Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Sárai Zoltán István

Kéve-kohomológiák és alkalmazásuk

Szakdolgozat

Matematika MSc

Témavezető:

Némethi András, egyetemi tanár
Geometriai Tanszék

Budapest, 2016.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni Némethi András professzor úrnak, hogy a szűkös határidő ellenére, és több más szakdolgozója mellett is elvállalta a témavezetői munkát, és segített ezen dolgozat létrejöttében. Köszönöm továbbá a konzultációkat, az iránymutatást, lektorálást és építő megjegyzéseket.

Előszó

A kévék elmélete a 20. század közepén kezdett kialakulni, főleg komplex függvénytani és algebrai geometriai motivációktól hajtva. Az elmélet fő kidolgozói között olyan nevek találhatóak, mint Čech, Leray, Grothendieck, Cartan, Serre és Oka, az egyik első teljesen ezzel a témával foglalkozó könyv pedig Godement nevéhez fűződik.

A kévék jó eszköznek bizonyultak topologikus terek egyes lokális tulajdonságainak megragadására, egyszerű és általános formalizmust nyújtottak ezekhez. Továbbá kohomológiáik a globális tulajdonságok vizsgálatának hasznos eszközei.

Az elmúlt több mint fél évszázadban nagyon szerteágazó kutatások folytak a témában, hatalmas irodalma gyűlt össze. Felhasználási területei főleg a komplexanalízis, algebrai geometria és a differenciáltopológia.

Az én dolgozatom felépítése a következő.

Az első fejezetben megismerkedünk az alapfogalmakkal. A szokásostól egy kicsit eltérő módon definiálom a kévéket, majd a köztük menő homomorfizmusokat és a szeléseiket. Majd rátérek a kicsit általánosabb előkévék fogalmára és kapcsolatukra a kévékkel. Néhány a gyakorlatban hasznos példa után pedig a klasszikus definícióval való összevetéssel zárom a fejezetet.

A második szekció az algebrai eszköztár felépítésére szolgál. Felvázolom az algebrai kohomológiaelmélet alapjait, majd a kicsit bonyolultabb spektrális sorokra vonatkozó állításokat. Bemutatom továbbá ezeknek a dolgozatomban előforduló fő felhasználási területét, a kettős komplexusokra vonatkozó általános állításokkal.

A harmadik fejezetben összekapcsolom a két érintett témát, és a kévék kanonikus feloldásán keresztül definiálom a kéve-kohomológiákat. Megismerkedünk ezek alaptulajdonságaival, és egy-két, a klasszikus kohomológiákkal analóg állítással (hosszú exakt sor, Mayer-Vietoris tétel). Ezek után speciális kévecsaládokkal ismerkedünk meg, illetve alkalmazásukkal a kéve-kohomológiák számolásában. Végül bemutatom a kévék tetszőleges exakt sorából a kohomológiákon adódó összefüggéseket.

A negyedik szakasz egy (a priori) másik, a kévék segítségével definiált kohomológiaelméletet mutat be, a Čech kohomológiát. Majd belátjuk, hogy elég általános feltételek mellett megegyezik a két elmélet.

Az ötödik szakasz a klasszikus kohomológiaelméletekkel való kapcsolatra fókuszál, bemutatom, hogy a szimplíciális, szinguláris, deRham és Dolbeault kohomológiák mind számolhatók kévék segítségével, sőt az eddigre belátott állítások segítségével például a deRham tételre is egysoros bizonyítást adhatunk.

Az utolsó, hatodik fejezetben pedig a komplex analízis két híres problémájára adok választ a kéve-kohomológiák segítségével.

A dolgozatban néhol – főleg kitérőkben, megjegyzésekben – komolyabb háttér bemutatása nélkül használok más témából ismert fogalmakat. Remélem, ez nem befolyásolja a munka érthetőségét, de forrásmegjelölésekkel, illetve a függelék pár pontjával igyekszem minimális segítséget nyújtani. Az ezen esetekbe való komolyabb belemerüléshez rengeteg további információt, tételt, bizonyítást kéne beemelni a dolgozatba, a fő témához érdemben nem sokat hozzátéve.

Továbbá, mivel a felhasznált forrásaim angol nyelvűek voltak, sőt magyar nyelven alig fellelhetőek írások a témában, bizonyos fogalmaknál nem feltétlen bevett, elterjedt kifejezéseket használok – sőt, helyenként a saját fordításaimat alkalmazom. Itt az egyértelműség kedvéért igyekszem leírni a fogalom angol nevét is.

A dolgozat főleg Robert Gunning: Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables, Volume III: Homological Theory [7] könyvét követi, az első négy fejezet, az elméleti háttér, szinte teljesen az ő munkáján alapul. Főleg az utolsó két fejezetben fordulok Gelfand [2], Griffiths & Harris [4] és részben Godement [3] munkáihoz. Egyes megjegyzések támaszkodnak továbbá többek között Hartshorne [8] és Bott & Tu [1] könyveire is.

1. Általános bevezető, alapfogalmak

1.1. Kévék

1.1.1. Definíció (Kéve). *Az M topologikus tér feletti Abel csoport*-kévének (sheaf) *nevezünk egy $\mathscr{S}$ topologikus teret egy $\pi : \mathscr{S} \to M$ leképezéssel, amelyre*

(i) π egy szürjektív lokális homeomorfizmus,

(ii) $\forall Z \in M$ pontra $\pi^{-1}(Z)$ egy Abel csoport,

(iii) a csoportműveletek folytonosak $\mathscr{S}$ topológiájában.

π*-t* vetítésnek (projection), $\pi^{-1}(Z) \subseteq \mathscr{S}$*-t pedig a Z fölötti* szárnak (stalk) *nevezzük, és utóbbit gyakran jelöljük $\mathscr{S}_Z$-vel.*

Megjegyzés: A definíció természetes módon általánosítható más algebrai struktúrákra, beszélhetünk gyűrű-, modulus, vektortér-, stb. kévékről is.

1.1.2. Megjegyzés. Mivel a csoportművelet csak a szárakon van definiálva, a (iii) feltétel magyarázatra szorulhat. Vegyük az úgynevezett fibrált szorzatot π mentén: $\mathscr{S} \times_\pi \mathscr{S} = \{(s,t) \in \mathscr{S} \times \mathscr{S} : \pi(s) = \pi(t)\} \subseteq \mathscr{S} \times \mathscr{S}$, a szorzattopológiával ellátott $\mathscr{S} \times \mathscr{S}$ tértől örökölt altértopológiával. Ezen definiálhatjuk a $\sigma : \mathscr{S} \times_\pi \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ leképezést a következő hozzárendelési szabállyal: $\sigma(s,t) := s - t \in \mathscr{S}_{\pi(s)}$. Ekkor a (iii) feltétel σ folytonosságát követeli meg.

A későbbi szekciókban bőségesen szolgálok példákkal, de a könnyebb tárgyalhatóság végett vegyük előre a legegyszerűbb kévét:

1.1.3. Példa (Triviális kéve, Zérókéve). Legyen M egy topologikus tér, G egy Abel csoport ellátva a diszkrét topológiával, és tekintsük a $\mathscr{S} := M \times G$ halmazt a szorzattopológiával, valamint legyen $\pi : \mathscr{S} \to M$ a kanonikus projekció. Ekkor $\mathscr{S}$ nyilvánvalóan egy Abel-csoport kéve – minden pont feletti szár G – amelyet gyakran G-vel jelölünk.

Ha G a triviális csoport, akkor az így kapott kévét M feletti *zérókévének* nevezzük, és a jele egyszerűen 0 .

1.1.4. Definíció (Megszorítás). *Legyen $\mathscr{S}$ M feletti kéve, $X \subseteq M$ tetszőleges részhalmaz, ekkor $\pi^{-1}(X) \subseteq \mathscr{S}$ tekinthető X feletti kévének a π projekcióval. Ennek jelölése $\mathscr{S}|_X$.*

A téma egy másik alapvető fogalma a szelés, mely a legegyszerűbb objektumok (például a null részkéve) definiálásában is elengedhetetlen segítséget nyújt, így érdemes már itt bevezetni:

1.1.5. Definíció (Szelés)**.** *Legyen $\mathscr{S}$ egy M feletti Abel csoport-kéve π vetítéssel, $X \subseteq M$ tetszőleges részhalmaz. Az $f : X \to \mathscr{S}$ folytonos leképezést* szelésnek (section) *nevezzük, ha $\pi \circ f : X \to X$ az identitás. A szelések halmazát $\Gamma(X, \mathscr{S})$-vel jelöljük.*

1.1.6. Megjegyzés. Legyen az előző definícióban szereplő jelölés mellett $s \in \mathscr{S}$, $\pi(s) = Z \in M$. Ekkor megfelelő $U_s \subset \mathscr{S}$ nyílt halmazt véve $\pi|_{U_s}$ homeomorfizmus, így $(\pi|_{U_s})^{-1}$ jóldefiniált leképezés, és teljesíti a definíció feltételeit. Tehát $\forall s \in \mathscr{S}$ ponton keresztül megy szelés, és lokálisan minden $\mathscr{S}$-beli nyílt halmaz előáll mint egy megfelelő U fölötti szelés, $f \in \Gamma(U, \mathscr{S})$ képe, $f(U)$. Vagyis az $\{f(U) : f \in \Gamma(U, \mathscr{S}), U \subseteq M, \text{ nyílt}\}$ halmaz $\mathscr{S}$ topológiájának egy bázisát adja. További fontos észrevétel, hogy ezáltal a szelések nem csak folytonos-, de nyílt leképezések is.

Továbbá ha $f \in \Gamma(U, \mathscr{S})$ egy s-en átmenő szelés ($f(Z) = s$), akkor a f megegyezik π^{-1} megfelelő ágával Z egy környezetében. Tehát tetszőleges $f, g \in \Gamma(U, \mathscr{S})$ szelésekre ha $f(Z) = g(Z)$ valamely $Z \in U$ pontra, akkor a két szelés Z egy környezetében is megegyezik.

1.1.7. Megjegyzés. A szárak csoportstruktúrája csoportműveleteket definiál a szelések halmazán is. Ha $f, g \in \Gamma(X, \mathscr{S})$ akkor vegyük az $f - g : X \to \mathscr{S}$ leképezést, melyre $(f - g)(Z) := f(Z) - g(Z) \in \mathscr{S}_Z$. Ez triviálisan az $f \times g : X \to \mathscr{S} \times_\pi \mathscr{S}$ $Z \mapsto (f(Z), g(Z))$ és az 1.1.2 megjegyzésben bevezetett $\sigma : \mathscr{S} \times_\pi \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ folytonos leképezések kompozíciója, tehát egy szelés. Ezáltal $\Gamma(U, \mathscr{S})$ egy Abel-csoport. Mivel tudjuk, hogy tetszőleges $Z \in M$ megfelelő U környezetében létezik $f \in \Gamma(U, \mathscr{S})$ szelés (hiszen azt is láttuk, hogy $\mathscr{S}_Z$ tetszőleges pontján átmenő szelés is van), vehetjük az $f - f \in \Gamma(U, \mathscr{S})$ szelést. Ez bizonyítja, hogy a leképezés ami M minden pontjához a fölötte lévő szár nullelemét rendeli lokálisan egy szelés, így a definíció lokális volta miatt globálisan is az. Tetszőleges $X \subseteq M$ halmazra ennek a szelésnek a megszorítása $\Gamma(X, \mathscr{S})$ nulleleme, $0 \in \Gamma(X, \mathscr{S})$.

1.1.8. Példa. Az 1.1.3 példában bevezetett triviális kéve egy szelése – mivel G-n a diszkrét topológiát vettük – egy összefüggő halmaz minden pontja fölött ugyanazt a $g \in G$ elemet veszi fel, így összefüggő X halmazra $\Gamma(X, \mathscr{S}) \cong G$. E miatt az észrevétel miatt a triviális kévéket gyakran a lokálisan konstans G-beli függvények/függvénycsírák kévéjének is nevezik.

1.1.9. Definíció (Részkéve)**.** *A $\mathscr{S}$ M feletti Abel-csoport kéve egy $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{S}$ nyílt részhalmazát, melyre $\forall Z \in M$ $\mathscr{R}_Z \leq \mathscr{S}_Z$ egy részcsoport, az $\mathscr{S}$* részkévéjének (subsheaf) *nevezzük. $\mathscr{R}$ nyíltságának köszönhetően $\mathscr{R}$ nyilvánvalóan egy kéve.*

1.1.10. Definíció (Faktorkéve)**.** *Legyen* $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{S}$ *részkéve, és definiáljuk a* $\mathscr{T} = \bigcup_{Z\in M} \mathscr{T}_Z = \bigcup_{Z\in M} \mathscr{S}_Z/\mathscr{R}_Z$ *halmaz az* $\mathscr{S}$*-től örökölt hányadostopológiával és a* $\pi : \mathscr{T} \to M : \pi(\mathscr{T}_Z) = Z$ *projekcióval. Ekkor* $\mathscr{T}$ *szintén egy* M *fölötti Abel-csoport kéve, ezt az* $\mathscr{S}$ *kéve* $\mathscr{R}$ *szerinti* faktorkévéjének (quotient sheaf) *nevezzük és* $\mathscr{T}=\mathscr{S}/\mathscr{R}$*-ként jelöljük.*

1.1.11. Példa.

- Legyen $\mathscr{S}$ tetszőleges M-feletti kéve. Ekkor a nullszelés képe $0 \in \Gamma(M, \mathscr{S})$ nyílt részhalmaza $\mathscr{S}$-nek, így egy részkéve ($\mathscr{R}$), a zéró részkéve. Ebben az esetben nyilván $\mathscr{S}/\mathscr{R}=\mathscr{S}$.

- Legyen most továbbá $U \subseteq M$ egy nyílt részhalmaz, és definiáljuk $\mathscr{R}$-t a következőképpen: $\mathscr{R} = \bigcup_{Z\in M} \mathscr{R}_Z$, ahol
$$\mathscr{R}_Z = \begin{cases} \mathscr{S}_Z & \text{ha } Z \in U \\ 0 & \text{ha } Z \notin U. \end{cases}$$
Ekkor (U nyíltságának köszönhetően) $\mathscr{R}$ egy részkévéje $\mathscr{S}$-nek és a $\mathscr{T}$ faktorkéve szárai
$$\mathscr{T}_Z = \begin{cases} 0 & \text{ha } Z \in U \\ \mathscr{S}_Z & \text{ha } Z \notin U. \end{cases}$$

Az alap objektumok ismeretében rátérhetünk a köztük menő leképezésekre:

1.1.12. Definíció (Kévehomomorfizmusok)**.** *Legyen* $\mathscr{S}$ *és* $\mathscr{R}$ M *feletti Abel-csoport kéve. A* $\phi : \mathscr{R} \to \mathscr{S}$ *folytonos leképezés* kévehomomorfizmus*, ha* $\forall Z \in M$ *pontra* $\phi(\mathscr{R}_Z) \subseteq \mathscr{S}_Z$*, és a megszorítás* $\phi|_{\mathscr{R}_Z} : \mathscr{R}_Z \to \mathscr{S}_Z$ *csoporthomomorfizmus.* ϕ kéveizomorfizmus*, ha létezik szintén kévehomomorfizmus inverze.*

A kévehomomorfizmus magja *a* $\phi^{-1}(0) \subseteq \mathscr{R}$*, ahol a* 0 *az* $\mathscr{S}$ *zéró részkévéjét jelöli.*

A kévehomomorfizmus képe *a* $\phi(\mathscr{R}) \subseteq \mathscr{S}$ *halmaz.*

Példa: Részkéve természetes beágyazása $\mathscr{R} \to \mathscr{S}$, és faktorkéve természetes projekciója $\mathscr{S} \to \mathscr{S}/\mathscr{R}$ is kévehomomorfizmus.

Az, hogy a $\phi : \mathscr{R} \to \mathscr{S}$ kévehomomorfizmus magja részkévéje $\mathscr{R}$-nek következik ϕ folytonosságából, de hogy a kép is az $\mathscr{S}$-ben, ahhoz szükségünk van a következő két észrevételre:

1.1.13. Megjegyzés. Tetszőleges $f \in \Gamma(X, \mathscr{R})$ szelés ϕ-vel való kompozíciója $\mathscr{S}$ egy szelése: $\phi \circ f \in \Gamma(X, \mathscr{S})$. Azaz ϕ indukál egy $\phi^* : \Gamma(X, \mathscr{R}) \to \Gamma(X, \mathscr{S})$ csoporthomomorfizmust tetszőleges $X \subseteq M$ részhalmazra.

1.1.14. Következmény. Abból, hogy egy kéve szelései az 1.1.6 megjegyzés szerint generálják a kéve topológiáját, és hogy szelés kévehomomorfizmussal komponált képe szelés, következik hogy egy kévehomomorfizmus mindig nyílt leképezés. Ugyanis tetszőleges nyílt halmaz $U \in \mathscr{R}$ előáll $\{f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{R})\}_\alpha$ szelések képeinek uniójaként, és $\phi(U) = \bigcup_\alpha \phi \circ f_\alpha(U_\alpha)$, tehát nyílt halmaz.

Ebből már nyilvánvaló, hogy a ϕ kévehomomorfizmus képe részkévéje $\mathscr{S}$-nek.

1.1.15. Definíció (Kévék exakt sora)**.** *Kévék és homomorfizmusaik egy*

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{S}_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} \mathscr{S}_n \xrightarrow{\phi_n} \mathscr{S}_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

sorozatát exaktnak *nevezzük, ha* $\operatorname{Im}\phi_{n-1} = \ker\phi_n$*. Speciálisan az exakt sor* rövid exakt*, ha*

$$0 \longrightarrow \mathscr{R} \xrightarrow{\phi} \mathscr{S} \xrightarrow{\psi} \mathscr{T} \longrightarrow 0$$

alakú, ahol a 0 *a zérókéve.*

1.1.16. Megjegyzés. A fenti hosszú exakt sor felírható mint

$$0 \longrightarrow \mathscr{R}_n \xrightarrow{i_n} \mathscr{S}_n \xrightarrow{\phi_n} \mathscr{R}_{n+1} \longrightarrow 0$$

alakú rövid exakt sorok összessége, ahol $\mathscr{R}_n = ker\phi_n$ és i a beágyazás.

1.1.17. Definíció (injektív, szürjektív homomorfizmusok)**.**

A ϕ kévehomomorfizmus injektív, ha a magja a zérókéve, azaz a $0 \xrightarrow{i} \mathscr{R} \xrightarrow{\phi} \mathscr{S}$ sor exakt, ahol az első leképezés a zéró részkéve természetes beágyazása.

A ψ kévehomomorfizmus szürjektív, ha a képe a teljes kéve, azaz a $\mathscr{S} \xrightarrow{\psi} \mathscr{T} \to 0$ sor exakt.

A kévéknél is fennáll, hogy egy leképezés akkor és csak akkor izomorfizmus ha injektív és szürjektív.

Megjegyzés: Az előzőek alapján a fenti rövid exakt sor felfogható úgy, hogy az $\mathscr{R}$ kéve $\mathscr{S}$ egy részkévéje (hisz ϕ injektív), $\mathscr{T}$ pedig a faktoruk (hisz ψ szürjektív és $\operatorname{Im}\phi = \ker\psi_n$).

1.2. Előkévék, asszociált kévék

A kévéken túl szükségünk lesz általánosabb objektumokra is, ezek az *előkévék.* Mint látni fogjuk ezen objektumok szorosan kapcsolódnak mind a kévékhez, mind azok széléseihez. Kezdjük is a definícióval:

1.2.1. Definíció (előkéve)**.** *Abel csoportok egy M topologikus tér fölötti* előkévéjenek *nevezzük a $\{\mathscr{S}_U : U \subseteq M,\ U \text{ nyílt}\}$ halmazát Abel csoportoknak a ρ_{VU} csoporthomomorfizmus-családdal, ahol $\rho_{VU} : \mathscr{S}_U \to \mathscr{S}_V$, amennyiben $V \subseteq U$, és $\rho_{UU} = id_{\mathscr{S}_U}$, valamint $\rho_{VU} \circ \rho_{UW} = \rho_{VW}$, ha $V \subseteq U \subseteq W$.*

Példa: Ha $\mathscr{S}$ egy kéve M felett, akkor $\mathscr{S}$ nyílt halmazok feleti szelései a megszorítás operátorokkal előkévét alkotnak.

Precízebben: $\{\mathscr{S}_U = \Gamma(U, \mathscr{S}) : U \subseteq M,\ U \text{ nyílt}\}$ előkéve a

$$\rho_{VU} : \Gamma(U, \mathscr{S}) \to \Gamma(V, \mathscr{S}), \quad f \in \Gamma(U, \mathscr{S}) \mapsto \rho_{VU}(f) = f|_V \in \Gamma(V, \mathscr{S})$$

megszorítással. Ez az $\mathscr{S}$-hez *asszociált előkéve.*

A másik irány, az előkévékhez *asszociált kéve* konstrukciója egy fokkal bonyolultabb, felhasználja a direkt limes fogalmát (F.1).

1.2.2. Definíció (Asszociált kéve)**.** *Rögzítsünk egy $\{\mathscr{S}_U\}$ előkévét. Tetszőleges $Z \in M$ pontra vegyük a Z-t tartalmazó M beli nyílt halmazokat a tartalmazással, és lássuk el ezt a halmazt az $U \leq V \Leftrightarrow V \subseteq U$ részbenrendezéssel. Ekkor ezt, mint indexhalmazt használva az $\mathscr{S}_U$ Abel csoportok és ρ_{VU} leképezések direkt rendszert alkotnak, és képezhetjük a következő limest: $\tilde{\mathscr{S}}_Z := \varinjlim_{\{U : Z \in U\}} \mathscr{S}_U$, mely szintén egy Abel csoport. A kanonikus leképezést, ami egy $\mathscr{S}_U$-beli elemhez a limesbeli határértékét rendeli jelöljük $\rho_{ZU} : \mathscr{S}_U \to \tilde{\mathscr{S}}_Z$-vel. Legyen továbbá $\tilde{\mathscr{S}} := \bigcup_{Z \in M} \tilde{\mathscr{S}}_Z$, és $\pi : \tilde{\mathscr{S}} \to M$ a $\pi(\tilde{\mathscr{S}}_Z) = Z$ hozzárendeléssel definiálva.*

Szükségünk lesz még a topológiára $\tilde{\mathscr{S}}$-n, definiáljuk ezt a következő bázissal: vegyük a $\rho(f_U) = \{\rho_{ZU}(f_U) : Z \in U\} \subseteq \tilde{\mathscr{S}}$ halmazok halmazát, ahol f_U befutja $\mathscr{S}_U$ elemeit minden U-ra. Ekkor $(\tilde{\mathscr{S}}, \pi)$ ezzel a topológiával az $(\mathscr{S}_U, \rho_{VU})$ előkévéhez asszociált kéve.

Persze be kell látnunk, hogy ez egy értelmes definíció, és tényleg egy kévét definiál.

Bizonyítás. Tekintsük először a topológiát – lássuk be hogy a $\rho(f_U)$ halmazok egy jó bázist alkotnak. Ehhez az szükséges, hogy két ilyen halmaz metszete is előáll ilyen halmazok uniójaként, legyen tehát $s \in \rho(f_U) \cap \rho(f_V)$ és $Z = \pi(s)$. Ekkor $Z \in U \cap V$ és $\rho_{ZU}(f_U) = \rho_{ZV}(f_V) = s$, tehát a direkt limes definíciója alapján $\exists W \ni Z$ melyre $U \leq W, V \leq W$, azaz $W \subseteq U \cap V$ és $\rho_{WU}(f_U) = \rho_{WV}(f_V) =: f_W \in \mathscr{S}_W$. Mivel $\rho_{ZU} = \rho_{ZW} \circ \rho_{WU}$ így $s \in \rho(f_W) \subseteq \rho(f_U) \cap \rho(f_V)$.

