SZAKDOLGOZAT

Ekvivariáns kohomológia és alkalmazása leszámlálásokban

Juhász András

Témavezető: Fehér László
egyetemi docens
ELTE Matematika Intézet,
Analízis Tanszék

ELTE
2016

Tartalomjegyzék

Bevezetés

$\mathbb{P}^2$ komplex projektív sík egyenesei a duális tér pontjainak felelnek meg, így egy $C \subset \mathbb{P}^2$ sima algebrai görbe érintői meghatározzák a duális tér pontjainak egy halmazát. Belátható, hogy ezen ponthalmaz a duális tér egy C^* duális algebrai görbéjét alkotja. Ennek az esetek többségében vannak szinguláris pontjai, így a duális görbe definícióját célszerű tetszőleges algebrai görbékre kiterjeszteni, és a görbe sima részét érintő egyeneseknek megfelelő duális térbeli pontok lezártjának definiálni. A reflexivitási tétel szerint ekkor $(C^*)^* = C$ (lásd [Tev01]).

Egy C görbét nevezzünk „általánosnak”, ha C és C^* szingularitásai között csak kettőspontok és csúcsok fordulnak elő. Ekkor C fokát, génuszát, csúcsainak, kettőspontjainak, bitangenseinek valamint inflexióinak számát jelölje rendre d, g, κ, δ, b és f. A projektív dualitás megőrzi görbék ezen „általános” tulajdonságát, így egy görbe C^* duálisához is hozzárendelhetjük a megfelelő $d^*, g^*, \kappa^*, \delta^*, b^*, f^*$ invariánsokat. Egy görbe bitangenseinek a duális kettőspontjai, inflexióinak a duális csúcsai felelnek meg, belátható, hogy görbe és duálisának génusza megegyezik. Ezekből és a reflexivitási tételből

$$g = g^*, b = \delta^*, \delta = b^*, f = \kappa^*, \kappa = f^*$$

következik. Plücker és Clebsh felfedezte, hogy a fentieken kívül számos, görbék ezen jellemzői közti nem triviális kapcsolatot kifejező egyenlet létezik. Ezeket az egyenleteket nevezzük Plücker-formuláknak. Sima C algebrai görbék esetén a formulák $\kappa = \delta = 0$ egyenletnek megfelelően egyszerűsödnek.

Az ekvivariáns kohomológiaelmélet jól használható módszereket nyújt ilyen és ehhez hasonló leszámlálási kérdések megválaszolására. A szakdolgozat célja ezen elmélet bemutatása, különös tekintettel a sima görbék inflexióinak számát meghatározó Plücker-formula levezetéséhez szükséges eszközökre, és alkalmazása az

$$f = 3d(d-2)$$

egyenlet bizonyításában.

A szakdolgozat nagy részét az ekvivariáns kohomológia számunkra szükséges definícióinak és állításainak ismertetése teszi ki. Ennek leírásában [Feh15a] volt nagy segítségemre. A konkrét Plücker-formula bizonyításához szükséges kohomológiaosztály kiszámításához [FNR06] ötletét követem. Sima d-edrendű síkgörbe inflexióinak számát meghatározó egyenlet a megfelelő kohomológiaosztály ismeretében elemi módszerekkel kiszámolható.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani tanáraimnak, akik bevezettek az algebrai és differenciáltopológia világába, különösen Fehér Lászlónak, akinek a témaválasztásban nyújtott segítsége és türelmes magyarázatai nélkül ez a szakdolgozat nem készülhetett volna el.

1. Univerzális nyaláb

1.1. Definíció. Legyen G topologikus csoport. Az $EG \to BG$ principális G-nyalábot univerzális G-nyalábnak nevezzük, ha EG gyengén pontrahúzható.

A nyaláb BG bázisát G csoport klasszifikáló terének nevezzük. Az elnevezéseket az alábbi tétel indokolja.

1.2. Tétel. *Bármely parakompakt tér feletti $P \to M$ principális G-nyaláb izomorf az univerzális nyaláb egy visszahúzottjával: létezik egy homotópia erejéig egyértelmű*

$$\kappa : M \to BG$$

klasszifikáló leképezés, melyre $\kappa^*(EG) \cong P$.

Parakompakt terek egy speciális csoportja, a CW-komplexusok esetén az állítás következik a későbbi, 2.3 tétel bizonyításából. 1.2 tétel következménye, hogy egy csoport klasszifikáló tere homotópia erejéig egyértelmű. A Milnor-konstrukció (lásd [Mil56]) tetszőleges topologikus csoport esetén használható eljárást ad a csoport egy klasszifikáló terének legyártására. CW-approximáció [Hat02] segítségével feltehető, hogy a klasszifikáló térnek adott egy CW-felbontása.

1.3. Állítás. *Tetszőleges G csoportnak létezik CW-komplexus klasszifikáló tere.*

Bizonyítás. Tekintsük G egy tetszőleges $EG \to BG$ univerzális nyalábját, és legyen $f : B \to BG$ a klasszifikáló tér CW-approximációja. Írjuk fel az $EG \to BG$ nyalábra, illetve az f-menti $E = f^*(EG) \to B$ visszahúzottjára vonatkozó homotopikus egzakt sorokat.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(B) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_n(F) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \pi_n(E) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}_*"'] & \pi_n(B) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_{n-1}(F) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(BG) \arrow[r] & \pi_n(F) \arrow[r] & \pi_n(EG) \arrow[r] & \pi_n(BG) \arrow[r] & \pi_{n-1}(F) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

A diagram kommutatív, f gyenge homotopikus ekvivalencia definíció szerint izomorfizmust indukál a homotopikus csoportok között, így az 5-lemma szerint $\tilde{f}_*$ izomorfizmus, $\pi_n(E)$ triviális bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén. $\square$

Ha $\rho : H \to G$ topologikus csoportok között menő homomorfizmus, akkor H hat G-n,

$$h \cdot g = \rho(h)g,$$

hiszen a szorzás asszociatív, és így elkészíthetjük az $EH \times_\rho G$ asszociált principális G-nyalábot. EG univerzális tulajdonsága miatt létezik egy $B\rho$ klasszifikáló leképezés, melyre

$$\begin{tikzcd}
EH \times_\rho G = B\rho^*(EG) \arrow[d] & EG \arrow[d] \\
BH \arrow[r, "B\rho"] & BG
\end{tikzcd}$$

Belátható (lásd [Mit11]), hogy $\sigma : I \to H$ és $\rho : H \to G$ homomorfizmusok esetén $B\sigma^* B\rho^*(EG) \cong EI \times_{\rho\sigma} G$, és így

$$B(\rho\sigma) = B\rho B\sigma,$$

vagyis csoporthoz annak klasszifikáló terét rendelő B leképezés funktor a csoportok kategóriájából a topologikus terek (vagy CW-komplexusok) ekvivalenciaosztályainak kategóriájába.

Egy principális G-nyaláb és egy principális H-nyaláb szorzata principális $(G \times H)$-nyaláb, gyengén pontrahúzható terek szorzata gyengén pontrahúzható, így $EG \times EH \to BG \times BH$ univerzális $(G \times H)$-nyaláb. BG és BH kohomológiáinak ismeretében a szorzatcsoport klasszifikálóterének kohomológiagyűrűje sok esetben meghatározható. Jelölje π_{BG} illetve π_{BH} $BG \times BH$ megfelelő tényezőjére vett projekcióit. A Künneth-formula szerint, ha $H^k(BH; R)$ minden k esetén végesen generált R-modulus, akkor a

$$H^*(BG; R) \otimes H^*(BH; R) \to H^*(BG \times BH; R),\ a \otimes b \mapsto \pi^*_{BG}(a) \smile \pi^*_{BH}(b)$$

keresztszorzat izomorfizmus.

Csoportok szorzatáról vett $\pi : G \times H \to G$ projekció indukál egy $B\pi$ leképezést a klasszifikáló terek között.

$$(EG \times EH) \times_\pi G \cong \pi^*_{BG}(EG),$$

így definíció szerint $B\pi \sim \pi_{BG}$, a Künneth-formulában szereplő vetítés. Hasonlóan, tetszőleges $h \in BH$ esetén a szorzatcsoport univerzális nyalábjának $i_h : BG \to BG \times BH$, $g \mapsto (g, h)$ beágyazás menti visszahúzottja,

$$i^*_h(EG \times EH) \cong EG \times_i (G \times H),$$

ahol i a G csoport kanonikus beágyazása a $G \times H$ szorzatba, és így $Bi \sim i_h$.

Példáink során legtöbbször az általános lineáris csoportnak és n-tóruszának klasszifikáló tere kerül elő. Belátható, hogy $\gamma^n \to \mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$ tautologikus n-nyaláb $\mathrm{Inj}(\mathbb{C}^n, \gamma^n)$ keretnyalábja univerzális $GL(n)$-nyaláb. Segítségével $\mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$ kohomológiagyűrűje felírható polinomgyűrűként,

$$H^*(BGL(n); \mathbb{Z}) = H^*(\mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n],$$

ahol c_i a taulogikus nyaláb i-edik Chern-osztályát jelöli. $n = 1$ esetből $BGL(1) = BT(1) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^\infty)$ és $H^*(BT(1); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1]$ adódik. Szorzatcsoportok klasszifikáló teréről leírtak szerint $BT(n) = B(\times_{i=1}^n T(1)) = \times_{i=1}^n BT(1)$, és így a Künneth-formulából

$$\otimes_{i=1}^n \mathbb{Z}[c_1] = \mathbb{Z}[\pi_1^*(c_1), \ldots, \pi_n^*(c_1)] = \mathbb{Z}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = H^*(BT(n); \mathbb{Z})$$

következik, ahol a karakterisztikus osztályok természetességéből adódóan α_i $BT(n)$ i-edik faktora feletti tautologikus 1-nyaláb visszahúzottjának első Chern-osztálya.

$H^*(BGL(n))$ és $H^*(BT(n))$ kapcsolatáról a 4. fejezetben lesz még szó.

2. Ekvivariáns kohomológia

Adott G Lie-csoport esetén G-térnek nevezünk minden olyan topologikus teret, melyen adott egy bal G-hatás. Az ekvivariáns kohomológia egy funktor a G-terek kategóriájából a gyűrűk kategóriájába. Bevezetése két lépésben, a Borel-konstrukción keresztül történik.

2.1. Definíció. A Borel-konstrukció egy funktor a G-terek kategóriájából a fibrált nyalábok kategóriájába, amely egy X G-térhez az $EG \to BG$ univerzális G-nyalábhoz asszociált

$$B_G X = EG \times_G X \to BG$$

nyalábot rendeli. Ha $f : X \to Y$ egy G-ekvivariáns leképezés, akkor

$$B_G f : B_G X \to B_G Y \ , \ f\left([(e,x)]\right) = [(e, f(x))]$$

jól értelmezett nyalábleképezés, hiszen $B_G f([(eg,x)]) = [(eg, f(x))] = [(e, gf(x))] = [(e, f(gx))] = B_G f([(e, gx)])$.

A definícióból nyilvánvalóan következik a hozzárendelés funktorialitása. A Borel-konstrukció a másik változójában is funktoriális. Ha $\rho : H \to G$ Lie-csoportok között menő homomorfizmus, akkor minden X G-téren értelmezett egy bal H-hatás,

$$h \cdot x = \rho(h)x,$$

melyre $B_\rho X \cong B\rho^*(B_G X)$ teljesül.

A Borel-konstrukción keresztül definiálhatjuk tetszőleges h^* kohomológiaelmélet ekvivariáns változatát.

2.2. Definíció. Egy X G-tér G-ekvivariáns h^*-kohomológiája,

$$h^*_G(X) = h^*(B_G X).$$

Az ekvivariáns kohomológia funktorialitása azonnal következik a Borel-konstrukció és a kohomológia ezen tulajdonságából.

A $B_G X$ tér $p : EG \times_G X \to BG$ nyalábstruktúrája a $p^* : h^*(BG) \to h^*(B_G X)$ homomorfizmuson keresztül $h^*(BG)$-modulusstruktúrát indukál $h^*_G(X)$ ekvivariáns kohomológiagyűrűn. Vezessük be a $h^*_G = h^*_G(\{*\})$ jelölést. Ekkor az (ekvivariáns) $co_X : X \to \{*\}$ konstans leképezés által indukált $h^*_G(\{*\}) \to h^*_G(X)$ homomorfizmus h^*_G-modulussá teszi $h^*_G(X)$ kohomológiát.

$$\begin{tikzcd} B_G X \arrow[r, "B_G \operatorname{co}_X"] \arrow[dr, "p"'] & B_G\{*\} \arrow[d, equal] \\ & BG \end{tikzcd}$$

A fenti diagram nyilvánvalóan kommutatív, így két modulusstruktúra megegyezik.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "c_{0X}"'] & & Y \arrow[dl, "c_{0Y}"] \\ & \{*\} & \end{tikzcd}$$

diagram kommutativitásából, az ekvivariáns kohomológia funktorialitásából és a leképezés által a kohomológiák között indukált morfizmus szorzattartásából következik, hogy $B_G f$ a h_G^*-modulusstruktúrát is őrzi.

A továbbiakban a szinguláris kohomológiaelmélet (H^*) ekvivariáns változatát vizsgáljuk.

2.1. Principális nyalábok ekvivariáns kohomológiája

2.3. Tétel. *Legyen $P \to M$ egy CW-komplexus feletti principális G-nyaláb. Ekkor a $\pi_M : EG \times_G P \to M$ nyalábleképezés által indukált $\pi_M^* : H^*(M) \to H_G^*(P)$ morfizmus gyűrű izomorfizmus. Az azonosítás során $H_G^*(P)$ fenti H_G^*-modulusstruktúrájának a $P \to M$ G-karakterisztikus osztályaival való szorzás felel meg. Jelölje $\kappa : M \to BG$ a P nyaláb klasszifikáló leképezését, ekkor*

$$\pi_M^* \left(\kappa^*(b) m\right) = p^*(b)\pi_M^*(m)$$

minden $b \in H^*(BG)$ és $m \in H^*(M)$ esetén.

Bizonyítás. π_M nyaláb EG fibruma az univerzális nyaláb definíciója szerint gyengén pontrahúzható, így $H^*(EG; R) = H^0(EG; R) = \langle 1 \rangle$ végesen generált szabad R-modulus. $1 \in H^0(EG \times_G P; R)$ fibrumok kohomológiájára vett i^* megszorítása definíció szerint $1 \in H^*(EG; R)$, így a tenzorszorzat azonosságai és a Leray-Hirsch tétel szerint,

$$H^*(M; R) \approx H^*(M; R) \otimes (H^*(EG; R) \approx R) \xrightarrow{\Phi} H^*(EG \times_G P)$$
$$m \mapsto m \otimes (i^*(1) = 1 \in R) \mapsto \pi_M^*(m) \smile 1 = \pi_M^*(m)$$

π_M^* izomorfizmus. A második részt az alábbi állítások felhasználásával látjuk be.

