljük le egy megfelelő $v_1+\lambda v_i$ vektorra, továbbá egy ilyen bázistranszformációnak $1$ a determinánsa). Definiáljunk egy új bázist úgy, hogy $i>1$ esetén a $v_i$ vektorokat a $v_i-\frac{b_{1i}}{b_{11}}v_1$ vektorokra cseréljük (a továbbiakban ezeket jelölve $v_i$-vel). Ennek a bázistranszformációnak olyan háromszögmátrix felel meg, amely diagonálisában

1-ek szerepelnek, vagyis a bázistranszformáció determinánsa 1. A $\mathcal{B}_\omega$ skalárszorzásnak ebben a bázisban egy olyan szimmetrikus mátrix felel meg, melynek első sora és oszlopa a $b_{11}$ elem kivételével 0-ból áll.

A fent leírt algoritmusból indukcióval adódik, hogy véges sok $\omega$ kivételével létezik olyan $A_\omega$ mátrix, melyre $\det A_\omega = 1$ és $D_\omega = A_\omega^T B_\omega A_\omega$ diagonális, és a diagonálisban levő elemek racionális törtfüggvényei $\omega$-nak, azaz $\frac{p(\omega)}{q(\omega)}$ alakúak, ahol $p, q \in \mathbb{Q}[t]$. További, 1 determinánsú bázistranszformációval elérhető, hogy a diagonálisban levő elemek nevezői csak $\omega$ hatványaiból álljanak. Ha ugyanis egy $d_i$ elem nevezőjében szerepel egy $f \in \mathbb{Q}[t]$ irreducibilis faktor, akkor egy másik $d_j$ diagonális elemben pedig $f$-nek a számlálóban kell szerepelnie, mivel a diagonálisok szorzatában, azaz $B_\omega$ determinánsban a nevező csak a $\omega^n$ polinomból áll. Vegyük a $v_i$ és $v_j$ bázisvektorok helyett az $f^{\frac{1}{2}} v_i$ és $f^{-\frac{1}{2}} v_j$ vektorokat ($f(\omega) \neq 0$ véges sok $\omega$ kivételével). A megfelelő bázistranszformáció determinánsa 1 lesz, továbbá a $d_i$ diagonális elem $f d_i$-re, $d_j$ pedig $d_j/f$-re változott.

Összességében azt kaptuk, hogy véges sok $\omega$ kivételével létezik olyan $A_\omega$ mátrix, melyre $\det A_\omega = 1$, és $D_\omega = A_\omega^T B_\omega A_\omega$ olyan diagonális mátrix, amely diagonálisában álló $d_1(\omega), \ldots, d_n(\omega)$ függvények ($\omega^n$, $n \in \mathbb{Z}$ polinommal való szorzás erejéig) $\mathbb{Q}[t]$-beli polinomok. $d_i(\omega) \in \mathbb{R}$ is teljesül, mivel $d_i(\omega)$ valamilyen vektor önmagával vett skalárszorzata. A

$$(d_1 \cdot \ldots \cdot d_n)(\omega) = \det B_\omega = (\omega^{-1} - 1)^n \triangle_K(\omega),$$

és a

$$\sigma(D_\omega) = \sigma(B_\omega)$$

egyenlőségekből kapjuk az első és második, továbbá a $d_i(\overline{\omega}) = \overline{d_i(\omega)} = d_i(\omega)$ egyenlőségből a harmadik állítást. □

**6.8. Lemma.** *A Tristram-Levine szignatúrafüggvény invariáns a konkordizmus relációra nézve.*

*Bizonyítás.* Legyen $K \sim L$, ekkor az 1.21 állítás alapján $K\#m(L)$ sima metszetcsomó, vagyis topológikus metszetcsomó is. Így az 5.8 állítás alapján tetszőleges $\omega \in S^1$-re $\sigma_\omega(K\#m(L)) = 0$. Az 1.17 állítás alapján viszont $\sigma_\omega(K\#m(L)) = \sigma_\omega(K) - \sigma_\omega(L)$, vagyis $\sigma_\omega(K) = \sigma_\omega(L)$. □

**6.9. Állítás.** *Legyen $\rho \in S^1$ a $K$ csomó $\triangle_K$ Alexander polinomjának egyik gyöke, továbbá $f \in \mathbb{Z}[t]$ a $\rho$ minimálpolinomja. Ekkor minden $K$-val konkordáns $L$ csomóra $\triangle_L$ osztható az $f^x$ polinommal, ahol $j(K)_\rho = 2x$.*

*Bizonyítás.* $L \sim K$ esetén a 6.8 lemma miatt $j_\rho(L) = j_\rho(K) = 2x$, így a 6.7 lemmából adódik, hogy $x \leq mult(\rho, \triangle_L)$. □

