Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi kar

Csernák Tamás

Analízis magasabb kofinalitású rendezett testekben

Matematikus MSc

Diplomamunka

Témavezető: Komjáth Péter, egyetemi tanár

Budapest, 2019

Bevezető

Még elsőéves alapszakos hallgató koromban, az első néhány analízis előadás valamelyikén megismerkedtem a valós számok axiómarendszerével. Ezeknek az egyik fele a rendezett testek általános axiómái, de ami a rendezett testek közül kiemeli $\mathbb{R}$-et az az archimédeszi axióma és a Cantor-axióma. Láttunk arra is egyszerű példát (mint $\mathbb{Q}$), ahol a Cantor-axióma nem teljesül, de az archimédeszi axióma igen. Ekkor vetődött fel bennem a kérdés, hogy lehet-e esetleg fordítva, mi van ha az archimédeszi axiómát nem tesszük fel? Később megismerkedtem a halmazelméletben a kofinalitás fogalmával, és így az a kérdés is felvetődött, hogy mi a helyzet akkor, ha egy rendezett testben nincs is megszámlálható kofinális halmaz.

A valós számokon ez a két axióma helyettesíthető mással is. Ezek közül néhány magában foglalja az igényt, hogy a rendezett test megszámlálható kofinalitású legyen (például hogy minden korlátos monoton sorozat konvergens, minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata), de vannak olyan tiszta ekvivalens megfogalmazások is, amelyek nem használják ω-t (például a legkisebb felső korlát tétele).

A dolgozat során megpróbálom a valós analízis fogalmait általánosítani olyan rendezett testekre, amelyek kofinalitása nem megszámlálható. Ekkor néhány dolgot persze át kell fogalmazni, például a sorozatokat rendszámokkal indexelem a természetes számok helyett. A valós analízis tételeit próbálom általánosabban megfogalmazni és megvizsgálni, hogy milyen feltételek mellett teljesülnek. A dolgozatot leginkább feltáró kutatásként jellemezném. Számos új fogalmat hoztam létre, vagy meglévőket új kontextusba helyeztem. Több témát is kifejtettem, de persze még rengeteg további alfejezet téma lehetne, amellyel tovább lehetne foglalkozni.

A dolgozat nagy része teljesen saját munka, csak néhány, a témához kevésbé szorosan kapcsolódó kérdésben használtam hivatkozást. A dolgozat írása során többször futottam bele olyan esetbe, hogy a szemléletesen nagyon szépnek tűnő állítások valójában nem igazak, ezért igyekeztem a lehető legrészletesebben leírni mindazt amit sikerült megoldanom. A téma a matematika több területét is érinti. A klasszikus analízis mellett sokszor használom a halmazelmélet vagy éppen az algebra fogalmait és tételeit.

Tartalomjegyzék

1. Rendezett testek

1.1. Definíció: *A* $(K, +, \cdot, <)$ *rendezett test, ha* $(K, +, \cdot)$ *test,* $(K, <)$ *rendezett halmaz, és a rendezés és műveletek kapcsolatára a következő tulajdonságok teljesülnek:*

1. $\forall a, b, c \in K: a < b \to a + c < b + c$

2. $\forall a, b \in K: a, b > 0 \to a \cdot b > 0$

1.2. Állítás: *Rendezett testben az alábbi egyenlőtlenségek teljesülnek:*

a) $\forall a \in K: a^2 \geq 0$ *és* 0 *pontosan akkor ha* $a = 0$

b) Ha $a \leq b$*, akkor* $-b \leq -a$

c) Ha $0 < a \leq b$*, akkor* $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

d) Ha $a < b$*, akkor* $a < \frac{a+b}{2} < b$

Ezek a rendezett test definíciójából nyilván következnek.

1.3. Definíció: *Ha* K *rendezett test,* $x \in K$*, akkor* $|x| = \begin{cases} x, \text{ ha } x \geq 0 \\ -x, \text{ ha } x < 0 \end{cases}$ *az* x *abszolútértékének nevezzük*

1.4. Állítás: *Ha* K *rendezett test, akkor az abszolútérték teljesíti az alábbi azonosságokat:*

a) $\forall a \in K: |a| \geq 0$ *és* 0 *pontosan akkor ha* $a = 0$

b) $\forall a, b \in K: |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

c) Háromszög egyenlőtlenség: $\forall a, b \in K: |a + b| \leq |a| + |b|$

Ezek is könnyen beláthatók a definíciókból.

2. Konvergens sorozatok és Cauchy sorozatok

2.1. Definíció: *Legyen K rendezett test, κ számosság. Ekkor egy K-beli κ sorozatnak nevezünk egy $a: \kappa \to K$ függvényt. A sorozat elemeire az alsó indexes jelölést használjuk: $a_\alpha = a(\alpha)$, a sorozatot pedig $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$-val jelöljük.*

2.2. Definíció: *Legyen $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ K-beli κ sorozat, λ számosság és $\xi < \lambda$-ra $\alpha_\xi < \kappa$ úgy, hogy az α_ξ rendszámok szigorúan monoton növő sorozatot alkotnak κ-ban. Ekkor az $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\lambda}$-t az $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ sorozat λ részsorozatának nevezzük. A részsorozat kofinális, ha $\{\alpha_\xi: \xi < \lambda\}$ kofinális κ-ban*

2.3. Definíció: *Legyen $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ K-beli κ sorozat, $a \in K$, akkor $a_\alpha \to a$ (azaz a sorozat tart a-hoz), ha $\forall\varepsilon > 0, \exists\beta < \kappa, \forall\alpha \geq \beta: |a_\alpha - a| < \varepsilon$. Az $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ sorozat konvergens, ha $\exists a \in K, a_\alpha \to a$.*

2.4. Állítás: *Ha $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ K-beli κ sorozat, $a_\alpha \to a$ és $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\lambda}$ kofinális rézsorozata, akkor $a_{\alpha_\xi} \to a$.*

Bizonyítás: Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t. Mivel $a_\alpha \to a$, ezért $\exists\beta < \kappa, \forall\alpha \geq \beta: |a_\alpha - a| < \varepsilon$. Mivel kofinális részsorozat, ezért $\exists\eta < \lambda$, hogy $\alpha_\eta \geq \beta$. Ekkor ha $\xi \geq \eta$, akkor a monotonitás miatt $\alpha_\xi \geq \alpha_\eta \geq \beta$, ezért $\left|a_{\alpha_\xi} - a\right| < \varepsilon$, vagyis az η megfelelő küszöbindex ε-hoz.

2.5. Állítás: *Ha $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ K-beli κ sorozat, akkor csak egy határértéke lehet, azaz $a_\alpha \to a, a_\alpha \to b$, akkor $a = b$.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy nem egyenlők, szimmetria miatt feltehető, hogy $a < b$. Ekkor $\exists\beta_1 < \kappa, \forall\alpha \geq \beta_1: |a_\alpha - a| < \frac{b-a}{2}$ és $\exists\beta_2 < \kappa, \forall\alpha \geq \beta_2: |a_\alpha - b| < \frac{b-a}{2}$. Legyen $\alpha \geq \beta_1, \beta_2$ tetszőleges. Ekkor $|b - a| \leq |a_\alpha - a| + |a_\alpha - b| < \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2} = b - a$, ami nyilván ellentmondás.

2.6. Állítás: *Ha $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ és $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ sorozatok, melyre $a_\alpha \to a, b_\alpha \to b$, akkor $a_\alpha + b_\alpha \to a + b$.*

Bizonyítás: Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t. Ekkor $\exists \beta_1 < \kappa, \forall \alpha \geq \beta_1 \colon |a_\alpha - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\exists \beta_2 < \kappa, \forall \alpha \geq \beta_2 \colon |b_\alpha - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $\beta = \max(\beta_1, \beta_2)$. Ez jó küszöbindex, ugyanis, ha $\alpha \geq \beta$, akkor $\alpha \geq \beta_1, \beta_2$, $|a_\alpha - a|, |b_\alpha - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, tehát $|a_\alpha + b_\alpha - a - b| \leq |a_\alpha - a| + |b_\alpha - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

2.7. Állítás: *Ha $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ és $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ sorozatok, melyre $a_\alpha \to a, b_\alpha \to b$, akkor $a_\alpha b_\alpha \to ab$.*

Bizonyítás: Először alkalmazzuk a feltételt $\varepsilon = 1$-re, így $\exists \beta_{01} < \kappa, \forall \alpha \geq \beta_{01} \colon |a_\alpha - a| < 1$ és $\exists \beta_{02} < \kappa, \forall \alpha \geq \beta_{02} \colon |b_\alpha - b| < 1$. Legyen $\beta_0 = \max(\beta_{01}, \beta_{02})$.

Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t. Ekkor $\exists \beta_1 < \kappa, \beta_1 > \beta_0, \forall \alpha \geq \beta_1 \colon |a_\alpha - a| < \frac{\varepsilon}{|a|+|b|+1}$ és $\exists \beta_2 < \kappa, \beta_2 > \beta_0, \forall \alpha \geq \beta_2 \colon |b_\alpha - b| < \frac{\varepsilon}{|a|+|b|+1}$. Legyen $\beta = \max(\beta_1, \beta_2)$. Ez jó küszöbindex, ugyanis, ha $\alpha \geq \beta$, akkor $\alpha \geq \beta_1, \beta_2$, $|a_\alpha - a|, |b_\alpha - b| < \frac{\varepsilon}{|a|+|b|+1}$, tehát

$$|a_\alpha b_\alpha - ab| = |(a_\alpha - a)b + (b_\alpha - b)a + (a_\alpha - a)(b_\alpha - b)| \leq$$
$$\leq |a_\alpha - a||b| + |b_\alpha - b||a| + |a_\alpha - a||b_\alpha - b|$$
$$< \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1}|a| + \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1}|b| + \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1} \cdot 1 = \varepsilon$$

2.8. Állítás: *Ha $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ sorozat, melyre $a_\alpha \to a$, és $c \in K$, akkor $ca_\alpha \to ca$.*

Bizonyítás: Alkalmazzuk a 2.7. állítást $b_\alpha = c$-re.

2.9. Állítás: *Ha $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ és $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ sorozatok, melyre $a_\alpha \to a, b_\alpha \to b$, akkor $a_\alpha - b_\alpha \to a - b$.*

Bizonyítás: A 2.8. állítást $c = -1$-re alkalmazva $-b_\alpha \to -b$, így a 2.6. állítás alapján $a_\alpha - b_\alpha = a_\alpha + (-b_\alpha) \to a + (-b) = a - b$.

2.10. Állítás: *Ha $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ sorozat $a_\alpha \to a \neq 0$, akkor $\exists \beta_0 < \kappa, \alpha \geq \beta_0, a_\alpha \neq 0$ és $\frac{1}{a_\alpha} \to \frac{1}{a}$.*

Bizonyítás: A konvergencia definíciója szerint $\exists \beta_0 < \kappa, \alpha \geq \beta_0, |a_\alpha - a| < \frac{|a|}{2}$, ekkor nyilván $a_\alpha \neq 0$, tehát a reciprok sorozat egy bizonyos indextől felfelé értelmes. Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t. Ekkor $\exists \beta < \kappa, \beta > \beta_0, \forall \alpha \geq \beta \colon |a_\alpha - a| < \frac{\varepsilon|a|^2}{2}$. Ekkor, ha $\alpha \geq \beta$, akkor $\left|\frac{1}{a_\alpha} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_\alpha}{a a_\alpha}\right| < \frac{\frac{\varepsilon|a|^2}{2}}{\frac{|a|^2}{2}} = \varepsilon$.

2.11. Állítás: *Ha* $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *és* $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *sorozatok, melyre* $a_\alpha \to a, b_\alpha \to b \neq 0$, *akkor* $\exists \beta_0 < \kappa, \alpha \geq \beta_0, b_\alpha \neq 0$ *és* $\frac{a_\alpha}{b_\alpha} \to \frac{a}{b}$.

Bizonyítás: A 2.10. állítás alapján teljesül a fenti feltétel és $\frac{1}{b_\alpha} \to \frac{1}{b}$, így már csak a 2.7. állítást kell alkalmazni.

2.12. Definíció: *Az* $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *K-beli* κ *sorozat Cauchy, ha* $\forall \varepsilon > 0, \exists \beta < \kappa, \forall \alpha, \gamma \geq \beta: |a_\alpha - a_\gamma| < \varepsilon$.

2.13. Állítás: *Ha* $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *K-beli* κ *sorozat Cauchy és* $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\lambda}$ *kofinális rézsorozata, akkor* a_{α_ξ} *is Cauchy.*

Bizonyítás: Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t. Mivel a_α Cauchy, ezért $\exists \beta < \kappa, \forall \alpha, \gamma \geq \beta: |a_\alpha - a_\gamma| < \varepsilon$. Mivel kofinális részsorozat, ezért $\exists \eta < \lambda$, hogy $\alpha_\eta \geq \beta$. Ekkor ha $\xi, \zeta \geq \eta$, akkor a monotonitás miatt $\alpha_\xi, \alpha_\zeta \geq \alpha_\eta \geq \beta$, ezért $\left|a_{\alpha_\xi} - a_{\alpha_\zeta}\right| < \varepsilon$, vagyis az η megfelelő küszöbindex ε-hoz.

2.14. Állítás: *Ha* $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *és* $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *Cauchy sorozatok, , akkor* $a_\alpha + b_\alpha$ *is Cauchy.*

Bizonyítás: Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t. Ekkor $\exists \beta_1 < \kappa, \forall \alpha, \gamma \geq \beta_1: |a_\alpha - a_\gamma| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\exists \beta_2 < \kappa, \forall \alpha, \gamma \geq \beta_2: |b_\alpha - b_\gamma| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $\beta = \max(\beta_1, \beta_2)$. Ez jó küszöbindex, ugyanis, ha $\alpha, \gamma \geq \beta$, akkor $\alpha, \gamma \geq \beta_1, \beta_2$, $|a_\alpha - a_\gamma|, |b_\alpha - b_\gamma| < \frac{\varepsilon}{2}$, tehát $|a_\alpha + b_\alpha - a_\gamma - b_\gamma| \leq |a_\alpha - a_\gamma| + |b_\alpha - b_\gamma| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

2.15. Állítás: *Ha* $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *és* $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *Cauchy sorozatok, akkor* $a_\alpha b_\alpha$ *is Cauchy.*

Bizonyítás: Először alkalmazzuk a feltételt $\varepsilon = 1$-re, így $\exists \beta_{01} < \kappa, \forall \alpha, \gamma \geq \beta_{01}: |a_\alpha - a_\gamma| < 1$, tehát jelesül $|a_\alpha - a_{\beta_{01}}| < 1$, így $|a_\alpha| \leq |a_{\beta_{01}}| + 1$ és $\exists \beta_{02} < \kappa, \forall \alpha, \gamma \geq \beta_{02}: |b_\alpha - b_\gamma| < 1$, tehát jelesül $|b_\gamma - b_{\beta_{02}}| < 1$, így $|b_\gamma| \leq |b_{\beta_{02}}| + 1$ és. Legyen $\beta_0 = \max(\beta_{01}, \beta_{02})$.

Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t. Ekkor $\exists \beta_1 < \kappa, \beta_1 > \beta_0, \forall \alpha, \gamma \geq \beta_1: |a_\alpha - a_\gamma| < \frac{\varepsilon}{|a_{\beta_{01}}+1| + |b_{\beta_{02}}+1|}$ és $\exists \beta_2 < \kappa, \beta_2 > \beta_0, \forall \alpha, \gamma \geq \beta_2: |b_\alpha - b_\gamma| < \frac{\varepsilon}{|a_{\beta_{01}}+1| + |b_{\beta_{02}}+1|}$. Legyen $\beta = \max(\beta_1, \beta_2)$. Ez jó küszöbindex, ugyanis, ha $\alpha, \gamma \geq \beta$, akkor $\alpha, \gamma \geq \beta_1, \beta_2$, $|a_\alpha - a_\gamma|, |b_\alpha - b_\gamma| < \frac{\varepsilon}{|a_{\beta_{01}}+1|+|b_{\beta_{02}}+1|}$, tehát

$$|a_\alpha b_\alpha - a_\gamma b_\gamma| = |(a_\alpha - a_\gamma)b_\gamma + (b_\alpha - b_\gamma)a_\alpha| \leq |a_\alpha - a_\gamma||b_\gamma| + |b_\alpha - b_\gamma||a_\alpha| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{|a_{\beta_{01}} + 1| + |b_{\beta_{02}} + 1|}|b_{\beta_{02}} + 1| + \frac{\varepsilon}{|a_{\beta_{01}} + 1| + |b_{\beta_{02}} + 1|}|a_{\beta_{01}} + 1| = \varepsilon$$

2.16. Állítás: *Ha $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ Cauchy sorozatés $c \in K$, akkor ca_α is Cauchy.*

Bizonyítás: Alkalmazzuk a 2.15. állítást $b_\alpha = c$-re.

2.17. Állítás: *Ha $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ és $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ Cauchy sorozatok, akkor $a_\alpha - b_\alpha$ is Cauchy.*

Bizonyítás: A 2.16. állítást $c = -1$-re alkalmazva $-b_\alpha$ Cauchy, így a 2.14. állítás alapján $a_\alpha - b_\alpha = a_\alpha + (-b_\alpha)$ is Cauchy.