2.4. Lemma. *Ha egy CW-komplexus feletti fibrált nyaláb fibruma (gyengén) pontrahúzható, akkor létezik szelése.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a szelés az X CW-komplexus $n-1$ váza felett már definiálva van. e_α^n n-cella karakterisztikus leképezését jelölje ϕ_α. A nyaláb $\phi_\alpha : D^n \to X$ menti visszahúzottja triviális, mivel D^n pontrahúzható, így a cella határán már definiált szelés a trivializáción keresztül azonosítható egy S^{n-1}-ről a fibrumba menő függvénnyel. $\pi_{n-1}(EG) = 0$ miatt ez a leképezés kiterjed az egész D^n-re, és így a karakterisztikus leképezésen keresztül az e_α^n n-cellára. □

2.5. Lemma. *Legyen $\pi : P \to M$ egy principális G-nyaláb, F pedig egy G-tér. Tekintsük az F fibrumú $\pi_M : P \times_G F \to M$ asszociált nyalábot. Ekkor $\pi_M^*(P)$ izomorf a $P \times F \to P \times_G F$ principális G-nyalábbal.*

$$
\begin{tikzcd}
P \times F \arrow[r, "\alpha", "\cong"'] \arrow[dr] & \pi_M^*(P) \arrow[d] & P \arrow[d, "\pi"] \\
 & P \times_G F \arrow[r, "\pi_M"] & M
\end{tikzcd}
$$

Bizonyítás. $P \times F$ téren definiált átlós G-csoporthatás,

$$(p, f) \cdot g = (pg, g^{-1} f),$$

szerint a $(p, f) \cdot g$, $g \in G$ elemek képe $[p, f]$, azaz a G hatás orbitjai a fibrumok, és így $P \times F \to P \times_G F$ valóban principális G-nyaláb. A bizonyításhoz elég megadnunk egy $P \times F$ és $\pi_M^*(P)$ közötti G-ekvivariáns nyalábleképezést $P \times_G F$ identitása felett, hiszen minden ilyen függvény izomorfizmust definiál az adott principális G-nyalábok között [Mit11]. Definíció szerint

$$\pi_M^*(P) = \{\, ([p, f], q) |\, [p, f] \in P \times_G F,\ q \in P,\ q = pg \text{ valamilyen } g \in G\text{-re} \},$$

hiszen $\pi_M([p, f]) = \pi(q)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\pi(p) = \pi(q)$, vagyis $q = p \cdot g$ valamilyen $g \in G$ elemre. Legyen

$$\alpha : P \times F \to \pi_M^*(P),\ \alpha(p, f) = ([p, f], p)\,.$$

Ekkor α G-ekvivariáns nyalábleképezés, hiszen $\alpha((p, f) \cdot g) = \alpha(pg, g^{-1} f) = ([pg, g^{-1} f], pg) = ([p, f], p) \cdot g$. $\square$

2.6. Lemma. *Legyen $\pi : P \to M$ egy principális G-nyaláb, F pedig egy G-tér. Tekintsük a $\pi_M : P \times_G F \to M$ asszociált nyaláb egy $\sigma : M \to P \times_G F$ szelését. Ekkor a szorzatnyaláb σ menti visszahúzottja izomorf $\pi : P \to M$ principális G-nyalábbal.*

$$
\begin{tikzcd}
P \times F \arrow[d] & & \sigma^*(P \times F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & P \arrow[dl, "\pi"] \\
P \times_G F \arrow[rr, "\pi_M"] & & M \arrow[ll, dashed, bend left, "\sigma"] &
\end{tikzcd}
$$

Bizonyítás. $\pi_M \sigma = \mathrm{id}_M$, így az előző lemma és a visszahúzás tulajdonságai miatt

$$P \cong \sigma^* \pi_M^*(P) \cong \sigma^*(P \times F).$$

$\square$

A tétel bizonyításának befejezéséhez vegyük észre, hogy $EG \times_G P$ téren két különböző nyalábstruktúra van.

$$
\begin{tikzcd}
EG \arrow[d] & EG \times P \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d] \\
BG & EG \times_G P \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\pi_M"] & M \arrow[l, bend left, "\sigma"]
\end{tikzcd}
$$

2.5 lemmát $EG \times_G P$ nyalábra alkalmazva kapjuk, hogy $\pi^*(EG) \cong EG \times P$. M CW-komplexus, $EG \times_G P \to M$ nyaláb EG fibruma gyengén pontrahúzható, így 2.4 lemmából adódik egy $\sigma : M \to EG \times_G P$ szelés. 2.6 lemmából $\sigma^*(EG \times P) \cong P$, és így $\sigma^*\pi^*(EG) \cong P$ izomorfizmus következik. Eszerint $\pi\sigma : M \to BG$ a P nyaláb klasszifikáló leképezése, így $\pi_M^* : H^*(M) \to H_G^*(P)$ azonosításnál $H^*(M)$ H_G^*-modulusstruktúráját a P nyaláb G-karakterisztikus osztályai adják. $\square$

2.2. Projektív terek G-ekvivaráns kohomológiagyűrűje

Legyen V egy komplex n-dimenziós vektortér, melyen értelmezett egy lineáris $\rho : G \to GL(V)$ hatás. ρ indukál egy G-hatást a vektortér $\mathbb{P}V$ projektivizáltján, így definiálható $B_G\mathbb{P}V = EG \times_G \mathbb{P}V \xrightarrow{p} BG$ asszociált nyaláb és $H_G^*(\mathbb{P}V)$ ekvivariáns kohomológiagyűrű. A kitűzött leszámlálási probléma megoldása során szükségünk lesz $H_G^*(\mathbb{P}V)$ pontos leírására, így ebben a részben ezzel a kérdéssel foglalkozunk. Ehhez új fogalmak és jelölések bevezetésére lesz szükségünk.

$E \to M$ vektornyalábot G-vektornyalábnak nevezünk, ha G hat M-en, és ennek a hatásnak értelmezett egy E-re vett felemelése, mely lineáris a fibrumokon. Belátható, hogy ebben az esetben $B_GE \to B_GM$ is vektornyaláb.

2.7. Definíció. Egy $E \to M$ G-vektornyaláb G-ekvivariáns Chern-osztályai a Borel-konstrukció Chern-osztályai,

$$c_i^G(E) = c_i(B_GE \to B_GM) \in H_G^{2i}(M).$$

Az ekvivariáns Euler-osztály, $e_G(E)$ a top ekvivariáns Chern-osztályt jelöli.

Jelölje δ a $\gamma^1 \to \mathbb{P}V$ tautologikus (G-)nyaláb $e_G(\gamma^1)$ ekvivariáns Euler-osztályát, és definiáljuk a

$$\varphi : H_G^*[x] \to H_G(\mathbb{P}V)$$

gyűrű homomorfizmust, mely H_G^* elemeihez p^* általi képüket, x-hez $(-\delta)$-t rendeli. Megmutatjuk, hogy φ indukál egy

$$H_G^*(\mathbb{P}V) \cong H_G^*[x] \Big/ (R)$$

izomorfizmust, ahol $R = \sum_{i=0}^n c_i x^{n-i}$ és $c_i = c_i^G(V) \in H_G^*$.

2.8. Állítás. *φ szürjektív*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy $1, -\delta, \ldots, (-\delta)^{n-1} \in H_G^*(\mathbb{P}V)$ elemek megszorításai szabadon generálják $B_G\mathbb{P}V \to BG$ nyaláb egy tetszőleges $\mathbb{P}V_b$, $b \in BG$ fibrumának $H^*(\mathbb{P}V_b)$ kohomológiáit. A Leray-Hirsh tétel szerint ekkor

$$H_G^*(\mathbb{P}V) \cong H_G^*\langle 1, -\delta, \ldots, (-\delta)^{n-1}\rangle$$

szabadon generált H_G^*-modulus, ahol az izomorfizmus során H_G^* elemeihez p^* általi képüket rendeljük, így a φ leképezés nyilvánvalóan szürjektív.

Egy fibrum beágyazását jelölje $i_b : \mathbb{P}V_b \to B_G\mathbb{P}V$. $B_G\gamma^1 \to B_G\mathbb{P}V$ nyaláb $\mathbb{P}V_b$-re vett $i_b^*(B_G\gamma^1)$ megszorítása a $\mathbb{P}V_b$ feletti tautologikus egyenesnyaláb, így az Euler-osztály természetességéből

$$\delta|_{\mathbb{P}V_b} = i_b^*(e_G(\gamma^1)) = e(i_b^*(\mathrm{B}_G\,\gamma^1)) = e(\gamma^1)$$

következik, ami bizonyítja az állítást, hiszen tudjuk, hogy $e(\gamma^1)^i = (-\delta)|_{\mathbb{P}V}^i$ ($i = 0, \ldots, n-1$) additív bázisa $H^*(\mathbb{P}V)$ kohomológiagyűrűnek. □

2.9. Állítás. *$\sum_{i=0}^n c_i x^{n-i}$ eleme a φ leképezés magjának.*

Bizonyítás. A Whitney-összegformula szerint $p^*(B_GV)/B_G\gamma^1$ hányadosnyaláb totális Chern-osztálya a két nyaláb totális Chern-osztályának formális hányadosa. $n-1$ rangú nyaláb n-edik Chern-osztálya eltűnik, így

$$\left.\frac{p^*(1 + c_1 + \ldots + c_n)}{1+\delta}\right|_n = p^*(1 + c_1 + \ldots + c_n)(1 + (-\delta) + (-\delta)^2 + \ldots)\big|_n =$$
$$\sum_{i=0}^n p^*(c_i)(-\delta)^{n-i} = \varphi\left(\sum_{i=0}^n c_i x^{n-i}\right) = 0.$$

□

2.10. Állítás. *$\sum_{i=0}^n c_i x^{n-i}$ generálja φ magját.*

Bizonyítás. A megelőző állítások szerint φ indukál egy szürjektív

$$H_G^*[x]\big/(R) \to H_G^*(\mathbb{P}V)$$

leképezést. A fenti szabad H_G^*-modulusok rangja megegyezik, így belátható, hogy a köztük menő leképezés izomorfizmus. □

3. Invariáns részvarietások ekvivariáns kohomológiaosztálya

Egy M sima sokaság X d kodimenziós koirányított zárt részsokasága meghatároz egy $[X] \in H^d(M)$ kohomológiaosztályt (lásd [MS74]). Ezt a konstrukciót szeretnénk kiterjeszteni egy M sima G-sokaság kellően szép G-invariáns Y részvarietására, definiálva egy $[Y]_G \in H_G^*(M)$ G-ekvivariáns kohomológiaosztályt.

Y G-invarianciája lehetővé teszi $B_GY \subset B_GM$ altér értelmezését, azonban a fenti tétel több okból sem alkalmazható. Sok érdekes esetben Y varietás nem rendelkezik sima sokaság struktúrával, így először erre kell kiterjesztenünk altér nem-ekvivariáns osztályának definícióját. A legfontosabb G topologikus csoportok klasszifikáló tere végtelen dimenziós, így B_GY és B_GM sem sokaság. Ezt a nehézséget $EG \to BG$ véges dimenziós approximációján keresztül oldhatjuk meg.

Leszámlálási problémák gyakran megfogalmazhatók fibrált nyalábok segítségével. A válasz legtöbbször valamely affin varietás által definiált résznyaláb szelés által vett ősképének számossága. Ennek megfelelően példáink többségében a határoló sokaság egy V komplex vektortér, a vektortéren értelmezett G-hatás lineáris, Y pedig V egy G-invariáns affin varietása. Legyen $P \to X$ egy algebrai sokaság felett értelmezett principális G-nyaláb. Tekintsük az

$$\begin{tikzcd} E = P \times_G V \arrow[d, shift right] \\ X \arrow[u, bend right, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

asszociált nyaláb egy „általános” σ szelését. Y G-invarianciája segítségével definiálhatjuk $P \times_G Y$ alteret és ennek

$$Y(\sigma) = \sigma^{-1}(P \times_G Y) \subset X$$

ősképét. A kérdéses $[Y(\sigma)] \in H^*(X)$ és $[Y]_G \in H^*_G(V)$ kapcsolatát a következő tétel mutatja.

3.1. Tétel. *A $p : B_GV \to BG$ asszociált nyaláb V fibruma pontrahúzható, így a Leray-Hirsch tétel szerint p^* kanonikus izomorfizmus $H^*_G(V)$ és H^*_G kohomológiagyűrűk között. p^* mentén azonosíthatjuk $[Y]_G$ osztályt egy $\alpha \in H^*(BG)$ G-karakterisztikus osztállyal. Ekkor*

$$[Y(\sigma)] = \alpha(P),$$

ahol $\alpha(P) = \kappa^*(\alpha)$, $\kappa : X \to BG$ a P nyaláb klasszifikáló leképezése.

Ez az univerzális tulajdonság meghatározza $[Y]_G$ G-ekvivariáns kohomológiaosztályt.

A tételt $[Y]_G$ osztály konstrukciójának ismeretében, később bizonyítjuk be.

3.2. Példa. Tekintsük $G = GL(n)$ standard hatását $V = \mathbb{C}^n$ vektortéren, és legyen $Y = \{0\}$ G-invariáns altér. Tetszőleges (P principális $GL(n)$-nyalábhoz asszociált) vektornyaláb és ennek a zérószelésre transzverzális σ szelése esetén $[\sigma^{-1}(0)]$ megegyezik P Euler-osztályával [Feh15b]. 3.1 tétel szerint ekkor

$$[0]_{GL(n)} = c_n \in H^*(BGL(n)) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n].$$

A későbbiekben látni fogjuk, hogy $H^*(BGL(n))$ más elemei is előállíthatók valamilyen $GL(n)$-hatás $GL(n)$-invariáns részvarietásának ekvivariáns kohomológiaosztályaként.

3.1. Rétegelt részsokaság és kohomológiaosztályának definíciója

3.3. Definíció. Az X n dimenziós sima sokaság egy

$$\mathcal{X} = \{X_i,\, i = 0, \dots, n\}$$

partícióját X rétegelésének nevezzük, ha X_i i kodimenziós (nem feltétlenül zárt és esetleg üres) részsokaság, és $\overline{X_i} \subset Z_i = \cup_{j \geq i} X_j$.

Z_i altereket az X rétegelt részsokaságainak nevezzük, pontosabban

3.4. Definíció. Egy n dimenziós X sokaság $Y \subset X$ részét d kodimenziós rétegelt részsokaságnak nevezzük, ha

$$Y = \cup_{j \geq d} X_j$$

X j kodimenziós X_j részsokaságainak partíciója, melyekre $\overline{X_i} \subset \cup_{j \geq i} X_j$ teljesül.

$\overline{X_{d+1}} \subset \cup_{j \geq d+1} X_j$ feltétel miatt egyrészt Z_{d+1} zárt, így $X \setminus Z_{d+1}$ az X sokaság egy nyílt része, és így maga is sokaság, másrészt $X_d = Y \setminus Z_{d+1} \subset X \setminus Z_{d+1}$ zárt részsokaság. Ha $X_d \subset X \setminus Z_{d+1}$ koirányított, akkor definiál egy $[X_d] \in H^d(X \setminus Z_{d+1})$ osztályt.

3.5. Definíció. Egy Y rétegelt részsokaságot ciklusnak nevezünk, ha létezik egy $\alpha \in H^d(X)$, melyre

$$\alpha|_{X \setminus Z_{d+1}} = [X_d].$$

Ekkor $[Y] = \alpha$ a koirányított rétegelt $Y \subset X$ részsokaság kohomológiaosztálya.

3.6. Tétel. *Legyen $Y = \cup_{j \geq d} X_j$ egy n dimenziós X sokaság rétegelt részsokasága. Tegyük fel, hogy $X_d \subset X \setminus Z_{d+1}$ koirányított. Ekkor*

$$H^d(X) \to H^d(X \setminus Z_{d+1})$$

megszorítás injektív, így Y kohomológiaosztálya jól definiált, ha létezik.

Bizonyítás. $(X, X \setminus Z_{d+1})$ térpár kohomológia hosszú egzakt sorozatának egyik leképezése a kérdéses megszorítás,

$$\cdots \to H^d(X, X \setminus Z_{d+1}) \to H^d(X) \to H^d(X \setminus Z_{d+1}) \to H^{d+1}(X, X \setminus Z_{d+1}) \to \cdots$$

így elég belátni, hogy $H^d(X, X \setminus Z_{d+1}) = 0$.

k-ra vonatkozó leszálló indukcióval megmutatjuk, hogy

$$H^d(X, X \setminus Z_k) = 0 \text{ bármely } k > d \text{ esetén.} \tag{1}$$

Ha $k > n$, $Z_k = \cup_{j \geq k} X_j = \emptyset$, így $H^d(X, X \setminus Z_k) = H^d(X, X) = 0$. Tegyük fel, hogy (1)-et már beláttuk $(k+1)$-re, és írjuk fel az $(X, X \setminus Z_{k+1}, X \setminus Z_k)$ hármas hosszú egzakt sorozatát.

$$\cdots \to H^d(X, X \setminus Z_{k+1}) \to H^d(X, X \setminus Z_k) \to H^d(X \setminus Z_{k+1}, X \setminus Z_k) \to \cdots$$

Indukciós feltevés szerint $H^d(X, X \setminus Z_{k+1}) = 0$, így elég megmutatni, hogy

$$H^d(X \setminus Z_{k+1}, X \setminus Z_k) = 0.$$

$X \setminus Z_k = (X \setminus Z_{k+1}) \setminus X_k$, $X_k \subset X \setminus Z_{k+1}$ részsokaság, így létezik egy N_ε csőszerű környezete, és egy $\phi : (N_\varepsilon, N_\varepsilon \setminus X_k) \to (\nu, \nu \setminus X_k)$ diffeomorfizmus $\nu = \nu(X_k \subset (X \setminus Z_{k+1}))$ k-rangú normálnyalábbal. $X_k \subset X \setminus Z_{k+1}$ zárt, így alkalmazható a homologikus kivágási tétel. Ekkor

$$H^d(X \setminus Z_{k+1}, (X \setminus Z_{k+1}) \setminus X_k) \overset{\phi^*}{\cong} H^d(N_\varepsilon, N_\varepsilon \setminus X_k) \cong H^d(\nu, \nu \setminus X_k),$$

amiből az alábbi jól ismert [Hat02] állítás alkalmazásával következik a tétel állítása.

