Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Kiss Melinda Flóra
Matematika MSc
Matematikus szakirány

Komplex felületek szingularitásai

Szakdolgozat

Témavezető: Némethi András, egyetemi tanár
Geometriai Tanszék

Budapest, 2017.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet szeretnék mondani Dr. Némethi András egyetemi tanárnak, témavezetőmnek, aki felkeltette érdeklődésemet a téma iránt, segített a szakirodalom kiválasztásában, és munkámat gondosan átnézve hasznos tanácsokat adott mind a hibák kijavításában, mind a tartalom megválasztásában.

Ugyancsak köszönettel tartozom mindazoknak, akik a dolgozatban felhasznált szabad szoftverek fejlesztésében részt vettek. A dolgozat `XUbuntu` operációs rendszeren, `Emacs` szövegszerkesztővel, `LaTeX` nyelven íródott. Az ábrák elkészítéséhez a `TikZ` programot használtam.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A szingularitásokkal való ismerkedést 2015 őszén kezdtem, témavezetőm Dr. Némethi András több kurzust is tartott a témával kapcsolatban.

Az 1920-30-as években két téma volt legfőkébb a topológusok érdeklődésének középpontjában. Egyrészt a csomóelmélet, ahol az újonnan felfedezett topológiai eszközöket lehetett alkalmazni. Rengeteg új tételt bizonyítottak, akkoriban fedezték fel többek között az Alexander-polinomot is. Másrészt az algebrai geometria, ahol a szinguláris komplex algebrai felületeket akarták megérteni. A két témát K. Brauner kapcsolta össze 1928-ban, amikor megmutatta, hogy egy komplex görbe szinguláris pontjait le lehet írni egy csomóval. Később az 1960-as években E. Brieskorn hasonló összefüggéseket talált magasabb dimenziókban, tórusz csomók általánosítását vizsgálva. Így a szingularitások elmélete meghatározó lett, és számos geométert izgat azóta is.

A dolgozatban szingularitások környezetének topológiáját mutatom be. A megértéshez szükség van az algebrai geometria, algebrai topológia, differenciáltopológia és differenciálgeometria alapvető fogalmainak és tételeinek ismeretére, a 2. Fejezetben azok a tételek és definíciók lettek felsorolva, melyekre közvetlenül szükség van. A 3. Fejezet hiperfelület szingularitásokról szól. A hiperfelületet elmetsszük egy kis sugarú gömbbel, mely középpontja egy szinguláris pont, így kapjuk a szingularitás linkjét. Milnor mutatta meg, hogy a link gömbbeli komplementere egy lokálisan triviális fibrálás S^1 fölött, a fibrumot Milnor fibrumnak nevezzük. Ennek a segítségével több tételt bizonyítunk a fibrumok és a link topologikus tulajdonságairól.

Végül a 4. Fejezetben normális felület szingularitásokat vizsgálunk, definiáljuk a rezolúciót, a rezolúcióhoz tartozó rezolúciós gráfot és rácsot, látunk példát konkrét szingularitások rezolúciós gráfjára. A plumbing konstrukció segítségével megmutatjuk, hogyan kaphatunk a rezolúciós gráfból egy 3-sokaságot, D. Mumford bizonyította, hogy az pont a szingularitás linkje lesz. Végül definiálunk egy topologikus és egy algebrai $Z(t)$, illetve $P(t)$ sort, és egy konkrét példán megmutatjuk, hogyan kapcsolhatóak össze.

A két fő fejezet alapja két könyv: John Milnor [1] műve (3. Fejezet), valamint Némethi András [6] könyve (4. Fejezet). Ezeket kiegészítendő több forrást is használtam, ezek listája az irodalomjegyzékben megtalálható.

2. A szükséges előismeretek összefoglalása

2.1. Varietások

Legyen $K = \mathbb{R}$ vagy $K = \mathbb{C}$ test.

2.1.1. Definíció [[13], 1,2. o.]. Jelöljük $A = K[z_1, \dots, z_n]$-nel a K feletti n-változós polinomgyűrűt. Tetszőleges A-beli polinomot tekinthetünk egy $K^n \to K$ függvénynek: $f \in A$ és $P = (a_1, \dots, a_n)$ esetén legyen $f(P) = f(a_1, \dots, a_n)$. Így minden $f \in A$ polinom esetén beszélhetünk a $V(f) = \{P \in K^n : f(P) = 0\}$ halmazról, az f *nullhelyeiről*. Általában tetszőleges $T \subset A$ halmazra definiálhatjuk T nullhalmazát, mely a T-beli polinomok közös nullhelyeinek halmaza. Jelölése:

$$V(T) = \{P \in K^n : f(P) = 0 \ \forall f \in T\}.$$

2.1.2. Definíció [[1], 3. o.]. Ha $f \in K[z_1, \dots, z_n]$ nem konstans polinom, akkor a $Z(f)$ pontok halmazát *komplex hiperfelületnek* nevezzük.

2.1.3. Definíció [[13], 2. o.]. Egy $V \subset K^n$ halmaz *affin algebrai halmaz*, ha létezik $T \subset A$, melyre $V = V(T)$.

2.1.4. Definíció [[13], 3. o.]. Tetszőleges $V \subset K^n$ halmazra legyen

$$I(V) = \{f \in K[z_1, \dots, z_n] : f(V) = 0\}.$$

2.1.5. Tétel [Hilbert bázistétele]. *[[16], 5.6.9.] Ha R egységelemes (kommutatív) Noether gyűrű, akkor az $R[x]$ polinomgyűrű is az. Speciálisan ha K test, vagy euklideszi gyűrű, akkor a $K[z_1, \dots, z_n]$ gyűrű minden ideálja végesen generált.*

Ebből rögtön következik, hogy minden V algebrai halmaz véges sok polinomegyenlettel definiálható.

2.1.6. Következmény [[13], 1.4.7.]. *Tetszőleges $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$ sorozata algebrai halmazoknak véget ér vagy stabilizálódik ($V_i = V_{i+1} = \dots$) véges sok lépés után.*

Könnyen igazolható ([[13], 1.1.]), hogy két algebrai halmaz uniója is algebrai halmaz és algebrai halmazok tetszőleges családjának metszete algebrai halmaz. Az üres halmaz és az egész K^n tér algebrai.

2.1.7. Definíció [[13], 3. o.]. Egy nemüres algebrai halmazt irreducibilis algebrai halmaznak, másnéven *affin varietásnak* nevezünk, ha nem lehet felírni két valódi algebrai részhalmazának uniójaként.

Szintén könnyű megmutatni, hogy egy V algebrai halmaz pontosan akkor irreducibilis, ha $I(V) \lhd K[z_1, \dots, z_n]$ prímideál ([[13], 1.4.]).

2.1.8. Definíció [[13], 4. o.]. Legyen V varietás. A $K[z_1, \ldots, z_n]/I(V)$ integritási tartományt a V koordinátagyűrűjének nevezzük és $\mathcal{A}_V$-vel jelöljük. Ennek a hányadostestét a V fölötti *racionális függvények testének* hívjuk. Ennek a testnek a transzcendenciafoka K fölött a V algebrai dimenziója K fölött.

Az [[1], 10. o.] szerint, ha W valódi részvarietása V-nek, akkor $\dim W < \dim V$. Legyen $V \subset K^n$ tetszőleges algebrai halmaz és $(f_1, \ldots, f_k) = I(V)$. Minden $x \in V$ pontra tekintsük a $k \times n$-es $(\partial f_i / \partial x_j(x))$ mátrixot. Legyen ρ a maximális rang, amit a mátrix elér a V pontjaiban.

2.1.9. Definíció [[1], 10. o.]. Az $x \in V$ nem szinguláris, vagy *egyszerű* pont, ha $(\partial f_i / \partial x_j(x))$ rangja ρ. Különben az x *szinguláris* pont. A V szinguláris pontjainak halmazát $\Sigma(V)$-vel jelöljük.

Ez a definíció nem függ az $f_1, \ldots, f_k$ polinomok választásától. Ugyanis, ha hozzáveszünk egy új f_{k+1} polinomot, melyre $g_1 f_1 + \cdots + g_k f_k$, akkor a mátrix új sora a régi sorok lineáris kombinációja.

Az alábbi két tétel mindegyike Whitney tétele. A bizonyítások a [[4]] könyvben megtalálhatók.

2.1.10. Tétel [[1],2.3.]. *A V algebrai halmaz nem szinguláris pontjainak $V - \Sigma(V)$ halmaza nemüres, K-analitikus sima sokaság, K-dimenziója $n - \rho$. Irreducibilis V esetén $V - \Sigma(V)$ dimenziója egyenlő a V algebrai dimenziójával.*

2.1.11. Tétel [[1], 2.4.]. *Tetszőleges $V \supset W$ párra $V - W$-nek véges sok topologikus komponense van.*

2.1.12. Következmény [[1], 2.2]. *A V varietás szinguláris pontjainak $\Sigma(V)$ halmaza valódi algebrai részhalmaza V-nek.*

Legyen M sima sokaság, jelölje M^m azt, hogy az M dimenziója m.

2.1.13. Definíció [[17], 14.2.1.]. Legyenek M^m, N^n sima sokaságok, $m \geq n$ és legyen $f : M^m \to N^n$ tetszőleges differenciálható függvény. A $p \in M$ *reguláris pontja* az f-nek, ha az f rangja a p pontban n. Különben a p *kritikus pontja* f-nek. Ha $q \in N$ és minden pont az $f^{-1}(q)$ halmazban reguláris, akkor q *reguláris érték*, egyébként q *kritikus* érték.

2.1.14. Lemma [[1], 2.5.]. *Legyen V egy algebrai halmaz, melyet $f(z) = 0$ definiál, ahol f irreducibilis polinom. Ekkor minden polinom, ami eltűnik V-n benne van (f)-ben. Így V irreducibilis és $\Sigma(V)$ az f kritikus pontjai halmazának és V-nek a metszete.*

2.1.15. Következmény [[1], 2.6.]. *Tetszőleges V algebrai halmaz felírható véges sok $M_1, \ldots, M_p$ halmaz diszjunkt uniójaként, ahol az M_j-k véges sok komponensből álló sima sokaságok. Hasonlóan, $V - W$ is felírható így, ahol V, W varietások.*

Bizonyítás. Legyen $M_1 = V - \Sigma(V)$, $M_2 = \Sigma(V) - \Sigma(\Sigma(V))$, és így tovább. A

$$V \supset \Sigma(V) \supset \Sigma(\Sigma(V)) \supset \dots$$

sorozat véges sok lépés után véget ér, a 2.1.11. Tétel miatt mindegyik M_i-nek véges sok komponense van és V az M_i halmazok diszjunkt uniója. Az $M_i - (W \cap M_i)$ halmazt jelölje M_i'. Ekkor M_i'-nek véges sok komponense van és

$$V - W = M_1' \sqcup \dots \sqcup M_p'.$$

□

2.1.16. Lemma [[1], 2.7.]. *Legyen V algebrai halmaz, $M_1 = V - \Sigma(V)$ és g polinomfüggvény K^n-en. Legyenek $f_1, \dots, f_k$ az $I(V)$ ideál generátorai és legyen W azon $x \in V$ pontoknak a halmaza, melyre a*

$$C = \begin{bmatrix} \partial g/\partial x_1 & \dots & \partial g/\partial x_n \\ \partial f_1/\partial x_1 & \dots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_k/\partial x_1 & \dots & \partial f_k/\partial x_n \end{bmatrix}$$

mátrix rangja x-ben legfeljebb ρ. Ekkor a $g|M_1$ kritikus pontjainak halmaza $M_1 \cap W$.

Bizonyítás. Az M_1 tetszőleges pontjának környezetében tudunk $u_1, \dots, u_n$ lokális koordinátákat választani K^n-en úgy, hogy M_1 azon pontok halmaza legyen, melyre $u_1 = \dots = u_\rho = 0$. Ekkor $u_{\rho+1}, \dots, u_n$ lokális koodrináták M_1-en. Mivel az f_i eltűnik M_1-en, ezért minden $x \in M_1$ pont és $j \geq \rho + 1$ esetén $\partial f_i/\partial u_j = 0$. Jelölje X a $(\partial f_i/\partial u_j)$ mátrixot. Ekkor X oszlopekvivalens a $D = (\partial f_i/\partial x_l)$ mátrixszal, emiatt az X rangja is ρ és így az X első ρ oszlopa lineárisan független. Az

$$Y = \begin{bmatrix} \partial g/\partial u_1 & \dots & \partial g/\partial u_n \\ \partial f_1/\partial u_1 & \dots & \partial f_1/\partial u_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_k/\partial u_1 & \dots & \partial f_k/\partial u_n \end{bmatrix}$$

mátrixnak pontosan akkor lesz ρ a rangja, ha

$$\partial g/\partial u_{\rho+1} = \dots = \partial g/\partial u_n = 0,$$

vagyis ha az adott pont kritikus pontja a $g|M_1$ függvénynek. Az Y mátrix pedig oszlopekvivalens a C-vel. □

2.1.17. Következmény [[1], 2.8.]. *Egy g polinomfüggvénynek $M_1 = V - \Sigma(V)$-n legfeljebb véges sok kritikus értéke lehet.*

Bizonyítás. A $g|M_1$ kritikus pontjainak halmaza $W - \Sigma(V)$, emiatt felírható véges sok sima sokaság uniójaként:

$$W - \Sigma(V) = M_1' \sqcup \dots \sqcup M_p',$$

ahol mindegyik M_i'-nek véges sok komponense van. Minden $x \in M_i'$ kritikus pontja $g|M_1$-nek, emiatt kritikus pontja $g|M_i'$-nek. Mivel M_i' minden pontja kritikus pont, ezért g konstans M_i' mindegyik komponensén. Így $g(M_i')$ véges halmaz. Viszont $g(M_1') \cup \ldots \cup g(M_p')$ éppen $g|M_1$ kritikus értékeinek halmaza. □

2.2. Kommutatív algebra

Az A gyűrű alatt végig kommutatív gyűrűt értünk, a prímideáljainak halmazát $\mathrm{Spec}(A)$-val jelöljük.

2.2.1. Definíció [[14], 4. o.]. Az A gyűrű *lokális*, ha pontosan egy maximális ideálja van.

2.2.2. Definíció [[14], 120. o.]. Egy $p \in \mathrm{Spec}(A)$ *magassága*

$$\sup\{n : p_0 \subset p_1 \subset p_2 \subset \ldots \subset p_n,\ p_i \in \mathrm{Spec}(A),\ p_n = p\},$$

$\mathrm{height}(p)$-vel jelöljük.

2.2.3. Definíció [[13], 6. o.]. Az A gyűrű *Krull-dimenziója*

$$\sup\{n : \exists p \in \mathrm{Spec}(A),\ \mathrm{height}(p) = n\},$$

jelölése: $\dim A$. Itt $\subset$ alatt szigorú tartalmazást értünk.

2.3. Topológia

2.3.1. Definíció [[15], 130. o.]. Tetszőleges X topologikus tér n-edik *Betti-száma* $\mathrm{rk}(H_n(X))$.

2.3.2. Állítás [Mayer-Vietoris sor]. *[[15], 149. o.] Legyen X topologikus tér, valamint $A, B \subset X$ alterek, melyekre*

$$X = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B).$$

Ekkor a

$$\cdots \to H_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A \cap B) \xrightarrow{(i_*, j_*)} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{k_* - l_*} H_n(X) \to \ldots$$

sor egzakt, ahol

$$i : A \cap B \hookrightarrow A,\ j : A \cap B \hookrightarrow B,\ k : A \hookrightarrow X,\ l : B \hookrightarrow X$$

beágyazások.

2.3.3. Állítás [Alexander dualitás]. *[[15], 3.44.] Ha $K \subset S^n$ kompakt, lokálisan pontrahúzható, nem üres, valódi részhalmaza S^n-nek, akkor minden i-re*

$$\tilde{H}_i(S^n - K) \cong \tilde{H}^{n-i-1}(K).$$

2.3.4. Állítás [Poincaré dualitás]. *[[15], 3.30.] Ha M^n n-dimenziós irányítható sokaság, akkor*

$$H^k(M) \cong H_{n-k}(M).$$

2.3.5. Tétel [Poincaré sejtés]. *[[15], 390. o.] Egy zárt, egyszeresen összefüggő 3-dimenziós sokaság homeomorf S^3-mal.*

2.3.6. Tétel [Whitehead tétel]. *[[15], 4.5.] Legyenek (X, x_0) és (Y, y_0) CW komplexusok, valamint $f: X \to Y$ folytonos, melyre $f(x_0) = y_0$. Ha az f által indukált*

$$f_{*n}: \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$$

leképezés izomorfizmus minden n-re, akkor az f homotopikus ekvivalencia.

2.3.7. Tétel [Hurewicz tétel]. *[[15], 4.32.] Ha X topologikus tér, $n > 1$ és minden $i < n$-re $\pi_i(X) = 0$, akkor $\pi_n(X) \cong H_n(X)$.*

Legyen X $2n$-dimenziós irányított, sima sokaság, a határa $\mathrm{bd}(X)$, α relatív n-ciklus, és β abszolút n-ciklus, [[7], 12. o.] alapján ezeknek definiálható az algebrai metszete, amit $\langle \alpha, \beta \rangle$-val jelölünk. Ez pedig indukál egy

$$\langle , \rangle: H_n(X, \mathrm{bd}(X), \mathbb{Z}) \otimes H_n(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

leképezést, melyet *metszet párosításnak* nevezünk. Ugyanígy bevezethető az ellentétes metszet párosítás,

$$\langle , \rangle': H_n(X, \mathbb{Z}) \otimes H_n(X, \mathrm{bd}(X), \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z},$$

ekkor

$$\langle \alpha, \beta \rangle = (-1)^n \langle \beta, \alpha \rangle'.$$

A metszet párosítás nem-elfajuló, és $H_n(X, \mathrm{bd}(X), \mathbb{Z})$-t azonosítja

$$H_n(X, \mathbb{Z})^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})\text{-vel}$$

a következő módon: ha $\alpha \in H_n(X, \mathrm{bd}(X), \mathbb{Z})$, akkor az $[\alpha]$ osztályhoz tartozó leképezés legyen $\langle \alpha, . \rangle$.

Ha α_1, α_2 abszolút ciklusok, azoknak is lehet definiálni az algebrai metszetét. Ez pedig indukálni fog egy

$$(,): H_n(X, \mathbb{Z}) \otimes H_n(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

leképezést, amit *metszetformának* hívunk. Erre is teljesül, hogy

$$(\alpha, \beta) = (-1)^n (\beta, \alpha).$$

Létezik egy $j: H_n(X, \mathbb{Z}) \to H_n(X, \mathrm{bd}(X), \mathbb{Z})$ természetes beágyazás, ami pont a

$$b: H_n(X, \mathbb{Z}) \to H_n(X, \mathbb{Z})^*, \; b(\beta) = (\beta, .)$$

leképezéssel azonosítható.

A b leképezést ki lehet terjeszteni $H_n(X, \mathbb{Z})$-ről $H_n(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$-ra és $H_n(X, \mathbb{Z})^*$

azonosítható azon $l' \in H_n(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q}$ elemekkel, melyekre tetszőleges $l \in H_n(X,\mathbb{Z})$-re $(l,l')_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}$.

2.3.8. Definíció [[3], 508. o.]. Legyen M sokaság, az érintő nyalábját jelöljük T-vel, az M fölötti triviális vonalnyalábot pedig ε^1-gyel. Az M sokaság *S-parallelizálható*, ha $T \oplus \varepsilon^1$ triviális nyaláb. A $T \oplus \varepsilon^1$ nyalábot az M *stabil érintő nyalábjának* hívjuk.

2.3.9. Lemma [[3], 3.4.]. *Egy M összefüggő sokaság, melynek pereme nem üres pontosan akkor parallelizálható, ha S-parallelizálható.*

2.3.10. Lemma [[2], 2.2.]. *Legyen M^n sokaság és $f : M \to \mathbb{R}$ sima függvény, melynek $p \in M$ nem-elfajuló kritikus pontja. Ekkor létezik egy U környezete p-nek, és abban egy lokális $u_1, \dots, u_n$ koordinátarendszer, melyre $u_i(p) = 0\ \forall\ 1 \le i \le n$, és minden $z \in U$-ra*

$$f(z) = f(p) - u_1^2(u) - \cdots - u_\lambda^2(z) + u_{\lambda+1}^2(z) + \cdots + u_n^2(z).$$

Ezt a λ számot az f indexének nevezzük a p pontban.

2.3.11. Definíció [[2], 12. o.]. Legyen M sokaság, rajta f sima valós értékű függvény. Ekkor

$$M^a = f^{-1}(-\infty, a].$$

2.3.12. Tétel [[2], 3.5.]. *Ha M sokaság, $f : M \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melynek egy kritikus pontja sem elfajuló, és mindegyik M^a sokaság kompakt, akkor az M homotópiatípusa megegyezik egy CW-komplexuséval, ahol minden λ indexű kritikus ponthoz egy λ-dimenziós cella tartozik.*

3. Hiperfelület szingularitások

Legyen $f(z_1, \dots, z_{n+1})$ egy $(n+1)$-változós komplex együtthatós polinom, és legyen $V = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : f(z) = 0\}$. A V egy komplex hiperfelület, aminek a topológiáját akarjuk megérteni egy tetszőleges $z^0 \in V$ pont környezetében.

Először rögzítünk néhány jelölést. Tetszőleges $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ pontra jelölje $S_\varepsilon(z)$ a z középpontú ε sugarú gömböt és $B_\varepsilon(z)$ a z középpontú ε sugarú golyót (ekkor a $B_\varepsilon(z)$ golyó határa, $\mathrm{bd}(B_\varepsilon(z)) = S_\varepsilon(z)$). Ha egyértelmű, hogy melyik z pont a középpontja a gömbnek, illetve a golyónak, akkor az egyszerűség kedvéért a z-t elhagyjuk a jelölésből. Tetszőleges $H \subset \mathbb{C}^{n+1}$ halmazra jelölje $\mathrm{Cl}(H)$ a H lezártját. Két $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^{n+1}$ vektor hermitikus skaláris szorzatát jelölje $\langle v_1, v_2 \rangle$. Tetszőleges c komplex szám szöge legyen $\arg(c)$. Azt, hogy az M, N sokaságok diffeomorfak úgy fogjuk jelölni, hogy $M \approx N$. A homológiacsoportokat mindig $\mathbb{Z}$ fölött tekintjük.

3.1. Lokális kúp struktúra

Először általános komplex varietásokra bizonyítunk pár állítást.

3.1.1. Állítás [[1], 2.9.]. *Legyen $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$ algebrai halmaz és $z^0 \in V$ nem szinguláris pont, vagy izolált szingularitása V-nek. Ekkor létezik egy $\varepsilon_0 > 0$ valós szám, hogy minden $\varepsilon < \varepsilon_0$-ra $S_\varepsilon(z^0) \cap V$ sima sokaság.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy V valós algebrai halmaz, legyen az $r : V \to \mathbb{C}$ az a függvény, melyre $r(z) = \|z - z^0\|^2$. Ha ε^2 kisebb az $r|(V - \Sigma(V))$ függvény összes pozitív kritikus értékénél, akkor ε^2 reguláris érték, emiatt

$$r^{-1}(\varepsilon^2) \cap (V - \Sigma(V)) = S_\varepsilon(z^0) \cap (V - \Sigma(V))$$

egy sima K sokaság. Mivel z^0 vagy nem szinguláris pont, vagy izolált szingularitás, ezért létezik $\varepsilon_0 > 0$, hogy minden $\varepsilon < \varepsilon_0$-ra $S_\varepsilon(z^0) \cap \Sigma(V) = \emptyset$, így $K = S_\varepsilon(z^0) \cap V$. A bizonyítást azzal az észrevétellel fejezzük be, hogy minden $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$ komplex varietás tekinthető valós varietásnak $\mathbb{R}^{2(n+1)}$-ben. □

3.1.2. Megjegyzés. A bizonyításból az is kijött, hogy $S_\varepsilon(z^0)$ és V transzverzálisan metszik egymást.

3.1.3. Definíció [[1], 18. o.]. Legyen $M \subset \mathbb{C}^{n+1}$ tetszőleges sokaság. Ekkor

$$\mathrm{Cone}(M) = M \times [0,1]/(m_1,0) \sim (m_2,0)$$

az M feletti valós *kúp*, az $(m,0)$ pontok $[m,0]$ ekvivalenciaosztálya a *kúp csúcsa*. Ha $K \subset S_\varepsilon(z^0)$, akkor a $\mathrm{Cone}(K)$-t lehet realizálni $B_\varepsilon(z^0)$-ban, mint a

$$tk + (1-t)z^0 \ (0 \leq t \leq 1)$$

szakaszok uniója, ahol $k \in K$. Jelölése $\mathrm{Cone}_{z^0}(K)$. Ha egyértelmű, hogy melyik z^0 pontot nézzük, akkor elhagyjuk a jelölésből.