**6.10. Definíció.** *Definiáljuk egy $K$ csomó ugrás-polinomját az alábbi módon:*

$$\triangle_K^j = \prod_{i=1}^{n} f_i^{j_i(K)},$$

*ahol az $f_i$ polinomok a $\triangle_K$-ban előforduló irreducibilis polinomokat jelölik, továbbá*

$$j_i(K) = \max\left\{ \frac{1}{2} j_\rho(K) \quad | \quad \rho \text{ gyöke } f_i\text{-nek} \right\}.$$

*A ugrás-polinom $\deg \triangle_K^j$ fokán az Alexander polinom fokával analóg módon értsük a fenti $\triangle_K^j$ polinom fokának a felét.*

**6.11. Megjegyzés.** *A 6.9 állításból egyből adódik, hogy $L \sim K$ esetén $\triangle_L$ osztható a $\triangle_K^j$ ugráspolinommal, ebből pedig (a $\deg(\triangle_L) \leq g_3(L)$ egyenlőtlenségből) kapjuk, hogy $\deg(\triangle_K^j) \leq g_c(K)$.*

*6.3 tétel bizonyítása.* A $T(p,q)$ tórusz csomó esetén $\triangle_{T(p,q)}(t) = \frac{(t^{pq}-1)(t-1)}{(t^p-1)(t^q-1)}$, azaz bizonyos körosztási polinomok szorzata, vagyis tórusz csomó Alexander polinomjának minden gyöke egységgyök, egyszeres multiplicitással. Így a 6.7 lemmából adódik, hogy $\triangle^j_{T(p,q)} = \triangle_{T(p,q)}$, tehát a fenti megjegyzés miatt $g_c(T(p,q)) \geq \deg(\triangle_{T(p,q)})$. A 7.8 megjegyzés alapján $g_3(T(p,q)) = \deg(\triangle_{T(p,q)})$, így $g_c(T(p,q)) = \deg(\triangle_{T(p,q)})$. A szignatrafüggvény additivitása miatt minden $K$ csomóra és $n \in \mathbb{N}$ számra $\omega \in S^1$ esetén $j_\omega(nK) = nj_\omega(K)$. Így a fentiekkel analóg módon kapjuk, hogy $g_c(nT(p,q)) = \deg(\triangle^n_{T(p,q)}) = n\deg(\triangle_{T(p,q)})$. Összességében tehát $g_c^s(T(p,q)) = \deg(\triangle_{T(p,q)}) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

Tekintsük a $K = aT(p,q) + bT(r,s)$ csomót, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$, a $\triangle_{T(p,q)}$ és $\triangle_{T(r,s)}$ polinomoknak pedig nincs közös gyöke. Az 1.14 állítás alapján $\triangle_K = \triangle^{|a|}_{T(p,q)}\triangle^{|b|}_{T(r,s)}$, és $\omega \in S^1$ esetén $j_\omega(K) = aj_\omega(T(p,q)) + bj_\omega(T(r,s))$. Belátjuk, hogy $\triangle_K^j$=$\triangle_K$. Ehhez csak azt kell ellenőrizni, hogy ha $f$ olyan irreducibilis polinom, amely osztja a $\triangle_{T(p,q)}$ polinomot, akkor létezik $f$ nek olyan $\rho$ gyöke, amelyre $|j_\rho(K)| = 2|a|$. Ez triviálisan teljesül, mivel $\rho$ nem gyöke $\triangle_{T(r,s)}$-nek, így $j_\rho(K) = aj_\rho(T(p,q)) = \pm 2a$.

A 6.11 megjegyzés alapján kapjuk, hogy

$$g_c(K) \geq \deg(\triangle_K) = |a|\deg(\triangle_{T(p,q)}) + |b|\deg(\triangle_{T(r,s)}).$$

Továbbá

$$g_c(K) \leq g_3(K) \leq |a|g_3(T(p,q)) + |b|g_3(T(r,s)) = |a|\deg(\triangle_{T(p,q)}) + |b|\deg(\triangle_{T(r,s)}),$$

vagyis

$$g_c(K) = |a|\deg(\triangle_{T(p,q)}) + |b|\deg(\triangle_{T(r,s)}).$$

Mivel $a$ és $b$ tetszőleges volt, $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$g_c(nK) = g_c(naT(p,q) + nbT(r,s)) = n|a|\deg(\triangle_{T(p,q)}) + n|b|\deg(\triangle_{T(r,s)}),$$

amelyből adódik, hogy

$$g_c^s(K) = |a|\deg(\triangle_{T(p,q)}) + |b|\deg(\triangle_{T(r,s)}).$$

Tehát az $a$ és $b$ egész számok helyett tetszőleges $x, y \in \mathbb{Q}$ számokat tekintve kapjuk a 6.3 tételt. □

# 7. Alexander ideál, Fox kalkulus

Ebben a fejezetben egy másik megközelítést adunk az Alexander polinom definíciójára, majd bevezetjük a Fox kalkulust, amely segítségével tisztán algebrai eszközökkel, csupán a csomó csoportjának ismeretével kiszámolható az Alexander polinom. Végül pedig a Fox kalkulus segítségével meghatározzuk a tórusz csomók Alexander polinomját. Az állítások bizonyításait itt nem részletezzük, ezek a [7] könyv 6. és 11. fejezetben találhatók.

