

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

Kaposi Ágoston

## GRÁF 3-SOKASÁGOK INVARIÁNSAI

Szakdolgozat  
Matematikus MSc

Témavezető:

Dr. Némethi András

egyetemi tanár  
Geometriai Tanszék



Budapest, 2017



# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>4</b>
<b>2. Alapfogalmak</b>	<b>6</b>
2.1. Gráf 3-sokaságok definíciója . . . . .	6
2.2. Gráf 3-sokaságok csővezeték ekvivalenciája (Plumbing calculus)	7
2.3. Link . . . . .	8
2.4. Lánctörtek, Dedekind összegek . . . . .	8
2.5. Csillag alakú csővezeték gráfok (star shaped graphs) . . . . .	11
<b>3. Invariánsok</b>	<b>13</b>
3.1. Homológiák . . . . .	13
3.2. Rács és duális rács . . . . .	16
<b>4. Casson-invariáns és Casson-Walker-invariáns</b>	<b>23</b>
4.1. Casson-invariáns . . . . .	23
4.2. Alexander-polinom és műtét formula . . . . .	27
4.3. Casson-Walker-invariáns . . . . .	30
<b>5. Turaev-Reidemeister-torzió</b>	<b>32</b>
5.1. Véges lánckomplexus torziója . . . . .	32
5.2. Reidemeister-torzió . . . . .	33
5.3. Az univerzális Abel-torzió . . . . .	34
5.4. Turaev előjelmódosított torziója . . . . .	36
5.5. Turaev-Reidemeister-torzió gráf 3-sokaságokra . . . . .	37
5.6. Seiberg-Witten-invariáns . . . . .	40
<b>Köszönetnyilvánítás</b>	<b>42</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>43</b>

# 1. fejezet

## Bevezetés

Szakedolgozatom célja a gráf 3-sokaságok néhány invariánsának és ezek összefüggéseinek bemutatása, valamint a definiálásukhoz szükséges eszközök rövid számbavétele. A gráf 3-sokaságoknak csak töredék részével, az irányított negatív metszési mátrixú sokaságokkal foglalkozom. Elsődleges célom olyan módszerek bemutatása, amelyek közvetlenül a csővezeték gráfból adják meg az invariánsokat.

A 2. fejezetben tisztázom a dolgozatban szükséges alapfogalmakat.

A gráf 3-sokaságok megkülönböztetésére először megvizsgálom a homológiát mint invariánst (3. fejezet). Megmutatom, hogy a dekorált gráfból hogyan következnek a homológiacsoportok, majd néhány speciális esetben kiszámolom a konkrét homológiákat.

A dolgozat további részében abban a speciális esetben vizsgálom a 3-sokaságokat, amikor a sokaság racionális homológiái a gömbével egyeznek. E vizsgálódás során a második egészhomológia-csoport metszési formával való kiegészítésével definiálok egy rácsot, és e rács tulajdonságainak tárgyalásakor eljutok a duális rács fogalmának megalkotásához. A duális rács és az "eredeti" rács hányadosa megadja az első egészhomológia-csoportot (amely racionális homológia-gömb esetén véges).

A további invariánsok tárgyalása szintén racionális homológia-gömbök esetében történik (4. fejezet). Először a Casson-invariánst definiálok, ez az egészhomológia-gömbök esetében ad egy invariánst. Megemlítem a Casson-invariáns sejtést, amely a Casson-invariáns és a szignatúra közötti összefüggésre mutat rá, majd leellenőrzöm egy konkrét példán. Bevezetem a Casson-Walker-invariáns fogalmát, amely a Casson-invariáns kiterjesztése racionális homológia-gömbökre; a mélyebb megértés érdekében megnézek néhány példát.

A szakedolgozat 5. fejezetében a Turaev-Reidemeister-torzióval foglalkozom, amely egy újabb, racionális homológia-gömbökre definiált invariáns.

Rövid elméleti bevezetés után a csővezeték gráfból történő közvetlen számítási módot írom le, majd a képletek használatát mutatom be néhány példában. A torzió fogalmának bevezetését az teszi indokolttá, hogy a Casson-Walker-invariáns és a Turaev-Reidemeister-torzió egy lineáris kombinációjaként definiálható a Seiberg-Witten-invariáns, amely racionális homológia-gömbökre ugyanazt az összefüggést sejteti, amit a Casson-invariáns sejtés egész homológia-gömbökre sejtetett. A Seiberg-Witten-invariáns sejtés a Seiberg-Witten-invariáns és a szignatúra közti lineáris összefüggést fogalmazza meg.

A dolgozat elkészítésében legfontosabb forrásom Némethi András előkészületben lévő könyve [8] volt. Az alapfogalmak tisztázásához saját BSc-s szakdolgozatomat [4] és egyetemi jegyzeteimet használtam fel. A többi forrás a használati helyénél külön fel van tüntetve.

## 2. fejezet

# Alapfogalmak

A dolgozatban irányítható sokaságokkal foglalkozunk. Amíg ezt külön nem jelezzük, addig minden sokaságról feltesszük, hogy irányítható.

### 2.1. Gráf 3-sokaságok definíciója

**Definíció 2.1.1.** Legyen  $\Gamma$  egy gráf, melynek minden  $v$  csúcsához egy  $g_v$  nemnegatív egész és egy  $e_v$  egész szám tartozik. Az így kidekorált gráfot hívjuk csővezeték gráfnak.

**Definíció 2.1.2.** A  $\Gamma$  gráfhoz rendeljük hozzá az  $I(\Gamma)$  metszési formát, amely a következő módon van definiálva:

$$I(\Gamma)_{uv} = \begin{cases} u \text{ és } v \text{ közt menő élek száma} & \text{ha } u \neq v \\ e_v, \text{ a } v \text{ csúcs Euler-száma} & \text{ha } u = v. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

A  $\Gamma$  paramétert el fogjuk hagyni, amikor az egyértelmű.

Az  $I$  metszési formára tudunk úgy tekinteni mint egy  $|\mathcal{V}| \times |\mathcal{V}|$  mátrixra, melynek sorai és oszlopai a gráf csúcsainak felelnek meg. Az  $i$ -edik sor  $j$ -edik eleme pedig  $I_{v_i v_j}$ .

**Definíció 2.1.4.** A  $\Gamma$  csővezeték gráfhoz hozzárendelhető egy  $P(\Gamma)$  peremes 4-sokaság, és ennek pereme  $\partial P(\Gamma) = M(\Gamma)$  gráf 3-sokaság. A csővezeték szerkesztés adja meg a pontos hozzárendelési szabályt, melyet [9] cikkben találhatunk meg. Az egyszerűség kedvéért a 4-sokaságot  $P$ -vel, a 3-sokaságot  $M$ -mel fogjuk jelölni.

**Megjegyzés 2.1.5.** A  $\Gamma$  csővezeték gráfhoz rendelt  $P$  és  $M$  sokaságok egyértelműek diffeomorfizmus erejéig.

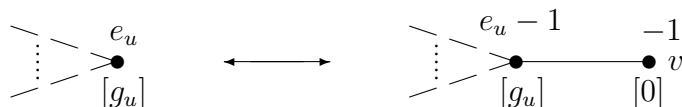
## 2.2. Gráf 3-sokaságok csővezeték ekvivalenciája (Plumbing calculus)

A csővezeték gráfhoz való 3-sokaság rendelése nem injektív. Az összefüggést a csővezeték ekvivalencia adja meg, melyet [10] alapján írunk le. A dolgozatban alapvetően negatív definit metszési formájú csővezeték gráfokat fogunk vizsgálni, ezért csak ezek ekvivalenciájának leírását tesszük meg.

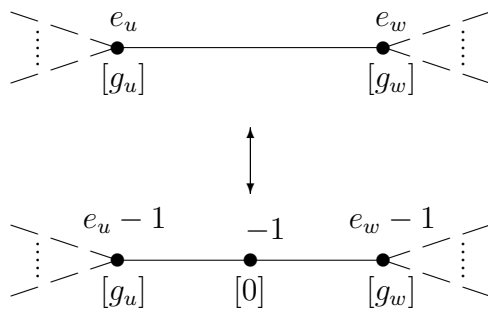
**Tétel 2.2.1.** *Legyen  $\Gamma_1$  és  $\Gamma_2$  negatív definit metszési formájú összefüggő csővezeték gráf. A hozzájuk rendelt 3-sokaságok pontosan akkor diffeomorfak, ha a következő lépésekkel el lehet készíteni  $\Gamma_1$ -ből  $\Gamma_2$ -t:*

1. csúcs felfújása vagy lefújása,
2. él felfújása vagy lefújása.

**Definíció 2.2.2. 1.** **Csúcs felfújása vagy lefújása.** *A gráfban a következőképpen jelenik meg:*

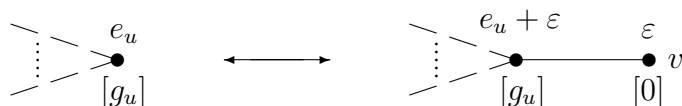


**Definíció 2.2.3. 2.** **Él felfújása vagy lefújása.** *A gráfban a következőképpen jelenik meg:*

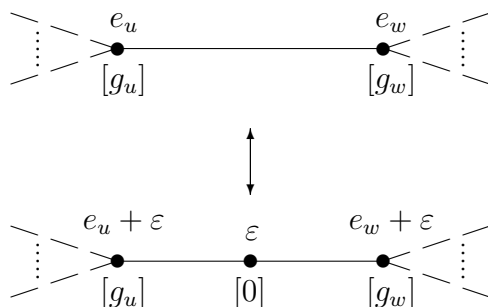


Az általánosított csővezeték ekvivalencia további két lépését is ismer-tetjük, a továbbiakban ezeket is használni fogjuk.

**Előjeles csúcs felfújása vagy lefújása.** Legyen  $\varepsilon = +1$  vagy  $-1$ . Egy csúcs felfújása a következőképpen is realizálódhat a csővezeték gráfban:



**Előjeles él felfújása vagy lefújása.** Legyen  $\varepsilon = +1$  vagy  $-1$ . Tetszőleges él felfújása és lefújása a következőképpen is realizálódhat a csővezeték gráfban:



Ezeknek a lépéseknek a segítségével fogjuk megmutatni két gráf ekvivalenciáját a 4.2.4 példában.

## 2.3. Link

Legyen  $X$  egy komplex analitikus halmaz, és  $o \in X$  egy izolált szingularitása. Legyen  $U$  az  $o$  egy olyan környezete, amelyre  $U \setminus \{o\}$  sima. Ekkor létezik egy  $\rho : U \rightarrow [0, \infty)$  valós analitikus függvény, melyre  $\rho^{-1}(0) = \{o\}$ . Minden  $S \subset [0, \infty)$  halmazra jelölje  $X_S = \rho^{-1}(S)$ .

A következő tétel a link definíciójának egyértelműségéhez vezet, ennek bizonyítása megtalálható [5] könyvben.

**Tétel 2.3.1.** *Létezik egy elég kicsi  $\varepsilon_0 > 0$ , hogy minden  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ -ra  $\rho^{-1}(\{\varepsilon\})$  egy  $C^\infty$ -sokaság.*

*Az  $(X_{[0,\varepsilon]}, X_{\{\varepsilon\}})$  homeomorfizmus típusa független  $\varepsilon$  választásától és megegyezik  $(\text{cone}(X_{\{\varepsilon\}}), X_{\{\varepsilon\}})$  homeomorfizmus típusával, ahol  $\text{cone}(Y)$  az  $o$ -ból  $Y$ -ra vett valós kúp.*

*Az  $(X_{[0,\varepsilon]}, X_{\{\varepsilon\}})$  homeomorfizmus típusa független  $\rho$  választásától.*

**Definíció 2.3.2.** *Az  $X_{\{\varepsilon\}}$  irányított diffeomorfizmus típusát az  $X$  halmaz  $o$ -nál vett linkjének nevezzük, és  $L_X$  szimbólummal jelöljük.*

**Példa 2.3.3.** *Ha  $(X, o)$  sima és  $n$ -komplex-dimenziós, akkor  $L_X = S^{2n-1}$ .*

## 2.4. Lánctörtek, Dedekind összegek

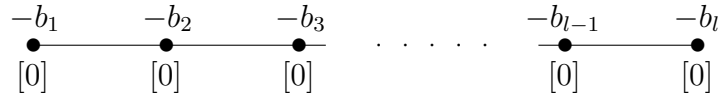
**Definíció 2.4.1.** *Legyen  $\Gamma$  csővezeték gráf  $I$  metszési mátrixszal. Definíció szerint legyen  $\det(\Gamma) = \det(-I)$ . Ha  $\Gamma = \emptyset$  üres gráf, akkor konvenció szerint  $\det(\emptyset) = 1$ .*



**Állítás 2.4.2.** Tegyük fel, hogy a  $\Gamma$  csővezeték gráf egy fa. Legyen az  $e = uv \in \mathcal{E}$  az egyik éle. Az  $e$  él elhagyásával keletkező két komponens legyen  $\Gamma_u$  és  $\Gamma_v$  aszerint indexelve, hogy melyik csúcs van benne. Jelölje  $\Gamma'_u$  a  $\Gamma_u$  gráfot az  $u$  csúcs elhagyása után, és ehhez hasonlóan  $\Gamma'_v$  a  $\Gamma_v$ -ből elhagyva  $v$ -t. Ekkor fennáll a következő egyenlőség:

$$\det(\Gamma) = \det(\Gamma_u) \cdot \det(\Gamma_v) - \det(\Gamma'_u) \cdot \det(\Gamma'_v) \quad (2.4.3)$$

**Definíció 2.4.4.** A  $\Gamma$  csővezeték gráfot bambusz csővezeték gráfnak hívjuk, ha összefüggő, minden csúcsa legfeljebb kétfokú, minden génusz nulla, és a  $-b_1, \dots, -b_l$  Euler-számokra igaz, hogy  $b_i \geq 2$  minden  $1 \leq i \leq l$ -re. Ezt a csővezeték gráfot továbbiakban jelölje  $\Gamma(b_1, \dots, b_l)$ .



**Megjegyzés 2.4.5.** A  $\Gamma = \Gamma(b_1, \dots, b_l)$  bambusz csővezeték gráfra  $M(\Gamma) = L(n, q)$  lencsetér, ahol  $\frac{n}{q} = [b_1, \dots, b_l]$ , ahol a 2.4.7 jelölést használjuk.