3.7. Lemma. *Legyen $E \to B$ k-rangú valós vektornyaláb. Ekkor*

$$H^i(E, E \setminus B) = 0$$

minden $i < k$ esetén.

□

Az előző bizonyítás (1) állítását $k = d + 2$ esetre alkalmazva, $(X, X \setminus Z_{d+2})$ térpár hosszú egzakt sorozatából,

$$\cdots \to H^d(X, X \setminus Z_{d+2}) \to H^d(X) \to H^d(X \setminus Z_{d+2}) \to H^{d+1}(X, X \setminus Z_{d+2}) \to \cdots$$

$H^d(X) \cong H^d(X, X \setminus Z_{d+2})$ izomorfizmus következik, így ha Y rétegelt részsokaság $\cup_{j \geq d} X_j$ partíciójában X_d koirányított és $X_{d+1} = 0$, vagyis $Z_{d+1} = Z_{d+2}$, akkor Y ciklus, vagyis $[Y]$ kohomológiaosztálya definiált és a fentiek szerint egyértelmű. Példáink során előkerülő sima komplex sokaságok részvarietásai rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal.

3.8. Tétel. *Legyen X egy sima algebrai varietás, Y egy d komplex kodimenziós részvarietása. Ekkor Y az X $2d$ valós kodimenziós rétegelt részsokasága, $Y = \cup_{j \geq 2d} X_j$ partíciójában minden réteg komplex részsokaság.*

Bizonyítás. Y top dimenziós rétegének válasszuk Y sima pontjainak halmazát. A következő réteget alkossák Y szinguláris részének maximális dimenziós komponenseiben levő sima pontok, és így tovább. Ekkor Y partíciójának minden nem üres rétege páros dimenziós, a komplex sokaság struktúra irányítást definiál a megfelelő normálnyalábokon. □

Az Y rétegelt részsokaság kohomológiaosztályát $Y = \cup_{j \geq d} X_j$ partíciója segítségével definiáltuk, azonban belátható, hogy ez az osztály lényegében független Y rétegelésétől.

3.1.1. Transzverzalitás

Rétegelt részsokaságok osztályának transzverzális leképezés menti visszahúzottja, a részsokaságok esetén megszokott módon, megegyezik az őskép osztályával. Az állítás megfogalmazásához szükségünk lesz a transzverzalitás fogalmának kiterjesztésére.

3.9. Definíció. Egy sima $f : Z \to X$ leképezés transzverzális az $Y \subset X$ rétegelt részsokaságra ($f \pitchfork Y$), ha f transzverzális Y mindegyik rétegére.

3.10. Tétel. *Legyen $Y \subset X$ egy rétegelt részsokaság, $f : Z \to X$ egy erre transzverzális sima leképezés. Tegyük fel, hogy Y ciklus. Ekkor $f^{-1}(Y)$ is ciklus, kohomológiaosztálya,*

$$[f^{-1}(Y)] = f^*[Y \subset X].$$

Bizonyítás. f transzverzalitása miatt Y X_j $(j \geq d)$ rétegeinek $f^{-1}(X_j)$ ősképei Z részsokaságai, így $f^{-1}(Y) \subset Z$ rétegelt részsokaság. $f^{-1}(X_d) \subset Z \setminus f^{-1}(Z_{d+1})$ normálnyalábja kanonikusan izomorf $X_d \subset X \setminus Z_{d+1}$ normálnyalábjával [BJ82], így $f^{-1}(X_d)$ koirányított.

$$\begin{tikzcd}
Z \setminus f^{-1}(Z_{d+1}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \setminus Z_{d+1} \arrow[d, "i"] \\
Z \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, így a kohomológiákon indukált leképezések kompozíciói is megegyeznek. Ebből, $f \pitchfork X_d$ esetben alkalmazva a részsokaságokra és rájuk transzverzális leképezésekre vonatkozó tételt,

$$f^*[Y]|_{Z \setminus f^{-1}(Z_{d+1})} = f^*\left([Y]|_{X \setminus Z_{d+1}}\right) = f^*[X_d] = \left[f^{-1}(X_d)\right]$$

adódik, amiből definíció szerint következik, hogy $f^{-1}(Y)$ ciklus, melynek kohomológiaosztálya megegyezik $f^*[Y]$-al. $\square$

3.2. G-invariáns rétegelt részsokaság ekvivariáns kohomológiaosztálya

3.2.1. Az univerzális nyaláb approximációja

3.11. Definíció. $\{p_k, n_k, \tilde{n}_k, k \in \mathbb{N}\}$ egy G topologikus csoport $EG \to BG$ univerzális nyalábjának sima (algebrai) approximációja, ha

(1) $p_k : E_k \to B_k$ sima (algebrai) principális G-nyaláb,
(2) $n_k : B_k \to B_{k+1}$ sima (algebrai) beágyazás,
(3) $\tilde{n}_k : E_k \to E_{k+1}$ sima (algebrai) n_k feletti G-nyalábleképezés,
(4) Bármely $j \leq k+1$ esetén a $\kappa_k : B_k \to BG$ klasszifikáló leképezés által indukált $\kappa_{k*} : \pi_j(B_k) \to \pi_j(BG)$ izomorfizmus.
(5) $\kappa_{k+1} n_k = \kappa_k$

A jelölést leegyszerűsítve, egy univerzális nyaláb approximációját a továbbiakban $\{E_k \to B_k\}$ sorozattal rövidítjük. Példáinkban leggyakrabban $G = GL(n)$ csoporttal találkozunk. A Grassmann-sokaságok illetve a felettük levő résznyalábok az univerzális $GL(n)$-nyaláb egy sima approximációját adják.

3.12. Állítás. *Legyen $\{p_k, n_k, \tilde{n}_k, k \in \mathbb{N}\}$ az $EG \to BG$ univerzális G-nyaláb egy sima approximációja. Ekkor a $\kappa_k : B_k \to BG$ klasszifikáló leképezések által indukált*

$$\kappa_k^* : H^j(BG) \to H^j(B_k)$$

izomorfizmus minden $j \leq k$ esetén.

Bizonyítás. A κ_k leképezés M_{κ_k} hengere segítségével κ_k felírható ri kompozícióként, ahol $i : B_k \to M_{\kappa_k}$ beágyazás, $r : M_{\kappa_k} \to BG$ deformációs retrakció, így $i_* : \pi_j(B_k) \to \pi_j(M_{\kappa_k})$ is izomorfizmus minden $j \leq k+1$ esetén. (M_{κ_k}, B_k) térpár homotópia hosszú egzakt sorozatából,

$$\cdots \to \pi_{k+1}(B_k) \to \pi_{k+1}(M_{\kappa_k}) \to \pi_{k+1}(M_{\kappa_k}, B_k) \to \pi_k(B_k) \to \pi_k(M_{\kappa_k}) \to \cdots$$

következik, hogy (M_{κ_k}, B_k) térpár $(k+1)$-szeresen összefüggő. [Hat02] könyv

- Ha (Z, X) útösszefüggő terek n-szeresen összefüggő párja, akkor $H_i(Z, X; G) = 0$ és $H^i(Z, X; G) = 0$ tetszőleges $i \leq n$ és G csoport esetén.

állítása alapján ekkor $H^i(M_{\kappa_k}, B_k) = 0$ $(i \leq k+1)$. (M_{κ_k}, B_k) kohomológia hosszú egzakt sorozatából,

$$\cdots \to H^k(M_{\kappa_k}, B-k) \to H^k(M_{\kappa_k}) \to H^k(B_k) \to H^{k+1}(M_{\kappa_k}, B_k) \to \cdots$$

következik, hogy $i^* : H^j(M_{\kappa_k}) \to H^j(B_k)$ izomorfizmus minden $j \leq k$ esetén, így ugyanez teljesül $\kappa_k^* : H^j(BG) \to H^j(B_k)$ leképezésekre is. $\square$

3.2.2. G-ekvivariáns kohomológiaosztály definíciója és tulajdonságai

Legyen G egy Lie-csoport, és tekintsük G egy sima hatását az X sokaságon. $Y \subset X$ d kodimenziós rétegelt részsokaság definíció szerint G-invariáns, ha mindegyik rétege G-invariáns. Az univerzális G-nyaláb egy $\{E_k \to B_k\}$ sima approximációja segítségével minden $k \in \mathbb{N}$ esetén megadható egy

$$Y(k) = E_k \times_G Y \subset X(k) = E_k \times_G X$$

d kodimenziós rétegelt részsokaság.

A következő állítás összefüggő Lie-csoport és $Y \subset X$ ciklus esetén garantálja $Y(k) \subset X(k)$ hasonló tulajdonságát, és így $[Y(k)] \in H^d(X(k))$ kohomológiaosztály létezését. Bizonyítása megtalálható [Feh15a] jegyzetben.

3.13. Állítás. *Ha G Lie-csoport összefüggő, $Y \subset X$ egy ciklus, akkor $Y(k) \subset X(k)$ is ciklus.*

Az alábbi lemma szerint elég nagy k esetén $[Y(k)]$ egyértelműen meghatározza $H^d(B_G X)$ egy elemét, ezt nevezzük Y G-ekvivariáns kohomológiaosztályának.

3.14. Lemma. *A κ_d klasszifikáló leképezés feletti $\tilde{\kappa}_d : X(d) \to B_G X$ fibrumtartó leképezés által indukált*

$$\tilde{\kappa}_d^* : H_G^d(X) \to H^d(X(d))$$

leképezés izomorfizmus.

Bizonyítás. Tekintsük a $\tilde{\kappa}_d : X(d) \to B_G X$ nyalábleképezés által a homotópia hosszú egzakt sorozatokon indukált láncleképezést.

$$\begin{tikzcd}
\pi_{j+1}(B_d) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa_{d*}"] & \pi_j(X) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \pi_j(X(d)) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\kappa_d}_*"] & \pi_j(B_d) \arrow[r] \arrow[d, "\kappa_{d*}"] & \pi_j(X) \arrow[d, "="] \\
\pi_{j+1}(BG) \arrow[r] & \pi_j(X) \arrow[r] & \pi_j(B_G X) \arrow[r] & \pi_j(BG) \arrow[r] & \pi_j(X)
\end{tikzcd}$$

$j \leq d$ esetben $\{E_k \to B_k\}$ approximáció definíciója szerint a kommutatív diagram első és negyedik függőleges leképezése izomorfizmus, így az 5-lemmát alkalmazva adódik $\tilde{\kappa_d}_* : \pi_j(X(d)) \to \pi_j(B_G X)$ izomorfizmus.

$j \leq d+1$ esetben csak a diagram második, negyedik és ötödik leképezése izomorfizmus, így a 4-lemma alkalmazásából $\tilde{\kappa_d}_* : \pi_{d+1}(X(d)) \to \pi_{d+1}(B_G X)$ szürjektivitása következik. Ezekből, áttérve $\tilde{\kappa}_d$ leképezés hengerére, 3.12 állítás bizonyításával analóg módon következik a lemma. □

3.15. Definíció. Tekintsük egy G Lie-csoport egy X sokaságon vett sima hatását, Y legyen X egy G-invariáns d kodimenziós rétegelt részsokasága. Jelölje $\{E_k \to B_k\}$ az univerzális G-nyaláb egy sima approximációját. Tegyük fel továbbá, hogy $[Y(d)] \in H^d(X(d))$ létezik. Ekkor

$$[Y]_G = (\tilde{\kappa}_d^*)^{-1}\,[Y(d)] \in H_G^d(X)$$

az Y G-ekvivariáns kohomológiaosztálya.

$\{E_k \to B_k\}$ approximáció definíciójából következik, hogy $[Y]_G$ megadásához az approximáció bármely $X(k)$ $(k \geq d)$ tagját választhatjuk.

$[Y]_G$ osztályból tetszőleges sima principális G-nyalábhoz asszociált $P \times_G X$ nyaláb $P \times_G Y$ részének osztálya megkapható az alábbi módon.

3.16. Tétel. *Legyen $Y \subset X$ G-invariáns rétegelt részsokaság, melynek ekvivariáns kohomológiaosztálya a fenti módon értelmezett. Tekintsünk egy tetszőleges $P \to Z$ principális G-nyalábot, klasszifikáló leképezését jelölje $\phi : Z \to BG$. Ekkor*

$$[P \times_G Y \subset P \times_G X] = \tilde{\phi}^*[Y]_G,$$

ahol $\tilde{\phi}$ a klasszifikáló leképezés által indukált fibrumtartó leképezés.

Bizonyítás. Egy jó Morse-függvény segítségével felépíthető egy Z-vel homotóp ekvivalens korlátos dimenziójú CW-komplexus, és így áttérhetünk P ezen komplexus feletti visszahúzottjára. Ekkor létezik egy ϕ-vel homotóp celluláris leképezés [Hat02], azaz ϕ keresztülvezethető BG valamely B_k approximációján. Jelölje $\phi_k : Z \to B_k$ azon leképezést, melyre $\phi = \kappa_k \phi_k$. Ekkor

$$\begin{tikzcd}
P \times_G X \cong \phi_k^*(X(k)) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & X(k) \cong \kappa_k^*(B_G X) \arrow[r, dashed] \arrow[d] & B_G X \arrow[d, "p"] \\
Z \arrow[r, "\phi_k"] & B_k \arrow[r, "\kappa_k"] & BG
\end{tikzcd}$$

így léteznek $\tilde{\phi}_k : P \times_G X \to X(k)$ és $\tilde{\kappa}_k : X(k) \to B_G X$ fibrumtartó leképezések, melyekre

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_k \tilde{\kappa}_k.$$

Elegendően nagy k-ra definíció szerint $[Y(k)] = \kappa_k^*[Y]_G$ teljesül. $\tilde{\phi}_k$ transzverzális $Y(k) \subset X(k)$ rétegelt részsokaságra, így 3.10 tétel alapján

$$\tilde{\phi}^*[Y]_G = \tilde{\phi}_k^* \tilde{\kappa}_k^*[Y]_G = \tilde{\phi}_k^*[Y(k)] = [\tilde{\phi}_k^{-1}(Y(k))] = [P \times_G Y].$$

□

G topologikus csoport H részcsoportjának $i : H \to G$ beágyazása esetén, az előző tételt $EH \to BH$ univerzális nyaláb approximációjának egy megfelelő $E_k \to B_k$ tagjára alkalmazva adódik, hogy $[Y]_G$ a beágyazás által indukált $\tilde{Bi}^* : H_G^*(X) \to H_H^*(X)$ morfizmus általi képe,

$$\tilde{Bi}^*[Y]_G = [Y]_H.$$

Abban a speciális esetben, mikor $X = V$ vektortér, a rajta értelmezett G-hatás lineáris, bármely $\pi : E \to B$ principális G-nyaláb és az ehhez asszociált $E \times_G V$ egy s szelése esetén a Leray-Hirsch tételből $\pi^* : H^*(B) \cong H^*(E \times_G V)$ izomorfizmus, valamint $\pi^{*-1} = s^*$ következik. A $P \to Z$ principális G-nyalábhoz asszociált nyaláb egy $\sigma : Z \to P \times_G V$, a $P \times_G Y$ rétegelt részsokaságra transzverzális szelése esetén, az előzőekből

$$[Y(\sigma)] = \sigma^*[P \times_G Y \subset P \times_G V] = \sigma^* \tilde{\phi}^*[Y]_G = \phi^* p^{*-1}[Y]_G,$$

és így a fejezet eleji 3.1 tétel következik.

3.17. Tétel. *Legyen $f : Z \to X$ egy G-ekvivariáns sima leképezés, mely transzverzális az $Y \subset X$ G-invariáns d kodimenziós rétegelt részsokaságra. Tegyük fel, hogy Y ciklus. Ekkor az f által indukált $B_G f : B_G Z \to B_G X$ nyalábleképezésre*

$$B_G f^*[Y]_G = [f^{-1}(Y) \subset Z]_G$$

teljesül.