Tekintsük a $K$ csomó egy $\Sigma$ Seifert felületét, és legyen $X = \overline{S^3 \setminus T}$ a csomó komplementere, ahol $T$ a $K$ egy csőszerű környezetét jelöli. $\Sigma \cap X$ azonosítható $\Sigma$-val, mivel abból a perem egy kis környezetének eltávolításával kapható. Vágjuk fel $X$-et $\Sigma$ mentén, azaz tekintsük az $Y = \overline{X \setminus N}$

teret, ahol $N$ a $\Sigma$ egy csőszerű környezete. $\partial Y = \partial X \cup \Sigma_+ \cup \Sigma_-$, ahol $\Sigma_+$ és $\Sigma_-$ jelöli a felvágás mentén keletkező két, $\Sigma$-val kanonikusan homeomorf felületet. Vegyük az $Y$ teret megszámlálható sok példányban, és ezeket egymás után fűzve ragasszuk össze $\Sigma_+$ és $\Sigma_-$ mentén, azaz legyen $X_\infty = \ldots \cup_\phi Y \cup_\phi Y \cup_\phi \ldots$, ahol $\phi : \Sigma_+ \to \Sigma_-$ a kanonikus homeomorfizmus. Természetes módon adódik az a $t : X_\infty \to X_\infty$ homeomorfizmus, amely $X_\infty$ egy $Y$ komponensét a vele szomszédos, "jobboldali" $Y$-ba képezi. Ez a $t$ leképezés indukál egy izomorfizmust a $H_1(X_\infty, \mathbb{Z})$ homológián, így $H_1(X_\infty, \mathbb{Z})$ egy $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ feletti modulusnak tekinthető. A továbbiakban ezt a modulust szeretnénk jellemezni, ehhez azonban szükségünk lesz néhány, a modulusok reprezentációjával kapcsolatos állításra.

Legyen $M$ egy modulus az $R$ kommutatív, egységelemes gyűrű felett.

**7.1. Definíció.** *Az $M$ modulus végesen prezentált, ha létezik olyan*

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

*rövid egzakt sorozat, ahol és $E$ és $F$ végesen generált szabad modulusok $R$ felett.*

A fenti egzakt sorozatban a $\phi : E \to F$ leképezés egy $A \in R^{m \times n}$ mátrixszal adható meg, ahol $n$ és $m$ az $E$ és $F$ szabad modulusok rangjait jelölik (vagyis $E = R^n$, $F = R^m$). Az $A$ mátrixot $M$ egy prezentáló mátrixának nevezik.

**7.2. Definíció.** *Legyen $A \in R^{m \times n}$ az $M$ végesen prezentált modulus egy prezentáló mátrixa. Az $M$ modulus $\varepsilon_r$-rel jelölt r-edik ideáljának nevezzük az $A$ mátrix $(m-r+1) \times (m-r+1)$ méretű minormátrixainak determinánsai által generált ideált.*

Az alábbi állítás szerint az $\varepsilon_r$ ideálok jól-definiáltak, nem függenek az $M$ reprezentációjától, azaz az $A$ mátrixtól, $E$-től és $F$-től.

**7.3. Állítás.** *Az $M$ modulust prezentáló tetszőleges $A_1$ és $A_2$ mátrixok az alábbi lépések (és ezek inverzeik) segítségével egymásba alakíthatók.*

- *Sorok és oszlopok permutációja.*
- *Az $A$ mátrix lecserélése az $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixra.*
- *Nullákból álló oszlop hozzáadása.*
- *Egy oszlop (vagy sor) skalárszorosának hozzáadása egy másik oszlophoz (vagy sorhoz).*

*Bizonyítás.* Lásd [7, 6.1 tétel]. □

Visszatérve a $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ feletti $H_1(X_\infty, \mathbb{Z})$ modulusra, igazolható a következő állítás.

**7.4. Állítás.** *A $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ feletti $H_1(X_\infty, \mathbb{Z})$ modulus reprezentálható a $tV - V^T$ mátrixszal, ahol $V$ a $\Sigma$ felület egy Seifert mátrixa.*

*Bizonyítás.* Lásd [7, 6.5 tétel]. □

A fentiekből az is következik, hogy a $H_1(X_\infty, \mathbb{Z})$ modulus $\varepsilon_r$ ideáljai csomóinvariánsok, így bevezethető a következő definíció.

**7.5. Definíció.** *A $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ feletti $H_1(X_\infty, \mathbb{Z})$ modulus r-edik ideálját a $K$ csomó r-edik Alexander ideáljánk nevezzük.*

Látható, hogy egy $K$ csomó első Alexander ideálja pontosan az Alexander polinomja által generált főideál, tehát ha ismerjük a $H_1(X_\infty, \mathbb{Z})$ modulus struktúráját, akkor abból az Alexander polinom is meghatározható (asszociáltság erejéig). Az alábbiakban ismertetjük, hogy ez a modulus hogyan határozható meg csupán a csomó csoportja ismeretében.