## 2.4.A. Hirzebruch féle negatív lánc tört

**Definíció 2.4.6.** Két  $n, q$  relatív prím pozitív számhoz rendeljük hozzá a következő negatív lánc törtet:

$$\frac{n}{q} = [b_1, \dots, b_l] = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{b_3 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{b_l}}}}, \quad b_1 \geq 1, b_2, \dots, b_l \geq 2. \quad (2.4.7)$$

Definiáljuk a parciális lánc tört fogalmát. Ez legyen minden  $1 \leq i \leq j \leq l$ -hez a  $\frac{n_{ij}}{q_{ij}} = [b_i, \dots, b_j]$  tört, ahol  $n_{ij} > 0$ ,  $n_{ij}$  és  $q_{ij}$  relatív prímek. Legyen továbbá  $n_{i,i-1} = 1$  és  $n_{ij} = 0$ , ha  $j < i - 1$ . A képletből láthatóak a következő összefüggések a parciális lánc törtök számlálóra és nevezőire:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{n_{ij}}{q_{ij}} = b_i - \frac{q_{i+1,j}}{n_{i+1,j}} \\ (ii) \quad & q_{ij} = n_{i+1,j} \\ (iii) \quad & n_{ij} = b_i n_{i+1,j} - n_{i+2,j} \quad \text{ha } i \leq j \\ (iv) \quad & n_{ij} = b_j n_{i,j-1} - n_{i,j-2} \quad \text{ha } i \leq j \\ (v) \quad & n \cdot n_{i+1,j-1} = n_{i+1,l} \cdot n_{i,j-1} - n_{j+1,l} \cdot n_{1,i-1} \quad \text{ha } i < j. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Az  $n = n_{1,l}$  és  $q = n_{2,l}$ . Legyen  $q' = n_{1,l-1}$ . A 2.4.8 (v) egyenlete alapján ( $i = 1, j = l$  helyettesítéssel)  $qq' - 1 = n \cdot n_{2,l-1}$ , tehát  $qq' \equiv 1 \pmod{n}$ .

**Állítás 2.4.9.**  $[b_1, \dots, b_l] = \frac{\det(\Gamma(b_1, \dots, b_l))}{\det(\Gamma(b_2, \dots, b_l))}$ .

*Bizonyítás:* Indukcióval. Az  $l = 1$  eset világos:  $b_1 = b_1$ . Az  $l = 2$  eset:  $[b_1, b_2] = b_1 - \frac{1}{b_2} = \frac{b_1 b_2 - 1}{b_2} = \frac{\det(\Gamma(b_1, b_2))}{\det(\Gamma(b_2))}$ . Az általános eset:

$$\begin{aligned} [b_1, \dots, b_l] &= b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{b_3 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{b_l}}}} \\ &= b_1 - \frac{1}{\frac{\det(\Gamma(b_2, \dots, b_l))}{\det(\Gamma(b_3, \dots, b_l))}} = \frac{b_1 \det(\Gamma(b_3, \dots, b_l)) - \det(\Gamma(b_2, \dots, b_l))}{\det(\Gamma(b_2, \dots, b_l))} = \frac{\det(\Gamma(b_1, \dots, b_l))}{\det(\Gamma(b_2, \dots, b_l))}. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Az utolsó egyenlőségnél a determináns kifejtési tételét használjuk. ■

## 2.4.B. Dedekind-összeg

A következőkben bevezetjük a Dedekind-szimbólum és a Dedekind-összeg fogalmát [11] és [8] alapján.

**Definíció 2.4.11.** Legyen  $((x))$  a Dedekind-szimbólum:

$$((x)) = \begin{cases} \{x\} - \frac{1}{2} & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & \text{ha } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Itt  $\{x\}$  jelölés az  $x$  törtrészét jelenti.

**Definíció 2.4.12.** Definiáljuk  $(q, n)$  párhoz a következő összeget, melyet Dedekind-összegnek hívunk:

$$s(q, n) = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \left( \frac{i}{n} \right) \right) \cdot \left( \left( \frac{qi}{n} \right) \right).$$

**Megjegyzés 2.4.13. Dedekind reciprocitás tétele.**

A Dedekind-összegre fennáll a következő egyenlőség:

$$s(q, n) + s(n, q) = \frac{n^2 + q^2 + 1}{12nq} - \frac{1}{4}.$$

**Megjegyzés 2.4.14.** Az euklideszi algoritmust, indukciót és Dedekind reciprocitás tételét használva összekapcsolható a Dedekind-összeg a negatív lánctörttel:

$$12 \cdot s(q, n) = \frac{q+n}{n} + \sum_{i=1}^l (b_i - 3). \quad (2.4.15)$$

**Megjegyzés 2.4.16.** A Dedekind-szimbólumnak és a Dedekind-összegnek trigonometrikus alakja:

$$\left(\left(\frac{i}{n}\right)\right) = \frac{1}{2n} \cdot \prod_{\xi^n=1 \neq \xi} \frac{1+\xi}{1-\xi} \cdot \xi^i$$

$$s(q, n) = -\frac{1}{4n} \cdot \sum_{\xi^n=1 \neq \xi} \frac{1+\xi}{1-\xi} \cdot \frac{1+\xi^q}{1-\xi^q} = -\frac{1}{n} \cdot \sum_{\xi^n=1 \neq \xi} \frac{1}{(1-\xi)(1-\xi^q)} + \frac{n-1}{4n}. \quad (2.4.17)$$

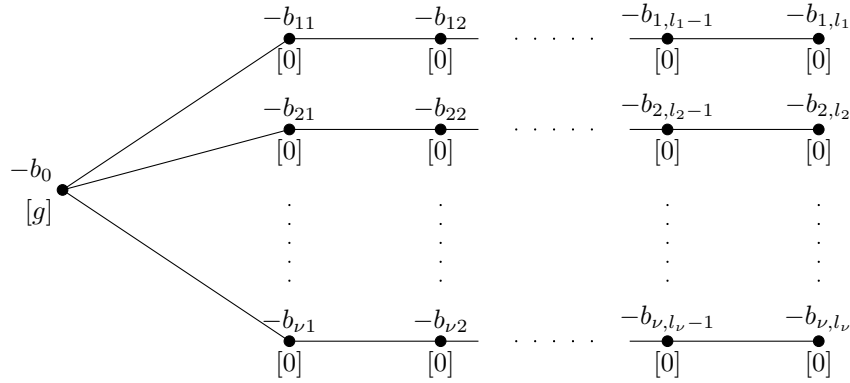
**Példa 2.4.18.** A Dedekind-összeg egy felhasználása.

Az  $\mathbb{R}^3$  térben a  $(0, 0, 0)$ ,  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$  és  $(0, 0, c)$  rácspontok által kifeszített tetraéder belsejében lévő rácspontok száma a következő:

$$-(s(bc, a) + s(ca, b) + s(ab, c)) + \frac{1}{6}abc + \frac{1}{4}(bc + ca + ab) + \frac{1}{4}(a + b + c) + \frac{1}{12}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) + \frac{1}{12abc} - 2.$$

## 2.5. Csillag alakú csővezeték gráfok (star shaped graphs)

**Definíció 2.5.1.** A  $\Gamma$  csővezeték gráfot csillag alakúnak hívunk, ha van egy központi  $v_0$  csúcsa, melyre  $\Gamma \setminus v_0$  gráf  $\nu \geq 0$  darab bambusz csővezeték gráfból áll, ezeket láboknak hívjuk. Minden láb az egyik végén egy éllel csatlakozik  $v_0$ -hoz. Ez a  $v_0$  nem feltétlenül egyértelmű. Használjuk a következő jelölést. A  $v_0$  csúcsához tartozó Euler-szám  $-b_0$  és génusza  $g \geq 0$ . A  $j$ -edik láb  $i$ -edik csúcsát jelöljük  $v_{ji}$ -vel ( $1 \leq j \leq \nu$ ), Euler-száma legyen  $b_{ji} \geq 2$ . A  $j$ -edik láb a  $v_0$  csúcsához csatlakozzon  $v_{j1}$ -ben. Az Euler-számokat meghatározzák az egyes lábakhoz tartozó  $\frac{\alpha_j}{\omega_j} = [b_{j1}, \dots, b_{jl_j}]$  számok, ahol  $\alpha_j$  és  $\omega_j$  relatív prímek, és  $0 < \omega_j < \alpha_j$ .



Ezen gráfokhoz tartozó 3-sokaságokat Seifert 3-sokaságoknak hívjuk. Egy ilyen sokaságot egyértelműen meghatározzák a  $(b_0, g; \{(\alpha_j, \omega_j)\}_{j=1}^\nu)$  számadatok, melyeket ezért a sokaság Seifert invariánsainak nevezünk.

(A Seifert 3-sokaságok rendelkeznek egy  $S^1$ -hatással, de ezt a tulajdonságukat itt nem tárgyaljuk.)

Ha  $g > 0$  vagy  $\nu \geq 3$ , akkor  $v_0$  csúcs egyértelmű. A következőkben tegyük fel, hogy ez fennáll. Ha  $g = 0$  és  $\nu \leq 2$ , akkor a bambusz csővezeték gráf esetről van szó, amelyet leírtunk a 2.4.4 definícióban.

Legyen  $\alpha$  az  $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu$  számok legkisebb közös többszöröse. Legyen  $e$  virtuális Euler-szám, amit a következőképpen definiálunk:  $e = -b_0 + \sum_{j=1}^\nu \frac{\omega_j}{\alpha_j}$ .

Megjegyezzük, hogy  $e < 0$  akkor és csak akkor, ha  $I$  metszési mátrix negatív definit.

Az általánosított csővezeték ekvivalencia [10] megadja, hogy a  $-\Gamma$  csillag alakú gráfnak a Seifert invariánsa  $(\nu - e, g; \{(\alpha_j, \alpha_j - \omega_j)\}_{j=1}^\nu)$ . Viszont ha  $\Gamma$  egy  $I$  negatív definit metszési formával jellemezhető, akkor még az általánosított csővezeték ekvivalencia lépéseit használva sem írható le  $-\Gamma$  negatív definit metszési formájú csillag alakú gráffal.

**Megjegyzés 2.5.2.** A 2.4.15 egyenlőség analógja csillag alakú csővezeték gráfok esetében a következő:

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} (2\chi(S_v) - \delta_v) \cdot (I^{-1})_{vv} + \sum_{v \in \mathcal{V}} (E_v^2 + 3) = \frac{1}{e} \cdot \left( 2 - 2g - \nu + \sum_{j=1}^\nu \frac{1}{\alpha_j^2} \right) + e + 3 - 12 \cdot \sum_{j=1}^\nu \mathbf{s}(\omega_j, \alpha_j). \quad (2.5.3)$$

## 3. fejezet

# Invariánsok

### 3.1. Homológiák

Egy  $\Gamma$  csővezeték gráfhoz rendelt  $M$  gráf 3-sokaság homológiáit megkaphatjuk a csővezeték gráfból. Ezt vizsgáljuk a következőkben.

#### 3.1.A. Egy csúcsú csővezeték gráf

Tegyük fel, hogy  $\Gamma$  csővezeték gráf egy csúcsból áll. Ennek a csúcsnak génusza  $g$  és Euler-száma  $e$ . Ekkor a  $P$  sokaság egy  $S_g$  felület feletti  $D^2$ -nyaláb, melynek Euler-száma  $e$ .

$$\begin{array}{ccc} D^2 & \longrightarrow & P \\ & & \downarrow e \\ & & S_g \end{array}$$

Tehát  $P$  homológiatípusa megegyezik  $S_g$  homológiatípusával, ezért

$$H_q(P; \mathbb{Z}) = H_q(S_g; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{ha } q = 0 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{ha } q = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{ha } q = 2 \\ 0 & \text{ha } q > 2. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Ekkor  $H_q(P, \partial P; \mathbb{Z})$  a  $H_q(P; \mathbb{Z})$  Alexander-duálisa, tehát létezik a következő nem degenerált bilineáris forma:

$$H_{4-q}(P, \partial P; \mathbb{Z}) \otimes H_q(P; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}. \quad (3.1.2)$$

Így megkapjuk  $H_*(P, \partial P; \mathbb{Z})$ -t:

$$H_q(P, \partial P; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{ha } q = 4 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{ha } q = 3 \\ \mathbb{Z} & \text{ha } q = 2 \\ 0 & \text{ha } q \neq 2, 3, 4. \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Jelölje  $b_i = \text{rank}(H_i(M))$  a Betti számokat. Ekkor

$$H_q(M; \mathbb{Z}) = H_q(\partial P; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{ha } q = 0 \\ \mathbb{Z}^{b_1} \oplus \text{Tors} & \text{ha } q = 1 \\ \mathbb{Z}^{b_2} & \text{ha } q = 2 \\ \mathbb{Z} & \text{ha } q = 3 \\ 0 & \text{ha } q > 3. \end{cases} \quad (3.1.4)$$

A következőkben megadjuk  $b_1$  és  $b_2$  értékét és a Tors véges csoportot.

A Poincaré-dualitásból (melyet Bott és Tu könyvében [1] megtalálhatunk):  $b_i = b_{\dim - i}$ . A  $H_2(P; \mathbb{Z})$  generátora legyen  $S$ , és  $H_2(P, \partial P; \mathbb{Z})$  generátora legyen  $D$ . A homológikus hosszú egzakt sorból:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_4(\overset{0}{\partial P}; \mathbb{Z}) & \rightarrow & H_4(\overset{0}{P}; \mathbb{Z}) & \rightarrow & H_4(\overset{\mathbb{Z}}{P, \partial P}; \mathbb{Z}) \rightarrow \\ & & & & & & \overset{\mathbb{Z}^{2g}}{H_3(P, \partial P; \mathbb{Z})} \rightarrow \\ & & & & & & \overset{\mathbb{Z}(S)}{H_2(\partial P; \mathbb{Z})} \rightarrow \overset{\mathbb{Z}(D)}{H_2(P; \mathbb{Z})} \xrightarrow{\cdot e} H_2(P, \partial P; \mathbb{Z}) \rightarrow \\ & & & & & & \overset{\mathbb{Z}^{2g}}{H_1(\partial P; \mathbb{Z})} \rightarrow \overset{\mathbb{Z}}{H_1(P; \mathbb{Z})} \rightarrow \overset{0}{H_1(P, \partial P; \mathbb{Z})} \rightarrow \\ & & & & & & \overset{\mathbb{Z}}{H_0(\partial P; \mathbb{Z})} \rightarrow \overset{\mathbb{Z}}{H_0(P; \mathbb{Z})} \rightarrow \overset{0}{H_0(P, \partial P; \mathbb{Z})} \rightarrow 0. \end{array} \quad (3.1.5)$$

Ha  $e = 0$ , akkor  $\partial P = S_g \times S^1$ , tehát  $H_1(\partial P; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g} \oplus \mathbb{Z}$  és  $H_2(\partial P; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g} \oplus \mathbb{Z}$ , mert a  $\cdot e$  leképezés a 0 leképezés. Tehát  $b_1 = b_2 = 2g + 1$ , Tors = 0.

Ha  $e \neq 0$ , akkor  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot e} \mathbb{Z}$  injektív, ezért  $H_2(\partial P; \mathbb{Z}) \xrightarrow{0} H_2(P; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot e} H_2(P, \partial P; \mathbb{Z})$ , amiből  $H_2(\partial P; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}$ . A  $\cdot e$  leképezés képe  $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_e$  véges csoport, ezért a homológikus egzakt sorból  $H_1(\partial P; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_e \oplus \mathbb{Z}^{2g}$ . Ez a  $\mathbb{Z}_e$  csoport lesz a  $H_1(\partial P; \mathbb{Z}) = H_1(M; \mathbb{Z})$  torziója.

Ebből kaphatjuk, hogy egy  $\Gamma$  csővezeték gráfra  $\partial P(\Gamma)$  akkor és csak akkor egészhomológia-gömb ( $\mathbb{Z}HS^3$ ), ha  $g = 0$  és  $e = \pm 1$ .