Bizonyítás. A G-invariáns f függvény indukál egy f_k nyalábleképezést az univerzális G-nyaláb approximációjának egy $E_k \to B_k$ tagjához asszociált $Z(k) = E_k \times_G Z$ és $X(k) = E_k \times_G X$ nyalábjai között. f_k transzverzális az $Y(k) \subset X(k)$ rétegelt részsokaságra, így 3.10 tétel szerint

$$f_k^*[Y(k) \subset X(k)] = [f_k^{-1}(Y(k))] = [f^{-1}(Y)(k) \subset Z(k)].$$

A κ_k feletti $\tilde{\kappa_k}^Z : Z(k) \to B_G Z$ és $\tilde{\kappa_k}^X : X(k) \to B_G X$ fibrumtartó leképezésekre $\tilde{\kappa}_k^X f_k = B_G f \tilde{\kappa}_k^Z$ teljesül, így a kohomológiákon indukált

$$\begin{tikzcd}
H^*(X(k)) \arrow[d, "f_k^*"] & H^*(B_G X) \arrow[l, "\left(\tilde{\kappa}_k^X\right)^*"'] \arrow[d, "B_G f^*"] \\
H^*(Z(k)) & H^*(B_G Z) \arrow[l, "\left(\tilde{\kappa}_k^Z\right)^*"']
\end{tikzcd}$$

diagram is kommutatív. Ekkor

$$\left(\tilde{\kappa}_k^Z\right)^* (B_G f^*[Y]_G) = f_k^*[Y(k) \subset X(k)] = [f^{-1}(Y)(k) \subset Z(k)],$$

melyből elég nagy k-ra definíció szerint $B_G f^*[Y]_G = [f^{-1}(Y) \subset Z]_G$ következik. $\square$

3.3. Kohomológiaosztály megszorítása

Egy X sokaság Y d-kodimenziós koirányított zárt részsokaságának kohomológiaosztálya a $p : \nu \to Y$ normálnyaláb $u_\nu \in H^d(\nu, \nu \setminus Y)$ Thom-osztályának

$$H^d(\nu, \nu \setminus Y) \stackrel{ex}{\to} H^d(X, X \setminus Y) \stackrel{j^*}{\to} H^d(X)$$

kompozíció általi képe. $(X, X \setminus Y)$ térpár kohomológia hosszú egzakt sorozatából, és ν Euler-osztályának $e(\nu) = p^{*-1} j^*(u_\nu)$ definíciójából

(1) $[Y]|_{X \setminus Y} = 0$,
(2) $[Y]|_Y = e(\nu(Y \subset X))$

következik.

$Y = \cup_{j \geq d} X_j$ rétegelt részsokaság osztályának definíciója szerint $[Y]$ megszorítása, $[Y]|_{X \setminus Z_{d+1}} = [X_d]$. $X_d \subset X \setminus Z_{d+1}$ zárt részsokaság, így a fentiekből $[X_d]|_{X \setminus Y} = 0$, és így

$$[Y]|_{X \setminus Y} = \left. [Y]|_{X \setminus Z_{d+1}} \right|_{X \setminus Y} = [X_d]|_{X \setminus Y} = 0$$

következik, vagyis (1) ebben az esetben is teljesül. Egy rétegelt részsokaság normálnyalábja nem értelmezett, így (2) csak $X \setminus Z_{d+1}$-re megszorítva,

$$[Y]_{X \setminus Z_{d+1}} = e(\nu(X_d \subset X \setminus Z_{d+1}))$$

formában teljesül.

3.3.1. Ekvivariáns eset

Kohomológiaosztályok megszorítására vonatkozó fenti tulajdonságok ekvivariáns esetben az alábbi módon teljesülnek.

3.18. Állítás. *Legyen X egy algebrai sokaság, melyen értelmezett egy algebrai G-hatás. Tekintsük X egy Y G-invariáns d kodimenziós részvarietását. Ekkor*

(1) $[Y]_G|_{B_G(X \setminus Y)} = 0$,
(2) $[Y]_G|_{B_G X_d} = e_G(\nu(X_d \subset X \setminus Z_{d+1}))$.

Bizonyítás. Tekintsük az univerzális G-nyaláb approximációjának egy $E_k \to B_k$ tagjához asszociált $Y(k)$ és $X(k)$ nyalábokat. Ekkor $Y(k) \subset X(k)$ rétegelt részsokaság, így a nem ekvivariáns esetben leírtak szerint

$$[Y(k)]|_{X(k)\setminus Y(k)} = 0.$$

$X \setminus Y$ G-invariáns, így $B_G(X \setminus Y)$ illetve $E_k \times_G (X \setminus Y) = (X \setminus Y)(k) = X(k) \setminus Y(k)$ jól értelmezett. 3.14 lemmát $X \setminus Y$ fibrumú esetre alkalmazva adódik, hogy a $\kappa_k : B_k \to BG$ klasszifikáló leképezés feletti fibrumtartó $\tilde{\kappa}_k^{X\setminus Y} : (X \setminus Y)(k) \to B_G(X \setminus Y)$ nyalábleképezés elég nagy k esetén izomorfizmust indukál a d-edik kohomológiacsoportokon.

$\tilde{\kappa}_k^{X\setminus Y}$ a $\tilde{\kappa}_k^X$ megfelelő megszorítottja, így a

$$\begin{tikzcd} B_G(X \setminus Y) \arrow[r, "i"] & B_G X \\ X(k) - Y(k) = (X - Y)(k) \arrow[u, "\tilde{\kappa}_k^{X\setminus Y}"] \arrow[r, "i"] & X(k) \arrow[u, "\tilde{\kappa}_k^X"'] \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív. A kohomológiacsoportokra áttérve

$$\left(\tilde{\kappa}_k^{X\setminus Y}\right)^* \left([Y]_G|_{B_G(X\setminus Y)}\right) = 0,$$

és ebből (1) következik.

Az állítás második részének bizonyításához először megmutatjuk, hogy $\nu(X_d \subset X \setminus Z_{d+1})$ G-nyaláb. Valóban, a $g \in G$ elemmel vett $X_d \to X_d$ szorzás ennek differenciáljaként felemelhető $T(X \setminus Z_{d+1})$ illetve TX_d érintőterekre, így a differenciál a hatás egy jól definiált felemelését adja a $\nu(X_d \subset X \setminus Z_{d+1})$ hányadoson.

$$\begin{tikzcd} H^d(B_G X) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\left(\tilde{\kappa}_k^X\right)^*"'] & H^d(B_G X_d) \arrow[d, "\left(\tilde{\kappa}_k^{X_d}\right)^*"] \\ H^d(X(k)) \arrow[r, "i^*"] & H^d(X_d(k)) \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, $[Y]_G$ definíciójából $\left(\tilde{\kappa}_k^X\right)^* [Y_G] = [Y(k) \subset X(k)]$, rétegelt részsokaságok osztályára vonatkozóak szerint pedig

$$i^*[Y(k) \subset X(k)] = e(\nu(X_d(k) \subset X(k) \setminus Z_{d+1}(k)))$$

teljesül. A bizonyítás folytatásához szükségünk lesz az alábbi állításra.

3.19. Lemma. *Legyen X egy algebrai sokaság, melyen értelmezett egy algebrai G-hatás, és tekintsük X egy Y G-invariáns részsokaságát. Ekkor bármely M sokaság feletti $P \to M$ algebrai principális G-nyaláb esetén*

$$\nu(P \times_G Y \subset P \times_G X) \cong P \times_G \nu(Y \subset X).$$

A lemmából

$$\nu(X_d(k) \subset X(k) \setminus Z_{d+1}(k)) \cong E_k \times_G \nu(X_d \subset X \setminus Z_{d+1}),$$

és így $\left(\tilde{\kappa}_k^{X_d}\right)^*$ izomorfizmusra

$$\left(\tilde{\kappa}_k^{X_d}\right)^* (e_G(\nu(X_d \subset X \setminus Z_{d+1}))) = e(\nu(X_d(k) \subset X(k) \setminus Z_{d+1}(k))),$$

amiből adódik, hogy az $[Y]_G|_{B_G X_d}$ megszorítás csak $e_G(\nu(X_d \subset X \setminus Z_{d+1}))$ lehet. □

3.3.2. Megszorítás egy pontra

G egy megfelelő részcsoportjára való áttérés után egy G-tér tetszőleges Y részhalmaza esetén definiálhatjuk ekvivariáns kohomológiaosztály Y-ra vett megszorítását. Y stabilizátorát jelölje

$$G_Y = \{ g \in G | \, g(Y) = Y \} \subset G.$$

Ekkor $i : G_Y \hookrightarrow G$ beágyazás által indukált $\tilde{Bi}^* : H^*(B_G X) \to H^*(B_{G_Y} X)$ homomorfizmus és $H^*(B_{G_Y} X) \to H^*(B_{G_Y} Y)$ megszorítás kompozíciójaként előálló

$$H^*_G X \to H^*_{G_Y} Y$$

leképezés általánosítja a G-ekvivariáns megszorítást.

Példáinkban leggyakrabban előforduló $Y = \{x\}$ esetben, a jelölésből $\{\}$ zárójeleket elhagyva, az alábbi állítás teljesül.

3.20. Állítás. *Ha X egy algebrai sokaság, melyen értelmezett egy algebrai G-hatás, $Y \subset X$ egy G-invariáns részvarietás, $x \in X$, akkor*

(1) $[Y]_G|_{B_G x} = 0$, *ha* $x \notin Y$,
(2) $[Y]|_{B_G x} = e_{G_x}(\nu_x(X_d \subset X \setminus Z_{d+1}))$, *ha* $x \in X_d$,

ahol ν_x a normálnyaláb $x \in X_d$ feletti fibrumát jelenti.

Bizonyítás. Ha $x \notin Y$, a $B_G x$-re vett megszorítás felírható

$$H^d(B_G X) \to H^d(B_G(X \setminus Y)) \to H^d(B_{G_x}(X \setminus Y)) \to H^d(B_{G_x} x)$$

kompozícióként, melynek első függvénye 3.18 állítás szerint 0.

$f : \{x\} \to X_d$ beágyazás esetén a $B_G x$-re vett megszorítás megegyezik

$$H^*(B_G X) \to H^*(B_G X_d) \stackrel{\tilde{Bi}^*}{\to} H^*(B_{G_x} X_d) \stackrel{B_{G_x} f^*}{\to} H^*(B_{G_x} x),$$

kompozícióval. 3.18 állítás szerint $[Y]_G|_{B_G X_d} = e_G(\nu(X_d \subset X \setminus Z_{d+1}))$.

$$B_{G_x}\nu(X_d \subset X \setminus Z_{d+1}) \cong \tilde{Bi}^* (B_G \nu(X_d \subset X \setminus Z_{d+1})) \text{ és}$$

$$B_{G_x} f^*(B_{G_x}\nu(X_d \subset X \setminus Z_{d+1})) \cong B_{G_x}\nu_x(X_d \subset X \setminus Z_{d+1})$$

izomorfizmusokból az Euler-osztály természetességéből adódóan

$$B_{G_x} f^* \tilde{Bi}^*(e_G(\nu(X_d \subset X \setminus Z_{d+1}))) = B_{G_x} f^* (e_{G_x}(\nu(X_d \subset X \setminus Z_{d+1}))) = e_{G_x}(\nu_x(X_d \subset X \setminus Z_{d+1})),$$

és így (2) következik. □

A tétel bizonyításának egy lépésében az Euler-osztály helyére egy tetszőleges karakterisztikus osztályt írva adódik egy állítás, melyet hatások fixpontjaira vett megszorítások esetén gyakran alkalmazunk.

3.21. Lemma. *Legyen $f \in X$ az X-en értelmezett G-hatás egy fixpontja. Ekkor bármely $E \to X$ G-vektornyaláb egy $\alpha_G(E)$ G-ekvivariáns karakterisztikus osztályának f fixpontra vett megszorítása,*

$$\alpha_G(E)|_{BGf} = \alpha_G(E_f),$$

ahol E_f a nyaláb f feletti fibruma.

A jelölést egyszerűsítve, az $\alpha \in H_G^*(X)$ osztály $x \in X$ elemre vett ekvivariáns megszorítását gyakran $\alpha|_x$ módon jelöljük.

4. Áttérés a tóruszhatásra

A fejezetben leírtak lehetővé teszik, hogy egy csoporthatás helyett, annak egy megfelelő részcsoportra vett, általában jóval egyszerűbb megszorítását vizsgáljuk.

Tekintsük egy G Lie-csoport egy T Lie-részcsoportját. Az $i : T \hookrightarrow G$ tartalmazás az $ET \times_i G \to BT$ klasszifikáló leképezésén keresztül indukál egy $Bi^* : H_G^* \to H_T^*$ hozzárendelést. Egy tetszőleges $g \in G$ elemmel vett konjugálás G egy ρ_g belső automorfizmusát adja, így definiálható az $EG \times_{\rho_g} G \to G$ asszociált nyaláb. Ennek klasszifikáló leképezése indukál egy $\rho_g^* : H_G^* \to H_G^*$ morfizmust. Ha $g \in N_G(T)$, akkor definíció szerint $gTg^{-1} \subset T$, így ρ_g T-re vett megszorításán keresztül értelmezhető az $ET \times_{\rho_g} T \to BT$ nyaláb, illetve ennek $B\rho_g : ET \to ET$ klasszifikáló leképezése, ami egy $B\rho_g^* : H_T^* \to H_T^*$ leképezést indukál a kohomológiákon. $i\rho_g = \rho_g i$, így a hozzárendelés funktorialitása miatt

$$\begin{array}{ccc} H_G^* & \xrightarrow{Bi^*} & H_T^* \\ {\scriptstyle B\rho_g^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle B\rho_g^*} \\ H_G^* & \xrightarrow{Bi^*} & H_T^* \end{array}$$

diagram kommutatív.

4.1. Lemma. *Bármely P principális G-nyaláb, és G tetszőleges ρ_g belső automorfizmusa esetén $P \times_{\rho_g} G \cong P$.*

Bizonyítás.

$$P \times_{\rho_g} G \to P,\ [p, h] \mapsto pgh$$

leképezés jól definiált, hiszen egy másik $\left[pj, \rho_g(j)^{-1}h\right]$ reprezentánsra

$$(pj)(\rho_g(j)^{-1}h) = pjgg^{-1}j^{-1}gh = pgh$$

teljesül, inverzét a

$$P \to P \times_{\rho_g} G,\ p \mapsto \left[pg^{-1}, e_G\right]$$

függvény adja, így izomorfizmus. □

A lemmából adódik, hogy minden $g \in T$ elemre $\mathrm{id} = B\rho_g^* : H_H^* \to H_H^*$, így a fenti $g \mapsto (B\rho_g^* : H_T^* \to H_T^*)$ leképezés indukál egy $N_G(T)/T$-hatást H_T^* kohomológián. A lemmát az EG univerzális nyalábra alkalmazva kapjuk, hogy $\mathrm{id} = B\rho_g^* : H_G^* \to H_G^*$, így $Bi^*(H_G^*)$ invariáns a $B\rho_g^* : H_T^* \to H_T^*$ leképezésre nézve.

Egy G Lie-csoport kompakt összefüggő kommutatív T Lie-részcsoportját tórusznak nevezzük. Az elnevezést indokolja, hogy minden ilyen tulajdonságú Lie-csoport izomorf T^n-el. A klasszifikáló terek megőrzik a szorzat struktúrát, így $BT^n = \times_{i=1}^n BU(1)$, amiből a Künneth-formula szerint $H^*(BT^n;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]$ következik.

Egy T tórusz Weyl-csoportjának a

$$\mathcal{W} = {}^{N_G(T)}\!\big/_{T}$$

faktorcsoportot nevezzük. A fenti gondolatmenet szerint ekkor $Bi^*(H^*(BG;\mathbb{Q})) \subset H^*(BT;\mathbb{Q})^{\mathcal{W}}$, a $H^*(BT;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]$ polinomgyűrű $\mathcal{W}$-invariáns elemei. A.Borel alábbi tétele szerint bizonyos esetben ennél több is igaz.