A definíció jelöléseivel $\pi^{-1}(Z) = \tilde{\mathscr{S}}_Z$ Abel csoport, tehát a kéve definíció (1.1.1) (ii) feltétele teljesül. A direkt limes és a báziselemek konstrukciójának köszönhetően

π lokálisan injektív és szürjektív, valamint folytonos és nyílt leképezés, tehát lokális homeomorfizmus (i). Továbbá mivel ρ_{ZU} csoporthomomorfizmus, így $\rho(f_U)$ és $\rho(g_U)$ pontonkénti különbsége megegyezik $\rho(f_U - g_U)$-val tetszőleges $f_U, g_U \in \mathscr{S}_U$ elemekre, amiből a csoportműveletek folytonossága (iii) rögtön következik. $\square$

A következő természetes kérdés, hogy mi történik ezen konstrukciók kombinálásakor. Az egyik irány itt is egyszerű:

Ha egy $\mathscr{S}$ kévéhez előállítjuk a $(\Gamma(U, \mathscr{S}), \rho_{VU})$ előkévét, majd ehhez az asszociált kévét, akkor az 1.1.6 megjegyzésben kifejtettek miatt visszakapjuk az $\mathscr{S}$ kévét.

Az előkévéktől indulva azonban ez nincs általában így. Vegyük a következő előkévét: legyen $\mathscr{S}_U = G$ Abel csoport $\forall U$ halmazra, és $\rho_{VU} = 0$ a zéró homomorfizmus minden $U \neq V$ párra, és $\rho_{UU} = Id_G$. Ekkor az asszociált kéve $\tilde{\mathscr{S}}$ a zérókéve (minden direkt limes 0, hisz a homomorfizmusok mind nullák), melynek szelései is azonosan nullák, így az asszociált előkévére $\mathscr{S}_U = \Gamma(U, \tilde{\mathscr{S}}) = 0 \neq G\ \forall U$.

Elég jó feltételt tudunk viszont szabni, hogy ez az elfajult eset ne állhasson elő:

1.2.3. Definíció (Teljes előkéve)**.** *Egy M feletti $(\mathscr{S}_U, \rho_{VU})$ előkévét* teljesnek *nevezünk, ha*

(i) Ha $U, U_j \subseteq M$ nyílt halmazok, $U \subseteq \bigcup U_j$ nyílt fedés és az $f \in \mathscr{S}_U$ elemre teljesül, hogy $\rho_{U_jU}(f) = 0\ \forall j$, akkor $f = 0$.

(ii) Ha $U, U_j \subseteq M$ nyílt halmazok, $U \subseteq \bigcup U_j$ nyílt fedés és az $f_j \in \mathscr{S}_{U_j}$ elemekre teljesül, hogy $\rho_{U_j \cap U_k, U_j}(f_j) = \rho_{U_j \cap U_k, U_k}(f_k)\ \forall j, k$, akkor $\exists f \in \mathscr{S}_U$ melyre $\rho_{U_jU}(f) = f_j\ \forall j$.

1.2.4. Tétel. *Egy előkéve pontosan akkor egy kévéhez asszociált előkéve, ha teljes.*

Ebből következik, hogy a $\{\mathscr{S}_U\}$ teljes előkévéhez asszociált $\mathscr{S}$ kévére újból elvégezve a konstrukciót visszakapjuk $\{\mathscr{S}_U\}$-t, hisz az "egyszerű irány" következtében a $\{\mathscr{S}_U\}$-t asszociáló kéve csakis $\mathscr{S}$ lehet.

Bizonyítás. A szelésekre igaz mindkét feltétel, tehát egy asszociált előkéve tényleg teljes.

Legyen $(\mathscr{S}_U, \rho_{VU})$ teljes előkéve M felett, $\tilde{\mathscr{S}}$ a hozzá asszociált kéve. Ha $U \subseteq M$ nyílt halmaz, létezik egy természetes homomorfizmus $\hat{\rho}_U : \mathscr{S}_U \to \Gamma(U, \tilde{\mathscr{S}})$, ami $f_U \in \mathscr{S}_U$ elemhez azt a szelést rendeli, aminek képe az előző bizonyításbeli $\rho(f_U)$ nyílt halmaz (báziselem). Be kell látnunk, hogy $\hat{\rho}$ izomorfizmus.

Injektív: Tegyük fel, hogy $\hat{\rho}_U(f_U) = 0$, azaz $\forall Z \in U\ \rho_{ZU}(f_U) = 0 \in \tilde{\mathscr{S}}_Z$, ami a direkt limes definíciója szerint azt jelenti, hogy $\exists U_Z \subseteq U$ környezete Z-nek, melyre

$\rho_{U_Z U}(f_U) = 0$. Az U_Z környezetek egy részhalmaza U nyílt fedését adja, így az (i) tulajdonság miatt $f_U = 0$.

Szürjektív: Legyen $\tilde{f} \in \Gamma(U, \tilde{\mathscr{S}})$. Mint láttuk a szelések nyílt leképezések, így $\tilde{f}$ képe előáll báziselemek uniójaként, azaz tetszőleges $Z \in U$ alkalmas U_Z környezetére $\tilde{f}(U_Z) = \rho(f_{U_Z})$. Tehát egy U_j részfedéshez léteznek $f_j = f_{U_j}$ elemek az előkévében, melyekre $\hat{\rho}_{U_j \cap U_k}(\rho_{U_j \cap U_k, U_j}(f_j)) = \hat{\rho}_{U_j \cap U_k}(\rho_{U_j \cap U_k, U_k}(f_k))$ (azaz f_j és f_k metszetre való megszorításához $\hat{\rho}$ ugyanazt az elemet rendeli a szelések között, mégpedig az adott báziselemet). De ez $\hat{\rho}$ injektivitása alapján implikálja, hogy $\rho_{U_j \cap U_k, U_j}(f_j) = \rho_{U_j \cap U_k, U_k}(f_k)$ és így a (ii) feltétel miatt $\exists f_U \in \mathscr{S}_U$ melyre $\rho_{U_j U} = f_j$, azaz $\hat{\rho}(f_U) = \tilde{f}$. $\square$

Természetesen az előkévéken is értelmezhetjük a homomorfizmusokat.

1.2.5. Definíció (Előkéve-homomorfizmus). *Egy előkéve-homomorfizmus, $\phi : (\mathscr{R}_U, \rho_{VU}) \to (\mathscr{S}_U, \sigma_{VU})$, két előkéve között definíció szerint $\phi_U : \mathscr{R}_U \to \mathscr{S}_U$ csoporthomomorfizmusok összessége, amennyiben ezek kommutálnak a megszorításokkal, azaz $\phi_V \circ \rho_{VU} = \sigma_{VU} \circ \phi_U$ ha $V \subseteq U$. ϕ izomorfizmus, ha minden ϕ_U izomorfizmus.*

1.2.6. Definíció. *Legyen $(\mathscr{S}_U, \sigma_{VU})$ előkéve. Ha $\forall U$ nyílt halmazra $\mathscr{R}_U$ részcsoport $\mathscr{S}_U$-ban és $\sigma_{VU}(\mathscr{R}_U) \subseteq \mathscr{R}_V$, minden $V \subseteq U$ esetén, akkor $(\mathscr{R}_U, \sigma_{VU})$ is előkéve, az úgynevezett* rész-előkéve. *A részcsoportok beágyazásainak összessége előkéve-homomorfizmust definiál.*

Egy előkéve-homomorfizmus esetén az egyes tag-homomorfizmusok magjainak és képeinek összessége rész-előkévéket definiál a megfelelő előkévékben. Ezeket továbbra is magnak *és* képnek *nevezzük. (Az hogy ezek tényleg előkévék annak köszönhető, hogy az előkéve-homomorfizmus tagjai és a megszorítások felcserélhetőek).*

A szokásos módon definiálhatóak az exakt sorok is, és az injektivitás, szürjektivitás, izomorfizmus exakt sorokkal való jellemzése is fennál.

Mielőtt rátérnénk a hasznos példák bevezetésére, vizsgáljuk még meg az előkéve-homomorfizmusok és kévehomomrfizmusok kapcsolatát. Mint látni fogjuk, az operáció mely előkévékhez asszociálja a megfelelő kévéket exakt funktorként viselkedik, a fordított irány azonban csak balexakt lesz.

1.2.7. Tétel. *A $\phi : (\mathscr{R}_u, \rho_{VU}) \to (\mathscr{S}_U, \sigma_{VU})$ előkéve-homomorfizmus az asszociált kévék között egy $\phi^* : \tilde{\mathscr{R}} \to \tilde{\mathscr{S}}$ kévehomomorfizmust indukál. $Id^*_{(\mathscr{S}_U, \sigma_{VU})} = Id_{\mathscr{S}}$, $(\psi \circ \phi)^* = \psi^* \circ \phi^*$ és előkévék exakt sora esetén az asszociált kévék is exakt sort alkotnak, azaz*

$$0 \longrightarrow (\mathscr{R}_u, \rho_{VU}) \xrightarrow{\phi} (\mathscr{S}_U, \sigma_{VU}) \xrightarrow{\psi} (\mathscr{T}_U, \tau_{VU}) \longrightarrow 0 \quad \textit{exakt esetén}$$

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathscr{R}} \xrightarrow{\phi^*} \tilde{\mathscr{S}} \xrightarrow{\psi^*} \tilde{\mathscr{T}} \longrightarrow 0 \quad \textit{is exakt.}$$

Bizonyítás. Az állítás minden része következik abból, hogy a direkt limes exakt funktor. Elemibb és részletesebb bizonyítás olvasható például [7] A.9-es állítása után. □

1.2.8. Tétel. *M feletti kévék* $0 \longrightarrow \mathscr{R} \xrightarrow{\phi} \mathscr{S} \xrightarrow{\psi} \mathscr{T} \longrightarrow 0$ *rövid exakt sorához tetszőleges* $X \subseteq M$ *esetén létezik az* X *feletti széléseknek következő exakt sora:* $0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{R}) \xrightarrow{\phi^*} \Gamma(X, \mathscr{S}) \xrightarrow{\psi^*} \Gamma(X, \mathscr{T})$, ψ^* *azonban nem feltétlen szürjektív.*

Megjegyzés: Annak vizsgálata, hogy a létrejövő sor mikor rövid exakt a kohomologikus megközelítés egyik fő témája és motivációja.

Bizonyítás. Tekintsünk a rövid exakt sorra, mint egy beágyazás és egy faktorizálás egymásutánjára. Ekkor világos, hogy a ϕ beágyazás indukál egy injektív ϕ^* leképezést a széléseken, valamint hogy ennek képe pontosan a faktorizálás által indukált ψ^* által nullába vitt szélések halmaza.

Vegyük az M összefüggő sokaság feletti $\mathbb{C}$ triviális kévét, és ebben az $\mathscr{R}$ részkévét, amelyet a következőképp definiálunk: $A \neq B \in M$

$$\mathscr{R}_Z = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{ha } Z \neq A,\ Z \neq B \\ 0 & \text{ha } Z = A \text{ vagy } Z = B. \end{cases}$$

Ekkor a $\mathscr{T} = \mathbb{C}/\mathscr{R}$ faktort a

$$\mathscr{T}_Z = \begin{cases} 0 & \text{ha } Z \neq A,\ Z \neq B \\ \mathbb{C} & \text{ha } Z = A \text{ vagy } Z = B \end{cases}$$

képlet írja le, melynek szélései tetszőleges, akár különböző értékeket vehetnek fel az A, B pontokban. Ezzel szemben, mint az 1.1.3 példában láttuk $\mathbb{C}$ szélései konstansok, így a $\Gamma(M, \mathbb{C}) \to \Gamma(M, \mathscr{T})$ leképezés nem lehet szürjektív. □

1.2.9. Megjegyzés. Utolsó pontként jegyezzük meg, hogy teljes előkévék közötti előkéve-homomorfizmus magja is teljes előkéve, a kép viszont nem feltétlen az. Ez utóbbit mutatja az előző példa is: Egy-egy $M \setminus A$ és $M \setminus B$ fölötti szelés faktorizációnál vett képe azonosan nulla a metszeten, $M \setminus \{A, B\}$-n, de felvehet eltérő értéket A-ban és B-ben. Így azon szelés, melynek megszorítása ezeket adja nem lehet a faktorizáció által a széléseken indukált leképezés képében.

1.3. Példák

1.3.1. Példa (Folytonos függvénycsírák kévéje)**.** Legyen M tetszőleges topologikus tér, és vegyük ezen az előkévét, melyben $\mathscr{C}_U = C(U, \mathbb{C})$, az U fölötti folytonos, komplex értékű függvények halmaza (Abel csoportja/algebrája/...), és ρ_{VU} a klasszikus megszorítás. Ez nyilván egy teljes előkéve, és a $\mathscr{C}$ asszociált kévét az M feletti *folytonos függvénycsírák kévéjének* nevezzük. A név elég természetes, hisz a $\mathscr{C}_Z$ szár a Z-beli folytonos függvénycsírákból áll. Teljes előkévéről lévén szó, a $\mathscr{C}_U = \Gamma(U, \mathscr{C})$ azonosítás természetesen adódik.

1.3.2. Példa (Holomorf függvénycsírák kévéje)**.** Legyen most V egy holomorf sokaság, vagy általánosabban egy holomorf varietás (lsd. F.3). Efölött definiálhatjuk $\mathscr{O}$-t, a *holomorf függvénycsírák kévéjét*, mint a nyílt halmazok feletti holomorf függvényeknek a megszorításokkal alkotott teljes előkévéjéhez asszociált kévét. Ez megint tekinthető akár algebra-kévének is, valamint a $\mathscr{O}_U = \Gamma(U, \mathscr{O})$ itt is fennáll.

1.3.3. Példa (Differenciálformák csíráinak kévéje)**.** Legyen M egy n-dimenziós differenciálható sokaság, és az U nyílt halmazokhoz rendeljük az r-edfokú C^∞ differenciálformák $\mathscr{E}_U^r$ halmazait, és legyen ρ ismét a megszorítás. Ekkor minden r-re kapunk egy-egy teljes előkévét, így egy-egy $\mathscr{E}^r$ asszociált kévét, a C^∞ *differenciálformák csíráinak kévéit.* $r = 0$ esetén megkapjuk a sima függvénycsírák $\mathscr{E}$ kévéjét, $r > n$ esetén pedig $\mathscr{E}^r = 0$. Tekinthetjük ekkor továbbá a $d : \mathscr{E}_U^r \to \mathscr{E}_U^{r+1}$ külső deriválásokat is, melyek összessége – mivel felcserélhetőek a megszorítással – egy előkéve-homomorfizmust alkot. Ennek indukált leképezése a $d : \mathscr{E}^r \to \mathscr{E}^{r+1}$ kévehomomorfizmus.

A Poincaré-lemma (F.5) alapján lokálisan minden zárt differenciálforma exakt, azaz ha $df = 0$, akkor $\exists g$, melyre $dg = f$. Továbbá a $d : \mathscr{E}^0 \to \mathscr{E}^1$ leképezés – ami megfeleltethető a klasszikus deriválásnak – magja $\mathbb{R}$. Ezt a két információt foglalja össze a következő exakt sor:

1.3.4. Definíció (Differenciálforma-csírák kévéjének deRham exakt sora)**.**

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}^0 \xrightarrow{d} \mathscr{E}^1 \xrightarrow{d} \mathscr{E}^2 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathscr{E}^n \xrightarrow{d} 0.$$

Megjegyzés: Az előbbi példa értelmezhető komplex értékű differenciálformák esetén is, ekkor $\mathbb{R}$ helyét értelemszerűen $\mathbb{C}$ váltja ki. Ekkor azonban tovább is mehetünk:

1.3.5. Példa (Komplex differenciálformák, kettős fokú felbontás)**.** Komplex sokaság feletti komplex értékű differenciálformák esetén a közismert dz és $d\bar{z}$ felbontást használva $p + q = r$ esetén definiálhatjuk az $\mathscr{E}^{p,q} \subseteq \mathscr{E}^r$ részkévéket, ezeket C^∞ *komplex (p,q) bifokú (bidegree) differenciálforma-csírák kévéinek* nevezzük. Továbbá a külső deriválás is felbontható $d = \partial + \bar{\partial}$ homomorfizmusokra, ahol $\partial : \mathscr{E}^{p,q} \to \mathscr{E}^{p+1,q}$, illetve $\bar{\partial} : \mathscr{E}^{p,q} \to \mathscr{E}^{p,q+1}$. A definíciókból adódóan a $\bar{\partial} : \mathscr{E}^{p,0} \to \mathscr{E}^{p,1}$ leképezések magja a megfelelő *holomorf p-formák csíráinak* kévéje, $\mathscr{O}^{p,0}$, speciálisan $p = 0$ esetén megkapjuk az 1.3.2 példa objektumát. Dolbeault-lemmájából (F.6) adódóan definiálható a következő exakt sor:

1.3.6. Definíció ((p, q)-differenciálforma-csírák kévéjének Dolbeault exakt sora)**.** *Tetszőleges $0 \leq p \leq n$ esetén a következő sor exakt*

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}^{p,0} \longrightarrow \mathscr{E}^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{E}^{p,2} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{E}^{p,3} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{E}^{p,n} \xrightarrow{\bar{\partial}} 0.$$

1.4. Megjegyzés a formalizmusról

A klasszikus irodalom nagy része (például [8], [4]) kicsit máshogy használja az alapfogalmakat. Ezekben a művekben a kéve definíciója megegyezik az általam felírt teljes előkévék definíciójával, és az én topologikus kéve-objektumom ott a kéve étaléterekeként van bevezetve. Az 1.2.4 tételben megfogalmazott 1-az-1-hez hozzárendelés alapján a két kéve-fogalom megfeleltethető egymásnak, és mindkettőnek vannak előnyei és hátrányai is.

Bár az általam használt definíció sokszor technikaibb, a direkt limes alaptulajdonságait felhasználó érveléseket igényel, a faktorkéve kezeléséhez sokkal természetesebb eszközt nyújt. Mint korábban már említettem, teljes előkévék faktora nem feltétlen teljes, így a klasszikus definíciókkal két kéve naív faktora nem kéve, csak előkéve. A tényleges faktorkéve megalkotásához ebben az esetben is át kell térni a szárak vizsgálatára, vagy más megközelítéssel az előkévék kévésítéséhez kell folyamodnunk. Ez az én formalizmusommal automatikusan adódik.

Álljon itt még két példa arra az állításra, hogy teljes előkévék faktora nem teljes. Mindkét esetben a terünk az $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ körvonal lesz, vegyük ennek továbbá az U_1, U_2 nyílt halmazokkal való fedését, ahol a körívet radiánban paraméterezve $U_1 = (-\epsilon, \pi + \epsilon)$ és $U_2 = (\pi - \epsilon, 2\pi + \epsilon)$.

Példa: Tekintsük S^1-en a sima függvények $\{\mathscr{C}_U^\infty\}$ előkévéjét, mely nyilvánvalóan teljes, és ebben a konstans egész értékű függvények szintén teljes $\{\mathbb{Z}_U\}$ rész-előkévéjét. Tekintsük továbbá az $f_1 \in \mathscr{C}_{U_1}^\infty$ függvényt, ami a $(-\epsilon, \pi/3)$ intervallumon nulla, a $(2\pi/3, \pi + \epsilon)$ intervallumon azonosan 1, és a kettő között sima, valamint az $0 = f_2 \in \mathscr{C}_{U_2}^\infty$ azonosan nulla függvényt.

Ezek $\{\mathscr{C}_U^\infty\}\big/\{\mathbb{Z}_U\}$ faktor-beli osztályaira teljesül, hogy $[f_1]|_{U_1 \cap U_2} = [f_2]|_{U_1 \cap U_2} = 0$, de nem létezik olyan, a teljes S^1-en értelmezett sima függvény, melyet modulo 1 nézve az U_i halmazon $[f_i]$-t kapnánk ($i = 1, 2$).

Tehát $\{\mathscr{C}_U^\infty\}\big/\{\mathbb{Z}_U\}$ megsérti a teljes előkévék (ii) feltételét, így nem teljes előkéve, azaz a klasszikus definíciót használva nem kéve.

Példa: Most vegyük S^1-en az $\{\Omega_U^1\}$ előkévét, melyben Ω_U^1 az U-n értelmezett sima 1-formák tere. Ezzel $\{\Omega_U^1\}$ teljes, továbbá a d külső deriválás $\{\mathscr{C}_U^\infty\}$ előkévén vett képe teljes rész-előkévéje. Ekkor az α szög paraméterrel értelmezett $d\alpha$ jóldefiniált 1-forma, ráadásul S^1 minden valódi nyílt részhalmazán – így U_1, U_2-n is – előáll, mint egy függvény deriváltja. Tehát az $\{\mathscr{F}_U\} = \{\Omega^1_U\}\Big/d\{\mathscr{C}^\infty_U\}$ előkévében $[d\alpha|_{U_1}] = 0 \in \mathscr{F}_{U_1}$ és $[d\alpha|_{U_2}] = 0 \in \mathscr{F}_{U_2}$, de a szöget globálisan leíró sima függvény híjján $[d\alpha] \neq 0 \in \mathscr{F}_{S^1}$. Ez ellentmond a teljes előkévék (i) feltételének, tehát a faktor ismét nem kéve.

Én kéve alatt a dolgozatban következetesen az 1.1.1 definícióban bevezetett objektumot értem.

2. Homologikus alapok

2.1. Elemi eszközök

A további vizsgálódáshoz szükségünk lesz a (ko)homológiaelmélet alapjaira, sőt a spektrális sorok elméletére is. Ezek alapvetően tisztán algebrai szemlélettel megközelíthető témák, objektumaik általában modulusok. Mivel a bevezetés része az egyetemi törzsanyagnak, ebben a fejezetben nem fogok mindent részletesen kifejteni, és a bizonyítások egy részére is csak hivatkozok más könyvekből. Mivel a dolgozatban később kohomológiaelméletet használok, és algebrailag is természetesebb, itt ezt vezetem be – a számomra topológiai megközelítésből kézenfekvőbb homológiaelmélet helyett.

2.1.1. Definíció (Kolánc-komplexus, kohomológia modulus)**.** Kolánc-komplexusnak *nevezzük R-modulusok és modulus-homomorfizmusok* $A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} A^2 \xrightarrow{d} \cdots$ *sorozatát, amennyiben* $d \circ d = 0$*. Ezt a kolánc-komplexust A-val, vagy* A^**-gal jelöljük, d-t néha kohatár-leképezésnek hívjuk.*

Az ehhez tartozó n-edik kohomológia-modulus $H^n(A^*) := \{x \in A^n : dx = 0\}/dA^{n-1}$*, azaz "*$\ker d/\operatorname{Im} d$*". (A* H^0 *modulus* $\{x \in A^0 : dx = 0\}$*-ra egyszerűsödik).*

Megjegyzés: A homológiaelmélet algebrailag lényegében annyiban különbözik, hogy a lánckomplexusokban csökkenő indexekkel szerepelnek a modulusok. Szemléletesen nézve a (ko)homológiák azt mérik, hogy a megfelelő (ko)láncok mennyire nem exaktak.

2.1.2. Definíció (Kolánchomomorfizmusok)**.** *Legyen A, B két kolánc-komplexus (ugyanazon gyűrű feletti modulusokból). Egy kolánc-homomorfizmus* $\phi : A \to B$ *definíció szerint* $\phi_n : A^n \to B^n$ *modulushomomorfizmusok gyűjteménye, melyre* $d \circ \phi_n = \phi_{n+1} \circ d$*, azaz* ϕ *tagjai kommutálnak a kohatár-leképezéssel.*

Továbbá a kohomológia funktoriális a {kolánc-komplexusok, kolánc-homomorfizmusok} kategóriájában, azaz $\phi : A \to B$ *kolánc-homomorfizmus* $\forall n$*-re indukál* $\phi_n^* : H^n(A^*) \to H^n(B^*)$ *homomorfizmusokat, és* $(Id_A)^* = Id_{H^n(A^*)}$*,* $(\psi \circ \phi)^* = \psi^* \circ \phi^*$*.*

A szokásos módon definiálható kolánc-komplexusok *exakt sora*: Minden n-re a tagok sora legyen exakt. Tehát egy rövid exakt sorozat például az alábbi kommutatív diagrammal ábrázolható:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & A^{n-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\phi_{n-1}"'] & A^n \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\phi_n"'] & A^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{n-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\psi_{n-1}"'] & B^n \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\psi_n"'] & B^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d] & C^n \arrow[r, "d"] \arrow[d] & C^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

ahol az oszlopok exaktak.