3.1.4. Tétel [[1], 2.10.]. *Ha $\varepsilon > 0$ elég kicsi, akkor $V \cap B_\varepsilon(z^0)$ homeomorf* $\mathrm{Cone}(K)$*-val. Ha ismerjük a $K \hookrightarrow S_\varepsilon(z^0)$ beágyazást, akkor a $(V \cap B_\varepsilon(z^0), B_\varepsilon(z^0))$ pár homeomorf a $(\mathrm{Cone}(K), \mathrm{Cone}(S_\varepsilon(z^0)))$ párral.*

Bizonyítás. Most is elég lesz valós varietásra bizonyítani az állítást. Mostantól legyen $S_\varepsilon(z^0) = S_\varepsilon$, $S_\varepsilon(z^0) = B_\varepsilon$ és $M_1 = V - \Sigma(V)$. Az M_1 komplex dimenziója a 2.1.10. Tétel alapján $n+1-\rho$, valós dimenziója $2n+2-2\rho$. Legyen $\varepsilon_0 > 0$ rögzített valós szám, melyre minden $\varepsilon < \varepsilon_0$-ra B_ε-ban legfeljebb egy szinguláris pont van, a z^0 és az $r|M_1$ függvénynek nincs z^0-n kívül kritikus pontja.

Először konstruálni fogunk egy sima $v(z)$ vektormezőt a $B_\varepsilon - z^0$ halmazon, melyre a következők teljesülnek. Minden $z \in B_\varepsilon - z^0$-ra $\langle v(z), z - z^0\rangle > 0$, valamint minden $z \in M_1$-re $v(z) \in T_z M_1$.

Először lokálisan konstruáljuk meg a vektormezőt, vagyis minden $z^\alpha \in B_\varepsilon - z^0$ pont egy U^α környezetében konstruálunk egy $v^\alpha(z)$ vektormezőt, mely az előírt két tulajdonságot teljesíti. Ha $z^\alpha \notin V$, akkor az U^α környezetét válasszuk úgy, hogy ne messe V-t és minden $z \in U^\alpha$ pontra legyen

$$v^\alpha(z) = z - z^0.$$

Ekkor $z \notin M_1$, és $\langle v(z), z - z^0\rangle = \langle z - z^0, z - z^0\rangle = \|z - z^0\|^2 > 0$.

Ha $z^\alpha \in V$, akkor az $\varepsilon < \varepsilon_0$ miatt $z^\alpha \in M_1$. Ekkor a következőt csináljuk. A z^α pontnak létezik olyan $\tilde{U}^\alpha$ környezete, melyben tudunk olyan valós lokális $u_1, \ldots, u_{2n+2}$ koordinátarendszert választani, hogy az M_1 pontosan azokból a pontokból álljon, melyekre $u_1 = \cdots = u_{2\rho} = 0$. Legyen $r(z) = \|z - z^0\|^2$. Mivel a $z^\alpha \neq z^0$, így nem kritikus pontja az $r|M_1$ függvénynek, ezért a

$$\partial r/\partial u_{2\rho+1}(z^\alpha), \ldots, \partial r/\partial u_{2n+2}(z^\alpha)$$

vektorok közül legalább az egyik nem 0. Tegyük fel, hogy $\partial r/\partial u_k(z^\alpha) \neq 0$. Ekkor van egy $U^\alpha \subset \tilde{U}^\alpha$ összefüggő környezete z^α-nak, melyben $\partial r/\partial u_k \neq 0$. Legyen tetszőleges $z \in U^\alpha$-ra

$$v^\alpha(z) = \pm(\partial z_1/\partial u_k, \ldots, \partial z_{2n+2}/\partial u_k),$$

ahol az előjel pontosan akkor negatív, ha $\partial r/\partial u_k < 0$. Nyilván minden $z \in M_1$-re $v^\alpha(z) \in T_z M_1$, továbbá minden $z \in U^\alpha$-ra

$$2 \cdot \langle v^\alpha(z), z - z^0\rangle = \sum 2(z_i - z_i^0)v_i^\alpha = \sum(\partial r/\partial z_i)(\pm\partial z_i/\partial u_k) = \pm\partial r/\partial u_k > 0.$$

Tehát így tényleg minden z^α pont egy U^α környezetében van egy a feltételeknek megfelelő v^α vektormező. Ezután legyen $\{\lambda^\alpha\}$ egy sima egységosztás a $B_\varepsilon - z^0$ halmazon, melyre $\mathrm{supp}\lambda^\alpha \subset U^\alpha$. Ekkor

$$v(z) = \sum_\alpha \lambda^\alpha(z) v^\alpha(z)$$

vektormező megfelelő lesz a $B_\varepsilon - z^0$ halmazon.

Tetszőleges $z \in B_\varepsilon - z^0$-ra legyen

$$w(z) = v(z)/\langle 2(z-z^0), v(z)\rangle.$$

Olyan $p: [\alpha,\beta] \to B_\varepsilon - z^0$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ sima görbéket keresünk, melyekre

$$dp(t)/dt = w(p(t)) \ \forall t \in [\alpha,\beta].$$

Ha $p(t)$ egy megoldás, akkor az $r(p(t))$ függvényre

$$dr/dt = \sum (\partial r/\partial z_i) w_i(p(t)) = \langle 2(z-z^0), w(p(t))\rangle = 1,$$

mivel $p(t) \in B_\varepsilon - z^0$. Tehát $r(p(t)) = t + c$ valamilyen $c \in \mathbb{R}$ konstansra. Feltehető, hogy $c = 0$, emiatt

$$t = r(p(t)) = \|p(t) - z^0\|^2.$$

Belátható, hogy minden p függvény, amire a fenti teljesül kiterjeszthető a $(0,\varepsilon^2]$ intervallumra, és egyértelműen meghatározza a p függvényt az ε^2 helyen felvett értéke, ami egy pont S_ε-ban. Legyen

$$P(a,t): \ S_\varepsilon \times (0,\varepsilon^2] \to B_\varepsilon - z^0$$

az az egyértelmű megoldása a differenciálegyenletnek, melyre $p(\varepsilon^2) = a$. Ez a P függvény egy diffeomorfizmus $S_\varepsilon \times (0,\varepsilon^2]$ és $B_\varepsilon - z^0$ között. Tudjuk, hogy tetszőleges $z \in M_1$-re $w(z) \in T_z M_1$, ezért minden olyan megoldás, aminek valamelyik pontja benne van M_1-ben, teljesen benne van M_1-ben. Emiatt a P függvény a $K \times (0,\varepsilon^2]$ és $V \cap (B_\varepsilon - z^0)$ terek között is diffeomorfizmus. Mivel $P(a,t)$ $t \to 0$ esetén egyenletesen tart z^0-hoz, ezért a

$$ta + (1-t)z^0 \mapsto P(a, t\varepsilon^2) \ (0 < t \leq 1)$$

hozzárendelés egyértelműen kiterjed egy $\mathrm{Cone}(S_\varepsilon) \to B_\varepsilon$ homeomorfizmussá, mely $\mathrm{Cone}(K)$ és $V \cap B_\varepsilon$ között is homeomorfizmus. □

3.1.5. Definíció. A $K = V \cap S_\varepsilon$ halmazt a szingularitás *linkjének* hívjuk.

A szakasz további részében a V algebrai halmaz nem szinguláris pontjainak környezetét fogjuk vizsgálni.

3.1.6. Lemma [[1], 2.12.]. *Ha V algebrai halmaz és z^0 nem szinguláris pontja V-nek, akkor létezik $0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, hogy minden $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$-ra a $K = V \cap S_\varepsilon$ triviálisan beágyazott gömb S_ε-ban.*

Bizonyítás. Megint legyen $M_1 = V - \Sigma(V)$ és $r(z) = \|z - z^0\|^2$. Az $r|M_1$ függvénynek nem-elfajuló kritikus pontja a z^0. Így az 2.3.10. Lemma miatt léteznek az M_1-nek a z^0 környezetében valós lokális koordinátái $u_1, \ldots, u_{2n+2-2\rho}$, melyre

$$r(z) = u_1^2 + \cdots + u_{2n+2-2\rho}^2.$$

Ebből rögtön következik, hogy $K = V \cap S_\varepsilon$ diffeomorf az $u_1^2 + \cdots + u_{2n+2-2\rho}^2 = \varepsilon^2$ gömbbel.

Az 2.3.10. Lemmát lehet az $M_1 \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ párra általánosítani, mely a következőt mondja ki. Léteznek $u_1, \ldots, u_{2n+2}$ lokális koordináták az $\mathbb{R}^{2n+2}$-ben a z^0 egy környezetében, melyre

$$r(z) = u_1^2 + \cdots + u_{2n+2}^2,$$

és V az $u_{2n+2-2\rho+1} = \cdots = u_{2n+2} = 0$ pontok halmaza. Ebből következik, hogy az (S_ε, K) pár diffeomorf a (D_1, D_2) párral, ahol D_1 az $u_1^2 + \cdots + u_{2n+2}^2 = \varepsilon^2$ gömb és D_2 az $u_1^2 + \cdots + u_{2n+2-2\rho}^2 = \varepsilon^2$ gömb. □

Most azt a speciális esetet fogjuk vizsgálni, amikor $V = f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ komplex hiperfelület, melynek z^0 nem szinguláris pontja. Továbbra is legyen $S_\varepsilon(z^0) = S_\varepsilon$, legyen a $\Phi: \; S_\varepsilon - K \to S^1$ függvény a $\Phi(z) = f(z)/|f(z)|$ képlettel definiálva, valamint legyen

$$F_0 = \Phi^{-1}(1) = f^{-1}(\mathbb{R}_+) \cap S_\varepsilon.$$

3.1.7. Lemma [[1], 2.13.]. *Ha az S_ε gömb z^0 középpontja reguláris pontja f-nek, akkor F_0 diffeomorf $\mathbb{R}^{2n}$-nel.*

Bizonyítás. A 2.3.10. Lemma általánosítását fogjuk alkalmazni a $V \subset f^{-1}(\mathbb{R})$ párra. Ekkor z^0 egy környezetében kapunk $f^{-1}(\mathbb{R})$-hez $u_1, \ldots, u_{2n+1}$ valós lokális koordinátákat, melyre

$$\|z - z^0\|^2 = u_1^2 + \cdots + u_{2n+1}^2,$$

és V azon pontok halmaza, melyekre $u_1 = 0$. Ekkor a $\Phi^{-1}(1)$ halmaz az alábbi nyílt félgömbnek felel meg

$$u_1 > 0, \; u_1^2 + \cdots + u_{2n+1}^2 = \varepsilon^2,$$

ami nyilván diffeomorf $\mathbb{R}^{2n}$-nel. □

A szakasz hátralevő részében egy lemmát bizonyítunk, ami szükséges lesz több később szereplő állítás bizonyításához. A továbbiakban $V \subset \mathbb{R}^m$ valós algebrai halmaz és $U \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, ami a következőképpen van definiálva:

$$U = \{x \in \mathbb{R}^m \; : \; g_1(x) > 0, \ldots, g_l(x) > 0\},$$

ahol $g_1, \ldots, g_l$ valós együtthatós polinomok.

3.1.8. Definíció [[1], 26. o.]. Legyen f valós együtthatós polinom, $x \in \mathbb{R}^m$. Ekkor

$$df(x) = (\partial f/\partial x_1(x), \ldots, \partial f/\partial x_m(x)) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}).$$

3.1.9. Lemma [Görbe kiválasztási lemma]. *[[1], 3.1.] Ha $0 \in \mathrm{Cl}(U \cap V)$, akkor létezik egy $p: \; [0, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$ valós, analitikus görbe melyre $p(0) = 0$ és $p(t) \in U \cap V \; \forall t > 0$.*

Bizonyítás. Először azt az esetet nézzük, amikor $\dim V \geq 2$. Konstruálni fogunk egy $V_1 \subset V$ valódi algebrai részhalmazt, melyre $0 \in \mathrm{Cl}(U \cap V_1)$. Ezután ezt az eljárást iterálva kapunk egy V_q algebrai halmazt, melyre $\dim V_q \leq 1$ és $0 \in \mathrm{Cl}(U \cap V_q)$.

Ha $V = W_1 \cup W_2$, ahol $W_1, W_2 \subset V$ valódi algebrai részhalmazai V-nek, akkor bármelyik W_i $(i = 1{,}2)$ jó választás V_1-nek. Emiatt feltehetjük, hogy V irreducibilis. Ha nincs olyan $\eta > 0$, melyre az origó D_η környezetében $U \cap \Sigma(V) \cap D_\eta = \emptyset$, akkor $V_1 = \Sigma(V)$ megfelelő lesz. Tehát azt is feltehetjük, hogy van olyan $\eta > 0$, melyre $U \cap \Sigma(V) \cap D_\eta = \emptyset$.

Az $I(V)$ ideált generálja $f_1, \ldots, f_k$. A $\Sigma(V)$ definíciója alapján $\Sigma(V)$ pontosan azokból az $x \in V$ pontokból áll, melyekre a $\{df_1(x), \ldots, df_k(x)\}$ vektorrendszer rangja kisebb, mint ρ, ahol $\dim V = m - \rho$. Legyen

$$r(x) = \|x\|^2, \ g(x) = g_1(x) \cdot \ldots \cdot g_l(x),$$

valamint

$$V' = \{x \in V \ : \ \{df_1(x), \ldots, df_k(x)\} \text{ rangja legfeljebb } \rho + 1\}.$$

3.1.10. Állítás [[1], 3.2.]. $0 \in \mathrm{Cl}(U \cap V')$.

Bizonyítás. A feltételek miatt léteznek tetszőlegesen kis sugarú 0 középpontú S_ε gömbök, melyek metszete $U \cap V$-vel nemüres és $U \cap S_\varepsilon \cap \Sigma(V) = \emptyset$. Legyen

$$K = \{x \in V \cap S_\varepsilon \ : \ g_1(x) \geq 0, \ldots, g_l(x) \geq 0\},$$

mely egy kompakt halmaz. Mivel g folytonos függvény, a maximumát a K-n eléri egy x' pontban, nyilván $x' \in U$. Megmutatjuk, hogy $x' \in V'$.

Az $U \cap V \cap S_\varepsilon$ halmaz egy sima $m - \rho - 1$ dimenziós sokaság, melynek minden x pontjára

$$\mathrm{rk}\{df_1(x), \ldots, df_k(x), dr(x)\} = \rho + 1.$$

Valamint $g|U \cap V \cap S_\varepsilon$ kritikus pontjai pontosan az $U \cap V \cap S_\varepsilon \cap V'$ halmaz pontjai. Mivel a $g|U \cap V \cap S_\varepsilon$ függvénynek x'-ben maximuma van, ezért x' kritikus pontja, vagyis $x' \in V'$. $\square$

Így, ha V' valódi részhalmaza V-nek, akkor $V_1 = V'$ jó választás. Tehát maradt a $V = V'$ eset. Ha a fenti konstrukcióban a g függvény helyett az $x_i g$ függvényt használjuk, akkor a

$$V_i' = \{x \in V \ : \ \mathrm{rk}\{df_1(x), \ldots, df_k(x), dr(x), d(x_i g)(x)\} \leq \rho + 1\}$$

halmazra hasonlóképpen meg lehet mutatni, hogy $0 \in \mathrm{Cl}(U \cap V_i')$.

Tehát ha a $V = V' = V_1' = \cdots = V_m'$ egyenlőség valamelyike nem teljesül, akkor találtunk egy megfelelő V_1 halmazt.

3.1.11. Állítás [[1],27. o.]. *Ez az eset csak úgy állhat fönn, ha* $\dim V = m - \rho = 1$.

Bizonyítás. Tudunk egy olyan $x' \in U \cap V$ pontot választani, melyre

$$\mathrm{rk}\{df_1(x'), \ldots, df_k(x'), dr(x')\} = \rho + 1.$$

Ha $V = V'$, akkor $x' \in V'$, és így

$$dg(x) \in \langle df_1(x'), \ldots, df_k(x'), dr(x')\rangle.$$

Hasonlóképpen ha $V = V_i'$, akkor

$$d(x_i g)(x') \in \langle df_1(x'), \ldots, df_k(x'), dr(x')\rangle.$$

Mivel $d(x_i g) = (dx_i)g + x_i(dg)$ és $x' \in U$, ezért $g(x') \neq 0$, és így

$$dx_i(x') \in \langle df_1(x'), \ldots, df_k(x'), dr(x')\rangle.$$

Tudjuk, hogy $dx_1, \ldots, dx_m$ egy bázisa az x'-beli differenciálok vektorterének. Emiatt

$$\langle df_1(x'), \ldots, df_k(x'), dr(x')\rangle = \langle dx_1(x'), \ldots, dx_m(x')\rangle,$$

tehát $\rho + 1 = m$. □

Vagyis már csak az 1-dimenziós varietásokat kell megvizsgálni, melyeknél az alábbi lemma írja le, hogy lokálisan milyen tulajdonságúak. Nem bizonyítjuk.

3.1.12. Lemma [[1], 3.3.]. *Legyen x^0 egy nem izolált pontja a valós (vagy komplex) egy dimenziós V varietásnak. Ekkor az x^0 egy megfelelően választott környezetében V véges sok görbe uniója, melyek egymást csak x^0-ban metszik. Mindegyik görbe homeomorf a valós számok egy nyílt intervallumával (vagy a komplexek egy nyílt körlemezével), a homeomorfizmust a*

$$p(t) = x^0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$$

hatványsor adja, mely konvergens $|t| < \varepsilon$-ra.

Most már be tudjuk bizonyítani a görbe kiválasztási lemmát. Tegyük fel, hogy $\dim V = 1$ és a 0-hoz tetszőlegesen közel vannak pontok $U \cap V$-ben. A 3.1.12. Lemma miatt a 0 egy környezetében a V véges sok görbe uniója, tehát az egyikben a 0-hoz tetszőlegesen közel vannak U-beli pontok. Legyen

$$p(t), \ |t| < \varepsilon$$

ennek az ágnak egy valós analitikus parametrizálása. Mindegyik g_i polinomra teljesül, hogy egy $(0, \varepsilon')$ intervallumban végig $g_i(p(t)) > 0$, vagy $g_i(p(t)) \leq 0$. Vagyis elég kis ε'-re $p(0, \varepsilon')$ vagy benne van U-ban, vagy diszjunkt tőle. Hasonlóan $p(-\varepsilon',0)$ vagy benne van U-ban, vagy diszjunkt tőle. Viszont $p(-\varepsilon, \varepsilon)$ tartalmaz U-beli pontot tetszőlegesen közel 0-hoz. Emiatt $p(0, \varepsilon')$ és $p(-\varepsilon',0)$ közül az egyik benne van az U-ban. □

3.2. Milnor-fibrálás

Egy komplex analitikus $g(z_1, \ldots, z_{n+1})$ függvény gradiensét a következőképpen definiáljuk ([[1], 33. o.]):

$$\mathrm{grad}(g) = (\overline{\partial g/\partial z_1}, \ldots, \overline{\partial g/\partial z_{n+1}}),$$

ahol a felülvonás a konjugálást jelenti. Azért ezt a definíciót választjuk, mert így a láncszabály a következő alakú lesz:

$$dg(p(t))/dt = \langle dp/dt, \mathrm{grad}(g)\rangle.$$

Vagyis tetszőleges v vektor esetén a g függvény v iránymenti deriváltja $\langle v, \mathrm{grad}\, g(z)\rangle$.

Legyen $f \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_{n+1}]$. Jelölje S_ε a 0 középpontú, ε sugarú gömböt és K az f nullhelyeinek és S_ε-nak a metszetét. Legyen

$$\Phi: \ S_\varepsilon - K \to S^1, \ \Phi(z) = f(z)/|f(z)|.$$

Azt fogjuk belátni, hogy ez egy lokálisan triviális fibrálás.

3.2.1. Lemma [[1], 4.1.]. *A Φ függvény kritikus pontjai pontosan azon $z \in S_\varepsilon - K$ pontok, melyekre van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy*

$$i \cdot \mathrm{grad} \log f(z) = \lambda z.$$

Bizonyítás. Lokálisan a logaritmus definiálható egy értékű függvénynek, és a gradiense

$$\mathrm{grad} \log f(z) = (\mathrm{grad}\, f(z))/\overline{f}(z).$$

Legyen $\theta: \ S_\varepsilon - K \to [0{,}2\pi]$, melyre $f(z)/|f(z)| = e^{i\theta(z)}$. Ekkor

$$i\theta = \log(f/|f|) = \log f - \log|f|,$$

tehát

$$\theta = -i \log f + i \log|f|,$$

így

$$\theta = \mathrm{Re}(-i \log f).$$

Ezt deriválva egy $p: \ \mathbb{R} \to S_\varepsilon - K$ görbe mentén azt kapjuk, hogy

$$d\theta(p(t))/dt = \mathrm{Re}(d(-i\log f)/dt) = \mathrm{Re}\langle dp/dt, \mathrm{grad}(-i\log f)\rangle =$$

$$= \mathrm{Re}\langle dp/dt, i \cdot \mathrm{grad} \log f\rangle.$$

Vagyis a $\theta(z)$ függvény $v = dp/dt$ iránymenti deriváltja $\mathrm{Re}\langle v, i \cdot \mathrm{grad} \log f(z)\rangle$.

A Hermite-féle $\mathbb{C}^{n+1}$ vektortérre gondolhatunk úgy, mint egy valós, $2(n+1)$-dimenziós euklideszi vektortérre, ahol az euklideszi skaláris szorzatot $\mathrm{Re}\langle a, b\rangle$ definiálja. Ekkor tetszőleges v vektorra pontosan akkor teljesül $v \in T_z S_\varepsilon$, ha $\mathrm{Re}\langle v, z\rangle = 0$.

Ha van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, melyre

$$i \cdot \operatorname{grad}(\log f(z)) = \lambda z,$$

akkor minden $v \in T_z S_\varepsilon$ vektorra

$$\operatorname{Re}\langle v, i \cdot \operatorname{grad} \log f(z) \rangle = 0.$$

Így z kritikus pontja Φ-nek. Másrészt, ha $i \cdot \operatorname{grad} \log f(z)$ és z lineárisan függetlenek $\mathbb{R}$ fölött, akkor létezik egy v vektor az euklideszi vektortérben, melyre

$$\operatorname{Re}\langle v, z \rangle = 0,$$
$$\operatorname{Re}\langle v, i \cdot \operatorname{grad} \log f(z) \rangle = 0.$$

Vagyis $v \in T_z S_\varepsilon$, és a θ-nak a v szerinti iránymenti deriváltja nem 0, tehát z nem kritikus pontja Φ-nek. □

Mostantól feltesszük, hogy $f(0) = 0$. Azt akarjuk belátni, hogy a Φ függvénynek egyáltalán nincsenek kritikus pontjai, ha ε elég kicsi. A 3.2.1. Lemma alapján a következőt kell bizonyítani.

3.2.2. Lemma [[1], 4.2.]. *Létezik $\varepsilon_0 > 0$, hogy minden $z \in \mathbb{C}^{n+1} - V$ pontra, amire $\|z\| < \varepsilon_0$, z és $i \cdot \operatorname{grad} \log f(z)$ lineárisan függetlenek $\mathbb{R}$ fölött.*

Ehelyett egy erősebb állítást fogunk bizonyítani.

3.2.3. Lemma [[1], 4.3.]. *Tetszőleges f polinomhoz, amire $f(0) = 0$ létezik egy $\varepsilon_0 > 0$, hogy minden $z \in \mathbb{C}^{n+1} - V$-re, amire $\|z\| \leq \varepsilon_0$, vagy z és $\operatorname{grad} \log f(z)$ lineárisan függetlenek $\mathbb{C}$ fölött, vagy $\operatorname{grad} \log f(z) = \lambda z$, ahol $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$, melyre $|\arg(\lambda)| < \pi/4$.*

Ez valóban erősebb, mint az előző lemma, ugyanis ha λ-ra teljesülnek a 3.2.3.Lemma feltételei, akkor $\operatorname{Re} \lambda > 0$, tehát $\operatorname{Im}(i\lambda) > 0$. Ha z és $\operatorname{grad} \log f(z)$ lineárisan függetlenek $\mathbb{C}$ fölött, akkor nyilván z és $i \cdot \operatorname{grad} \log f(z)$ lineárisan függetlenek $\mathbb{R}$ fölött. Ha pedig a másik eset áll fenn, akkor $i \cdot \operatorname{grad} \log f(z) = i\lambda z$, és $\operatorname{Im}(i\lambda) > 0$ miatt megint lineárisan független $\mathbb{R}$ fölött z és $i \cdot \operatorname{grad} \log f(z)$.

A 3.2.3. Lemmának a bizonyítása a 3.1.9. Lemmán és az alábbin múlik.