4.2. Tétel. *Legyen G kompakt összefüggő Lie-csoport, T egy (tartalmazás szerint) maximális tórusza, $\mathcal{W}$ pedig T Weyl-csoportja. Ekkor a beágyazás által indukált*

$$H^*(BG;\mathbb{Q}) \to H^*(BT,\mathbb{Q})$$

leképezés injektív, képe $H^*(BT;\mathbb{Q})^{\mathcal{W}}$.

A tétel kiterjeszthető (lásd [Feh15a]) a nem feltétlenül kompakt összefüggő Lie-csoportok esetére is, mi is egy ilyen, $G = GL(n)$ csoportra fogjuk alkalmazni. $GL(n)$ maximális T tórusza a diagonális mátrixok alkotta részcsoport. Belátható, hogy $N_G(T)$ normalizátort T elemei és a permutációmátrixok generálják, így $\mathcal{W} = S_n$. A tétel szerint ekkor $H^*(BGL(n);\mathbb{Q})$ bijekcióban áll $\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]^{S_n}$ szimmetrikus polinomok gyűrűjével. Az általános lineáris csoportra vonatkozó állítás bizonyítása megtalálható [Hat03] jegyzetben.

A továbbiakban nem teszünk különbséget H_G^* elemei és Bi^*-általi képük között. $H^2(BT;\mathbb{Z})$ azonosítható az $\omega : T \to U(1)$ homomorfizmusok (T tórusz súlyai) alkotta $\mathcal{W}_T$ csoporttal, ahol $\mathcal{W}_T$ csoportstruktúráját a pontonkénti szorzás adja.

4.3. Definíció. Egy T tórusz $\omega : T \to U(1)$ súlya esetén legyen

$$\alpha(\omega) = c_1(ET \times_\omega \mathbb{C}) \in H^2(BT;\mathbb{Z}).$$

4.4. Tétel. *Az $\alpha : \mathcal{W}_T \to H^2(BT;\mathbb{Z})$ leképezés csoport izomorfizmus.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy α őrzi a csoportstruktúrát. Bármely $\omega_1,\omega_2 \in \mathcal{W}_T$ esetén

$$ET \times_{\omega_1\omega_2} \mathbb{C} \cong (ET \times_{\omega_1} \mathbb{C}) \otimes (ET \times_{\omega_2} \mathbb{C})\,,$$

mivel a két nyaláb fibrumai és áttérésfüggvényei megegyeznek. Valóban, 1-nyalábok tenzorszorzatának áttérésfüggvényei egyszerűen az áttérésfüggvények szorzata. Tetszőleges L_1, L_2 komplex vonalnyalábok esetén $c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$.

α leképezés bijekció. Jelölje $i_j : S^1 \hookrightarrow T$ a kör beágyazását a tórusz j-edik tényezőjébe. Bármely $\omega \in \mathcal{W}_T$ esetén $\omega i_j : S^1 \to S^1$ homomorfizmus, és így megegyezik a $z \mapsto z^k$

leképezéssel, valamely $k \in \mathbb{Z}$ egész számra. Ebből következik, hogy $\mathcal{W}_T$ tetszőleges eleme,

$$\omega : T \to S^1,\ (z_1, \ldots, z_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} z_i^{k_i}\ (k_i \in \mathbb{Z})$$

alakú, így a $\pi_j : T \to S^1, (z_1, \ldots, z_n) \mapsto z_j$ projekciók szabadon generálják $\mathcal{W}_T$ csoportot. $ET \times_{\pi_j} \mathbb{C} \cong B\pi_j^*(\gamma^1)$, ami miatt $c_1(ET \times_{\pi_j} \mathbb{C}) = B\pi_j^*(c_1(\gamma^1))$, ahol $c_1(\gamma^1) = x$ a $H^*(BU(1)) = H^*(\mathbb{P}^\infty) = \mathbb{Z}[x]$ polinomgyűrűben. Az 1. fejezetben leírtak szerint $B\pi_j : BT = \times_{i=1}^n BU(1) \to BU(1)$ a j-edik tényezőre vett projekció, így a Künneth-formula szerint

$$\alpha(\pi_j) = x_j \in H^*(BT; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n],$$

így π_j-k képei szabadon generálják $H^2(BT; \mathbb{Z})$ csoportot. □

$\omega \in \mathcal{W}_T$ helyett, annak a megfelelő Lie-algebrák között menő érintőleképezését véve, áttérhetünk additív írásmódra.

$$\omega_j : T \to U(1), (z_1, \ldots, z_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} z_i^{k_i^j}$$

$(j = 1, 2)$ súlyok szorzata az $\omega_1\omega_2 : (z_1, \ldots, z_n) \mapsto \prod_{i=1}^n z_i^{k_i^1 + k_i^2}$ morfizmus, deriváltleképezésük

$$d\omega_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, (\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} k_i^j \xi_i,$$

így $d(\omega_1\omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

A továbbiakban nem teszünk különbséget $H^2(BT; \mathbb{Z})$ és $\mathcal{W}_T$ elemei (illetve ezek deriváltjai között), és mindkét esetben az additív jelölésmódot alkalmazzuk. $H^2(BT; \mathbb{Z})$ generálja $H^*(BT; \mathbb{Z})$ kohomológiagyűrűt, így az additív jelölésmód előnye, hogy $H^*(BT; \mathbb{Z})$ elemeit kifejezhetjük a T tórusz súlyaival.

Tekintsük a G Lie-csoport egy $\rho : G \to GL(V)$ lineáris hatását a V d-dimenziós vektortéren. G maximális T tóruszának $\rho(T)$ képében az elemek szimultán diagonalizálhatóak, így V felbomlik $V = \oplus_{i=1}^d L_i$ 1-dimenziós altereinek direkt összegére, úgy hogy $\rho|_T$ az alábbi módon faktorizálódik.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\rho|_T"] \arrow[dr, "\hat{\rho}"'] & GL(V) \\ & \times_{i=1}^d GL(L_i) = (\mathbb{C}^*)^d \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

A ρ reprezentáció súlyainak a $\pi_j\hat{\rho} : T \to \mathbb{C}^*$ leképezéseket nevezzük, ahol $\pi_j : (\mathbb{C}^*)^d \to \mathbb{C}^*$ a j-edik tényezőre vett projekció.

4.5. Állítás. *Vegyük egy G Lie-csoport V^d vektortéren vett lineáris hatását. A reprezentáció súlyai legyenek ω_i, $i = 1, \ldots, d$. Ekkor a $B_G V \to BG$ nyaláb Chern-osztályai,*

$$c_i^G(V) = \sigma_i(\omega_1, \ldots, \omega_d),\ i = 1, \ldots, d,$$

ahol σ_i az i-edik elemi szimmetrikus polinomot jelöli. Speciálisan az origo G-ekvivariáns kohomológiaosztálya,

$$[0]_G = e_G(V) = \prod_{i=1}^{d} \omega_i.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy az $i : T \hookrightarrow G$ beágyazás által indukált Bi klasszifikáló leképezésre $B_T V \cong Bi^*(B_G V)$ teljesül. A $V = \oplus_{i=1}^d L_i$ felbontás megválasztása miatt $B_T V = \oplus_{i=1}^d B_T L_i$. A Whitney-formula és a Chern-osztály természetessége miatt ekkor

$$Bi^*(c(B_G V)) = c(\oplus_{i=1}^d B_T L_i) = \prod_{i=1}^{d}(1 + c_1(B_T L_i)) = \sum_{i=0}^{d} \sigma_i(c_1(B_T L_1), \ldots, c_1(B_T L_d)),$$

vagyis a keresett $Bi^*(c_i^G(V)) = \sigma_i(c_1(B_T L_1), \ldots, c_1(B_T L_d))$. A $H^2(BT;\mathbb{Z}) \leftrightarrow \mathcal{W}_T$ azonosítás során $c_1(B_T L_i)$ definíció szerint ω_i-nek felel meg. $\square$

5. Előrelökés

Megfelelő tulajdonságú terek és közöttük menő $f : X \to Y$ folytonos függvény esetén értelmezhető az f leképezés $f_! : H^*(X) \to H^*(Y)$ előrelökése. Ez egy, a megszokottól ellentétes irányú kovariáns leképezés az X, Y (ekvivariáns) kohomológiái között, melyre speciális tulajdonságú f függvény esetén teljesül

$$f_!(1) = [f(X) \subset Y].$$

Az előrelökésre vonatkozó integrálformulák segítenek $f_!$ értékeinek meghatározásában, így ez a homomorfizmus lesz az elsődleges módszerünk invariáns részvarietások kohomológiaosztályainak kiszámítására. Az előrelökést először speciális függvényekre definiáljuk, majd több lépésben kiterjesztjük az általunk használt változatig.

A fejezetben szereplő állítások bizonyításai megtalálhatók [Ful97], [Feh15a] és [AB84] jegyzetekben.

5.1. Előrelökés kompakt sokaságok között

Kompakt irányítható sokaságok között menő $f : X \to Y$ folytonos leképezésekre a Poincaré-dualitás [Hat02] segítségével definiálhatjuk az $f_! : H^*(X) \to H^*(Y)$ előrelökést.

5.1. Tétel. (Poincaré-dualitás) *Ha X kompakt irányítható n-sokaság fundamentális osztálya $[X] \in H_n(X;\mathbb{Z})$, akkor a*

$$D : H^k(X;\mathbb{Z}) \to H_{n-k}(X;\mathbb{Z}),\ \alpha \mapsto [X] \cap \alpha$$

hozzárendelés izomorfizmus minden k esetén.

5.2. Definíció. $f : X^m \to Y^n$ kompakt irányított sokaságok között menő folytonos függvény előrelökése

$$f_! : H^*(X) \to H^*(Y),\ f_!(\alpha) = \mathrm{Pd}^{-1} f_* \mathrm{Pd}(\alpha).$$

Az előrelökés az Y és X dimenzióinak különbségével csúsztatja el a fokokat, $f_! : H^l(X) \to H^{l+n-m}(Y)$. Ezt az f leképezés relatív kodimenziójának nevezzük.

5.3. Állítás. *Az előrelökés az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik.*

(1) *Funktoriális: $f : X \to Y$ és $g : Y \to Z$ leképezések esetén $(gf)_! = g_! f_!$.*

(2) *$i : X \to Y$ sima beágyazás esetén $i_!$ megegyezik a*

$$H^l(X) \overset{\phi}{\cong} H^{l+n-m}(\nu(X), \nu(\overset{\circ}{X})) \overset{ex}{\cong} H^{l+n-m}(Y, Y \setminus X) \xrightarrow{F} H^{l+n-m}(Y)$$

kompozícióval, ahol ϕ a Thom-izomorfizmust, ex a kivágást, F pedig az $(Y, Y \setminus X)$ térpár hosszú egzakt sorozatában szereplő homomorfizmust jelöli.

(3) *Ha $H^k(Z;\mathbb{Z})$ minden k esetén végesen generált szabad Abel-csoport, $\{z_0, \ldots, z_n\}$ additív bázisa, melyben $z_0 = [*]$ a térfogati forma, $\pi_Y : Y \times Z \to Y$ illetve $\pi_Z :$ $Y \times Z \to Y$ projekciók, akkor a Künneth-formula szerint $H^*(Y \times Z)$ minden eleme egyértelműen felírható $\sum_i \pi_Y^*(y_i)\pi_Z^*(z_i)$ alakban. Ekkor*

$$\pi_{Y!}\left(\sum_i \pi_Y^*(y_i)\pi_Z^*(z_i)\right) = y_0$$

A állítás 2. részéből következik, hogy $i : X \to Y$ sima beágyazás esetén $i_!(1) =$ $[X \subset Y]$. $\phi(x)$ az x nyalábleképezés menti visszahúzottjának és az $u_\nu \in H^{n-m}(\nu(X), \nu(\overset{\circ}{X}))$ Thom-osztálynak csészeszorzata, u_ν a kompozíció további leképezéseivel vett képe definíció szerint X kohomológiaosztálya.

Tetszőleges $f : X \to Y$ leképezés előáll az f gráfjába való sima beágyazás és egy projekció kompozíciójaként, így a fenti tulajdonságok meghatározzák az előrelökést. A későbbiekben ezeket a tulajdonságokat használjuk az előrelökés fogalmának nem feltétlenül kompakt sokaságok közt menő leképezésekre való kiterjesztéséhez.

Fibrált nyaláb nyalábleképezése mentén vett előrelökést a fibrum mentén vett integrálnak is nevezik, mivel a De Rahm-kohomológiaelméletben a két fogalom megegyezik. Speciálisan, az alkalmazásaink során gyakran előkerülő co : $X \to \{*\}$ konstans (nyaláb)leképezés mentén vett előrelökést

$$\int_X x = \mathrm{co}_!(x)$$

módon is jelöljük.

5.2. Előrelökés valódi leképezésekre

Egy leképezést valódinak nevezünk, ha bármely kompakt halmaz őse képe kompakt. A Poincaré-dualitás hiányában az előző tétel állításait felhasználva kiterjeszthetjük az előrelökés fogalmát a nem feltétlenül kompakt irányított sokaságok között menő valódi leképezésekre.

5.4. Tétel. *Létezik egy egyértelmű kovariáns funktor az irányított sokaságok és a valódi leképezések kategóriájából, mely teljesíti az alábbi tulajdonságokat.*

(1) $i : X \to Y$ sima beágyazás esetén $i_!$ megegyezik a

$$H^l(X) \overset{\phi}{\cong} H^{l+n-m}(\nu(X), \nu(\overset{\circ}{X})) \overset{ex}{\cong} H^{l+n-m}(Y, Y \setminus X) \xrightarrow{F} H^{l+n-m}(Y)$$

kompozícióval, ahol ϕ a Thom-izomorfizmust, ex a kivágást, F pedig az $(Y, Y \setminus X)$ térpár hosszú egzakt sorozatában szereplő homomorfizmust jelöli.

(2) Ha Z kompakt tér mindegyik $H^k(Z)$ kohomológiája végesen generált szabad Abel-csoport, akkor a $\pi_Y : Y \times Z \to Y$ projekció valódi és $H^*(Y \times Z)$ tetszőleges elemére

$$\pi_{Y!}\left(\sum_i \pi_Y^*(y_i)\pi_Z^*(z_i)\right) = y_0$$

teljesül, ahol $\{z_0, \ldots, z_n\}$ a $H^*(Z)$ additív bázisa, és z_0 a térfogati forma.

Az egyértelműséget az alábbi állítás segítségével könnyedén beláthatjuk. Whitney beágyazási tétele szerint tetszőleges X sokaság beágyazható egy elég nagy dimenziós gömbbe. A beágyazást jelölje $i : X \to S^n$. Bármely $f : X \to Y$ leképezés esetén $(i, f) : X \to S^n \times Y$ is beágyazás.

5.5. Állítás. *Ha $f : X \to Y$ sokaságok között menő valódi leképezés, akkor $(i, f) : X \to S^n \times Y$ is valódi.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz először megmutatjuk, hogy egy $f : X \to Z$ lokálisan kompakt térbe menő folytonos leképezés akkor és csak akkor valódi, ha lokálisan valódi, azaz minden $z \in Z$ pontnak létezik kompakt környezete, melynek ősképe kompakt. Valóban, bármely $C \subset Z$ kompakt halmaz lefedhető U_z, $z \in C$ nyílt halmazok véges rendszerével, melyben U_z halmazok lezártja kompakt. Ekkor

$$f^{-1}(C) \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(\overline{U}_{z_i}),$$

így a keresett őskép előáll véges sok kompakt halmaz kompakt uniójának zárt részeként.

$S^N \times Y$ sokaság lokálisan kompakt, így elegendő megmutatnunk, hogy egy $f : X \to Y$ lokálisan valódi és egy $g : X \to Z$ folytonos leképezés esetén $(g, f) : X \to Z \times Y$ szintén lokálisan valódi. Ez utóbbi állítás következik kompakt halmaz zárt halmazzal vett metszetének kompaktságából. □

Kohomológiaosztályok kiszámításában az alábbi függvényosztály lesz segítségünkre.

5.6. Definíció. X és Y sima algebrai sokaságok között menő $\varphi : X \to Y$ valódi algebrai leképezést $\varphi(X)$ feloldásának nevezzük, ha φ injektív X egy Zariski-nyílt részhalmazán.