2.1.3. Tétel. *Kolánc-komplexusok* $0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{\phi} B^* \xrightarrow{\psi} C^* \longrightarrow 0$ *rövid exakt sorához létezik a kohomológia-modulusok következő exakt sora:*

$$
0 \longrightarrow H^0(A^*) \xrightarrow{\phi_0^*} H^0(B^*) \xrightarrow{\psi_0^*} H^0(C^*) \xrightarrow{\delta} H^1(A^*) \xrightarrow{\phi_1^*} \cdots
$$
$$
\cdots \xrightarrow{\phi_n^*} H^n(B^*) \xrightarrow{\psi_n^*} H^n(C^*) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A^*) \xrightarrow{\phi_{n+1}^*} \cdots
$$

Bizonyítás. Mivel az állítás általában része az egyetemi kerettantervnek, itt nem részletezem a bizonyítást. A módszer egyszerű diagramvadászat, elolvasható például itt: [7] C.4-es állítás. □

2.2. Spektrális sorozatok

Rá is térhetünk a kevésbé elemi fogalmak megtárgyalására. Főbb eszközeink a filtrálások, kettős komplexusok és a spektrális sorozatok elmélete lesznek.

2.2.1. Definíció (Filtrálás, gradált modulus)**.** *Az A R-modulus egy* (leszálló) filtrálásán (descending filtration) *az $F^pA \subseteq A$ részmodulusok családját értjük, amennyiben $F^{p+1}A \subseteq F^pA$ teljesül.*

Az ehhez rendelt gradált modulus (graded module) *$E(A)$ a tagok faktorainak direktösszege, azaz $E(A) = \sum_p E^p = \sum_p F^{p+1}A/F^pA$.*

A filtrálás véges, *ha $\exists m, M \in \mathbb{Z}$ amelyre $F^pA = A$ és $F^qA = 0$ $\forall p \leq m \leq M \leq q$ esetén. Ekkor az $E(A)$ direktösszeg véges.*

Megjegyzés: Az $E(A)$ gradált modulusra gondolhatunk mint A-nak egy leegyszerűsített verziója. Információt tartalmaz A bizonyos részeiről, de a bővítéseket triviálisra cseréli.

2.2.2. Definíció (Kolánc-komplexus filtrálása). *Az (A, d) komplexus filtrálása az A^n modulusok filtrálásából tevődik össze, amennyiben $d(F^p A^n) \subseteq F^p A^{n+1}$.*

A filtrálás véges, ha $\forall n$-re az.

2.2.3. Megjegyzés. Egy kolánc-komplexus filtrálása természetes módon filtrálást indukál a kohomológia-modulusokon is. Ennek konstrukciójához a következő észrevételeket kell tenni:

Rögzített p esetén az $\{F^p A^n\}_n$ sorozat kolánc-komplexust alkot, így definiálhatóak a $H^n(F^p A^*)$ kohomológia-modulusok.

Az $i_p : F^p A^n \to A^n$ beágyazások kolánc-homomorfizmust alkotnak, így indukálnak $i_p^* : H^n(F^p A^*) \to H^n(A^*)$ leképezéseket. Legyenek ezeknek képei a $H^n(A^*)$ filtrálásának tagjai, azaz $F^p H^n(A^*) := i_p^*(H^n(F^p A^*)) \subseteq H^n(A^*)$.

Az $i_{p,p+1} : F^{p+1} A^n \to F^p A^n$ beágyazások is kolánc-homomorfizmust alkotnak, ráadásul $i_p \circ i_{p,p+1} = i_{p+1}$, így az indukált $i_{p,p+1}^* : H^n(F^{p+1} A^*) \to H^n(F^p A^*)$ leképezésekre igaz, hogy $i_p^* \circ i_{p,p+1}^* = i_{p+1}^*$. Ezáltal tényleg $F^{p+1} H^n(A^*) \subseteq F^p H^n(A^*)$.

2.2.4. Definíció (Kohomológiákon indukált filtrálás). *A fenti $\{F^p H^n(A^*)\}_p$ filtrálás a $H^n(A^*)$-n* indukált filtrálás.

Az asszociált gradált modulusok kohomológiái és az eredeti gradálás közötti kapcsolatot a spektrális sorozatok írják le:

2.2.5. Definíció (Spektrális sorozat). *Az E_k* spektrális sorozat *elemei az $E_r^{p,q}$, $p, q, r \in \mathbb{Z}$, $p \geq k$ modulusokból, és a köztük menő $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ homomorfizmusokból állnak, melyre $d_r \circ d_r = 0$ és $E_{r+1}^{p,q} = \{x \in E_r^{p,q} : d_r x = 0\} / d_r E_r^{p-r,q+r-1}$ (azaz az $E_{r+1}^{p,q}$ modulusok a megfelelő indexű elemekből álló kolánc-komplexus kohomológia-modulusai).*

A spektrális sorozat konvergens*, ha $\forall p, q\ \exists M = M(p, q)$ melyre $E_M^{p,q} \cong E_{M+1}^{p,q} \cong \cdots$. Ekkor az $E_\infty^{p,q} := E_M^{p,q}$ modulust a spektrális sorozat* limesének *nevezzük.*

Sokat segít a megértésben az alábbi diagram, ami példaképp az $E_3^{*,*}$ tagokat mutatja be (az átláthatóság kedvéért csak pár d_3 leképezést rajzolok be, nyilván minden tagból indul, és mindbe érkezik pontosan egy):

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & E_3^{0,2} \arrow[rrrdd, dotted, "d_3"] & E_3^{1,2} & E_3^{2,2} & E_3^{3,2} \arrow[rrrdd, dotted, "d_3"] & E_3^{4,2} & E_3^{5,2} & E_3^{6,2} & \cdots \\
\cdots & E_3^{0,1} & E_3^{1,1} & E_3^{2,1} & E_3^{3,1} & E_3^{4,1} & E_3^{5,1} & E_3^{6,1} & \cdots \\
\cdots & E_3^{0,0} \arrow[rrrdd, dotted, "d_3"] & E_3^{1,0} & E_3^{2,0} & E_3^{3,0} \arrow[rrrdd, dotted, "d_3"] & E_3^{4,0} & E_3^{5,0} & E_3^{6,0} & \cdots \\
\cdots & E_3^{0,-1} & E_3^{1,-1} & E_3^{2,-1} & E_3^{3,-1} & E_3^{4,-1} & E_3^{5,-1} & E_3^{6,-1} & \cdots \\
\cdots & E_3^{0,-2} & E_3^{1,-2} & E_3^{2,-2} & E_3^{3,-2} & E_3^{4,-2} & E_3^{5,-2} & E_3^{6,-2} & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

2.2.6. Tétel. *Az (A, d) kolánc-komplexus tetszőleges véges filtrálásához létezik egy természetes módon indukált E_0 konvergens spektrális sorozat, melynek $E_r^{p,q}(A)$ tagjaira fennáll $E_0^{p,q} = F^pA^{p+q}/F^{p+1}A^{p+q}$ és $E_\infty^{p,q} = F^pH^{p+q}(A^*)/F^{p+1}H^{p+q}(A^*)$.*

Bizonyítás. A bizonyítás meglehetősen technikai, így itt csak a főbb ötletet írom le. A teljes bizonyítás megtalálható például [7] C.8-as tételében.

Definiáljuk a következő modulusokat:

$$\begin{aligned}
Z_r^{p,q}(A) &:= \{x \in F^pA^{p+q} : dx \in F^{p+r}A^{p+q+1}\} \\
B_r^{p,q}(A) &:= F^pA^{p+q} \cap dF^{p-r}A^{p+q-1} \\
E_r^{p,q}(A) &:= \{Z_r^{p,q}(A) + F^{p+1}A^{p+q}\}/\{B_{r-1}^{p,q}(A) + F^{p+1}A^{p+q}\}.
\end{aligned}$$

Ekkor felhasználva, hogy

$$\begin{aligned}
dF^pA^{p+q-1} = B_0^{p,q}(A) \subseteq \cdots \subseteq B_n^{p,q}(A) \subseteq B_{n+1}^{p,q}(A) \subseteq \cdots \subseteq B_\infty^{p,q}(A) \subseteq \\
\subseteq Z_\infty^{p,q}(A) \subseteq \cdots \subseteq Z_{n+1}^{p,q}(A) \subseteq Z_n^{p,q}(A) \subseteq \cdots \subseteq Z_0^{p,q}(A) = F^pA^{p+q}
\end{aligned}$$

megkapjuk az állítást. $\square$

2.2.7. Megjegyzés. A spektrális sorozat első tagja definíció szerint $E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^pA^*/F^{p+1}A^*)$.

A második tagot kicsit jobban megvizsgálva adódik, hogy a megfelelő $E_2^{p,q}$ modulusok a $(\{H^{p+q}(F^pA^*/F^{p+1}A^*)\}_p, \delta)$ kolánc-komplexus kohomológia modulusainak felelnek meg, ahol $\delta : H^n(F^pA^*/F^{p+1}A^*) \to H^{n+1}(F^{p+1}A^*/F^{p+2}A^*)$ a

$$0 \to F^{p+1}A^n/F^{p+2}A^n \to F^pA^n/F^{p+2}A^n \to F^pA^n/F^{p+1}A^n \to 0$$

rövid exakt sorozathoz tartozó koholomogikus hosszú exakt sorozat átkötő leképezése.

Megjegyzés: Filtrált komplexusok között is értelmezhetőek a homomorfizmusok (amennyiben $\phi_n(F^pA^n) \subseteq F^pB^n$), és ezek a fenti spektrális sorozat $E_r^{p,q}$ tagjain a d_r leképezéssel kompatibilis homomorfizmusokat indukálnak.

Filtrálás leggyakrabban az úgynevezett kettős komplexusokkal kapcsolatban fordul elő, és ebben a dolgozatban is ez lesz a legfontosabb alkalmazásuk.

2.2.8. Definíció (Kettős komplexus)**.** Kettős kolánc komplexusnak (double cochain complex) *nevezzük* $A^{p,q}$ *R-modulusok családját* $(p,q \geq 0)$ *a* $\partial : A^{p,q} \to A^{p+1,q}$ *és a* $\bar{\partial} : A^{p,q} \to A^{p,q+1}$ *leképezésekkel, amennyiben* (i) $\partial\partial = 0$*,* (ii) $\bar{\partial}\bar{\partial} = 0$ *és* (iii) $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$*.*

Ismét egy diagram mutatja be legjobban a helyzetet:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\uparrow{\scriptstyle\partial} & & \uparrow{\scriptstyle\partial} & & \uparrow{\scriptstyle\partial} & & \uparrow{\scriptstyle\partial} & & \\
A^{2,0} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & A^{2,1} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & A^{2,2} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & A^{2,3} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \cdots \\
\uparrow{\scriptstyle\partial} & & \uparrow{\scriptstyle\partial} & & \uparrow{\scriptstyle\partial} & & \uparrow{\scriptstyle\partial} & & \\
A^{1,0} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & A^{1,1} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & A^{1,2} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & A^{1,3} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \cdots \\
\uparrow{\scriptstyle\partial} & & \uparrow{\scriptstyle\partial} & & \uparrow{\scriptstyle\partial} & & \uparrow{\scriptstyle\partial} & & \\
A^{0,0} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & A^{0,1} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & A^{0,2} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & A^{0,3} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \cdots
\end{array}$$

Itt a sorok (oszlopok) klasszikus értelemben kolánc-komplexusokat alkotnak, így vehetjük a kohomológia modulusaikat, melyeket a kohatár-leképezést hangsúlyozandó jelöljünk $H^q_{\bar{\partial}}(A^{p,*})$-vel $(H^p_{\partial}(A^{*,q}))$. Ekkor a (iii) alapján ∂-re ($\bar{\partial}$-re) tekinthetünk a sorok közötti kolánc-homomorfizmusnak, így a kohomológiákon indukálódik egy ∂^* ($\bar{\partial}^*$) leképezés, amivel $(H^q_{\bar{\partial}}(A^{p,*}), \partial^*)$ ismét kolánc-komplexus. Ennek kohomológiáiként adódnak a $H^p_{\partial}(H^q_{\bar{\partial}}(A^{*,*}))$ $(H^q_{\bar{\partial}}(H^p_{\partial}(A^{*,*})))$ modulusok.

Másrészt egy ilyen kettős komplexushoz asszociálhatunk egy sima kolánc-komplexust (az úgynevezett *totális komplexust*), ahol $A^n = \sum\limits_{p+q=n} A^{p,q}$, $d = \partial + \bar{\partial}$, kohomológiáit pedig $H^n_d(A^*)$ jelöli. Bevezethető ezen továbbá két természetes véges filtrálás ${}_1F^pA^n = \sum\limits_{i+j=n, i \geq p} A^{i,j}$ és ${}_2F^pA^n = \sum\limits_{i+j=n, j \geq p} A^{i,j}$.

Ekkor az asszociált gradált modulus tagjai ${}_1E^p(A^n) = {}_1F^pA^n / {}_1F^{p+1}A^n = A^{p,n-p}$ és ${}_2E^p(A^n) = A^{n-p,p}$, azaz lényegében visszakapjuk az eredeti modulusokat.

2.2.9. Tétel. *Tetszőleges* $(A^{p,q}, \partial, \bar\partial)$ *kettős komplexushoz létezik két természetesen asszociált konvergens* E_2 *spektrális sorozat* ${}_1E_r^{p,q}(A)$ *és* ${}_2E_r^{p,q}(A)$*, melyekre*

$$
\begin{array}{lll}
{}_1E_2^{p,q}(A) = H_\partial^p(H_{\bar\partial}^q(A^{*,*})) & {}_2E_2^{p,q}(A) = H_{\bar\partial}^p(H_\partial^q(A^{*,*})) & \textit{ha } p,q \geq 0 \\
{}_1E_2^{p,q}(A) = 0 & {}_2E_2^{p,q}(A) = 0 & \textit{ha } p \textit{ vagy } q < 0.
\end{array}
$$

És az A^n *komplexus kohomológiamodulusokon indukált filtrálására a gradált modulusok az* ${}_iE_2^{p,q}(A)$ *limestagokból épülnek fel:*

$$
{}_1E(H_d^n(A^*)) = \sum_{p+q=n} {}_1E_\infty^{p,q}(A) \quad {}_2E(H_d^n(A^*)) = \sum_{p+q=n} {}_2E_\infty^{p,q}(A)
$$

Bizonyítás. Az állítás következik a 2.2.6 tételből és a 2.2.7 megjegyzésből, bővebben lsd. [7] C.12. □

2.2.10. Következmény. Az előző jelölések mellett léteznek természetes homomorfizmusok ${}_iE_2^{p,0}(A) \twoheadrightarrow {}_iF^pH^p(A) \subseteq H^p(A^*)$. Ráadásul $p = 1$ esetén ezek a homomorfizmusok injektívek is, így ${}_iE_2^{1,0}(A) \cong {}_iF^1H^1(A)$.

Bizonyítás. Az előző spektrális sorozatot alaposabban megvizsgálva, és a 0 modulusokat figyelembe véve következik az állítás. □

2.2.11. Megjegyzés. Kettős komplexusokon is értelmezhetőek a homomorfizusok (a feltétel, hogy mindkét kohatár-leképezéssel kompatibilis legyen). Egy ilyen homomorfizmus homomorfizmusokat indukál a spektrális sor megfelelő tagjai között, melyek kompatibilisek a d_r leképezésekkel.

Ezek az állítások viszonylag nehezen használhatónak tűnnek, de elég "ritka" (azaz sok 0 modulust tartalmazó) spektrális sorozatoknál gyakran nagyon leegyszerűsödik a számolás. Az alkalmazások nagy részében előfordul például, hogy $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$.

3. Kéve-kohomológiák

3.1. A konstrukció

Most, hogy az alap definíciók, és az algebrai eszközök rendelkezésünkre állnak, rátérhetünk az igazán érdekes rész tárgyalására. Ez a fejezet a kéve-kohomológiák absztrakt elméletével fog foglalkozni, a következőkben pedig látni fogjuk, hogy kapcsolódnak ezek más kohomologikus módszerekhez.

Az algebrai topológiában többször előforduló eszköz, hogy egy objektumot "egyszerűbben kezelhetőekkel megközelítünk". Ilyen például egy modulus injektív, projektív illetve lapos feloldása, melyekből az Ext és Tor csoportokat származtatjuk. A kéve-kohomológiák (itt ismertetett) definíciója is ezen alapul, definiáljuk tehát egy kéve *kanonikus feloldását.* Kohomológiákat általában modulusokra számolunk, úgyhogy most tekintsünk egységelemes R-modulus kévéket.

Legyen $\mathscr{S}$ M feletti R-modulus kéve, és tetszőleges $U \subseteq M$ nyílt részhalmazhoz tekintsük a $\tilde{\Gamma}(U, \mathscr{S})$ R modulust, mely az U feletti nem feltétlen folytonos széléseket tartalmazza (azaz az összes olyan $f : U \to \mathscr{S}$ leképezést, melyre $\pi \circ f = Id_U$). Ezen modulusok összessége a megszorításokkal nyilvánvalóan teljes előkévét alkot M felett, jelöljük az ehhez asszociált kévét $\mathscr{A}^0(\mathscr{S})$-val. Ekkor a teljeség miatt $\Gamma(U, \mathscr{A}^0(\mathscr{S})) \cong \tilde{\Gamma}(U, \mathscr{S})$.

Továbbá a természetes $\Gamma(U, \mathscr{S}) \to \tilde{\Gamma}(U, \mathscr{S})$ beágyazások összessége injektív előkéve-homomorfizmust alkot, mely az 1.2.7 tétel szerint indukál egy szintén injektív $\mathscr{S} \to \mathscr{A}^0(\mathscr{S})$ beágyazást. A faktort $\mathscr{B}^1(\mathscr{S}) = \mathscr{A}^0(\mathscr{S})/\mathscr{S}$-ként jelölve kaptuk kévék következő rövid exakt sorát:

$$0 \longrightarrow \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{A}^0(\mathscr{S}) \longrightarrow \mathscr{B}^1(\mathscr{S}) \longrightarrow 0.$$

Ez a konstrukció megismételhető $\mathscr{S}$ helyére $\mathscr{B}^1(\mathscr{S})$-et téve, majd ezt iterálva adódnak $\forall n \in \mathbb{N}$-re

$$0 \longrightarrow \mathscr{B}^n(\mathscr{S}) \longrightarrow \mathscr{A}^n(\mathscr{S}) \longrightarrow \mathscr{B}^{n+1}(\mathscr{S}) \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

rövid exakt sorozatok. Itt $\mathscr{A}^n(\mathscr{S}) = \mathscr{A}^0(\mathscr{B}^n(\mathscr{S}))$, $\mathscr{B}^{n+1}(\mathscr{S}) = \mathscr{A}^n(\mathscr{S})/\mathscr{B}^n(\mathscr{S})$ és mint előbb $\Gamma(U, \mathscr{A}^n(\mathscr{S})) \cong \tilde{\Gamma}(U, \mathscr{B}^n(\mathscr{S}))$.

3.1.1. Definíció (Kanonikus feloldás)**.** *A 3.1 rövid exakt sorozatokat összetéve adódó*

$$0 \longrightarrow \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{A}^0(\mathscr{S}) \longrightarrow \mathscr{A}^1(\mathscr{S}) \longrightarrow \mathscr{A}^2(\mathscr{S}) \longrightarrow \cdots$$

hosszú exakt sor az $\mathscr{S}$ kanonikus vagy Godement feloldása (canonical resolution).

3.1.2. Megjegyzés. A nem feltétlen folytonos szelések nagy előnye, hogy exakt funktorként viselkednek. Azaz kévék rövid exakt sorához a tetszőleges nyílt halmaz feletti általános értelemben vett (azaz nem folytonos) szelések sora is rövid exakt lesz. Ehhez az 1.2.8 tételhez hasonlóan csak a 2. leképezés szürjektivitását kell belátni, ez pedig teljesül, hisz a faktor adott f szelésére minden $\mathscr{T}_Z$ száron függetlenül véve az $f(Z)$ elem egy reprezentánsát, kapunk egy általános szelést $\mathscr{S}$-ben.

Tekintve a kanonikus feloldás szeléseken indukált leképezéseit, az 1.2.8 tétel alapján kapjuk a következő sorozatot

$$\Gamma(M, \mathscr{A}^0(\mathscr{S})) \xrightarrow{d} \Gamma(M, \mathscr{A}^1(\mathscr{S})) \xrightarrow{d} \Gamma(M, \mathscr{A}^2(\mathscr{S})) \xrightarrow{d} \cdots, \tag{3.2}$$

mely bár nem exakt, egy kolánc-komplexus.

3.1.3. Definíció. *Az M tér $\mathscr{S}$ együtthatós kohomológiamodulusai, vagy kevésbé precízen az $\mathscr{S}$ kéve-kohomológiái, a 3.2 komplexus kohomológiái, azaz $H^n(M, \mathscr{S}) = H^n(\Gamma(M, \mathscr{A}^*(\mathscr{S})))$.*

3.1.4. Tétel. *A kéve-kohomológiákra érvényesek a következő állítások:*

(i) $H^0(M, \mathscr{S}) = \Gamma(M, \mathscr{S})$.

(ii) Funktoriális, azaz egy ϕ kévehomomorfizmus ϕ_n^* (vagy néha $H^n(\phi)$) homomorfizmusokat indukál a kohomológia modulusokon, és $Id^*_{\mathscr{S}} = Id_{H^n(M,\mathscr{S})}$, $(\psi \circ \phi)^* = \psi^* \circ \phi^*$.

(iii) Kévék tetszőleges rövid exakt sorához rendel a kohomológiáknak egy hosszú exakt sorát:

$$0 \longrightarrow \mathscr{R} \xrightarrow{\phi} \mathscr{S} \xrightarrow{\psi} \mathscr{T} \longrightarrow 0 \qquad \textit{esetén}$$
$$0 \longrightarrow H^0(M,\mathscr{R}) \xrightarrow{\phi_0^*} H^0(M,\mathscr{S}) \xrightarrow{\psi_0^*} H^0(M,\mathscr{T}) \xrightarrow{\delta} H^1(M,\mathscr{R}) \xrightarrow{\phi_1^*} \cdots \qquad \textit{exakt.}$$

Bizonyítás.

(i) $H^0(M, \mathscr{S}) = \{x \in \Gamma(M, \mathscr{A}^0(\mathscr{S})) : dx = 0\} = \Gamma(M, \mathscr{S})$.

(ii) A ϕ leképezés nyilvánvalóan tetszőleges U nyílt halmazra indukál $\tilde{\phi}_U : \tilde{\Gamma}(U, \mathscr{R}) \to \tilde{\Gamma}(U, \mathscr{S})$ homomorfizmusokat, ezek összessége pedig előkéve-homomorfizmust alkot. Az asszociált kévéken indukálódik tehát egy $\phi_0 : \mathscr{A}^0(\mathscr{R}) \to \mathscr{A}^0(\mathscr{S})$ kévehomomorfizmus, melyre $\phi_0|_{\mathscr{R}} = \phi$ (ami értelmes, hisz $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{A}^0(\mathscr{R})$). Vehetjük tehát a $\phi_1' : \mathscr{B}^1(\mathscr{R}) \to \mathscr{B}^1(\mathscr{S})$ faktorizált leképezést mely $\mathscr{B}^1(\mathscr{R}) \ni [f] = f + x$ elemhez ($f \in \mathscr{A}^0(\mathscr{R})$, $x \in \mathscr{R}$) a $\phi_1'([f]) = [\phi_0(f) + \phi(x)] = [\phi_0(f)] \in \mathscr{B}^1(\mathscr{S})$ elemet rendeli.