3.2.4. Lemma [[1], 4.4.]. *Legyen $p : [0, \varepsilon) \to \mathbb{C}^{n+1}$ olyan valós analitikus függvény, melyre $p(0) = 0$, valamint minden $t > 0$-ra $f(p(t)) \neq 0$ és $\operatorname{grad} \log f(p(t)) = \lambda(t) p(t)$, ahol $\lambda(t) \in \mathbb{C}$. Ekkor $\arg(\lambda(t)) \to 0$, ha $t \to 0$.*

Bizonyítás. Legyen

$$p(t) = a_0 t^\alpha + a_1 t^{\alpha+1} + a_2 t^{\alpha+2} + \dots,$$
$$f(p(t)) = b_0 t^\beta + b_1 t^{\beta+1} + b_2 t^{\beta+2} + \dots,$$
$$\operatorname{grad} f(p(t)) = c_0 t^\gamma + c_1 t^{\gamma+1} + c_2 t^{\gamma+2} + \dots.$$

Mivel $f(p(t)) \neq 0$, ha $t > 0$, ezért $p(t)$ és $f(p(t))$ nem azonosan 0, vagyis $a_0 \neq 0$ és $b_0 \neq 0$. Mivel $df/dt = \langle dp/dt, \operatorname{grad} f \rangle$, ezért $\operatorname{grad} f(p(t))$ sem azonosan 0, vagyis $c_0 \neq 0$. Nyilván $\gamma \geq 0$ és mivel $p(0) = 0$, ezért $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$. Legyen $\varepsilon' > 0$ úgy választva, hogy $|t| < \varepsilon'$-re mind a három sor konvergens legyen. Minden $t > 0$-ra

$$\operatorname{grad} \log f(p(t)) = \lambda(t) p(t),$$

tehát

$$\operatorname{grad} f(p(t)) = \lambda(t) p(t) \overline{f}(p(t)),$$

vagyis

$$c_0 t^\gamma + \cdots = \lambda(t)(a_0 \overline{b_0} t^{\alpha+\beta} + \dots).$$

Emiatt $\lambda(t)$ két valós analitikus függvény hányadosa, ezért Laurent sorba fejtés után a következő alakú:

$$\lambda(t) = \lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta}(1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots),$$

ahol $c_0 = \lambda_0 a_0 \overline{b_0}$. Így a $df/dt = \langle dp/dt, \operatorname{grad} f \rangle$ azonosságot átírva Taylor sor alakba azt kapjuk, hogy

$$\beta b_0 t^{\beta-1} + \cdots = \langle \alpha a_0 t^{\alpha-1} + \dots, \lambda_0 a_0 \overline{b_0} t^\gamma + \dots \rangle = \alpha \|a_0\|^2 \overline{\lambda_0} b_0 t^{\alpha-1+\gamma} + \dots .$$

A főegyütthatókat összehasonlítva $\beta = \alpha \|a_0\|^2 \overline{\lambda_0}$ adódik. Emiatt λ_0 pozitív valós szám, tehát

$$\lim_{t\to 0} \lambda(t)/|\lambda(t)| = 1,$$

vagyis valóban $\arg(\lambda(t)) \to 0$, ha $t \to 0$. □

Most már be tudjuk bizonyítani a 3.2.3. Lemmát. Tegyük fel, hogy vannak olyan $z \in \mathbb{C}^{n+1} - V$ pontok tetszőlegesen közel 0-hoz, melyre

$$\operatorname{grad} \log f(z) = \lambda z \neq 0,$$

ahol $|\arg \lambda| > \pi/4$. Vagyis a λ benne van a $\operatorname{Re}((1+i)\lambda) < 0$ és $\operatorname{Re}((1-i)\lambda) < 0$ félsíkok uniójában.

Legyen

$$W = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \operatorname{grad} f(z) \text{ és } z \text{ lineárisan összefüggőek}\}$$

pontosan akkor lesz $z \in W$, ha

$$z_j \overline{(\partial f/\partial z_k)} = z_k \overline{\partial f/\partial z_j} \ \forall 1 \leq j,k \leq n+1.$$

Legyen $z_j = x_j + iy_j$. A fenti egyenletnek valós és képzetes részét véve valós polinomegyenleteket kapunk, x_j, y_j változókkal. Emiatt ez a W valós algebrai halmaz.

Ha $z \in \mathbb{C}^{n+1} - V$, akkor $z \in W$ pontosan akkor teljesül, ha

$$(\operatorname{grad} f(z))/\overline{f}(z) = \lambda z, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ezt megszorozva $\overline{f}(z)$-vel, és skaláris szorzatot véve $\overline{f}(z)z$-vel azt kapjuk, hogy

$$\langle \operatorname{grad} f(z), \overline{f}(z)z\rangle = \lambda \|\overline{f}(z)z\|^2.$$

Legyen

$$\lambda'(z) = \langle \operatorname{grad} f(z), \overline{f}(z)z\rangle.$$

Mivel $\|\overline{f}(z)z\|^2$ pozitív valós szám, ezért $\arg(\lambda) = \arg(\lambda')$. A λ' nyilván komplex értékű polinomfüggvény az x_j, y_j változókban.

Legyen

$$U_\pm = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \,:\, \operatorname{Re}((1 \pm i)\lambda'(z)) < 0\}.$$

Az volt a feltevésünk, hogy léteznek z pontok tetszőlegesen közel az origóhoz, melyekre $z \in W \cap (U_+ \cup U_-)$. Így a 3.1.9. Lemma miatt létezik egy $p : [0, \varepsilon) \to \mathbb{C}^{n+1}$ függvény, melyre $p(0) = 0$ és

$$p(t) \in W \cap U_+ \ \forall t > 0, \text{ vagy } p(t) \in W \cap U_- \ \forall t > 0.$$

Mindkét esetben azt kapjuk, hogy minden $t > 0$-ra

$$\operatorname{grad} \log f(p(t)) = \lambda(t)p(t),$$

ahol $|\arg(\lambda(t))| > \pi/4$, ami ellentmond a 3.2.4. Lemmának.

A bizonyítással ezzel még nincs kész, ugyanis fenn állhat, hogy léteznek olyan $z_n \in W - (V \cap W)$ pontok, melyekre $\|z_n\| \to 0$, ha $n \to \infty$ és $\lambda'(z_n) = 0$, vagy $|\arg(\lambda'(z_n))| = \pi/4$. Ez az eset hasonlóan bizonyítható.

3.2.5. Következmény [[1], 4.5.]. *Létezik olyan $0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, hogy ha $\varepsilon < \varepsilon_0$, akkor a Φ leképezésnek nincsenek kritikus pontjai.*

Bizonyítás. A 3.2.1 és 3.2.2. Lemmákból rögtön következik. □

3.2.6. Definíció [[1], 40. o.]. Tetszőleges $e^{i\theta} \in S^1$-re legyen $F_\theta = \Phi^{-1}(e^{i\theta}) \subset S_\varepsilon - K$.

A 3.2.5. Következményből azt kapjuk, hogy minden $e^{i\theta} \in S^1$-re az F_θ egy sima $2n$-dimenziós sokaság. A fibrációs tétel bizonyításához még két segédlemmára van szükségünk.

3.2.7. Lemma [[1], 4.6.]. *Ha $\varepsilon < \varepsilon_0$, akkor az $S_\varepsilon - K$ sokaságon létezik egy sima v értintővektormező, melyre minden $z \in S_\varepsilon - K$-ra*

$$\langle v(z), i \cdot \operatorname{grad} \log f(z)\rangle \neq 0,$$

és

$$|\arg(\langle v(z), i \cdot \operatorname{grad} \log f(z)\rangle)| < \pi/4.$$

Bizonyítás. Megint elég lesz lokálisan, egy $z^\alpha \in S_\varepsilon - K$ pont környezetében megkonstruálni a vektormezőt.

Ha z^α és $\operatorname{grad}\log f(z^\alpha)$ lineárisan függetlenek $\mathbb{C}$ fölött, akkor létezik egy $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ vektor, melyre

$$\langle v, z^\alpha\rangle = 0,\ \langle v, i \cdot \operatorname{grad}\log f(z^\alpha)\rangle = 1.$$

Az első egyenlőség miatt $\operatorname{Re}\langle v, z^\alpha\rangle = 0$, így $v \in T_{z^\alpha} S_\varepsilon$.

Ha $\operatorname{grad}\log f(z^\alpha) = \lambda z^\alpha$, akkor legyen $v = iz^\alpha$. Nyilván $\operatorname{Re}\langle iz^\alpha, z^\alpha\rangle = 0$, és a 3.2.3. Lemma miatt

$$|\arg(\langle iz^\alpha, i \cdot \operatorname{grad}\log f(z^\alpha)\rangle)| = |\arg(\overline{\lambda}\|z^\alpha\|^2)| < \pi/4.$$

Mindkét esetben van egy $v^\alpha(z)$ vektormező a z^α egy környezetében, melyre $v^\alpha(z^\alpha) = v$. Az

$$|\arg\langle v^\alpha(z), i \cdot \operatorname{grad}\log f(z)\rangle| < \pi/4$$

egyenlőtlenség a z^α egy környezetében is teljesül. Az egységosztás tételt alkalmazva kapunk egy megfelelő globális vektormezőt $S_\varepsilon - K$-n. □

Legyen

$$w(z) = v(z)/\operatorname{Re}\langle v(z), i \cdot \operatorname{grad}\log f(z)\rangle.$$

Ekkor egy sima w vektormezőt kapunk $S_\varepsilon - K$-n, melyre

$$\operatorname{Re}\langle w(z), i \cdot \operatorname{grad}\log f(z)\rangle = 1,$$

és

$$|\operatorname{Re}\langle w(z), \operatorname{grad}\log f(z)\rangle| < 1.$$

3.2.8. Lemma [[1], 4.7.]. *Tetszőleges $z \in S_\varepsilon - K$ pontra létezik egyértelműen egy $p:\ \mathbb{R} \to S_\varepsilon - K$ sima függvény, melyre $p(0) = z$ és kielégíti a*

$$dp/dt = w(p(t))$$

differenciálegyenletet.

Bizonyítás. Lokálisan létezik egy p megoldása a differenciálegyenletnek, ami a valós számok egy maximális nyílt intervallumára kiterjeszthető. Legyen $t_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Elég azt belátni, hogy $t \to t_0$ esetén $p(t)$ nem tart K-hoz, tehát, hogy $t \to t_0$ esetén $f(p(t)) \not\to 0$, vagyis $\operatorname{Re}\log f(p(t)) \not\to -\infty$. Mivel

$$d\operatorname{Re}\log f/dt = \operatorname{Re}\langle dp/dt, \operatorname{grad}\log f\rangle = \operatorname{Re}\langle w(p(t)), \operatorname{grad}\log f\rangle,$$

és $|\operatorname{Re}\langle w(z), \operatorname{grad}\log f(z)\rangle| < 1$, ezért valóban $f(p(t)) \not\to 0$. □

Legyen $\Phi(z) = e^{i\theta(z)}$. Mivel

$$d\theta(p(t))/dt = \operatorname{Re}\langle dp/dt, i \cdot \operatorname{grad}\log f\rangle = 1,$$

ezért $\theta(p(t)) = t + c$, ahol c konstans. Nyilván a $p(t)$ a t és z^0 folytonos függvénye. Legyen

$$h_t(z^0) = p(t).$$

Ekkor minden t-re $h_t: S_\varepsilon - K \to S_\varepsilon - K$ diffeomorfizmus, melyre $h_t(F_\theta) = F_{\theta+t}$. Most már be tudjuk bizonyítani a fibrációs tételt.

3.2.9. Tétel [[1], 4.8.]. *Minden $\varepsilon < \varepsilon_0$-ra $\Phi: S_\varepsilon - K \to S^1$ lokálisan triviális fibrálás.*

Bizonyítás. Legyen $e^{i\theta} \in S^1$ tetszőleges, $c > 0$ konstans,

$$U = \{x \in S^1 : x = e^{i(t+\theta)}, \text{ ahol } |t| < c\},$$

és $\Psi: U \times F_\theta \to \Phi^{-1}(U)$, melyre

$$\Psi(e^{i(t+\theta)}, z) = h_t(z).$$

Az előző lemmák miatt Ψ egy diffeomorfizmus. Így Φ valóban lokálisan triviális fibrálás. □

3.3. A fibrum és a link topológiája

Először az F_θ fibrumokról, majd a linkről bizonyítunk egy-egy tételt.

3.3.1. Tétel [[1], 5.1.]. *Minden F_θ fibrum parallelizálható, és a homotópia típusa megegyezik egy n-dimenziós CW komplexuséval.*

Ezt a tételt úgy bizonyítjuk, hogy az $|f|\big|_{F_\theta}$ sima valós értékű függvényre alkalmazunk Morse-elméletet. Először meg kell találnunk a kritikus pontokat. Kényelmesebb lesz az $|f|$ függvény helyett az $a_\theta: F_\theta \to \mathbb{R}$ és $a: S_\varepsilon - K \to \mathbb{R}$ függvényeket vizsgálni, ahol

$$a_\theta(z) = a(z) = \log |f(z)|.$$

Nyilván az $|f|$ kritikus pontjai $S_\varepsilon - K$-n ugyanazok, mint az a kritikus pontjai és $|f|$ kritikus pontjai F_θ-n ugyanazok, mint a_θ kritikus pontjai.

3.3.2. Lemma [[1], 5.3.]. *A sima, valós értékű $a_\theta(z) = \log |f(z)|$ függvény kritikus pontjai pontosan azok a $z \in F_\theta$ pontok, melyekre* $\operatorname{grad} \log f(z)$ *és z összefüggő vektorok $\mathbb{C}$ fölött.*

Bizonyítás. Legyen v tetszőleges vektor. A

$$\log |f(z)| = \operatorname{Re} \log f(z)$$

függvény v szerinti iránymenti deriváltja

$$\operatorname{Re}\langle v, \operatorname{grad} \log f(z)\rangle.$$

Tehát $z \in F_\theta$ pontosan akkor lesz kritikus pont, ha $\operatorname{grad} \log f(z)$ merőleges F_θ-ra a z pontban. Az $F_\theta \subset \mathbb{C}^{n+1}$ normálterének valós dimenziója 2 és a lineárisan független z, $i \cdot \operatorname{grad} \log f(z)$ vektorok generálják. Vagyis a z pontosan akkor kritikus pontja

a_θ-nak, ha a z, $\operatorname{grad}\log f(z)$ és $i\cdot\operatorname{grad}\log f(z)$ vektorok összefüggők $\mathbb{R}$ fölött. Ekkor nyilván $\operatorname{grad}\log f(z)$ és z összefüggő vektorok $\mathbb{C}$ fölött. $\square$

3.3.3. Megjegyzés. Legyen $z \in F_\theta$ kritikus pontja a_θ-nak. Ekkor

$$T_zF_\theta = \{v \in \mathbb{C}^{n+1} \,:\, \langle v, z\rangle = 0\}$$

komplex vektortér ([[1], 5.4.]).

Bizonyítás. Ha $i\cdot\operatorname{grad}\log f(z)$ és z lineárisan összefüggők $\mathbb{C}$ fölött, akkor v pontosan akkor valós ortogonális z-re és $i\cdot\operatorname{grad}\log f(z)$-re, ha komplex ortogonális z-re. $\square$

Legyen z kritikus pontja a_θ-nak, $v \in T_zF_\theta$. Legyen $p:\ \mathbb{R}\to F_\theta$ sima függvény, melyre $dp/dt = v$ és $p(0) = z$. Tudjuk, hogy ekkor

$$a''_\theta = d^2 a_\theta(p(t))/dt^2$$

a $t = 0$-ban kifejezhető a v vektor egy H kvadratikus függvényeként.

3.3.4. Lemma [[1], 5.5.]. *Az $a_\theta(p(t))$ függvény második deriváltja $t = 0$-ban a következő alakra hozható:*

$$a''_\theta(p(t))|_{t=0} = \sum \operatorname{Re}(b_{jk}v_jv_k) - c\|v\|^2,$$

ahol $(b_{jk})_{j,k=1}^m \in \mathbb{C}^{m\times m}$ és $0 < c \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\{p(t)\,:\, t\in\mathbb{R}\} \subset F_\theta$, az F_θ-n $f/|f| = e^{i\theta}$ konstans. Emiatt

$$a_\theta(p(t)) = \log|f(p(t))| = \log f(p(t)) - i\theta.$$

Ezt deriválva azt kapjuk, hogy

$$a'_\theta = d\log f/dt = \sum(\partial\log f/\partial z_j)(dp_j/dt),$$

még egyszer deriválva pedig

$$a''_\theta = \sum(\partial\log f/\partial z_j)(d^2p_j/dt^2) + \sum(\partial^2\log f/\partial z_j\partial z_k)(dp_j/dt)(dp_k/dt).$$

Innentől legyen $t = 0$ rögzített, az egyszerűség kedvéért nem írjuk ki, de a bizonyításban mostantól mindegyik derivált alatt $t = 0$-ban vett deriváltat értünk. A 3.3.2. Lemma miatt $\exists\lambda\in\mathbb{C}$, melyre $\operatorname{grad}\log f(z) = \lambda z$. Legyen

$$D_{jk} = \partial^2\log f/\partial z_j\partial z_k.$$

Ekkor a''_θ a következő alakba írható:

$$a''_\theta = \langle p'', \lambda z\rangle + \sum D_{jk}v_jv_k.$$

Mindkét oldalt szorozzuk meg λ-val és vegyük a valós részét. Az a''_θ valós, ezért azt kapjuk, hogy

$$a''_\theta\operatorname{Re}(\lambda) = |\lambda|^2\operatorname{Re}\langle p'', z\rangle + \sum\operatorname{Re}(\lambda D_{jk}v_jv_k).$$

Tudjuk, hogy
$$\langle p(t), p(t)\rangle = c,$$
ahol c konstans. Ezt kétszer deriválva azt kapjuk, hogy
$$\mathrm{Re}\langle p'', z\rangle = -\|v\|^2.$$
Emiatt
$$a_\theta'' \,\mathrm{Re}(\lambda) = \|\lambda v\|^2 + \sum \mathrm{Re}(\lambda D_{jk} v_j v_k).$$
A $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$-val osztva kapjuk az állítást. □

Most már meg tudjuk becsülni az a_θ egy kritikus pontjának Morse-indexét.

3.3.5. Lemma [[1], 5.6.]. *Az $a_\theta : F_\theta \to \mathbb{R}$ függvény Morse-indexe tetszőleges kritikus pontban legalább n. Így az $a : S_\varepsilon - K \to \mathbb{R}$ függvény Morse-indexe tetszőleges kritikus pontnál szintén legalább n.*

Bizonyítás. Legyen $z \in F_\theta$ és $v \in T_z F_\theta$. A
$$H(v) = \sum \mathrm{Re}(b_{jk} v_j v_k) - c\|v\|^2$$
kvadratikus függvény I Morse-indexe [[2], 5. o.] szerint annak a maximális lineáris altérnek a dimenziója, ahol H negatív definit. Ha $v \neq 0$ olyan, hogy $H(v) \geq 0$, akkor $H(iv) < 0$, mivel $H(v)$-ben az első tag előjelet vált és a második tag nem változik. Mivel $T_z F_\theta$ komplex vektortér, ezért $iv \in T_z F_\theta$.

Legyen $T_z F_\theta = T_0 \oplus T_1$, ahol H negatív definit T_0-on, és pozitív szemidefinit T_1-en. Nyilván
$$\dim T_0 = I.$$
A fentiek miatt a H negatív definit iT_1-en is. Ezért
$$I \geq \dim(iT_1) = \dim T_1 = 2n - I,$$
emiatt $I \geq n$.

Nyilván az a függvény tetszőleges z kritikus pontja valamelyik a_θ függvénynek is kritikus pontja, és az a indexe a z-ben legalább akkora, mint az a_θ indexe z-ben. □

3.3.6. Lemma [[1], 5.7.]. *Legyen θ rögzített. Ekkor létezik egy $\eta_\theta > 0$ konstans, hogy az a_θ kritikus pontjai a $\{z \in F_\theta \,:\, |f(z)| \geq \eta_\theta\}$ kompakt halmazban vannak. Hasonlóképpen létezik egy $\eta > 0$ konstans, hogy az a függvény kritikus pontjai benne vannak a $\{z \in S_\varepsilon - K \,:\, |f(z)| \geq \eta\}$ halmazban.*

Bizonyítás. A 3.1.9. Lemmát alkalmazzuk. Tegyük fel, hogy léteznek az a_θ függvénynek olyan z_i $(i = 1{,}2, \dots) \in F_\theta$ kritikus pontjai, melyekre $\lim_{i\to\infty}(|f(z_i)|) \to 0$. Mivel S_ε kompakt, ezért a z_i pontok sorozatának van egy konvergens részsorozata, legyen a határérték z_0. Ekkor létezik $\varepsilon' > 0$ és egy sima

$$p : (0, \varepsilon') \to F_\theta$$

függvény, melyre minden $t \in (0, \varepsilon')$-re $p(t)$ kritikus pont és $\lim_{t\to 0} p(t) = z_0$. Mivel az a_θ konstans az F_θ-n, ezért az $p(t)$ függvény mentén is konstans. Emiatt $|f(p(t))| \equiv c$ valamilyen $c \neq 0$ konstansra, viszont ekkor

$$0 = |f(z_0)| = \lim_{t\to 0} |f(p(t))| = c,$$

ellentmondás. □

A 3.3.1. Tétel igazolása előtt még egy lemmára lesz szükségünk, melynek bizonyítása itt megtalálható: [[1], 50,51. o.].

3.3.7. Lemma [[1], 5.8.]. *Létezik egy $s_\theta : F_\theta \to \mathbb{R}_+$ sima függvény, melynek mindegyik kritikus pontja nem-elfajuló, a Morse-indexe legalább n, és létezik $\varepsilon > 0$, hogy ha a $z \in F_\theta$ pontra $|f(z)| < \varepsilon$, akkor $s_\theta(z) = |f(z)|$. Hasonlóképpen létezik egy olyan $s : S_\varepsilon - K \to \mathbb{R}_+$ függvény, melynek minden kritikus pontja nem-elfajuló, Morse-indexe legalább n és $s(z) = |f(z)|$, ha $|f(z)|$ elég közel van 0-hoz. A kritikus pontok izoláltak és egy kompakt halmazban vannak, így csak véges sok kritikus pont van.*

Most bebizonyítjuk a 3.3.1. Tételt.

Bizonyítás. Legyen $g : F_\theta \to \mathbb{R}$,

$$g(z) = -\log s_\theta(z).$$

Ekkor a g nem-elfajuló, és mivel

$$\{z \in F_\theta \,:\, s_\theta(z) \geq e^{-c}\}$$

kompakt, ezért $\{z \in F_\theta \,:\, g(z) \leq c\}$ kompakt.

Legyen $z \in F_\theta$ kritikus pontja s_θ-nak, az indexe legyen $I \geq n$. Ekkor ez a z a $\log s_\theta$ függvénynek is kritikus pontja, az indexe szintén I a z pontban. Emiatt a $-\log s_\theta$ indexe a z-ben $2n - I \leq n$. Így az 2.3.12. Tétel alapján az F_θ homotópiatípusa megegyezik egy legfeljebb n-dimenziós X CW komplexus homotópiatípusával, ahol az X cellái mind a g egy-egy kritikus pontjához tartoznak.

Már csak azt kell megmutatni, hogy az F_θ parallelizálható. Egyrészt az F_θ peremes sokaság. Másrészt az F_θ be van ágyazva az S_ε gömbbe, és így $\mathbb{C}^{n+1}$-be is, a normálnyalábja triviális. Emiatt az F_θ S-parallelizálható, és így az 2.3.9. Lemma miatt parallelizálható. □

3.3.8. Tétel [[1], 5.2.]. *A* $K = V \cap S_\varepsilon$ *tér* $(n-2)$*-összefüggő.*

Bizonyítás. Legyen $0 < \eta \in \mathbb{R}$, és $U_\eta(K) = \{z \in S_\varepsilon : |f(z)| \leq \eta\}$. Ha η elég kicsi, akkor $U_\eta(K)$ sima peremes sokaság. Az 3.3.7. Lemmában használt s függvény értelmezve van az $S_\varepsilon - \mathrm{Int}(U_\eta(K))$ halmazon. Ez alapján az S_ε gömb homotópiatípusa megegyezik egy CW komplexus homotópiatípusával, melyet úgy kapunk, hogy az $U_\eta(K)$-hoz hozzáragasztunk véges sok cellát. Mindegyik cella az s egy kritikus pontjához tartozik, egy $I \geq n$ indexű kritikus ponthoz egy I-dimenziós cella tartozik.

Nyilvánvaló, hogy egy legalább n-dimenziós cella hozzáragasztása nem változtatja meg a legfeljebb $n-2$-dimenziós homotópia csoportokat. Emiatt

$$\pi_i(U_\eta(K)) \cong \pi_i(S_\varepsilon) = 0 \ (i \leq n-2).$$

Ha η elég kicsi, akkor a K algebrai halmaz deformációs retraktuma az $U_\eta(K)$-nak. Emiatt $\pi_i(K) = 0$, ha $i \leq n-2$. □

Az utolsó tétel, amit ebben a szakaszban bizonyítunk, egy alternatív leírását adja a fibrumoknak.

3.3.9. Tétel [[1], 5.11.]. *Létezik* $0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, *hogy ha* $0 \neq c \in \mathbb{C}$ *és* $\|c\| < \varepsilon_0$, *akkor* $f^{-1}(c) \cap B_\varepsilon$ *sima sokaság, és diffeomorf* F_θ*-val.*

A bizonyításhoz szükségünk lesz két segédlemmára. Az elsőt nem bizonyítjuk, hasonlóan lehet belátni, mint a 3.2.7. Lemmát.

3.3.10. Lemma [[1], 5.9.]. *Létezik a* $B_\varepsilon - V$ *halmazon egy sima* v *vektormező, hogy minden* $z \in B_\varepsilon - V$*-re*

$$\langle v(z), \mathrm{grad} \log f(z) \rangle > 0$$

valós, és $\mathrm{Re}\langle v(z), z\rangle > 0$.