5.7. Tétel. *Ha $\varphi : X \to Y$ a $\varphi(X)$ képének feloldása, akkor*

$$\varphi_!(1) = [\varphi(X) \subset Y] \,.$$

5.3. Ekvivariáns előrelökés

Az univerzális G-nyaláb véges dimenziós approximációján keresztül definiálhatjuk X és Y irányított G-sokaságok között menő $f : X \to Y$ valódi G-ekvivariáns leképezés előrelökését. 5.4 és 5.7 tételek ekvivariáns változatai ebben az esetben is érvényben maradnak, lehetőséget adva részvarietások ekvivariáns kohomológiaosztályainak kiszámítására.

Egy M kompakt G-sokaság esetén tetszőleges folytonos $M \to \{*\}$ leképezés valódi G-ekvivariáns leképezés, így definiálható az

$$\int_M : H_G^*(M) \to H_G^*$$

ekvivariáns integrálás, ami nem más, mint $B_G M \to BG$, illetve pontosabban ennek egy $E_k \times_G M \to E_k \times_G \{*\}$ approximációjában szereplő nyalábleképezés menti nem ekvivariáns előrelökés. Bizonyos M sokaságok esetén az M fibrumú asszociált $B_G M \to BG$ Leray-Hirsch nyaláb. 2.8 állítás szerint $\mathbb{P}V$, de általánosabban, $\mathrm{Gr}_s V$ sokaságok is rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal. Leray-Hirsch nyalábok esetén a nyalábleképezés menti előrelökés az alábbi integrálformulával számolható.

5.8. Tétel. *Legyen $p : E \to B$ egy kompakt irányítható F fibrumú Leray-Hirsch nyaláb, és jelölje c_j azon $H^{k_j}(E)$-beli elemeket, melyek tetszőleges F fibrumra vett $i^*(c_j)$ megszorítottjai $H^{k_j}(F)$ végesen generált szabad $\mathbb{Z}$-modulus bázisát adják. Jelölje $i^*(c_0) \in H^{top}(F)$ az F térfogati formáját. A Leray-Hirsch tétel szerint $H^*(E)$ tetszőleges x eleme egyértelműen felírható*

$$x = \sum p^* (b_i)\, c_i$$

alakban. A tétel szerint ekkor

$$p_!(x) = b_0.$$

5.4. Az előrelökés további tulajdonságai

G-invariáns részvarietások kohomológiaosztályainak kiszámításához szükségünk lesz néhány további állításra. Ezeket ebben a részben gyűjtöttük össze.

Függvények által indukált előrelökés és visszahúzás az alábbi értelemben felcserélhető. Az előrelökés ezen tulajdonságát az előrelökés természetességének nevezzük.

5.9. Állítás. *Kompakt irányított fibrumú sima irányított nyalábok illetve visszahúzottjaik*

$$\begin{tikzcd}
\psi^* E \arrow[r, "\tilde{\psi}"] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\
M' \arrow[r, "\psi"] & M
\end{tikzcd}$$

diagramja esetén

$$\psi^* p_! = p'_! \tilde{\psi}^*.$$

5.10. Tétel. (Atiyah-Bott-Berline-Vergne integrálformula) *Tegyük fel, hogy a kompakt M sokaságon értelmezett sima T-tóruszhatás $F(M)$ fixpontjainak halmaza véges. Ekkor tetszőleges $\alpha \in H_T^*(M)$ kohomológiaosztályra*

$$\int_M \alpha = \sum_{f \in F(M)} \frac{\alpha|_f}{e_T(T_f M)}.$$

A kifejezés jobb oldala H_T^* gyűrű hányadostestének eleme, így az állítás része az is, hogy az összeg egyszerűsítése során a nevező kiesik.

6. Varietások kohomológiaosztályának meghatározása az előrelökés segítségével

6.1. Definíció. Legyen Y egy V G-vektortér G-invariáns affin varietása. A $\varphi : E \to V$ G-ekvivariáns feloldást fibrált feloldásnak nevezzük, ha E egy M kompakt sima varietás feletti $E \to M$ G-vektornyaláb totális tere, és φ felirható

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] \arrow[dr] & M \times V \arrow[r, "\pi_V"] \arrow[d, "\pi_M"] & V \\ & M & \end{tikzcd}$$

leképezések kompozíciójaként, ahol i a vektornyaláb G-ekvivariáns beágyazása, π_V és π_M a megfelelő tényezőkre vett projekció.

A következő példa jól mutatja, hogy egy fibrált feloldás hogyan használható fel a képeként előálló varietás G-ekvivariáns kohomológiaosztályának kiszámításához. Ezt a gondolatmenetet a későbbiekben általánosítjuk, és a kapott állítást felhasználjuk más varietások esetén is.

6.1. Giambelli-Thom-Porteous példa

6.2. Példa (Giambelli-Thom-Porteous)**.** Tekintsük a $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n+l})$ vektortér

$$\bar{\Sigma}^s(n, n+l) = \left\{ \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n+l}) \middle| \operatorname{corank}(\varphi) \geq s \right\},$$

mátrixok megfelelő minorjainak eltűnésével definiálható varietását. $\bar{\Sigma}^s$ a V vektortéren értelmezett $G = GL(n) \times GL(n+l)$ csoport

$$(S, T) \cdot X = TXS^{-1}$$

hatásának invariáns altere. Megmutatjuk, hogy a $\bar{\Sigma}^s(n, n+l) \subset V$ varietás előáll egy fibrált feloldás képeként. Ehhez legyen

$$\tilde{\Sigma}^s = \left\{ (W, A) \in \mathrm{Gr}_s(\mathbb{C}^n) \times V \mid A|_W = 0 \right\}.$$

$\tilde{\Sigma}^s$ azonosítható egy kompakt sokaság feletti sima nyaláb totális terével, hiszen

$$\phi : \tilde{\Sigma}^s \to \mathrm{Hom}(Q, \mathbb{C}^{n+l}),\ (W, A) \mapsto \left(\bar{A} : \mathbb{C}^n\big/_W \to \mathbb{C}^{n+l}\right)$$

$\mathrm{Gr}_s(\mathbb{C}^n)$ feletti nyalábok izomorfizmusa, ahol Q jelöli a triviális $\mathbb{C}^n$ és a γ^s tautologikus nyaláb $\mathbb{C}^n/gamma^s$ hányadosnyalábját, $\mathbb{C}^{n+l}$ pedig a triviális vektornyalábot. $\tilde{\Sigma}^s$ része a triviális $\mathrm{Gr}_s(\mathbb{C}^n) \times V$ nyalábnak, a V-re vett π_V projekció

$$\varphi = \pi_V|_{\tilde{\Sigma}^n} : \tilde{\Sigma}^s \to V$$

megszorítása $\bar{\Sigma}^s$-re képezi. φ injektív a $\Sigma^s = \left\{ (W, A) \in \tilde{\Sigma}^s \middle| \ker(A) = W \right\}$ Zariski-nyílt részhalmazon, valamint G-ekvivariáns, hiszen $(S, T) \in GL(n) \times GL(n+l)$ a $(W, A) \in \tilde{\Sigma}^n$ elemhez

$$(S, T) \cdot (W, A) = (SW, TAS^{-1})$$

párt, $\bar{A} : \mathbb{C}^n\big/_W \to \mathbb{C}^{n+l}$ homomorfizmushoz pedig

$$(S, T) \cdot \bar{A} = T\bar{A}\bar{S}^{-1} : \mathbb{C}^n\big/_{SW} \to \mathbb{C}^{n+l}$$

leképezést rendeli, ahol $\bar{S}^{-1} : \mathbb{C}^n\big/_{SW} \to \mathbb{C}^n\big/_W$, $\bar{S}^{-1}([a]) = \left[S^{-1}a\right]$. Megmutatható, hogy φ valódi leképezés, így $\bar{\Sigma}^s$ fibrált feloldását adja.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\Sigma}^s \cong \mathrm{Hom}(Q, \mathbb{C}^{n+l}) \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] \arrow[dr] & \mathrm{Gr}_s(\mathbb{C}^n) \times V \arrow[r, "\pi_V"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{Gr}}"] & V \\
& \mathrm{Gr}_s(\mathbb{C}^n) &
\end{tikzcd}$$

Az előrelökésre vonatkozó 5.4 és 5.7 tételek szerint

$$\left[\bar{\Sigma}^s\right]_G = \varphi_!(1_G) = \pi_{V!} i_!(1_G) = \pi_{V!}\left[\tilde{\Sigma}^s \subset \mathrm{Gr}_s(\mathbb{C}^n) \times V\right]_G.$$

$\tilde{\Sigma}^s$ G-ekvivariáns kohomológiaosztályának kiszámításához tekintsük az alábbi diagramot

$$\begin{tikzcd}
\pi^*_{\mathrm{Gr}} E \arrow[d] & E = \mathrm{Hom}(\gamma^s, \mathbb{C}^{n+l}) \arrow[d] \\
\mathrm{Gr}_s(\mathbb{C}^n) \times V \arrow[r, "\pi_{\mathrm{Gr}}"] \arrow[u, bend left, "\sigma"] & \mathrm{Gr}_s(\mathbb{C}^n)
\end{tikzcd}$$

ahol $\sigma(W,A)=((W,A),A|_W)$, és vegyük észre, hogy $\tilde{\Sigma}^s$ éppen $\pi^*_{\mathrm{Gr}}E$ zérószelésének σ általi őseképe. σ transzverzális $\pi^*_{\mathrm{Gr}}E$ zérószelésére, így az Euler-osztályra vonatkozó jól ismert tétel szerint

$$\left[\tilde{\Sigma}^s\right]_G = e_G(\pi^*_{\mathrm{Gr}}E).$$

Kompakt irányított $\mathrm{Gr}_s(\mathbb{C}^n)$ fibrumú sima irányított nyalábok alábbi diagramja kommutatív,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gr}_s(\mathbb{C}^n)\times V \arrow[r, "\pi_{\mathrm{Gr}}"] \arrow[d, "\pi_V"] & \mathrm{Gr}_s(\mathbb{C}^n) \arrow[d, "\mathrm{co}"] \\
V \arrow[r, "\mathrm{co}_V"] & \{*\}
\end{tikzcd}$$

így a karakterisztikus osztályok és az előrelökés (5.9 állítás) természetességét kihasználva adódik

$$\left[\bar{\Sigma}^s\right]_G = \pi_{V!}\left(\pi^*_{\mathrm{Gr}}e_G(E)\right) = \mathrm{co}^*_V \int_{\mathrm{Gr}_s(\mathbb{C}^n)} e_G(E)$$

formula, ahol co^*_V visszahúzás természetes izomorfizmus, így gyakran elhagyjuk a jelölésből.

A továbbiakban jelölje B a triviális $\mathbb{C}^{n+l}$ vektornyalábot. A képletben szereplő $e_G(\mathrm{Hom}(\gamma^s,B))$ ekvivariáns Euler-osztályt a hasítási elv segítségével határozhatjuk meg.

6.3. Állítás. *Az X feletti A és B vektornyalábok Hom-nyalábjának top Chern-osztálya,*

$$e(\mathrm{Hom}(A,B)) = \prod_i \prod_j (\beta_j - \alpha_i).$$

Itt $\alpha_i = c_1(L_i^A)$ és $\beta_j = c_1(L_j^B)$, ahol $\oplus L_i^A$ és $\oplus L_j^B$ az A illetve a B vektornyalábok 1-nyalábok direkt összegére felbomló visszahúzottjai.

Bizonyítás. A hasítási elv kimondja, hogy létezik egy $f: F \to X$ leképezés, amely által a kohomológiákon indukált $f^*: H^*(X) \to H^*(F)$ leképezés injektív, és melyre A, B nyalábok $f^*(A)$, $f^*(B)$ visszahúzottjai 1-nyalábok direkt összegére bomlanak.

$$\mathrm{Hom}\left(f^*(A), f^*(B)\right) = \mathrm{Hom}\left(\oplus_i L_i^A, \oplus_j L_j^B\right) = \oplus_i \oplus_j \mathrm{Hom}\left(L_i^A, L_j^B\right),$$

így a Whitney-szorzatformula szerint

$$e(\mathrm{Hom}\left(f^*(A), f^*(B)\right) = \prod_i \prod_j e\left(\mathrm{Hom}\left(L_i^A, L_j^B\right)\right).$$

Véges dimenziós fibrumok esetén $L_j^B \otimes L_i^{A*} \cong \mathrm{Hom}\left(L_i^A, L_j^B\right)$, így az egyenlőség tovább írható

$$e(\mathrm{Hom}\left(f^*(A), f^*(B)\right) = \prod_i \prod_j c_1(L_j^B \otimes L_i^{A*})$$

alakban, így a bizonyítás befejezéséhez elég belátnunk, hogy $c_1(L^*) = -c_1(L)$.

$L \otimes L^* \cong \mathrm{Hom}\,(L,L)$ 1-nyaláb triviális, lévén az identitás egy seholsem nulla szelése, így $0 = c_1(L\otimes L^*) = c_1(L) + c_1(L^*)$. □

A fenti formula α_i illetve β_j változóiban külön-külön szimmetrikus, így felírható elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként, vagyis eleme a hasítóleképezés által a kohomológiákon indukált injektív homomorfizmus képének. Az elemi szimmetrikus polinomok helyére A illetve B nyalábok megfelelő Chern-osztályait helyettesítve megkapjuk a keresett $e(\mathrm{Hom}(A,B)) \in H^*(X)$ elemet. A kapott szimmetrikus polinom megfelelő alakra történő átírása gyakran bonyolult, nevezetes szimmetrikus polinomokra vonatkozó ismereteket igényel, így az általános eset helyett mi csak egy speciális, $s=1$, $l=0$ esetben, $Gr_1(\mathbb{C}^n) = \mathbb{P}^{n-1}$ ekvivariáns kohomológiagyűrűjében folytatjuk a számítást.

Az előző tétel szerint

$$e_G\left(\gamma^1, B\right) = \prod_j (\beta_j - \delta) = \sum_{j=0}^{n+l} \sigma_j(\beta_1, \ldots, \beta_{n+l})(-\delta)^{n+l-j},$$

ahol σ_j elemi szimmetrikus polinom $c_j^G(B) \in H^*(B_G\mathbb{P}^{n-1})$ képe, és így

$$e_G\left(\gamma^1, B\right) = \sum_{j=0}^{n+l} c_j^G(B)(-\delta)^{n+l-j}.$$

$BG = BGL(n) \times BGL(n+l)$ klasszifikáló tér $\mathbb{Z}$-együtthatós kohomológiagyűrűje $H_G^* = \mathbb{Z}\left[a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n+l}\right]$, ahol

$$a_i = \pi_A^*(c_i(\gamma^n)) \text{ és } b_j = \pi_B^*(c_j(\gamma^{n+l})),$$

ha π_A és π_B jelöli BG első illetve második tényezőjére vett projekciót. A 2.2 részben leírtak alapján $H^*(B_G\mathbb{P}^{n-1})$ az $\{1, \delta, \ldots, \delta^{n-1}\}$ elemek által generált szabad $H^*(BG)$-modulus, ahol $\delta = c_1^G(\gamma^1)$, a modulusstruktúrát a $p: B_G\mathbb{P}V \to BG$ nyalábleképezés adja, és teljesül a

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(-\delta)^{n-i} = 0$$

reláció.

A $B_G\mathbb{P}^{n-1}$ feletti B_GB nyaláb éppen $p^*\pi_B^*(EGL(n+l) \times_{GL(n+l)} \mathbb{C}^{n+l})$, így $l=0$ feltételt kihasználva $H_G^*(\mathbb{P}^{n-1})$ fenti leírásában

$$e_G(\mathrm{Hom}(\gamma^1, B)) = \sum_{j=0}^{n+l} b_j(-\delta)^{n+l-j} \equiv \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)(-\delta)^{n-i}.$$

$B_G\mathbb{P}^{n-1}$ Leray-Hirsh nyaláb, $\mathbb{P}^{n-1}$ térfogati formája éppen $(-\delta)^{n-1}$, így 5.8 tétel szerint

$$\left[\bar{\Sigma}^s(n,n)\right]_G = \int_{\mathbb{P}^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)(-\delta)^{n-i} = b_1 - a_1$$

6.2. Fibrált feloldás képének kohomológiaosztálya

Fibrált feloldás képeként előálló varietás kohomológiaosztályának kiszámítására vonatkozó fenti gondolatmenet az alábbi tétellel általánosítható.