Legyen $X$ egy topológikus tér és $G = \pi_1(X)$. Ismert, hogy $H \triangleleft G$ esetén létezik olyan $X_H$ tér és $\pi_H : X_H \to X$ fedőleképezés, amelyre $\pi_1(X_H) = H$, továbbá a $\pi_H$ leképezés egy ${}^{G}/_{H}$ diszkrét csoporthatás szerinti faktorleképezés, ahol a csoporthatás a fedőtranszformációnak felel meg. Emellett a $H = \pi_1(X_H)$ fundamentális csoporton $G$ hat a konjugálással. Legyen $H = G' = [G, G]$, azaz $G$ kommutátorai által generált normálosztó. Ekkor a $G$ hatása $H = \pi_1(X_H)$-n definiál egy ${}^{G}/_{H} = H_1(X, \mathbb{Z})$ hatást ${}^{H}/_{G''} = H_1(X_H, \mathbb{Z})$-n ($G'' = [G', G']$), és könnyen látható, hogy ez a hatás pontosan a deck transzformációk által a homológiákon indukált homomorfizmus. Így tehát $H_1(X_H, \mathbb{Z})$ egy $\mathbb{Z}[H_1(X, \mathbb{Z})]$ feletti modulusnak tekinthető.

Speciálisan, legyen $X$ a $K$ csomó komplementere, $\Sigma$ egy Seifet felület $K$-hoz, $X_\infty$ a fentiek alapján elkészített tér, $t : X_\infty \to X_\infty$ a megfelelő "jobbra toló" homeomorfizmus és $\pi : X_\infty \to X$ a $t$ által generált $\langle t \rangle$ csoport szerinti faktorleképezés. Könnyen adódik, hogy ekkor $\pi = \pi_{[G,G]}$, és hogy a fejezet elején definiált $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-modulus struktúra $H_1(X_\infty, \mathbb{Z})$-n a $K$ csomó meridiánját a $t$ homeomorfizmussal azonosítva (vagyis a $H_1(X, \mathbb{Z}) = \langle t \rangle$ azonosítást tekintve) megegyezik az előző bekezdésben definiált $\mathbb{Z}[H_1(X, \mathbb{Z})]$ feletti modulus struktúrával. Tehát a $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ feletti $H_1(X_\infty, \mathbb{Z})$ modulus izomorf a $\mathbb{Z}[{}^{G}/_{G'}]$ feletti ${}^{G'}/_{G''}$ modulussal, ahol $G$ a csomó csoportját jelöli.

Így az Alexander polinom kiszámításához a $\mathbb{Z}[{}^{G}/_{G'}]$ feletti ${}^{G'}/_{G''}$ modulust kell prezentálni egy megfelelő mátrixszal. Ezt a prezentációt pedig a $G$ csoport egy reprezentációjából fogjuk származtatni Fox kalkulus segítségével.

Legyen $G = \langle g_1, \ldots, g_n | r_1, \ldots, r_m \rangle$ a $K$ csomó csoportjának egy reprezentációja, $F = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ az $n$ elem által generált szabad csoport, és $\phi : F \to G$ a prezentációnak megfelelő homomorfizmus. Definiálunk minden $i$-re egy $\frac{\partial}{\partial g_i} = \partial_i : F \to \mathbb{Z}[F]$ leképezést (szabad deriválást) az alábbi módon:

- $\partial_i(uv) = \partial_i(u) + u\partial_i v$, minden $u, v \in F$ esetén,
- $\partial_i g_j = \delta_i^j$ .

Továbbá tekintsük a

$$\mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[H_1(X, \mathbb{Z})] \cong \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

leképezésekből álló láncot, ahol az első nyíl a $\phi$, a középső nyíl pedig a Hurewicz homomorfizmus által indukált leképezés. Legyen $\tilde{\phi} : \mathbb{Z}[F] \to \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ a fenti leképezés. Jelöljük továbbá $J$-vel azt a $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ feletti mátrixot, amelynek elemeire $(J)_{ij} = \tilde{\phi}(\partial_i r_j)$ teljesül.

**7.6. Tétel.** *Legyen $X$ a $K$ csomó komplementere. Ekkor $G = \pi_1(X)$ tetszőleges reprezentációja esetén a $J$ mátrix prezentálja a $H_1(X_\infty, \mathbb{Z})$, $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ feletti modulust.*

*Bizonyítás.* Lásd [7], 11. fejezet. □

A fenti tétel segítségével könnyen meghatározhatjuk a $T(p,q)$ tórusz csomó Alexander polinomját.