3.3.11. Lemma [[1], 5.10.]. *Létezik* $0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, *hogy ha* $0 \neq c \in \mathbb{C}$, *melyre* $\|c\| < \varepsilon_0$ *és* $c/|c| = e^{i\theta}$, *valamint*

$$H_\theta = \{z \in F_\theta : |f(z)| > |c|\},$$

akkor $f^{-1}(c) \cap B_\varepsilon \approx H_\theta$.

Bizonyítás. Legyen v az előző lemmában megkonstruált vektormező. Tekintsük a $dp/dt = v(p(t))$ differenciálegyenlet megoldásait a $B_\varepsilon - V$ halmazon. Abból, hogy

$$\langle dp/dt, \mathrm{grad} \log f(p(t)) \rangle$$

valós és pozitív, rögtön következik, hogy $\arg(f(p(t)))$ konstans, és $|f(p(t))|$ szigorúan monoton. Mivel

$$0 < 2\,\mathrm{Re}\langle dp/dt, p(t)\rangle = d\|p(t)\|^2/dt,$$

ezért $\|p(t)\|$ szintén szigorúan monoton függvény.

Vagyis tetszőleges $z \in \mathrm{Int}(B_\varepsilon - V)$ pontból az egyik trajektórián elindulva egyre távolodunk az origótól, amíg el nem érünk egy $z' \in S_\varepsilon - K$ pontot, melyre

$$f(z')/|f(z')| = f(z)/|f(z)|.$$

Nyilván a $z \to z'$ hozzárendelés egy diffeomorfizmust ad a két halmaz között. □

A 3.3.9. Tétel ebből már könnyen következik, ugyanis ha $|c|$ elég kicsi, akkor $H_\theta \approx F_\theta$.

3.4. Az izolált szinguláris pont esete

Ebben a szakaszban azt is feltesszük, hogy az $f(z_1, \ldots, z_{n+1})$ $(n \geq 1)$ polinomnak nincsen kritikus pontja az origó egy környezetében, kivéve esetleg magát az origót. Vagyis $V = f^{-1}(0)$-nak az origó vagy egy izolált szinguláris pontja, vagy nem szinguláris pontja.

Korábban már láttuk, hogy ha ε elég kicsi, akkor $K = V \cap S_\varepsilon$ sima $(2n-1)$-dimenziós sokaság. A következő lemma ezt élesíti.

3.4.1. Lemma [[1], 6.1.]. *Létezik $\varepsilon_0 > 0$, hogy ha $\varepsilon < \varepsilon_0$, akkor az F_θ fibrum* $\mathrm{Cl}(F_\theta)$ *lezártja S_ε-ban sima, $2n$-dimenziós peremes sokaság, melyre* $\mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(F_\theta)) = F_\theta$ *és* $\mathrm{bd}(\mathrm{Cl}(F_\theta)) = K$.

Bizonyítás. Először is azt látjuk be, hogy az $f\big|_{S_\varepsilon} \to \mathbb{C}$ függvénynek nincsenek kritikus pontjai a K-n, ha ε elég kicsi. A 3.1.9. Lemmát alkalmazzuk. Az $f\big|_{S_\varepsilon}$ függvény kritikus pontjai azok a $z \in S_\varepsilon$ pontok, melyekre $\mathrm{grad}\, f(z) = \lambda z$ valamilyen $\lambda \in \mathbb{C}$ komplex számra. Legyen

$$p : [0, \varepsilon') \to \mathbb{C}^{n+1}$$

olyan leképezés, melyre minden $t \in [0, \varepsilon')$-re $p(t)$ kritikus pontja $f|S_\varepsilon$-nak, továbbá $p(0) = 0$ és $f(p(t)) \equiv 0$. Ekkor

$$\langle dp/dt, \mathrm{grad}\, f\rangle = df(p(t))/dt \equiv 0,$$

tehát

$$2\,\mathrm{Re}\langle dp/dt, p(t)\rangle = d\|p(t)\|^2/dt \equiv 0.$$

Emiatt $p(t) \equiv 0$, ellentmondás.

Az állítást csak az $F_0 = \Phi^{-1}(1)$ fibrumra fogjuk belátni, tetszőlges másik F_θ fibrumra a bizonyítás hasonló. Legyen $z^0 \in K$ tetszőleges. Legyenek $u_1, \ldots, u_{2n+1}$ valós lokális koordinátái S_ε-nak a z^0 egy U környezetében úgy, hogy

$$f(z) = u_1(z) + iu_2(z),\ \forall z \in U.$$

Egy $u \in U$ pontra pontosan akkor teljesül, hogy $u \in F_0$, ha $u_1 > 0$ és $u_2 = 0$. Vagyis

$$\mathrm{Cl}(F_0) \cap U = \{u \in U \ : \ u_1 \geq 0, u_2 = 0\}.$$

Ez nyilván egy $2n$-dimenziós peremes sokaság, melynek a belseje $F_0 \cap U$ és a pereme $K \cap U$. $\square$

3.4.2. Következmény [[1], 6.2.]. *A* $\mathrm{Cl}(F_\theta)$ *kompakt peremes sokaság úgy van beágyazva* S_ε*-ba, hogy ugyanaz a homotópiatípusa, mint az* $S_\varepsilon - \mathrm{Cl}(F_\theta)$ *komplementernek.*

Bizonyítás. Az $S_\varepsilon - \mathrm{Cl}(F_\theta)$ komplementer egy lokálisan triviális fibrálás az $S^1 - \{e^{i\theta}\}$ pontrahúzható sokaság fölött. Emiatt minden $\theta' \neq \theta$-ra az $F_{\theta'}$ fibrum deformációs retraktuma $S_\varepsilon - \mathrm{Cl}(F_\theta)$-nak, azaz a homotópiatípusuk megegyezik. Azonban $F_{\theta'}$ diffeomorf F_θ-val, emiatt a homotópiatípusa ugyanaz, mint $\mathrm{Cl}(F_\theta)$-nak. $\square$

3.4.3. Következmény [[1], 6.3.]. *Tetszőleges* F_θ *fibrumra teljesül, hogy* $H_0(F_\theta) = \mathbb{Z}$ *és minden* $0 < k < n$*-re* $H_k(F_\theta) = 0$.

Bizonyítás. Jelölje $\tilde{H}_i$ az i-edik redukált homológiaosztályt. Az Alexander dualitásból következik, hogy

$$\tilde{H}_k(S_\varepsilon - \mathrm{Cl}(F_\theta)) \cong \tilde{H}^{2n-k}(\mathrm{Cl}(F_\theta)),$$

és a 3.3.1. Tétel miatt $\tilde{H}^{2n-k}(\mathrm{Cl}(F_\theta)) = 0$ minden $k < n$-re. $\square$

Az előbbi következménynél erősebb is igaz:

3.4.4. Lemma [[1], 6.4.]. *Az* F_θ *fibrum* $(n-1)$*-összefüggő.*

Bizonyítás. A 3.4.3. Következmény miatt elég azt bebizonyítani, hogy F_θ egyszeresen összefüggő, ha $n \geq 2$. A 3.3.7. Lemmában konstruált $-s_\theta$ Morse-függvényt tekintve a $\mathrm{Cl}(F_\theta)$-n azt kapjuk, hogy a $\mathrm{Cl}(F_\theta)$ sokaságot fel tudjuk építeni egy D_0^{2n} golyóból kiindulva, és egymás után egy-egy legfeljebb n indexű fület hozzáragasztva. A ragasztásokat el tudjuk végezni az S_ε gömbön belül. Tudjuk, hogy $S_\varepsilon - D_0^{2n}$ egyszeresen összefüggő és legfeljebb $\dim(S_\varepsilon) - 3 = 2n - 2$ indexű fülek ragasztása nem változtatja meg a komplementer fundamentális csoportját. Emiatt $S_\varepsilon - \mathrm{Cl}(F_\theta)$ szintén egyszeresen összefüggő, ha $n \leq 2n - 2$. A 3.4.2. Következmény miatt készen vagyunk. $\square$

Ezen állításokból kapjuk a következő tételt.

3.4.5. Tétel [[1], 6.5.]. *A fibrumok homotópiatípusa megegyezik* $S^n \vee \ldots \vee S^n$ *homotópiatípusával.*

Bizonyítás. A $H_n(F_\theta)$ homológiacsoport szabad Abel-csoport, mert minden torzió elem egy $n+1$-dimenziós kohomológiaosztályt adna, ami ellentmond 3.3.1. Tételnek. Feltéve, hogy $n \geq 2$ a Hurewicz tétel miatt $\pi_n(F_\theta) \simeq H_n(F_\theta)$, tehát $\pi_n(F_\theta)$ szabad Abel-csoport. Vagyis tudunk választani véges sok

$$(S^n, s) \to (F_\theta, f_\theta) \ (s \in S^n,\ f_\theta \in F_\theta \text{ bázispontok})$$

leképezést, melyek ekvivalenciaosztályai egy szabad generátorrendszert alkotnak. Ezekből kapunk egy

$$\varphi : S^n \vee \ldots \vee S^n \to F_\theta$$

leképezést, ami egy φ^* izomorfizmust indukál a homológiacsoportokon. A Whitehead tétel miatt φ homotopikus ekvivalencia. $\square$

Ha $n \geq 2$, akkor ennél többet is tudunk mondani, nem bizonyítjuk.

3.4.6. Tétel [[1], 6.6.]. *Ha $n \geq 2$, akkor $\mathrm{Cl}(F_\theta)$ diffeomorf egy handlebodyval, melyet úgy kapunk, hogy a D^{2n} gömbhöz egymás után pontosan n indexű füleket ragasztunk.*

3.5. Egy ekvivalens fibrálás

Az irodalomban két fibrálást is Milnor-fibrálásnak neveznek. Az egyik az, amit a 3.2. Szakaszban bemutattunk. Ebben a szakaszban ismertetjük a másikat.

Most az f polinomnak legyen izolált szingularitása a 0-ban. Korábban megmutattuk, hogy ha $\varepsilon > 0$ elég kicsi, akkor az $f^{-1}(0)$ transzverzálisan metszi az S_ε gömböt, vagyis $f^{-1}(0) \pitchfork S_\varepsilon$.

3.5.1. Lemma [[5], 2.6.1.]. *Létezik egy $\delta > 0$, melyre $f^{-1}(t) \pitchfork S_\varepsilon$ minden $t \in D_\delta$-ra, ahol most D_δ a $0 \in \mathbb{C}$ körüli δ sugarú körlapot jelöli.*

Bizonyítás. Azonosítsuk $\mathbb{C}^{n+1}$-et $\mathbb{R}^{2n+2}$-vel, és $\mathbb{C}$-t $\mathbb{R}^2$-vel a szokásos módon. Ekkor az f-nek megfelel egy $(f_1, f_2) : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^2$ leképezés. Legyen $z_\alpha \in f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon$. Ekkor a z_α reguláris értéke az f komplex polinomnak, és így az (f_1, f_2) leképezésnek is. Emiatt $\dim \operatorname{Ker} df(z_\alpha) = 2n$. Jelölje g az f függvény megszorítását S_ε-ra. Ekkor

$$f^{-1}(0) \pitchfork S_\varepsilon \text{ a } z_\alpha\text{-ban} \iff \operatorname{Ker} df(z_\alpha) \not\subset T_{z_\alpha} S_\varepsilon \iff \dim \operatorname{Ker} dg(z_\alpha) = 2n-1 \iff$$

$$\iff g \text{ reguláris } z_\alpha\text{-ban.}$$

Megmutatjuk, hogy a g reguláris a z_α egy környezetében is. Legyenek $x_1, \ldots, x_{2n+2}$ lokális koordináták a z_α egy környezetében úgy, hogy az S_ε az $\{x_{2n+2} = 0\}$ hipersíknak felel meg, z_α pedig 0-nak. Ekkor $x_1, \ldots, x_{2n+1}$ lokális koordinátája S_ε-nak, tehát az a feltétel, hogy a g reguláris a z_α pontban azzal ekvivalens, hogy a

$$(\partial f_i / \partial x_j)_{1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2n+1}$$

mátrix nem szinguláris a 0-ban. Ez azt jelenti, hogy a mátrixnak van egy 2×2-es részmátrixa, aminek nem 0 a determinánsa. Mivel a determináns függvény folytonos és $\mathbb{R} - \{0\}$ nyílt, ezért ennek a 2×2-es mátrixnak a determinánsa nem 0 az origó egy környezetében. Vagyis ez azt jelenti, hogy létezik egy U_α környezete a z_α pontnak, melyre a g függvény reguláris az $U_\alpha \cap S_\varepsilon$ halmazon. Emiatt minden $z \in U_\alpha \cap S_\varepsilon$ pontra ha $t = f(z)$, akkor $f^{-1}(t) \pitchfork S_\varepsilon$.

Minden $z_\alpha \in f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon$ pontra megkonstruáljuk ezt az U_α környezetet, legyen $U = \cup_\alpha U_\alpha$. Azt kell megmutatni, hogy létezik egy $\delta > 0$, hogy

$$f^{-1}(D_\delta) \cap S_\varepsilon \subset U \cap S_\varepsilon.$$

Tegyük fel, hogy nincs ilyen δ, azaz létezik egy $t_n \in \mathbb{R}^2$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat, mely 0-hoz tart és minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$f^{-1}(t_n) \cap S_\varepsilon \not\subset U \cap S_\varepsilon.$$

Ekkor kapunk egy $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, melyre $z_n \in S_\varepsilon - U$ és $f(z_n) = t_n$ minden n-re. Mivel $S_\varepsilon - U$ kompakt, ezért ennek a z_n sorozatnak van egy konvergens részsorozata, ami egy $z \in S_\varepsilon - U$ ponthoz tart. Mivel f folytonos, ezért $t_n \to f(z)$, és emiatt $f(z) = 0$. Vagyis

$$z \in f^{-1}(0) \cap S_\varepsilon \subset U \cap S_\varepsilon,$$

ellentmondás. Vagyis létezik egy ilyen δ. □

A következő tétel Ehresmannhoz fűződik, nem bizonyítjuk.

3.5.2. Tétel [Ehresmann tétel]. *[[5], 2.6.2.] Legyenek E, B peremes sokaságok, $p : : E \to B$ valódi szubmerzió. Ekkor a p egy lokálisan triviális fibrálás. Sőt, ha $A \subset E$ olyan zárt részhalmaz, melyre a p-t megszorítva szintén szubmerziót kapunk, akkor a trivializációt meg lehet úgy választani, hogy az $f^{-1}(U) \cap A$ az $U \times (f^{-1}(b) \cap A)$-ba képződjön. Így a p az (E, A) pár lokálisan triviális fibrálása a B fölött.*

3.5.3. Állítás [[5], 2.6.3.]. *Válasszuk az $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ konstansokat úgy, hogy kielégítsék a 3.5.1. Lemma feltételeit. Legyen*

$$E = \mathrm{Cl}(B_\varepsilon) \cap f^{-1}(D_\delta - \{0\}) \text{ és } B = D_\delta - \{0\}.$$

Az f megszorítását E-re jelöljük ψ-vel. Ekkor a ψ egy lokálisan triviális fibrálása az $(E, \mathrm{bd}(E))$ párnak a B fölött.

Bizonyítás. A 3.5.2 tétel miatt elég azt megmutatni, hogy a ψ leképezés valódi szubmerzió, és $\psi|_{\mathrm{bd}(E)}$ szintén szubmerzió.

Legyen $V \subset D_\delta - \{0\}$ kompakt halmaz. Ekkor zárt, így $\psi^{-1}(V)$ is zárt. Azonban $\psi^{-1}(V) \subset \mathrm{Cl}(B_\varepsilon)$, tehát korlátos, így kompakt. Emiatt kompakt halmaz ősképe kompakt, tehát a ψ leképezés valódi.

Legyen $x \in E - \mathrm{bd}(E)$ tetszőleges. Ekkor az x egy környezetében $\psi = f$. Azonban az f szubmerzió az origó kivételével mindenütt, emiatt a ψ szubmerzió az x-ben. Most legyen

$$x \in \mathrm{bd}(E) = f^{-1}(D_\delta - \{0\}) \cap S_\varepsilon.$$

Ha $y = f(x)$, akkor a 3.5.1. Lemma miatt $f^{-1}(y) \pitchfork S_\varepsilon$ az x-ben, emiatt az f (és így a ψ) szubmerzió marad, ha megszorítjuk $\mathrm{bd}(E)$-re. □

Belátható, hogy a δ-t egy kisebb δ'-re cserélve ekvivalens fibrálást kapunk. Ha a ψ-t megszorítjuk a $\mathrm{bd}(\mathrm{Cl}(D_{\delta'})) = S_{\delta'}$ ősképére, ahol $0 < \delta' < \delta$ és elhagyjuk a $\mathrm{bd}(\mathrm{Cl}(B_\varepsilon))$ határt, akkor egy

$$\tilde{\psi} : \ B_\varepsilon \cap f^{-1}(S_{\delta'}) \to S_{\delta'} = S^1$$

lokálisan triviális fibrálást kapunk. Ezt is Milnor fibrálásnak hívják, be lehet látni, hogy ez ekvivalens a 3.2. Szakaszban leírt fibrálással.

3.6. A fibrum középső Betti-száma

3.6.1. Definíció [[1], 59. o.]. Az $f(z_1, \ldots, z_{n+1})$ komplex polinom egy z^0 izolált kritikus pontját *nem-elfajulónak* nevezzük, ha a $(\partial^2 f)(z^0)$ Hesse-mátrix nem szinguláris. Különben azt mondjuk, hogy a z^0 *elfajuló* kritikus pont.

Definiálni fogunk egy μ_f leképezést, ami minden kritikus ponthoz hozzárendel egy egész számot, ami azt fogja mérni, hogy a z^0 kritikus pont mennyire elfajuló. Ehhez először szükség lesz egy definícióra.

Legyenek $g_1(z), \ldots, g_{n+1}(z)$ tetszőleges $n+1$ komplex változós analitikus függvények és legyen z^0 izolált megoldása a

$$g_1(z) = \cdots = g_{n+1}(z) = 0$$

egyenleteknek. Ezt röviden úgy fogjuk mondani, hogy a z^0 pont izolált nullhelye a $g : \ \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ függvénynek, ahol a g függvény i-edik koordinátafüggvénye g_i. Legyen

$$h : \ S_\varepsilon \to S_1(\mathbb{C}^{n+1}), \ h(z) = g(z)/\|g(z)\|.$$

3.6.2. Definíció [[1], 59. o.]. A g függvény z^0 izolált nullhelyének $\kappa_g(z^0)$ *multiplicitása* a h leképezés foka.

Ha egyértelmű, hogy melyik függvényről van szó, akkor az alsó indexet elhagyjuk. Most definiáljuk a μ_f leképezést.

3.6.3. Definíció [[1], 59. o.]. Legyen z^0 izolált kritikus pontja az f polinomnak. Ekkor legyen

$$\mu_f(z^0) = \kappa_{\overline{\mathrm{grad}\, f}}(z^0).$$

Lefschetz tétele ([[1], 7.1.]), hogy a $\mu_f(z^0)$ multiplicitás mindig pozitív egész szám, nem bizonyítjuk.

Mostantól megint feltesszük, hogy az origó izolált kritikus pontja és nullhelye az $f(z_1, \ldots, z_{n+1})$ polinomnak. Vagyis a

$$\partial f/\partial z_1 = \cdots = \partial f/\partial z_{n+1} = 0$$

egyenleteknek $z = 0$ izolált megoldása. Legyen $\mu = \mu_f(0)$. A fő eredmény ebben a szakaszban a következő:

3.6.4. Tétel [[1], 7.2.]. *A középső Betti-száma az F_0 fibrumnak egyenlő μ-vel. Így $H_n F_0$ egy μ rangú szabad Abel-csoport.*

Mivel a Lefschetz tétel alapján $\mu > 0$, ezért ebből a tételből következik az alábbi.

3.6.5. Következmény [[1], 7.3.]. *Ha az origó izolált kritikus pontja f-nek, akkor az F_θ fibrumok nem húzhatóak pontra és $K = V \cap S_\varepsilon$ nem triviálisan beágyazott gömb S_ε-ban.*

Bizonyítás. Ha a K topologikusan egy triviálisan beágyazott gömb lenne, akkor $S_\varepsilon - K$ homotópiatípusa megegyezik egy kör homotópiatípusával. Felírva a fibrálás homotopikus egzakt sorozatát

$$\cdots \to \pi_{n+1}(S^1) \to \pi_n(F_0) \to \pi_n(S_\varepsilon - K) \to \pi_n(S^1) \to \dots$$

azt kapjuk, hogy $\pi_n(F_0) = 0$, ami $\mu > 0$ miatt ellentmondás. □

Mielőtt a 3.6.4. Tételt bebizonyítanánk, szükségünk lesz még egy segédlemmára, nem bizonyítjuk. Legyen $M \subset S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ kompakt k-dimenziós sokaság sima peremmel. Minden $p \in \mathrm{bd}(M)$-re legyen $n(p)$ a befelé mutató normálvektor, vagyis az az egyértelmű egységhosszú vektor, mely érinti S^k-t, normális ∂M-re a p pontban és M-be mutat. Az M Euler-karakterisztikáját jelölje $\chi(M)$.

3.6.6. Lemma [[1], 7.4.]. *Ha $v: S^k \to S^k$ sima d-fokú leképezés, melyre*

1. *a v leképezés minden fixpontja az M belsejében van,*
2. *nincs olyan $p \in M$, melyre $v(p) = -p$,*
3. *minden $p \in \partial M$-re $\langle v(p), n(p) \rangle > 0$,*

akkor $\chi(M) = 1 + (-1)^k d$.

Most már be tudjuk bizonyítani a 3.6.4. Tételt. Legyen

$$M = \{z \in S_\varepsilon : \operatorname{Re} f(z) \geq 0\},$$

vagyis

$$M = \Big(\bigcup_{\theta \in [-\pi/2, \pi/2]} F_\theta \Big) \cup K.$$

Nyilvánvaló, hogy ekkor

$$\partial M = F_{-\pi/2} \cup K \cup F_{\pi/2}$$

sima sokaság. Az M-nek ugyanaz a homotópiatípusa, mint F_θ-nak, sőt $\mathrm{Int}(M)$ egy lokálisan triviális fibrálás egy nyílt félkör fölött, F_θ fibrummal. Legyen $v:\ S_\varepsilon \to S_\varepsilon$,

$$v(z) = \varepsilon \cdot \operatorname{grad} f(z)/\|\operatorname{grad} f(z)\|.$$

Megmutatjuk, hogy ez a v leképezés teljesíti a 3.6.6. Lemmában mindhárom feltételt.

A $z \in S_\varepsilon$ pontosan akkor fixpontja v-nek, ha létezik $0 < r \in \mathbb{R}$, melyre

$$\operatorname{grad} f(z) = rz.$$

Viszont ekkor a 3.4.1. Lemma bizonyítása alapján azt kapjuk, hogy $f(z) \neq 0$ és

$$\operatorname{grad} f(z) = cz/\overline{f}(z).$$

A 3.2.3. Lemma miatt $\mathrm{Re}(c/\overline{f}(z)) > 0$, viszont ekkor $\mathrm{Re}\, f(z) > 0$, így $z \in \mathrm{Int}(M)$.

A $v(z) = -z$, eset hasonlóan bizonyítható.

Ha $z \in \partial M$, akkor létezik egy p sima leképezés, melyre $p(0) = z$ és ebben a pontban $dp/dt = n(z)$. Az M definíciója alapján $d\,\mathrm{Re}\, f(p(t))/dt|_{t=0} > 0$. A

$$d\,\mathrm{Re}\, f/dt = \mathrm{Re}\langle dp/dt, \operatorname{grad} f\rangle$$

azonosságot használva azt kapjuk, hogy $\mathrm{Re}\langle n(z), v(z)\rangle > 0$.

Tehát valóban mindhárom 3.6.6. Lemmabeli feltétel teljesül, emiatt

$$\chi(F_\theta) = \chi(M) = 1 - \deg(v),$$

hiszen $\dim S_\varepsilon = 2n + 1$ páratlan. A μ multiplicitást úgy definiáltuk, mint a

$$z \to g(z)/\|g(z)\|$$

leképezés foka. Mivel $g(z) = \overline{\operatorname{grad} f}$, és a konjugálás leképezés

$$(g_1, \ldots, g_{n+1}) \to (\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_{n+1}})$$

foka $(-1)^{n+1}$, ezért

$$\deg(v) = (-1)^{n+1}\mu.$$

Ezt behelyettesítve a fenti formulába azt kapjuk, hogy

$$\chi(F_\theta) = 1 + (-1)^n \mu.$$

Mivel

$$\chi(F_\theta) = \sum (-1)^j \mathrm{rk}(H_j(F_\theta)) = 1 + (-1)^n \mathrm{rk}(H_n F_\theta),$$

emiatt

$$\mu = \mathrm{rk}(H_n F_\theta).$$

3.7. Monodrómia

A 3.5. Szakaszban megmutattuk, hogy ha f egy $n+1$ változós komplex polinom, melynek az origó szinguláris pontja, akkor az

$$F : B_\varepsilon \cap f^{-1}(S_\delta) \to S_\delta,$$

melyre $F(z) = f(z)$ minden $z \in B_\varepsilon \cap f^{-1}(S_\delta)$-ra egy lokálisan triviális fibrálás. Az egyszerűség kedvéért a totális teret E-vel, a bázisteret pedig B-vel fogjuk jelölni. Tetszőleges $z \in B$-re jelölje F_z a z feletti fibrumot. Jelölje $\mathrm{Diff}(F_\delta)$ az F_δ fibrum diffeomorfizmusainak csoportját, és $\mathrm{Diff}_0(F_\delta)$ pedig azon diffeomorfizmusainak csoportját, melyek izotópok az identitással ([[5], 23. o.]). Ekkor

$$\mathrm{Diff}_0(F_\delta) \lhd \mathrm{Diff}(F_\delta).$$

Legyen

$$\Gamma(F_\delta) = \mathrm{Diff}(F_\delta)/\mathrm{Diff}_0(F_\delta).$$

Meg fogjuk mutatni, hogy létezik egy természetes $\varphi:\ \pi_1(S_\delta) \to \Gamma(F_\delta)$ csoporthomomorfizmus. Mivel $\pi_1(S_\delta) \cong \mathbb{Z}$, ezért elég a homomorfizmust a generátoron megadni, vagyis a

$$\gamma:\ [0,1] \to S_\delta,\ \gamma(t) = \delta e^{2\pi i t}$$

úton. A $\varphi(\gamma)$ diffeomorfizmust *geometrikus monodrómiának* hívjuk, és h_{geo}-val jelöljük.