Az eljárást ϕ_1'-re iterálva kapunk $\forall n$-re $\phi_n : \mathscr{A}^n(\mathscr{R}) \to \mathscr{A}^n(\mathscr{S})$ leképezéseket, melyekre a következő diagram kommutatív

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{R} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & \mathscr{A}^0(\mathscr{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_0"'] & \mathscr{A}^1(\mathscr{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_1"'] & \mathscr{A}^2(\mathscr{R}) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_2"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathscr{S} \arrow[r] & \mathscr{A}^0(\mathscr{S}) \arrow[r] & \mathscr{A}^1(\mathscr{S}) \arrow[r] & \mathscr{A}^2(\mathscr{S}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Így a globális széleseken indukált $\phi_n^* : \Gamma(M, \mathscr{A}^n(\mathscr{R})) \to \Gamma(M, \mathscr{A}^n(\mathscr{S}))$ homomorfizusok kolánc-homomorfizmust alkotnak, így az algebrai elmélet szerint értelmezhetőek az ezáltal a kohomológiákon indukált $H^n(\phi)$ leképezések a megfelelő tulajdonságokkal.

(iii) A 3.1.2 megjegyzésben kifejtettek alapján a rövid exakt sor az általános szelések modulusain is rövid exakt sorokat indukál, melyek együtt előkéve-homomorfizmusok rövid exakt sorát adják. Az asszociált kévéken ez továbbá is exakt sorokat indukál 1.2.7 szerint, azaz

$$0 \longrightarrow \mathscr{A}^0(\mathscr{R}) \xrightarrow{\phi_0} \mathscr{A}^0(\mathscr{S}) \xrightarrow{\psi_0} \mathscr{A}^0(\mathscr{T}) \longrightarrow 0 \qquad \text{illetve iteráció után}$$
$$0 \longrightarrow \mathscr{A}^n(\mathscr{R}) \xrightarrow{\phi_n} \mathscr{A}^n(\mathscr{S}) \xrightarrow{\psi_n} \mathscr{A}^n(\mathscr{T}) \longrightarrow 0 \qquad \text{exakt.}$$

Továbbá, mivel a konstrukcióból adódóan $\Gamma(M, \mathscr{A}^n(\mathscr{R})) \cong \tilde{\Gamma}(M, \mathscr{B}^n(\mathscr{R}))$ és ugyanígy $\mathscr{S}$ és $\mathscr{T}$ esetén is, így

$$0 \longrightarrow \Gamma(M, \mathscr{A}^n(\mathscr{R})) \xrightarrow{\phi_n^*} \Gamma(M, \mathscr{A}^n(\mathscr{S})) \xrightarrow{\psi_n^*} \Gamma(M, \mathscr{A}^n(\mathscr{T})) \longrightarrow 0$$

is exakt 3.1.2 szerint. Tehát a ϕ^* és ψ^* leképezések kolánc-komplexusok rövid exakt sorát adják, melyre alkalmazható az általános algebrai eszköztár, a 2.1.3 tétellel megkapjuk az állítást. □

Megjegyzés: Mint a tétel is kimondja, a 0. kohomológia-modulus a globális széleseket adja, ezáltal a kéve-kohomológia jó eszköz a lokális tulajdonságokból globálisakra következtetni. Az 1. kohomológia pedig azzal van közvetlen összefüggésben, hogy a szelések vétele mennyire exakt funktor: ha $H^1(M, \mathscr{R}) = 0$, a fenti hosszú exakt sor alapján a ψ^* leképezés a globális szelések szintjén szükségszerűen szürjektív.

Érdekes és nem nagy kitérő a Mayer-Vietoris sorozat kéve-kohomológiákra:

3.1.5. Tétel (Mayer-Vietoris kévékre)**.** *Legyen $\mathscr{S}$ R-modulus kéve M felett, $U_1, U_2 \subseteq M$ nyílt halmazok, melyekre $U_1 \cup U_2 = M$. Ekkor létezik a következő hosszú exakt sor:*

$$0 \to H^0(M,\mathscr{S}) \xrightarrow{H^0(\phi)} H^0(U_1,\mathscr{S}) \oplus H^0(U_2,\mathscr{S}) \xrightarrow{H^0(\psi)}$$
$$\xrightarrow{H^0(\psi)} H^0(U_1 \cap U_2,\mathscr{S}) \xrightarrow{\delta} H^0(M,\mathscr{S}) \xrightarrow{H^1(\phi)} \cdots$$

Bizonyítás.
Tekinthetjük $\forall n$-re a $\phi_n(f) = f|_{U_1} \oplus f|_{U_2}$ és $\psi_n(f_1 \oplus f_2) = f_1|_{U_1\cap U_2} - f_2|_{U_1\cap U_2}$ leképezéseket, melyekkel a

$$0 \to \tilde{\Gamma}(M,\mathscr{B}^n(\mathscr{S})) \xrightarrow{\phi_n} \tilde{\Gamma}(U_1,\mathscr{B}^n(\mathscr{S}))\oplus\tilde{\Gamma}(U_2,\mathscr{B}^n(\mathscr{S})) \xrightarrow{\psi_n} \tilde{\Gamma}(U_1\cap U_2,\mathscr{B}^n(\mathscr{S})) \to 0$$

sorok nyilvánvalóan exaktak. Ekkor az $\tilde{\Gamma}(.,\mathscr{B}^n(.)) \cong \Gamma(.,\mathscr{A}^n(.))$ azonosítás miatt a

$$0 \to \Gamma(M,\mathscr{A}^n(\mathscr{S})) \xrightarrow{\phi_0^*} \Gamma(U_1,\mathscr{A}^n(\mathscr{S}))\oplus\Gamma(U_2,\mathscr{A}^n(\mathscr{S})) \xrightarrow{\psi_0^*} \Gamma(U_1\cap U_2,\mathscr{A}^n(\mathscr{S})) \to 0$$

sorok is azok, és ezek együtt kolánc-homomorfizmusokat, és kolánc-komplexusok rövid exakt sorát alkotják. Az ehhez rendelt kohomologikus hosszú exakt sor megadja az állítást, ha belegondolunk a kanonikus feloldás definíciójának lokális voltába. Eszerint ugyanis a nyílt részhalmazok fölötti megszorított kévék feloldásai pont a teljes feloldás megszorításai, és ekkor a hosszú exakt sor tagjai megfelelnek az állításnak. □

3.2. Ernyedt-, Puha és Finom feloldások

Bár már tudjuk a definíciókat, sőt az előbb láttunk egy segédeszközt a kohomológiák számolására, általános esetekben ez még mindig bonyolult feladatnak bizonyulna. De mint sok más (ko)homologikus elméletben, a kévék esetén is előfordulnak a célnak megfelelő, de egyszerűbben kezelhető "közelítések", feloldások. Ezeket általánosítva a következő tétel írja le, és a későbbiekben látunk majd példákat is rájuk.

3.2.1. Tétel (Általáosított deRham-tétel)**.**
Tekintsük R-modulus kévék $0 \to \mathscr{S} \to \mathscr{S}^0 \to \mathscr{S}^1 \to \cdots$ *hosszú exakt sorát, ahol* $H^p(M,\mathscr{S}^q) = 0\ \forall p > 0, q \geq 0$ *esetén. Ekkor* $H^n(M,\mathscr{S})$ *számolható az indukált* $\Gamma(M,\mathscr{S}^0) \to \Gamma(M,\mathscr{S}^1) \to \Gamma(M,\mathscr{S}^2) \to \cdots$ *komplexus kohomológiáiként, azaz* $H^n(M,\mathscr{S}) = H^n(\Gamma(M,\mathscr{S}^*))$.

Bizonyítás. Bontsuk fel az exakt sort rövid exakt sorokra,

$$0 \longrightarrow \mathscr{R}^q \longrightarrow \mathscr{S}^q \longrightarrow \mathscr{R}^{q+1} \longrightarrow 0$$

ahol $q > 0$ esetén $\mathscr{R}^q$ jelöli a $\mathscr{S}^q \to \mathscr{S}^{q+1}$ leképezés magját, és $\mathscr{R}^0 = \mathscr{S}$. Ekkor a következő indukált kéve-kohomologikus hosszú exakt sorok jelennek meg:

$$\cdots \longrightarrow H^p(M,\mathscr{S}^q) \longrightarrow H^p(M,\mathscr{R}^{q+1}) \longrightarrow H^{p+1}(M,\mathscr{R}^q) \longrightarrow H^{p+1}(M,\mathscr{S}^q) \longrightarrow \cdots$$

A két szélső tag $p \geq 1, q > 0$ esetén 0, így $H^p(M, \mathscr{R}^{q+1}) \cong H^{p+1}(M, \mathscr{R}^q)$, melyet iterálva $H^n(M, \mathscr{S}) = H^n(M, \mathscr{R}^0) \cong H^1(M, \mathscr{R}^{n-1})$ adódik. Ez pedig – a hosszú exakt sor elejét tekintve:

$$0 \to \Gamma(M, \mathscr{R}^{n-1}) \to \Gamma(M, \mathscr{S}^{n-1}) \xrightarrow{\phi} \Gamma(M, \mathscr{R}^n) \to H^1(M, \mathscr{R}^{n-1}) \to H^1(M, \mathscr{S}^{n-1}).$$

Az utolsó tag $n \geq 1$ esetén 0, így $H^1(M, \mathscr{R}^{n-1}) = \Gamma(M, \mathscr{R}^n)/\phi\Gamma(M, \mathscr{S}^{n-1})$. A szelésekre áttérés balexaktsága miatt $\Gamma(M, \mathscr{S}^n) \to \Gamma(M, \mathscr{S}^{n+1})$ leképezés magja $\Gamma(M, \mathscr{R}^n)$ így $\Gamma(M, \mathscr{R}^n)/\phi\Gamma(M, \mathscr{S}^{n-1}) = H^n(\Gamma(M, \mathscr{S}^*))$, ezzel belátva az állítást. $\square$

A tétel alkalmazásához találnunk kell megfelelő kévéket, melyek pozitív fokú kéve-kohomológiái mind nullák. Az egyik ilyen csoportot azon kévék alkotják, melyben minden lokális szelés kiterjeszthető globálissá:

3.2.2. Tétel (Ernyedt kévék)**.** *Ha $\mathscr{S}$ M feletti R-modulus kévére teljesül, hogy a természetes megszorítás $\Gamma(M, \mathscr{S}) \to \Gamma(U, \mathscr{S})$ szürjektív $\forall U \subseteq M$ nyílt halmazra, akkor $H^n(M, \mathscr{S}) = 0$ $\forall n \geq 1$ esetén. Az ilyen kévéket* ernyedtnek (flabby) *nevezzük.*

Bizonyítás. A bizonyítás 3 részből áll:

I. Belátjuk, hogy ha a $0 \longrightarrow \mathscr{R} \xrightarrow{\phi} \mathscr{S} \xrightarrow{\psi} \mathscr{T} \longrightarrow 0$ rövid exakt sorban $\mathscr{R}$ rendelkezik a tétel tulajdonságával, akkor a globális szelések is rövid exakt sort alkotnak, azaz $0 \longrightarrow \Gamma(M, \mathscr{R}) \xrightarrow{\phi^*} \Gamma(M, \mathscr{S}) \xrightarrow{\psi^*} \Gamma(M, \mathscr{T}) \longrightarrow 0$ is exakt.

Mint eddig, most is csak ψ^* szürjektivitása kérdéses, ehhez vegyünk egy $f \in \Gamma(M, \mathscr{T})$ globális szelést, és tekintsük az (U, g) párokat, ahol $g \in \Gamma(U, \mathscr{S})$ és $\psi^*(g) = f|_U$. Mivel tetszőleges szár előáll a szelések gyűrűinek direkt limeseként, és ψ szürjektív, így lokálisan minden pont körül találhatunk megfelelő (U, g) párt.

Ezek között a Zorn-lemma szerint létezik egy (U_0, g_0) maximális elem az $(U, g) \leq (U', g') \Leftrightarrow U \subseteq U', g'|_U = g$ részbenrendezésre. Ha $U_0 = M$, kész vagyunk, ha pedig $A \notin U_0$ akkor az A körüli (U_A, g_A) pár miatt ellentmondásba ütközünk a maximalitásal:

Ekkor ugyanis $\bar{g} = g_0|_{U_0 \cap U_A} - g_A|_{U_0 \cap U_A} \in \ker \psi^*$, hisz $\psi^*(g_0|_{U_0 \cap U_A}) = f|_{U_0 \cap U_A} = \psi^*(g_A|_{U_0 \cap U_A})$. Így a $0 \to \Gamma(U_0 \cap U_A, \mathscr{R}) \xrightarrow{\phi^*} \Gamma(U_0 \cap U_A, \mathscr{S}) \xrightarrow{\psi^*} \Gamma(U_0 \cap U_A, \mathscr{T})$ sor 1.2.8 tételben belátott exaktsága miatt $\exists \bar{h} \in \Gamma(U_0 \cap U_A, \mathscr{R})$, melyre $\phi^*(\bar{h}) = \bar{g}$.

De $\bar{h}$ a feltétel miatt kiterjed $h \in \Gamma(M, \mathscr{R})$ globális szeléssé, és tekinthetjük ekkor a $\tilde{g} = g_A + \phi^*(h)|_{U_A} \in \Gamma(U_A, \mathscr{S})$ szelést. Ekkor

$$\tilde{g}|_{U_0 \cap U_A} = g_A|_{U_0 \cap U_A} + \phi^*(\bar{h}) = g_0|_{U_0 \cap U_A},$$

így mivel a metszeten megegyeznek, $\tilde{g}$ kiterjeszti g_0-t $U_A \cup U_0$-ra, megszegve U_0 maximalitását.

II. Majd szükséges, hogy a feltételünk zárt a faktorképzésre, azaz ha a rövid exakt sorban $\mathscr{R}$ és $\mathscr{S}$ teljesíti a feltételt, akkor $\mathscr{T}$ is.

Ha $f \in \Gamma(U, \mathscr{T})$, akkor az I. pont szerint (M helyett az U halmazra alkalmazva) $\exists g \in \Gamma(U, \mathscr{S})$, melyre $\psi^*(g) = f$. Ezt kiterjesztve $\bar{g} \in \Gamma(M, \mathscr{S})$ globális szeléssé $\psi^*(\bar{g})$ kiterjeszti f-et.

III. Az állítás belátásához vegyük észre hogy a kanonikus feloldásban az $\mathscr{A}^n(\mathscr{S})$ kévék mindig teljesítik a feltételt, és a tétel $\mathscr{S}$-re is megköveteli azt, így II. szerint (indukcióval beláthatóan) a megfelő faktorok, $\mathscr{B}^n(\mathscr{S})$-ek is. Ekkor I. szerint a széleésképzés exakt funktorként viselkedik, így a 3.2 kolánc exakt, tehát $H^n(M, \mathscr{S}) = 0$.

□

Egy másik nagy család bevezetéséhez szükséges egy kikötést tenni az M térre vonatkozólag is. Emlékeztetőül egy topologikus tér *parakompakt*, ha minden nyílt fedéséhez található lokálisan véges finomítás (azaz minden pont körüli megfelelő környezetet a finomítás csak véges sok tagja metsz). Ez nem túl nagy megszorítás, például tetszőleges sokaság vagy varietás teljesíti a feltételt. Szükséges észrevétel továbbá, hogy egy Haussdorf parakompakt tér normális, azaz diszjunkt zárt halmazok elválaszthatóak benne nyíltakkal.

3.2.3. Definíció (Puha kévék)**.** *Az M tér feletti $\mathscr{S}$ R-modulus kéve* puha (soft)*, ha minden **zárt** részhalmaza feletti szelés kiterjeszthető globális szeléssé, azaz $K \subseteq M$ zárt esetén a természetes megszorítás $\Gamma(M, \mathscr{S}) \to \Gamma(K, \mathscr{S})$ szürjektív.*

3.2.4. Tétel. *Ha $\mathscr{S}$ puha R-modulus kéve az M Haussdorf és parakompakt tér felett, akkor $H^n(M, \mathscr{S}) = 0$ $\forall n \geq 1$ esetén.*

Bizonyítás. A bizonyítás az ernyedt kévékhez hasonló logikával zajlik, de az I. lépés kicsit más megközelítést kíván.

I. Belátjuk, hogy a szokásos jelölések mellett egy rövid exakt sor által a globális széléseken indukált sor szintén exakt, azaz ψ^* szürjektív, amennyiben $\mathscr{R}$ puha.

Legyen $f \in \Gamma(M, \mathscr{T})$, és az előző bizonyításhoz hasonló módon $A \in M$ esetén vegyük az (U_A, g_A) párokat, ahol $g_A \in \Gamma(U_A, \mathscr{S})$ és $\psi^*(g_A) = f|_{U_A}$.

Az $\{U_A\}_A$ fedéshez M parakompaktsága szerint vehetjük ennek egy lokálisan véges finomítását, melyre az (U_α, g_α) párok még mindig rendelkeznek a fenti tulajdonságokkal. Sőt, M normalitása miatt vehetőek nyílt $V_\alpha \subseteq \overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$ halmazok, amik még mindig fedik M-et. Ha a K halmaz ilyen $\overline{V_\alpha}$-k tetszőleges uniója, akkor a lokális végesség miatt K zárt.

Vegyük a (K, g) párokat, ahol K mint fent, és $\psi^*(g) = f|_K$. A természetes részbenrendezésre alkalmazva a Zorn lemmát, megint kapunk egy (K_0, g_0) maximális párt. Ismét azt kell belátnunk, hogy $K_0 \neq M$ nem lehetséges, ez pedig a korábbival megegyezően megy, (U_A, g_A) helyett az egyik kimaradó $(\overline{V_\alpha}, g_\alpha)$ párt használva.

Innentől a II. és III. lépés lényegében megegyezik a korábbival, belátható hogy a puhaság öröklődik a faktorra, és így a kanonikus feloldás tagjaira, exakt kolánckomplexust eredményezve a széléseken. □

Ennek a csoportnak a következő alcsoportja igazán érdekes:

3.2.5. Definíció (Finom kévék)**.** *Az M tér feletti $\mathscr{S}$ R-modulus kéve* finom (fine)*, ha minden lokálisan véges fedéshez ($\{U_\alpha\}_\alpha$) létezik a kévének a* fedés alá rendelt egységosztása*, azaz $\eta_\alpha : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ homomorfizmusok, melyekre $\eta_\alpha(\mathscr{S}_Z) = 0$ a $M \setminus U_\alpha$ halmaz egy nyílt környezetében, és $\sum_\alpha \eta_\alpha = Id_{\mathscr{S}}$ (a fedés lokális véges volta miatt ez minden pontban véges összeg).*

3.2.6. Példa. Itt gyakorlati példákat is tudunk mondani, a klasszikus egységosztásoknak köszönhetően a folytonos függvénycsírák $\mathscr{C}$, és a sima differenciálforma-csírák $\mathscr{E}^r$ és $\mathscr{E}^{p,q}$ kévéi finomak, azonban a triviális kévék vagy a holomorf függvénycsírák kévéje nem azok.

Valójában ha $\mathscr{S}$ modulus egy M feletti $\mathscr{R}$ finom gyűrűkéve felett (azaz létezik egy $\mathscr{S} \times \mathscr{R} \to \mathscr{S}$ kéve-homomorfizmus mely a szárakon modulus-struktúrát definiál), akkor $\mathscr{R}$ finomsága öröklődik $\mathscr{S}$-re is. Ugyanis az $\mathscr{R}$ egységosztásával való szorzás egységosztást indukál $\mathscr{S}$-n is.

Ezt felhasználva lényegében minden $\mathscr{S}$ kéve, ahol a szelések csoportjai zártak a tetszőleges/folytonos/sima függvényekkel való szorzásra, következésképp finom, a megfelelő függvényosztály egységosztásait felhasználva. Ez a megfigyelés bizonyítja a differenciálforma-csíra kévék finomságát, de például később az 5.2.1 tételben is hasznát vesszük.

3.2.7. Tétel. *Ha $\mathscr{S}$ finom R-modulus kéve az M Haussdorf és parakompakt tér felett, akkor puha is, és így $H^n(M, \mathscr{S}) = 0$ $\forall n \geq 1$ esetén.*

Bizonyítás. Legyen $K \subseteq M$ zárt, $f \in \Gamma(K, \mathscr{S})$. Tetszőleges $A \in K$ pontra találhatóak megfelelő U_A környezetek és $f_A \in \Gamma(U_A, \mathscr{S})$ szelések melyekre $f_A|_{U_A \cap K} = f|_{U_A \cap K}$. Az $\{M \setminus K\} \cup \{U_A\}_{A \in K}$ halmazok M nyílt fedését adják, amihez a parakompaktság szerint rendelhető egy $\{U_\alpha\}_\alpha$ lokálisan véges fedés a megfelelő f_α szelésekkel. Ekkor egy $\{\eta_\alpha\}_\alpha$ egységosztáshoz vehetjük az $\eta_\alpha^*(f_\alpha)$ széléseket, melyeket U_α komplementerére 0-val kiterjesztve kapjuk a globális $g_\alpha \in \Gamma(M, \mathscr{S})$ széléseket. Legyen $g := \sum_\alpha g_\alpha$, mely a lokális végesség miatt pontonként véges összeg, így jólértelmezett, valamint $g|_K = f|_K$, ezzel megadva f kiterjesztését. □

3.3. Kévék exakt sorának kohomológiái általában

Láttuk, hogy triviális kohomológiákkal rendelkező kévék exakt sora segít a kévekohomológiák kiszámolásában. Ennek tekinthetjük egy általánosabb verzióját is:

3.3.1. Tétel. *Tekintsük M feletti R-modulus kévék exakt sorát, és a kohomológiákon indukált homomorfizmusok koláncz-komplexusát:*

$$0 \longrightarrow \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}^0 \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{S}^1 \xrightarrow{\bar\partial} \mathscr{S}^2 \xrightarrow{\bar\partial} \cdots$$

$$H^q(M,\mathscr{S}^0) \xrightarrow{\bar\partial} H^q(M,\mathscr{S}^1) \xrightarrow{\bar\partial} H^q(M,\mathscr{S}^2) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots .$$

Ekkor létezik egy konvergens E_2 spektrális sorozat, melynek kezdőtagjai

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p_{\bar\partial}(H^q(M,\mathscr{S}^*)) & \text{ha } p,q \geq 0 \\ 0 & \text{ha } p<0 \text{ vagy } q<0, \end{cases}$$

és melynek limestagjai a $H^n(M,\mathscr{S})$ modulus asszociált filtrálásához tartozó gradálás tagjai, azaz $E(H^n(M,\mathscr{S})) = \sum\limits_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$.

Megjegyzés: A tétel kimondásában és a bizonyításban is túl sok az indukált leképezés, így ezekről az egyszerűség kedvéért lehagyom a $*$-ot.

Bizonyítás. Minden q-ra vehetjük a $\mathscr{S}^q$ kéve kanonikus feloldását:

$$0 \to \mathscr{A}^0(\mathscr{S}^q) \xrightarrow{\partial'} \mathscr{A}^1(\mathscr{S}^q) \xrightarrow{\partial'} \mathscr{A}^2(\mathscr{S}^q) \xrightarrow{\partial'} \cdots$$

és vezessük be a $A^{p,q} := \Gamma(M, \mathscr{A}^p(\mathscr{S}^q))$ jelölést. Ekkor a ∂' leképezések $\partial' : A^{p,q} \to A^{p+1,q}$ homomorfizmusokat indukálnak, melyre $\partial'\partial' = 0$. A $\bar\partial$ leképezések pedig $\bar\partial : A^{p,q} \to A^{p,q+1}$ homomorfizmusokat indukálnak a 3.1.4 tétel bizonyításában látott módon, melyekre $\bar\partial\bar\partial = 0$ és $\partial'\bar\partial = \bar\partial\partial'$. Bevezetve a $\partial : A^{p,q} \to A^{p+1,q}$ leképezést melyre $\partial = (-1)^{p+q}\partial'$ az $(A^{p,q},\partial,\bar\partial)$ objektum egy kettős lánckomplexus melyre alkalmazható a 2.2.9 tétel, megkonstruálható tehát a két konvergens spektrális sorozat.