**7.7. Lemma.** *Tekinsük a standard $T$ tömör tóruszt $\mathbb{R}^3$-ban. Ekkor a $T(p,q) \subset \partial T$ tórusz csomó csoportja $\langle x, y | x^p y^{-q} \rangle$, ahol $y$ a $\pi_1(T)$, $x$ pedig a $\pi_1(S^3 \backslash T)$ csoport generátora.*

*Bizonyítás.* Tekintsük a $K = T(p,q)$ tórusz csomót a standard módon $\mathbb{R}^3 \subset S^3$-ba ágyazott $T$ tömör tórusz peremén. Legyen $T_1 = T \backslash K$ és $T_2 = \overline{S^3 \backslash T_1} \backslash K$, amely (lezártja) szintén egy tömör tórusz. Legyen $y, x$ a $\pi_1(T_1)$ és $\pi_1(T_2)$ csoportok generátorai. Könnyen látható, hogy a $T_1 \cap T_2$ szalagnak deformációs retraktuma a középvonala, amely egy $K$-val izotóp $K'$ csomó, és amely generálja $\pi_1(T_1 \cap T_2)$-t. A $K'$-t $T_1$-ben illetve $T_2$-ben tekintve kapjuk, hogy $[K'] = x^p$ és $[K'] = y^q$, így a Van Kampen tételből következik az állítás. □

A Fox kalkulus azonosságait használva kapjuk, hogy

$$\partial_x(x^p y^{-q}) = \partial_x(x^p) + x^p \partial_x(y^{-q}) = \partial_x(x^p) = 1 + x\partial_x(x^{p-1}) = 1 + \cdots + x^{p-1} = \frac{x^p - 1}{x - 1}.$$

Hasonlóan,

$$\partial_y(x^p y^{-q}) = \partial_y(x^p) + x^p \partial_y(y^{-q}) = x^p \partial_y(y^{-q}).$$

Továbbá $0 = \partial_y(1) = \partial_y(y^{-q} y^q) = \partial_y(y^{-q}) + y^{-q} \partial_y y^q$, azaz

$$\partial_y(y^{-q}) = -y^{-q} \partial_y y^q = -y^{-q}(1 + \cdots + y^{q-1}),$$

tehát

$$\partial_y(x^p y^{-q}) = -x^p y^{-q}(1 + \cdots + y^{q-1}) = -x^p y^{-q} \frac{y^q - 1}{y - 1}.$$

Legyen $X$ a $T(p,q)$ csomó komplementere. Tudjuk, hogy a $H_1(X, \mathbb{Z})$ homológiát a $T(p,q)$ csomó $\mu$ meridiánja generálja, amelyre $lk(\mu, T(p,q)) = 1$ (megfelelő irányítással). Továbbá $lk(x, T(p,q)) = q$, és $lk(y, T(p,q)) = p$, vagyis ($t = [\mu]$ jelöléssel) $\tilde{\phi}(x) = t^q$, $\tilde{\phi}(y) = t^p$. Vagyis

$$\tilde{\phi}(\partial_x(x^p y^{-q})) = \frac{t^{pq} - 1}{t^q - 1},$$

és

$$\tilde{\phi}(\partial_y(x^p y^{-q})) = \frac{t^{pq} - 1}{t^p - 1}.$$

Tehát a $J$ Jacobi mátrix

$$\begin{pmatrix} \frac{t^{pq}-1}{t^q-1} \\ \frac{t^{pq}-1}{t^p-1} \end{pmatrix}.$$

$J$ két eleme által generált ideál a legnagyobb közös osztójuk, vagyis a $\frac{(t^{pq}-1)(t-1)}{(t^p-1)(t^q-1)}$ polinom által generált ideál. Így a tórusz csomók Alexander polinomja (asszociáltság erejéig)

$$\triangle_{T(p,q)}(t) = \frac{(t^{pq} - 1)(t - 1)}{(t^p - 1)(t^q - 1)}.$$

**7.8. Megjegyzés.** *Korábban láttuk, hogy $g_3(T(p,q)) \leq \frac{(p-1)(q-1)}{2}$. A fentiek alapján a fordított egyenlőtlenség is igaz:*

$$g_3(T(p,q)) \geq \deg \triangle_{T(p,q)} = \frac{(p-1)(q-1)}{2},$$

*tehát*

$$g_3(T(p,q)) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

# 8. Függelék (Felületek homológiái)

A továbbiakban legyen $\Sigma$ egy $g$ génuszú, irányítható felület, melynek pereme homeomorf az $S^1$ körrel. Továbbá $x, y \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ esetén jelölje $x \cdot y$ az $x$ és $y$ metszési indexét. Legyen az $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ számok legnagyobb közös osztója $gcd(a_1, \ldots, a_n)$.