A racionális homológiák hasonlóan kiszámíthatóak. Ekkor a Tors triviális csoport lesz, tehát csak a szabad része marad meg az egész homológiáknak. A rangok megegyeznek. Tehát egy  $\Gamma$  csővezeték gráfhoz rendelt  $\partial P(\Gamma)$  3-sokaság pontosan akkor racionális homológia-gömb ( $\mathbb{Q}HS^3$ ), ha  $b_1 = b_2 = 0$ .

### 3.1.B. Tetszőleges $\Gamma$ csővezeték gráf

Tetszőleges  $\Gamma$  csővezeték gráf esetén  $\partial P(\Gamma)$  homotópiatípusa megegyezik  $\bigcup_{v \in \mathcal{V}} S_v$  homotópiatípusával, ahol  $S_v$  a  $v$  csúcshoz rendelt felületet jelöli. Ebből következik a következő állítás. Legyen  $b_1(\Gamma)$  a  $\Gamma$  csővezeték gráf független köreinek száma (a gráf első homológiájának rangja).

**Állítás 3.1.6.** *A  $\Gamma$  csővezeték gráfhoz rendelt  $P$  peremes 4-sokaság homológiái:*

$$H_q(P; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{ha } q = 0 \\ \mathbb{Z}^{\sum_{v \in \mathcal{V}} 2g_v + b_1(\Gamma)} & \text{ha } q = 1 \\ \mathbb{Z}^{|\mathcal{V}|} & \text{ha } q = 2 \\ 0 & \text{ha } q > 2. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

Az Alexander-dualitásból kaphatjuk meg a csúcshoz hasonlóan a relatív homológiákat.

**Állítás 3.1.8.** *A  $\Gamma$  csővezeték gráfhoz rendelt  $P$  peremes 4-sokaság és  $\partial P$  3-sokaság relatív homológiái:*

$$H_q(P, \partial P; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{ha } q = 4 \\ \mathbb{Z}^{\sum_{v \in \mathcal{V}} 2g_v + b_1(\Gamma)} & \text{ha } q = 3 \\ \mathbb{Z}^{|\mathcal{V}|} & \text{ha } q = 2 \\ 0 & \text{ha } q \neq 2, 3, 4. \end{cases} \quad (3.1.9)$$

Ebből már a homológikus egzakt sorból megkaphatjuk az  $M$  3-sokaság homológiáit.

**Állítás 3.1.10.** *A  $\Gamma$  csővezeték gráf metszési mátrixa legyen  $I$ . Ekkor a  $\Gamma$  csővezeték gráfhoz rendelt  $M = \partial P$  3-sokaság homológiái:*

$$H_q(M; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{ha } q = 0 \\ \mathbb{Z}^{\sum_{v \in \mathcal{V}} 2g_v + b_1(\Gamma)} \oplus \text{coker } I & \text{ha } q = 1 \\ \mathbb{Z}^{\sum_{v \in \mathcal{V}} 2g_v + b_1(\Gamma)} & \text{ha } q = 2 \\ \mathbb{Z} & \text{ha } q = 3 \\ 0 & \text{ha } q > 3. \end{cases} \quad (3.1.11)$$

*Bizonyítás:* Írjuk fel a homológikus hosszú egzakt sort  $P$ -re és  $\partial P$ -re.

$$\begin{aligned}
0 &\rightarrow H_4(\partial P; \mathbb{Z}) \rightarrow H_4(P; \mathbb{Z}) \rightarrow H_4(P, \partial P; \mathbb{Z}) \rightarrow \\
&\rightarrow H_3(\partial P; \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(P; \mathbb{Z}) \rightarrow H_3(P, \partial P; \mathbb{Z}) \rightarrow \\
&\rightarrow H_2(\partial P; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(P; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot I} H_2(P, \partial P; \mathbb{Z}) \rightarrow \\
&\rightarrow H_1(\partial P; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(P; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(P, \partial P; \mathbb{Z}) \rightarrow \\
&\rightarrow H_0(\partial P; \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(P; \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(P, \partial P; \mathbb{Z}) \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Az egzakt sorból azonnal megkapható, hogy  $H_0(\partial P; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  és  $H_3(\partial P; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ . A  $H_1(P; \mathbb{Z})$  generátorai a  $S^1$ -ek, melyből minden  $g_v$  nemnulla génuszú felületre kapunk  $2 \cdot g_v$  darabot, és a  $\Gamma$  független köreiből is egy-egy  $S^1$  generátort. Ezeknek a  $p : \partial P \hookrightarrow P$  beágyazás inverzével vett képeik alkotják a  $H_3(P, \partial P; \mathbb{Z})$  generátorait. A  $H_2(P; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{|\mathcal{V}|}$  generátorai  $S_v$ -k. A  $H_2(P, \partial P; \mathbb{Z})$  generátorai a  $D_v$  lemezek. A két csoport közti leképezés pontosan az  $I$  metszési mátrix szerint realizálódik. Feltehetjük, hogy  $I$  nem degenerált, ekkor a  $\cdot I$  leképezés injektív, ezért  $H_2(\partial P; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\sum_{v \in \mathcal{V}} 2g_v + b_1(\Gamma)}$ . A  $\text{coker} I = \mathbb{Z}^{|\mathcal{V}|} / \text{im} I$ . Tehát  $H_1(\partial P; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\sum_{v \in \mathcal{V}} 2g_v + b_1(\Gamma)} \oplus \text{coker} I$ . ■

A fentiekből könnyen láthatóak az egészhomológia-gömb és a racionális homológia-gömb feltételei.

**Következmény 3.1.13.** *A  $\Gamma$  csővezeték gráfhoz rendelt  $M$  3-sokaság pontosan akkor racionális homológia-gömb ( $\mathbb{Q}HS^3$ ) a  $\det(\Gamma) \neq 0$  feltétel mellett, ha  $\forall v \in \mathcal{V}$ -re  $g_v = 0$  és  $b_1(\Gamma) = 0$ . A  $\Gamma$  csővezeték gráf ekkor  $S^2$ -k fája.*

**Következmény 3.1.14.** *A  $\Gamma$  csővezeték gráfhoz rendelt  $M$  3-sokaság pontosan akkor egészhomológia-gömb ( $\mathbb{Z}HS^3$ ) a  $\det(\Gamma) \neq 0$  feltétel mellett, ha  $\forall v \in \mathcal{V}$ -re  $g_v = 0$ ,  $b_1(\Gamma) = 0$  és  $\text{coker} I = 0$ .*

**Megjegyzés 3.1.15.** *A  $\text{coker} I = 0$  feltétel ekvivalens  $\det I = \pm 1$  feltétellel.*

## 3.2. Rács és duális rács

### 3.2.A. Definíció

Ebben a részben tegyük fel, hogy  $M$  racionális homológia-gömb. Tehát  $\Gamma$  csővezeték gráfra  $\forall v$ -re  $g_v = 0$  és  $b_1(\Gamma) = 0$ . Ekkor  $H_1(M; \mathbb{Z})$  véges csoport. Definiálunk  $\Gamma$ -hoz egy  $L$  rácsot.

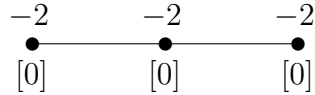


**Definíció 3.2.1.** Legyen  $L$  rács a  $H_2(P; \mathbb{Z})$  homológiaosztály kiegészítve az  $I$  metszési formával. Jelölje  $(\cdot, \cdot)$  a metszési formát.

Tekintsük a  $H_2(P; \mathbb{Z}) \xrightarrow{I} H_2(P, M; \mathbb{Z})$  leképezést a homológikus hosszú egzakt sorból. Az  $S_v$  generátor képe:  $S_v \mapsto I_{vv}D_v + \sum_{(u,v) \in \mathcal{E}} D_u$ . Az ezzel vett faktor képe lesz a  $H_1(M; \mathbb{Z})$ . Ezt  $S_v$  osztályok képei generálják, a relációkat pedig a faktorizáció adja. Ebből kapjuk a következő képletet  $H_1(M; \mathbb{Z})$ -re:

$$\text{coker} I = H_1(M; \mathbb{Z}) = \left\langle D_v, v \in \mathcal{V} \mid I_{vv}D_v + \sum_{(u,v) \in \mathcal{E}} D_u = 0, \forall v \in \mathcal{V} \right\rangle. \quad (3.2.2)$$

**Példa 3.2.3.** Legyen  $\Gamma$  csővezeték gráf a következő:

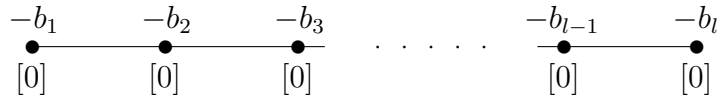


Ekkor  $M = M(\Gamma)$  3-sokaságra:

$$H_1(M; \mathbb{Z}) = \left\langle D_1, D_2, D_3 \mid \begin{array}{l} -2D_1 + D_2 = 0 \\ -2D_2 + D_1 + D_3 = 0 \\ -2D_3 + D_2 = 0 \end{array} \right\rangle.$$

Ebből a  $H_1(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4$  izomorfizmust kapjuk.

**Példa 3.2.4.** Legyen  $\Gamma$  bambusz csővezeték gráf. Az  $M(\Gamma)$  első homológiáját megkaphatjuk a fenti módszerrel. Legyen  $\Gamma$  a következő gráf:



Ebből megkapható a  $H_1(M; \mathbb{Z})$ , melynek kommutatív prezentációja:

$$\langle D_0, \dots, D_{s+1} \mid -b_i D_i + D_{i-1} + D_{i+1} = 0, i \in \{1, \dots, l\}, D_0 = D_{l+1} = 0 \rangle \quad (3.2.5)$$

A relációkból kapjuk:

$$\begin{aligned} -b_1 D_1 + D_2 &= 0 \Rightarrow D_2 = b_1 D_1 \\ -b_2 D_2 + D_1 + D_3 &= 0 \Rightarrow D_3 = (b_1 b_2 - 1) D_1 \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Ezt folytatva azt kapjuk, hogy  $\forall i$ -re  $D_i = \det(\Gamma(b_1, \dots, b_{i-1})) D_1$  a 2.4.1 definícióban leírt  $\det$  függvényvel.

A fentiekből látható, hogy egy  $\Gamma$  bambusz csővezeték gráfhoz tartozó 3-sokaság első homológiacsoportja a  $\mathbb{Z}_n$  ciklikus csoport, ahol  $n = \det(\Gamma)$ .

### 3.2.B. Az $L$ rács duális rácsa

A továbbiakban az egész homológiák hosszú egzakt sorának a következő részletét vizsgáljuk:

$$H_2(P; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot I} H_2(P, \partial P; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H_1(\partial P; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

A racionális homológiák megkaphatóak az egész homológiákból a  $\mathbb{Q}$ -val való tenzorszorzással.

$$\begin{array}{ccc} H_2(P; \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\cdot I} & H_2(P, \partial P; \mathbb{Z}) \\ \downarrow \otimes \mathbb{Q} & & \downarrow \otimes \mathbb{Q} \\ H_2(P; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\cdot I} & H_2(P, \partial P; \mathbb{Q}) \end{array}$$

Tudjuk, hogy  $L = H_2(P; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \langle S_v \rangle$  és  $H_2(P, \partial P; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \langle D_v \rangle$ . A  $H_2(P, \partial P; \mathbb{Z}) \hookrightarrow H_2(P; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = L \otimes \mathbb{Q}$  beágyazást vizsgáljuk.

Terjesszük ki az  $I : H_2(P; \mathbb{Z}) \otimes H_2(P; \mathbb{Z}) \xrightarrow{(\cdot, \cdot)} \mathbb{Z}$  metszési formát  $I_{\mathbb{Q}} : H_2(P; \mathbb{Q}) \otimes H_2(P; \mathbb{Q}) \xrightarrow{(\cdot, \cdot)_{\mathbb{Q}}} \mathbb{Q}$  metszési formára. Ezt a következő módon jelöljük:  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{Q}}$ .

Vegyük a Lefschetz metszési formát  $H_2(P; \mathbb{Z}) \otimes H_2(P, \partial P; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ , amely az  $(S_v, D_u)_L = \begin{cases} 1 & \text{ha } u = v \\ 0 & \text{ha } u \neq v \end{cases}$  képlettel írható le. Ekkor a következő diagramot vizsgáljuk:

$$\begin{array}{ccccc} H_2(P; \mathbb{Z}) & \otimes & H_2(P; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(\cdot, \cdot)} & \mathbb{Z} \\ \downarrow id & & \downarrow \cdot I & & \\ H_2(P; \mathbb{Z}) & \otimes & H_2(P, \partial P; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{(\cdot, \cdot)_L} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H_2(P; \mathbb{Q}) & \otimes & H_2(P; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{(\cdot, \cdot)_{\mathbb{Q}}} & \mathbb{Q} \end{array}$$

Az  $L = \mathbb{Z} \langle S_v \rangle_{v \in \mathcal{V}}$  és  $L \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \langle S_v \rangle_{v \in \mathcal{V}}$ . A  $H_2(P, \partial P; \mathbb{Z})$  homológiát generálják az  $L$  báziselemeinek  $L \otimes \mathbb{Q}$ -beli duálisai, melyeket jelöljön  $D_v$ .

**Definíció 3.2.7.** Legyen  $L'$  az  $L \otimes \mathbb{Q}$  azon elemei, amelyekre a metszési forma egészset ad:  $L' = \{v \in L \otimes \mathbb{Q} \mid (v, L) \in \mathbb{Z}\}$ . Ezt az  $L$  rács duális rácsának hívjuk.

**Példa 3.2.8.** Legyen  $\Gamma$  csővezeték gráf a következő:

$$\begin{array}{ccc} -2 & & -2 \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ [0] & & [0] \end{array}$$

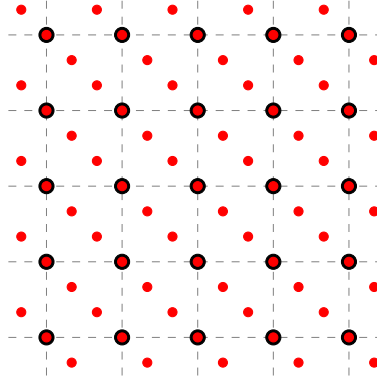
Legyen  $I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  a metszési mátrix. Jelöljük a  $H_2(P; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(P, \partial P; \mathbb{Z})$  leképezést  $j$ -vel. Ez az  $I$ -vel való szorzásnak felel meg.