Ráadásul mivel $\mathscr{A}^p(\mathscr{S}^q)$ folytonos szelései valójában $\mathscr{B}^p(\mathscr{S}^q)$ általános szeléseinek felelnek meg, a következő sorok exaktak:

$$0 \longrightarrow \Gamma(M,\mathscr{A}^p(\mathscr{S})) \xrightarrow{\bar\partial} \Gamma(M,\mathscr{A}^p(\mathscr{S}^0)) \xrightarrow{\bar\partial} \Gamma(M,\mathscr{A}^p(\mathscr{S}^1)) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots, \text{ így}$$

$$H^q_{\bar\partial}(A^{p,*}) = H^q_{\bar\partial}(\Gamma(M,\mathscr{A}^p(\mathscr{S}^*))) = \begin{cases} \Gamma(M,\mathscr{A}^p(\mathscr{S})) & \text{ha } q=0 \\ 0 & \text{ha } q>0. \end{cases}$$

Ezáltal az általános tétel kezdőtagja (az első filtrálást használva) jelen esetben a

$${}_1E_2^{p,q} = H^p_\partial(H^q_{\bar\partial}(A^{*,*})) = \begin{cases} H^p(M,\mathscr{S}) & \text{ha } q=0 \\ 0 & \text{ha } q>0. \end{cases}$$

formulára egyszerűsödik. Mivel az E_2 rácsban egyetlen oszlop elemei különböznek a nulla modulusoktól, a spektrális sorozat már itt stabilizálódott, azaz ${}_1E_2^{p,q} = {}_1E_\infty^{p,q}$ és ${}_1E(H_d^n(A^*)) = \sum_{p+q=n} {}_1E_\infty^{p,q} = {}_1E_2^{n,0} = H^n(M,\mathscr{S})$. Mivel a gradálásnál láthatóan semmi információt nem veszítettünk, ezért $H_d^n(A^*) = H^n(M,\mathscr{S})$ is teljesül.

A második filtrálást tekintve $H_\partial^q(A^{*,p}) = H_\partial^q(\Gamma(M,\mathscr{A}^*(\mathscr{S}^p))) = H^q(M,\mathscr{S}^p)$ definíció szerint, így ekkor ${}_2E_2^{p,q} = H_{\bar\partial}^p(H_\partial^q(A^{*,*})) = H_{\bar\partial}^p(H^q(M,\mathscr{S}^*))$. Továbbá a konvergenciából ${}_2E(H^n(M,\mathscr{S})) ={}_2 E(H_d^n(A^*)) = {}_2E_\infty^{p,q}$. □

3.3.2. Következmény. M feletti R-modulus kévék $0 \to \mathscr{S} \to \mathscr{S}^0 \to \mathscr{S}^1 \to \cdots$ exakt sorához léteznek $H^p(\Gamma(M,\mathscr{S}^*)) \to H^p(M,\mathscr{S})$ természetes homomorfizmusok, mely $p = 1$ esetén injektív is.

Bizonyítás. Mivel $p < 0$ vagy $q < 0$ esetén $E_r^{p,q} = 0$ a spektrális sorozatban, így ha $r \geq 2$ a $d_r : E_r^{p,0} \to E_r^{p+r,-r+1}$ a nulla homomorfizmus. Ezáltal $r \geq 2$ esetén $E_{r+1}^{p,0}$ az $E_r^{p,0}$ modulus fakotra, és a természetes faktorleképezések kompozíciója megadja az $E_2^{p,0} \to E_3^{p,0} \to \cdots \to E_\infty^{p,0}$ leképezést.

Továbbá $p = 1$ esetén a $d_r : 0 = E_r^{1-r,r-1} \to E_r^{1,0}$ leképezés is a nulla homomorfizmus, így annak képével (0-val) faktorizálva injektív leképezéseket kapunk, ezzel bebizonyítva az állítást. □

4. Čech kohomológia

4.1. Alapok

Egy másik, a kévékkel szorosan összefüggő kohomológiaelmélet a Čech kohomológia. Ez – mint látni fogjuk – a priori másképp van definiálva, de megfelelően szép terek esetén végeredményben ugyanazokra a kohomológiamodulusokra vezet. Ezt felhasználva a következő fejezetben összekapcsolhatjuk az összes klasszikus és az itt bemutatott kohomológialméletek eredményeit. A Čech kohomológia konstrukciója a következő:

Legyen $\mathscr{S}$ R-modulus kéve az M topologikus tér felett, és legyen $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ egy nyílt fedése M-nek. Jelöljük továbbá a $\mathfrak{U}$ elemeiből alkotott rendezett $(p+1)$-eseket $\mathfrak{U}^{p+1}$-gyel, ennek egy eleme pedig legyen $\mathfrak{U}^{p+1} \ni \sigma = (U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_p})$. Vezessük be $0 \leq j \leq p$ esetén az U_{α_j} elhagyásával nyert $\mathfrak{U}^p \ni \sigma_j = (U_{\alpha_0}, \ldots, U_{\alpha_{j-1}}, U_{\alpha_{j+1}}, \ldots, U_{\alpha_p})$ p-seket, és a $|\sigma| = \bigcap_i U_{\alpha_i}$ jelölést is. Ekkor nyilván $|\sigma| \subseteq |\sigma_j|$.

Tekintsük a $\Gamma(|\sigma|, \mathscr{S})$ R-modulusok ($|\sigma| = \emptyset$ esetén legyen ez a 0 modulus) direkt szorzatát: $C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) := \prod\limits_{\sigma \in \mathfrak{U}^{p+1}} \Gamma(|\sigma|, \mathscr{S})$, melyet az $\mathfrak{U}$ fedéshez tartózó $\mathscr{S}$ együtthatós p-koláncok modulusának hívunk. Ekkor tehát $f \in C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ az $f(\sigma) \in \Gamma(|\sigma|, \mathscr{S})$ szelésekből áll.

Mint általában, a $\rho_\sigma := \rho_{\sigma,\sigma_j} : \Gamma(|\sigma_j|, \mathscr{S}) \to \Gamma(|\sigma|, \mathscr{S})$ megszorítások most is jóldefiniált modulus-homomorfizmusok.

Ezeket az információkat összetéve definiálhatjuk a koláncokon a kohatár leképezéseket: $\delta : C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$, ahol $f \in C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ képe δf a $\delta f(\sigma) := \sum\limits_{i=0}^{p+1} (-1)^i \rho_\sigma f(\sigma_i)$ tagokkal van definiálva.

4.1.1. Lemma. *A kohatár leképezésekre teljesül, hogy $\delta \circ \delta = 0$, így a*

$$C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \xrightarrow{\delta} \cdots \tag{4.1}$$

sorozat egy kolánc-komplexus.

Bizonyítás. Legyen $\sigma \in \mathfrak{U}^{p+3}$, és $j \neq k$ esetén vezessük be a σ-ból az U_{α_j} és U_{α_k} halmazok elhagyásával keletkező $(p+1)$-esre az $\sigma_{j,k}$ jelölést. Ekkor

$$(\sigma_j)_k = \begin{cases} \sigma_{j,k} & \text{ha } 0 \leq k < j \leq p+2 \\ \sigma_{j,k+1} & \text{ha } 0 \leq j \leq k \leq p+1. \end{cases}$$

Ekkor definíció szerint

$$\delta\delta f(\sigma) = \delta\left(\sum_{j=0}^{p+2} (-1)^j \rho_\sigma f(\sigma_j)\right) = \sum_{j=0}^{p+2} (-1)^j \rho_\sigma \delta f(\sigma_j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{p+2}(-1)^j \rho_\sigma \left(\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k \rho_{\sigma_j} f((\sigma_j)_k) \right) =$$
$$= \sum_{k<j}(-1)^{j+k}\rho_\sigma f(\sigma_{j,k}) + \sum_{k\geq j}(-1)^{j+k}\rho_\sigma f(\sigma_{j,k+1}) = 0.$$

□

4.1.2. Definíció (Az $\mathfrak{U}$ fedés Čech-kohomológiái). *A 4.1 kolánc-komplexus kohomológiáit hívjuk az* $\mathfrak{U}$ *fedés* $\mathscr{S}$ *együtthatós kohomológia-modulusainak,* $H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) = H^n(C^*(\mathfrak{U}, \mathscr{S}))$.

További jelölések: $\delta : C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ *esetén* $ker\delta = Z^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ *elemeit p-kociklusoknak,* $\operatorname{Im}\delta = B^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ *elemeit pedig* $p+1$*-kohatároknak nevezzük. Ekkor nyilván* $H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) = Z^n(\mathfrak{U}, \mathscr{S})/B^n(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$.

4.1.3. Megjegyzés. A koláncok egy nevezetes részmodulusa a ferdén-szimmetrikus koláncok.

Ezek bevezetéséhez tekintsük az S_{p+1} szimmetrikus csoport hatását a rendezett $(p+1)$-esek $\mathfrak{U}^{p+1}$ halmazán:

$$\pi\sigma = \pi(U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_p}) = (U_{\alpha_{\pi(0)}}, U_{\alpha_{\pi(1)}}, \ldots, U_{\alpha_{\pi(p)}}).$$

Ekkor az $f \in C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ elem ferdén szimmetrikus, ha $f(\pi\sigma) = \operatorname{sign}\pi \cdot f(\sigma)$, és ezek alkotják a $C^p_S(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \subseteq C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ részmodulusokat. Ellenőrizhető, hogy a $\delta : C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ homomorfizmus megtartja a ferde szimmetriát, így a megszorítása eredményez $\delta : C^p_S(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \to C^{p+1}_S(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ homomorfizmusokat. Az így előálló kolánc-komplexus kohomológiáiként definiálhatóak a $H^n_S(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ ferdén-szimmetrikus Čech-kohomológia modulusok, és az előző definíció többi objektumának ferdén-szimmetrikus megfelelője is. Sőt a későbbi tételek nagy részének analóg változata is kimondható rájuk.

4.1.4. Megjegyzés. Megint érdemes megvizsgálni az alacsony fokú kohomológiákat.

Egy 0-kolánc $f \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ megadható a tagjaival: $f(U_\alpha) \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{S})$, és ekkor a δf elemet az U_α, U_β halmazok felett a

$$(\delta f)(U_\alpha, U_\beta) = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta} f(U_\alpha) - \rho_{U_\alpha \cap U_\beta} f(U_\beta) \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathscr{S})$$

képlet adja meg. Eszerint f pontosan akkor kociklus, ha a metszeteken vett megszorításai megegyeznek, ekkor azonban a tagok összeragaszthatóak egy globális szeléssé. Így $H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) = Z^0(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \cong \Gamma(M, \mathscr{S})$.

Az 1-koláncokra vonatkozó feltételek is viszonylag természetesek és más témákhoz is köthetőek, de ettől a kitérőtől most eltekintek.

4.1.5. Megjegyzés. Egy $\phi : \mathscr{R} \to \mathscr{S}$ kévehomomorfizmus, a széléseken indukált leképezések révén indukál $\phi^* : C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{R}) \to C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ homomorfizmusokat is, melyek nyilvánvalóan kompatibilisek a kohatár-leképezéssel. Ezáltal a Čech-kohomológia is funktoriális, indukálódnak $\phi^* : H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{R}) \to H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ homomorfizmusok, és az indukálás tartja az identitást valamint a kompozíciókat.

Az eddigi tárgyalásban látszólag lényeges volt M fedése, $\mathfrak{U}$, ami felveti az ilyenkor szokásos kérdéseket. Függ a konstrukció a fedés választásától? Lehet-e csak a tértől függő invariánsokat létrehozni ezzel az eszközzel? Sajnos az első kérdésre nem lehet teljes általánosságban tagadó választ adni (a későbbiekben látni fogjuk, hogy a térre és a fedésekre megkövetelt bizonyos feltételek mellett azért megfogalmazhatjuk a kohomológiák függetlenségét), de a második kérdésben szerencsénk van.

Tekintsük M egy $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_\lambda$ fedését, és ennek egy *finomítását*, a $\mathfrak{B} = \{V_\alpha\}_\alpha$ fedést. Ez azt jelenti, hogy létezik egy (nem feltétlen egyértelmű) $\lambda : \mathfrak{B} \to \mathfrak{U}$ *finomító leképezés*, amely egy $V_\alpha \in \mathfrak{B}$ elemhez hozzárendeli a $\lambda V_\alpha = U_{\lambda(\alpha)} \in \mathfrak{U}$ elemet, melyre $V_\alpha \subseteq U_{\lambda(\alpha)}$.

Ekkor ez a leképezés kiterjeszthető $\lambda : \mathfrak{B}^{p+1} \to \mathfrak{U}^{p+1}$ leképezésként is, és $\sigma \in \mathfrak{B}^{p+1}$ esetén $|\sigma| \subseteq |\lambda\sigma|$. Ekkor a $C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \ni f \mapsto \lambda^* f \in C^p(\mathfrak{B}, \mathscr{S})$ hozzárendelés – ahol $\lambda^* f(\sigma) = \rho_\sigma f(\lambda\sigma) \in \Gamma(|\sigma|, \mathscr{S})$, és ρ_σ a megszorítás, mint eddig – definiál $\forall p$-re egy-egy $\lambda^* : C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \to C^p(\mathfrak{B}, \mathscr{S})$ homomorfizmust. Ezen homomorfizmusok kompatibilisek a Čech-kohatár leképezésekkel, így indukálódnak $H(\lambda)$, vagy λ^* jelölésű $H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \to H^p(\mathfrak{B}, \mathscr{S})$ homomorfizmusok is.

4.1.6. Lemma. *Legyen $\mathscr{S}$ rögzített R-modulus kéve az M topologikus tér felett, $\mathfrak{U}$ az M egy fedése, $\mathfrak{B}$ pedig $\mathfrak{U}$ egy finomítása. Ekkor a finomítás által indukált $H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \to H^p(\mathfrak{B}, \mathscr{S})$ homomorfizmus független a konkrét λ finomító leképezés választásától.*

Bizonyítás. Legyen λ, μ két finomító leképezés, és vezessük be a $\phi_k : \mathfrak{B}^{p+1} \to \mathfrak{U}^{p+2}$ leképezéseket ($0 \le k \le p$), ahol $\sigma = (V_{\alpha_0}, \dots, V_{\alpha_p}) \in \mathfrak{B}^{p+1}$ esetén

$$\phi_k\sigma = (U_{\lambda(\alpha_0)}, \dots, U_{\lambda(\alpha_k)}, U_{\mu(\alpha_k)}, \dots, U_{\mu(\alpha_p)}).$$

Ekkor $|\sigma| \subseteq |\phi_k\sigma|$, továbbá mint korábban legyen $\sigma_j \in \mathfrak{B}$ a V_{α_j} elhagyásával σ-ból kapott p-s. Továbbá

$$\phi_k(\sigma_j) = \begin{cases} (\phi_k\sigma)_{j+1} & \text{ha } 0 \le k < j \le p \\ (\phi_{k+1}\sigma)_j & \text{ha } 0 \le j \le k \le p-1. \end{cases}$$

Ezek segítségével definiáljuk a $\psi : C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \to C^p(\mathfrak{B}, \mathscr{S})$ homomorfizmusokat, amire $f \in C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ képe $\psi f \in C^p(\mathfrak{B}, \mathscr{S})$ a $\sigma \in \mathfrak{B}^{p+1}$ $(p+1)$-esen a

$$\psi f(\sigma) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \rho_\sigma f(\phi_k \sigma) \in \Gamma(|\sigma|, \mathscr{S})$$

képlettel van megadva. A következő diagram segíthet a megértésben:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta"] & C^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, shift right, "\mu^*"'] \arrow[d, shift left, "\lambda^*"] & C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, shift right, "\mu^*"'] \arrow[d, shift left, "\lambda^*"] \arrow[dl, "\psi"'] & C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, shift right, "\mu^*"'] \arrow[d, shift left, "\lambda^*"] \arrow[dl, "\psi"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta"] & C^{p-1}(\mathfrak{B}, \mathscr{S}) \arrow[r, "\delta"] & C^p(\mathfrak{B}, \mathscr{S}) \arrow[r, "\delta"] & C^{p+1}(\mathfrak{B}, \mathscr{S}) \arrow[r, "\delta"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Belátjuk, hogy ψ kolánc-homotópia μ^* és λ^* között, azaz $\psi\delta + \delta\psi = \mu^* - \lambda^*$. Ekkor ugyanis, ha f kociklus, azaz $\delta f = 0$, akkor $\delta\psi f = \mu^* f - \lambda^* f$, ezáltal $[\mu^* f] = [\lambda^* f] \in H^p(\mathfrak{B}, \mathscr{S})$.

Ehhez $f \in C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ és $\sigma \in \mathfrak{B}^{p+1}$ esetén tekintsük a következő két kifejezést:

$$\begin{aligned}
(\psi\delta f)(\sigma) &= (\psi(\delta f))(\sigma) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \rho_\sigma (\delta f)(\phi_k \sigma) = \\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \rho_\sigma \left(\sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \rho_\sigma f((\phi_k \sigma)_j) \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{p} \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^{j+k} \rho_\sigma f((\phi_k \sigma)_j) \\
(\delta\psi f)(\sigma) &= (\delta(\psi f))(\sigma) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \rho_\sigma (\psi f)(\sigma_j) = \\
&= \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \rho_\sigma \left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \rho_\sigma f(\phi_k(\sigma_j)) \right) = \\
&= \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{j+k} \rho_\sigma f(\phi_k(\sigma_j)) = \sum_{0 \le k < j \le p} \cdots + \sum_{0 \le j \le k \le p-1} \cdots = \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{j=k+1}^{p} (-1)^{j+k} \rho_\sigma f((\phi_k \sigma)_{j+1}) + \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=j}^{p-1} (-1)^{j+k} \rho_\sigma f((\phi_{k+1} \sigma)_j) = \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{j=k+2}^{p+1} (-1)^{j+k-1} \rho_\sigma f(\phi_k \sigma)_j) + \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=j+1}^{p} (-1)^{j+k-1} \rho_\sigma f((\phi_k \sigma)_j)
\end{aligned}$$

a kettőt összeadva:

$$\begin{aligned}
(\psi\delta f)(\sigma) + (\delta\psi f)(\sigma) &= \sum_{k=0, j=k}^{p} (-1)^{j+k} \rho_\sigma f((\phi_k \sigma)_j) + \sum_{k=0, j=k+1}^{p} (-1)^{j+k} \rho_\sigma f((\phi_k \sigma)_j) = \\
&= \sum_{k=0}^{p} \rho_\sigma f((U_{\lambda(\alpha_0)}, \ldots, U_{\lambda(\alpha_{k-1})}, U_{\mu(\alpha_k)}, \ldots, U_{\mu(\alpha_p)})) - \\
&\quad - \sum_{k=0}^{p} \rho_\sigma f((U_{\lambda(\alpha_0)}, \ldots, U_{\lambda(\alpha_k)}, U_{\mu(\alpha_{k+1})}, \ldots, U_{\mu(\alpha_p)})) =
\end{aligned}$$

$$= \rho_\sigma f((U_{\mu(\alpha_0)}, \dots, U_{\mu(\alpha_p)})) - \rho_\sigma f((U_{\lambda(\alpha_0)}, \dots, U_{\lambda(\alpha_p)})) =$$
$$= \mu^* f(\sigma) - \lambda^* f(\sigma).$$

Tehát $[\mu^* f] = [\lambda^* f] \in H^p(\mathfrak{B}, \mathscr{S})$, azaz a finomítás által indukált $H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \to H^p(\mathfrak{B}, \mathscr{S})$ homomorfizmus jóldefiniált. $\square$

A lemmát felhasználva az M összes nyílt fedésén bevezethetünk egy részbenrendezést, melyben $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{B}$ akkor és csak akkor, ha $\mathfrak{B}$ az $\mathfrak{U}$ egy finomítása. Ekkor a $H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ kohomológia-modulusok a finomítások által indukált leképezésekkel erre a részbenrendezésre nézve egy direkt rendszert alkotnak, és definiálhatjuk a direkt limest:

4.1.7. Definíció (Čech-kohomológia modulusok). *Az M fölötti $\mathscr{S}$ R-modulus kéve esetén az M $\mathscr{S}$ együtthatós* Čech-kohomológia modulusai *a $\check{H}^n(M, \mathscr{S}) = \varinjlim_{\{\mathfrak{U}\}} H^n(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ modulusok.*

4.2. Kapcsolat a kéve-kohomológiákkal

Mint láttuk $H^0(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \cong \Gamma(M, \mathscr{S}) \cong H^0(M, \mathscr{S})$, sőt, egy kis meggondolás után a direkt limes alapján $\check{H}^0(M, \mathscr{S})$ is beilleszthető a sorba. Azonban a hasonlóságok itt nem állnak meg, a fejezet végére belátjuk, hogy megfelelő feltételek mellett ezek a kohomológiák minden dimenzióban izomorf modulusokat adnak. Kezdjünk egy másik speciális esettel:

4.2.1. Tétel. *Legyen $\mathscr{S}$ R-modulusok finom kévéje a parakompakt és Hausdorff M tér felett. Ekkor M tetszőleges $\mathfrak{U}$ nyílt fedésére és $\forall p > 0$ esetén $H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) = 0$. Nyilván ekkor $\check{H}^0(M, \mathscr{S}) = 0$ is teljesül.*

Bizonyítás. A tér parakompaktsága miatt a $\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}_\lambda$ fedéshez találhatunk egy lokálisan véges $\mathfrak{B} = \{V_\alpha\}_\alpha$ finomítást λ finomító függvénnyel. Továbbá a kéve finomságából adódóan létezik $\mathscr{S}$-hez a $\mathfrak{B}$ alá rendelt egységosztás $\{\eta_\alpha\}$.

Ha $\mathfrak{U}^p \ni \sigma = (U_{\lambda_0}, \dots, U_{\lambda_{p-1}})$, akkor egy rögzített $V_\alpha \in \mathfrak{B}$ esetén vegyük a $\sigma^\alpha = (U_{\lambda(\alpha)}, U_{\lambda_0}, \dots, U_{\lambda_{p-1}}) \in \mathfrak{U}^{p+1}$ elemet. Ekkor $|\sigma^\alpha| = U_{\lambda(\alpha)} \cap |\sigma| \supseteq V_\alpha \cap |\sigma|$ és

$$(\sigma^\alpha)_j = \begin{cases} \sigma & \text{ha } 0 = j \\ (\sigma_{j-1})^\alpha & \text{ha } 0 < j. \end{cases}$$

Egy $f \in Z^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) = 0$ kociklus esetén a η_α kévehomomorfizmus szeléseken indukált leképezése az $f(\sigma^\alpha) \in \Gamma(|\sigma^\alpha|, \mathscr{S})$ szelést a $\eta_\alpha^* f(\sigma^\alpha) \in \Gamma(|\sigma^\alpha|, \mathscr{S})$ szelésbe viszi, mely $V_\alpha \cap |\sigma^\alpha|$ egy zárt részhalmazán kívül 0 a $|\sigma^\alpha|$ halmazon, így nullával kiterjeszthető $g_\alpha(\sigma) \in \Gamma(|\sigma|, \mathscr{S})$ szeléssé. Ezt a konstrukciót megismételve $\forall \sigma \in \mathfrak{U}^p$

elemre kapunk $g_\alpha \in C^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ koláncokat, valamint a lokális végesség miatt ezek összege $g = \sum_\alpha g_\alpha$ is jóldefiniált $(p-1)$-kolánc.