**8.1. Definíció.** *$H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ egy $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ bázisát algebrai szimplektikus bázisnak nevezzük, ha $a_i \cdot a_j = b_i \cdot b_j = 0$ minden $i, j$-re, és $a_i \cdot b_j = \delta_{ij}$.*

**8.2. Definíció.** *$H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ egy geometriai szimplektikus bázisának nevezzük az $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g$ irányított, egyszerű, zárt, összefüggő görbék halmazát, ha azok egy algebrai szimplektikus bázis reprezentánsai, továbbá $\alpha_i \cap \alpha_j = \beta_i \cap \beta_j = \alpha_i \cap \beta_j = \emptyset$ minden $i \neq j$-re, és $\alpha_i \cap \beta_i$ egy pontból áll minden $i$-re.*

**8.3. Megjegyzés.** *Könnyen látható, hogy minden $\Sigma$ felületnek létezik létezik geometriai szimplektikus bázisa, hiszen $\Sigma$ a $g$ lyukú tórusz egy $S^1$ peremmel, amelyen könnyen megadható egy geometriai szimplektikus bázis. Sőt, az is igaz, hogy tetszőleges $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k, \beta_k$ összefüggő, egyszerű, zárt görbék, amelyekre $\alpha_i \cap \alpha_j = \beta_i \cap \beta_j = \alpha_i \cap \beta_j = \emptyset$ tetszőleges $i \neq j$ esetén, továbbá $\alpha_i \cap \beta_i$ egy pontból áll; megfelelő $\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}, \ldots, \alpha_g, \beta_g$ görbékkel geometriai szimplektikus bázissá egészíthetők ki. Ez abból következik, hogy a $\Sigma \setminus (\alpha_1 \cup \beta_1 \cup \ldots \cup \alpha_k \cup \beta_k)$ egy $g-k$ génuszú, $k+1$ pontban kilyukasztott felület, amelyen fel tudunk venni egy geometriai szimplektikus bázist.*

**8.4. Definíció.** *Az $a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, $a \neq 0$ homológiaelemet primitívnek nevezzük, ha nem létezik $n > > 1$ és $b \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$, melyre $a = nb$. Ekvivalensen, $a$ primitív, ha $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ tetszőleges bázisában a koordinátáinak legnagyobb közös osztója $1$.*

**8.5. Állítás.** *Az $a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ nemnulla homológiaelem pontosan akkor primitív, ha reprezentálható egy $\gamma$ irányított, egyszerű, zárt, összefüggő görbével, amely nem nullhomológ.*

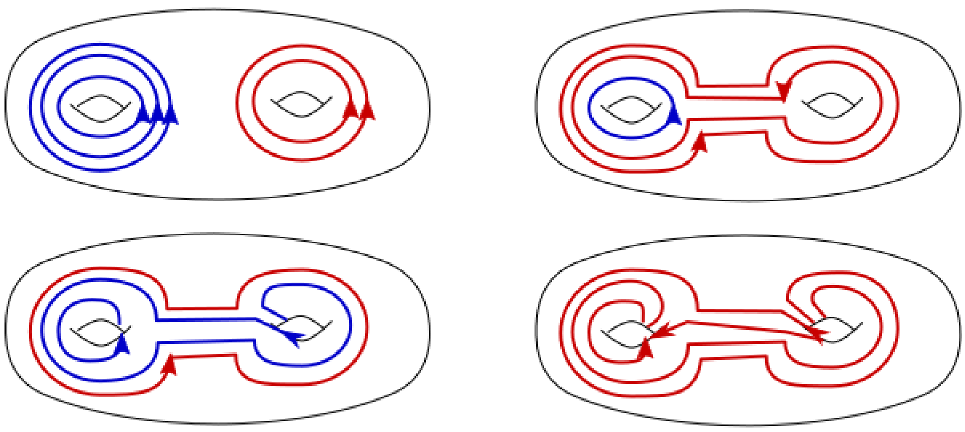
*Bizonyítás.* Tekintsük először a $\Sigma \setminus \gamma$ felületet. Ez összefüggő, mivel $\gamma$ nem nullhomológ. Továbbá legyen $\gamma_1$ és $\gamma_2$ a $\Sigma \setminus \gamma$ felület peremének a $\gamma$ görbének megfelelő komponensei. Vegyük a $\gamma$ egy $p$ pontját, és legyen $p_1 \in \gamma_1$ és $p_2 \in \gamma_2$ a $\gamma$ menti vágás során keletkező $p$-nek megfelelő két pont. Az összefüggőség miatt létezik olyan $\sigma : I \to \Sigma \setminus \gamma$ egyszerű görbe, amelyre a $\sigma(0) = p_1$, $\sigma(1) = p_2$ és $\sigma(intI) \cap (\gamma_1 \cup \gamma_2) = \emptyset$. Tekintsük most a $\sigma$ görbét a $\Sigma$ felületen. Így kapunk egy egyszerű zárt görbét, amely csak a $p$ pontban metszi $\gamma$-t, vagyis megfelelő irányítás választásával feltehető, hogy $[\sigma] \cdot [\gamma] = 1$. Ha létezne $b \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ és $n > 1$, melyekre $[\gamma] = nb$, akkor $1 = [\sigma] \cdot [\gamma] = n([\sigma] \cdot b)$ teljesülne, ami lehetetlen.