2.18. Állítás: *Ha $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ K-beli κ sorozat, $a_\alpha \to a$ valamely $a \in K$-ra, akkor a_α Cauchy.*

Bizonyítás: Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t. Mivel $a_\alpha \to a$, ezért $\exists \beta < \kappa, \forall \alpha \geq \beta: |a_\alpha - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ez jó küszöbindex lesz ε-hoz, ugyanis ha $\alpha, \gamma \geq \beta$, $|a_\alpha - a|, |a_\gamma - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, tehát $|a_\alpha - a_\gamma| = |(a_\alpha - a) + (a - a_\gamma)| \leq |a_\alpha - a| + |a_\gamma - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

2.19. Állítás: *Ha $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ és $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ olyan sorozatok, hogy a_α Cauchy és $b_\alpha \to 0$, akkor $a_\alpha b_\alpha \to 0$.*

Bizonyítás: Először alkalmazzuk a Cauchy feltételt a-ra $\varepsilon = 1$-re, így $\exists \beta_0 < \kappa, \forall \alpha, \gamma \geq \beta_0: |a_\alpha - a_\gamma| < 1$, tehát jelesül $|a_\alpha - a_{\beta_0}| < 1$, így $|a_\alpha| \leq |a_{\beta_0}| + 1$.

Most vegyünk egy $\varepsilon > 0$ -t. Mivel $b_\alpha \to 0$, ezért $\exists \beta < \kappa, \beta > \beta_0, \forall \alpha \geq \beta: |b_\alpha| < \frac{\varepsilon}{|a_{\beta_0}|+1}$. Ekkor $|a_\alpha b_\alpha| = |a_\alpha||b_\alpha| < (|a_{\beta_0}| + 1)\frac{\varepsilon}{|a_{\beta_0}|+1} = \varepsilon$.

2.20. Lemma: *Ha $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ Cauchy sorozat, akkor $a_\alpha \to 0$, vagy $\exists \delta > 0$ és $\beta < \kappa$, hogy $\forall \alpha \geq \beta: a_\alpha > \delta$ vagy $\forall \alpha \geq \beta: a_\alpha < -\delta$.*

Bizonyítás: Először nézzük azt az esetet, amikor a_α korlátlanul alternál, azaz $\forall \beta < \kappa, \exists \alpha, \gamma \geq \beta, a_\alpha \leq 0 \leq a_\gamma$. Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t és hozzá egy olyan $\beta < \kappa$-t, hogy $\forall \alpha, \gamma \geq \beta$-ra $|a_\alpha - a_\gamma| < \varepsilon$. Legyen $\alpha \geq \beta$ tetszőleges és $\gamma \geq \beta$ olyan, hogy a_α, a_γ

különböző előjelű (vagy valamelyik 0). Ekkor $|a_\alpha - a_\gamma| \geq |a_\alpha|$, másrészt $|a_\alpha - a_\gamma| < \varepsilon$, így $|a_\alpha| < \varepsilon$. Mivel α tetszőleges β-nál nagyobb index volt és ε is tetszőleges, így $a_\alpha \to 0$.

Most tegyük fel, hogy a sorozatnak fixálódik az előjele. Szimmetria miatt feltehetjük, hogy pozitívra, azaz $\exists \beta_0 < \kappa, \forall \alpha \geq \beta_0 \colon a_\alpha > 0$. Tegyük fel, hogy az állítás második esete nem teljesül, azaz $\forall \delta > 0, \beta < \kappa, \exists \gamma \geq \beta \colon a_\gamma < \delta$. Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t. Mivel a sorozat Cauchy, $\exists \beta < \kappa, \beta > \beta_0, \forall \alpha, \gamma \geq \beta, |a_\alpha - a_\gamma| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $\alpha \geq \beta$ tetszőleges és $\gamma \geq \beta$ olyan, hogy $a_\gamma < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor $|a_\alpha| = |(a_\alpha - a_\gamma) + a_\gamma| \leq |a_\alpha - a_\gamma| + |a_\gamma| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ebből azt kapjuk, hogy $a_\alpha \to 0$, azaz ha a második eset nem teljesül, akkor az első igen, így az állítást beláttuk. Ha az előjel negatívra fixálódik, akkor ugyanez a bizonyítás, csak a másik eset másik iránya jön ki.

2.21. Állítás: *Ha $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ Cauchy sorozat és $a_\alpha \nrightarrow 0$, akkor $\exists \beta_0 < \kappa, \forall \alpha \geq \beta_0 \colon a_\alpha \neq 0$ és $\frac{1}{a_\alpha}$ Cauchy.*

Bizonyítás: A 2.20. lemma miatt $\exists \delta > 0$ és $\beta_0 < \kappa$, hogy $\forall \alpha \geq \beta_0 \colon a_\alpha > \delta$, vagy $\forall \alpha \geq \beta_0 \colon a_\alpha < -\delta$, tehát nyilván $a_\alpha \neq 0$.

Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t. Ekkor $\exists \beta < \kappa, \beta \geq \beta_0, \forall \alpha, \gamma \geq \beta \colon |a_\alpha - a_\gamma| < \varepsilon\delta^2$. Ez jó küszöbindex, ugyanis, ha $\alpha, \gamma \geq \beta$, akkor nyilván $\alpha, \gamma \geq \beta_0$, így $|a_\alpha|, |a_\gamma| > \delta$. Ekkor $\left|\frac{1}{a_\alpha} - \frac{1}{a_\gamma}\right| = \left|\frac{a_\gamma - a_\alpha}{a_\alpha a_\gamma}\right| = \frac{|a_\alpha - a_\gamma|}{|a_\alpha||a_\gamma|} < \frac{\varepsilon\delta^2}{\delta^2} = \varepsilon$.

2.22. Állítás: *Ha $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ és $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ Cauchy sorozatok, $b_\alpha \nrightarrow 0$, akkor $\exists \beta_0 < \kappa, \forall \alpha \geq \beta_0 \colon b_\alpha \neq 0$, és $\frac{a_\alpha}{b_\alpha}$ Cauchy.*

Bizonyítás: A 2.21. állítás alapján az állítás első része teljesül és $\frac{1}{b_\alpha}$ Cauchy, így már csak a 2.15. állítást kell alkalmazni.

2.23. Állítás: *Ha $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ Cauchy, $a \epsilon K$ és $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\lambda}$ kofinális rézsorozat, melyre $a_{\alpha_\xi} \to a$, akkor $a_\alpha \to a$.*

Bizonyítás: Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t. Mivel a_α Cauchy, $\exists \beta < \kappa, \forall \alpha, \gamma \geq \beta \colon |a_\alpha - a_\gamma| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ez jó küszöbindex lesz a konvergenciához ε-hoz. Legyen $\alpha \geq \beta$ tetszőleges. Mivel $a_{\alpha_\xi} \to a$, ezért $\exists \eta < \lambda, \forall \xi \geq \eta, \left|a_{\alpha_\xi} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Válasszunk egy olyan $\xi \geq \eta$-t, hogy $\alpha_\xi \geq \beta$. Ekkor $|a_\alpha - a| = \left|\left(a_\alpha - a_{\alpha_\xi}\right) + \left(a_{\alpha_\xi} - a\right)\right| \leq \left|a_\alpha - a_{\alpha_\xi}\right| + \left|a_{\alpha_\xi} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

3.Teljes rendezett testek

3.1. Definíció: *Legyen K rendezett test és κ számosság. Ekkor a K test κ-teljes, ha minden $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ K-ban futó Cauchy sorozat konvergens.*

3.2. Lemma: *Egy K test pontosan akkor κ-teljes, ha* $\mathrm{cf}(\kappa)$*-teljes.*

Bizonyítás: Legyen $(\alpha_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ egy szigorúan monoton növő kofinális részsorozat κ-ban. Először tegyük fel, hogy K test κ-teljes és legyen $(a_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ Cauchy sorozat. Mivel az α_ξ-k kofinálisak κ-ban, ezért $\alpha<\kappa$-ra $\{\xi|\alpha_\xi\geq\alpha\}\neq\emptyset$ és a rendszámok jólrendezettek, így a $\zeta(\alpha)=\min\{\xi|\alpha_\xi\geq\alpha\}$ operáció értelmes. Könnyen ellenőrizhető, hogy ζ monoton nő és $\zeta(\alpha_\xi)=\xi$ minden $\xi<\mathrm{cf}(\kappa)$-ra.