Ha $\tau \in \mathfrak{U}^{p+1}$ akkor a $V_\alpha \cap |\tau|$ halmaz pontjai fölött a kiterjesztés miatt

$$\delta g_\alpha(\tau) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j g_\alpha(\tau_j) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \eta_\alpha^* f((\tau_j)^\alpha).$$

Mivel f kociklus, így a következő is teljesül:

$$0 = \delta f(\tau^\alpha) = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j f((\tau^\alpha)_j) =$$

$$= f(\tau) + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j f((\tau_{j-1})^\alpha) = f(\tau) - \sum_{j=0}^{p} (-1)^j f((\tau_j)^\alpha).$$

Tehát $V_\alpha \cap |\tau|$ halmazon $\eta_\alpha^*(f(\tau)) = \eta_\alpha^* \left(\sum_{j=0}^{p} (-1)^j f((\tau_j)^\alpha) \right) = \delta g_\alpha(\tau)$, és mivel ezen kívül mindkét oldal 0, így az állítás igaz a teljes $|\tau|$-ra is.

Így $f = \sum_\alpha \eta_\alpha^*(f) = \sum_\alpha \delta g_\alpha = \delta g$, tehát $0 = [f] \in H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ $\forall f$ esetén. $\square$

A további vizsgálódáshoz vezessük be a következő fogalmat.

4.2.2. Definíció (Leray fedés)**.** *Az M tér $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ nyílt fedése* Leray fedés *az $\mathscr{S}$ R-modulus kévéhez, ha $\forall p \geq 0, \forall \sigma \in \mathfrak{U}^{p+1}$ mellett $H^q(|\sigma|, \mathscr{S}) = 0$ $q \geq 1$ esetén.*

4.2.3. Tétel (Leray)**.** *Legyen $\mathscr{S}$ R-modulus kéve az M parakompakt Hausdorff tér felett, és $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ tetszőleges nyílt fedés. Ekkor léteznek $H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S}) \to H^p(M, \mathscr{S})$ homomorfizmusok $\forall p \geq 0$ esetén. Ez izomorfizmus a $p = 0$ esetben, injektív, ha $p = 1$, továbbá Leray-fedés esetén $\forall p$-re izomorfizmusok.*

Bizonyítás.
Tekintsük $\mathscr{S}$ kanonikus feloldását: $0 \longrightarrow \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{A}^0(\mathscr{S}) \xrightarrow{D} \mathscr{A}^1(\mathscr{S}) \xrightarrow{D} \cdots$. Ekkor $\forall p, q \geq 0$ indexekre D indukál $D^* : C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{A}^q(\mathscr{S})) \to C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{A}^{q+1}(\mathscr{S}))$ homomorfizmusokat, melyek kommutálnak a Čech-kohatár leképezéssel. Így az $A^{p,q} = C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{A}^q(\mathscr{S}))$ modulusok a $\partial = \delta : A^{p,q} \to A^{p+1,q}$ és a $\bar\partial = (-1)^{p+q} D^* : A^{p,q} \to A^{p,q+1}$ homomorfizmusokkal kettős komplexust alkotnak, melyekre alkalmazható a 2.2.9 tétel, megkonstruálható a két konvergens spektrális sorozat.

A második filtrálás tagjaira az $\mathscr{A}^q(\mathscr{S})$ kévék finomságából és az előző tételből adódóan teljesül, hogy

$$H_\partial^q(A^{*,p}) = H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{A}^p(\mathscr{S})) = \begin{cases} \Gamma(M, \mathscr{A}^p(\mathscr{S})) & \text{ha } 0 = q \\ 0 & \text{ha } 0 < q. \end{cases}$$

Így

$${}_2E_2^{p,q}(A) = H_{\bar\partial}^p(H_\partial^q(A^{*,*})) = \begin{cases} H^p(M, \mathscr{S}) & \text{ha } 0 = q \\ 0 & \text{ha } 0 < q. \end{cases}$$

Mivel az ${}_2E_2$ spektrális sorban csak egy oszlop elemei különböznek a 0 modulustól, így ${}_2E_2^{p,q} = {}_2E_\infty^{p,q}$ teljesül és így (a 3.3.1 tétel bizonyításában leírt módon) $H^n(A) = {}_2E_\infty^{n,0} = H^n(M,\mathscr{S})$.

Az első filtrálást tekintve $A^{p,q} = C^p(\mathfrak{U},\mathscr{A}^q(\mathscr{S})) = \prod_{\sigma\in\mathfrak{U}^{p+1}} \Gamma(|\sigma|,\mathscr{A}^q(\mathscr{S}))$, így $H^q_\partial(A^{p,*}) = \prod_{\sigma\in\mathfrak{U}^{p+1}} H^q(|\sigma|,\mathscr{S})$, speciálisan

$$H^0_\partial(A^{p,*}) = \prod_{\sigma\in\mathfrak{U}^{p+1}} H^0(|\sigma|,\mathscr{S}) = \prod_{\sigma\in\mathfrak{U}^{p+1}} \Gamma(|\sigma|,\mathscr{S}) = C^p(\mathfrak{U},\mathscr{S}).$$

Ezáltal ${}_1E_2^{p,0}(A) = H^p_\partial(H^0_\partial(A^{*,*})) = H^p(\mathfrak{U},\mathscr{S})$, és a 2.2.10 következményben szereplő ${}_1E_2^{p,0}(A) \to H^p(A^*)$ homomorfizmusok jelen esetben $H^p(\mathfrak{U},\mathscr{S}) \to H^p(M,\mathscr{S})$ leképezéseket adnak.

A $p = 0$ esetben láttuk, hogy $H^0(\mathfrak{U},\mathscr{S}) \cong \Gamma(M,\mathscr{S}) \cong H^0(M,\mathscr{S})$, a $p = 1$ eset injektivitása pedig adódik a 2.2.10 következményből.

Ha $\mathfrak{U}$ Leray fedés, akkor $q > 0$ esetén

$${}_1E_2^{p,q}(A) = H^p_\partial(H^q_\partial(A^{*,*})) = H^p\left(\prod_{\sigma\in\mathfrak{U}^{*+1}} H^q(|\sigma|,\mathscr{S})\right) = 0,$$

így ${}_1E_2^{p,q} = {}_1E_\infty^{p,q}$. Ezáltal $H^n(A) = {}_1E_2^{n,0} = H^n(\mathfrak{U},\mathscr{S})$, és ezt összevetve a második filtrálás limesével $H^n(M,\mathscr{S}) \cong H^n(\mathfrak{U},\mathscr{S})$ adódik. □

Láttuk, hogy egy fedés finomítása a Čech-kohomológia modulusokon jóldefiniált homomorfizmusokat indukál, most belátjuk, hogy ezek a homomorfizmusok kompatibilisek az előző tétel leképezéseivel.

4.2.4. Tétel. *Legyen $\mathscr{S}$ R modulus kéve az M parakompakt Hausdorff tér felett, $\mathfrak{U}$ M nyílt fedése, a $\mathfrak{B}$ fedés $\mathfrak{U}$ egy finomítása, λ egy finomító leképezés. Ekkor az előző tétel homomorfizmusait ϕ-vel, illetve ψ-vel jelölve a következő diagram kommutatív:*

$$\begin{tikzcd}
H^n(\mathfrak{U},\mathscr{S}) \arrow[dr, "\phi"] \arrow[dd, "\lambda^*"'] & \\
& H^n(M,\mathscr{S}) \\
H^n(\mathfrak{B},\mathscr{S}) \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Ha $\mathfrak{U}$ és $\mathfrak{B}$ is Leray-fedés, akkor λ^* izomorfizmus.

Bizonyítás. Tekintsük $\mathscr{S}$ kanonikus felbontását az $\mathscr{A}^q(\mathscr{S})$ kévékkel, és vegyük az előző tételhez hasonlóan az $A^{p,q}(\mathfrak{U}) = C^p(\mathfrak{U},\mathscr{A}^q(\mathscr{S}))$, $A^{p,q}(\mathfrak{B}) = C^p(\mathfrak{B},\mathscr{A}^q(\mathscr{S}))$ kettős komplexusokat. Ezeken a finomító leképezés indukál $\lambda^* : A^{p,q}(\mathfrak{U}) \to A^{p,q}(\mathfrak{B})$ homomorfizmusokat, melyek a 2.2.11 megjegyzés szerint λ^* homomorfizmusokat indukálnak az asszociált spektrális sorok tagjai között.

Vegyük észre, hogy a korábbi állítások alapján

- Az előző tétel bizonyításában láttuk, hogy $H^n(A(.)) = {}_2E_\infty^{n,0}(A(.)) = H^n(M,\mathscr{S})$, ahol . helyére $\mathfrak{U}$ vagy $\mathfrak{B}$ írható, és így az indukált $H^n(\lambda) : H^n(A(\mathfrak{U})) \to H^n(A(\mathfrak{B}))$ leképezésre teljesül, hogy $H^n(\lambda) = Id_{H^n(M,\mathscr{S})}$.
- Az első filtrálásra léteznek a $\phi' : {}_1E_2^{n,0}(A(\mathfrak{U})) \to {}_1E_\infty^{n,0}(A(\mathfrak{U}))$ és a $\psi' : {}_1E_2^{n,0}(A(\mathfrak{B})) \to {}_1E_\infty^{n,0}(A(\mathfrak{B}))$ leképezések (lsd. 2.2.10).
- ${}_1E_\infty^{n,0}(A(.)) = {}_1F^nH^n(A(.))/{}_1F^{n+1}H^n(A(.)) = {}_1F^nH^n(A(.)) \subseteq H^n(A(.))$, mivel ${}_1F^{n+1}H^n(A(.)) = 0$ (definíciók szerint). A $H^n(A(.)) = H^n(M,\mathscr{S})$ azonosság szerint így ${}_1E_\infty^{n,0}(A(.)) \subseteq H^n(M,\mathscr{S})$.
- Az előző bizonyításban látott módon ${}_1E_2^{n,0}(A(.))$ megegyezik a megfelelő $H^n(.,\mathscr{S})$ Čech-kohomológia modulussal.

Ezeket az észrevételeket a következő diagram foglalja össze

$$\begin{tikzcd}
H^n(\mathfrak{U},\mathscr{S}) = {}_1E_2^{n,0}(A(\mathfrak{U})) \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\lambda^*"] & {}_1E_\infty^{n,0}(A(\mathfrak{U})) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\lambda^*"] & H^n(M,\mathscr{S}) \arrow[d, "H^n(\lambda) = Id_{H^n(M,\mathscr{S})}"] \\
H^n(\mathfrak{B},\mathscr{S}) = {}_1E_2^{n,0}(A(\mathfrak{B})) \arrow[r, "\psi'"] & {}_1E_\infty^{n,0}(A(\mathfrak{B})) \arrow[r, hook] & H^n(M,\mathscr{S}),
\end{tikzcd}$$

melyből a megfelelő összevonások után megkapjuk az állítást.

Ha $\mathfrak{U}$ és $\mathfrak{B}$ is Leray-fedések, akkor ϕ és ψ izomorfizmus, így $\lambda^* = \psi^{-1} \circ \phi$ is az. $\square$

4.2.5. Következmény. A tétel közvetlen következménye, hogy léteznek $\check{H}^n(M,\mathscr{S}) \to H^n(M,\mathscr{S})$ homomorfizmusok is, hisz a finomító leképezésekkel kompatibilis ϕ a direkt limesen homomorfizmust indukál.

A fejezet fő tételében belátjuk, hogy e homomorfizmusok kellően szép (parakompakt Hausdorff) terekre valójában izomorfizmusok, de ehhez szükséges lesz még egy kis előkészület.

Egyrészt vegyük észre, hogy a Čech-koláncok $C^p(\mathfrak{U},\mathscr{S})$ modulusaihoz csak a $\Gamma(|\sigma|,\mathscr{S})$ modulusokra, és a megszorítás operátorokra volt szükségünk. Ezek megfelelői adottak egy előkéve esetén is, definiálhatjuk a $C^p(\mathfrak{U},\{\mathscr{S}_U\})$ modulusokat melynek elemei a $\{\mathscr{S}_U\}$ előkéve-együtthatós p-koláncok. A kohatár leképezéseket az eredetivel megegyező módon definiálva megkapjuk a megfelelő kolánc-komplexust, melynek kohomológiái a $H^p(\mathfrak{U},\{\mathscr{S}_U\})$ modulusok.

A finomítások által a kohomológiákon indukált jóldefiniált homomorfizmus létezéséhez (4.1.6 lemma) sem használtuk fel a kévék tulajdonságait, így definiálhatóak a $\check{H}^n(M,\{\mathscr{S}_U\}) = \varinjlim_{\{\mathfrak{U}\}} H^n(\mathfrak{U},\{\mathscr{S}_U\})$ előkéve-együtthatós Čech-kohomológia modulusok is.

4.2.6. Lemma. *Legyen* $\{\mathscr{S}_U\}$ *R-modulus előkéve a parakompakt Hausdorff* M *tér felett, melyre az asszociált kéve a zérókéve. Ekkor* $\check{H}^n(M, \{\mathscr{S}_U\}) = 0$ $\forall p \geq 0$ *esetén.*

Bizonyítás. A direkt limes és a faktorizáció definíciójából adódóan tetszőleges $\check{f} \in \check{H}^n(M, \{\mathscr{S}_U\})$ elem reprezentálható egy $f \in C^p(\mathfrak{U}, \{\mathscr{S}_U\})$ kociklussal, elég finom $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ fedés választásával. A fedést esetleg tovább finomítva feltehetjük, hogy $\mathfrak{U}$ lokálisan véges (hisz M parakompakt), és vehetjük egy $\mathfrak{B} = \{V_\alpha\}_\alpha$ finomítását, amire $\forall\alpha$ esetén $V_\alpha \subseteq \overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$ teljesül (M parakompakt és Hausdorff, így normális).

Mivel a direkt limesként előálló asszociált kéve a zérókéve, így tetszőleges $\sigma \in \mathfrak{U}^{p+1}$ $(p+1)$-esre és $Z \in |\sigma|$ pontra az $f(\sigma) \in \mathscr{S}_{|\sigma|}$ elem Z egy alkalmas $W_{Z,\sigma}$ környezetére való megszorítása a $\mathscr{S}_{W_{Z,\sigma}}$ nullelemét kell hogy adja. Az $\mathfrak{U}$ fedés lokális végessége miatt adott Z pont csak véges sok $|\sigma|$ halmazban lehet benne, így Z megfelelő környezetére – a $W_Z = \cap_\sigma W_{Z,\sigma}$ halmazra – teljesül, hogy a megszorítás $\rho_{W_Z,|\sigma|}(f(\sigma)) = 0 \in \mathscr{S}_{W_Z}$, $\forall\sigma \in \mathfrak{U}^{p+1}$ esetén, amennyiben $Z \in |\sigma|$.

A W_Z halmazokra (esetleg további szűkítésükkel) feltehető, hogy *a.*) $W_z \subseteq V_\alpha$ ha $Z \in V_\alpha$ és *b.*) $Z \in U_\alpha$ ha $W_Z \cap V_\alpha \neq \emptyset$. Az *a.*) pont miatt ezen halmazok összessége, a $\mathfrak{W}$ fedés, $\mathfrak{B}$ egy finomítása. Jelölje a finomító leképezést $\tilde{\lambda}$, továbbá ennek a $\mathfrak{B} \to \mathfrak{U}$ finomítással vett kompozíciója legyen $\lambda : \mathfrak{W} \to \mathfrak{U}$.

Tekintve egy $\tilde{\sigma} = (W_{Z_0}, W_{Z_1}, \ldots, W_{Z_p}) \in \mathfrak{W}^{p+1}$ $(p+1)$-est, ennek képei legyenek $\bar{\sigma} = \tilde{\lambda}(\tilde{\sigma}) = (V_{\alpha_0}, V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_p}) \in \mathfrak{B}^{p+1}$ és $\sigma = \lambda(\tilde{\sigma}) = (U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_p}) \in \mathfrak{U}^{p+1}$. Ekkor, ha $|\tilde{\sigma}| \neq \emptyset$ akkor a $|\tilde{\sigma}| = \cap_i W_{Z_i} \subseteq |\bar{\sigma}| = \cap_j V_{\alpha_j}$ összefüggés miatt $W_{Z_i} \cap V_{\alpha_j} \neq \emptyset$ igaz $\forall i, j$ párra, így a *b.*) tulajdonság szerint $Z_i \in U_{\alpha_j}$. Tehát fennáll, hogy $Z_i \in |\sigma|$ és mivel $\rho_{W_{Z_j},|\sigma|}(f(\sigma)) = 0$ így $\rho_{|\tilde{\sigma}|,|\sigma|}(f(\sigma)) = 0$ is teljesül.

Tehát a finomítás által indukált $\lambda^* f \in C^p(\mathfrak{W}, \{\mathscr{S}_U\})$ kociklusra teljesül, hogy $(\lambda^* f)(\tilde{\sigma}) = \rho_{|\tilde{\sigma}|,|\sigma|}(f(\lambda(\tilde{\sigma}))) = \rho_{|\tilde{\sigma}|,|\sigma|}(f(\sigma)) = 0$, így az f által reprezentált $\check{f} \in \check{H}^n(M, \{\mathscr{S}_U\})$ elem nulla, tehát $\check{H}^n(M, \{\mathscr{S}_U\}) = 0$. $\square$

A másik szükséges eszköz a $\check{H}^n(M, \mathscr{S})$ Čech-kohomólgia modulusok egy másik ekvivalens definíciója.

Vegyük M összes nyílt fedésének azt a $\mathscr{C}$ alosztályát amelyben az $\mathfrak{U} = \{U_Z\}_Z$ fedés elemei M pontjaival vannak indexelve, és $Z \in U_Z$ a Z pont egy nyílt környezete. Ekkor $\mathscr{C}$-n bevezethető a finomítások által definiált részbenrendezés, $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{B} \Leftrightarrow V_Z \subseteq U_Z$ $\forall Z \in M$. Továbbá létezik egy kanonikus finomító leképezés, mely $\mathfrak{B} \ni V_Z$-hez az azonos ponttal indexelt $\mathfrak{U} \ni U_Z$-t rendeli. Ekkor a finomítás által indukált leképezéssel maguk a $C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ modulusok is direkt rendszert alkotnak, így bevezethetők a $\check{C}^p(M, \mathscr{S}) = \varinjlim_{\mathscr{C}} C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ direkt limes modulusok.

A finomítással nyilván kommutáló δ Čech-kohatár leképezések a direkt limeseken $\delta : \check{C}^p(M, \mathscr{S}) \to \check{C}^{p+1}(M, \mathscr{S})$ homomorfizmusokat indukálnak, melyekkel a $\check{C}^p$ modulusok kolánc-komlexust alkotnak. Ennek kohomológiáit jelölje $H^p(\check{C}^*(M, \mathscr{S}))$ de ezek bizonyíthatóan izomorfak a $\check{H}^p(M, \mathscr{S})$ modulusokkal.

Ugyanis, ha az $[f] \in H^p(\check{C}^*(M, \mathscr{S}))$ elemet az $f \in \check{C}^p(M, \mathscr{S})$ elem reprezentálja (melyre $\delta f = 0 \in \check{C}^{p+1}(M, \mathscr{S})$), akkor a direkt limes definíciójából adódóan f pedig egy $f_{\mathfrak{U}} \in C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ koláncсal reprezentálható. Esetleg megfelelő finomításra áttérve a $\delta f_{\mathfrak{U}} = 0 \in C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ is teljesül, így $[f_{\mathfrak{U}}] \in H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$, amit tekinthetünk a direkt limesben egy elem reprezentánsának is..

4.2.7. Lemma. *A kapott $\phi : H^p(\check{C}^*(M, \mathscr{S})) \to \check{H}^n(M, \mathscr{S})$ hozzárendelés jóldefiniált izomorfizmus.*

Bizonyítás. Szükséges hogy ϕ független a reprezentánsok választásától, valamint injektív és szürjektív. Mindhárom feltétel egyenes számolással leellenőrizhető.

A ϕ hozzárendelés függhetne f és az $f_{\mathfrak{U}}$ reprezentánsoktól. Az utóbbitól való függetlenség következik a direkt limesek konstrukciójából, az előbbi választás lényegtelenségét pedig a következő érvelés mutatja: Ha $[f] = [f'] \in H^p(\check{C}^*(M, \mathscr{S}))$ akkor $f - f' = dg \in \check{C}^p(M, \mathscr{S})$, és megfelelő fedést választva $f_{\mathfrak{U}} - f'_{\mathfrak{U}} = dg_{\mathfrak{U}} \in C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$. Ekkor $[f_{\mathfrak{U}}] = [f'_{\mathfrak{U}}] \in H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$.

Ha az $[f] \in H^p(\check{C}^*(M, \mathscr{S}))$ elemre $\phi([f]) = 0 \in \check{H}^p(M, \mathscr{S})$, akkor megfelelő fedésre $[f_{\mathfrak{U}}] = 0 \in H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$, azaz $f_{\mathfrak{U}} = \delta g_{\mathfrak{U}} \in C^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$. Ekkor $f = \delta g \in \check{C}^p(M, \mathscr{S})$, azaz $[f] = 0 \in H^p(\check{C}^*(M, \mathscr{S}))$.

A szürjektivitás még triviálisabb, $\check{H}^n(M, \mathscr{S})$ egy $[f]$ elemének elég olyan $\mathfrak{U}$ fedés feletti $[f_{\mathfrak{U}}] \in H^p(\mathfrak{U}, \mathscr{S})$ reprezentációját venni, ahol $\mathfrak{U} \in \mathscr{C}$. Ilyen mindig létezik, és ekkor $[f_{\mathfrak{U}}] \in H^p(\check{C}^*(M, \mathscr{S}))$. □

Megjegyzés: Ez a konstrukció is működik kéve együttható helyett előkévékkel is.

4.2.8. Tétel. *Ha $\mathscr{S}$ az M parakompakt Hausdorff tér feletti R-modulus kéve akkor a $\check{H}^n(M, \mathscr{S}) \to H^p(M, \mathscr{S})$ természetes homomorfizmusok izomorfizmusok.*

Bizonyítás. Vegyük a $0 \longrightarrow \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{A}^0(\mathscr{S}) \xrightarrow{D} \mathscr{A}^1(\mathscr{S}) \xrightarrow{D} \cdots$ kanonikus feloldást, és tekintsük az $\check{A}^{p,q} = \check{C}^p(M, \mathscr{A}^q(\mathscr{S}))$ modulusokat a $\partial = \delta : \check{A}^{p,q} \to \check{A}^{p+1,q}$ és $\bar{\partial} = (-1)^{p+q} D^* : \check{A}^{p,q} \to \check{A}^{p,q+1}$ leképezésekkel. Ekkor $(\check{A}^{p,q}, \partial, \bar{\partial})$ kettős komplexust alkot, tekinthetjük a két asszociált spektrális sorozatot.

A második filtrálás esetén az $\mathscr{A}^q(\mathscr{S})$ kévék finomságából a korábbi tétel alapján következik, hogy

$$H^q_{\partial}(\check{A}^{*,p}) = H^q(\check{C}^*(M, \mathscr{A}^q(\mathscr{S}))) = \check{H}^q(M, \mathscr{A}^q(\mathscr{S})) = \begin{cases} \Gamma(M, \mathscr{A}^p(\mathscr{S})) & \text{ha } 0 = q \\ 0 & \text{ha } 0 < q, \end{cases}$$

így
$$ {}_2E_2^{p,q}(\check{A}) = H^p_{\partial}(H^q_{\partial}(\check{A}^{*,*})) = \begin{cases} H^p(M,\mathscr{S}) & \text{ha } 0 = q \\ 0 & \text{ha } 0 < q. \end{cases} $$
A korábbi bizonyításokhoz hasonlóan ezek alapján ${}_2E_2^{p,q}(\check{A}) = {}_2E_\infty^{p,q}(\check{A})$ teljesül és így $H^n(\check{A}) = {}_2E_\infty^{n,0}(\check{A}) = H^n(M,\mathscr{S})$.