Vizsgáljuk a következő egzakt sorrészt:

$$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{j} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \text{coker} I$$

$$\mathbb{Z} \langle S_1, S_2 \rangle \xrightarrow{j} \mathbb{Z} \langle D_1, D_2 \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}_3$$

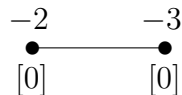
Ekkor  $j(S_1) = -2D_1 + D_2$  és  $j(S_2) = D_1 - 2D_2$ . A  $\text{coker} I = \mathbb{Z}_3$ , mert a 3.2.2 alapján  $D_2 = 2D_1$ , és  $D_1 = 2D_2 = 4D_1$ , amiből  $3D_1 = 0$ . Ekkor  $L = \mathbb{Z} \langle S_1, S_2 \rangle$  és  $L \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \langle S_1, S_2 \rangle$ . A Lefschetz metszési formára  $(S_i, D_j)_L = \delta_{ij}$ . A  $D_1$ -et  $H_2(P; \mathbb{Q})$ -ban felírva legyen  $D_1 = r_1 S_1 + r_2 S_2$ . A metszési formából:  $(S_i, r_1 S_1 + r_2 S_2) = \delta_{1i}$ . Ebből kapjuk, hogy  $-2r_1 + r_2 = 1$  és  $2r_1 - 4r_2 = 0$ . Az egyenletrendszert megoldva  $r_1 = -\frac{2}{3}$  és  $r_2 = -\frac{1}{3}$  lesznek a megoldások. Így  $D_1 = -\frac{2}{3} S_1 - \frac{1}{3} S_2$ . Ugyanígy  $D_2 = -\frac{1}{3} S_1 - \frac{2}{3} S_2$ . A  $L \hookrightarrow L' \hookrightarrow L \otimes \mathbb{Q}$  beágyazásokból látható, hogy  $L'/L = \mathbb{Z}_3 = H_1(M; \mathbb{Z})$ .



Itt feketével jelöltük az  $L$  rácsot és pirossal az  $L'$  rácsot.

**Definíció 3.2.9.** Legyen  $\{S_v\}_{v \in \mathcal{V}}$  halmaz az  $L$  rács generátorai. Ekkor az  $\{S_v^*\}_{v \in \mathcal{V}}$  halmaz generálja  $L'$ -t, ahol  $(S_u, S_v^*) = -\delta_{uv}$ . A későbbiekben látni fogjuk, hogy miért szerencsés ebben a definícióban ez az előjel választás.

**Példa 3.2.10.** Legyen  $\Gamma$  csővezeték gráf a következő:

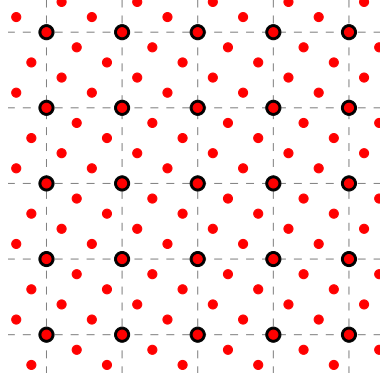


$$\text{Ekkor } L = \left\langle \mathbb{Z}^2, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

A 3.2.8 példában leírthoz hasonló módon kiszámítjuk  $L'$  generátorait:

$$S_1^* = \frac{3}{5}S_1 + \frac{1}{5}S_2 \text{ és } S_2^* = \frac{1}{5}S_1 + \frac{2}{5}S_2.$$

Ekkor az  $L$  és  $L'$  rácsot ábrázolva:



Látható, hogy itt  $L'/L = \mathbb{Z}_5 = H_1(M; \mathbb{Z})$ .

**Állítás 3.2.11.** Tegyük fel, hogy  $l \in L \otimes \mathbb{Q}$  esetén  $(l, S_u) \leq 0$  minden  $u \in \mathcal{V}$  esetén. Legyen  $l = \sum_{v \in \mathcal{V}} r_v S_v$ . Ekkor:

1. minden  $r_v \geq 0$ ,
2. ha  $l \neq 0$ , akkor minden  $v \in \mathcal{V}$ -re  $r_v > 0$ .

*Bizonyítás:* 1. Legyen  $l = a - b$ , ahol  $a = \sum_{v \in \mathcal{V}, r_v \geq 0} r_v S_v$  és  $b = \sum_{v \in \mathcal{V}, r_v < 0} -r_v S_v$ . Tehát azt kell bizonyítani, hogy  $b = 0$ . Legyen  $r = \sum_{v \in \mathcal{V}} r_v S_v$ . Ekkor jelölje  $|r| = \text{supp}(r)$  az  $\{S_v \mid r_v \neq 0\}$  halmazt. Vegyük azon  $v \in \mathcal{V}$ -ket, melyre  $S_v \in |b|$ . Ezekre  $(b, S_v) \geq 0$ , mert  $(b, S_v) = (a - l, S_v) = (a, S_v) - (l, S_v) \geq 0$ . Összegezve az összes  $v$ -re  $r_v$  együtthatóval:  $\sum_{v \in |b|} (b, r_v S_v) = (b, b) \geq 0$ . Mivel  $(\cdot, \cdot)$  negatív definit, ezért  $b = 0$ .

2. Tegyük fel, hogy  $|l| \neq \bigcup_{v \in \mathcal{V}} S_v$ . Ekkor legyenek  $u, v$  olyanok, hogy  $r_u = 0, r_v > 0$  és  $u$  és  $v$  közt van él. Így  $(a, S_u) = r_v > 0$ , ami ellentmondás. ■

**Állítás 3.2.12.** Legyen  $\Gamma$  csillag alakú csővezeték gráf. Tegyük fel, hogy az  $L$  negatív definit metszési formával rendelkező rácsot határozza meg. Az  $S_v$

generátorokat a csúcsokhoz hasonló módon indexeljük. Az  $(I^{-1})_{uv} = (S_u^*, S_v^*)$  képletből megkaphatjuk a következő egyenlőségeket.

$$\begin{aligned} (S_0^*, S_0^*) &= e^{-1} \\ (S_0^*, S_{jl_j}^*) &= (e\alpha_j)^{-1} \\ (S_{il_i}^*, S_{jl_j}^*) &= \begin{cases} (e\alpha_i\alpha_j)^{-1} & \text{ha } i \neq j \\ (e\alpha_i^2)^{-1} - \frac{\omega'_i}{\alpha_i} & \text{ha } i = j, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

ahol  $0 < \omega'_i < \alpha_i$ ,  $\omega_i\omega'_i \equiv 1 \pmod{\alpha_i}$  és  $1 \leq i, j \leq \nu$ .

Legyen  $H = \text{Tors } (H_1(M(\Gamma); \mathbb{Z})) = L'/L$ . Jelöljük  $h_j$ -vel az  $[S_{jl_j}^*]$  osztályt minden  $j$ -re és  $h_0$  a  $[S_0^*]$  osztályt  $H$ -ban. A 2.4.8 egyenlőségekből kapjuk (jelöljük felső  $j$  indexszel a  $j$ -edik lábhoz tartozó lánctört számlálóját), hogy  $[S_{ji}^*] = [n_{i+1,l_j}^j S_{jl_j}^*]$  a  $H$ -ban. Ezért  $h_0, \dots, h_\nu$  generálják  $H$ -t. A relációk a következők lesznek:

$$b_0 h_0 = \sum_{j=1}^{\nu} \omega_j h_j \quad \text{és} \quad \alpha_j h_j = h_0 \quad (j = 1, \dots, \nu). \quad (3.2.14)$$

Az első relációk mátrixának determinánsából kapjuk a következő egyenlőséget:

$$|H| = \alpha_1 \cdots \alpha_\nu |e|.$$

Legyen  $\tau$  a  $h_0$  rendje  $H$ -ban. A  $0 \rightarrow \langle \widehat{\omega}_1, \dots, \widehat{\omega}_l \rangle \hookrightarrow \mathbb{Z}_{\alpha_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\alpha_\nu} \rightarrow H/\langle h_0 \rangle \rightarrow 0$  egzakt sorból kapjuk:

$$\tau = \alpha |e|.$$

A  $H_1(M(\Gamma); \mathbb{Z})$  szabad része  $\mathbb{Z}^{2g}$ , mert a  $b_1(\Gamma) = 0$ .

### 3.2.C. A fundamentális csoportról

**Tétel 3.2.15.** *Mumford tétele [7].*

Legyen  $L$  egy linkként előálló gráf 3-sokaság, melynek  $\Gamma$  csővezeték gráfja fa alakú csővezeték gráf, melyben minden csúcs génusza 0. Így  $M(\Gamma)$  racionális homológia-gömb ( $\mathbb{Q}HS^3$ ). Jelölje a metszési formáját  $I$ . Ekkor létezik  $\pi_1(L)$ -nek a következő prezentációja:

$$\left\langle \gamma_v \ v \in \mathcal{V} \ \middle| \ \gamma_v \gamma_u = \gamma_u \gamma_v, \text{ ha } (u, v) \in \mathcal{E}, \prod_u \gamma_u^{I_{u,v}} = 1, \forall v \in \mathcal{V} \right\rangle. \quad (3.2.16)$$

*Bizonyítás:* A csővezeték szerkesztésből minden  $v$  csúcsra egy  $B_v \rightarrow S_v$  fibrálást kapunk  $S^1$  fibrummal. Ez minden  $v$ -re  $\pi_1(B_v)$  egy  $\gamma_v$  generátorát adja. Továbbá  $\pi_1(B_v) = \langle \gamma_v \mid \gamma_v^{I_{v,v}} \rangle$ , mert a bázis tér  $S_v = S^2$ . Hagyjunk el minden  $v$ -vel szomszédos  $u$  csúcsra a ragasztásnál egy  $\mathring{D}_v \times S^1$  környezetet, az így kapott tér legyen  $L_X \cap B_v$ . Ekkor  $\pi_1(L_X \cap B_v)$  fundamentális csoportot a  $\{\gamma_u \mid I_{vu} \neq 0\}$  halmaz generálja, a következő relációval:  $\prod_u \gamma_u^{I_{v,u}} = 1$ . Van Kampen tételét használva kapjuk, hogy  $\gamma_u \gamma_v = \gamma_v \gamma_u$ , ha  $(u, v) \in \mathcal{E}$ , mert az  $L_X \cap B_u \cap B_v$  metszet egy tórusz kommutatív fundamentális csoporttal. A Van Kampen tétel alkalmazásánál az összekötő utak választása némi gondosságot igényel, de megválaszthatóak  $b_1(\Gamma) = 0$  miatt. ■

Nemnulla génuszú csúcsok hozzávételével újabb generátorokat és relációkat kapunk. Ezt a következő tétel foglalja össze.

**Tétel 3.2.17.** *Legyen  $\Gamma$  csővezeték gráf fa rendezett csúcshalmazzal (a génusz dekorációk nem feltétlenül nullák). Ekkor  $\pi_1(M(\Gamma))$  fundamentális csoportot a következő halmaz generálja:*

$$\{\gamma_v \mid v \in \mathcal{V}\} \cup \{a_{v,i}, b_{v,i} \mid 1 \leq i \leq g_v, v \in \mathcal{V}\}.$$

*A relációk a következők (ahol jelölje  $[a, b]$  az  $a$  és  $b$  generátorok kommutátorát):*

$$\begin{aligned} [\gamma_u, \gamma_v] &= 1 && \text{ha } (u, v) \in \mathcal{E} \\ [\gamma_v, a_{v,i}] &= [\gamma_v, b_{v,i}] = 1 && \forall v \in \mathcal{V} \text{ és } 1 \leq i \leq g_v \in \mathcal{E} \\ [a_{v,1}, b_{v,1}] \cdots [a_{v,g_v}, b_{v,g_v}] \cdot \prod_u \gamma_u^{I_{v,u}} &= 1 && \forall v \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

## 4. fejezet

# Casson-invariáns és Casson-Walker-invariáns

### 4.1. Casson-invariáns

Tegyük fel, hogy  $\Gamma$  összefüggő csővezeték gráf negatív definit  $I$  metszési formával. A hozzá rendelt 3-sokaságot jelölje  $M(\Gamma)$ . Grauert tétele [3] miatt  $M(\Gamma)$  előáll szingularitás linkjeként. Feltesszük továbbá, hogy  $M(\Gamma)$  egészhomológia-gömb (ez ekvivalens azzal, hogy  $\det(\Gamma) = 1$ ).

A  $\lambda$  Casson invariáns minden  $M$  egészhomológia-gömbhöz hozzárendel egy  $\lambda(M)$  egész számot. Casson bizonyította a következő tételt.

**Tétel 4.1.1.** *Minden  $M$  irányított 3-sokasághoz, mely egészhomológia-gömb, létezik egy jól meghatározott  $\lambda(M)$  egész szám, mely teljesíti a következő tulajdonságokat:*

- (a)  $\lambda(S^3) = 0$ ;
- (b)  $\lambda(-M) = -\lambda(M)$ ;
- (c) Ha  $\lambda(M) \neq 0$ , akkor  $\pi_1(M)$ -nek van nemtriviális  $SU_2$ -reprezentációja;
- (d)  $\lambda(M_1 \# M_2) = \lambda(M_1) + \lambda(M_2)$ .

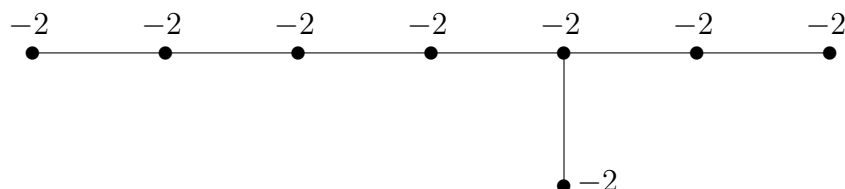
A  $\lambda(M)$  számot az  $M$  sokaság Casson-invariánsának nevezzük.

**Definíció 4.1.2.** *Tegyük fel, hogy  $M$  sokaság egy  $\Gamma$ -hoz rendelt gráf 3-sokaság, amely egy szingularitás linkjeként előáll és egészhomológia-gömb. Ekkor a Casson-invariánst definiáljuk a következő módon:*

$$-24 \cdot \lambda(M) = \sum_{v \in \mathcal{V}} (S_v^2 + 3) + \sum_{v \in \mathcal{V}} (2 - \delta_v) \cdot (S_v^*, S_v^*), \quad (4.1.3)$$

ahol a  $\delta_v$  a  $v$  csúcs fokszáma  $\Gamma$  gráfban.

**Példa 4.1.4.** A legismertebb egészhomológia-gömb, ami nem homotópicusan ekvivalens  $S^3$ -mal, a Poincaré-homológiagömb. Jelölje ezt  $\mathbb{E}_8$ . Ennek csővezeték gráfja a következő (a  $g_v$  génusz minden csúcsra 0):



A  $\Gamma$  csővezeték gráf metszési mátrixa  $I$ . Az  $I$  mátrix inverzének minden eleme negatív előjelű, ennek  $-1$ -szeresét írjuk le.

$$I \qquad -I^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 12 & 8 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 & 15 & 18 & 12 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 24 & 16 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 20 & 10 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 14 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 10 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Innen megkaphatjuk a 4.1.3 képletből, hogy  $-24 \cdot \lambda(\mathbb{E}_8) = \sum_{v \in \mathcal{V}} (E_v^2 + 3) + \sum_{v \in \mathcal{V}} (2 - \delta_v) \cdot (E_v^*, E_v^*) = 8 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-30) + 1 \cdot (-4) + 1 \cdot (-8) = 24$ , amiből következik, hogy  $\lambda(\mathbb{E}_8) = -1$ .