Legyen $b_\alpha=a_{\zeta(\alpha)}$ $\alpha<\kappa$-ra. Azt kell belátni, hogy ez a sorozat Cauchy. Vegyünk egy $\varepsilon>0$-t. Ekkor $\exists\eta,\forall\xi,\rho\geq\eta\colon|a_\xi-a_\rho|<\varepsilon$. Legyen $\beta=\alpha_\eta$, ez jó küszöbindex lesz. Legyen ugyanis $\alpha,\gamma\geq\beta$, ekkor $\zeta(\alpha),\zeta(\gamma)\geq\eta$, tehát $|b_\alpha-b_\gamma|=|a_{\zeta(\alpha)}-a_{\zeta(\gamma)}|<\varepsilon$, azaz a b_α sorozat valóban Cauchy. A κ-teljesség miatt b_α konvergens, azaz $\exists a\in K\colon b_\alpha\to a$. Ekkor a 2.4. állítás miatt ennek kofinális részsorozata $a_\xi=a_{\zeta(\alpha_\zeta)}=b_{\alpha_\xi}\to a$. Mivel a_ξ tetszőleges $\mathrm{cf}(\kappa)$ Cauchy sorozat volt, ezért K $\mathrm{cf}(\kappa)$-teljes.

A megfordításhoz tegyük fel, hogy K $\mathrm{cf}(\kappa)$-teljes és legyen $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ Cauchy sorozat. A 2.13. állítás miatt ennek kofinális részsorozata a_{α_ξ} is Cauchy. A $\mathrm{cf}(\kappa)$-teljesség miatt $\exists a\in K\colon a_{\alpha_\xi}\to a$, és az egész sorozat Cauchy, alkalmazhatjuk a 2.23. állítást miszerint $a_\alpha\to a$. Ez is tetszőlegesen megválasztott κ Cauchy sorozat volt, így K κ-teljes.

Ez alapján a továbbiakban elég a κ-teljességet arra az esetre nézni, ha κ reguláris, mert a szinguláris számosságok esetém vissza tudjuk vezetni kisebb számosságokra.

3.3. Állítás: *Ha K rendezett test, akkor létezik $(t_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ szigorúan monoton növő sorozat, melyre $t_\alpha>0$ és a sorozat felülről nem korlátos.*

Bizonyítás: Legyen $K^+=\{a\in K|a>0\}$. Ez nyilván kofinális részhalmaza K-nak, így $\mathrm{cf}(K^+)=\mathrm{cf}(K)$. Hausdorff tétele miatt $\exists T\subseteq K^+$ kofinális, melyre $(T,<)$ jólrendezett és $\mathrm{tp}(T,<)=\mathrm{cf}(K^+)=\mathrm{cf}(K)$. Ekkor T elemei a köztük lévő rendezés alapján kanonikusan felsorolhatóak egy sorozatban, azaz $T=\{t_\alpha\colon\alpha<\kappa\}$. A sorozat monoton növő, $T\subseteq K^+$ miatt $t_\alpha>0$ és a sorozat felülről nem korlátos, mert T kofinális.

3.4. Állítás: *Ha K rendezett test, akkor létezik $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ szigorúan monoton csökkenő sorozat, melyre $\varepsilon_\alpha > 0$ és $\varepsilon_\alpha \to 0$.*

Bizonyítás: Az előző állítás alapján legyen $\varepsilon_\alpha = \frac{1}{t_\alpha}$. Ekkor $t_\alpha > 0$ miatt $\varepsilon_\alpha > 0$, a reciprok pedig pozitív számok között megfordítja a rendezést, így ε_α szigorúan monoton csökkenő. A 0-hoz tartáshoz legyen $\varepsilon > 0$. Mivel t_α felülről nem korlátos, $\exists \beta < \mathrm{cf}(\kappa)\colon t_\beta > \frac{1}{\varepsilon}$. Ekkor minden $\alpha \geq \beta$-ra $t_\alpha \geq t_\beta > \frac{1}{\varepsilon}$, így $\varepsilon_\alpha = \frac{1}{t_\alpha} < \varepsilon$ és mivel $\varepsilon_\alpha > 0$, $|\varepsilon_\alpha| < \varepsilon$.

3.5. Tétel: *Ha K rendezett test, $\kappa > \mathrm{cf}(K)$ reguláris számosság és $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ K-ban futó Cauchy-sorozat, akkor az egy ponton túl stabilizálódik, azaz $\exists a \in K, \beta < \kappa$, hogy $\forall \alpha \geq \beta$-ra $a_\alpha = a$.*

Bizonyítás: Legyen $(\varepsilon_\eta)_{\eta<\mathrm{cf}(K)}$ a 3.4. állításban megkonstruált sorozat. A Cauchy-tulajdonság miatt $\forall \eta < \mathrm{cf}(K), \exists \beta < \kappa, \forall \alpha, \gamma \geq \beta\colon |a_\alpha - a_\gamma| < \varepsilon_\eta$. Vegyünk egy $f\colon\mathrm{cf}(K) \to \kappa$ kiválasztási függvényt, melyre $\forall \eta < \mathrm{cf}(K), \forall \alpha, \gamma \geq f(\eta)\colon |a_\alpha - a_\gamma| < \varepsilon_\eta$.

Ennek a függvénynek a képtere legfeljebb akkora lehet mint az értelmezési tartománya, azaz $|\{f(\eta)\colon \eta < \mathrm{cf}(K)\}| \leq \mathrm{cf}(K) < \kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$, azaz $\{f(\eta)\colon \eta < \mathrm{cf}(K)\}$ korlátos κ-ban. Legyen $\beta < \kappa$ egy felső korlátja a képhalmaznak és $a = a_\beta$. Ez megfelelő lesz a stabilizálódáshoz. Vegyünk ugyanis egy $\alpha \geq \beta$-t és $\varepsilon > 0$-t. Ekkor $\exists \eta < \mathrm{cf}(K)$, amelyre $\varepsilon_\eta < \varepsilon$. Mivel $\alpha \geq \beta \geq f(\eta)$, $|a_\alpha - a| = |a_\alpha - a_\beta| < \varepsilon_\eta < \varepsilon$. De ε akármilyen kicsi pozitív lehet, így $|a_\alpha - a| = 0$, azaz $a_\alpha = a$.

3.6. Tétel: *Ha K rendezett test, $\kappa < \mathrm{cf}(K)$ számosság és $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ K-ban futó Cauchy-sorozat, akkor az egy ponton túl stabilizálódik.*

Bizonyítás: Vegyünk az előző tételhez hasonlóan egy $f\colon\mathrm{cf}(K) \to \kappa$ kiválasztási függvényt. Ekkor $\mathrm{cf}(K) = f^{-1}(\kappa) = \bigcup_{\alpha<\kappa} f^{-1}(\{\alpha\})$. Mivel $\mathrm{cf}(K)$ reguláris számosság nem írható fel nála kevesebb kisebb halmaz uniójaként. Mivel a tagok száma $\kappa < \mathrm{cf}(\kappa)$, ezért $\exists \beta < \kappa$, hogy $|f^{-1}(\{\beta\})| = \mathrm{cf}(K)$ és ekkor $f^{-1}(\{\beta\})$ kofinális $\mathrm{cf}(K)$.

Ez a β jó lesz $a = a_\beta$-val. Vegyünk ugyanis egy $\alpha \geq \beta$-t és $\varepsilon > 0$-t. Ekkor $\exists \eta < \mathrm{cf}(K)$, amelyre $\varepsilon_\eta < \varepsilon$. Mivel $f^{-1}(\{\beta\})$ kofinális, ezért $\exists \xi < \mathrm{cf}(K), \xi \geq \eta, \xi \in f^{-1}(\{\beta\})$. Ekkor $f(\xi) = \beta \geq \alpha$, $|a_\alpha - a| = |a_\alpha - a_\beta| < \varepsilon_\xi \leq \varepsilon_\eta < \varepsilon$. De ε akármilyen kicsi pozitív lehet, így $|a_\alpha - a| = 0$, azaz $a_\alpha = a$.

Ha egy sorozat egy ponton túl stabilizálódik, akkor nyilván konvergens lesz. Ez azt jelenti, hogy egy adott test $\mathrm{cf}(K)$-nál nagyobb és kisebb reguláris κ-ra triviálisan κ-teljes. Így az egyetlen érdekes eset a $\kappa = \mathrm{cf}(K)$. Ez indokolja a következő definíciót.

3.7. Definíció: *Egy K rendezett test teljes, ha* $\mathrm{cf}(K)$ *teljes.*

4. Teljessé tétel

4.1. Definíció: *Ha K rendezett test és $S \subseteq K$, akkor az S sűrű, ha $\forall a, b \in K, a < b$-re $\exists x \in S$, amelyre $a < x < b$*

4.2. Állítás: *Ha K rendezett test és $S \subseteq K$ sűrű, akkor kofinális.*

Bizonyítás: Vegyünk egy $a \in K$-t. Mivel $a < a + 1$, a sűrűség miatt $\exists x \in S: a < x < a + 1$, így minden a-nál van az S-nek nagyobb eleme, azaz kofinális.