Fordítva, legyen $a \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ egy primitív elem. Tekintsük a $\Sigma$ felület $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g$ standard geometriai szimplektikus bázisát, és legyen ebben a bázisban $a = (v_1, w_1, \ldots, v_g, w_g)$. Az $\alpha_i, \beta_j$ görbék irányításának megváltoztatásával elérhető, hogy a $v_i, w_j \geq 0$ teljesüljön. Mgjegyezzük, hogy tóruszra igaz az állítás, mivel $a = (v_1, w_1)$ esetén a $T(v_1, w_1)$ tórusz csomó lesz a megfelelő reprezentáns. Továbbá az is könnyen látható, hogy a kilyukasztott tóruszra is igaz az állítás. Visszatérve az általános esethez, legyen $N_i$ az $\alpha_i \cup \beta_i$ egy kis környezete, melyek egymástól diszjunktak. $N_i$ homotóp ekvivalens a kilyukasztott tórusszal, így léteznek olyan $\gamma_i \in N_i$ irányított, zárt, egyszerű görbék, melyekre

$$gcd(v_i, w_i)[\gamma_i] = v_i[\alpha_i] + w_i[\beta_i].$$

Reprezentáljuk a $(v_1, w_1, v_2, w_2, 0, \ldots, 0)$ homológiaelemet $gcd(v_1, w_1)$ darab $\gamma_1$ és $gcd(v_2, w_2)$ darab $\gamma_2$ görbe uniójával. Könnyen látható, hogy a $\gamma_1$ görbék közül a legbaloldalibb összeköthető a $\gamma_2$ közül a legbaloldalibbal. Ezen összeköttetés mentén műtétet hajhatunk végre, amely kompatibilis az irányítással, és nem változtatja meg a homológiaosztályt. Ezt az eljárást addig folytathatjuk, amíg a $\gamma_1$ vagy a $\gamma_2$ görbék el nem fogynak. Ekkor kaptunk két új görbecsaládot, amelyek például $gcd(v_1, w_1) \geq gcd(v_2, w_2)$ esetén $gcd(v_1, w_1) - gcd(v_2, w_2)$, illetve $gcd(v_2, w_2)$ darab görbékből állnak. A két új görbecsalád legbaloldalibb tagjait ismét összeköthetjük, és ezt addig folytathatjuk, ameddig a kevesebb görbét tartalmazó görbecsalád el nem fogy. Ez az algoritmus nagyon hasonlít a számelméletben ismert Euklideszi algoritmushoz, annak topológikus változatának tekinthető. Így jól látszik, hogy a fenti eljárást folytatva végül egy olyan görbecsaládhoz jutunk, melynek $gcd(gcd(v_1, w_1), gcd(v_2, w_2)) = gcd(v_1, w_1, v_2, w_2)$ eleme van. Legyen $\gamma_{1,2}$ a görbecsalád egy görbéje. A fentiekhez hasonló módon reprezentáljuk a $(v_1, w_1, v_2, w_2, v_3, w_3, 0, \ldots, 0)$ homológia elemet $gcd(v_1, w_1, v_2, w_2)$ darab $\gamma_{1,2}$ és $gcd(v_3, w_3)$ darab $\gamma_3$ görbe uniójával, és alkalmazzuk ismét a topológikus Euklideszi algoritmust. Látható, hogy végül olyan görbecsaládot kapunk, amelynek $gcd(v_1, w_1, \ldots, v_g, w_g) = 1$ eleme van, azaz reprezentáltuk az $a$ homológiaelemet egy irányított, egyszerű, zárt görbével. $\square$

A fenti bizonyításban leírt algoritmus egy alkalmazását a 4. ábra szemlélteti.



4. ábra. A 8.5 állítás bizonyításában leírt algoritmus szemléltetése.

**8.6. Állítás.** *$H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ minden algebrai szimplektikus bázisa reprezentálható geometriai szimplektikus bázissal. Sőt, ha az $U \leq H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ részcsoportnak adott egy algebrai bázisa, akkor az is reprezentálható geometriai szimplektikus bázissal.*

*Bizonyítás.* A megfelelő görbéket rekurzívan fogjuk megkonstuálni, így az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $U = H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$. Legyen tehát $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ egy algebrai szimplektikus bázis. Tegyük fel először, hogy az $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$ elemeket már sikerült megfelelő $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k, \beta_k$ görbékkel reprezentálni. Szeretnénk az $a_{k+1}$ elemet egy összefüggő, egyszerű, zárt, $\alpha_{k+1}$ görbével reprezentálni, melyre $i \leq k$ esetén $\alpha_{k+1} \cap \alpha_i = \alpha_{k+1} \cap \beta_i = \emptyset$. $k = 0$ esetén ilyen $\alpha_{k+1}$ görbe létezése a 8.5 állításból egyből adódik, így feltehetjük, hogy $k \geq 1$. Egészítsük ki először az $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k, \beta_k$ görbéket egy tetszőleges geometriai szimplektikus bázissá az $\alpha'_{k+1}, \beta'_{k+1}, \ldots, \alpha'_g, \beta'_g$ görbékkel. Ez megtehető, hiszen $\Sigma \backslash (\alpha_1 \cup \beta_1 \cup \ldots \cup \alpha_k \cup \beta_k)$ egy $g-k$ génuszú felület, $k+1$ pontban kilyukasztva.