Megemlítjük, hogy ebből is megkapjuk következményként, hogy  $\mathbb{E}_8$  és  $S^3$  nem homotópicusan ekvivalens terek.

**Példa 4.1.5.** Ha  $M$  Seifert 3-sokaság (és emellett egészhomológia-gömb), akkor a 3.2.12 állításból és a 2.4.15 egyenlőségből kapunk egy képletet  $\lambda(M)$ -re az ottani jelölést használva:

$$-24 \cdot \lambda(\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu)) = \frac{1}{e} \left( 2 - \nu + \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\alpha_j^2} \right) + e + 3 - 12 \cdot \sum_{j=1}^{\nu} \mathbf{s}(\omega_j, \alpha_j) \quad (4.1.6)$$

Az  $\omega_j$  kiszámítható a következő képletből:  $\omega_j \cdot \prod_{k \neq j} \alpha_k \equiv -1 \pmod{\alpha_j}$ .

Az  $\mathbf{s}(\omega_j, \alpha_j) = \mathbf{s}(\omega'_j, \alpha_j) = -\mathbf{s}\left(\prod_{k \neq j} \alpha_k, \alpha_j\right)$  és  $e^{-1} = \prod_{k=1}^{\nu} \alpha_k$ . A 2.4.13 tételt



használva látható, hogy  $1 < j < \nu - 1$ -re:

$$\begin{aligned} \lambda(\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_\nu)) = \\ \lambda(\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \alpha_{j+1} \cdots \alpha_\nu)) + \lambda(\Sigma(\alpha_1 \cdots \alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_\nu)) \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Ebből a képletből látható, hogy elég a  $\nu \leq 3$  ágú csillag alakú csővezeték gráfok Casson-invariánsát ismerni ahhoz, hogy a Seifert 3-sokaságok Casson-invariánsát meghatározhassuk.

**Megjegyzés 4.1.8.** Tegyük fel, hogy  $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  egy  $0 \in \mathbb{C}^3$  környezetében definiált holomorf függvény, amelynek izolált szingularitása van az origóban. Ezt nevezzük hiperfelület-szingularitásnak. Legyen  $(V, 0) = (f^{-1}(0), 0)$ . Jelölje  $S_\varepsilon$  a 0 középpontú  $\varepsilon$  sugarú gömböt az  $\mathbb{R}^6 \simeq \mathbb{C}^3$ -ban,  $B_\varepsilon$  ennek belsejét. Legyen  $K = V \cap S_\varepsilon$ . Ha  $\varepsilon$ -t elég kicsinek választjuk, akkor a  $V$  topologikusan egy kúp  $K$  felett. Továbbá legyen  $F = f^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon$ , amely nem függ  $\delta$  és  $\varepsilon$  megválasztásától, ha  $0 < \delta \ll \varepsilon$ . Az  $F$  egy irányított 2-komplex-dimenziós peremes sokaság. Ezt nevezzük  $f$  Milnor-fibrumának. Az is belátható, hogy  $\partial F = f^{-1}(\delta) \cap S_\varepsilon$  izomorf  $K$ -val. Tehát  $F$  egy valós irányított peremes 4-sokaság. A  $H_2(F; \mathbb{Z}) \otimes H_2(F; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  metszetforma szignatúráját jelölje  $\sigma(F)$ .

A Brieskorn-szingularitás esetében fogunk látni egy bizonyítható összefüggést a Casson-invariáns és a szignatúra között (4.1.10 példa). További számítások is adottak voltak hozzá, hogy Neumann és Wahl leírják a következő általános hipotézist.

**Sejtés 4.1.9. Casson-invariáns sejtés (Casson invariant conjecture).** Tegyük fel, hogy  $(X, o)$  egy 2-dimenziós izolált hiperfelület-szingularitás, melynek az  $L_X$  linkje egészhomológia-gömb  $(\mathbb{Z}HS^3)$ . Legyen  $\sigma(F)$  a hiperfelület-szingularitás  $F$  Milnor fibrumának szignatúrája. Ekkor :

$$\lambda(L_X) = \frac{\sigma(F)}{8}.$$

**Példa 4.1.10.** Jelölje  $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  a  $\left\{ \sum_{i=1}^3 z_i^{\alpha_i} = 0 \right\}$  Brieskorn-szingularitás szignatúráját, ahol  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  páronként relatív prímek. Megjegyezzük, hogy ekkor létezik egy  $\Gamma$  csillag alakú csővezeték gráf, melyre  $M(\Gamma) = \Sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . Ekkor a következő összefüggést kapjuk a szignatúra és a Casson-invariáns között:

$$\lambda(\Sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) = \frac{\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{8}. \quad (4.1.11)$$

**Megjegyzés 4.1.12.** A Brieskorn-szingularitás  $F$  Milnor-fibrumának szignatúrája kiszámolható  $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2$  alakban, ahol

$$\sigma_i = \# \left\{ (j_1, j_2, j_3) \mid 0 < j_k < \alpha_k \ (1 \leq k \leq 3), i < \sum_{k=1}^3 \frac{j_k}{\alpha_k} < i + 1 \right\}. \quad (4.1.13)$$

A szignatúra még egy értelmezését megadjuk. Legyen  $C$  a következő halmaz:  $\{0 \leq x_i \leq \alpha_i, i = 1, 2, 3\}$ , és legyen  $\overset{\circ}{C}$  ennek belseje. A  $C$  kocka minden  $v$  csúcsa meghatároz egy  $T_v$  tetraédert, melynek csúcsai:  $v$  és a három vele szomszédos csúcs. Jelölje  $\#_v$  a  $T_v \cap \overset{\circ}{C}$  rácspontjainak számát. Ekkor  $\#_v$  független  $v$  megválasztásától. Az élek mentén összehasonlítva őket látható, hogy megegyeznek. Például  $(j_1, j_2, j_3) \leftrightarrow (\alpha_1 - j_1, j_2, j_3)$  leképezés izomorfizmust ad  $T_{(0,0,0)}$  és  $T_{(\alpha_1,0,0)}$  tetraéderek rácspontjai között.

Jelölje  $T$  a következő 4 csúcs által meghatározott tetraédert:  $(\alpha_1, 0, 0)$ ,  $(0, \alpha_2, 0)$ ,  $(0, 0, \alpha_3)$ ,  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . Ennek belső rácspontjainak száma legyen  $\#(T \cap \overset{\circ}{C})$ . Ekkor

$$\sigma = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_0 + 2\sigma_2 - \prod_{i=1}^3 (\alpha_i - 1) = 4 \cdot \# - \prod_{i=1}^3 (\alpha_i - 1) = -\#(T \cap \overset{\circ}{C}).$$

**$\lambda(\Sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))$  és az  $SU_2$  reprezentáció kapcsolata.**

**Állítás 4.1.14.** A  $\pi_1 = \pi_1(\Sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))$  fundamentális csoport  $SU_2$  reprezentációinak konjugált osztályainak száma véges és pontosan  $\frac{\#(T \cap \overset{\circ}{C})}{4}$ .

*Bizonyítás:* A  $\pi_1$  csoportnak egy reprezentációját a 3.2.15 tétel szerint kaphatunk. Jelölje a  $\Gamma$  központi csúcsához tartozó reprezentánst  $\gamma_0$ . Legyen  $\rho : \pi_1 \rightarrow SU_2$  egy irreducibilis reprezentáció. Mivel  $\gamma_0$  centrális elem, ezért  $\rho(\gamma_0) = \pm 1$ . Tudjuk, hogy  $SU_2 / \pm 1 = SO_3$ . Emiatt a  $\rho$  egy  $\bar{\rho} : \pi_1 / \gamma_0 = \bar{\pi}_1 \rightarrow SO_3$  reprezentációt indukál. Így kapunk egy izomorfizmust a  $\pi_1 \rightarrow SU_2$  és a  $\bar{\pi}_1 \rightarrow SO_3$  irreducibilis reprezentációk között. A  $\Sigma = \Sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  tér egy  $K(\pi_1, 1)$  Eilenberg-MacLane-tér, ezért a  $G$ -nyalábok (a  $G = SU_2$  és a  $G = SO_3$  esetet használjuk majd) laposak, tehát meghatározza őket egy  $\pi_1 \rightarrow G$  reprezentáció. Az  $SU_2 = Spin_3$ , így  $w_2$  Stiefel-Whitney osztály adja meg azt az obstrukciót, hogy egy  $\pi_1 \rightarrow SO_3$  reprezentáció felemelhető-e  $\pi_1 \rightarrow SU_2$  reprezentációvá. A  $H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) = 0$ , ezért ez az obstrukció eltűnik.

Tegyük fel, hogy  $\bar{\rho}$  egy irreducibilis  $SO_3$ -reprezentációja a következő  $\bar{\pi}_1$  csoportnak:

$$\bar{\pi}_1 = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{\alpha_1} = x_2^{\alpha_2} = x_3^{\alpha_3} = x_1 x_2 x_3 = 1 \rangle$$

A  $\rho(x_i)$  egy  $\alpha_i$  rendű forgatása  $S^2$ -nek. Ennek a forgatásnak a fixpontjai legyenek  $P_i^\pm$ . A  $\{P_i^\pm \mid i = 1, 2, 3\}$  fixpontok 8 háromszöget határoznak meg, a szimmetria miatt ez 4 párba rendeződik. Legyen egy  $S^2$ -beli háromszög típusa  $(j_1, j_2, j_3)$ , ha a szögei  $\left(\frac{j_1\pi}{\alpha_1}, \frac{j_2\pi}{\alpha_2}, \frac{j_3\pi}{\alpha_3}\right)$ . Az  $x_1 x_2 x_3 = 1$  relációból kapjuk, hogy a négyféle (egymással nem feltétlenül szimmetrikus) háromszögeknek a típusa a következő:

$$(j_1, j_2, j_3), (\alpha_1 - j_1, \alpha_2 - j_2, j_3), (\alpha_1 - j_1, j_2, \alpha_3 - j_3), (j_1, \alpha_2 - j_2, \alpha_3 - j_3),$$

ahol  $j_1, j_2, j_3$  a  $\bar{\rho}$ -tól függenek. Ezen kívül a háromszögek területe  $\pi$ -nél nagyobb, így a fenti 4 rácspont benne van  $T \cap \overset{\circ}{C}$ -ben. Valójában a  $T \cap \overset{\circ}{C}$  rácspontjain adott egy természetes  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -hatás, melynek egy pályája lesz a fenti 4 hármas a háromszögeknek megfelelően. Egy ilyen orbit egyértelműen meghatározza a reprezentációt, emiatt az irreducibilis  $SO_3$ -reprezentációk száma  $\#(T \cap \overset{\circ}{C})$ . A 4.1.11 egyenlőségből kapjuk, hogy  $\lambda = \frac{\sigma}{8} = \frac{-\#(T \cap \overset{\circ}{C})}{8}$ . Ebből a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\lambda = -\frac{1}{2} \cdot \{\text{Irreducibilis } SU_2\text{-reprezentációk konjugált osztályainak száma}\}.$$

■

## 4.2. Alexander-polinom és mütét formula

A következőkben röviden definiáljuk az Alexander-polinomot [2] alapján, utána pedig a Casson-invariáns mütét formuláját mutatjuk meg egy esetben.

**Definíció 4.2.1.** *Legyen  $M$  egy 3-sokaság, mely  $\mathbb{Z}HS^3$ . Legyen benne egy  $K \subset M$  csomó ( $K \sim S^1$ ). Jelölje  $M_0$  az  $M \setminus K$ -t. A Mayer-Vietoris sorból megkapjuk, hogy  $H_1(M_0; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} = \mathbb{Z}\langle t \rangle$ . Vegyük a  $\pi : \widetilde{M}_0 \rightarrow M_0$  univerzális Abel-fedését  $M_0$ -nak. Ekkor a  $t$  hat  $H_1(\widetilde{M}_0; \mathbb{Z})$ -n, ezért tekintsünk  $H_1(\widetilde{M}_0; \mathbb{Z})$ -ra mint  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modulusra.*

*Vegyük  $H_1(\widetilde{M}_0; \mathbb{Z})$ -nek mint  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modulusnak  $n$  darab generáló elemét és ezek közt fennálló  $m$  darab relációt. Ekkor létezik a következő egzakt*

sor:

$$\mathbb{Z}^m \xrightarrow{\cdot A} \mathbb{Z}^n \longrightarrow H_1(\widetilde{M}_0; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \quad (m = n - 1),$$

ahol  $A$  mátrix jeleníti meg a  $t$  elemmel való hatást a báziselemeken. Legyen  $E_0 = \{Az \mid A \text{ mátrix } (n-1) \times (n-1) \text{ minorjai}\}$ . Definíció szerint a  $K$  csomó  $\Delta$  Alexander-polinomja az  $E_0$  legnagyobb közös osztója legyen.

Legyen  $M$  sokaság egy egészhomológia-gömb, és legyen benne  $K \subset M$  csomó. Legyen  $T(K)$  a  $K$  csomó egy tubuláris környezete, továbbá legyenek  $\lambda$  és  $\mu$   $S^1$ -görbék  $\partial T(K)$ -n a következő egyenletekkel definiálva:

$$\begin{aligned} Lk(\lambda, K) &= 0, \\ Lk(\mu, K) &= 1, \end{aligned}$$

ahol  $Lk$  a hurkolódási együtthatót jelöli. Jelölje  $M_0$  az  $M$  sokaságból elhagyva  $T(K)$ -t. Ekkor  $\partial M_0 = S^1 \times S^1$ . Ragasszunk be az elhagyott környezet helyére egy  $S^1 \times D^2$  tömör tóruszt a határon úgy azonosítva, hogy az  $\alpha = \{\text{egy pont}\} \times \partial D^2 \subset S^1 \times D^2$  zárt görbe a  $H_1(\partial T; \mathbb{Z})$ -ben a  $p\mu + q\lambda$  elemet reprezentálja valamilyen  $p$  és  $q$  relatív prím számokkal. A  $K$  irányításának megváltoztatása vagy az  $\alpha$  zárt görbe megváltoztatása egy előjelváltást eredményezhet  $p$ -nél és  $q$ -nál, de csak egyszerre. De ekkor a  $p/q$  racionális szám nem változik, és a ragasztott 3-sokaságunk is ugyanaz marad. A kapott 3-sokaságot jelölje  $M_{p/q}^3(K)$ . Ez a sokaság csak  $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  értékétől függ, amit Dehn-műtétegyütthatónak hívunk. A  $\infty$  Dehn-együtthatós műtét a triviális ragasztás (ez olyan, mintha nem változtattunk volna  $M$  sokaságon). A  $H_1(M_{p/q}^3(K); \mathbb{Z})$  csoport izomorf  $\mathbb{Z}_p$  csoporttal. Ha  $p/q$  egész, akkor egész műtétnek hívjuk.

A fentiekből látható, hogy az  $M$  egészhomológia-gömbön végzett  $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  együtthatós műtét akkor és csak akkor marad egész homológia gömb, ha  $p = 1$ .

Jelölje  $\Delta_s(t)$  a szimmetrizált Alexander-polinomot, amely normalizált ( $\Delta_s(1) = 1$ ) és  $\Delta_s(t^{-1}) = \Delta_s(t)$ . Casson belátta, hogy a következő megjegyzés igaz a Casson-invariánsra.