4.3. Lemma: *Ha K rendezett test és $S \subseteq K$, S sűrű akkor és csak akkor, ha $\forall a \in K$-hoz $\exists (a_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ sorozat, melyre $a_\alpha \in S$ és $a_\alpha \to a$.*

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy S sűrű. Legyen $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ a 3.4. pontban megkonstruált sorozat. A sűrűség miatt kiválaszthatunk egy olyan sorozatot, amelyre $a_\alpha \in S$ és $a - \varepsilon_\alpha < a_\alpha < a + \varepsilon_\alpha$. Ekkor persze minden $\alpha < \kappa$-ra $|a_\alpha - a| < \varepsilon_\alpha$. Kell, hogy $a_\alpha \to a$. Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t, ekkor $\exists \beta < \mathrm{cf}(K): \varepsilon_\beta < \varepsilon$. Legyen $\alpha \geq \beta$, ekkor $|a_\alpha - a| < \varepsilon_\alpha \leq \varepsilon_\beta < \varepsilon$, tehát $a_\alpha \to a$.

A másik irányba legyen $a, b \in K, a < b$. A feltétel szerint létezik egy $(a_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ S-ben futó sorozat, melyre $a_\alpha \to \frac{a+b}{2}$. $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$-re felírva a konvergenciát $\exists \beta < \mathrm{cf}(K), \forall \alpha \geq \beta: \left|a_\alpha - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}$, jelesül $\left|a_\beta - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}$, azaz $a < a_\beta < b$ és persze $a_\beta \in S$. Mivel a, b tetszőleges volt, az S halmaz sűrű.

4.4. Definíció: *A K rendezett testnek az F rendezett test a teljessé tétele, ha F teljes rendezett test és van egy $\varphi: K \to F$ rendezés- és művelettartó beágyazás, melyre a kép $\varphi(K) \subseteq F$ sűrű.*

4.5. Állítás: *Ha F rendezett test a K rendezett test teljessé tétele, akkor* $\mathrm{cf}(F) = \mathrm{cf}(K)$.

Bizonyítás: Mivel φ rendezéstartó, nyilván $\mathrm{cf}\big(\varphi(K)\big) = \mathrm{cf}(K)$. Másrészt $\varphi(K) \subseteq F$ sűrű, a 4.2. állítás alapján kofinális, azaz $\mathrm{cf}\big(\varphi(K)\big) = \mathrm{cf}(F)$. Ez a kettő már adja az egyenlőséget.

A továbbiakban be fogjuk látni, hogy minden rendezett testnek létezik teljessé tétele és ez rendezés- és művelettartó izomorfizmus erejéig egyértelmű. A klasszikus analízisben is a valós számok felépítésének egyik módja, hogy $\mathbb{Q}$ teljessé tétele megadja $\mathbb{R}$-et, így az itt leírtak a klasszikus analízis megalapozására is működnek.

4.6. Jelölés: *Ha K rendezett test, a K-ban futó* $\mathrm{cf}(K)$ *hosszú Cauchy sorozatok halmazát jelölje* $\mathrm{Cauchy}(K)$. *Ha $a, b \in \mathrm{Cauchy}(K)$, akkor $a \sim b$ ekvivalensek, ha $a_\alpha - b_\alpha \to 0$*

4.7. Állítás: *Az $\sim$ valóban ekvivalencia reláció* $\mathrm{Cauchy}(K)$*-n.*

Bizonyítás: A reflexivitás nyilvánvaló, ugyanis, ha $a \in \mathrm{Cauchy}(K)$, akkor $a_\alpha - a_\alpha = 0$ minden $\alpha < \mathrm{cf}(K)$-ra, így $a_\alpha - a_\alpha \to 0$, azaz $a \sim a$.

A szimmetriához vegyünk $a, b \in \mathrm{Cauchy}(K)$-t melyre $a \sim b$. Ekkor $a_\alpha - b_\alpha \to 0$, a 2.9. állítás alapján $b_\alpha - a_\alpha = -(a_\alpha - b_\alpha) \to 0$, tehát $b \sim a$.

Végül a tranzitivitáshoz vegyünk $a, b, c \in \mathrm{Cauchy}(K)$-t melyre $a \sim b, b \sim c$. A 2.6. állítás alapján $a_\alpha - c_\alpha = (a_\alpha - b_\alpha) + (b_\alpha - c_\alpha) \to 0 + 0 = 0$, így $a \sim c$.

4.8. Állítás: *Ha $a, a', b, b' \in \mathrm{Cauchy}(K)$, melyekre $a \sim a'$ és $b \sim b'$, akkor $a + b, a' + b' \in \mathrm{Cauchy}(K)$ és $a + b \sim a' + b'$.*

Bizonyítás: Az állítás első része nyilvánvaló a 2.14. állításból. A második részéhez $(a_\alpha + b_\alpha) - (a'_\alpha + b'_\alpha) = (a_\alpha - a'_\alpha) + (b_\alpha - b'_\alpha) \to 0 + 0 = 0$ a 2.6. állítás alapján.

4.9. Állítás: *Ha $a, a', b, b' \in \mathrm{Cauchy}(K)$, melyekre $a \sim a'$ és $b \sim b'$, akkor $ab, a'b' \in \mathrm{Cauchy}(K)$ és $ab \sim a'b'$.*

Bizonyítás: Az állítás első része nyilvánvaló a 2.15. állításból. A második részéhez $a_\alpha b_\alpha - a'_\alpha b'_\alpha = a_\alpha b_\alpha - a_\alpha b'_\alpha + a_\alpha b'_\alpha - a'_\alpha b'_\alpha = a_\alpha(b_\alpha - b'_\alpha) + b'_\alpha(a_\alpha - a'_\alpha)$. Mivel $b_\alpha - b'_\alpha \to 0$ és a_α Cauchy, a 2.19. állítás alapján $a_\alpha(b_\alpha - b'_\alpha) \to 0$, hasonló módon $b'_\alpha(a_\alpha - a'_\alpha) \to 0$, a 2.6. állítást alkalmazva $a_\alpha b_\alpha - a'_\alpha b'_\alpha \to 0$.

4.10. Jelölés: *Legyen $F = {}^{\mathrm{Cauchy}(K)}/_{\sim}$ faktorhalmaz. Ebben az $a \in \mathrm{Cauchy}(K)$ osztályát $[a]$ jelöli.*

4.11. Definíció: *Legyen $x \in K$-ra c_x az a sorozat, amelyre $\forall \alpha < \mathrm{cf}(K)$-ra $(c_x)_\alpha = x$. Ez nyilvánvalóan Cauchy sorozat.*

4.12. Definíció: *Ha $[a], [b] \in F$, akkor $[a] + [b] = [a + b]$ és $[a] \cdot [b] = [ab]$.*

A 4.8. és 4.9. állítások miatt ez az összeadás és szorzás értelmes és jóldefiniált (azaz a szorzat osztályt nem befolyásolja a reprezentánsok választása).

4.13. Tétel: *Az előző pontban definiált műveletekkel F elemei testet alkotnak.*

Bizonyítás: A testaxiómák közül több egyszerű azonosság van. Mivel az eredeti K testben az összeadás asszociatív, ha $[a],[b],[c] \in F$, akkor minden $\alpha < \mathrm{cf}(K)$-ra $(a_\alpha + b_\alpha) + c_\alpha = a_\alpha + (b_\alpha + c_\alpha)$, így magukra a sorozatokra $(a+b)+c = a+(b+c)$. Az új F testben $([a]+[b])+[c] = [a+b]+[c] = [(a+b)+c] = [a+(b+c)] = = [a]+[b+c] = [a]+([b]+[c])$. Hasonló módon belátható az összeadás kommutativitása, a szorzás asszociativitása és kommutativitása és a disztributibitás is.

Az additív egységelem a 0 szerepét $[c_0]$ veszi át, ugyanis ha $[a] \in F$, akkor tetszőleges $\alpha < \mathrm{cf}(K)$-ra $a_\alpha + (c_0)_\alpha = (c_0)_\alpha + a_\alpha = a_\alpha + 0 = 0 + a_\alpha = a_\alpha$, így $a + c_0 = c_0 + a = a$, azaz $[a] + [c_0] = [c_0] + [a] = [a]$, vagyis $[c_0]$ valóban additív egység. Hasonlóan látható, hogy $[c_1]$ multiplikatív egység, azaz 1 F-ben. Egy elem additív inverze $-[a] = [-a]$. Ez onnan látható, hogy $a + (-a) = c_0$, így $[a] + [-a] = [c_0] = 0$.