6.4. Tétel. *Ha $\varphi : E \to V$ az $Y \subset V$ G-invariáns affin varietás fibrált feloldása, akkor*

$$[Y]_G = \mathrm{co}_V^* \int_M e_G\left({}^V\!/_E\right),$$

ahol co_V^* *a* $\mathrm{co}_V : V \to \{*\}$ *konstans leképezés által a kohomológiákon indukált izomorfizmus, V/E pedig az M triviális V-nyalábjának $i(E)$ résznyalábjával vett hányadosát rövidíti.*

Bizonyítás. A bizonyítás a konkrét esetre vonatkozó számolással analóg módon történik. Tekintsük az M feletti V/E hányadosnyaláb π_M projekció általi visszahúzottjának

$$\sigma : M \times V \to \pi_M^*({}^V\!/_E),\ \sigma(m, v) = v + i(E_m)$$

szelését. Világos, hogy $\sigma^{-1}(0) = i(E)$, és belátható, hogy σ transzverzális a zérószelésre, így

$$[Y]_G = \varphi_!(1_G) = \pi_{V!} i_!(1_G) = \pi_{V!}\,[i(E)]_G = \pi_{V!} e_G\left(\pi_M^*\left({}^V\!/_E\right)\right) = \pi_{V!}\pi_M^* e_G\left({}^V\!/_E\right).$$

Az egyenletből 5.9 állítás

$$\begin{tikzcd} M \times V \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[d, "\pi_V"] & M \arrow[d, "\mathrm{co}"] \\ V \arrow[r, "\mathrm{co}_V"] & \{*\} \end{tikzcd}$$

kommutatív diagramra való alkalmazásával adódik az állítás. □

6.3. Sima projektív varietások feletti kúpok kohomológiái

Tekintsünk egy $\rho : G \to GL(V)$ reprezentációt, és legyen $Y \subset V$ egy G-invariáns affin varietás. Ha

$$Y = \bigcup_{l \in \mathbb{P}Y} \{l\}$$

egy kúp, például ρ képe tartalmazza $GL(V)$ összes skalárleképezését, továbbá $\mathbb{P}Y \subset \mathbb{P}V$ projektív varietás sima, akkor Y előáll egy G-ekvivariáns fibrált feloldás képeként. Sima varietás feletti kúpok G-invariáns alterek fontos példáit adják. Leszámlálási kérdésekben is ilyen varietások osztályának vizsgálata lesz segítségünkre.

6.5. Állítás. *Ha $Y \subset V$ egy sima $j : \mathbb{P}Y \hookrightarrow \mathbb{P}V$ projektív varietás feletti G-invariáns kúp, akkor*

$$j^*\gamma^1(V) \xrightarrow{i} \mathbb{P}Y \times V \xrightarrow{\pi_V} V$$

kompozíció az Y fibrált feloldása.

6.4 tételt alkalmazva kapjuk, hogy ekkor

$$[Y]_G = \int_{\mathbb{P}Y} e_G\left({}^V\!/_{j^*\gamma^1}\right).$$

G maximális tóruszának $i : T \hookrightarrow G$ beágyazása által indukált $Bi : BT \to BG$ leképezés és ennek $\tilde{B}i : B_T V \to B_G V$ fibrumtartó felemelése által alkotott

$$\begin{tikzcd}
B_T V \cong Bi^*(B_G V) \arrow[r, "\tilde{B}i"] \arrow[d] & B_G V \arrow[d] \\
BT \arrow[r, "Bi"] & BG
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, 3.2.2 részben leírtak alapján $\tilde{B}i^*[Y]_G = [Y]_T$, így áttérhetünk a tóruszhatásra, az eredményül kapott H_T^*-beli elem megegyezik a G-ekvivariáns Euler-osztály integráljának $Bi^* : H_G^* \to H_T^*$ beágyazás általi képével.

$\mathbb{P}Y$ kompakt sokaság, az indukált sima T-hatás fixpontjai a V vektortéren vett tóruszhatás sajátvektorai által kifeszített egyenesek. Véges sok fixpont esetén alkalmazhatjuk az Atiyah-Bott-Berline-Vergne integrálformulát. $e_T(V/j^*\gamma^1)$ osztály egy $f \in F(\mathbb{P}Y)$ fixpontra vett megszorítása az

$$\begin{tikzcd}
ET \times_T \left(V/j^*\gamma^1\right)_f \arrow[d] \\
ET \times_T \{f\} = BT
\end{tikzcd}$$

nyaláb Euler-osztálya. 4.5 állítás szerint $e_T((j^*\gamma^1)_f) = \omega_f$, így a Whitney-szorzatformulából adódó

$$e_T\left(\left(V/j^*\gamma^1\right)_f\right) = \frac{e_T(V)}{\omega_f}$$

kifejezést az integrálformulába helyettesítve az alábbi tételt kapjuk.

6.6. Tétel. *Legyen $Y \subset V$ T-invariáns varietás egy sima $\mathbb{P}Y \subset \mathbb{P}V$ projektív varietás feletti kúp, és tegyük fel, hogy T-nek csak véges sok sajátvektora eleme Y-nak. Ekkor*

$$[Y]_T = e_T(V) \sum_{f \in F(\mathbb{P}Y)} \left(\omega_f e_T(T_f \mathbb{P}Y)\right)^{-1}.$$

7. Polinomok többszörös gyökökkel

A függvények kompozíciójára vonatkozó $g_2 g_1(v) = g_2\left(g_1(v)\right)$ konvenció szerint $G = GL(2)$ hatása bal hatás a $\mathbb{C}^2$ vektortéren. $V_d = \mathrm{Pol}^d(\mathbb{C}^2)$ definíció szerint $\mathbb{C}^{2^*}$ által generált részgyűrű d-edfokú része, így elemei $p : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ függvények, és

$$(g \cdot p)(v) = p\left(g(v)\right)$$

$GL(2)$ egy bal hatását definiálja.

$\mathrm{Pol}^d(\mathbb{C}^2)$ $GL(2)$-invariáns varietásainak egy fontos családját alkotják a d különböző $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ partícióihoz tartozó

$$Y_\lambda = \left\{ p \in V_d \middle| \, p = \prod_{j=1}^{k} L_j^{\lambda_j} \text{valamilyen } L_j \text{ lineáris polinomokra} \right\}$$

affin varietások. $\lambda = (1^{e_1}, \ldots, r^{e_r})$ jelölje azon λ partíciót, ami e_1 darab 1-est, e_2 darab 2-est,..., e_r darab r-est tartalmaz. Ilyen módon d minden $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ partíciójának megfeleltethetünk egy $(e_1, \ldots, e_r)$ szám r-est, ahol $\sum_{i=1}^r ie_i = d$ és $\sum_{i=1}^r e_i = k$. Az új jelölés felhasználásával Y_λ könnyedén előállítható

$$f_\lambda : \oplus_{j=1}^r \operatorname{Pol}^{e_j}(\mathbb{C}^2) \to \operatorname{Pol}^d(\mathbb{C}^2),\ (p_1, \ldots, p_r) \mapsto \prod_{j=1}^r p_j^j$$

leképezés képeként.

7.1. Y_λ fibrált feloldása

f_λ indukál egy

$$\mathbb{P} f_\lambda : \times_{j=1}^r \mathbb{P} \operatorname{Pol}^{e_j}(\mathbb{C}^2) \to \mathbb{P} \operatorname{Pol}^d(\mathbb{C}^2)$$

leképezést a vektorterek projektivizáltjain. Belátható, hogy ez a leképezés $\mathbb{P}Y_\lambda$ $GL(2)$-ekvivariáns feloldását adja. $\mathbb{P}\operatorname{Pol}^d(\mathbb{C}^2)$ feletti tautologikus $\gamma^1(V_d)$ nyaláb $\mathbb{P}f_\lambda$ menti visszahúzottjának segítségével megadható Y_λ egy

$$\begin{tikzcd}
\xi_\lambda = \mathbb{P} f_\lambda^*(\gamma^1(V_d)) \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "\varphi_\lambda"] \arrow[dr] & \left(\bigtimes_{j=1}^r \mathbb{P} V_{e_j}\right) \times V_d \arrow[r, "\pi_V"] \arrow[d, "\pi"] & V_d \\
& X_\lambda = \bigtimes_{j=1}^r \mathbb{P} V_{e_j} &
\end{tikzcd}$$

fibrált feloldása, így 6.4 tétel szerint

$$[Y_\lambda]_G = \int_{X_\lambda} e_G \left(V_d / \xi_\lambda \right).$$

$T \subset G$ tórusz hatásának véges sok X_λ-beli $\left([x^{e_1 - i_1} y^{i_1}], \ldots, [x^{e_r - i_r} y^{i_r}]\right)$ fixpontja van, ezek azonosíthatóak $\{1, \ldots, r\}$ halmazon értelmezett $0 \leq f(j) = i_j \leq e_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ függvényekkel. Az Atiyah-Bott-Berline-Vergne integrálformula szerint ekkor

$$[Y]_T = e_T(V_d) \sum_f \left(e_T(\xi_\lambda)|_f \, e_T(T_f X_\lambda) \right)^{-1}. \tag{2}$$

A formula további vizsgálatának egyszerűsítéséhez vezessük be a $H^*(BT; R) = R[\alpha_1, \alpha_2]$ kohomológiagyűrűbeli

$$u = \alpha_1,\ v = \alpha_2 \text{ és } \omega_{j,k} = (e_j - k)u + kv$$

rövidítéseket.

V_d tóruszhatásának sajátvektorai a tér $\left\{x^{d-i}y^i, i=0,\ldots,d\right\}$ bázisát adják.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot x^{d-i}y^i = a^{d-i}b^i x^{d-i}y^i,$$

így T ezen reprezentációjához tartozó súlyainak szorzata 4.5 állítás szerint

$$e_T(V_d) = C_{d+1} = \prod_{i=0}^{d} (d-i)u + iv.$$

3.21 lemmából és 4.5 állításból az ekvivariáns Euler-osztály f fixpontra vett megszorítására

$$e_T(\xi_\lambda)\big|_f = e_T(\xi_f) = \omega_f$$

következik, ahol ω_f a T tórusz f feletti 1-dimenziós ξ_f fibrumán vett ábrázolásának súlya. $v_f = \prod_{j=1}^{r} x^{j(e_j - f(j))} y^{jf(j)}$ kifeszíti a ξ_f vektorteret,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot v_f = a^{\sum j(e_j - f(j))} b^{\sum jf(j)} v_f,$$

így

$$e_T(\xi_\lambda)\big|_f = \omega_f = \sum_{j=1}^{r} j\omega_{j,f(j)} = du - \sum_{j=1}^{r} jf(j)(u-v).$$

Projektív tér pontbeli érintőtere azonosítható a projektív tér ezen pontja körüli térképpel, és így a megfelelő egyenesről annak kiegészítő alterébe menő homomorfizmusaival, és így

$$T_f X_f = \oplus_{j=1}^{r} T_{f(j)} \mathbb{P} V_{e_j} = \oplus_{j=1}^{r} \mathrm{Hom}(< x^{e_j - f(j)} y^{f(j)} >, < x^{e_j - f(j)} y^{f(j)} >^{\perp}).$$

Egy Hom-nyaláb Euler-osztályára vonatkozó 6.3 állítás szerint, az előzőekhez hasonló módon

$$e_T(T_f X_\lambda) = \prod_{j=1}^{r} \prod_{\substack{i_j=0 \\ i_j \neq f(j)}}^{e_j} \omega_{j,i_j} - \omega_{j,f(j)},$$

ami $\omega_{j,k} - \omega_{j,l} = (k-l)(v-u)$ és $\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq s}}^{a} (j-s) = (-1)^s s!(a-s)!$ azonosságok használatával

$$e_T(T_f X_\lambda) = \prod_{j=1}^{r} \prod_{\substack{i_j=0 \\ i_j \neq f(j)}}^{e_j} (i_j - f(j))(v-u) = (-1)^{\sum f(j)} (v-u)^{\sum e_j} \prod_{j=1}^{r} f(j)!(e_j - f(j))!$$

alakra hozható.

Fenti képleteket (2)-be behelyettesítve kapjuk

$$[Y_\lambda]_T = \frac{C_{d+1}}{(v-u)^{\sum_j e_j}} \sum_f \frac{(-1)^{\sum_j f(j)}}{\prod_j f(j)!(e_j - f(j))!} \frac{1}{du - \sum_j jf(j)(u-v)} \tag{3}$$

formulát, ahol j az $1,\dots,r$ értékeket veszi fel. Tudjuk, hogy (3) eleme H_T^* gyűrűnek, és így az összeg kifejtése során a nevező kiesik. Egy d-edrendű síkgörbe inflexióinak számát $Y_{(1^{d-3},3^1)}$ G-ekvivariáns osztály segítségével határozhatjuk meg, így mi (3)-t csak ebben a speciális esetben írjuk fel H_T^* elemeként. A továbbiakban λ jelölje d $\lambda = (i^{e_i}, j^{e_j})$ partícióját.

A (3) egyszerűsítése során szükségünk lesz az alábbi állításokra.

7.1. Lemma. *$H_G^*(\mathbb{P}\,\mathrm{Pol}^d(\mathbb{C}^2))$ izomorf $H_G^*[x]/(Q_d(x))$ faktorgyűrűvel, ahol $Q_d(x) = \prod_{k=0}^d (d-k)u + kv + x \in H_T^*[x]$ polinomot azonosítjuk $H_G^*[x]$-beli ősképével.*

Bizonyítás. 2.2 fejezetben megmutattuk, hogy a $\mathbb{P}V_d$ projektív tér G-ekvivariáns kohomológiagyűrűje,

$$H_G^*(\mathbb{P}V_d) \cong H_G^*[x] \Big/ \left(\textstyle\sum_{k=0}^{d+1} c_k x^{d-k}\right).$$

4.5 állítás szerint $c_k = c_k^G(V_d) = \sigma_k(\omega_0,\dots,\omega_d) \in H_T^*$, így $H_G^*(\mathbb{P}V_d)$ gyűrűt a $H_G^*[x]$ $H_T^*[x]$-beli képének

$$\sum_{k=0}^{d+1} c_k x^{d+1-k} = \prod_{k=0}^{d} \omega_k + x = \prod_{k=0}^{d} (d-k)u + kv + x = Q_d(x)$$

polinom által generált ideállal vett faktoraként kapjuk meg. □

7.2. Lemma. *Egy $g \in H_G^*[x]$ polinom által reprezentált $[g] \in H_G^*(\mathbb{P}V_d)$ integrálja,*

$$\int_{\mathbb{P}V_d} [g] = \frac{1}{(v-u)^d} \sum_{f=0}^{d} \frac{(-1)^f g(-(d-f)u - fv)}{f!(d-f)!}$$

Bizonyítás. A bizonyítást Y_λ osztályára vonatkozó (2) egyenlet levezetéséhez hasonló módon, az Atiyah-Bott-Berline-Vergne integrálformula felhasználásával végezzük. $\mathbb{P}\,\mathrm{Pol}^d(\mathbb{C}^2)$-on értelmezett tóruszhatás $x^{d-i}y^i$ $(i = 0,\dots,d)$ fixpontjai azonosíthatók $f = 0,\dots,d$ egészekkel. Az integrálformula összeadandóinak nevezőjében szereplő Euler-osztály,

$$e_T(T_f\mathbb{P}V_d) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq f}}^{d} (d-f)u + fv - ((d-j)u + jv)$$

a fenti számolással analóg módon

$$e_T(T_f\mathbb{P}V_d) = (-1)^f f!(d-f)!(u-v)^d \tag{4}$$

alakra hozható.