#### Megjegyzés 4.2.2. Műtétformula.

Jelölje  $\Delta_s''$  a  $\Delta_s$  szimmetrizált Alexander-polinom második deriváltját. Ekkor:

$$\lambda(M_{1/(q+1)}(K)) - \lambda(M_{1/q}(K)) = \frac{1}{2} \Delta_s''(1).$$

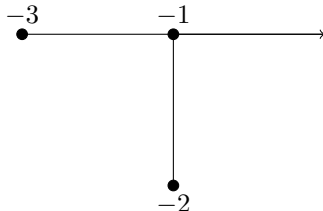
**Megjegyzés 4.2.3.** Legyen  $M$  egy csővezeték szerkesztéssel kapott 3-sokaság. Legyen  $\Gamma$  negatív definit csővezeték gráf, melyre  $M = M(\Gamma)$ . A  $K \subset M$  csomót reprezentálja egy  $v$  csúchhoz tartozó nyíl. (A nyíl hozzárendelése általánosabban: [8]) Jelölje  $d = \det(\Gamma)$ . Legyen  $\Gamma^e(-k)$  új csővezeték gráf, melyet a  $\Gamma$  gráfból kapunk a nyíl helyére egy új  $-d - k$  Euler-számú csúcsot hozzávéve, amely egy éllel csatlakozik  $v$ -hez. Ekkor igaz a következő három állítás:

- (a)  $\det(\Gamma^e(-k)) = k$ ,
- (b)  $\Gamma^e(-k)$  negatív definit, feltéve, hogy  $k > 0$ ,
- (c)  $M(\Gamma^e(-k)) = M_{-k}(K)$ .

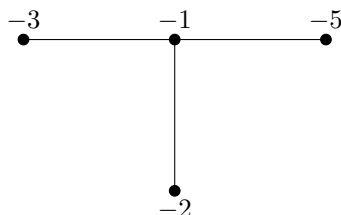
A továbbiakban megmutatjuk, hogy a műtét formula (4.2.2) fennáll egy példában.

**Példa 4.2.4.** Az  $E_8$  Poincaré-homológiagömb ellentettje,  $-\mathbb{E}_8$  megkapható az  $S^3$  gömbből a  $K = T(3, 2)$  tórusz csomó mentén való  $k = -1$  Dehn-együtthatójú műtéttel.

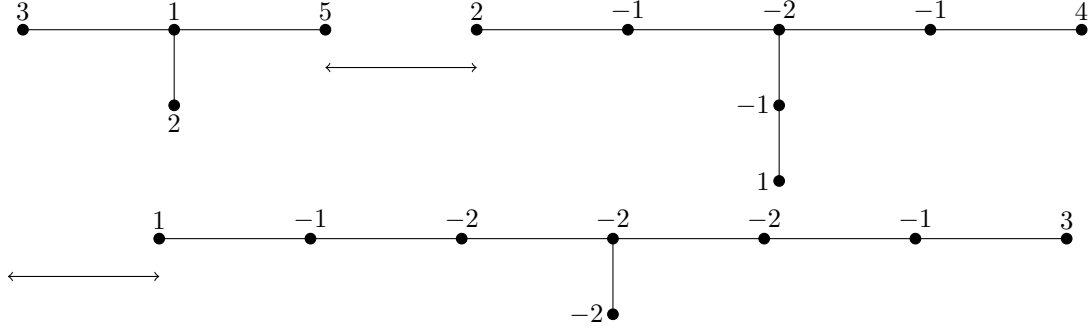
A csővezeték gráfokban a  $[0]$  génusz jelölését elhagyjuk. A 2.2.1 csővezeték szerkesztés alapján az  $M_\infty = S^3$  gömb  $\Gamma$  gráfja felírható a következő módon (a  $K$  tórusz csomót egy nyíllal jelöljük):



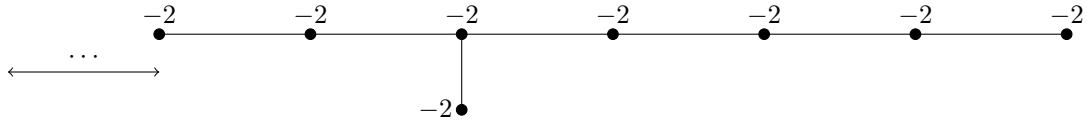
Ebből a 4.2.3 szerint a műtéttel kapott  $M_1(K)$  sokaság  $\Gamma'$  csővezeték gráfja a következő:



Ennek ellentettje  $-\Gamma'$  (az Euler-számok előjelváltásával kapott gráf) a 2.2.1 szerint ekvivalens  $\mathbb{E}_8$  gráfjával.



így folytatva:



A  $T(3, 2)$  túrusz csomó szimmetrizált Alexander-polinomja:  $\Delta_s(t) = t - 1 + \frac{1}{t}$ . Ennek első deriváltja:  $\Delta'_s(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$ . Második deriváltja:  $\Delta''_s(t) = 2\frac{1}{t^3}$ . Így  $\Delta''_s(1) = 2$ .

Felírva a 4.2.2 műtét formulát (tudjuk, hogy  $\lambda(S^3) = 0$  és  $\lambda(\mathbb{E}_8) = -1$ ):

$$\lambda(M_{1/1}) - \lambda(M_\infty) = \lambda(-\mathbb{E}_8) - \lambda(S^3) = 1 - 0 = 1 = \frac{1}{2} \cdot \Delta''_s(1).$$

### 4.3. Casson-Walker-invariáns

A Casson-invariánst egészhomológia-gömbökre tudtuk definiálni. Szeretnénk ezt kiterjeszteni általánosabb esetekre is Walker nyomán [14]. A következő definíció kiterjeszti a Casson-invariánst negatív definit  $\mathbb{Q}HS^3$  gráf 3-sokaságokra.

**Definíció 4.3.1.** Tegyük fel, hogy  $H = H_1(M(\Gamma), \mathbb{Z})$  véges. Ekkor az  $M$  gráf 3-sokaságra definiáljuk  $\lambda(M)$  Casson-Walker-invariánst a következőképpen:

$$-\frac{24}{|H|} \lambda(M) = \sum_{v \in \mathcal{V}} (E_v^2 + 3) + \sum_{v \in \mathcal{V}} (2 - \delta_v) \cdot (E_v^*, E_v^*). \quad (4.3.2)$$

**Példa 4.3.3.** Legyen  $M$  egy Seifert 3-sokaság  $\mathbb{Q}HS^3$ , melynek Seifert-invariánsai  $(e_0, 0, \{(\alpha_j, \omega_j)\}_{j=1}^\nu)$ . Ekkor a 4.1.5 példához hasonlóan a Casson-Walker-invariánssra a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{-24}{|H|} \cdot \lambda(M) = \frac{1}{e} \left( 2 - \nu + \sum_{j=1}^\nu \frac{1}{\alpha_j^2} \right) + e + 3 - 12 \cdot \sum_{j=1}^\nu \mathbf{s}(\omega_j, \alpha_j). \quad (4.3.4)$$

**Példa 4.3.5.** Az  $L(n, q)$  lencsetérre a Casson-Walker-invariáns a következő:

$$\lambda(L(n, q)) = \frac{n \cdot \mathbf{s}(q, n)}{2}. \quad (4.3.6)$$

## 5. fejezet

# Turaev-Reidemeister-torzió

### 5.1. Véges lánckomplexus torziója

Rögzítsük az  $\mathbb{F}$  testet. Legyen  $c$  és  $c'$  egy  $\mathbb{F}$ -vektortér két rendezett bázisa. Az áttérési mátrixuknak determinánsát jelölje  $[c/c'] \in \mathbb{F}^* = \mathbb{F} \setminus \{0\}$ . Két bázist ekvivalensnek mondunk, ha  $[c/c'] = 1$ .

Legyen  $C_* = (C_*, \partial_*) : C_m \rightarrow \cdots \rightarrow C_0$  véges lánckomplexus, ahol  $C_i$  véges dimenziós minden  $i$ -re. Legyen minden  $C_i$ -ben rögzítve egy  $c_i$  bázis. Ehhez hasonlóan tegyük fel, hogy minden  $H_i(C_*)$  homológiacsoporthoz van egy bázisa. Legyen  $h_i$  a  $\text{Ker}(\partial_i : C_i \rightarrow C_{i-1})$  vektorainak egy rendezett halmaza, amely kifeszíti a  $\text{Ker}(\partial_i)$ -t. Legyen  $b_i$  a  $C_i$  vektorainak egy rendezett halmaza, melyre  $\partial_{i-1}(b_i)$  bázis  $\text{Im} \partial_{i-1}$ -ben. Ekkor minden  $i$ -re a  $\partial_i(b_{i+1})h_i b_i$  a  $C_i$ -nek egy bázisa, tehát összehasonlítható  $c_i$ -vel.

**Definíció 5.1.1.** *A  $C_*$  véges lánckomplexus torzióját definiáljuk a következő módon:*

$$\tau(C_*) = (-1)^{|C|} \cdot \prod_{i=1}^m [\partial_i(b_{i+1})h_i b_i / c_i]^{(-1)^{i+1}} \in \mathbb{F}^*, \quad (5.1.2)$$

$$\text{ahol } |C| = \sum_{i=0}^m \left( \sum_{j=0}^i \dim C_j \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^i \dim (H_j(C_*)) \right).$$

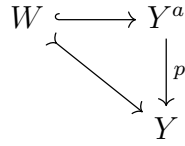
Ez csak a  $C_i$  és  $H_i(C_*)$  bázisainak ekvivalenciaosztályától függ, és független  $b_i$  és  $h_i$  választásától. Ha  $C_*$  aciklikus, akkor  $|C| = 0$ , és ekkor  $\tau(C_*) = \prod_{i=1}^m [\partial_i(b_{i+1})h_i b_i / c_i]^{(-1)^{i+1}}$ .



## 5.2. Reidemeister-torzió

Rögzítsünk le egy  $Y$  véges összefüggő CW-komplexust. Legyen  $H = H_1(Y; \mathbb{Z})$ . Rögzítsünk továbbá egy  $\rho : \mathbb{Z}[H] \rightarrow \mathbb{F}$  gyűrűhomomorfizmust, amely a  $\mathbb{Z}[H]$  egy reprezentációja. Legyen  $Y^a$  az univerzális fedőtere  $Y$ -nak a természetes CW-komplexus struktúrával. A  $H$  csoport meghatároz egy hatást  $Y^a$ -n, amely a cellák permutálásában jelenik meg. Ezért a  $C_*(Y^a, \mathbb{Z})$  elemei tekinthetők  $\mathbb{Z}[H]$ -modulusnak. Tekintsünk  $\mathbb{F}$ -re mint jobboldali  $\mathbb{Z}[H]$ -modulusra az  $f \cdot h = f\rho(h)$  képlettel. Legyen  $C_*^\rho(Y)$  a következő lánckomplexus:  $\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{Z}[H]} C_*(Y^a, \mathbb{Z})$ . A  $H_*(C_*^\rho(Y))$  homológiát az  $Y$   $\rho$ -csavart homológiájának hívjuk.

Nevezzük az  $Y^a$  cellahalmazának egy  $W$  részhalmazát fundamentális cellahalmaznak, ha  $Y$  minden cellája felett pontosan egy cella van  $W$ -ben. (Létezik  $W \hookrightarrow Y^a \xrightarrow{p} Y$  injektív leképezés.)



Vegyük  $Y^a$  egy  $W$  fundamentális cellahalmazát. Ennek rögzítsük egy tetszőleges irányítását és rendezését. Ekkor  $W$  a  $C_*(Y^a, \mathbb{Z})$  komplexusnak egy  $\mathbb{Z}[H]$  felett szabadon generáló halmaza, és bázisa  $C_*^\rho(Y)$  komplexusnak  $\mathbb{F}$  felett.

**Definíció 5.2.1.** Ha  $C_*^\rho$  aciklikus, akkor definiáljuk  $\tau(C_*^\rho(Y^a, \mathbb{Z}))$  torzióját az 5.1.1 definícióban leírtak szerint. Ha más fundamentális cellahalmazt és rajtuk más irányítást vagy rendezést választunk, az egy  $\pm\rho(h)$  ambiguitást jelent valamely  $h \in H$  elemmel. Ha  $C_*^\rho$  nem aciklikus, akkor legyen  $\tau(C_*^\rho(Y^a, \mathbb{Z})) = 0$ . Definiáljuk a  $\tau^\rho(Y)$  Reidemeister-torziót a következő képlet szerint:

$$\tau^\rho(Y) = \pm\rho(H) \cdot \tau(C_*^\rho(Y)) \in \mathbb{F} / \pm\rho(H).$$

Megjegyezzük, hogy az így definiált torzió az  $Y$  cellafelbontásától függő invariáns.

**Megjegyzés 5.2.2. Kommutatív gyűrű torziója** A fenti tárgyalásban  $\mathbb{F}$ -et kicserélhetjük egy  $A$  kommutatív gyűrűre (az  $A^*$  jelölje az  $A$  invertálható elemeinek halmazát). A  $(C_*, \partial_*)$  kicserélhető szabad  $A$ -modulusok komplexusára és a  $\rho$  reprezentáció egy  $\mathbb{Z}[H] \rightarrow A$  gyűrűhomomorfizmusra. Ekkor a  $\tau^\rho(Y)$  Reidemeister-torzió  $A^* / \pm\rho(H)$  eleme lesz.

Két különböző  $\rho_i : \mathbb{Z}[H] \rightarrow A_i, i = 1, 2$  reprezentáció esetén két különböző torziót kapunk. Ha  $\rho_2 = \psi \circ \rho_1$  valamilyen  $\psi : A_1 \rightarrow A_2$  gyűrűhomomorfizmussal, akkor a következő összefüggést kapjuk a két torzióra:

$$\psi(\tau^{\rho_1}(Y)) = \tau^{\rho_2}(Y). \quad (5.2.3)$$

### 5.3. Az univerzális Abel-torzió

Legyen  $Y$  továbbra is CW-komplexus és  $H = H_1(Y; \mathbb{Z})$ . Jelölje  $Q(H)$  a  $\mathbb{Z}[H]$  hányadosgyűrűjét. A természetes  $\mathbb{Z}[H] \hookrightarrow Q(H)$  beágyazást tekinthetjük mint egy  $\rho^a$  homomorfizmust. Általában  $C_*^{\rho^a}$  nem aciklikus, így ezt módosítanunk kell ahhoz, hogy egy aciklikus  $C_*^{\rho}$  komplexust kapjunk.