Az egyetlen visszamaradt dolog a multiplikatív inverz létezése. Ha $[a] \in F, [a] \neq 0$, akkor $a \in \mathrm{Cauchy}(K)$ és $a \nrightarrow 0$. A 2.21. állítás alapján $\exists \beta_0 < \mathrm{cf}(K), \forall \alpha \geq \beta_0 : a_\alpha \neq 0$ és $\frac{1}{a_\alpha}$ Cauchy. Legyen $b_\alpha = \begin{Bmatrix} \frac{1}{a_\alpha}, \alpha \geq \beta_0 \\ 0, \alpha < \beta_0 \end{Bmatrix}$. Mivel korlátos sok hely kivételével ez megegyezik $\frac{1}{a_\alpha}$-val $b \in \mathrm{Cauchy}(K)$ és $\alpha \geq \beta_0$ $a_\alpha b_\alpha = 1$, így nyilván $a_\alpha b_\alpha - 1 \to 0$, azaz $[a][b] = [ab] = [c_1] = 1$, tehát minden nem 0 elemnek létezik multiplikatív inverze. Ezzel beláttuk, hogy testet kaptunk.

4.14. Definíció: *Ha* $a, b \in \mathrm{Cauchy}(K)$, *akkor a* $a \prec b$, *ha* $\exists \delta > 0, \beta < \mathrm{cf}(K)$, *hogy* $\forall \alpha \geq \beta$ *-ra* $b_\alpha - a_\alpha > \delta$

4.15. Állítás: *Ha* $a, a', b, b' \in \mathit{Cauchy}(K)$, $a \sim a', b \sim b'$ *és* $a \prec b$, *akkor* $a' \prec b'$.

Bizonyítás: Mivel $a \prec b$, ezért $\exists \delta > 0, \beta_0 < \mathrm{cf}(K), \forall \alpha \geq \beta_0 : b_\alpha - a_\alpha > \delta$. Továbbá $a_\alpha - a'_\alpha \to 0$, $b_\alpha - b'_\alpha \to 0$ miatt $\exists \beta_1, \forall \alpha \geq \beta_1 : |a_\alpha - a'_\alpha| < \frac{\delta}{3}$ és $\exists \beta_2, \forall \alpha \geq \beta_2 : |b_\alpha - b'_\alpha| < \frac{\delta}{3}$. Legyen $\beta = \max(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$. Vegyünk egy tetszőleges $\alpha \geq \beta$-t, ekkor $\alpha \geq \beta_0, \beta_1, \beta_2$ miatt:

$$\delta < b_\alpha - a_\alpha = (b_\alpha - b'_\alpha) + (b'_\alpha - a'_\alpha) + (a'_\alpha - a_\alpha) \leq$$
$$\leq b'_\alpha - a'_\alpha + |a_\alpha - a'_\alpha| + |b_\alpha - b'_\alpha| < b'_\alpha - a'_\alpha + \frac{2\delta}{3}$$

Levonva mindkét oldalból $\frac{2\delta}{3}$-at azt kapjuk, hogy $b'_\alpha - a'_\alpha < \frac{\delta}{3}$, tehát a feltétel teljesül $\left(\frac{\delta}{3}, \beta\right)$-ra, így $a' \prec b'$.

4.16. Definíció: *Ha* $[a], [b] \in F$, *akkor* $[a] < [b]$, *ha* $a \prec b$.

Ez a reláció a 4.15. állítás alapján jóldefiniált (azaz nem függ a reprezentánsok választásától).

4.17. Állítás: *A* $<$ *reláció rendezés* F*-en.*

Bizonyítás: Az irreflexivitás nyilvánvaló, ugyanis ha $[a] \in F$, akkor $\forall\alpha: a_\alpha - a_\alpha = 0$, tehát sosem lesz nagyobb semmilyen $\delta > 0$-nál, így $a \nprec a$, azaz $[a] \nless [a]$. A tranzitivitáshoz legyen $[a], [b], [c] \in F$, $[a] < [b], [b] < [c]$. Ekkor $a \prec b, b \prec c$, azaz $\exists\delta_1 > 0, \beta_1 < \mathrm{cf}(K), \forall\alpha \geq \beta_1: b_\alpha - a_\alpha > \delta_1$ és $\exists\delta_2 > 0, \beta_2 < \mathrm{cf}(K), \forall\alpha \geq \beta_2: c_\alpha - b_\alpha > \delta_2$. Legyen $\beta = \max(\beta_1, \beta_2)$. Vegyünk egy tetszőleges $\alpha \geq \beta$-t. Ekkor $\alpha \geq \beta_1, \beta_2$ miatt $c_\alpha - a_\alpha = (c_\alpha - b_\alpha) + (b_\alpha - a_\alpha) > \delta_1 + \delta_2$, azaz $a \prec c$-nek teljesül a feltétele $(\delta_1 + \delta_2, \beta)$-ra, vagyis $[a] < [c]$.

Végül a trichotómiához legyen $[a], [b] \in F$. A $b_\alpha - a_\alpha$ sorozatra alkalmazva a 2.20. lemmát azt kapjuk, hogy $b_\alpha - a_\alpha \to 0$, vagy $\exists\delta > 0, \beta < \kappa: \forall\alpha \geq \beta: b_\alpha - a_\alpha > \delta$, vagy $\exists\delta > 0, \beta < \kappa: \forall\alpha \geq \beta: b_\alpha - a_\alpha > \delta$, azaz $a \sim b$ vagy $a \prec b$ vagy $b \prec a$, így $|a| = |b|$ vagy $|a| < |b|$ vagy $|b| < |a|$, a trichotómia teljesül.

4.18. Tétel: *Az* $(F, +, \cdot, <)$ *a korábban definiált műveletekkel és rendezéssel rendezett testet alkot.*

Bizonyítás: A 4.13. állítás miatt testet alkot, a 4.17. állítás miatt pedig rendezett halmazt, így elég az összefüggéseket bebizonyítani.

Legyen $[a], [b], [c] \in F$, $[a] < [b]$, azaz $a \prec b$. Mivel $\forall\alpha < \kappa$-ra $(b_\alpha + c_\alpha) - (a_\alpha + c_\alpha) = b_\alpha - a_\alpha$, így nyilván $a + c \prec b + c$, azaz $[a] + [c] < [b] + [c]$.

Ha $[a], [b] > 0$, akkor $a, b \succ c_0$, azaz $\exists\delta_1 > 0, \beta_1 < \kappa, \forall\alpha \geq \beta_1: a_\alpha > \delta_1$ és $\exists\delta_2 > 0, \beta_2 < \mathrm{cf}(K), \forall\alpha \geq \beta_2: a_\alpha > \delta_2$. Legyen $\beta = \max(\beta_1, \beta_2)$. Vegyünk egy $\alpha \geq \beta$-t. Ekkor $\alpha \geq \beta_1, \beta_2$ miatt $a_\alpha b_\alpha > \delta_1\delta_2$, így $ab \succ c_0$, a feltétel teljesül $(\delta_1\delta_2, \beta)$-ra, így $[a][b] > 0$. Ezzel beláttuk, hogy rendezett testet kapunk.

4.19. Állítás: *Ha* $[a], [b] \in F$, *és* $\exists\beta_0 < \mathrm{cf}(K), \forall\alpha \geq \beta_0: a_\alpha \leq b_\alpha$, *akkor* $[a] \leq [b]$.

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy nem igaz, ekkor a trichotómia miatt $[b] < [a]$, azaz $\exists\delta > 0, \beta < \mathrm{cf}(K), \forall\alpha \geq \beta: a_\alpha - b_\alpha > \delta$. Legyen $\alpha \geq \beta_0, \beta$ tetszőleges, ekkor $\delta < a_\alpha - b_\alpha < 0$, ami ellentmondás.

4.20. Állítás: *Ha* $a \in \mathrm{Cauchy}(K)$, *akkor* $|a| \in \mathrm{Cauchy}(K)$, *ahol* $|a| = (|a_\alpha|)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ *és* $[|a|] = |[a]|$ *F-ben.*

Bizonyítás: Mivel tetszőleges $\alpha, \gamma < \mathrm{cf}(K)$-ra $\left||a_\alpha| - |a_\gamma|\right| \leq |a_\alpha - a_\gamma|$, így a Cauchy tulajdonság teljesülni fog $|a|$-ra az a-val azonos paraméterekkel (azonos ε-hoz azonos β), tehát $|a| \in \mathrm{Cauchy}(K)$.