3.7.1. Megjegyzés. Ha csak az F_δ fibrum és a geometrikus monodrómia van megadva, akkor rekonstruálni tudjuk az egész F fibrálást. A totális tér

$$F_\delta \times [0,1]/\sim,$$

ahol az ekvivalencia a $(z,0)$ és $(h(z),1)$ pontokat azonosítja, az S^1-be való leképezés pedig vetítés a második tényezőre.

Most [[5], 24. o.] alapján megmutatjuk, hogyan kapjuk a homomorfizmust. Legyen w vektormező az S_δ-n, melyre $w(\delta e^{2\pi i t}) = 2\pi i \delta e^{2\pi i t}$. Legyen

$$\gamma:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = e^{2\pi i t}.$$

Meg lehet mutatni, hogy minden $\alpha \in E$-nek van egy olyan U_α környezete, és azon egy v_α vektormező, hogy $dF(v_\alpha(z)) = w(F(z))$ minden $z \in U_\alpha$-ra, valamint ha $z \in \mathrm{bd}(E) \cap U_\alpha$, akkor $v_\alpha(z) \in T_z\,\mathrm{bd}(E) \subset T_z E$.

Ebből az egységosztás tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy létezik egy globális v vektormező az E-n, melyre $dF(v(z)) = w(F(z))$ minden $z \in E$-re, valamint minden $z \in \mathrm{bd}(E)$-re $v(z) \in T_z\,\mathrm{bd}(E) \subset T_z E$. Ezt úgy fogjuk mondani, hogy a v vektormező felemeltje a w vektormezőnek.

Minden $t \in \mathbb{R}$-re konstruálunk egy $h_t:\ F_\delta \to F_{\gamma(t)}$ diffeomorfizmust a következőképpen. Legyen $z_0 \in F_\delta$ tetszőleges, és legyen $p(t)$ az a maximális intervallumon definiált megoldása a $dz/dt = v(z)$ differenciálegyenletnek, melyre $p(0) = z_0$. Be lehet látni, hogy ez a megoldás kiterjeszthető az egész $\mathbb{R}$-re. Ekkor legyen

$$h_t(z_0) = p(t).$$

Mivel a v vektormező a w felemeltje, és $F(p(0)) = \gamma(0)$, ezért $F(p(t)) = \gamma(t)$, vagyis $h_t(z_0) \in F_{\gamma(t)}$. Mivel $\gamma(0) = \gamma(1) = \delta$, emiatt a h_1 egy diffeomorfizmusa az F_δ fibrumnak.

Azt akarjuk még belátni, hogy ha másképp választjuk meg a w felemeltjét, akkor a kapott diffeomorfizmus izotóp h_1-gyel.

3.7.2. Állítás [[5], 3.1.1.]. *Legyen v' vektormező az E-n, ami a w-nek felemeltje, és jelöljük h'_t-vel az ebből kapott diffeomorfizmusokat. Ekkor h_1 és h'_1 izotópak.*

Bizonyítás. Definiálunk az $E \times [0,1]$ téren egy V vektormezőt a következőképpen, tetszőleges $z \in E$ és $s \in [0,1]$-re legyen

$$V(z,s) = ((1-s)v(z) + sv'(z), s).$$

Ez egy sima vektormező, és a fentihez hasonló módon a $dz/dt = V(z)$ differenciálegyenlet megoldásaiból konstruálni tudunk egy $H : F_\delta \times [0,1] \to F_\delta \times [0,1]$ diffeomorfizmust. Ezt komponálva az első tényezőre való vetítéssel, kapunk egy

$$\tilde{H} : F_\delta \times [0,1] \to F_\delta$$

homotópiát, melyre minden $z \in F_\delta$-ra $\tilde{H}(z,0) = h(z)$ és $\tilde{H}(z,1) = h'(z)$. Sőt, minden rögzített $s \in [0,1]$-re a $\tilde{H}(z,s)$ diffeomorfizmusa az F_δ-nak, tehát a $\tilde{H}$ izotópia h és h' között. $\square$

3.7.3. Definíció [[5], 3.1.2.]. A $h_{\mathrm{geo}} = h_1$ diffeomorfizmust *geometrikus monodrómiának* hívjuk, mely izotópia erejéig egyértelmű. Az általa indukált $h_{\mathrm{geo}*}$ homomorfizmust a $H_*(F_\delta, \mathbb{Z})$ homológiacsoportokon *algebrai monodrómiának* hívjuk.

A szakaszban leírtak tetszőleges $\pi : E \to S^1$ lokálisan triviális fibrálásra elmondhatóak.

3.8. Mikor topologikus gömb a link?

Megint feltesszük, hogy az origó izolált kritikus pontja az $f(z_1, \ldots, z_{n+1})$ polinomnak, $n \geq 1$. Azt mondjuk, hogy egy X^n sokaság topologikus gömb, ha homeomorf S^n-nel, és homologikus gömb, ha a homológiacsoportjai megegyeznek az S^n homológiacsoportjaival. A kérdés az, hogy hogyan tudjuk eldönteni, hogy a K kompakt $(2n-1)$-dimenziós sokaság topologikus gömb-e.

3.8.1. Lemma [[1], 8.1.]. *Ha $n \neq 2$, akkor K pontosan akkor homeomorf az S^{2n-1}-gyel, ha a homológiacsoportjaik megegyeznek.*

Bizonyítás. Ha $n \geq 3$, akkor $\dim K \geq 5$ és a 3.3.8. Tétel alapján egyszeresen összefüggő, így a Poincaré-sejtés miatt valóban homeomorf K az S^{2n-1}-gyel. Ha pedig $n = 1$, akkor nyilván igaz az állítás. □

3.8.2. Megjegyzés. Ha $n = 2$, akkor nem igaz, hogy K pontosan akkor homeomorf gömbbel, ha a homológiacsoportjai megegyeznek a gömbével. Mumford azt is megmutatta, hogy ebben az esetben mindig teljesül, hogy $\pi_1(K) \neq 1$.

A következő lemmát nem bizonyítjuk, a 3.3.8. Tételből és Poincaré dualitásból könnyen következik.

3.8.3. Lemma [[1], 8.2.]. *Ha $n \neq 2$, akkor a K sokaság pontosan akkor homeomorf S^{2n-1}-gyel, ha $\tilde{H}_{n-1}K$ triviális.*

Irányítsuk meg a $2n$-dimenziós F_θ irányítható sokaságokat. Most az 2.3. Szakaszban bemutatott $(,)$ metszetformát s-sel jelöljük, a $\langle,\rangle$ metszet párosítást pedig s'-vel.

3.8.4. Lemma [[1], 8.3.]. *A K sokaság pontosan akkor homologikus gömb, ha az*

$$s: \ H_nF_\theta \otimes H_nF_\theta \to \mathbb{Z}$$

metszetforma determinánsa ± 1.

Bizonyítás. Írjuk fel a $(\mathrm{Cl}(F_\theta), K)$ pár homologikus egzakt sorozatát:

$$0 \to H_n(K) \to H_n(\mathrm{Cl}(F_\theta)) \xrightarrow{j_*} H_n(\mathrm{Cl}(F_\theta), K) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{n-1}K \to 0.$$

A K pontosan akkor homologikus gömb, ha j_* izomorfizmus. Tudjuk, hogy $H_n\,\mathrm{Cl}(F_\theta)$ valamint $H_n(\mathrm{Cl}(F_\theta), K)$ szabad μ-rangú Abel-csoportok és az

$$s': \ H_n(\mathrm{Cl}(F_\theta), K) \otimes H_n\,\mathrm{Cl}(F_\theta) \to \mathbb{Z}$$

metszet párosítás determinánsa ± 1. Mivel

$$s(\alpha, \beta) = s'(j_*\alpha, \beta),$$

ezért j_* pontosan akkor izomorfizmus, ha az s determinánsa ± 1. □

Legyen $\Phi: \ E \to S^1$ tetszőleges lokálisan triviális fibrálás, $F_0 = \Phi^{-1}(1)$. A geometrikus monodrómiát jelöljük h-val, az algebrai monodrómiát pedig h_*-gal.

3.8.5. Lemma [Wang egzakt sor]. *[[1], 8.4.] Tetszőleges S^1 feletti fibráláshoz a következő sor egzakt:*

$$\cdots \to H_{j+1}E \to H_jF_0 \xrightarrow{h_*-I_*} H_jF_0 \to H_jE \to \ldots,$$

ahol $I = \mathrm{id}_{F_0}$.

Mostantól a $\Phi: \ S_\varepsilon - K \to S^1$ a Milnor-fibrálás, a $h_*: \ H_nF_0 \to H_nF_0$ lineáris leképezés karakterisztikus polinomja

$$\Delta(t) = \det(tI_* - h_*).$$

Vagyis $\Delta(t)$ egy polinom, mely

$$\Delta(t) = t^\mu + a_1 t^{\mu-1} + \cdots + a_{\mu-1}t \pm 1$$

alakú.

3.8.6. Tétel [[1], 8.5.]. *Ha $n \neq 2$, akkor K pontosan akkor topologikus gömb, ha*

$$\Delta(1) = \det(I_* - h_*) = \pm 1.$$

Bizonyítás. Ha $n > 1$, akkor A Wang egzakt sort felírva azt kapjuk, hogy

$$H_nF_0 \stackrel{h_*-I_*}{\to} H_nF_0 \to H_n(S_\varepsilon - K) \to 0.$$

Mivel $\dim S_\varepsilon = 2n+1$, az Alexander-dualitás miatt

$$H_n(S_\varepsilon - K) \cong H^n(K),$$

és mivel K egy $2n-1$-dimenziós sokaság, ezért a Poincaré-dualitás miatt

$$H^n(K) \cong H_{n-1}(K).$$

A 3.8.3. Lemma alapján $H_{n-1}K = 0$, ezért $H_n(S_\varepsilon - K) = 0$, emiatt $h_* - I_*$ izomorfizmus, és így $\det(I_* - h_*) = \pm 1$. $\square$

Erről a $\Delta(t)$ polinomról meg lehet mutatni, hogy az $S_\varepsilon - K$-nak topologikus invariánsa és tulajdonképpen az n-dimenziós általánosítása a csomók Alexander-polinomjának.

4. Normális felület szingularitások

Ebben a fejezetben normális felület szingularitásokról lesz szó. Bevezetőül szükségünk lesz pár definícióra.

4.1. Alapfogalmak

4.1.1. Definíció [[9], 154. o.]. Legyen X analitikus sokaság, és $x_0 \in X$ tetszőleges pont. Bevezetünk egy ekvivalenciarelációt az x_0 pont X-beli környezetein. Azt mondjuk, hogy az x_0 pont U és V környezetei ekvivalensek, jelölve $U \sim V$, ha létezik olyan W környezete az x_0-nak, melyre $W \subset U \cap V$. Ez nyilván ekvivalenciareláció az x_0 környezetein. Azt mondjuk, hogy

$$(X, x_0) = \{x_0 \in U \subset X \,:\, U \text{ nyílt}\}/\sim$$

tércsíra x_0-ban.

4.1.2. Definíció [[9], 67. o.]. Legyenek X, Y analitikus sokaságok, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ tetszőleges pontok, és legyen $U, U' \subset X$ az x_0-nak, $V, V' \subset Y$ az y_0-nak tetszőleges környezete és legyenek $f : U \to V$, valamint $g : U' \to V'$ analitikus függvények. Azt mondjuk, hogy az f és g függvények ekvivalensek, ha létezik olyan $W \subset U \cap U'$ környezete az x_0-nak, melyre $f\big|_W = g\big|_W$. Ez ekvivalenciareláció, és tetszőleges f függvény osztályát az f *csírájának* nevezzük. Jelölése:

$$f : (X, x_0) \to (Y, y_0).$$

Legyenek $f_i : (\mathbb{C}^N, o) \to (\mathbb{C}, 0)$ analitikus függvények csírái és legyen

$$(X, o) = (\{z \in \mathbb{C}^n \,:\, f_1(z) = \cdots = f_m(z) = 0\}, o).$$

4.1.3. Definíció [[8], 1.3.]. Legyen $\alpha \subset \{1, \ldots, N\}$ multiindex. Jelölje

$$\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_N\} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N, o}$$

azon $\sum a_\alpha z^\alpha$ hatványsorok lokális gyűrűjét, melyek konvergensek az o egy kis környezetében. Az $f_1, \ldots, f_m$ függvények által generált ideált jelölje $(f_1, \ldots, f_m)$. Az (X, o)*-n definiált analitikus függvények gyűrűje*:

$$\mathcal{O}_{X,o} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,o}/(f_1, \ldots, f_m).$$

4.1.4. Megjegyzés. A $\mathcal{O}_{X,o}$ gyűrű szintén lokális.

4.1.5. Definíció [[8], 4. o.]. Azt mondjuk, hogy az (X, o) *irreducibilis*, ha nem írható fel két valódi analitikus részhalmaz uniójaként, és *redukált*, ha az $\mathcal{O}_{X,o}$ gyűrűnek nincsen nilpotens eleme, azaz

$$(f_1, \ldots, f_m) = \sqrt{(f_1, \ldots, f_m)},$$

ahol $\sqrt{(f_1, \ldots, f_m)}$ az $(f_1, \ldots, f_m)$ ideál radikálja.

Mostantól feltesszük, hogy az (X, o) irreducibilis és redukált.

4.1.6. Definíció [[8], 1.1.]. Az (X, o) *felület szingularitás*, ha az $\mathcal{O}_{X,o}$ gyűrű Krull-dimenziója 2, ami ekvivalens a következővel. Tekintsük minden $p \in X$ pontra az

$$r(p) = \mathrm{rank}(\partial f_i/\partial z_j(p))_{i=1,j=1}^{m,N}$$

leképezést. Azon pontokat, ahol ez a rang eléri a maximumát a 2.1.9. Definíció alapján *egyszerű* pontoknak hívjuk, a többi pontot *szinguláris* pontnak. Az (X, o) pontosan akkor felület szingularitás, ha az egyszerű $p \in X$ pontokban $r(p) = N - 2$.

4.1.7. Definíció [[8], 4. o.]. Ha $r(o) = N - 2$, akkor azt mondjuk, hogy az (X, o) *sima csíra*, vagyis analitikusan izomorf a $(\mathbb{C}^2,0)$ csírával. Ha $r(o) < N - 2$, de minden $p \in X - \{o\}$ pontra $r(p) = N - 2$, akkor azt mondjuk, hogy (X, o)-nak *izolált szingularitása* van az o pontban.

Az egyenletek m száma általában nagyobb, mint $N - 2$. Ha egyenlőség teljesül, vagyis a szingularitás leírható $m = N - 2$ egyenlettel $\mathbb{C}^N$-ben, akkor azt mondjuk, hogy az (X, o) *teljes metszet szingularitás* ([[8], 4. o.]).

4.1.8. Példa [[8], 1.2.]. Nem minden felület szingularitás teljes metszet szingularitás. Például

$$(X,0) = (\{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 \,:\, xz = y^2, yt = z^2, xt = yz\},0) \subset (\mathbb{C}^4,0)$$

nem definiálható két egyenlettel.

4.1.9. Definíció [[8], 4. o.]. Az (X, o) irreducibilis szingularitás *normális*, ha a $\mathcal{O}_{X,o}$ gyűrű egész zárt a hányadostestében.

Normális szingularitásokra teljesül a következő tétel:

4.1.10. Tétel [[10], 7.7.]. *Az (X, o) normális szingularitás, akkor a $\Sigma(X)$ halmaz kodimenziója legalább* 2.

Arra, hogy egy szingularitás normális egy teljesen algebrai definíciót adtunk, azonban van egy ezzel ekvivalens geometriai definíciója a normális szingularitásnak, melyet a következő állítás ad, nem bizonyítjuk.

4.1.11. Állítás [[10], 7.8.]. *Jelölje $\Sigma(X)$ a szinguláris pontok halmazát az o pont egy környezetében. Az (X, o) irreducibilis szingularitás pontosan akkor normális, ha tetszőleges*

$$f : X - \Sigma(X) \to \mathbb{C}$$

korlátos, holomorf függvény kiterjeszthető egy X-en definiált holomorf függvénnyé.

A 4.1.10. Tételből következik, hogy nem minden szingularitás normális. Például az

$$(X,0) = (\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3) \,:\, x^p = y^q, p, q \geq 2, \gcd(p, q) = 1\},0)$$

nem normális szingularitás, hiszen

$$\Sigma(X) = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \,:\, x = 0, y = 0\}.$$

Ez a probléma a szingularitás *normalizálásával* kiküszöbölhető, ami egy

$$n: \bigcup_{i=1}^{k} (\overline{X}, o_i) \to (X, o)$$

szürjektív, valódi, analitikus leképezés, ahol minden pontnak véges sok őse van, és az $X - \Sigma(X)$ halmaz fölött ez az n egy analitikus izomorfizmus ([[10], 7.9.]).

Minden nem normális (X,o) szingularitásnak létezik egy (izomorfizmus erejéig) egyértelmű normalizációja. Sőt, egy irreducibilis szingularitás normalizációja mindig homeomorfizmus, vagyis a normalizálással a topologikus típus nem változik ([[10], 7.12.]).

A következő két állítás a normalizált egy-egy univerzális tulajdonságát adja.

4.1.12. Állítás [[10], 7.11.]. *Ha (Z,z) normális és*

$$\phi:\ (Z,z) \to (X,o)$$

analitikus leképezés, akkor létezik egy

$$\psi:\ (Z,z) \to \bigcup_{i=1}^{k} (\overline{X}, o_i)$$

analitikus leképezés, melyre $n \circ \psi = \phi$.

4.1.13. Állítás [[11], 14.7.]. *Legyen most (Z,z) olyan (nem feltétlenül normális) csíra, melyre*

$$\tilde{\phi}:\ (Z,z) \to (X,o)$$

véges leképezés, mely izomorfizmus $X - \{o\}$ felett. Ekkor létezik egy

$$\tilde{\psi}: \bigcup_{i=1}^{k} (\overline{X}, o_i) \to (Z,z)$$

leképezés, melyre $n \circ \tilde{\psi} = \tilde{\phi}$.

4.2. Rezolúció

Legyen X egy analitikus halmaz, a szingularitásainak halmazát pedig jelölje $\Sigma(X)$, legyen $o \in \Sigma(X)$ rögzített.

4.2.1. Definíció [[6], 1.1.1.]. Legyen $\tilde{X}$ normális analitikus halmaz, $U \subset X$ egy (elég kicsi) környezete az o-nak. Legyen $\Phi:\ \tilde{X} \to U$ analitikus, valódi leképezés, valamint legyen $E = \Phi^{-1}(\Sigma(X))$. Azt mondjuk, hogy a Φ lokális parciális rezolúciója, más néven *modifikációja* az (X,o) csírának, ha a következő két feltétel teljesül.

1. $\tilde{X} - E$ sűrű $\tilde{X}$-ban,

2. Létezik egy $A \subset U$ analitikus halmaz, melyre $\Sigma(X) \cap U \subset A$, az A nem tartalmazza az U egyetlen irreducibilis komponensét sem és $U - A$ fölött a Φ izomorfizmus.

4.2.2. Definíció [[6], 1.1.1.]. Adott $\Phi_i : \tilde{X}_i \to U_i$ $(i = 1{,}2)$ modifikációira az (X, o)-nak azt mondjuk, hogy Φ_1 *dominálja* Φ_2-t, ha az U_1, U_2 környezeteket egy kisebb U környezetre lecserélve létezik egy

$$\Psi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$$

analitikus függvény, melyre $\Phi_2 \circ \Psi = \Phi_1$.

4.2.3. Definíció [[6], 1.1.1]. A Φ modifikációt *rezolúciónak* hívjuk, ha $\tilde{X}$ egy sima, analitikus sokaság.

4.2.4. Definíció [[6], 1.1.1.]. A Φ rezolúciót *erősnek* nevezzük, ha megszorítva a $\Phi^{-1}(U - \Sigma(X))$ halmazra,

$$\Phi : \Phi^{-1}(U - \Sigma(X)) \to U - \Sigma(X)$$

izomorfizmus, valamint a $\Phi^{-1}(U \cap \Sigma(X))$ *normális metsző divizor* $\tilde{X}$-ban, vagyis $\Phi^{-1}(U \cap \Sigma(X))$ irreducibilis komponenseinek bármely lokális metszése transzverzális és bármely három komponens metszete üres.

4.2.5. Definíció [[6], 1.1.1.]. Egy erős rezolúciót *jónak* hívunk, ha $\Phi^{-1}(U \cap \Sigma(X))$ irreducibilis komponenseinek nincsen önmetszésük.

4.2.6. Definíció [[6], 1.1.1.]. Egy rezolúciót *minimálisnak* hívunk, ha nem dominál rezolúciót. Hasonlóan lehet minimális jó, és minimális erős rezolúciókról beszélni.

4.2.7. Példa [[6], 1.1.3.]. Legyen $(X, o) \subset (\mathbb{C}^n, o)$, melyre $\Sigma(X) = o$. A $\mathbb{P}^{n-1}$ azon $\mathbb{C}^n$-beli L egyenesek paramétertere, amikre $o \in L$. Legyen

$$B = \{(x, L) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1} : x \in L\},$$

és $\Phi' : B \to \mathbb{C}^n$, melyre $\Phi'(x, L) = x$. Ezt a Φ'-t a $\mathbb{C}^n$ *felfújtjának* nevezzük az o pontban. Ez egy modifikációja $\mathbb{C}^n$-nek, és izomorfizmus $\mathbb{C}^n - o$ fölött. Az

$$\{(x, L) \in X \times \mathbb{P}^{n-1} : x \in L, x \neq 0\}$$

halmaz lezártja B-ben legyen $\tilde{X}$. Ezt az $\tilde{X}$ halmazt az X *szigorú transzformáltjának* nevezzük a Φ' mentén. A Φ' által indukált $\Phi : \tilde{X} \to X$ leképezést az X felfújtjának mondjuk az o pontban.

4.2.8. Definíció [[6], 2. o.]. Legyen $C \subset \mathbb{P}^{n-1}$ irreducibilis, sima projektív görbe és legyen $X \subset \mathbb{C}^n$ a C fölött levő komplex affin kúp, melynek csúcsa o. A $C \subset \mathbb{P}^{n-1}$ beágyazás *projektíven normális*, ha (X, o) normális.

4.2.9. Példa [[6], 1.1.3.]. Legyen C, X, mint az előző definícióban. Az X-nek izolált szingularitása van o-ban, de ebből nem következik, hogy normális o-ban. Például a

$$\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3, [u : v] \to [u^4 : u^3v : uv^3 : v^4]$$

beágyazás nem projektíven normális. Az o-ban felfújva egy $\pi : \tilde{X} \to X$ rezolúciót kapunk.

4.2.10. Példa [[6], 1.1.3.]. Legyen $(X, o) = (\{xt = zy\}, o) \subset (\mathbb{C}^4, o)$, $[\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1$, és

$$H_{[\alpha:\beta]} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 : \beta x = \alpha z, \beta y = \alpha t\}$$

sík,

$$\tilde{X} = \{(p, [\alpha, \beta]) \in X \times \mathbb{P}^1 : p \in H_{[\alpha:\beta]}\},$$

valamint az $\tilde{X} \hookrightarrow X \times \mathbb{P}^1$ beágyazást jelölje e, az $X \times \mathbb{P}^1 \to X$ vetítést jelölje π, legyen $\Phi = \pi \circ e$. Ekkor $\tilde{X}$ a Φ-vel rezolúciója X-nek, ahol $\Phi^{-1}(o) = \mathbb{P}^1$. Tehát a $\Phi^{-1}(o)$ halmaz kodimenziója nagyobb, mint 1. Hasonlóan a $H_{[\alpha:\beta]}$ síkok helyett a

$$H'_{[\alpha:\beta]} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 : \beta x = \alpha y, \beta z = \alpha t\}$$

síkokat nézzük, akkor is kapunk egy rezolúciót, mindkét rezolúció minimális.