**Példa 5.3.1.** Tegyük fel, hogy  $H = \mathbb{Z}_n$ . Ekkor  $\mathbb{Z}[H] = \mathbb{Z}[T] / (T^n - 1)$ . Ekkor a  $Q(H)$  hányadosgyűrűnek van néhány nem kívánt tulajdonsága. Például, hogy  $T - 1$  egy nemtriviális nullosztó, vagy a  $Q(H) \xrightarrow{T-1} Q(H)$  részkomplexus nem aciklikus. Vegyük ezért a  $\overline{Q}(H) = \mathbb{Q}(H) / (1 + T + \dots + T^n)$  gyűrűt és az ehhez tartozó  $\overline{\rho}^a : \mathbb{Z}(H) \rightarrow \overline{Q}(H)$  homomorfizmust. Ennek a gyűrűnek az előnye, hogy ebben  $T - 1$  és  $T^q - 1$  invertálhatóak, ha  $n$  és  $q$  relatív prímek. (Belátható, hogy  $\overline{Q}(H)$ -ban  $(T - 1)(1 + 2T + \dots + nT^{n-1}) = n$ .) Így  $\overline{Q}(H)$ -ban a torzió lehet nemnulla, még akkor is, ha  $Q(H)$ -ban nulla volt. Megjegyezzük, hogy  $Q(H) \simeq \overline{Q}(H) \oplus \mathbb{Q}$ , ahol a direkt összeg második tagja miatt lesz nem aciklikus  $Q(H)$ .

A fenti példa alapján látható, hogy sok esetben a gyűrűt érdemes direkt összegre bontani és az egyes komponenseket egymástól függetlenül vizsgálni.

Tegyük fel, hogy  $Q(H)$  testek véges direkt összege. Legyen ennek torziója  $T = \text{Tors}(H)$ . Legyen  $\chi : T \rightarrow \mathbb{C}^*$  karakter. Ez kiterjed  $\rho_\chi : \mathbb{Q}[T] \rightarrow \mathbb{C}$  homomorfizmussá, ahol  $K_\chi = \text{Im } \rho_\chi \subset \mathbb{C}$  egy körosztási test. A  $\chi_1$  és  $\chi_2$  karakterek ekvivalensek, ha  $K_{\chi_1} = K_{\chi_2}$ . Ekkor a  $\rho_{\chi_2}$  homomorfizmus előáll a  $\rho_{\chi_1}$  és a  $K_{\chi_1}$  test egy Galois-automorfizmusának kompozíciójaként (5.2.3 egyenlőség). A karakterek ekvivalenciaosztályainak egy teljes osztálya legyen  $\{\chi_i\}_{i=1}^n$ . Ezek meghatároznak egy  $(\chi_1, \dots, \chi_n) \rightarrow \mathbb{Q}[T] \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n K_{\chi_i}$  izomorfizmust. Ekkor  $Q(T) = \mathbb{Q}[T]$

Legyen a  $H$  szabad része  $\text{Fr} = H/T$ . Ekkor  $\mathbb{Q}[H] = (\mathbb{Q}[T])[Fr] = \bigoplus_{i=1}^n \chi_i [Fr]$ . Mivel  $K_{\chi_i} [Fr]$  integritási tartomány, így a  $\mathbb{Q}[H]$  egy eleme akkor és csak akkor nemnulla divizor, ha minden  $\bigoplus_{i=1}^n K_{\chi_i} [Fr]$ -ba menő

projekciója nemnulla. Ebből látható, hogy  $Q(H) = \bigoplus_{i=1}^n F_i$ , ahol  $F_i$  a  $K_{\chi_i}[\text{Fr}]$  hányadosteste.

**Definíció 5.3.2.** Legyen  $\rho_i$  a következő kompozíció:  $\mathbb{Z}[H] \rightarrow Q(H) \rightarrow F_i$ . Ekkor az általános Abel-torzió a következő:

$$\tau^a(Y) = \sum_{i=1}^n \tau^{\rho_i}(Y) \in \left( \bigoplus_{i=1}^n F_i^* \right) / \left\{ \pm \left( \bigoplus_{i=1}^n \rho_i \right)(H) \right\} \quad (5.3.3)$$

**Példa 5.3.4. Lencseterek torziója.** Legyen  $L(n, q) = S^3 / \mathbb{Z}_n$  lencsetér, ahol a  $\mathbb{Z}_n$  csoport  $T$  generátorával való hatás az  $S^3 = \{|z_1| + |z_2| = 1\}$  gömbön:  $T(z_1, z_2) = (\xi z_1, \xi^q z_2)$ , ahol  $\xi = e^{2\pi i/n}$   $n$ -edik egységgyök. Az  $L(n, q)$  lencsetér előáll CW-komplexusként, egy reprezentációja a következő négy cella:

$$\begin{aligned} (i) \quad e_0 &= (1, 0), \\ (ii) \quad e_1 &= (e^{it}), \\ (iii) \quad e_2 &= (z_1, \sqrt{1 - |z_1|^2})_{z_1}, \\ (iv) \quad e_3 &= (z_1, e^{it} \sqrt{1 - |z_1|^2})_{t, z_1}, \end{aligned}$$

ahol  $0 < t < \frac{2\pi}{n}$  és  $|z_1| < 1$ . Az  $\{e_i \mid 0 \leq i \leq 3\}$  fundamentális cellák a  $C_*(L(n, q)^a, \mathbb{Z})$  komplexust szabadon generálják  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$  felett. A  $\partial$  határrelációk a következők:

$$\begin{aligned} \partial e_1 &= (T - 1)e_0, \\ \partial e_2 &= (1 + T + \dots + T^{n-1})e_1, \\ \partial e_3 &= (T^{q'} - 1)e_2, \end{aligned} \quad \text{ahol } qq' \equiv 1 \pmod{n}.$$

Tegyük fel, hogy a  $\rho : \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \rightarrow \mathbb{C}$  reprezentáció  $T$ -t a  $\xi \neq 1$   $n$ -edik egységgyökbe képezi. Ekkor  $\{e_i \mid 0 \leq i \leq 3\}$  bázist képez  $C_*^\rho(L(n, q))$ -ban  $\mathbb{C}$  felett és a relációk:  $\partial e_1 = (\xi - 1)e_0$ ,  $\partial e_2 = 0$ ,  $\partial e_3 = (\xi^{q'} - 1)e_2$ , így a komplexus aciklikus. Ekkor a torzió:

$$\tau^\rho(L(n, q)) = (\xi - 1)^{-1} \cdot (\xi^{q'} - 1)^{-1} \pmod{\pm \xi^k},$$

ahol a  $k$  tetszőleges egész szám. Ha  $\rho(T) = 1$ , akkor  $\tau^\rho = 0$ .

A fentiekből kapjuk, hogy  $\bar{\rho}^a : \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \rightarrow \overline{Q}(Z_n)$  reprezentációra:

$$\tau^{\bar{\rho}^a}(L(n, q)) = (T - 1)^{-1} \cdot (T^{q'} - 1)^{-1} \pmod{\pm T^k}.$$

Legyen  $L(n_1, q_1), L(n_2, q_2)$  egymással homotóp lencseterek. A fundamentális csoportjuk izomorfiájából kapjuk, hogy szükségszerűen  $n_1 = n_2$ .

Whitehead bizonyította ([15]), hogy  $L(n, q_1)$  és  $L(n, q_2)$  akkor és csak akkor homotópok, ha létezik egy  $r \in \mathbb{Z}_n^*$ , melyre  $q_2 \equiv q_1 r^2 \pmod{n}$ .

Két CW-komplexus kombinatorikusan ekvivalens, ha léteznek olyan felosztásaik, melyek szimplektikusan izomorfak.

A lencseterek tárgyalásának összegzése a következő megjegyzés, melyet Reidemeister könyvében [12] találhatunk meg.

**Megjegyzés 5.3.5.** *A következők ekvivalensek:*

1.  $L(n, q_1)$  és  $L(n, q_2)$  kombinatorikusan ekvivalensek,
2. A  $\tau^\rho$  Reidemeister-torziók (lásd 5.3.4) megegyeznek,
3.  $q_2 \in \{q_1, -q_1, q_1', -q_1'\}$ .

## 5.4. Turaev előjelmódosított torziója

Tekintsük az 5.2.1 definícióban tárgyalt  $\tau^\rho(Y) = \pm\rho(H) \cdot \tau(C_*^\rho(Y)) \in \mathbb{F}^* / \pm\rho(H)$  torziót. Ennek kétféle ambiguitása van: az előjele, és egy  $h \in H$  elemre  $\rho(h)$ -val való szorzás. Az előjelt eltüntetjük bevezetve az  $Y$  homológikus irányítását, mely egy  $\omega$  irányítása  $\bigoplus_i H_i(Y; \mathbb{R})$  valós vektortérnek. Vegyünk egy fundamentális cellahalmazt (5.2.1 részhez hasonlóan), és irányítsuk őket tetszőlegesen. Rögzítsünk egy  $\rho : \mathbb{Z}[H] \rightarrow \mathbb{F}$  homomorfizmust. Az 5.1.1 szerint kapunk egy  $\tau(C_*^\rho(Y))$  torziót. A fundamentális cellahalmaz bijekcióban áll  $Y$  celláival, így  $Y$  celláin kapunk egy rendezést és egy irányítást, így  $C_*(Y; \mathbb{R})$  egy bázisát is. Rögzítsük le  $h_i$  bázist  $H_i(Y; \mathbb{R})$ -ben úgy, hogy  $h_0, h_1, \dots$  ugyanolyan irányítást adjon mint  $\omega$ . A  $C_*(Y, \mathbb{R})$  lánckomplexus a  $\{h_i \mid i = 0, 1, \dots\}$  bázissal  $\tau(C_*(Y, \mathbb{R}))$  torziót adja. Legyen ennek előjele  $\tau_0 \in \{\pm 1\}$ . Ekkor  $\tau^\rho(Y, \omega) = \tau_0 \tau(C_*^\rho(Y)) \in \mathbb{F}^*$  definícióval kapott  $\tau^\rho$  torzió  $\rho(h)$ -val való szorzás erejéig egyértelmű lesz. Az így kapott  $\tau^\rho(Y, \omega) \in \rho(H)\mathbb{F}^*$  torziót előjelmódosított torziónak hívjuk.

Ha  $M$  irányított  $m$ -dimenziós sokaság, melyre  $\partial M = \emptyset$  és  $m$  páratlan, akkor minden rögzített irányítás indukál egy  $\omega$  homológikus irányítást. (Ezt meghatározza  $\bigoplus_{i < m/2} H_i(M; \mathbb{R})$  egy bázisa és az ebből Poincaré-dualitással kapott  $\bigoplus_{i > m/2} H_i(M; \mathbb{R})$ -beli bázis.) Tehát speciálisan a 3-sokaságokon tekinthetjük a kanonikus  $\omega$  homológikus irányítással kapott előjelmódosított torziót.

A  $\rho(h)$  ambiguitás eltüntetését ebben a dolgozatban nem tárgyaljuk.

## 5.5. Turaev-Reidemeister-torzió gráf 3-sokaságokra

Turaev általánosította a Reidemeister torziót, és ezt fogjuk megvizsgálni gráf 3-sokaságok esetében.

Legyen  $M$  gráf 3-sokaság negatív definit  $\Gamma$  összefüggő csővezeték gráffal. Tegyük fel, hogy racionális-homológia-gömb (így a 3.1.13 következmény miatt  $g_v = 0$  minden  $v$ -re és  $b_1(\Gamma) = 1$ ), és használjuk az eddig megszokott jelöléseket, továbbá legyen  $H = H_1(M(\Gamma); \mathbb{Z}) = L'/L$ , erről tudjuk, hogy véges csoport.

A torziót a Fourier-transzformált segítségével fogjuk definiálni, ezért szükség van az alábbi fogalmak bevezetésére.

**Definíció 5.5.1.** Legyen  $\widehat{H}$  a  $H$  duális csoportja:

$$\widehat{H} = \{\chi : H \rightarrow S^1 \text{ homomorfizmus}\}.$$

Az elemeket karaktereknek hívjuk.

Megjegyezzük, hogy a  $\widehat{H}$  mint csoport izomorf  $H$ -val.

**Definíció 5.5.2.** Az  $f : H \rightarrow \mathbb{C}$  függvény  $\widehat{f} : \widehat{H} \rightarrow \mathbb{C}$  függvényt az  $f$  Fourier-transzformáltjának nevezzük, ha kielégíti a következő feltételeket:

$$\widehat{\widehat{f}}(\chi) = \sum_{h \in H} f(h) \overline{\chi}(h), \quad f(h) = \frac{1}{|H|} \sum_{\chi \in \widehat{H}} \widehat{f}(\chi) \chi(h). \quad (5.5.3)$$

A  $\mathcal{T} : H \rightarrow \mathbb{C}$  torzió  $\widehat{\mathcal{T}} : \widehat{H} \rightarrow \mathbb{C}$  Fourier-transzformáltját fogjuk definiálni.

A 3.2.1 definícióban leírtak szerint  $L = \mathbb{Z} \langle S_v \mid v \in \mathcal{V} \rangle$ . A 3.2.9 definícióban leírtak szerint legyenek definiálva  $S_v^*$  generátorok, melyek  $L'$ -t generálják. Megjegyezzük, hogy definíció szerint  $(S_u, S_v^*) = -\delta_{uv}$ .

Ekkor  $L'/L$ -t generálja a következő halmaz:  $\{[S_v^*] \mid v \in \mathcal{V}\}$ .

Ezért a  $\widehat{H}$  elemei realizálódnak úgy mint  $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$  függvények.

**Definíció 5.5.4.** Legyen  $\chi \in \widehat{H}$  karakter. Jelölje  $v$  csúcs fokszámát  $\delta_v$ .

(a) Ha  $\chi = 1$  triviális karakter, akkor definíció szerint legyen  $\widehat{\mathcal{T}}(1) = 0$ .

(b) Ha  $\chi([S_v^*]) \neq 1$  minden olyan  $v$ -re, melyre  $\delta_v \neq 2$ , akkor a következő képlettel definiáljuk  $\widehat{\mathcal{T}}$ -ot:

$$\widehat{\mathcal{T}}(\chi) = \prod_{v \in \mathcal{V}} (1 - \chi([S_v^*]))^{\delta_v - 2}.$$

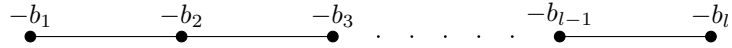
(c) Ha a (b) eset nem áll fent, tehát  $\chi([S_v^*]) = 1$  valamely  $v$ -re, melyre  $\delta_v = 2$ , akkor definiáljuk a torziót a következőképpen:

$$\widehat{\mathcal{T}}(\chi) = \lim_{t \rightarrow 1} \prod_{v \in \mathcal{V}} (1 - \chi([S_v^*] t^{m_{uv}}))^{\delta_v - 2},$$

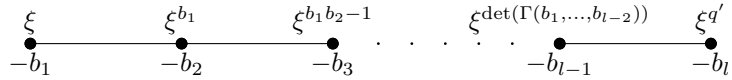
ahol  $m_{uv} = -(S_u^*, S_v^*)_{\mathbb{Q}}$ .

**Példa 5.5.5. Lencseterek torziója.** Használjuk a 2.4.4 definícióban leírtakat az  $L(n, q)$  lencsetér leírásához. Megjegyezzük, hogy ekkor  $\frac{n}{q} = [b_1, \dots, b_l]$ , tehát  $n = \det(\Gamma(b_1, \dots, b_l))$ ,  $q = \det(\Gamma(b_2, \dots, b_l))$  és  $q' = \det(\Gamma(b_{l-1}, \dots, b_1))$ .