Ha $[a] = 0$, akkor $a_\alpha \to 0$, mivel $\left||a_\alpha|\right| = |a_\alpha|$, ezért $|a_\alpha| \to 0$ azonos paraméterekkel, azaz $[a] = 0$.

Ha $[a] > 0$, akkor $\exists\delta > 0, \beta < \mathrm{cf}(K), \forall\alpha \geq \beta, a_\alpha > \delta > 0$, azaz $\alpha \geq \beta$-ra $|a_\alpha| = a_\alpha$, $|a_\alpha| - a_\alpha = 0$, így $|a| \sim a$, tehát $[|a|] = [a] = |[a]|$.

Ha $[a] < 0$, akkor $\exists\delta > 0, \beta < \mathrm{cf}(K), \forall\alpha \geq \beta, a_\alpha < \delta < 0$, azaz $\alpha \geq \beta$-ra $|a_\alpha| = -a_\alpha$, $|a_\alpha| - (-a_\alpha) = 0$, így $|a| \sim -a$, tehát $[|a|] = [-a] = -[a] = |[a]|$.

4.21. Lemma: *Legyen* $[a] \in F$*. Ekkor* $\exists x \in K$*, amelyre* $[c_x] \geq [a]$.

Bizonyítás: Mivel $a \in \mathrm{Cauchy}(K)$, ezért $\varepsilon = 1$-re $\exists\beta < \mathrm{cf}(K), \forall\alpha.\gamma \geq \beta: |a_\alpha - a_\gamma| < 1$, így $\alpha \geq \beta$-ra $|a_\alpha - a_\beta| < 1$, tehát $a_\alpha < a_\beta + 1$. Ha $x = a_\beta + 1$, akkor $\alpha \geq \beta$-ra $a_\alpha \leq (c_x)_\alpha$, a 4.19. állítás miatt $[c_x] \geq [a]$.

4.22. Tétel: *Az előzőek szerint definiálva* $\mathrm{cf}(F) = \mathrm{cf}(K)$.

Bizonyítás: A 4.21. lemma miatt $\{[c_x]: x \in K\}$ kofinális F-ben, így $\mathrm{cf}(F) = \mathrm{cf}\{[c_x]: x \in K\}$. Másrészt nyilván $x, y \in K$-ra $[c_x] < [c_y] \Leftrightarrow x < y$, azaz $\{[c_x]: x \in K\}$ rendezéstartóan izomorf K-val, így $\mathrm{cf}\{[c_x]: x \in K\} = \mathrm{cf}(K)$.

Ez azért fontos eredmény, mert így az F rendezett testben is $\mathrm{cf}(K)$ hosszú sorozatokat kell vizsgálnunk a teljesség bizonyításához.

4.23. Jelölés: *Az F-beli sorozatok indexét alsó helyett felső indexxel jelöljük. Ha* $([a^\alpha])_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ *egy F-beli sorozat, ahol az a^α egy tetszőleges reprezentáns sorozat az F-beli sorozat α-adik elemére. Kettős indexeléssel jelöljük ennek az elemeit, tehát $a_\xi^\alpha \in K$ az α-adik sorozat ξ-edik eleme.*

4.24. Lemma: *Ha* $([a^\alpha])_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ *F-beli sorozat,* $[a] \in F$, *akkor* $[a^\alpha] \to [a]$ *F-ben akkor és csak akkor, ha* $\forall\varepsilon > 0, \exists\beta < \mathrm{cf}(K), \forall\alpha \geq \beta, \exists\eta < \mathrm{cf}(K), \forall\xi \geq \eta: \left|a_\xi^\alpha - a_\xi\right| < \varepsilon$.

Bizonyítás: Ha $[a^\alpha] \to [a]$, akkor legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor persze F-ben $[c_\varepsilon] > 0$, tehát $\exists\beta < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall\alpha \geq \beta$-ra $|[a^\alpha] - [a]| < [c_\varepsilon]$. A 4.20. állítás alapján $[c_\varepsilon] > |[a^\alpha] - [a]| = |[a^\alpha - a]| = [|a^\alpha - a|]$. Ekkor $\exists\delta > 0, \eta < \mathrm{cf}(K), \forall\xi > \eta$-ra $\varepsilon - \left|a_\xi^\alpha - a_\xi\right| = (c_\varepsilon)_\xi - \left|a_\xi^\alpha - a_\xi\right| > \delta$, azaz $\left|a_\xi^\alpha - a_\xi\right| < \varepsilon - \delta < \varepsilon$.

A másik irányba tegyük fel, hogy ez a feltétel teljesül. Vegyünk egy $[s] \in F$, $[s] > 0$, amire a küszöbindexet keressük. Ekkor $\exists\delta > 0, \eta_0 < \mathrm{cf}(K), \forall\xi \geq \eta_0: s_\xi > \delta$, így $s_\xi - \frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{2}$, azaz $[s] > \left[c_{\frac{\delta}{2}}\right]$. Az állítás feltételét alkalmazva $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$-re $\exists\beta < \mathrm{cf}(K), \forall\alpha \geq \beta, \exists\eta < \mathrm{cf}(K), \forall\xi \geq \eta: \left|a_\xi^\alpha - a_\xi\right| < \frac{\delta}{4}$, azaz $\frac{\delta}{2} - \left|a_\xi^\alpha - a_\xi\right| > \frac{\delta}{4}$, így $\left(\frac{\delta}{4}, \eta\right)$-ra alkalmazva a rendezés feltételét $|[a^\alpha] - [a]| = [|a^\alpha - a|] < \left[c_{\frac{\delta}{2}}\right] < [s]$. Mivel $[s] > 0$ tetszőleges volt, ezért $[a^\alpha] \to [a]$.

4.25. Lemma: *Ha* $([a^\alpha])_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ *F-beli sorozat, akkor* $[a^\alpha]$ *Cauchy F-ben akkor és csak akkor, ha* $\forall\varepsilon > 0, \exists\beta < \mathrm{cf}(K), \forall\alpha, \gamma \geq \beta, \exists\eta < \mathrm{cf}(K), \forall\xi \geq \eta: \left|a_\xi^\alpha - a_\xi^\gamma\right| < \varepsilon$.

Bizonyítás: Ha $[a^\alpha]$ Cauchy, akkor legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor persze F-ben $[c_\varepsilon] > 0$, tehát $\exists\beta < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall\alpha \geq \beta$-ra $|[a^\alpha] - [a^\gamma]| < [c_\varepsilon]$. A 4.20. állítás alapján $[c_\varepsilon] > |[a^\alpha] - [a^\gamma]| = |[a^\alpha - a^\gamma]| = [|a^\alpha - a^\gamma|]$. Ekkor $\exists\delta > 0, \eta < \mathrm{cf}(K), \forall\xi > \eta$-ra $\varepsilon - \left|a_\xi^\alpha - a_\xi^\gamma\right| = (c_\varepsilon)_\xi - \left|a_\xi^\alpha - a_\xi^\zeta\right| > \delta$, azaz $\left|a_\xi^\alpha - a_\xi^\gamma\right| < \varepsilon - \delta < \varepsilon$.

A másik irányba tegyük fel, hogy ez a feltétel teljesül. Vegyünk egy $[s] \in F$, $[s] > 0$, amire a küszöbindexet keressük. Ekkor $\exists\delta > 0, \eta_0 < \mathrm{cf}(K), \forall\xi \geq \eta_0: s_\xi > \delta$, így $s_\xi - \frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{2}$, azaz $[s] > \left[c_{\frac{\delta}{2}}\right]$. Az állítás feltételét alkalmazva $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$-re $\exists\beta < \mathrm{cf}(K), \forall\alpha \geq \beta, \exists\eta < \mathrm{cf}(K), \forall\xi \geq \eta: \left|a_\xi^\alpha - a_\xi^\gamma\right| < \frac{\delta}{4}$, azaz $\frac{\delta}{2} - \left|a_\xi^\alpha - a_\xi^\zeta\right| > \frac{\delta}{4}$, így $\left(\frac{\delta}{4}, \eta\right)$-ra alkalmazva a rendezés feltételét $|[a^\alpha] - [a^\gamma]| = [|a^\alpha - a^\gamma|] < \left[c_{\frac{\delta}{2}}\right] < [s]$. Mivel $[s] > 0$ tetszőleges volt, ezért $[a^\alpha]$ Cauchy.

4.26. Tétel: *Az F teljes rendezett test*

Bizonyítás: Legyen $([a^\alpha])_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ F-beli Cauchy sorozat, ahol $a^\alpha \in \mathrm{Cauchy}(K)$ a sorozat elemeinek tetszőleges reprezentánsrendszere. Mivel a^α maga is Cauchy, ezért

$\forall\alpha < \mathrm{cf}(K), \exists\eta_\alpha < \mathrm{cf}(K), \forall\xi,\zeta \geq \eta_\alpha: |a^\alpha_\xi - a^\alpha_\zeta| < \varepsilon_\alpha$, ahol $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ a 3.4. pontban definiált sorozat. Legyen $b_\alpha = a^\alpha_{\eta_\alpha}$.