Mostantól tegyük fel, hogy (X, o) normális felület szingularitás, valamint rögzítsünk egy olyan $\Phi : \tilde{X} \to U$ modifikációt, ami nem izomorfizmus.

4.2.11. Lemma [[6], 1.1.5.]. *Az $E = \Phi^{-1}(\Sigma(X))$ halmaz összefüggő, kompakt és egydimenziós.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy E nem összefüggő. Legyenek $\{E_\alpha\}_\alpha$ az összefüggő komponensei és legyenek $\{U_\alpha\}_\alpha$ diszjunkt nyílt halmazok, ahol U_α környezete az E_α-nak. Be lehet látni, hogy létezik egy U nyílt környezete az $o \in X$-nek, melyre

$$\Phi^{-1}(U) \subset \cup_\alpha U_\alpha,$$

és $U - o$ összefüggő. Ekkor az $U - o$ halmazt lefedik a diszjunkt, nemüres

$$\Phi(\Phi^{-1}(U) \cap U_\alpha - E)$$

nyílt halmazok, ami ellentmondás.

Mivel a Φ leképezésnél kompakt halmaz őesképe kompakt, ezért E kompakt. Mivel $\dim \tilde{X} = 2$, és E valódi részhalmaza $\tilde{X}$-nak, ezért $\dim E < 2$. Ha $\dim E = 0$, akkor E egy pont, mivel E összefüggő. Ekkor a Φ véges leképezés. Az (X, o) normális, ezért a 4.1.13. Állítás miatt a Φ egy izomorfizmus lenne, ami ellentmond a feltételnek. Így nem lehet $\dim E = 0$, vagyis $\dim E = 1$. □

4.2.12. Definíció [[6], 1.1.6.]. Legyen (X, o) normális felület szingularitás, és Φ modifikáció, ami nem izomorfizmus. Az $E = \Phi^{-1}(\Sigma(X))$ analitikus görbét Φ kivételes halmazának (vagy görbéjének) nevezzük.

Mostantól legyen $\Phi : \tilde{X} \to U \subset X$ rezolúció, a kivételes görbét továbbra is jelölje E, az irreducibilis komponensei legyenek $E_1, \dots, E_s$.

4.2.13. Definíció [[8], 2.1.]. Egy *divizor* az $\tilde{X}$-on egy $D = \sum n_i D_i$ formális véges összeg, ahol $n_i \in \mathbb{Z}$ és $D_i \subset \tilde{X}$ irreducibilis görbe. Az $\tilde{X}$-on levő divizorok halmaza a formális összeg művelettel egy csoportot ad, melyet $\mathrm{Div}(\tilde{X})$-mal jelölünk. Ha $r_i \in \mathbb{Q}$ és $D = \sum r_i D_i$, akkor azt mondjuk, hogy a D egy *racionális* divizor. Ha D divizor, melyre $D = \sum n_i D_i$, akkor a *tartója* $|D| = \cup_{n_i \neq 0} D_i$.

4.2.14. Definíció [[8], 2.2.]. Tetszőleges D divizort, melyre $|D| \subset E$ *ciklusnak* hívunk. Vagyis tetszőleges D ciklusra $D = \sum n_i E_i$, ahol $n_i \in \mathbb{Z}$. Egy olyan racionális divizort, mely tartója E-ben van racionális ciklusnak nevezünk. Egy D ciklus *effektív*, ha mindegyik n_i együttható nemnegatív. Ezt úgy fogjuk jelölni, hogy $D \geq 0$.

[[8], 16. o.] alapján kapunk egy természetes (nem lineáris) rendezést a ciklusokon, ha

$$D = \sum n_i E_i \text{ és } D' = \sum n'_i E_i,$$

akkor azt mondjuk, hogy $D \geq D'$, ha $D - D' \geq 0$.

Mindegyik E_i reprezentálja a $H_2(\tilde{X}, \mathbb{Z})$ egy elemét. Emiatt bármely két E_i, E_j-nek ($1 \leq i, j \leq s$) ki tudjuk számolni a metszési számát, amit (E_i, E_j)-vel jelölünk. Ha $i = j$, akkor az (E_i, E_i) számot e_i-vel jelöljük és az E_i önmetszési számnak hívjuk. Két ciklus metszési számát is lehet definiálni. Ha $C = \sum n_i E_i$ és $D = \sum m_j E_j$ ciklusok, akkor a C, D metszési száma

$$(C, D) = (\sum n_i E_i, \sum m_j E_j) = \sum_{i,j} n_i m_j (E_i, E_j).$$

4.2.15. Definíció [[6], 1.1.6.]. Az $I = (E_i, E_j)_{i,j}$ mátrixot a Φ rezolúció *metszési mátrixának* nevezzük.

4.2.16. Definíció [[8], 2.4.]. Tetszőleges az $\tilde{X}$-on értelmezett g meromorf függvény meghatároz egy $[g] = \sum n_i D_i$ *fődivizort*, ahol az n_i a g függvény eltűnési rendje a D_i mentén (negatív, ha g-nek pólusa van). Az n_i együthatót a g függvény D_i menti *multiplicitásának* is szokták nevezni.

Nyilván $[g] \geq 0$ pontosan akkor, ha g holomorf. Be lehet látni, hogy ha g meromorf függvény az $\tilde{X}$-on, akkor $[g]$ relatív homológiaosztálya triviális, így $\langle [g], E_i \rangle = 0$ minden $1 \leq i \leq s$-re.

4.2.17. Definíció [[6], 1.1.6.]. Legyen $f : (X, o) \to (\mathbb{C}, 0)$ tetszőleges holomorf függvény. Ekkor az $\tilde{X}$-on

$$[f \circ \Phi] = \mathrm{div}_E(f \circ \Phi) + S(f \circ \Phi),$$

ahol $\mathrm{div}_E(f \circ \Phi)$ a divizor azon része, aminek a tartója E-ben van. Az $S(f \circ \Phi)$ részt úgy hívjuk, hogy az f függvény *szigorú transzformáltja.*

Az $S(f \circ \Phi)$ tartója $\mathrm{Cl}(\Phi^{-1}(\{f=0\}-o))$. Az egyszerűség kedvéért $\mathrm{div}_E(f\circ\Phi)$-t $\mathrm{div}_E(f)$-fel, $S(f\circ\Phi)$-t pedig $S(f)$-fel jelöljük.

4.2.18. Példa [[6], 1.1.7.]. Legyen $C, X, \tilde{X}$, mint a 4.2.9. Példában. Ha a $C \subset \mathbb{P}^{n-1}$ foka d és f generikus lineáris függvény az o-n keresztül, akkor $\mathrm{div}_E(f) = E$, és az $S(f)$ szigorú transzformált d sima komponensből áll, melyek az E-t transzverzálisan metszik. Emiatt $(E, S(f)) = d$. Mivel

$$0 = (E, [f\circ\Phi]) = (E, \mathrm{div}_E(f) + S(f)) = (E, E + S(f)),$$

ezért $E^2 = -d$.

Ha $C \simeq \mathbb{P}^1$ és $d = 1$, akkor a kúp egy sík, ezért (X, o) sima. Az o pontban felfújva egy modifikációt kapunk, ahol a kivételes halmaz $E \simeq \mathbb{P}^1$ és $E^2 = -1$.

4.2.19. Definíció [[6], 3. o.]. Ha adott egy $\tilde{X}$ sima felület, és $E \subset X$ görbe, melyre $E \simeq \mathbb{P}^1$ és $E^2 = -1$, akkor azt mondjuk, hogy az E egy (-1)-görbe az $\tilde{X}$-on.

4.2.20. Állítás [[6], 1.1.9.]. *Legyen (X, o) normális felület szingularitás és Φ rezolúció. Ekkor az I metszési mátrix negatív definit.*

Bizonyítás. Legyen $f:\ (X,o) \to (\mathbb{C},0)$ holomorf függvény és $D = \mathrm{div}_E(f)$. Mivel $D + S(f)$ ődivizor, ezért

$$(D + S(f), E_i) = 0 \ \forall 1 \le i \le s.$$

Mivel $S(f)$ és E_i komplex görbék, ezért $(S(f), E_i) \ge 0$ minden $1 \le i \le s$-re, és mivel $S(f)$ metszi ez E-t, ezért van olyan $1 \le j \le s$, melyre $(S(f), E_j) > 0$. Emiatt

$$(D, E_i) \le 0 \ \forall i,\ \text{ és } (D, E_j) < 0.$$

A D divizor effektív és tartója az egész E.

Azt szeretnénk bizonyítani, hogy ha

$$Z = \sum_i r_i E_i \ (r_i \in \mathbb{Q}),$$

és $Z^2 = 0$, akkor $Z = 0$. Léteznek Z_1, Z_2 effektív divizorok, melyeknek nincs közös komponensük és $Z_1 - Z_2 = Z$. Ekkor

$$0 \le Z^2 = Z_1^2 + Z_2^2 - 2(Z_1, Z_2) \le Z_1^2 + Z_2^2.$$

Emiatt feltehetjük, hogy Z effektív. Ha a Z tartója, $|Z|$ kisebb, mint az E, akkor D-t szorítsuk meg $|Z|$-re, a kapott divizort jelöljük szintén D-vel. Ekkor továbbra is teljesül, hogy

$$(D, E_i) \le 0 \ \forall i,\ \text{ és } (D, E_j) < 0.$$

Indukcióval bizonyítunk a $|Z|$ számossága szerint. Legyen $a \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ a legnagyobb pozitív valós szám, melyre $aD \le Z$, legyen $Z' = Z - aD$. Ekkor Z' effektív, a tartója kisebb, mint Z tartója és

$$Z'^2 = (Z - aD, Z') \geq (Z, Z') = (Z, Z - aD) \geq Z^2 \geq 0.$$

Indukció miatt $Z' = 0$, ezért $Z = aD$ és mivel $D^2 < 0$, ezért $a = 0$, vagyis $Z = 0$. $\square$

Ha $i \neq j$, akkor $(E_i, E_j) \geq 0$, mivel az E_i és E_j komplex görbék. Ebből és a 4.2.20. Állításból következik, hogy minden $1 \leq i \leq s$-re $e_i < 0$.

4.2.21. Megjegyzésnormalfont [[6], 1.1.12.]. Hasonló állítás írja le azon $f : W \to D$ holomorf, szürjektív és valódi leképezések családját, ahol W sima felület és D pedig origó középpontú körlemez. Feltesszük, hogy minden $D - 0$ feletti fibrum sima, összefüggő és a génusza g, legyenek $\{C_v\}_v$ a 0 fölötti fibrum irreducibilis komponensei és $\mathrm{div}(f) = \sum_v n_v C_v$. Ekkor

$$(C_v, \mathrm{div}(f)) = (C_v, f^{-1}(t)) = 0,$$

(ahol t generikus eleme D-nek), vagyis $\mathrm{div}(f)^2 = 0$.

Továbbá a $(C_v, C_u)_{v,u}$ metszetforma szemidefinit, azaz $C^2 \leq 0$ tetszőleges C görbére, melynek tartója $\cup_v C_v$, és ha $C^2 = 0$, akkor $C = r \cdot \mathrm{div}(f)$, $r \in \mathbb{Q}$.

A következő tétel garantálja rezolúció létezését, nem bizonyítjuk.

4.2.22. Tétel [[6], 1.1.19.]. *Legyen (X, o) normális felület szingularitás. Ekkor a következő állítások teljesülnek.*

1. *Létezik jó rezolúció.*
2. *Létezik egyértelműen minimális rezolúció és létezik egyértelműen minimális jó (minimális erős) rezolúció.*
3. *Egy rezolúció pontosan akkor minimális, ha az E_i irreducibilis komponensek közül egyik sem (-1)-görbe.*
4. *Egy jó rezolúció minimális jó pontosan akkor, ha az E_i görbék közül egyik sem (-1)-görbe, melyre $(E - E_i, E_i) \leq 2$.*

Most definiáljuk a beágyazott rezolúciót [[6], 5,6. o.] alapján. Legyen X rögzített, $D \subset X$ divizor és $o \in D \subset X$.

4.2.23. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\Phi : \tilde{X} \to X$ erős rezolúció az (X, D) pár *beágyazott rezolúciója*, ha $\Phi^{-1}(D)$ normális metszet szingularitás $\tilde{X}$-ban. A beágyazott rezolúció *jó*, ha a $\Phi^{-1}(D)$ irreducibilis komponensei simák. A rezolúcióhoz hasonlóan a beágyazott rezolúcióra is lehet definiálni a minimalitást, jóságot és erősséget.

Ha az (X,o) csíra diffeomorf a $(\mathbb{C}^2,0)$ csírával, és $(D,o) \subset (X,o)$ síkgörbe szingularitás, akkor [[13], 393. o.] alapján létezik beágyazott rezolúció, melyet felfújások egymásutánjával kapunk. Így ha az (X,o) csíra dimenziója kettő, akkor a 4.2.22. Tételt alkalmazva létezik $\Phi: \tilde{X} \to X$ rezolúció, utána pedig a $(\tilde{X}, \Phi^{-1}(D))$ párnak van beágyazott rezolúciója, amivel a $\Phi^{-1}(D)$ síkgörbe szingularitásokat feloldjuk. Emiatt ha $\dim X = 2$, akkor az (X,D) párnak van beágyazott rezolúciója.

Sőt, a 4.2.22. Tétel bizonyításához hasonló módon belátható, hogy az (X,D) párnak van minimális jó beágyazott rezolúciója. A Φ pontosan akkor minimális jó beágyazott rezolúció, ha nem létezik sima, irreducibilis kivételes görbe E_v, melyre $g(E_v)=0$, $E_v^2=-1$ és $(\Phi^{-1}(D)-E_v, E_v) \leq 2$.

4.3. A link és a rezolúciós gráf

A linkkel már megismerkedtünk az előző fejezetben. Az ottani tételek [[6], 2.1.] alapján átvihetőek normális felület szingularitásokra, melyeket ebben a szakaszban csak kimondunk, nem bizonyítunk.

Legyen X komplex analitikus halmaz, $o \in U \subset X$ egy környezete az o-nak, ahol o az egyetlen szinguláris pont. Rögzítünk egy valós analitikus $\rho: U \to [0,\infty)$ függvényt, melyre $\rho^{-1}(0)=o$, be lehet látni, hogy ilyen függvény mindig létezik. Tetszőleges $S \subset [0,\infty)$-re a $\rho^{-1}(S)$ halmazt X_S-sel fogjuk jelölni.

4.3.1. Tétel [[6], 2.1.2.]. *Létezik egy $0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, hogy minden $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$-ra $X_{\{\varepsilon\}}$ egy C^∞ sokaság. Az $(X_{[0,\varepsilon]}, X_{\{\varepsilon\}})$ pár homeomorfizmus típusa független az ε-tól, ρ-tól, csak (X,o)-tól függ és homeomorf a $(\mathrm{Cone}(X_{\{\varepsilon\}}), X_{\{\varepsilon\}})$ párral.*

Az $X_{(0,\varepsilon]}$ egy C^∞ sokaság, melyen a komplex struktúra indukál egy irányítást. Így a határa $X_{\{\varepsilon\}}$ örököl egy irányítást. Ha $U-\{o\}$ komplex dimenziója d, akkor az $X_{\{\varepsilon\}}$ valós dimenziója $2d-1$.

4.3.2. Definíció [[6], 2.1.3.]. Az $X_{\{\varepsilon\}}$ halmazt az X *linkjének* nevezzük az o pontban, $L(X,o)$-val jelöljük. Ha egyértelmű, hogy melyik szinguláris pontot vizsgáljuk, akkor az egyszerűbb L_X jelölést használjuk.

4.3.3. Megjegyzés. Ha komplex analitikus halmazok helyett valós analitikusakat vizsgálunk, akkor is definiálhatjuk egy izolált szingularitás linkjét. Nash [[12]]-ban bebizonyította, hogy tetszőleges kompakt differenciálható sokaság mindig megadható egy valós algebrai varietás izolált szingularitásának linkjeként. Ez azonban nem igaz komplex analitikus halmazokra, mert például nem minden 3-dimenziós irányított sokaság kapható meg, mint egy komplex izolált szingularitás linkje.

Legyen (X,o) irreducibilis, $o \in X$ izolált szingularitás, és legyen $o \in D \subset X$ analitikus részhalmaz, melyre $D-\{o\}$ sima, nemüres és a dimenziója kisebb, mint az X dimenziója. Ekkor a 4.3.1. Tétel megismételhető az (X, D) párra. Tetszőleges $\rho: U \to [0, \infty)$-re, melyre $\rho^{-1}(0) = \{o\}$ az $(X_{\{\varepsilon\}}, X_{\{\varepsilon\}} \cap D)$ pár független az ε, ρ választásától és mindkettő sima, irányítható sokaság. Így természetesen adódik egy $L(D, o) \subset L(X, o)$ beágyazás.

Legyen $f: (X, o) \to (\mathbb{C}, 0)$ holomorf függvény, a nullhelyeinek halmazát jelölje $V(f)$. Tegyük fel, hogy $V(f) - \{o\}$ sima. Ekkor az előbbiek alapján kapunk egy $L_{V(f)} \subset L_X$ beágyazást.

4.3.4. Definíció [[6], 2.2.2.]. Az $L_{V(f)} \subset L_X$ halmazt az f függvény *linkjének* hívjuk, és $L(f, o)$-val, vagy egyszerűbben L_f-fel jelöljük.

4.3.5. Állítás [[6], 2.2.3.]. *Legyen (X, o) izolált szingularitás, ρ valós analitikus függvény, és $f: (X, o) \to (\mathbb{C}, 0)$ holomorf függvény csírája. Ekkor létezik $\varepsilon > 0$ és $0 < \eta < \varepsilon$, melyekre a következők teljesülnek.*

1. *$X_{[0,\varepsilon]} \cap f^{-1}(t)$ sima sokaság és az X_ε linket transzverzálisan metszi minden $t \in D_\eta - \{0\}$-ra,*
2. *Az f megszorítása az*
$$(X_{[0,\varepsilon]} \cap f^{-1}(\mathrm{bd}(D_\eta)), X_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathrm{bd}(D_\eta))$$
párra lokálisan triviális fibrálás $\mathrm{bd}(D_\eta)$ felett,
3. *Ha az f izolált szingularitást definiál, akkor az $X_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathrm{bd}(D_\eta)) \to \mathrm{bd}(D_\eta)$ fibrálás kiterjed egy $X_\varepsilon \cap f^{-1}(D_\eta) \to D_\eta$ triviális fibrálássá.*

4.3.6. Definíció [[6], 2.2.4.]. A fenti fibrálást az f csírához tartozó közeli fibrálásnak nevezik. Tetszőleges $t \in D_\eta - \{0\}$-ra az
$$F_t = X_{[0,\varepsilon]} \cap f^{-1}(t)$$
halmazt Milnor fibrumnak nevezzük, mely egy sima, irányítható peremes sokaság,
$$\mathrm{bd}(F_t) = X_{\{\varepsilon\}} \cap f^{-1}(t).$$

4.3.7. Definíció [[6], 2.2.5.]. Legyen M tetszőleges sima sokaság. Az M *nyílt könyv felbontása* egy 2 kodimenziós L részsokaságból és egy $p: M - L \to S^1$ sima fibrálásból áll, ahol az $L \subset M$ beágyazás normálnyalábja triviális. Az L részsokaságot *kötésnek*, a p fibrumait *lapnak* hívjuk. A nyílt könyvet (M, L, p)-vel jelöljük.

A dp leképezés indukál egy természetes irányítást a kötésen és a lapokon. Így az M tetszőleges rögzített irányítása indukál egy természetes irányítást az L-en. Ha az L már irányított volt, akkor azt mondjuk, hogy a nyílt könyv *kompatibilis* az M és L irányításaival, ha az L eredeti és M-ből indukált irányításai megegyeznek. Azt mondjuk, hogy két nyílt könyv, (M, L, p) és (M', L', p') *izomorfak*, ha létezik egy $\Phi: (M, L) \to (M', L')$ diffeomorfizmus, ami megőrzi a lapokat, és azok irányítását.

4.3.8. Tétel [[6], 2.2.6.]. *Legyen (X, o) izolált szingularitás, $f : (X, o) \to (\mathbb{C}, 0)$ holomorf függvény csírája és ρ valós analitikus függvény. Ekkor létezik $\varepsilon > 0$, hogy*

$$f/|f| : X_{\{\varepsilon\}} - X_{\{\varepsilon\}} \cap V(f) \to S^1$$

lokálisan triviális C^∞ fibrálás. Az izotópiatípusa nem függ ε és ρ választásától, és izomorf a korábban definiált közeli fibrálással. Ha az f izolált szingularitást definiál, akkor az $f/|f|$ fibrálás kiterjed egy

$$(X_{\{\varepsilon\}}, X_{\{\varepsilon\}} \cap V(f), f/|f|)$$

nyílt könyv felbontássá, amely kompatibilis az $X_{\{\varepsilon\}}$ és $X_{\{\varepsilon\}} \cap V(f)$ természetes irányításával.

4.3.9. Definíció [[6], 2.2.7.]. A 4.3.8. Tételben levő $f/|f| : L_X - L_{V(f)} \to S^1$ fibrálást Milnor fibrálásnak, nyílt könyv felbontást pedig Milnor nyílt könyv felbontásnak nevezzük.

A másik topologikus invariáns, amit leírunk [[6], 1.2.] alapján, a *rezolúciós gráf.* Legyen (X, o) normális felület szingularitás, $f : (X, o) \to (\mathbb{C}, 0)$ egy analitikus függvény csírája és $(V(f), o) = (f^{-1}(0), o)$. Legyen $\Phi : \tilde{X} \to X$ jó beágyazott rezolúciója az $(X, V(f))$ párnak. A Φ-hez tartozó E kivételes görbe irreducibilis komponenseinek halmaza $\{E_w\}_{w \in \mathcal{W}}$, az $S(f)$ szigorú transzformált irreducibilis komponenseit pedig $\{S_a\}_{a \in \mathcal{A}}$-val jelöljük.

Most a Φ rezolúcióhoz konstruálunk egy gráfot. Legyen $\mathcal{V} = \mathcal{W} \sqcup \mathcal{A}$. Tetszőleges $v \in \mathcal{V}$-hez elemhez tartozik egy csúcs, melyet szintén v-vel jelölünk. Ha $v \in \mathcal{A}$, akkor a v csúcsra még teszünk egy nyilat, ezeket a csúcsokat nyilas csúcsoknak fogjuk hívni. Ha $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$ és a hozzájuk tartozó irreducibilis görbék k pontban metszik egymást, akkor behúzunk k db élet a v_1, v_2 csúcsok közé.

Ezek után a gráfot dekoráljuk a következőképpen. Jelölje minden $w \in \mathcal{W}$-re e_w az E_w önmetszését, vagyis az E_w^2 számot, és g_w az E_w génuszát. Végül jelölje minden $v \in \mathcal{V}$-re m_v azt a számot, ahányadrendben az $f \circ \Phi$ a v-hez tartozó irreducibilis komponens mentén eltűnik, vagyis az f multiplicitását. Minden $w \in \mathcal{W}$-re a w csúcs mellé írjuk az e_w és $[g_w]$, számokat, valamint minden $v \in \mathcal{V}$ csúcs mellé írjuk az (m_v) multiplicitást.

4.3.10. Definíció. Az így kapott gráfot a Φ rezolúcióhoz és (X, f) párhoz tartozó *duális beágyazott rezolúciós gráfnak* nevezzük és $\Gamma(X, f)$-fel jelöljük.

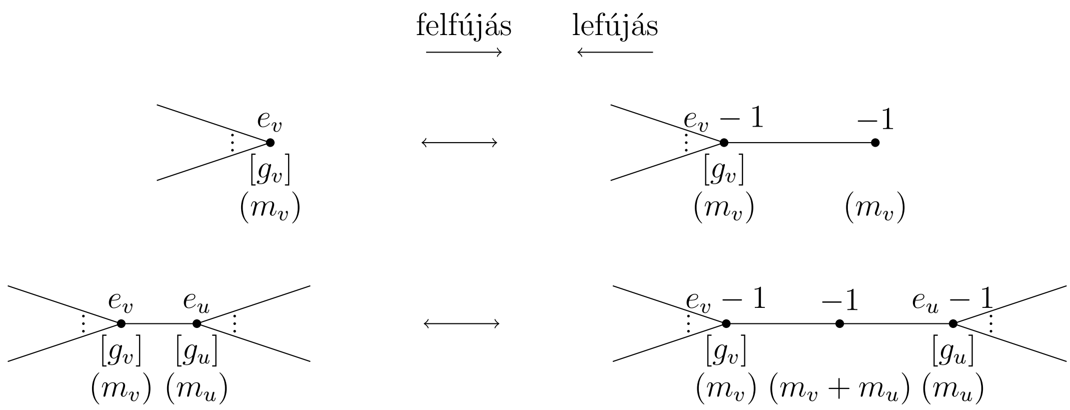
Például, ha az f-nek izolált szingularitása van, akkor minden $a \in \mathcal{A}$-ra $m_a = 1$. Ha $g_w = 0$, akkor általában nem írjuk le a $[g_w]$ számot. Tetszőleges $w \in \mathcal{W}$-re legyen $\mathcal{V}_w = \{v \in \mathcal{V} : \text{a gráfban van } v, w \text{ él}\}$, vagyis a w csúcs szomszédjainak halmaza és legyen $\delta_w = |\mathcal{V}_w|$.