A csővezeték gráfja a következő:



Ekkor  $\chi \neq 1$ -re tegyük fel, hogy  $\chi([S_1^*]) = \xi$ . A 3.2.4 példában leírtakhoz hasonlóan kapjuk, hogy  $[S_1^*]$  generálja  $H = \mathbb{Z}_n$ -t, így  $\xi^n = 1$ . A gráfon ábrázolva a  $\chi$  karakter értékeit:



Innen látható, hogy a karakterek bijekcióban állnak a  $\{\xi \mid \xi^n = 1\}$  halmazzal.

Ekkor az 5.5.4 definícióból kapjuk, hogy  $\chi$  karakterre:

$$\widehat{\mathcal{T}}(\chi) = \frac{1}{(1-\xi)(1-\xi^{q'})}.$$

A Fourier-transzformációs képletből (5.5.3) kapjuk meg  $\mathcal{T}(h)$  torziót ( $|H| = n$ ):

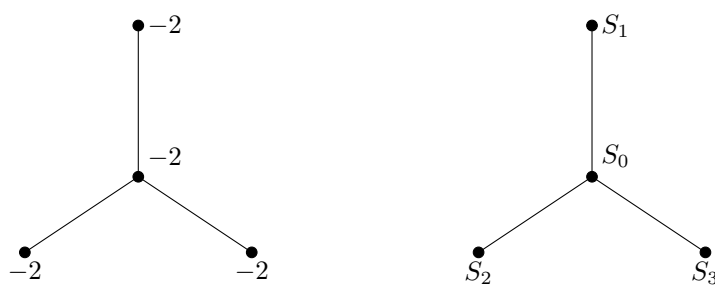
$$\begin{aligned} h \neq 0 : & \quad \mathcal{T}(h) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{\xi^n=1, \xi \neq 1} \frac{\xi^h}{(1-\xi)(1-\xi^{q'})} \\ h = 0 : & \quad \mathcal{T}(0) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{\xi^n=1, \xi \neq 1} \frac{1}{(1-\xi)(1-\xi^{q'})} \end{aligned}$$

A Dedekind-összeg trigonometrikus alakjából (2.4.17) a következő képletet kapjuk:

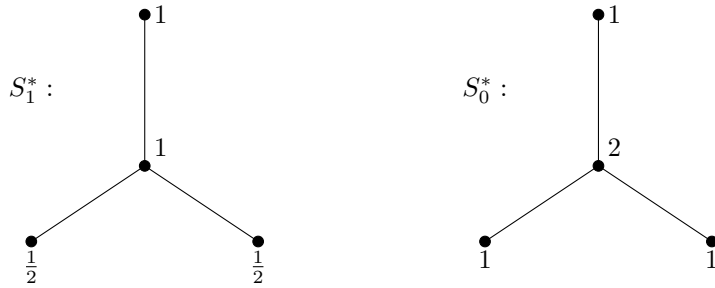
$$\mathcal{T}(0) + \mathbf{s}(q', n) = \frac{n-1}{4n}, \quad (5.5.6)$$

amiből  $\mathcal{T}(0) = \frac{n-1}{4n} - \mathbf{s}(q', n)$ .

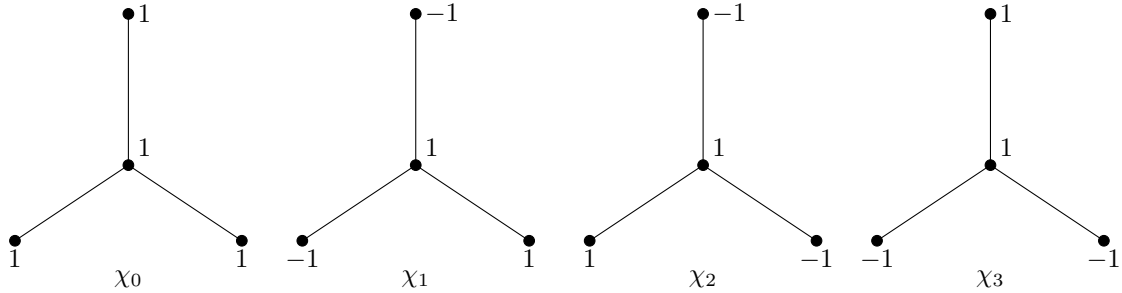
**Példa 5.5.7.** Legyen  $\Gamma$  a következő gráf és jelöljük a csúcsokhoz tartozó generátorokat a jobb oldalt található módon számozva:



Az  $S_i^*$  generátorok realizálódnak a gráfon a következő módon:  $(S_i, S_j^*) = -\delta_{ij}$ , melyet a gráfon ábrázolva  $i = 1$  és  $i = 0$  esetekben:



Tehát például  $S_1^* = S_0 + S_1 + \frac{1}{2}S_2 + \frac{1}{2}S_3$ . Ekkor  $(S_i, S_0 + S_1 + \frac{1}{2}S_2 + \frac{1}{2}S_3) = \delta_{i1}$ .  
A  $H = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ . A  $\widehat{H}$  izomorf  $H$ -val, ennek elemeit a gráfon jelöljük:



Itt láthatjuk, hogy szükség lesz regularizálásra a  $\widehat{\mathcal{T}}$  definíciójához. Az 5.5.4 definíció (c) pontja szerint a következőképpen kaphatjuk meg  $\widehat{\mathcal{T}}$ -t:

$$\widehat{\mathcal{T}}(\chi_i) = \lim_{t \rightarrow 1} \prod_{j=0}^3 (1 - \chi_i([S_j^*])t^{m_{ij}})^{\delta_j - 2}$$

Ebből kapjuk, hogy  $i = 1, 2, 3$ -ra

$$\widehat{\mathcal{T}}(\chi_i) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - 1 \cdot t^2}{(1 - 1 \cdot t)(1 - (-1)t)(1 - (-1)t)} = \frac{1}{2}.$$

A Fourier-transzformáció képletéből:

$$\mathcal{T}(0) = \frac{1}{4} \cdot \left( \widehat{\mathcal{T}}(1) + \sum_{i=1}^3 \widehat{\mathcal{T}}(\chi_i) \right) = \frac{1}{4} \cdot \left( 0 + 3 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8}.$$

## 5.6. Seiberg-Witten-invariáns

Legyen  $M$  gráf 3-sokaság az 5.5 részben leírtak szerint. Tegyük fel, hogy  $M$  racionális-homológia-gömb. Leírtunk egy sejtést a Casson-invariáns és a szignatúra közti összefüggésre (4.1.9). Egy ehhez hasonló sejtésre mutatunk rá, mely a Seiberg-Witten-invariáns és a szignatúra közti összefüggést mutatja meg. A Turaev-torzió  $\mathcal{T} : H \rightarrow \mathbb{C}$  leképezés volt. Ehhez hasonlóan vezetjük be a Seiberg-Witten-invariánst a következő definícióban.

**Definíció 5.6.1.** *Definíció szerint legyen az  $\mathfrak{sw} : H \rightarrow \mathbb{C}$  Seiberg-Witten-invariáns a következő:*

$$\mathfrak{sw}(h) = \mathcal{T}(h) - \frac{1}{|H|} \lambda_{CW},$$

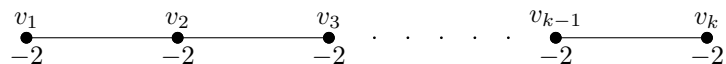
ahol  $\lambda_{CW}$  a 4.3.2 képletben felírt Casson-Walker-invariáns.

**Sejtés 5.6.2. A Seiberg-Witten-invariáns sejtés.** *Legyen  $(X, o)$  analitikus halmaz, melynek  $o$ -ban izolált hiperfelület-szingularitása van. Tegyük fel, hogy az  $L_X$  linkje racionális-homológia-gömb. Jelölje  $\mathfrak{sw}(0)$  az  $L_X$  link Seiberg-Witten-invariánsát, és  $\sigma(F)$  az  $(X, o)$   $F$  Milnor-fibrumának szignatúráját. Ekkor fennáll a következő lineáris összefüggés:*

$$\mathfrak{sw}(0) = -\frac{\sigma(F)}{8}.$$

A következő példa azt szemlélteti, hogy az 5.6.2 fennáll az ismert esetekben.

**Példa 5.6.3.** *Az  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^{k+1}$  Brieskorn-szingularitás  $L_f$  linkje  $k \geq 1$  esetében egy gráf 3-sokaság, melynek  $\Gamma$  csővezeték gráfja a következő:*

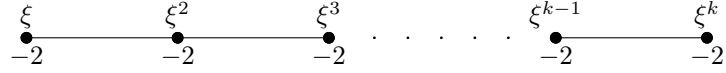


Ekkor  $\frac{n}{q} = [2, 2, \dots, 2] = \frac{k+1}{k}$ . Az  $n = k + 1$ , így  $H = H_1(L_f; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{k+1}$ . Számoljuk ki először a Casson-Walker-invariánst a 4.3.2 képletből:

$$\begin{aligned} -\frac{24}{|H|} \cdot \lambda_{CW} &= \sum_{v \in \mathcal{V}} (E_v + 3) + \sum_{v \in \mathcal{V}} (2 - \delta_v)(E_v^*, E_v^*) \\ -\frac{24}{k+1} \cdot \lambda_{CW} &= k + 2 \cdot \left( -\frac{k}{k+1} \right) = \frac{k^2 - k}{k+1}. \end{aligned}$$



A torzió kiszámítása. Legyen  $\chi \in \widehat{H}$  egy általános karakter, melyre  $\chi([S_{v_1}^*]) = \xi$ , ahol  $\xi^{k+1} = 1$ . Ekkor a  $\chi$  karakter értékei ábrázolva  $\Gamma$  gráfon:



Az 5.5.6 képlet alapján számoljuk ki  $\mathcal{T}(0)$ -t (használjuk, hogy  $((r+1)) = ((r))$ , a Dedekind-szimbólum jelentését és összegzési képleteket):

$$\begin{aligned} -\mathcal{T}(0) + \frac{k}{4(k+1)} &= \mathbf{s}(k, k+1) = \sum_{j=1}^k \left( \left( \frac{j}{k+1} \right) \right) \cdot \left( \left( \frac{jk}{k+1} \right) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^k \left( \left( \frac{j}{k+1} \right) \right) \cdot \left( \left( \frac{-j}{k+1} \right) \right) = -\sum_{j=1}^k \left( \left( \frac{j}{k+1} \right) \right)^2 = \\ &= -\sum_{j=1}^k \left( \frac{j}{k+1} - \frac{1}{2} \right)^2 = -\frac{k^2 - k}{12(k+1)}. \end{aligned}$$

Ebből a következő képletet kapjuk  $\mathcal{T}(0)$ -ra:

$$\mathcal{T}(0) = \frac{k}{4(k+1)} - \mathbf{s}(k, k+1) = \frac{k}{4(k+1)} - \frac{k^2 - k}{12(k+1)} = \frac{k^2 + 2k}{12(k+1)}.$$

Így megkaptuk a Seiberg-Witten-invariánst:

$$\mathbf{sw}(0) = \mathcal{T}(0) - \frac{1}{k+1} \cdot \lambda_{CW} = \frac{k^2 + 2k}{12(k+1)} + \frac{k^2 - k}{24(k+1)} = \frac{k}{8}$$

Az  $F$  Milnor-fibrum szignatúráját a 4.1.13 alából számoljuk ki. Használjuk az ott leírt jelölést ( $\sigma(2, 2, k+1) = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2$ ). A  $\sigma_0 = \sigma_2 = 0$ , mert a rácspontok első két koordinátája egyaránt 1, így az  $i < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{j_3}{k+1} < i+1$  egyenletnek  $i = 0$  és  $i = 2$  esetén nincs  $0 < j_3 < k+1$  megoldása. A  $\sigma_1$  kiszámítása:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \# \left\{ (1, 1, j_3) \mid 1 < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{j_3}{k+1} < 2 \right\} = \\ &= \# \left\{ (1, 1, j_3) \mid 0 < \frac{j_3}{k+1} < 1 \right\} = \# \{ (1, 1, j_3) \mid 0 < j_3 < k+1 \} = k. \end{aligned}$$

Tehát  $\sigma(2, 2, k+1) = -\sigma_1 = -k$ . Így kapjuk, hogy

$$\mathbf{sw}(0) = \frac{-\sigma}{8}$$

Ezzel a példával szemléltettük, hogy a Seiberg-Witten-invariáns sejtést.

# Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretném kifejezni köszönetemet Némethi Andrásnak, témavezetőmnek, aki minden lehetőséget megragadott, hogy támogasson, biztasson és segítséget nyújtson szakdolgozatom elkészítésében. Hálás vagyok a sok konzultációért, melyekre mindig tudott időt szakítani – a többi szakdolgozója mellett is.

Köszönettel tartozom továbbá Szűcs Andrásnak, aki a topológia elméleti anyagának elsajátításában volt nagy segítségemre – enélkül a dolgozat anyagának feldolgozása komoly akadályokba ütközött volna.

Köszönöm évfolyamtársaimnak, hogy folyamatos támogatásukkal jelen voltak melletttem. És köszönöm családomnak, hogy mindvégig kitartottak melletttem, és segítettek stilisztikailag formálni az anyagot.

# Irodalomjegyzék

- [1] R. Bott, L. W. Tu: *Differential forms in algebraic topology*, Springer-Verlag, New York, 1982
- [2] R. H. Crowell, R. H. Fox: *Introduction to knot theory*, Graduate Texts in Mathematics **57**, Springer-Verlag, 1977
- [3] H. Grauert: *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen*, Math. Ann., **146** (1962), 331-368.
- [4] Á. Kaposi *Gráf 3-sokaságok*, BSc szakdolgozat, ELTE, 2015.
- [5] E. J. N. Looijenga: *Isolated singular points on complete intersections*, London Math. Soc. Lecture Note Series 77, Cambridge University Press, 1984
- [6] E. E. Moise: *Affine structures in 3-manifolds*, Annals of Mathematics, Vol. 56 (Jul., 1952), pp. 96-114
- [7] D. Mumford: *The topology of normal surface singularities of an algebraic surface and a criterion of simplicity*, IHES Publ. Math. 9 (1961), 5-22
- [8] A. Némethi: *Normal Surface Singularities*, (előkészületben levő könyv)
- [9] W. D. Neumann *Graph 3-manifolds, Splice diagrams, Singularities*, <http://www.math.columbia.edu/~neumann/preprints/graphmans0.1.pdf>
- [10] W. D. Neumann: *A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves*, Trans. Amer. Math. Soc. 268 (1981), 299-344
- [11] H. Rademacher, E. Grosswald: *Dedekind sums*, Mathematical Association of America, 1972

- [12] K. Reidemeister: *Homotopieringe und Linsenräume*, Hamburger Abhandl. **11** (1935), 102– 109.
- [13] V. Turaev: *Torsions of 3-dimensional Manifolds*, Birkhäuser Verlag, 2002
- [14] K. Walker : An extension of Casson’s invariant, Ann. of Math. Studies 126, Princeton Univ. Press, Princeton, 1992
- [15] J. H. C. Whitehead: *On incidence matrices, nuclei and homotopy types*, Ann. of Math. **41** (1941), 1197–1239.