Megmutajuk, hogy a $[g] \in H_G^*[x]/Q_d(x)$ elem f fixpontra vett megszorítását a kifejezésben szereplő x változó a reprezentáció $\omega_f \in H_G^*$ súlyával való helyettesítésével kapjuk meg. f fixpontra való megszorítás definíció szerint az $i : \{f\} \to \mathbb{P}V_d$ beágyazás által az ekvivariáns kohomológiák között indukált homomorfizmus, így egy polinomiális kifejezés megszorítottja tagonként illetve tényezőnként számolható. Egy konstans $k \in H_G^*[x]$

polinom a $k \in H_G^*$ p^* általi képe, ahol $p : B_G\mathbb{P}V_d \to B_G\{*\}$ nyalábleképezés. $pi = \mathrm{id}$, így

$$k|_f = i^*(k) = i^*p^*(k) = k.$$

x változó $H_G^*(\mathbb{P}V_d)$ leírásában a $-\delta = -e_G(\gamma^1) \in H_G^*(\mathbb{P}V_d)$ Euler-osztálynak felel meg, így a karakteriszikus osztályok megszorítására vonatkozóak szerint

$$x|_f = -e_G(\gamma_f^1) = -\omega_f = -(d-f)u - fv.$$

(4)-et és $[g]|_f = g(-(d-f)u - fv)$-t az integrálformulába helyettesítve adódik az állítás. $\square$

$C \in H_G^*$ és $g \in H_G^*[x]$ esetén jelölje $[C/g]$ a $H_G^*(\mathbb{P}V_d)$ azon elemét, melyre

$$[C/g]g \equiv C \pmod{Q_d(x)},$$

ha létezik. Ekkor a fenti állítás felhasználásával belátható [FNR06] a következő lemma.

7.3. Lemma. *Ha $C \in H_G^*$ és $g \in H_G^*[x]$, akkor*

$$\int_{\mathbb{P}V_d} \left[{}^{C}\!/_{g}\right] = \frac{1}{(v-u)^d} \sum_{f=0}^{d} \frac{(-1)^f}{f!(d-f)!} \frac{C}{g(-(d-f)u - fv)}.$$

Vezessük be az

$$a_{f(j)} = je_ju - jf(j)(u-v) \in H_G^* \text{ és } g_{f(j)}(x_i) = a_{f(j)} - ix_i \in H_G^*[x_i]$$

jelöléseket. Ekkor

$$\begin{aligned} g_{f(j)}(-e_iu + f(i)(u-v)) = je_ju - jf(j)(u-v) - i(-e_iu + f(i)(u-v)) = \\ (je_j + ie_i)u - (if(i) + jf(j))(u-v) = du - \sum_{k\in\{i,j\}} kf(k)(u-v), \end{aligned}$$

és így 7.3 lemma szerint

$$\int_{\mathbb{P}V_{e_i}} \left[\frac{1}{g_{f(j)}(x_i)}\right] = \frac{1}{(v-u)^{e_i}} \sum_{f(i)=0}^{e_i} \frac{(-1)^{f(i)}}{f(i)!(e_i - f(i))!} \frac{1}{du - \sum_{k\in\{i,j\}} kf(k)(u-v)},$$

vagyis Y_λ G-ekvivariáns kohomológiaosztálya felírható

$$[Y_\lambda]_G = \frac{C_{d+1}}{(v-u)^{e_j}} \sum_{f(j)=0}^{e_j} \frac{(-1)^{f(j)}}{f(j)!(e_j - f(j))!} \int_{\mathbb{P}V_{e_i}} \left[\frac{1}{g_{f(j)}(x_i)}\right] \tag{5}$$

alakban.

$B_G\mathbb{P}V_{e_i} \to BG$ Leray-Hirsch nyaláb, a fibrum térfogati formája az $[(x_i)^{e_i}] \in H_G^*[x_i]/Q_{e_i}(x_i)$ reprezentánsnak megfelelő $(-\delta)^{e_i} \in H_G^*(\mathbb{P}V_{e_i})$ elem fibrumra vett megszorítottja, így 5.8 tétel szerint $\int_{\mathbb{P}V_{e_i}} [b_0(x_i)^{e_i} + \ldots + b_{e_i}] = b_0$. Emiatt az (5)-ben szereplő integrál meghatározásához elegendő $1/g_{f(j)}(x_i)$ e_i-edfokú reprezentánsában $x_i^{e_i}$

együtthatóját kiszámolnunk.

$$Q_{e_i}(x_i) - Q_{e_i}\left(\frac{a_{f(j)}}{i}\right) =$$
$$\prod_{f(i)=0}^{e_i}(x_i + f(i)u + (e_i - f(i))v) - \prod_{f(i)=0}^{e_i}\left(\frac{a_{f(j)}}{i} + f(i)u + (e_i - f(i))v\right) =$$
$$\left(x_i^{e_i+1} - \left(\frac{a_{f(j)}}{i}\right)^{e_i+1}\right) + \left(x^{e_i} - \left(\frac{a_{f(j)}}{i}\right)^{e_i}\right)K_1 + \ldots + \left(x_i - \left(\frac{a_{f(j)}}{i}\right)\right)K_{e_i} =$$
$$\left(x_i - \frac{a_{f(j)}}{i}\right)(x_i^{e_i} + \ldots) + \left(x_i - \frac{a_{f(j)}}{i}\right)\left(x_i^{e_i-1} + \ldots\right)K_1 + \ldots + \left(x_i - \frac{a_{f(j)}}{i}\right)K_{e_i} =$$
$$\left(x_i - \frac{a_{f(j)}}{i}\right)(x_i^{e_i} + \text{alacsonyabb fokú tagok,})$$

ahol $K_1, \ldots, K_{e_i} \in H_G^*$. $g_{f(j)}(x_i)$ definíciója szerint

$$iQ_{e_i}\left(\frac{a_{f(j)}}{i}\right) - iQ_{e_i}(x_i) = g_{f(j)}(x_i)\,(x_i^{e_i} + \text{alacsonyabb fokú tagok})\,,$$

és így $H_G^*(\mathbb{P}V_{e_i}) \cong H_G^*[x_i] \big/ Q_{e_i}(x_i)$ hányadosgyűrűben

$$\frac{iQ_{e_i}\left(a_{f(j)}/i\right)}{g_{f(j)}(x_i)} \equiv x_i^{e_i} + \text{alacsonyabb fokú tagok.}$$

Ekkor $\left[1/g_{f(j)(x_i)}\right]$ e_i-edfokú reprezentánsában $x_i^{e_i}$ együtthatója,

$$\int_{\mathbb{P}V_{e_i}}\left[\frac{1}{g_{f(j)}(x_i)}\right] = \frac{1}{iQ_{e_i}\left(a_{f(j)}/i\right)},$$

és így Y_λ osztálya,

$$[Y_\lambda]_G = \frac{C_{d+1}}{(v-u)^{e_j}}\sum_{f(j)=0}^{e_j}\frac{(-1)^{f(j)}}{f(j)!(e_j - f(j))!}\frac{1}{iQ_{e_i}\left(je_ju - jf(j)(u-v)\big/i\right)}. \tag{6}$$

Speciális $e_j = 1$, vagyis $\lambda = (i^{e_i}, j)$ esetben (6)

$$[Y]_G = \frac{C_{d+1}}{i(v-u)}\left(\frac{1}{Q_{e_i}(ju/i)} - \frac{1}{Q_{e_i}(jv/i)}\right) \tag{7}$$

formulává egyszerűsödik, amely $P(u,v)$ kétváltozós polinom $\partial(P) = (P(u,v) - P(v,u))/(u-v)$ osztott differenciájának bevezetésével tovább rövidíthető, hiszen $\prod_{l=0}^{k}(k-l)u + lv$ szimmetrikus az u és v változóiban, és így

$$\partial\left(\frac{C_{d+1}}{Q_{e_i}(jv/i)}\right) = \frac{C_{d+1}}{u-v}\left(\frac{1}{Q_{e_i}(jv/i)} - \frac{1}{Q_{e_i}(ju/i)}\right).$$

Ekkor

$$[Y_\lambda]_G = \frac{1}{i}\partial\left(\frac{C_{d+1}}{Q_{e_i}(jv/i)}\right), \tag{8}$$

$$\frac{C_{d+1}}{Q_{e_i}(jv/i)} = \frac{i^{e_i+1}\prod_{k=0}^{d}(d-k)u+kv}{\prod_{l=0}^{e_i}(d-(j+il))u+(j+il)v} = i^{e_i+1}\prod_{\substack{k=0\\k\neq j+il\\l=0,\dots,e_i}}^{d}(d-k)u+kv \tag{9}$$

(9) képlet vizsgálatát tovább szűkítve az $i=1$ esetre, $d=j+e_i$ egyenlőség miatt a szorzatban k a $0,\dots,j-1$ értékeket veszi fel, így

$$\left[Y_{(1^{e_i},j)}\right]_G = \partial\left(\prod_{k=0}^{j-1}(d-k)u+kv\right) \tag{10}$$

Háromszoros gyökkel rendelkező polinomok $\lambda_{(1^{d-3},3)}$ varietásának kohomológiaosztálya (9) ismeretében elemi átalakításokkal meghatározható. A $j=3$ helyettesítéssel adódó

$$\begin{aligned}\left[Y_{\left(1^{d-3},3\right)}\right]_G &= \partial\left(\prod_{k=0}^{2}(d-k)u+kv\right)\\ &= \frac{(d^3-3d^2+2d)(u-v)^3+(3d^2-6d)(u^2v-uv^2)}{u-v}\\ &= (d^3-3d^2+2d)(u^2+uv+v^2)+(3d^2-6d)uv\\ &= (d^3-3d^2+2d)(u+v)^2+(-d^3+6d^2-8d)uv\end{aligned} \tag{11}$$

osztály H_G^* elemeként felírva

$$\left[Y_{\left(1^{d-3},3\right)}\right]_G = (d^3-3d^2+2d)c_1^2+(-d^3+6d^2-8d)c_2. \tag{12}$$

8. d-edrendű síkgörbe inflexiói

Egy d-edrendű X_f síkgörbe egy homogén d-edfokú $f\in \mathrm{Pol}^d(\mathbb{C}^3)$ polinom zérushelyeként definiált projektív varietás a $\mathbb{P}^2$ projektív síkon. Egy $[V]$ projektív egyenes definíció szerint inflexió, ha az f polinomnak az egyenesnek megfelelő $V\in \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^3)$ altérre megszorítva van háromszoros gyöke.

A $\mathrm{GL}(2)$ csoport balról hat $\mathrm{Pol}^d(\mathbb{C}^2)$ vektortéren, így az $\mathrm{EGL}(2)\to \mathrm{BGL}(2) = \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^\infty)$ univerzális $\mathrm{GL}(2)$-nyaláb $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^3)$-re vett megszorításának segítségével definiálhatjuk a $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^3)$ feletti $\mathrm{Pol}^d(\gamma^2)$ asszociált nyalábot, ahol γ^2 a $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^3)$ feletti tautologikus résznyaláb. Az $Y_{\left(1^{d-3},3^1\right)}\subset \mathrm{Pol}^d(\mathbb{C}^2)$ $\mathrm{GL}(2)$-invariáns részvarietás a $\mathrm{Pol}^d(\gamma^2)$ vektornyaláb egy

$$\mathrm{EGL}(2)|_{\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^3)}\times_{GL(2)} Y_{\left(1^{d-3},3^1\right)}\subset \mathrm{Pol}^d(\gamma^2)$$

résznyalábját definiálja. Az f polinom megadja a $\mathrm{Pol}^d(\gamma^2)\to \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^3)$ nyaláb egy σ_f, $\sigma_f(V)=f|_V$ szelését. Megmutatható, hogy sima görbe a résznyalábra transzverzális szelést definiál. Ekkor az X_f síkgörbe inflexióinak megfelelő alterek halmaza pontosan a fenti résznyaláb σ_f általi ősképe, $Y_{(1^{d-3},3^1)}(\sigma_f)$.

$Y_{(1^{d-3},3^1)}\subset \mathrm{Pol}^d(\mathbb{C}^2)$ komplex kodimenziója $d-(d-2)=2$, ami megegyezik $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^3)$ komplex dimenziójával, így $Y_{(1^{d-3},3^1)}(\sigma_f)$ 0 dimenziós részsokaság, osztálya eleme $H^4(\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^3);\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$-nek. Tudjuk, hogy egy pont kohomológiaosztálya generálja ezt a $\mathbb{Z}$-t, valamint hogy a komplex sokaságok kanonikus irányítása miatt mindegyik pont ugyanazt a generátort definiálja, így

$$\left[Y_{(1^{d-3},3^1)}(\sigma_f)\right] = k \in \mathbb{Z}$$

pontosan akkor, ha X_f-nek k darab inflexiós egyenese van.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{EGL}(2)|_{\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^3)} = i^* \mathrm{EGL}(2) \arrow[d] & EGL(2) \arrow[d] \\
\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^3) \arrow[r, "i"] & BGL(2)
\end{tikzcd}$$

így 3.1 tétel szerint $\left[Y_{(1^{d-3},3^1)}(\sigma_f)\right] = \alpha(\mathrm{EGL}(2)|_{\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^3)})$, ahol α az $\left[Y_{(1^{d-3},3^1)}\right]_G \in H^*_G(V)$ képe a $H^*_G(V) \cong H^*_G$ azonosításnál.

Az előző fejezetben kiszámoltuk, hogy

$$\alpha = (d^3 - 3d^2 + 2d)c_1^2 + (-d^3 + 6d^2 - 8d)c_2,$$

ahol c_i az EGL(2) i-edik Chern-osztálya. Ekkor a karakterisztikus osztályok természetességéből adódóan

$$\left[Y_{(1^{d-3},3^1)}(\sigma_f)\right] = (d^3 - 3d^2 + 2d)c_1^2(\gamma^2) + (-d^3 + 6d^2 - 8d)c_2(\gamma^2).$$

Egy egyeneshez az arra merőleges síkot rendelő $g : \mathbb{P}^2 \to \mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^3)$ függvény homeomorfizmus [MS74], így az általa indukált

$$g^* : H^4(\mathrm{Gr}_2(\mathbb{C}^3)) \to H^4(\mathbb{P}^2)$$

leképezés izomorfizmus, csoport generátorához generátort rendel. $g^*(\gamma^2) \oplus \gamma^1 \cong \mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}^3$ triviális vektornyaláb, így a Whitney-szorzatformula szerint

$$\left(1 + c_1(\gamma^1)\right)\left(1 + c_1(g^*(\gamma^2)) + c_2(g^*(\gamma^2))\right) = 1$$

a $\xi = c_1(\gamma^1)$ által generált $H^*(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\xi]/(\xi^3)$ hányadosgyűrűben. A szorzat kifejtéséből $c_1(g^*(\gamma^2)) = -\xi$ és $c_1^2(g^*(\gamma^2)) = c_2(g^*(\gamma^2)) = \xi^2$ adódik. ξ^2 a $H^4(\mathbb{P}^2; \mathbb{Z})$ generátora, amiből következik, hogy

$$c_1^2(\gamma^2) = c_2(\gamma^2) = 1 \in \mathbb{Z},$$

és így

$$\left[Y_{(1^{d-3},3^1)}(\sigma_f)\right] = (d^3 - 3d^2 + 2d) + (-d^3 + 6d^2 - 8d) = 3d(d-2),$$

ami bizonyítja, hogy egy d-edrendű sima síkgörbe inflexióinak száma $3d(d-2)$.

Irodalomjegyzék

[Tev01] E. A. Tevelev. *Projectively dual varieties*. 2001. URL: https://arxiv.org/abs/math/0112028.

[Feh15a] László M. Fehér. *Equivariant cohomology*. 2015. URL: http://www.cs.elte.hu/~lfeher.

[FNR06] L. M. Fehér, A. Némethi, and R. Rimányi. "Coincident root loci of binary forms". In: *Michigan Mathematical Journal* 54 (2006), pp. 375–392.

[Mil56] John Milnor. "Construction of Universal Bundles, II". In: *Annals of Mathematics* 63 (1956), pp. 430–436.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.

[Mit11] Stephen A. Mitchell. *Notes on principal bundles and classifying spaces*. 2011. URL: http://www.math.washington.edu/~mitchell.

[MS74] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic classes*. Annals of mathematics studies 76. Princeton University Press, 1974.

[Feh15b] László M. Fehér. *Karakterisztikus osztályok*. 2015. URL: http://www.cs.elte.hu/~lfeher.

[BJ82] T. Bröcker and K. Jänich. *Introduction to differential topology*. Cambridge University Press, 1982.

[Hat03] Allen Hatcher. *Vector bundles and K-theory*. 2003. URL: https://www.math.cornell.edu/~hatcher.

[Ful97] William Fulton. *Young tableaux. With applications to representation theory and geometry*. Vol. 35. London Mathematical Society student texts. Cambridge University Press, 1997.

[AB84] M. F. Atiyah and R. Bott. "The moment map and equivariant cohomology". In: *Topology* 23 (1984), pp. 1–28.