Ha csak egy (X, o) tércsírából indulunk ki, akkor is tudunk egy jó Φ rezolúcióhoz egy gráfot szerkeszteni, a fentihez hasonló módon. Ezt a gráfot Γ_X-szel fogjuk jelölni, és az (X, o) csíra Φ-hez tartozó *duális rezolúciós gráfjának hívjuk*. Ebben az esetben $\mathcal{A} = \emptyset$, és tetszőleges $w \in \mathcal{W}$ csúcsnak két dekorációja van: e_w és $[g_w]$. Tetszőleges $\Gamma(X, f)$ beágyazott rezolúciós gráfból kapunk egy Γ_X rezolúciós gráfot úgy, hogy kitöröljük az $\mathcal{A}$-hoz tartozó csúcsokat, a belőlük induló éleket és az (m_w) dekorációkat.

4.3.11. Definíció [[6], 1.2.3.]. Ha Γ egy rezolúciós gráf, rezolúcióhoz tartozó metszési mátrix I, akkor a Γ *determinánsa*, legyen $\det(\Gamma) = \det(-I)$. Megállapodás szerint $\det(\emptyset) = 1$.

A [[6], 1.2.4.] szakasz alapján megemlítjük a rezolúciós gráf néhány tulajdonságát. A $\Gamma(X, f)$ és Γ_X gráfok függenek a Φ rezolúció választásától és a 4.2.11. Állítás miatt összefüggőek. Meg lehet mutatni, hogy ha Φ_1 és Φ_2 különböző rezolúciók, és a hozzájuk tartozó rezolúciós gráfok Γ_1 és Γ_2, akkor az egyik gráfból meg tudjuk kapni a másikat (-1)-görbék fel- illetve lefújásának egy sorozatával.

Az alábbi ábrák azt mutatják meg, hogy mi történik a (beágyazott) rezolúciós gráffal, ha az E_v-n felfújunk (lefújunk) egy sima pontot, vagy ha az $E_v \cap E_u$ pontot fújjuk fel (le). Ezt gráfelméleti nyelven úgy mondjuk, hogy felfújjuk a v csúcsot, illetve a v, u élet.



Legyen $I = (I_{vw} = (E_v, E_w))_{v,w}$ a Φ rezolúcióhoz tartozó metszési mátrix. Mivel

$$[f \circ \Phi] = \sum_{v \in \mathcal{W}} m_v E_v + \sum_{a \in \mathcal{A}} m_a S_a$$

ődivizor, ezért a metszete bármelyik E_w-vel 0 $(w \in \mathcal{W})$. Emiatt

$$\sum_{v \in \mathcal{W}} m_v I_{vw} + \sum_{a \in \mathcal{A} \cap \mathcal{V}_w} m_a = 0 \ \forall w \in \mathcal{W}.$$

Mivel I nem-elfajuló, ezért az $\{m_v\}_{v \in \mathcal{W}}$ multiplicitásokat meg tudjuk határozni az I és az $\{m_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ ismeretében. Teljesül a következő azonosság is:

$$e_w m_w + \sum_{v \in \mathcal{V}_w} m_v = 0.$$

4.4. Plumbing konstrukció

Tetszőleges (X, o) normális felület szingularitáshoz hozzárendeltük a linkjét, és a rezolúciós gráfját. Ebben a szakaszban azt írjuk le, hogyan határozza meg a rezolúciós gráf a linket.

4.4.1. Definíció [[6], 2.3.1.]. A *plumbing gráf* egy olyan gráf, aminek minden v csúcsára két egész szám van írva, e_v és $[g_v]$, ahol $g_v \geq 0$.

Most [[6], 2.3.2.] alapján leírjuk, hogy hogyan kapunk egy plumbing gráfból egy 3-dimenziós irányított sokaságot. Legyen Γ egy rögzített összefüggő plumbing gráf. A csúcsainak halmazát $\mathcal{V}$-vel, éleinek halmazát pedig $\mathcal{E}$-vel jelöljük. Minden $v \in \mathcal{V}$ csúcshoz hozzárendelünk egy

$$\pi_v : \; B_v \to S_v$$

S^1-nyalábot, ahol a B_v totális térnek van egy rögzített irányítása, az S_v bázistér zárt, peremmentes, irányított g_v génuszú felület, a nyaláb Euler-száma pedig e_v. Minden $v \in \mathcal{V}$-re rögzítjük az S_v és a fibrumok irányítását úgy, hogy kompatibilis legyen a B_v irányításával. Tetszőleges v-ből induló $e \in \mathcal{E}$ élre kiválasztunk egy $p_e \in S_v$ pontot és vesszük egy D_{p_e} trivializáló környezetét. Ekkor

$$\pi_v^{-1}(D_{p_e}) = D_{p_e} \times S^1, \; \pi_v^{-1}(\mathrm{bd}(D_{p_e})) = \mathrm{bd}(\pi_v^{-1}(D_{p_e})).$$

Legyen $e = (v, w)$ tetszőleges él Γ-ban, ekkor a (v, e) és (w, e) párokhoz rendre tartozik egy $p_v \in S_v$ és $p_w \in S_w$ pont. A B_v, illetve B_w sokaságokból kivesszük a $\pi_v^{-1}(\mathrm{Int}(D_{p_v}))$, illetve $\pi_w^{-1}(\mathrm{Int}(D_{p_w}))$ halmazokat. A kapott sokaságok pereme

$$\mathrm{bd}(\pi_v^{-1}(\mathrm{Int}(D_{p_v})) \simeq \mathrm{bd}(D_{p_v}) \times S^1 \simeq S^1 \times S^1,$$
$$\mathrm{bd}(\pi_w^{-1}(\mathrm{Int}(D_{p_w})) \simeq \mathrm{bd}(D_{p_w}) \times S^1 \simeq S^1 \times S^1.$$

Így a $B_v - \pi_v^{-1}(\mathrm{Int}(D_{p_v}))$ és $B_w - \pi_w^{-1}(\mathrm{Int}(D_{p_w}))$ peremes sokaságokat a peremük mentén a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix szerint összeragasztjuk. Így kapjuk az $M = M(\Gamma)$ sokaságot, a B_v terek irányításai adnak egy egyértelmű, jóldefiniált irányítást az M-en. Az üres gráfot is megengedjük, $M(\emptyset) = S^3$.

4.4.2. Megjegyzés. Ha a Γ gráf nem összefüggő, az összefüggő komponensei $\{\Gamma_i\}_i$, akkor minden Γ_i gráfra meg tudjuk konstruálni az előbb látható módon az $M(\Gamma_i)$ sokaságot, legyen $M(\Gamma)$ a $\sharp_i M(G_i)$ összefüggő unió.

Tetszőleges plumbing gráfhoz hozzávehetünk nyilas csúcsokat, a régi csúcsokat nem nyilas csúcsoknak fogjuk hívni. A nyilas csúcsok nincsenek számokkal dekorálva, és mindegyikből egyetlen él indul valamelyik nem nyilas csúcsba. A nyilas csúcsok halmazát $\mathcal{A}$-val, a nem nyilas csúcsok halmazát $\mathcal{W}$-vel fogjuk jelölni, az összes csúcs halmaza $\mathcal{V} = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{W}$. Ha nem vesszük figyelembe a nyilas csúcsokat és a belőlük induló éleket, akkor az előzőek alapján hozzá tudunk rendelni egy $M(\Gamma)$ irányított 3-sokaságot. Tetszőleges $a \in \mathcal{A}$ nyilas csúcsra, mely a $w \in \mathcal{W}$ csúccsal van összekötve, hozzárendeljük a B_w sokaság egy generikus S^1-fibrumát. Így a nyilas csúcsok halmaza egy 1-dimenziós részsokaságot reprezentál az $M(\Gamma)$-ban, melyet L-lel jelölünk.

Be lehet látni, hogy az $M(\Gamma)$ pontosan akkor racionális homológiagömb, ha a Γ fa és mindegyik g_v génusz 0.

A fenti konstrukció egy 4-dimenziós $P = P(\Gamma)$ peremes sokaságot is ad, melynek pereme $M(\Gamma)$. Úgy kapjuk, hogy az S^1-nyalábokat lecseréljük $\mathcal{D}_v \to S_v$ D^2-nyalábokra, és hasonló módon összeragasztjuk a $\mathcal{D}_v$ sokaságokat. A nyilas csúcsok most irányított $(D^2, \mathrm{bd}(D^2)) \subset (P, \mathrm{bd}(P))$ körlemezeknek felelnek meg, melyek generikus fibrumai a $\mathcal{D}_v$ sokaságoknak, ugyanúgy vannak választva, mint az L komponensei. Ezen fibrumok egy 2-sokaságot határoznak meg $P(\Gamma)$-ban, melynek határa pont az L.

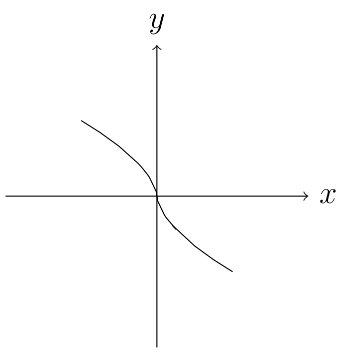
4.4.3. Állítás [[6], 2.3.7.]. *Ha* $0 < \varepsilon \ll 1$, *akkor*

$$\Phi^{-1}(X_{[0,\varepsilon]}) \approx P(\Gamma_f) \text{ és } (L_X, L_{V(f)}) \approx (M(\Gamma_f), L).$$

Ezen állítás alapján azt kapjuk, hogy az (X, o) csíra Γ_X duális rezolúciós gráfja meghatározza az L_X linket, az f függvényhez tartozó Γ_f duális gráf meghatározza az $(L_X, L_{V(f)})$ párt.

4.5. Példák

Tekintsük az $f(x, y) = x^3 + y^5$ polinomot. A $V(f)$ görbének a $(0{,}0) = 0$-ban van csak szingularitása. Meg fogjuk adni egy rezolúcióját, és az ahhoz tartozó rezolúciós gráfot, majd egy általános módszert mutatunk arra, hogy ebből hogyan kapjuk meg az $\tilde{f}(x, y, z) = x^3 + y^5 + z^3$ által definiált 0-beli szingularitás rezolúciós gráfját.



Az $f(x, y) = x^3 + y^5$ rezolúcióját felfújások egymásutánjával kapjuk meg. Egyetlen szinguláris pontja van az f-nek, a $(0{,}0) = 0$. A 4.2.7. Példában már láttuk, hogy a $\mathbb{C}^2$ felfújtja a 0-ban

$$B_0\,\mathbb{C}^2 = \{\big((x, y), [\alpha : \beta]\big) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1 \,:\, x\beta = y\alpha\}.$$

A $\mathbb{CP}^1$ az alábbi két térképpel lefedhető,

$$\mathbb{A}_1 = \{[\alpha : \beta \in \mathbb{CP}^1] \,:\, \alpha \neq 0\},$$
$$\mathbb{A}_2 = \{[\alpha : \beta \in \mathbb{CP}^1] \,:\, \beta \neq 0\}.$$

Ha $z \neq 0$, akkor az $[1 : z] \in \mathbb{A}_1$ pont azonosítva van az $[1/z : 1] \in \mathbb{A}_2$ ponttal. Tehát

$$B_0\,\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{A}_1 \cup \mathbb{C}^2 \times \mathbb{A}_2,$$

és

$$\mathbb{C}^2 \times \mathbb{A}_1 = \{\big((x,y),z\big) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \,:\, xz = y\} \simeq \mathbb{C}^2,$$

és ugyanígy $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{A}_1 \simeq \mathbb{C}^2$. Ha a térképeken a koordináta u, v, akkor azon a rezolúciót a

$$\pi_1 :\; \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\; (u,v) \to (u, uv)$$

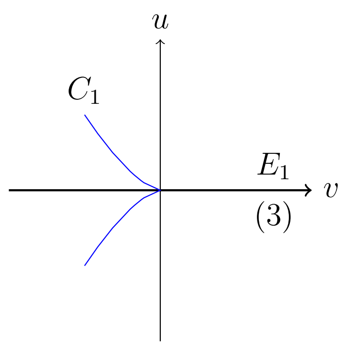
leképezés adja, a második térképen pedig

$$\pi_1 :\; \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\; (u,v) \to (uv, u).$$

Most felfújjuk a $V(f)$ görbét. Az f-ben a legkisebb fokú monom x^3, így az érintő kúp $x = 0$, emiatt a második térképen nézzük a felfújást. Az első fejfújás π_1, a koordináták a térképen u, v. Ekkor $x = uv, y = u$ és

$$\pi_1^* f = u^3 v^3 + u^5 = u^3(u^2 + v^3),$$

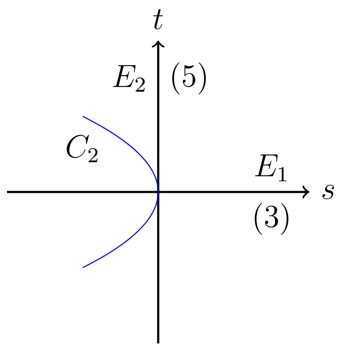
a kivételes halmaz az E_1, ami az $u = 0$ pontokból áll, melynek multiplicitása 3, és $u^2 + v^3$ a szigorú transzformált.



A $C_1 = u^2 + v^3$ szintén szinguláris görbét határoz meg, ezért felfújjuk. Itt u^2 a legkisebb fokú monom, ezért megint a második térképet nézzük. A második felfújás π_2, a koordináták s, t, ekkor $u = st, v = s$.

$$\pi_2^* \pi_1^* f = \pi_{1,2}^* f = s^5 t^3 (s + t^2),$$

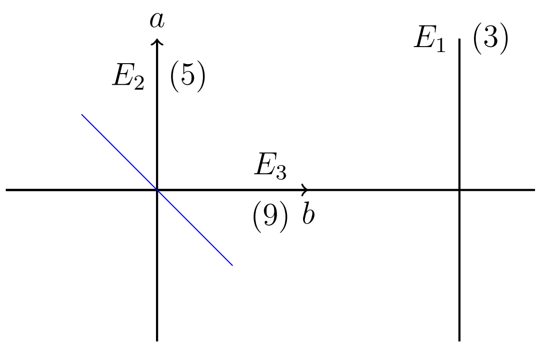
az új kivételes halmaz $E_2 = \{s = 0\}$, aminek a multiplicitása 5, a régi kivételes halmaz $t = 0$, és a szigorú transzformált $s + t^2$.



A felfújást addig folytatjuk, amíg normális metsző divizort nem kapunk. A harmadik felfújás π_3, a koordináták a, b, így $s = ab, t = a$.

$$\pi^*_{1,2,3} f = a^9 b^5 (a + b),$$

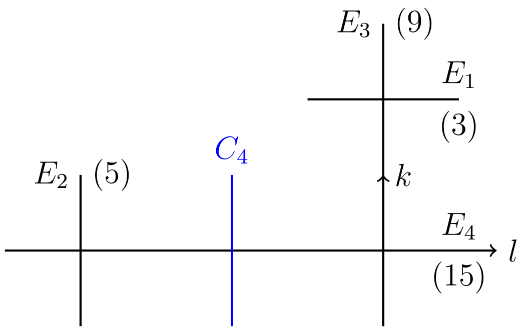
az új kivételes halmaz E_3, ami az $a = 0$ pontokból áll, a multiplicitása 9, az E_2 az $s = 0$ pontokból áll. Az E_1-et nem látjuk ezen a térképen, a szigorú transzformált $a + b$.



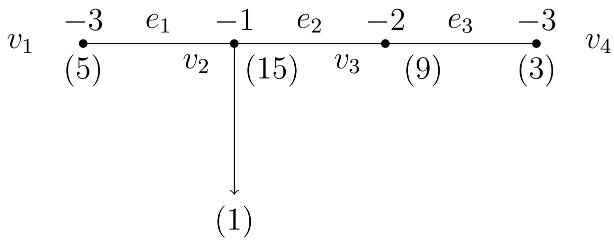
Így még mindig nem normális metsző divizort kapunk, tehát még egyszer felfújjuk, a koordináták legyenek k, l. Ekkor $a = kl$, $b = k$,

$$\pi^*_{1,2,3,4} f = k^{15} l^9 (1 + l),$$

az új E_4 divizor a $k = 0$, multiplicitása 15.



Így kaptunk egy rezolúciót, a rezolúciós gráf:



Ha $\mathcal{V}_w$ jelöli a $w \in \mathcal{V}$ csúcs szomszédait a gráfban, akkor az

$$e_w m_w + \sum_{v \in \mathcal{V}_w} m_v = 0 \tag{4.5.1}$$

képlet alapján ki tudjuk számolni az önmetszéseket, mindegyik génusz 0.

Most legyen $g : (\mathbb{C}^2,0) \to (\mathbb{C},0)$ izolált síkgörbe szingularitás, [[8], Appendix I.] alapján általános algoritmust mutatunk arra, hogy hogyan lehet a g-hez tartozó Γ_g rezolúciós gráfból megkapni az

$$(X,0) = (\{g + z^n = 0\},0) \subset (\mathbb{C}^3,0)$$

hiperfelület szingularitás Γ_X rezolúciós gráfját. A Γ_g csúcsainak halmazát jelölje $\mathcal{V}$.

Legyen $u, v, a \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy a legnagyobb közös osztójuk $\mathrm{lnko}(u, v, a) = 1$. A

$$v + x \cdot \frac{u}{(u,a)} \equiv 0 \left(\frac{a}{(u,a)}\right)$$

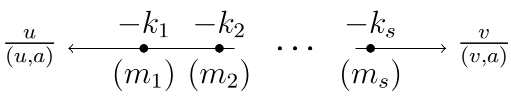
kongruenciának van egy egyértelmű $0 \leq x_1 < a/(u,a)$ megoldása, legyen

$$v + x_1 \frac{u}{(u,a)} = m_1 \cdot \frac{a}{(u,a)}.$$

Ha $x_1 \neq 0$, akkor

$$\frac{a/(u,a)}{x_1} = k_1 - \frac{1}{k_2 - \frac{1}{\cdots - \frac{1}{k_s}}},\ k_1, \ldots, k_s \geq 2.$$

Ekkor $G(u, v, a)$-val a következő gráfot jelöljük:



Az $m_2, \ldots, m_s$ multiplicitásokat a 4.5.1. Képlet alapján számoljuk ki. Ha $x_1 = 0$, akkor a $G(u, v, a)$ csak egy él.

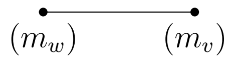
Tetszőleges $w \in \mathcal{V}_w$ csúcsra legyen $s_w = |\mathcal{V}_w|$. Ha $\mathcal{V}_w = \{v_1, \ldots, v_{s_w}\}$, akkor legyen

$$d_w = \mathrm{lnko}(m_w, m_{v_1}, \ldots, m_{v_{s_w}}).$$

A Γ_X gráfot a következőképpen konstruáljuk. Tetszőleges $w \in \mathcal{V}$ csúcs fölé $\operatorname{lnko}(d_w, n)$ darab csúcsot teszünk, mindegyik multiplicitás $m_w/(m_w, n)$ és mindegyik génusz g_w, ahol

$$2 - 2g_w = \frac{(2 - s_w)\operatorname{lnko}(m_w, n) + \sum_{v \in \mathcal{V}_w} \operatorname{lnko}(m_w, m_v, n)}{\operatorname{lnko}(d_w, n)}.$$

Legyen $e = (w, v)$

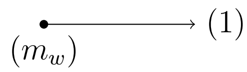


tetszőleges él Γ_g-ben, legyen $d_e = \operatorname{lnko}(m_w, m_v)$. Az e él fölé $\operatorname{lnko}(d_e, n)$ darab

$$G\Big(\frac{m_w}{\operatorname{lnko}(d_e, n)}, \frac{m_v}{\operatorname{lnko}(d_e, n)}, \frac{n}{\operatorname{lnko}(d_e, n)}\Big)$$

gráf kerül, a nyilas csúcsok a $q^{-1}(w)$, illetve $q^{-1}(v)$ csúcsokkal vannak azonosítva.

Egy Γ_g-beli nyilas csúcs fölé



egy $G(m_w,1,n)$ gráfot teszünk, melynek jobb oldali vége nyilas csúcs, 1 multiplicitással, a bal oldali vége pedig a w fölötti csúccsal van azonosítva.

A kapott gráfban a hiányzó önmetszéseket a 4.5.1. Képlet alapján ki tudjuk számolni. A nyilakat és a multiplicitásokat elhagyva az X-nek egy rezolúciós gráfját kapjuk.

Ez alapján az algoritmus alapján kiszámoljuk az $x^3 + y^5 + z^3$ rezolúciós gráfját. A v_1 csúcs fölé $(5,3) = 1$ csúcsot teszünk, melyet $\tilde{v}_1$-mal jelölünk, a multiplicitás $5/\operatorname{lnko}(5,3) = 5$. A v_2 csúcs fölé $(1,3) = 1$ csúcs kerül, $15/\operatorname{lnko}(15,3) = 5$ multiplicitással, $\tilde{v}_2$-mal jelöljük. A v_3 és v_4 csúcsok fölé is $\operatorname{lnko}(3,3) = 3$ csúcs kerül, $\tilde{v}_3^i$, illetve $\tilde{v}_4^i$ $(1 \leq i \leq 3)$. Mindegyik $\tilde{v_3}^i$ csúcshoz tartozó multiplicitás 3 és a $\tilde{v_4}^i$ csúcsokhoz tartozó multiplicitás 1. A génuszok a következők:

$$2 - 2g_{v_1} = \frac{(2-1)\cdot 1 + \operatorname{lnko}(5,15,3)}{\operatorname{lnko}(5,3)} = 2 \implies g_{v_1} = 0,$$

$$2 - 2g_{v_2} = \frac{(2-3)\cdot 3 + \operatorname{lnko}(15,5,3) + \operatorname{lnko}(15,1,3) + \operatorname{lnko}(15,9,3)}{\operatorname{lnko}(1,3)} = 2 \implies g_{v_2} = 0,$$

$$2 - 2g_{v_3} = \frac{(2-2)\cdot 3 + \operatorname{lnko}(9,15,3) + \operatorname{lnko}(9,3,3)}{\operatorname{lnko}(3,3)} = 2 \implies g_{v_3} = 0,$$

$$2 - 2g_{v_4} = \frac{(2-1)\cdot 3 + \operatorname{lnko}(3,9,3)}{\operatorname{lnko}(3,3)} = 2 \implies g_{v_4} = 0,$$

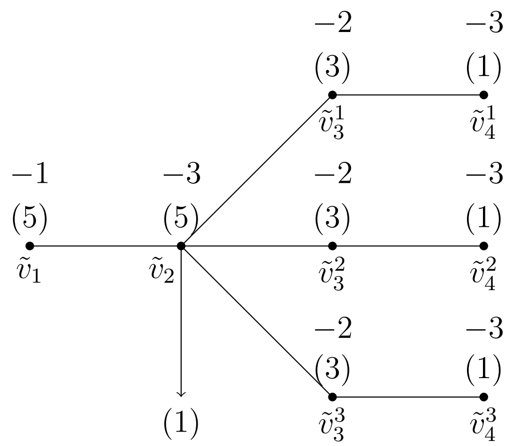
tehát mindegyik génusz 0. Ezután azt számoljuk ki, hogy az élek felett mi lesz.

$$d_{e_1} = \text{lnko}(5{,}15) = 5,\ d_{e_2} = \text{lnko}(15{,}9) = 3,\ d_{e_3} = \text{lnko}(9{,}3) = 3.$$

Tehát az e_1 fölött lnko(5,3) $= 1$ darab $G(5{,}15{,}3)$ gráf van. A

$$15 + 5x \equiv 0\ (3)$$

kongruenciának az $x = 0$ megoldása, tehát $G(5{,}15{,}3)$ egy darab él. Az e_2 fölött lnko(3,3) $= 3$ darab $G(5{,}3{,}1)$ gráf van, az e_3 fölött pedig lnko(3,3) $= 3$ darab $G(3{,}1{,}1)$ típusú gráf van. Mindkét esetben a kongruencia modulusa 1, tehát mindkét esetben a mgeoldás $x_1 = 0$, vagyis itt is éleket kapunk. A nyilas csúcs esetén pedig egy $G(15{,}1{,}3)$ típusú gráfot kapunk, ahol a modulus szintén 1, tehát egy nyilas csúcsot kapunk 1 multiplicitással. Az Euler számokat a 4.5.1. Képlet alapján kiszámolva a Γ_X gráf a következő:



4.6. A rezolúcióhoz tartozó rács

A [[6], 1.1.13.] szakasz alapján leírjuk, hogyan rendelünk rezolúcióhoz egy rácsot. Legyen (X, o) normális felület szingularitás és $\Phi : \tilde{X} \to X$ rögzített rezolúció, valamint $\Gamma = \Gamma_X$ a rezolúciós gráf. Az E kivételes halmaz komponensei E_v $(v \in \mathcal{V})$, a rezolúcióhoz tartozó metszési mátrix I és legyen

$$L = H_2(\tilde{X}, \mathbb{Z}).$$

Tetszőleges $v \in \mathcal{V}$-re az E_v görbék osztályát L-ben szintén E_v-vel jelöljük. Az $\tilde{X}$ és $\cup_{v \in \mathcal{V}} E_v$ terek homotóp ekvivalensek. A Mayer-Vietoris egzakt sort felírva E_v, E_w-re $(v \neq w)$ azt kapjuk, hogy

$$\cdots \to H_2(E_v \cap E_w) \to H_2(E_v) \oplus H_2(E_w) \to H_2(E_v \cup E_w) \to H_1(E_v \cap E_w) \to \ldots .$$

Mivel $H_2(E_v \cap E_w) = H_1(E_v \cap E_w) = 0$, ezért

$$H_2(E_v) \oplus H_2(E_w) \cong H_2(E_v \cup E_w).$$

Emiatt az L-et szabadon generálják az E_v ($v \in \mathcal{V}$) osztályok. Így az L az I metszési mátrixszal együtt rács lesz.