Írjuk fel $a_{k+1}$-et a fent definiált geometriai szimplektikus bázisban:

$$a_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} x_i[\alpha_i] + y_i[\beta_i] + \sum_{i=k+1}^{g} x_i[\alpha'_i] + y_i[\beta'_i],$$

megfelelő $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$ számokkal.

$j \leq k$ esetén $a_{k+1} \cdot a_j = 0$ és $a_j = [\alpha_j]$ egyenlőségekből kapjuk, hogy

$$0 = a_{k+1} \cdot a_j = \left( \sum_{i=1}^{k} x_i[\alpha_i] + y_i[\beta_i] + \sum_{i=k+1}^{g} x_i[\alpha'_i] + y_i[\beta'_i] \right) \cdot a_j = -y_j.$$

hasonlóan kapjuk, hogy $j \leq k$ esetén $x_j = 0$. Ezek alapján reprezentálhatjuk az $a_{k+1}$ elemet az $\alpha'_{k+1}, \beta'_{k+1}, \ldots, \alpha'_g, \beta'_g$ görbék lineáris kombinációjával. Vegyük észre, hogy a 8.5 állítás bizonyításában leírt Euklideszi algoritmus alkalmazható a $\Sigma \backslash (\alpha_1 \cup \beta_1, \cup \ldots \cup \alpha_k \cup \beta_k)$ felületen arra, hogy az $a_{k+1}$ ezen reprezentációját összefüggő, egyszerű, zárt $\alpha_{k+1}$ görbévé műtsük át, amelyet a $\Sigma$ felületen tekintve kapjuk az $a_{k+1}$ megfelelő reprezentációját.

Most tegyük fel, hogy $k \geq 1$, és az $a_1, b_1, \ldots, a_k$ elemeket már sikerült megfelelő $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k$ görbékkel reprezentálni. Szeretnénk a $b_k$ elemet is egy $\beta_k$ összefüggő, egyszerű, zárt görbével reprezentálni, melyre $i<k$ esetén $\beta_k \cap \alpha_i = \beta_k \cap \beta_i = \emptyset$, illetve $\beta_k \cap \alpha_k$ egy pontból áll. A fentiekhez hasonlóan járhatunk el. Először egészítsük ki az $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k$ görbéket egy tetszőleges geometriai bázissá a $\beta'_k, \alpha'_{k+1}, \beta'_{k+1}, \ldots, \alpha'_g, \beta'_g$ görbékkel, az alábbi módon. Legyen $F = \Sigma \backslash (\alpha_1 \cup \beta_1 \cup \ldots \cup \alpha_{k-1} \cup \cup \beta_{k-1})$. Válasszunk egy $\beta'_k \in F$ görbét, amely egyszer metszi $\alpha_k$-t. (Ez megtehető, mivel $F \backslash \alpha_k$ összefüggő.) Ezután már felvehetünk megfelelő $\alpha'_{k+1}, \beta'_{k+1}, \ldots, \alpha'_g, \beta'_g$ görbéket az $F \backslash (\alpha_k \cup \beta'_k)$, $g-k$ génuszú, $k+1$ pontban kilyukasztott felületen. Ismét a fentiekhez hasonlóan, a metszési indexeket figyelembe véve adódik, hogy $b_k$-t reprezentálhatjuk megfelelő számú $\alpha'_{k+1}, \beta'_{k+1}, \ldots, \alpha'_g, \beta'_g$, illetve egy darab $\beta_k$ görbével. Az $F \backslash \alpha_k$ felületen az Euklideszi algoritmussal ezt a reprezentációt egy összefüggő, egyszerű, zárt $\beta_k$ görbévé műthetjük át. A $b_k$ reprezentációjának $\beta'_k$ komponense az $F \backslash \alpha_k$ felületen nem zárt, de könnyen meggondolható, hogy az Euklideszi algoritmus ebben az esetben is alkalmazható.

$\square$

## Hivatkozások


[1] S. Baader, P. Feller, L. Lewark, and L. Liechti. On the topological 4-genus of torus knots. math.GT/1509.07634.

[2] B. Farb and D. Margalit. *A primer on mapping class groups*, volume 49 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.

[3] P. Feller. The degree of the Alexander polynomial is an upper bound for the topological slice genus. math.GT/1504.01064.

[4] M. Freedman and F. Quinn. *Topology of 4-manifolds*, volume 39 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[5] S. Garoufalidis and P. Teichner. On knots with trivial Alexander polynomial. *J. Differential Geom.*, 67(1):167–193, 2004.

[6] K. Kearney. The stable concordance genus. *New York J. Math.*, 20:973–987, 2014.

[7] R. Lickorish. *An introduction to knot theory*, volume 175 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997.

[8] P. Ozsváth, A. Stipsicz, and Z. Szabó. *Grid homology for knots and links*, volume 208 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[9] P. Ozsváth, A. Stipsicz, and Z. Szabó. Concordance homomorphisms from knot Floer homology. math.GT/1407.1795.