Az első filtrálás tagjainak leírásához vegyük észre, hogy létezik a következő természetes izomorfizmus: $\mathscr{H}_U^q = H^q(\Gamma(U,\mathscr{A}^*(\mathscr{S})) = H^q(U,\mathscr{S})$ jelölés mellett a direktszorzatos definíció miatt $H^q(C^p(\mathfrak{U},\mathscr{A}^*(\mathscr{S})) \cong C^p(\mathfrak{U},\{\mathscr{H}_U^q\}_U)$. Ekkor a korábbi konstrukcióval analóg módon definiálhatóak a $\check{C}^p(M,\{\mathscr{H}_U^q\}) = \varinjlim_{\{\mathfrak{U}\}} C^p(\mathfrak{U},\{\mathscr{H}_U^q\})$ modulusok, és ezekre $H^q_{\bar{\partial}}(\check{A}^{p,*}) = H^q(\check{C}^p(M,\mathscr{A}^*(\mathscr{S}))) = \check{C}^p(M,\{\mathscr{H}_U^q\})$. Tehát
$$ {}_1E_2^{p,q}(\check{A}) = H^p_{\partial}(H^q_{\bar{\partial}}(\check{A}^{*,*})) = H^p(\check{C}^*(M,\{\mathscr{H}_U^q\})) \cong \check{H}^p(M,\{\mathscr{H}_U^q\}). $$

Mivel $q = 0$ esetén $\mathscr{H}_U^0 = H^0(U,\mathscr{S}) = \Gamma(U,\mathscr{S})$, így $\{\mathscr{H}_U^0\}$ a $\mathscr{S}$-hez asszociált előkéve $\{\mathscr{S}_U\}$, és így $\check{H}^p(M,\{\mathscr{H}_U^0\}) = \check{H}^p(M,\{\mathscr{S}_U\}) \cong \check{H}^p(M,\mathscr{S})$.

Másrészt $q > 0$ esetén a $\mathscr{H}_U^q$ a zérókévét asszociálja, a következő érvelés szerint: Mivel $\mathscr{A}^m(\mathscr{S})$ szárai előállnak szelések direkt limeseként, és a kanonikus feloldás kévék exakt sorát adja, így $\forall m$-re minden $Z \in M$ pontra választható megfelelően kis $U \subseteq M$ nyílt halmaz, melyre a
$$ \cdots \to \Gamma(U,\mathscr{A}^{m-1}(\mathscr{S})) \to \Gamma(U,\mathscr{A}^m(\mathscr{S})) \to \Gamma(U,\mathscr{A}^{m+1}(\mathscr{S})) \to \cdots $$
sor is exakt, így $\mathscr{H}_U^m = H^m(\Gamma(U,\mathscr{A}^*(\mathscr{S})) = 0$. Tehát a $\mathscr{H}_U^m$ halmazok direkt limeseként előálló szárak mind nullák az asszociált kévében. A 4.2.6 lemma szerint ekkor $\check{H}^p(M,\{\mathscr{H}_U^q\}) = 0$.

Az eseteket összevonva
$$ {}_1E_2^{p,q}(\check{A}) = \check{H}^p(M,\{\mathscr{H}_U^q\}) = \begin{cases} \check{H}^p(M,\mathscr{S}) & \text{ha } 0 = q \\ 0 & \text{ha } 0 < q \end{cases} $$
adódik, melyből ${}_1E_2^{p,q}(\check{A}) = {}_1E_\infty^{p,q}(\check{A})$ teljesül és így $H^n(\check{A}) = {}_1E_\infty^{n,0}(\check{A}) = \check{H}^n(M,\mathscr{S})$.

Tehát $H^n(M,\mathscr{S}) \cong \check{H}^n(M,\mathscr{S})$.

Hogy a $\phi : \check{H}^n(M,\mathscr{S}) \to H^n(M,\mathscr{S})$ természetes homomorfizmus maga izomorfizmus az következik a konstrukcióból. Ugyanis ϕ a Leray tételben (4.2.3) bevezetett, finomításokkal kompatibilis $\phi_{\mathfrak{U}} : H^n(\mathfrak{U},\mathscr{S}) \to H^n(M,\mathscr{S})$ homomorfizmusok által a direkt limesen indukált leképezés, melyek az ottani bizonyítás alapján az ${}_1E_2^{n,0}(A_{\mathfrak{U}}) \to H^n(A_{\mathfrak{U}})$ homomorfizmusból adódtak.

Ha $\check{A}^{p,q}$-t az $A_{\mathfrak{U}}^{p,q} = C^p(\mathfrak{U},\mathscr{A}^q(\mathscr{S}))$ modulusok direkt limeseként fogjuk fel, akkor az $\rho : A_{\mathfrak{U}}^{p,q} \to \check{A}^{p,q}$ homomorfizmus az asszociált spektrális sorozatok megfelelő tagjai között ρ^* homomorfizmust indukál. E mentén a $\phi_{\mathfrak{U}}$-ből keletkező leképezés egyrészt pont a ${}_1E_2^{n,0}(\check{A}) \to H^n(\check{A})$ által adott $\check{H}^n(M,\mathscr{S}) \xrightarrow{\cong} H^n(M,\mathscr{S})$ izomorfizmus, másrészt ρ definíciója miatt maga ϕ. A szemléletesség kedvéért ugyanez diagramon:

$$\begin{tikzcd}
H^n(\mathfrak{U},\mathscr{S}) = {}_1E_2^{n,0}(A_{\mathfrak{U}}) \arrow[r, "\phi_{\mathfrak{U}}"] \arrow[d, "\rho^*"] & H^n(M,\mathscr{S}) \arrow[d, "\rho^*"] \\
\check{H}^n(M,\mathscr{S}) = {}_1E_2^{n,0}(\check{A}) \arrow[r, "\cong"] & H^n(M,\mathscr{S}).
\end{tikzcd}$$

□

Megjegyzés: Az ebben a szekcióban bemutatott állítások jó részének spektrális sorozatokat nélkülöző alternatív bizonyításait kaphatjuk Bott & Tu Tic-Tac-Toe lemmáját alkalmazva ([1] 12.1 lemma).

5. A klasszikus kohomológiák számolása kévékkel

Ebben a fejezetben bemutatom, hogy lehet összekapcsolni a klasszikus kohomológiaelméleteket az eddig tárgyaltakkal. A szimpliciális-, szinguláris-, deRham- és Dolbeault-kohomológiák kévék felőli megközelítését fogom felvázolni. Ehhez elengedhetetlen pár sorban bevezetni az adott kohomológia-fajtákat, de mivel ezek általában részei az egyetemi tanulmányoknak, a bevezetőket szűkre fogom, és az alap tételek bizonyítását sem fogom részletezni.

5.1. A szimpliciális kohomológia

A szimpliciális kohomológia a szimpliciális homológia duálisaként van definiálva, a precíz részletek megtalálhatók például [2] első fejezetének §2 részében, a lényeg a következő:

Standard szimplexek oldalakon való ragasztásával X topologikus teret (úgynevezett szimpliciális komplexust) kapunk, melyre definiálhatóak a $C_n^{\triangle}(X,\mathbb{Z}) = C_n(X,\mathbb{Z})$ halmazok. Ezek elemei – a láncok – az n-lapok lineáris kombinációi, így nyilván $\mathbb{Z}$-modulusok. Egy $\triangle \in C_n(X,\mathbb{Z})$ szimplexre vehetjük az $i = 0,\dots,n$-edik hiperlapot, az i indexű csúcs elhagyásával nyert $\triangle^i \in C_{n-1}(X,\mathbb{Z})$ szimplexet. Ennek segítségével a modulusok között definiálható a határleképezés

$$d = d_n : C_n(X,\mathbb{Z}) \to C_{n-1}(X,\mathbb{Z}), \text{ melyre } d\left(\sum_\alpha a_\alpha \triangle_\alpha\right) = \sum_\alpha a_\alpha \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \triangle_\alpha^i\right),$$

mellyel $(C_*(X,\mathbb{Z}), d)$ ellenőrizhetően lánckomplexus. Ennek homológiái a szimpliciális homológiák, $H_n^{\triangle}(X,\mathbb{Z})$.

A lánckomplexusok más együtthatóval is definiálhatóak, tetszőleges F Abel-csoportra $C_n(X,F) = C_n(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} F$. Ha F gyűrű (amit mostantól tegyünk fel), akkor így F-modulusokat kapunk.

Tekinthetők e modulusok duálisai, a $C^n_{\triangle}(X,R) = C^n(X,R) = Hom_{\mathbb{Z}}(C_n(X,\mathbb{Z}),R)$ R-modulusok, azaz egy $f \in C^n(X,R)$ kolánc minden $\triangle \in C_n(X,\mathbb{Z})$ szimplexhez R egy elemét rendeli ($f(\triangle) = r_\triangle \in R$), és lineáris. A határleképezés duálisa a $d = d^n : C^n(X,R) \to C^{n+1}(X,R)$ kohatár-homomorfizmus, mely a $(df)(\triangle) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f(\triangle^i)$ képlettel adható meg, és mellyel $(C^n(X,R), d)$ kolánckomplexus. $H^n_{\triangle}(X,R) = H^n(X,R) := H^n(C^*(X,R))$.

Alapvető (bár nem triviális) tétel, hogy a szimpliciális (ko)homológia nem függ a szimpliciális felosztás finomságától – szimplexeket alkalmas módon tovább osztva a (ko)homológia modulusok nem változnak.

5.1.1. Tétel. *Az M szimpliciális komplexusra $H^n_\triangle(M,R) \cong \check{H}^n(M,\mathbf{R}) \cong H^n(M,\mathbf{R})$, ahol $\mathbf{R}$ a triviális kévét jelöli, melynek minden szára az R-modulus.*

Bizonyítás. A Griffiths& Harris könyv [4] bizonyítását követem (3. fejezet).

Egy szimpliciális komplexus parakompakt és Hausdorff, tehát a Čech-kohomológia definiálásával nincs gond, és a második izomorfizmust már beláttuk.

Az első izomorfizmushoz vegyük $\forall v_\alpha \in C_0(M,R)$ csúcsra (0-dimenziós szimplexre) az $S(v_\alpha)$ nyílt halmazt, mely az összes olyan szimplex belsejének uniója, melynek v_α csúcsa. Ez a v_α *csillaga*, és a csillagok együtt fedik M-et, legyen $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\} = \{S(v_\alpha)\}$.

Tetszőleges $\sigma = (U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_p}) \in \mathfrak{U}^p$ esetén $|\sigma| \neq \emptyset$ pontosan akkor teljesül, ha a $v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_1}$ pontok egy p-szimplex csúcsai, ekkor viszont $|\sigma|$ összefüggő is. Így $\Gamma(|\sigma|,\mathbf{R}) = \begin{cases} R & \text{ha a } v_{\alpha_i} \text{ csúcsok egy p-szimplexet feszítenek ki,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

Tehát a $\phi : C^p(\mathfrak{U},\mathbf{R}) \to C^p_\triangle(M,R)$ homomorfizmus, amire $f \in C^p(\mathfrak{U},\mathbf{R})$ esetén (és a $\sigma = (U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_p})$ melletti $\triangle_\sigma = Span < v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_p} >$ jelölést alkalmazva), $(\phi(f))(\triangle_\sigma) = f(\sigma) \in \Gamma(|\sigma|,\mathbf{R}) = R$ valójában izomorfizmus.

Továbbá

$$
\begin{aligned}
(\phi\delta f)(\triangle_\sigma) = \phi(\delta f(\triangle_\sigma)) = \delta f(\sigma) = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i f(\sigma_i) = \\
= \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i \phi f(\triangle_{\sigma_i}) = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i \phi f(\triangle^i_\sigma) = (d\phi f)(\triangle_\sigma),
\end{aligned}
$$

azaz $\phi\delta = d\phi$, így a kolácok is izomorfak, $C^*(\mathfrak{U},\mathbf{R}) \cong C^*_\triangle(M,R)$. Ezáltal a kohomológia-modulusok is azok, $H^n(\mathfrak{U},\mathbf{R}) \cong H^n_\triangle(M,R)$.

Meggondolható, hogy a Čech-kohomológiához csak szimpliciális finomítások mentén véve a direkt limest ugyanarra a eredményre jutunk, így $\check{H}^n(M,\mathbf{R}) \cong H^n_\triangle(M,R)$.

□

5.2. A szinguláris kohomológia

Rögzítsük $\forall n$-re az $\mathbb{R}^n \supseteq \triangle^n = \{x \in \mathbb{R}^n : q \leq x_i \leq 1, \sum x_i = 1\}$ kanonikus szimplexet. Mint az előző fejezetben, vehetjük az $i = 0, \dots, n$-edik csúcs elhagyásával nyert $(\triangle^n)_i$ lapokat, melyek azonosíthatóak a $\triangle^{n-1}$ szimplexszel.

Legyen M topologikus tér, és definiáljuk a

$$C^{sing}_n(M,\mathbb{Z}) = Span_\mathbb{Z}\{f : \triangle^n \to M,\ f \text{ folytonos}\}$$

Abel-csoportokat, valamint az R gyűrű esetén a $C^{sing}_n(M,R) = C^{sing}_n(M,\mathbb{Z}) \otimes_\mathbb{Z} R$ R-modulusokat, melyek elemeit szinguláris láncoknak, az egyes $f : \triangle^n \to M$ leképezéseket pedig szinguláris szimplexeknek nevezzük. A $d : C^{sing}_n(M,\mathbb{Z}) \to C^{sing}_{n-1}(M,\mathbb{Z})$

határ-homomorfizmusok, melyekre $f \mapsto df = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f|_{(\triangle^n)_i}$ ekkor teljesítik a $d \circ d = 0$ összefüggést. Az így definiált lánckomplexus a *szinguláris lánckomplexus*, homológiái a szinguláris homológiák $H_n^{sing}(M,R)$.

Ezek duálisai a $C^n_{sing}(M,R) = Hom(C_n^{sing}(M,\mathbb{Z}),R)$ modulusok, a d homomorfizmus $d : C^n_{sing}(M,R) \to C^{n+1}_{sing}(M,R)$ duálisát pedig a következő képlet írja le: Ha $\phi \in C^n_{sing}(M,R)$, és $f \in C^{sing}_{n+1}(M,\mathbb{Z})$ egy szinguláris szimplex, akkor $(d\phi)(f) = \phi(df) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\phi(f|_{(\triangle^{n+1})_i}) \in R$. Ismét $d \circ d = 0$, és a szinguláris kolánc-komplexusok kohomológiái a $H^n_{sing}(M,R)$ modulusok.

5.2.1. Tétel. *Ha M egy parakompakt Hausdorff topologikus tér, melynek minden pontjának létezik pontrahúzható környezete, akkor $H^n_{sing}(M,R) = H^n(M,\mathbf{R})$, ahol $\mathbf{R}$ ismét a triviális R-szárú kéve.*

Ez az állítás és bizonyítása Godement [3] könyvén alapul, a II. fejezet 3.8.1-es példája foglalkozik a témával.

5.2.2. Lemma. *Ha M minden pontjának létezik pontrahúzható környezete, akkor megkonstruálhatók a $\mathscr{C}^n(R)$ kévék, melyre $\Gamma(M,\mathscr{C}^n(R)) = C^n_{sing}(M,R)$, és a*

$$0 \to \mathbf{R} \to \mathscr{C}^0(R) \to \mathscr{C}^1(R) \to \dots$$

sorozat kévék exakt sorát adja.

Bizonyítás. Az R jelölését elhagyva legyen $\forall U \subseteq M$ nyílt halmazra $\mathscr{C}^n_U = C^n_{sing}(U)$, ekkor $V \subseteq U$ esetén a $\rho_{V,U} : \mathscr{C}^n_U \to \mathscr{C}^n_V$ megszorítás az $\iota : V \hookrightarrow U$ tartalmazásból adódik. Ugyanis ha $\phi_U \in C^n_{sing}(U)$, akkor az $f \in C^{sing}_n(V)$ szinguláris szimplexre $(\rho_{V,U}\phi_U)(f) = \phi_U(\iota \circ f)$ megfelel a követelményeknek.

Ekkor a $(\{\mathscr{C}^n_U\},\rho)$ objektumok előkévék, ráadásul könnyen láthatóan teljesek is, így az asszociált $\mathscr{C}^n$ kévékre teljesül, hogy $\Gamma(M,\mathscr{C}^n) = \mathscr{C}^n_M = C^n_{sing}(M,R)$.

A sor exaktságához az szükséges, hogy $\forall Z \in M$ pontra a szárak

$$\dots \to \mathscr{C}^{n-1}_Z \to \mathscr{C}^n_Z \to \mathscr{C}^{n+1}_Z \to \cdots$$

sora exakt legyen ($n \geq 1$), ez pedig azt követeli meg, hogy megfelelő $U \ni Z$ környezetre az előkévében

$$\dots \to \mathscr{C}^{n-1}_U \to \mathscr{C}^n_U \to \mathscr{C}^{n+1}_U \to \cdots \quad \text{azaz}$$

$$\dots \to C^{n-1}_{sing}(U) \to C^n_{sing}(U) \to C^{n+1}_{sing}(U) \to \cdots$$

exakt legyen. Ez a feltétel értelmében létező pontra húzható U környezet választásával teljesül, hisz ekkor $H^n_{sing}(U) = 0$.

Az $n = 0$ esetet nem árt külön vizsgálni, itt a $0 \to R \to C^0_{sing}(U) \to C^1_{sing}(U) \to \cdots$ sor exaktsága a kérdés, ami pontrahúzható U-ra a $H^0_{sing}(U, R) = R$ képletből adódik. $\square$

A tétel bizonyítása. Belátjuk, hogy a lemmában szereplő $\mathscr{C}^n(R)$ kévék finomak, ekkor a 3.2.7 szerint $\forall p > 0$ esetén $H^p(M, \mathscr{C}^n(R)) = 0$, így az általánosított deRham-tétel (3.2.1) alkalmazható. Azaz

$$H^n(M, \mathbf{R}) \cong H^n(\Gamma(M, \mathscr{C}^*(R))) = H^n(C^*_{sing}(M, R)) = H^n_{sing}(M, R).$$

A kévék finomságához pedig a elég a 3.2.6 példában leírtak alapján, hogy $\mathscr{C}^n$ modulus az $M \to R$ függvénycsírák $\mathscr{F}$ kévéje felett. Ez teljesül a következő egyszerű konstrukcióval.

Rögzítsünk egy $P \in \triangle^n$ pontot, és $\phi \in C^n_{sing}(U, R)$ kolánc, $\sigma \in C^{sing}_n(U, \mathbb{Z})$ szinguláris szimplex és $F \in F(U, R)$ függvény esetén $(F \cdot \phi)(\sigma) := \phi(\sigma) \cdot F(\sigma(P))$. Ez a szorzás kompatibilis a megszorításokkal, így az asszociált kévéken is megfelelően működik, és egy R értékű egységosztás csíráival való szorzás egységosztást ad $\mathscr{C}^n$ kévéken, bizonyítva finomságukat. $\square$

5.3. A deRham kohomológia

Egy n-dimenziós sima sokaságon vehető $\forall p$ esetén az p-edfokú C^∞ $\mathbb{R}$-értékű differenciálformák $C^p_{dR}(M, \mathbb{R}) = \Omega^p(M, \mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-vektortere, mely a lokális térképeket, lokális koordinátákat használva a $\Omega^p(M, \mathbb{R}) = \left\{ \sum\limits_{|I|=p} f_I dx^I : f_I \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \right\}$ alakot ölti. Itt $I = (i_1, \ldots, i_p)$ esetén $dx^I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$-t jelöli. Ezek között a külső deriválás $d : C^p_{dR} \to C^{p+1}_{dR}$, $d(f_I dx^I) = \sum_i \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx^I$ kohatár-leképezésként funkcionál, és az így definiált kolánc-komplexus (a deRham komplexus) kohomológiái a $H^p_{dR}(M, \mathbb{R})$ deRham kohomológiák.

Az egész konstrukció kévésíthető (lsd. 1.3.3 példa) és így adódik a kévék az 1.3.4 definícióban szereplő

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E}^0 \xrightarrow{d} \mathscr{E}^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathscr{E}^n \xrightarrow{d} 0$$

deRham exakt sora, aminek $\mathscr{E}^n$ tagjai a 3.2.6 példában látott módon finomak. Így rögtön adódik a következő tétel:

5.3.1. Tétel. *Egy n-dimenziós M sima sokaságon $\forall 0 \le p \le n$ esetén $H^p_{dR}(M, \mathbb{R}) \cong H^p(M, \mathbb{R})$, ahol a második kohomológia a triviális $\mathbb{R}$-kéve kohomológiáit jelöli.*

Bizonyítás. A sor exaktságából és a kévék finomságából az általános deRham tétel alapján

$$H^n(M,\mathbb{R}) \cong H^n(\Gamma(M,\mathscr{E}^*)) = H^n(C^*_{dR}(M,\mathbb{R})) = H^n_{dR}(M,\mathbb{R}).$$

$\square$

És a korábbi alfejezetek alapján ennek következménye deRham híres tétele:

5.3.2. Tétel (deRham)**.** *Egy n-dimenziós M sima sokaságon $\forall 0 \le p \le n$ esetén $H^p_{dR}(M,\mathbb{R}) \cong H^p_{sing}(M,\mathbb{R}) \cong H^p_{\triangle}(M,\mathbb{R})$.*

Megjegyzés: Az eredeti tétel állítása kicsit többet mond, ott az izomorfizmus konkrétan meg van adva, mint a differenciálformák integrálása a szimplexeken. Viszont a bizonyítás is sokkal technikaibb, a topologikus Stokes tételt használja $\left(\int\limits_{d\sigma} \Phi = \int\limits_{\sigma} d\Phi\right)$.

Megjegyzés: Az egész konstrukció és a tétel állítása is fennáll holomorf sokaságokra és $\mathbb{C}$ értékű differenciálformákra.

5.4. A Dolbeault kohomológia

Egy n dimenziós komplex sokaságon a fent tárgyalt deRham kohomológiánál részletesebben is vizsgálhatjuk a C^∞ differenciálformákat. A lokális koordináták szokásos $z_i = \Re z_i + i\Im z_i = x_i + iy_i$ felbontásából definiálhatjuk a $dz_i = dx_i + idy_i$ és $d\bar{z}_i = dx_i - idy_i$ 1-formákat, amik a kotangensnyaláb egy bázisát adják. Ezek segítségével definiálható az m-formák terének

$$\Omega^m = \bigoplus_{p+q=m} \Omega^{p,q} = \bigoplus_{p+q=m} \left\{ \sum_{|I|=p,|J|=q} f_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J \right\}$$

felbontása, a tagokat a (p,q) típusú differenciálformák terének mondjuk. Itt a második egyenlőség megint lokális koordinátákat használva értendő.

Definiálhatóak a $\partial : \Omega^{p,q} \to \Omega^{p+1,q}$ és $\bar{\partial} : \Omega^{p,q} \to \Omega^{p,q+1}$ leképezések, ahol

$$\partial(f_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J) = \sum_j \frac{\partial f_{I,J}}{\partial z_j} dz_j \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J \text{ és}$$

$$\bar{\partial}(f_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J) = \sum_k \frac{\partial f_{I,J}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz^I \wedge d\bar{z}^J.$$

Ezekre teljesül, hogy a külső deriválás $d = \partial + \bar{\partial}$, valamint hogy $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$.

Rögzített p mellett a $C^{p,q}_{\bar{\partial}}(M,\mathbb{C}) = \Omega^{p,q}$ $\mathbb{C}$-vektorterek a $\bar{\partial}$ homomorfizmussal kolánc-komplexust alkotnak, ezek kohomológiái a $H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M,\mathbb{C})$ Dolbeault kohomológia-modulusok.

Különösen fontosak az $\mathcal{O}^p$ holomorf p-formák, a Cauchy-Riemann egyenletek álalánosításaként ezek azok a $(p,0)$ formák, melyekre $\bar{\partial} = 0$. Speciálisan az előbbi eszközzel megfogalmazva $\mathcal{O}^p = H^{p,0}_{\bar{\partial}}(M, \mathbb{C})$

A konstrukció megint kévésíthető, így adódnak az 1.3.5 példában felvázolt kévék, és azok 1.3.6-ban felírt

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}^p \longrightarrow \mathscr{E}^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{E}^{p,2} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{E}^{p,n} \xrightarrow{\bar{\partial}} 0$$

exakt sora.