4.6.1. Definíció. Ezt az L rácsot a Φ *rezolúcióhoz tartozó rácsnak* nevezzük.

Legyen $v \in \mathcal{V}$ és $D_v \subset \tilde{X}$ körlemez, mely transzverzális E_v-re egy generikus pontban. Ez a D_v meghatároz egy relatív homológiaosztályt $H_2(\tilde{X}, \mathrm{bd}(\tilde{X}), \mathbb{Z})$-ben, az osztályát szintén D_v-vel jelöljük. Legyen

$$L' = H_2(\tilde{X}, \mathrm{bd}(\tilde{X}), \mathbb{Z}),$$

az L'-t szabadon generálják a D_v osztályok.

Az 2.3. Szakasz alapján létezik egy $j:\ L \to L'$ természetes beágyazás, ami pont a

$$b:\ L \to L^*,\ b(\beta) = (\beta, .)$$

leképezéssel azonosítható. Ennek a j leképezésnek a mátrixa az $\{E_v\}_v$, $\{D_v\}_v$ bázisban pont az I mátrix. Legyen

$$H = L'/L,$$

ekkor $|H| = |\mathrm{coker}(I)| = |\det I|$.

Az I metszetformát ki lehet terjeszteni L-ről $L \otimes \mathbb{Q}$-ra. Az L és L' között lévő nem elfajuló metszetforma miatt az L'-t azonosíthatjuk $\mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z})$-vel. Másfelől a $\mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z})$ azonosítható azon $l' \in L \otimes \mathbb{Q}$ elemekkel, melyekre tetszőleges $l \in L$-re $(l, l')_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}$.

Az effektív osztályokat jelöljük $L'_{\geq 0}$-val, illetve $L_{\geq 0}$-val, azaz

$$L'_{\geq 0} = \{l \in L' \,:\, l = \sum_v r_v E_v,\ r_v \in \mathbb{Q}_{\geq 0}\},$$

és

$$L_{\geq 0} = L'_{\geq 0} \cap L.$$

Ekkor létezik egy természetes részbenrendezés $L \otimes \mathbb{Q}$-n. Ha $l_1, l_2 \in L \otimes \mathbb{Q}$, akkor $l_1 \geq l_2$, pontosan akkor, ha $l_1 - l_2$ effektív. Az $l_1 > l_2$, ha $l_1 \geq l_2$ és $l_1 \neq l_2$. Legyen $\min\{l_1, l_2\}$ az a legnagyobb $l \in L \otimes \mathbb{Q}$, melyre $l_1, l_2 \geq l$. Ha $l' = \sum_v r_v E_v$, akkor a tartója $\cup_{v: r_v \neq 0} E_v$.

A H véges Abel csoport, a Pontrjagin duálisa $\mathrm{Hom}(H, S^1)$, melyet $\hat{H}$-pal jelölünk ([[6], 1.1.14.]). Legyen

$$\theta:\ H \to \hat{H},\ \theta([l']) = e^{2\pi i (l', \cdot)}.$$

Ez egy jóldefiniált leképezés, ugyanis ha $[l'_1] = [l'_2]$, akkor $l'_1 - l'_2 \in L$, és így tetszőleges $l' \in L'$-re $(l'_1 - l'_2, l') \in \mathbb{Z}$, tehát

$$e^{2\pi i (l'_1 - l'_2, l')} = 1.$$

Be lehet látni, hogy ez a θ leképezés izomorfizmus.

Legyen $E_v^* \in L'$ az az elem, melyre $(E_v^*, E_w) = -\delta_{vw}$. Ha az E_v^*-ot az $\{E_v\}_v$ bázisban írjuk fel, akkor a koordinátáit pont a $-I^{-1}$ mátrix megfelelő oszlopa adja, és $(I^{-1})_{vw} = (E_v^*, E_w^*)$.

4.6.2. Definíció [[6], 1.1.15.]. Az

$$\mathcal{S}' = \{l' \in L' \,:\, (l', E_v) \leq 0 \ \forall v \in \mathcal{V}\}$$

kúpot a rezolúcióhoz tartozó *Lipman-kúpnak* nevezzük. Ezt a kúpot $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ fölött generálják az E_v^* vektorok. Legyen $\mathcal{S} = \mathcal{S}' \cap L$, ami szintén egy kúp.

4.6.3. Állítás [[6], 1.1.17.].

1. *Ha $0 \neq l = \sum_v r_v E_v$, ahol $r_v \in \mathbb{Q}$, és $(l, E_v) \leq 0$ minden $v \in \mathcal{V}$-re, akkor $r_v > 0$ minden $v \in \mathcal{V}$-re. Speciálisan az E_v^* felírásában mindegyik együttható szigorúan pozitív.*

2. *Tetszőleges rögzített $l' \in L'$-re a $\{\tilde{l}' \in \mathcal{S}' \,:\, \tilde{l}' \ngeq l'\}$ halmaz véges.*

Bizonyítás. Legyen $l = l_1 - l_2$, ahol l_1 és l_2 effektív és $|l_1|$-nek és $|l_2|$-nek nincs közös komponense. Legyen $l_2 = \sum_v r_v E_v$, és $E_v \subset |l_2|$ rögzített. Mivel

$$0 \geq (l, E_v) = (l_1 - l_2, E_v),$$

és $(l_1, E_v) \geq 0$, ezért $(l_2, E_v) \geq 0$. Emiatt $(l_2, l_2) \geq 0$. Azonban az I negatív definit, ezért $l_2 = 0$, így $l \geq 0$. Mivel az E összefüggő, ezért $|l| = E$, különben létezne egy $v \in \mathcal{V}$, melyre $(l, E_v) > 0$. $\square$

4.7. Többváltozós sorok

Először a $\mathbb{C}\{z_1, z_2\}$ gyűrűhöz tartozó Poincaré polinomot mutatjuk be, a [[6], 7.1A.] alapján tetszőleges $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ modulushoz is lehet definiálni. A $\mathbb{C}\{z_1, z_2\}$ gyűrűn adódik egy természetes gradálás, legyen az $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}$ monom foka $\alpha_1 + \alpha_2$. Legyen

$$A_d = \mathbb{C}\langle \{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \,:\, \alpha_1 + \alpha_2 = d\} \rangle,$$

ekkor

$$\mathbb{C}\{z_1, z_2\} = \bigoplus_{d \geq 0} A_d.$$

A hozzá tartozó Poincaré sor:

$$P(\mathbb{C}\{z_1, z_2\}; \mathbf{t}) = \sum_{d \geq 0} \dim(A_d) \cdot \mathbf{t}^d.$$

Legyen H véges Abel-csoport, mely hat a $\mathbb{C}^2$-en. Ekkor a H hat a $\mathbb{C}\{z_1, z_2\}$ gyűrűn is, ha $\chi \in \hat{H}$, akkor legyen $h * z_j = \chi(h) z_j$ minden j-re. Ez a hatás megőrzi a gradálást. Tetszőleges $\chi \in H$-ra legyen $\mathbb{C}\{z_1, z_2\}^\chi$ a χ-sajátaltér. Ezen természetes indukálódik egy gradálás, vagyis

$$\mathbb{C}\{z_1, z_2\}^\chi = \bigoplus_{d \geq 0} (\mathbb{C}\{z_1, z_2\}^\chi)_d.$$

Ekkor

$$P(\mathbb{C}\{z_1,z_2\}^\chi;\mathbf{t})=\sum_{d\geq 0}\dim(\mathbb{C}\{z_1,z_2\}^\chi)_d\mathbf{t}^d,$$

és legyen

$$P^{\hat{H}}(\mathbb{C}\{z_1,z_2\};\mathbf{t})=\sum_{\chi\in\hat{H}}\sum_{d\geq 0}\dim(\mathbb{C}\{z_1,z_2\}^\chi)_d\mathbf{t}^d\chi\in\mathbb{C}[[\mathbb{Z}]][\hat{H}].$$

Most pedig topologikus Zeta sorról lesz szó. A 4.6. Szakaszban bemutatott jelöléseket fogjuk használni, (X,o) normális felület szingularitás, és

$$\Phi:\ (\tilde{X},E)\to(X,o)$$

rögzített rezolúció, ahol E a kivételes halmaz. Az E irreducibilis komponenseit jelölje $E_1,\dots,E_s$, ahol az s a rezolúciós gráf csúcsainak száma. A [[6], 7.2.2.] szakasz alapján jelölje

$$\mathbb{Z}[[\mathbf{t}]]=\mathbb{Z}[[t_1,\dots,t_s]]$$

a $t_1,\dots,t_s$-változós formális hatványsorok gyűrűjét. Ekkor

$$\mathbb{Z}[[\mathbf{t}^{\pm1}]]=\mathbb{Z}[[t_1^{\pm1},\dots,t_s^{\pm1}]]$$

egy $\mathbb{Z}[[\mathbf{t}]]$-modulus. Legyen $d=|H|$.

$$\mathbb{Z}[[\mathbf{t}^{\pm1/d}]]=\mathbb{Z}[[t_1^{\pm1/d},\dots,t_s^{\pm1/d}]]$$

szintén egy $\mathbb{Z}[[\mathbf{t}]]$-modulus, melynek $\mathbb{Z}[[\mathbf{t}^{\pm1}]]$ részmodulusa.

4.7.1. Definíció. A $\mathbb{Z}[[L']]$ egy $\mathbb{Z}[[\mathbf{t}]]$-modulus, mely a

$$\mathbf{t}^{l'}=t_1^{l'_1}\dots t_s^{l'_s}$$

típusú monomok $\mathbb{Z}$-lineáris kombinációiból áll, ahol $l'=\sum_{i=1}^s l'_iE_i\in L'$. Ez részmodulusa $\mathbb{Z}[[\mathbf{t}^{\pm1/d}]]$-nek. A $\mathbb{Z}[[L']]$ a $\mathbb{Z}[[\mathbf{t}]][t_1^{-1},\dots t_s^{-1}]$ gyűrű fölött is modulus.

A $\mathbb{Z}[[L']]$ modulusnak több részmodulusát is lehet definiálni. Például $\mathbb{Z}[[L'_{\geq 0}]]$, amit azon $\mathbf{t}^{l'}$ monomok generálnak, ahol $l'\in L'_{\geq 0}$, vagy $\mathbb{Z}[[\mathcal{S}']]$, melynek a $\mathbf{t}^{l'}$, $l'\in\mathcal{S}'$ monomok a generátorai. Ez a modulus egyben formális hatványsorok gyűrűje a $\mathbf{t}^{E_v^*}$ változókban, az elemei

$$\Phi(f)(\mathbf{t})=f(\mathbf{t}^{E_1^*},\dots,\mathbf{t}^{E_s^*}),$$

ahol $f(x_1,\dots,x_s)\in\mathbb{Z}[[\mathbf{x}]]=\mathbb{Z}[[x_1,\dots,x_s]]$.

4.7.2. Definíció [[6], 7.2.4.]. Tetszőleges

$$S(\mathbf{t})=\sum_{l'}a_{l'}\mathbf{t}^{l'}\in\mathbb{Z}[L']$$

sor egyértelműen felbomlik $S=\sum_{h\in H}S_h$ alakba, ahol

$$S_h=\sum_{[l']=H}a_{l'}\mathbf{t}^{l'}.$$

Az S_h sort az S *h-komponensének* hívjuk.

4.7.3. Lemma [[6], 7.2.6.]. *Legyen $f \in \mathbb{Z}[[\mathbf{x}]]$, és $F(\mathbf{t}) = \Phi(f)(\mathbf{t})$. Ekkor*

$$F_h(\mathbf{t}) = \frac{1}{|H|}\sum_{\rho \in \hat{H}} \rho(h)^{-1} \cdot f(\rho([E_1^*])\mathbf{t}^{E_1^*}, \ldots, \rho([E_s^*])\mathbf{t}^{E_s^*}).$$

Bizonyítás. Legyen $\prod_{i=1}^n x_i^{n_i}$ az f egy monomja. Ekkor

$$\frac{1}{|H|}\sum_{\rho \in \hat{H}} \rho(h)^{-1} \cdot \prod_{i=1}^n x_i^{n_i}(\rho([E_1^*])\mathbf{t}^{E_1^*}, \ldots, \rho([E_s^*])\mathbf{t}^{E_s^*}) =$$

$$= \frac{1}{|H|}\sum_{\rho \in \hat{H}} \rho(h)^{-1} \cdot (\rho([E_1^*])\mathbf{t}^{E_1^*})^{n_1} \cdot \ldots \cdot (\rho([E_s^*])\mathbf{t}^{E_s^*})^{n_s}.$$

Mivel $\rho \in \operatorname{Hom}(H, S^1)$, ezért $\rho([E_i^*])^{n_i} = \rho(n_i[E_i^*])$. Legyen $l' = \sum_{i=1}^s n_i[E_i^*]$. Így a fenti szumma a következő alakra hozható:

$$\frac{1}{|H|}\sum_{\rho \in \hat{H}} \rho(h)^{-1} \cdot \rho([l'])\mathbf{t}^{l'}.$$

Ha $[l'] = h$, akkor $\rho(h)^{-1} \cdot \rho([l']) = \rho([l'] - h) = \rho(0) = 1$. Mivel H és $\hat{H}$ izomorfak, ezért $|\hat{H}| = d$, tehát ebben az esetben

$$\frac{1}{|H|}\sum_{\rho \in \hat{H}} \rho(h)^{-1} \cdot \rho([l'])\mathbf{t}^{l'} = \frac{1}{d} \cdot d \cdot \mathbf{t}^{l'} = \mathbf{t}^{l'}.$$

Ha pedig $[l'] \neq h$, akkor

$$\sum_{\rho \in \hat{H}} \rho(-h)\rho([l']) = 0.$$

Vagyis azt kapjuk, hogy az

$$\frac{1}{|H|}\sum_{\rho \in \hat{H}} \rho(h)^{-1} \cdot f(\rho([E_1^*])\mathbf{t}^{E_1^*}, \ldots, \rho([E_s^*])\mathbf{t}^{E_s^*})$$

szummában pontosan azok a tagok maradnak meg, ahol $[l'] = h$. $\square$

Mostantól feltesszük, hogy olyan Φ rezolúciót vizsgálunk, ahol az E kivételes halmaz mindegyik E_i irreducibilis komponensére $E_i \simeq \mathbb{P}^1$. A [[6], 7.2.70.] alapján definiálni fogunk egy sort $\mathbb{Z}[[\mathcal{S}']]$-ben. Legyen $v \in \mathcal{V}$ tetszőleges csúcsa a rezolúciós gráfnak, emlékeztetünk, hogy δ_v jelölte a v csúcs fokát a gráfban. Legyen

$$z(\mathbf{x}) = \prod_{v \in \mathcal{V}} (1 - x_v)^{\delta_v - 2},$$

és legyen $Z(t) = \Phi(z)(\mathbf{t})$, vagyis

$$Z(\mathbf{t}) = \prod_{v \in \mathcal{V}} (1 - \mathbf{t}^{E_v^*})^{\delta_v - 2}.$$

A 4.7.3. Lemma alapján ennek a h-komponense

$$Z_h(\mathbf{t}) = \frac{1}{|H|}\sum_{\rho\in\hat{H}} \rho(h)^{-1} \cdot \prod_{v\in\mathcal{V}} (1-\rho([E_v^*])\mathbf{t}^{E_v^*})^{\delta_v - 2}.$$

Ez motiválja Zeta-sor H-ekvivariáns verzióját, legyen

$$Z^H(\mathbf{t}) = \prod_{v\in\mathcal{V}} (1-[E_v^*]\mathbf{t}^{E_v^*})^{\delta_v-2} \in \mathbb{Z}[[t]][H].$$

4.7.4. Definíció [[6], 244. o.]. Legyen Σ egy topologikus tér, $n \geq 1$. A Σ^n téren van az S_n szimmetrikus csoportnak egy természetes hatása, tetszőleges $g \in S_n$ és $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma^n$-re legyen

$$g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = (\sigma_{g(1)}, \ldots, \sigma_{g(n)}).$$

A Σ tér *n-edik szimmetrikus hatványa* az S_n-hatás pályáinak tere, vagyis Σ^n/S_n és $S^n\Sigma$-val jelöljük. Ha $n = 0$, akkor megállapodás szerint $S^0\Sigma$ egy pont.

Tetszőleges T topologikus térre jelölje $\chi_{\text{top}}(T)$ az Euler karakterisztikáját. A Macdonald formula szerint

$$\sum_{n\geq 0} \chi_{\text{top}}(S^n\Sigma)x^n = (1-x)^{-\chi_{\text{top}}(\Sigma)}.$$

(Ez a [[18]] könyvben megtalálható.) Legyen $E_v^\circ = E_v - (\cup_{u\neq v} E_u)$. Be lehet látni, hogy $\chi_{\text{top}}(E_v^\circ) = 2 - \delta_v$. Így rögtön adódik a következő állítás.

4.7.5. Állítás [[6], 7.2.74.]. *Legyen* $\mathbf{x}^a = x_1^{a_1} \ldots x_s^{a_s}$, *ekkor*

$$z(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{a_i\geq 0} \chi_{top}(S^{a_i}E_v^\circ)x_i^{a_i} = \sum_{\mathbf{a}\geq 0} \prod_{i=1}^{n} \chi_{top}(S^{a_i}E_v^\circ)\mathbf{x}^a.$$

Most mutatunk egy példát arra, hogyan kapcsolódik össze a két definiált sor. Tekintsük a $(\mathbb{C}^2,0)$ csírát. Ezen természetesen hat a $\mathbb{Z}_n = \{\xi \in \mathbb{C} : \xi^n = 0\}$ csoport, legyen

$$\xi * (z_1, z_2) = (\xi z_1, \xi z_2).$$

Ez szabad hatás $\mathbb{C}^2 - 0$-n, minden orbit elemszáma n. Az orbitok terét X-szel jelöljük. Így kapunk egy

$$(\mathbb{C}^2,0) \to (X,0)$$

leképezést, az origó izolált szingularitás, és ez a leképezés $X - 0$ fölött egy

$$\mathbb{C}^2 - 0 \to X - 0$$

reguláris fedés. Ebből egyrészt azt kapjuk, hogy a $(\mathbb{C}^2,0)$-hoz tartozó S^3 link $\mathbb{Z}_n$ fedése az $(X,0)$-hoz tartozó K linknek. Mivel $\pi_1(S^3) = 1$, ezért

$$\pi_1(K) = H_1(K) = \mathbb{Z}_n\,.$$

A $P = P(\Gamma)$ és $\mathrm{bd}(P) = M(\Gamma) = K$ párhoz tartozó egzakt sort felírva:

$$\dots \to H_2(P) \to H_2(P,K) \to H_1(K) \to H_1(P) \to \dots$$

Mivel P homotópiatípusa megegyezik az S^2 homotópiatípusával, ezért $H_1(P) = 0$, és így $H \cong H_1(K)$.

Másrészt természetesen adódik egy

$$\mathcal{O}_{X,0} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$$

leképezés. Itt $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} = \mathbb{C}\{z_1, z_2\}$, és $\mathcal{O}_{X,0}$ a $\mathbb{C}\{z_1, z_2\}$ gyűrű $\mathbb{Z}_n$-invariáns része, melyet $\mathbb{C}\{z_1, z_2\}^{\mathbb{Z}_n}$-nel jelölünk, és generálják a $z_1^n, z_1^{n-1}z_2, \dots, z_1 z_2^{n-1}, z_2^n$ monomok. Legyen

$$u_0 = z_1^n, u_1 = z_1^{n-1}z_2, \dots, u_n = z_2^n,$$

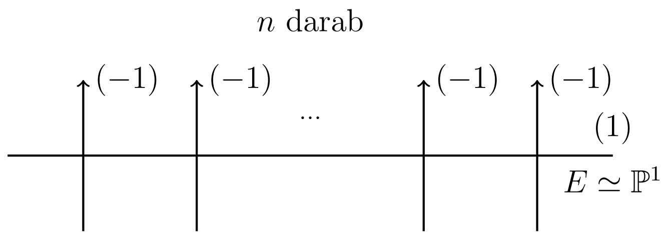
ezzel a jelöléssel

$$\mathbb{C}\{z_1, z_2\}^{\mathbb{Z}_n} = \mathbb{C}\{u_0, \dots, u_n \, : \, \mathrm{rk} \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_{n-1} \\ u_0 & u_1 & \dots & u_{n-1} \end{bmatrix} \le 1\}.$$

A $V_{1,n} : \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ Veronese beágyazást a

$$[z_1 : z_2] \to [z_1^n : z_1^{n-1}z_2 : \dots : z_2^n]$$

képlet adja. Így az $(X,0)$ csíra pont az $\mathrm{Im}\, V_{1,n}$ feletti affin 0 csúcsú kúp. Ezt az origóban felfújva:



a rezolúciós gráf

$$\overset{-n}{\bullet}$$

Ekkor $E^* = (1/n)E$, a csúcs foka 0, $L' = \mathbb{Z}\langle E\rangle$ és $L' = \mathbb{Z}\langle (1/n)E\rangle$. Így az E-t 1-gyel, és $[E^*]$-ot $[1/n] \in \mathbb{Z}_n$-nel azonosítva azt kapjuk, hogy

$$Z^H(t) = \frac{1}{(1 - [E^*]t^{1/n})^2} = \frac{1}{(1 - [1/n]t^{1/n})^2}.$$

A $H = \mathbb{Z}_n$ véges Abel csoport, a $\hat{H}$ csoport izomorf $H = \mathbb{Z}_n$-nel, a generátora legyen χ, ez a Pontrjagin dualitás alapján pont $\xi \in H$-nak felel meg. Mivel $(\xi z_1)^{\alpha_1}(\xi z_2)^{\alpha_2} = \xi^{\alpha_1+\alpha_2} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}$, ezért ha $k \not\equiv d \bmod(n)$, akkor

$$(\mathbb{C}\{z_1, z_2\}^{\chi^k})_d = 0,$$

különben
$$(\mathbb{C}\{z_1, z_2\}^{\chi^k})_d = (\mathbb{C}\{z_1, z_2\})_d = A_d.$$
Mivel $\dim A_d = d + 1$, ezért
$$P_A^{\hat{H}}(t) = \sum_{d \geq 0} (d+1) t^d \chi^d = \frac{1}{(1-\chi t)^2}.$$
Tehát a $t \leftrightarrow t^{1/n}$ és $[E^*] \leftrightarrow \chi$ megfeleltetések után azt kapjuk, hogy a két sor ugyanaz.

5. Irodalom

[1] John W. Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces.* Annals of mathematics studies, No. 61, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1968.

[2] John W. Milnor. *Morse theory.* Princeton University Press, 1969.

[3] M.A. Kervaire, John W. Milnor. *Groups of homotopy spheres: I.* Annals of mathematics, Vol. 77, No. 3, 1963.

[4] H. Whitney. *Elementary structure of real algebraic varieties.* Annals of mathematics, Vol. 66, No. 3, 1957.

[5] Paul Joubert. *The topology of isolated singularities on complex hypersurfaces.* Universiteit Leiden, Masters thesis, 2007.

[6] A. Némethi, *Normal surface singularities.* (előkészületben levő könyv)

[7] A. Némethi, *Some topological invariants of isolated hypersurface singularities.* EMS Summer School - Eger (Hungary), 29 July - 9 August, 1996.

[8] A. Némethi, *Five lectures on normal surface singularities.*

[9] Ludger Kaup, Burchard Kaup, *Holomorphic functions od several complex variables.* Degruyter Studies in Mathematics, 1983.

[10] J.P. Demailly, *Complex anality and differential geometry.* online jegyzet, www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf

[11] H. Grauert, T. Peternell, R. Remmert, *Several COmplex Variables VII.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 74, 1994.

[12] John F. Nash, *Real algebraic mainfolds.* Annals of mathematics, Vol. 56, No. 3, 1952.

[13] R. Hartshorne *Algebraic geometry.* Graduate texts in mathematics, No. 52, Springer, 1977.

[14] M.F.Atiyah, I.G.Macdonald, *Introduction to Commutative algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[15] Allen Hatcher, *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2001.

[16] Kiss W. Emil, *Bevezetés az algebrába.* TypoTEX Kiadó, 2007.

[17] Szűcs András, *Topológia.* Internetes jegyzet.

[18] I.G. Macdonald, *The Poincare Polynomial of a Symmetric Product.* Cambridge Philosophical Society, Vol 58. Issue 4, pp. 563-568, 1962.