5.4.1. Tétel (Dolbeault)**.** *Az M komplex sokaságra* $H^q(M, \mathscr{O}^p) = H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M, \mathbb{C})$.

Bizonyítás. Az állítás közvetlen alkalmazása az általános deRham tételnek, ugyanis a $\mathscr{E}^{p,q}$ kévék finomak a 3.2.6 példa alapján. □

5.4.2. Következmény. Az M komplex sokaságra létezik egy E_2 spektrális sorozat (az úgynevezett *Fröhlicher spektrális sorozat*) melynek kezdőtagjai

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p_d(H^q(M, \mathscr{O}^p)) & \text{ha a } p \geq 0, q \geq 0 \\ 0 & \text{ha } p < 0 \text{ vagy } q < 0, \end{cases}$$

és az $E^{p,q}_\infty$ limestagokra $H^n(M, \mathbb{C}) = \sum\limits_{p+q=n} E^{p,q}_\infty$.

Bizonyítás. Az $(A^{p,q} = \Gamma(M, \mathscr{E}^{p,q}), \partial, \bar{\partial})$ kettős komplexusra alkalmazva az általános elméletet a $E_2^{p,q} = H^p_\partial(H^q_{\bar{\partial}}(A^{*,*})) = H^p_\partial(H^q(M, \mathscr{O}^p)) = H^p_d(H^q(M, \mathscr{O}^p))$. Másrészt mivel a totális komplexus az $(A^n = \Gamma(M, \mathscr{E}^n), d)$, vagyis az n-formák a külső deriválással, így $H^n(A^*) = H^n(M, \mathbb{C})$ a deRham tételből.

Az általános $E(H^n(A^*)) = \sum\limits_{p+q=n} E^{p,q}_\infty$ képlet itt tehát

$$H^n(M, \mathbb{C}) = E(H^n(M, \mathbb{C})) = \sum_{p+q=n} E^{p,q}_\infty$$

alakot ölt, ahol az első egyenlőség a $\mathbb{C}$-együtthatós kohomológiák vektortér volta miatt áll fenn. □

Megjegyzés: A kettős komplexus által a kohomológiákon indukált filtrálást *Hodge-filtrálásnak* hívjuk, és több területen is hasznos eszköznek bizonyul.

6. Cousin problémák

Az utolsó fejezetben nézzük a kéve-kohomológia két komplex-függvénytani alkalmazását. Mindkét probléma meromorf függvényekkel kapcsolatos, arra keresnek választ, hogy egy adott térben milyen feltételekkel létezik meromorf függvény megadott pólusokkal. Valójában az első probléma 1-dimenziós változata volt a kévekohomológia-elmélet egyik első motivációja, úgyhogy ezt külön ki is mondom:

Tétel (Mittag-Leffler). *Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz, és $F \subseteq U$ ennek egy diszkrét zárt részhalmaza. Legyen adva $\forall a \in F$ pontra az $p_a(z) = \sum\limits_{k=1}^{n(a)} \frac{c_a}{(z-a)^k} \in \mathbb{C}\left[\frac{1}{z-a}\right]$ véges Laurent-sor. Ekkor létezik $f \in \mathcal{M}(U) \cap \mathcal{O}(U \setminus F)$ meromorf függvény, melyre $f - p_a$ holomorf a-ban is.*

Bizonyítás. A bizonyítás következni fog az általános elméletből, de közvetlen bizonyítás olvasható például a [4] könyvben (0. fejezet 3. rész). □

6.1. Cousin első problémája

A Mittag-Leffler kérdés általánosítása a következő, Cousin nevéhez kötődő probléma:

6.1.1. Kérdés (Cousin I). *Legyen V egy holomorf varietás, $\{U_j\}$ egy nyílt fedése, és legyenek adva $f_j \in \mathcal{M}(U_j)$ meromorf függvények, melyekre $f_j - f_k$ holomorf az $U_j \cap U_k$ halmazon. Az ilyen (U_j, f_j) párok családját* Cousin-I családnak/eloszlásnak (Cousin-I distribution) *nevezzük. A kérdés, hogy tetszőleges Cousin-I családhoz létezik-e globális f meromorf függvény V-n, melyre $f - f_j$ holomorf U_j-n.*

A kérdés átfogalmazható a kévék nyelvére.

6.1.2. Definíció (Meromorf függvénycsírák kévéje). *Tetszőleges $U \subseteq V$ nyílt halmazra tekintsük az U-n definiált meromorf függvények $\mathscr{M}_U = \mathcal{M}(U)$ gyűrűjét, melyek a ρ megszorítással előkévét alkotnak. Az asszociált $\mathscr{M}$ kévét, nevezzük a* meromorf függvénycsírák kévéjének.

Mivel a meromorf függvények az értelmezési tartományuk egy sűrű nyílt halmazán leírhatóak egy holomorf függvénnyel, és ha az az azonosan 0 függvény, akkor a meromorf függvényünk is az, így a $(\{\mathscr{M}_U\}, \rho)$ előkéve teljes. Ezáltal $\mathscr{M}$ kévére teljesül, hogy $\Gamma(U, \mathscr{M}) = \mathscr{M}_U = \mathcal{M}(U)$.

Ráadásul a holomorf függvények $\mathcal{O}(U) \subseteq \mathcal{M}(U)$ beágyazása injektív homomorfizmust indukál az asszociált kévéken, mely –a faktort $\mathscr{P}$-vel jelölve – a

$$0 \longrightarrow \mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{P} \longrightarrow 0$$

rövid exakt sorral írható le.

6.1.3. Definíció (Principális részek csíráinak kévéje)**.** *A* $\mathscr{P} = \mathscr{M}/\mathscr{O}$ *kévét hívjuk a* principális részek (principal parts) csíráinak kévéjének*. Egy* $p \in \Gamma(U, \mathscr{P})$ *szelést nevezünk* principális résznek.

6.1.4. Megjegyzés. Az 1-dimenziós esetben a meromorf függvények lokálisan leírhatóak a Laurent-sorukkal, a holomorf függvények pedig a Taylor sorukkal. Ezek szerint egy principális rész lokálisan megfelel egy csak negatív kitevőjű tagokkal felírt véges Laurent-sornak, tehát $\mathscr{P}$ egy $\mathscr{P}_a$ szára megfeleltethető az ilyen sorok additív csoportjának.

Továbbá $a \in V$ megfelelő U_a környezetére a faktor definíciója miatt a $p \in \Gamma(U_a, \mathscr{P})$ szelések előállnak egy U_a-n értelmezett meromorf és egy holomorf függvény különbségeként, tehát – mivel 1 dimenzióban a szingularitások izoláltak– $p(a) \in \mathscr{P}_a$ tetszőleges, és $\forall z \in U_a \setminus \{a\}$ esetén $p(z) = 0 \in \mathscr{P}_z$.

Tehát a Mittag-Leffler tétel p_a sorai meghatároznak egy $p \in \Gamma(U, \mathscr{P})$ szelést, melyre $a \in F$ esetén $p(a) = p_a$ és az $a \notin F$ pontokra $p(a) = 0$. És ekkor a tétel állítása, hogy a $\Gamma(U, \mathscr{M}) \to \Gamma(U, \mathscr{P})$ leképezés szürjektív $U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmazokra.

6.1.5. Megjegyzés. Magasabb dimenzióban egy $p \in \Gamma(V, \mathscr{P})$ szelésről a következők mondhatók. Tetszőleges $a \in U$ pontra a $p(a) \in \mathscr{P}_a$ csírát reprezentáló, a egy megfelelő U_a környezetén értelmezett f meromorf függvényre f jó reprezentánsa $p(z) \in \mathscr{P}_z$-nek is $z \in U_a$ esetén. Tehát –a varietások M_2 tulajdonságát felhasználva– V-hez találtunk egy $\{U_j\}$ fedést, és $f_j \in \mathcal{M}(U_j)$ meromorf függvényeket, amik reprezentálják p-t. És mivel az $U_j \cap U_k$ metszeten f_j és f_k ugyanazt a principális részt reprezentálja, így $f_j - f_k$ szükségszerűen holomorf, azaz a $p \in \Gamma(V, \mathscr{P})$ szelések megfelelnek a Cousin-I családoknak.

6.1.6. Tétel. *Egy V varietásra létezik a*

$$0 \longrightarrow \Gamma(V, \mathscr{O}) \xrightarrow{\iota} \Gamma(V, \mathscr{M}) \xrightarrow{P} \Gamma(V, \mathscr{P}) \xrightarrow{\delta} H^1(V, \mathscr{O})$$

exakt sor, így a Cousin-I probléma megoldásának obstrukciója $H^1(V, \mathscr{O})$.

Bizonyítás. Az álítás közvetlenül adódik a kévék rövid exakt sorához asszociált kohomologikus hosszú exakt sorból. □

Megjegyzés: Az előző tételből rögtön következik a Mittag-Leffler tétel, hisz $\forall U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmazra $H^1(U, \mathscr{O}) = H^{0,1}_{\bar\partial}(U, \mathbb{C}) = 0$. Ez pontrahúzható U halmazra következik a $\bar\partial$-Poincaré lemmából (F.6). Nem egyszeresen összefüggő halmazra azonban kicsit mélyebb indoklást kíván, következik például a tényből, hogy $\mathbb{C}$ minden nyílt részhalmaza egy holomorfia-tartomány, és hogy $\mathbb{C}^n$ holomorfiatartományaira $H^{0,q}_{\bar\partial} = 0, \forall q > 0$. Erről bővebben olvashatunk [5] G.9. tételében és a G. fejezet utolsó pár sorában.

6.2. Cousin második problémája

Az előző kérdésnek megfogalmazható egy multiplikatív változata is.

6.2.1. Kérdés (Cousin II)**.** *Legyen V egy holomorf varietás, $\{U_j\}$ egy nyílt fedése, és legyenek adva $f_j \in \mathcal{M}^*(U_j)$ függvények a meromorf függvények multiplikatív csoportjából, melyekre f_j/f_k holomorf és sehol sem eltűnő az $U_j \cap U_k$ halmazon. Az ilyen (U_j, f_j) párok családját* Cousin-II családnak/eloszlásnak *nevezzük és keressük a feltételt ami megadja hogy adott Cousin-II családhoz létezik-e globális f meromorf függvény V-n, melyre f/f_j holomorf és nem nulla U_j-n.*

Kévékkel megfogalmazva, vehetjük a $\mathscr{O}$ kévében a szárak multiplikatív csoportjainak unióját, ami egy nyílt részhalmaza $\mathscr{O}$-nak, és az örökölt topológiában a szorzás ellenőrizhetően folytonos művelet, így megkapjuk az $\mathscr{O}^*$ Abel-csopot kévét. Ugyanezzel a módszerrel kapjuk a meromorf függvénycsírák multiplikatív kévéjét, $\mathscr{M}^*$-t, melynek $\mathscr{O}^*$ nyilván részkévéje. A faktort $\mathscr{D}^*$-ként jelölve adódik a

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}^* \longrightarrow \mathscr{M}^* \longrightarrow \mathscr{D}^* \longrightarrow 0$$

exakt sor.

6.2.2. Definíció (Cartier divizorok csíráinak kévéje)**.** *A $\mathscr{D}^* = \mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ kévét hívjuk a* Cartier divizorok csíráinak kévéjének*. Egy $D \in \Gamma(U, \mathscr{D}^*)$ szelést nevezünk* Cartier divizornak*.*

Megjegyzés: Egy varietás reguláris része felett (így egy sokaság egészén) a Cartier divizorok megfeleltethetőek a máshonnan ismerhető divizor fogalomnak (lsd F.4), de szingularitásoknál előbbiek szűkebb halmazt alkothatnak. Ez a téma azonban nagyon messzire vezetne, úgyhogy nem részletezem, a [7] könyv kicsit részletesebben kifejti.

Az I. problémához hasonlóan a faktor definíciójából egy $D \in \Gamma(V, \mathscr{D}^*)$ Cartier divizorhoz találhatunk $\{U_j\}$ fedést, és $f_j \in \mathcal{M}^*(U_j)$ reprezentánsokat. A metszeteken pedig f_j/f_k holomorf nem eltűnő, azaz Cartier divizorok a Cousin-II családok megfelelői a kévés megfogalmazásban.

6.2.3. Tétel. *Egy V varietásra létezik a*

$$0 \longrightarrow \Gamma(V, \mathscr{O}^*) \longrightarrow \Gamma(V, \mathscr{M}^*) \longrightarrow \Gamma(V, \mathscr{D}^*) \xrightarrow{\delta} H^1(V, \mathscr{O}^*)$$

exakt sor, így a Cousin-II probléma megoldásának obstrukciója $H^1(V, \mathscr{O}^*)$.

Bizonyítás. Mint az előbb. □

Vizsgáljuk meg kicsit jobban az obstrukciót. A δ leképezés a $D \in \Gamma(V, \mathscr{D}^*)$ divizorhoz a $H^1(V, \mathscr{O}^*) = \check{H}^1(V, \mathscr{O}^*)$ azonosság alapján egy $g \in C^1(\mathfrak{U}, \mathscr{O}^*)$ kociklust rendel. Erre a $dg = 0$ feltétel miatt – $g(U_\alpha \cap U_\beta)$ helyett $g_{\alpha\beta}$-t írva – teljesül, hogy $g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}$, ami a komplex vonalnyalábok elméletéből lehet ismerős, a ragasztó függvények formulája. Ráadásul $[g] = [g'] \in H^1(\mathfrak{U}, \mathscr{O}^*)$ pontosan akkor, ha $\frac{g_{\alpha\beta}}{g'_{\alpha\beta}} = \frac{f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}}{f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}}$ egy $f \in C^0(\mathfrak{U}, \mathscr{O}^*)$ szelésre, ami pedig pont az ekvivalens vonalnyalábok szükséges feltétele.

Így $H^1(V, \mathscr{O}^*)$ azonosítható a V feletti vonalnyalábok halmazával, és a δ egy Cartier divizorhoz egy vonalnyalábot asszociál. (A δ konstrukciójába belegondolva látható, hogy ez összhangban van a szokásos divizorokhoz asszociált nyalábokkal.)

Továbbá tekintsük az $exp : \mathscr{O} \to \mathscr{O}^*$ leképezést, mely az f függvény által reprezentált $f_a \in \mathscr{O}_a$ csírához az $e^{2\pi i f}$ csíráját rendeli. Ennek magja a folytonosság miatt a konstants egész értékű függvények halmaza, képe pedig minden száron az ${\mathscr{O}^*}_a$ szár tehát összességében $\mathscr{O}^*$. Azaz létezik a

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathscr{O} \xrightarrow{exp} \mathscr{O}^* \longrightarrow 0$$

rövid exakt sor, aminek kohomologikus hosszú exakt sorának

$$H^1(V, \mathscr{O}) \longrightarrow H^1(V, \mathscr{O}^*) \xrightarrow{c} H^2(V, \mathbb{Z})$$

részéből adódik a c homomorfizmus.

Egy L vonalnyaláb esetén a $c(L) \in H^2(V, \mathbb{Z})$ elemet az L (első) *Chern-osztályának* nevezzük, és ezek vizsgálata egy nagyon hasznos és nagy irodalommal rendelkező terület. Továbbá c-t a δ-val komponálva megkapjuk a Cartier divizorokhoz rendelt Chern osztályokat. Látható, hogy egy nem triviális Chern osztályú divizor semmiképp nem tartozhat egy globális meromorf függvényhez, ezzel egy szükséges (de nem feltétlen elégséges) feltételt nyerve a Cousin-II probléma megoldhatóságára.

Megjegyzés: Ezen osztályokat egy másik konstrukcióval is megkaphatjuk – bár ez az állítás komoly indoklást kívánna, itt csak tőszavakban felvázolom a kapcsolatot. Egy Cartier divizorra mint általános divizorra, azaz 1 komplex kodimenziós így 2 valós kodimenziós részvarietások lineáris kombinációjára tekintve belátható, hogy definiál egy fundamentális osztályt a $(top - 2)$ dimenziós homológiamodulusban. Ennek Poincaré duálisa pont a divizor Chern osztálya $H^2(V, \mathbb{Z})$-ben.

Megjegyzés: Ha továbbá $H^1(V, \mathscr{O}) = 0$, akkor a kohomologikus sor exaktságából c injektív, így kapunk egy

$$0 \longrightarrow \Gamma(V, \mathscr{O}^*) \longrightarrow \Gamma(V, \mathscr{M}^*) \longrightarrow \Gamma(V, \mathscr{D}^*) \xrightarrow{c \circ \delta} H^2(V, \mathbb{Z})$$

exakt sort, így adott Cartier divizorra a Cousin-II probléma megoldhatóságának feltétele pontosan a divizor Chern osztályának trivialitása.

Ráadásul kicsit erősebb feltételek mellett (ha az a $\mathscr{O}$ kévének minden $\mathscr{I}$ úgynevezett *koherens ideál részkévéjére* $H^1(V, \mathscr{I}) = 0$ – definíció [7] B fejezet, az állítás bizonyítása ugyanott a K.5-ös tétel), a δ leképezés szürjektív is, és c izomorfizmus, így az előbbi exakt sor kiegészíthető

$$0 \longrightarrow \Gamma(V, \mathscr{O}^*) \longrightarrow \Gamma(V, \mathscr{M}^*) \longrightarrow \Gamma(V, \mathscr{D}^*) \xrightarrow{c \circ \delta} H^2(V, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

exakt sorrá. A Cousin-II probléma ekkor tehát pontosan akkor megoldható minden divizorra, ha $H^2(V, \mathbb{Z}) = 0$, tisztán topológiai obstrukciót adva a komplex függvénytani kérdésnek.

A fenti feltételt teljesítő varietásokat *Stein varietásoknak* nevezzük, és elméletük szintén szerteágazó téma.

F. Függelék

F.1. Definíció (Direkt limes)**.** Legyen $(I, \leq)$ egy *irányított halmaz*, azaz egy részben rendezett halmaz, melyben tetszőleges $\alpha, \beta \in I$ elemekre $\exists\gamma \in I$ melyre $\alpha \leq \gamma$ és $\beta \leq \gamma$. Legyen továbbá $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ azonos tipusú algebrai objektumok (csoportok, gyűrűk, R-modulusok, stb) halmaza, és $\alpha \leq \beta$ esetén legyenek adva $f_{\beta\alpha} : A_\alpha \to A_\beta$ homomorfizmusok, melyekre *i.*) $f_{\alpha\alpha} = Id_{A_\alpha}$, és *b.*) $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ esetén $f_{\gamma\alpha} = f_{\gamma\beta} f_{\beta\alpha}$.

Ekkor $\mathcal{A}$-t *direkt rendszernek* nevezzük, és definiálható a *direkt limes*:

$$\varinjlim_{\alpha\in I} A_\alpha := \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \Big/ \sim,$$

ahol $A_\alpha \ni a_\alpha \sim a_\beta \in A_\beta$ pontosan akkor, ha $\exists\gamma \geq \alpha, \beta$ melyre $f_{\gamma\alpha}(a_\alpha) = f_{\gamma\beta}(a_\beta)$.

Továbbá $\varinjlim_{\alpha\in I} A_\alpha$ ugyanolyan tipusú algebrai objektum mint az A_α-k, és $\forall\alpha$ indexre az ekvivalencia indukál természetes $A_\alpha \to \varinjlim_{\alpha\in I} A_\alpha$ homomorfizmusokat.

F.2. Tétel. A modulusok kategóriájában a direkt limes exakt funktor, azaz modulusok direkt rendszereinek rövid exakt sorozata esetén a direkt limesek is rövid exakt sorozatot alkotnak.

F.3. Definíció (Varietás)**.** Az $F = \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$ test fölött $V \subseteq F^n$ egy *analitikus (holomorf) részvarietás*, ha lokálisan előáll véges sok $F^n \to F$ analitikus (holomorf) függvény közös nullhelyeként.

Az $f : V \to F$ *függvény analitikus (holomorf, meromorf)* ha V minden $a \in V$ pontjának létezik $a \in U_a \subseteq F^n$ környezete a befoglaló térben és egy $f_a : U_a \to F$ analitikus (holomorf, meromorf) függvény, melyre $f_a|_{U_a\cap V} = f|_{U_a\cap V}$. Ennek segítségével definiálhatók a $V \to W$ részvarietások közötti *sima (holomorf) függvények* – melyek koordinátánként azok – és a *diffeomorfizmusok (biholomorfizmusok)* is.

Ezekkel az eszközökkel az analitikus (holomorf) sokaságok mintájára definiálható általában egy V *varietás*: Egy M_2 Hausdorff topologikus tér mely lokálisan homeomorf $W_\alpha \subseteq F^n$ részvarietásokkal, melyekre a metszeteken az áttérésfüggvények bianalitikusak (biholomorfizmusok).

Egy varietás $\Re V$ *reguláris része* a sima pontok halmaza, ahol egy pont sima, ha alkalmas környezetében V lokálisan bianalitikus (biholomorf) F^m-mel. $\Re V$ egy sokaság, ennek dimenziója legyen definíció szerint V *dimenziója* is.

Megjegyzés: Speciálisan minden sima (holomorf) sokaság varietás, hisz lokálisan bianalitikusak (biholomorfak) F^m-mel, ami az azonosan nulla függvény nullhelyeinek halmaza.

Bővebben és precízebben foglalkozik a témával például a [6] könyv A fejezete, vagy [4] is.

F.4. Definíció (Divizor)**.** Legyen V egy varietás, ekkor V 1-kodimenziós részvarietásainak formális lokálisan véges lineáris kombinációit nevezzük *divizoroknak*.

A holomorf illetve meromorf függvényekkel valamint a kévékkel való kapcsolatukról, továbbá a hozzájuk rendelt egyenesnyalábokról bővebben például [4] 1.1. fejezetében lehet olvasni.

A dolgozatban megjelenő Cartier-divizorok ennek a fogalomnak speciális esetei, azon divizorok, melyek lokálisan leírhatók 1 meromorf függvénnyel.

F.5. Lemma (Poincaré-lemma)**.** $\mathbb{R}^n$ tetszőleges pontrahúzható U részhalmazán minden zárt $1 \leq p$-forma exakt, azaz $H^p_{dR}(U) = 0$.

Bizonyítás. Megtalálható a [1] könyv 1.fejezet §4. szakaszában. $\square$

F.6. Lemma ($\bar{\partial}$-Poincaré lemma)**.** Egy $\triangle \subseteq \mathbb{C}^n$ policilinderre $H^{p,q}_{\bar{\partial}}(\triangle) = 0$, ha $q \geq 1$. Tehát holomorf sokaságokon lokálisan minden zárt (p, q)-forma exakt.

Bizonyítás. Megtalálható a [4] könyv 0.2. fejezetében. $\square$

Felhasznált irodalom

[1] Raoul Bott, Loring W. Tu: *Differential forms in algebraic topology*, 1995. Springer, Graduate texts in mathematics 82

[2] S.I. Gelfand, Yu.I. Manin: *Algebra V - Homological Algebra*, 1999. Springer, Encyclopaedia of Mathematical Sciences 38

[3] Roger Godement: *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, 1958. Hermann, Actualités scientifiques et industrielles 1252

[4] Phillip Griffiths, Joseph Harris: *Principles of Algebraic Geometry*, 1978. Wiley-Interscience, Pure and Applied Mathematics

[5] Robert C. Gunning: *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables, Volume I: Function Theory*, 1990. Wadsworth & Brooks/Cole, Mathematics Series

[6] Robert C. Gunning: *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables, Volume II: Local Theory*, 1990. Wadsworth & Brooks/Cole, Mathematics Series

[7] Robert C. Gunning: *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables, Volume III: Homological Theory*, 1990. Wadsworth & Brooks/Cole, Mathematics Series

[8] Robin Hartshorne: *Algebraic Geometry*, 1997. Springer, Graduate Texts in Mathematics 52

[9] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira: *Categories and Sheaves* 2006. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 332

Tartalomjegyzék