Először azt fogjuk belátni, hogy ez a sorozat Cauchy. Vegyünk egy $\varepsilon > 0$ K-beli elemet. A 4.25. lemma miatt vehetünk egy $\beta_0 < \mathrm{cf}(K)$-t melyre $\forall\alpha,\gamma > \beta_0, \exists\eta < \mathrm{cf}(K), \forall\xi \geq \eta: \left|a^\alpha_\xi - a^\gamma_\xi\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Legyen emellett $\beta_1 < \mathrm{cf}(K)$ olyan, hogy $\varepsilon_{\beta_1} < \frac{\varepsilon}{3}$ és $\beta = \max(\beta_0, \beta_1)$. Ez jó lesz a b_α sorozat Cauchy tulajdonságára ε-hoz. Legyen ugyanis $\alpha, \gamma \geq \beta$. Ekkor $\alpha, \gamma \geq \beta_0$, azaz $\exists\eta < \mathrm{cf}(K), \forall\xi \geq \eta: \left|a^\alpha_\xi - a^\gamma_\xi\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Vegyünk egy tetszőleges $\xi < \mathrm{cf}(K)$-t melyre $\xi \geq \eta_\alpha, \eta_\gamma, \eta$. Ekkor $\xi \geq \eta_\alpha$ miatt $|a^\alpha_\xi - a^\alpha_{\eta_\alpha}| < \varepsilon_\alpha \leq \varepsilon_\beta \leq \varepsilon_{\beta_1} < \frac{\varepsilon}{3}$, $\xi \geq \eta_\gamma$ miatt $\left|a^\gamma_\xi - a^\gamma_{\eta_\gamma}\right| < \varepsilon_\gamma \leq \varepsilon_\beta \leq \varepsilon_{\beta_1} < \frac{\varepsilon}{3}$, míg $\xi \geq \eta$ miatt $\left|a^\alpha_\xi - a^\gamma_\xi\right| < \frac{\varepsilon}{3}$, így

$$|b_\alpha - b_\gamma| = \left|a^\alpha_{\eta_\alpha} - a^\gamma_{\eta_\gamma}\right| = \left|\left(a^\alpha_{\eta_\alpha} - a^\alpha_\xi\right) + \left(a^\alpha_\xi - a^\gamma_\xi\right) + \left(a^\gamma_\xi - a^\gamma_{\eta_\gamma}\right)\right| \leq$$
$$\leq |a^\alpha_\xi - a^\alpha_{\eta_\alpha}| + \left|a^\gamma_\xi - a^\gamma_{\eta_\gamma}\right| + \left|a^\alpha_\xi - a^\gamma_\xi\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Ez azt jelenti, hogy $b \in \mathrm{Cauchy}(K)$, azaz $[b] \in F$. Most azt fogjuk belátni, hogy $[a^\alpha] \to [b]$. Ehhez a 4.24. lemmabeli kritériumot fogjuk belátni. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor mivel a b_α sorozat Cauchy, $\exists\beta_0 < \mathrm{cf}(K), \forall\alpha,\gamma > \beta_0: |b_\alpha - b_\gamma| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen továbbá β_1 olyan, hogy $\varepsilon_{\beta_1} < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\beta = \max(\beta_0, \beta_1)$. Ez jó lesz ε-hoz a kritériumba. Vegyünk ugyanis egy tetszőleges $\alpha \geq \beta$-t. Ehhez az $\eta = \max(\eta_\alpha, \beta)$ jó lesz. Legyen $\xi \geq \eta$. Ekkor $\xi \geq \eta_\alpha$ miatt $|b_\alpha - a^\alpha_\xi| = |a^\alpha_{\eta_\alpha} - a^\alpha_\xi| < \varepsilon_\alpha \leq \varepsilon_\beta \leq \varepsilon_{\beta_1} < \frac{\varepsilon}{2}$, másrészt $\alpha, \xi \geq \beta \geq \beta_0$ miatt $|b_\alpha - b_\xi| < \frac{\varepsilon}{2}$, így $|a^\alpha_\xi - b_\xi| = |(a^\alpha_\xi - b_\alpha) + (b_\alpha - b_\xi)| \leq |b_\alpha - a^\alpha_\xi| + |b_\alpha - b_\xi| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, azaz a kritérium teljesül $[a^\alpha] \to [b]$. Mivel tetszőleges $[a^\alpha]$ F-beli Cauchy sorozatnak megadtuk a határértékét, ezzel beláttuk, hogy F teljes rendezett test.

Annak a bizonyításához, hogy F a K teljessé tétele, még meg kell adni egy φ rendezés- és művelettartó beágyazást, amelyre $\varphi(K)$ sűrű F-ben. Ennek a definíciója meglehetősen egyszerű.

4.27. Definíció: *Legyen $x \in K$ tetszőleges. Ekkor $\varphi(x) = [c_x]$.*

4.28. Állítás: *Ez a $\varphi: K \to F$ leképezés rendezés- és művelettartó beágyazás.*

Bizonyítás: A rendezéstartáshoz legyen $a < b \in K$ ekkor nyilvánvalóan teljesül az F-beli rendezés 4.14. definíciója $\delta = \frac{b-a}{2}, \beta = 0$-ra, így $[c_a] < [c_b]$. A rendezéstartás miatt az is nyilvánvaló, hogy a leképezés injektív.

A művelettartáshoz egyszerűen:

$$\varphi(a+b) = [c_{a+b}] = [c_a + c_b] = [c_a] + [c_b] = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$\varphi(ab) = [c_{ab}] = [c_a c_b] = [c_a][c_b] = \varphi(a)\varphi(b)$$

4.29. Állítás: *A $\varphi(K) \subseteq F$ kép sűrű F-ben.*

Bizonyítás: A sűrűségre a 4.3. lemma kritériumát fogjuk bizonyítani. Legyen $[a] \in F$ tetszőleges és $a^\alpha = c_{a_\alpha}$ konstans sorozat minden $\alpha < \mathrm{cf}(K)$-ra. Ekkor $[a^\alpha] = \left[c_{a_\alpha}\right] = \varphi(a_\alpha) \in \varphi(K)$. Azt kell belátni, hogy $[a^\alpha] \to [a]$, amihez a 4.24. lemma kritériumát látjuk be.

Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel a_α Cauchy $\exists\beta > 0, \forall\alpha,\gamma \geq \beta: \left|a_\alpha - a_\gamma\right| < \varepsilon$. Ez a β jó lesz a kritériumba. Legyen ugyanis $\alpha \geq \beta$ tetszőleges, ehhez $\eta = \beta$ jó lesz. Legyen $\xi > \eta = \beta$. Ekkor $\left|a_\xi^\alpha - a_\xi\right| = \left|\left(c_{a_\alpha}\right)_\xi - a_\xi\right| = \left|a_\alpha - a_\xi\right| < \varepsilon$. Ezáltal teljesül a kritérium, $[a^\alpha] \to [a]$, így $\varphi(K) \subseteq F$ sűrű.

Ezzel F konstrukciójában minden bizonyítással végeztünk, felírhatjuk a következő tételt.

4.30. Tétel: *Ha K tetszőleges rendezett test, akkor létezik F rendezett test, ami a K teljessé tétele.*

A következőkben az unicitást fogjuk belátni, azaz, ha F_1, F_2 rendezett testek a K teljessé tételei, akkor létezik köztük rendezés- és művelettartó izomorfizmus.

4.31. Állítás: *Ha K rendezett test, F_1, F_2 két teljessé tétele és $\varphi_1: K \to F_1, \varphi_2: K \to F_2$ olyan művelet és rendezéstartó beágyazások, melyekre $\varphi_1(K)$ sűrű F_1-ben és $\varphi_2(K)$ sűrű F_2-ben, akkor a $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$-re $\psi: \varphi_1(K) \to \varphi_2(K)$ és $\psi^{-1}: \varphi_2(K) \to \varphi_1(K)$ rendezés- és művelettartó bijekciók.*

Bizonyítás: Mivel φ_1, φ_2 injektív, ezért a saját képterükre bijekciók. Nyilvánvaló, hogy bijekciók inverze és kompozíciója is bijekció, így ψ, ψ^{-1} is azok. A rendezéstartásról és a művelettartásról is könnyen látható, hogy bijekciók inverzére és kompozíciójára is öröklődik.

Most az itt definiált $\psi: \varphi_1(K) \to \varphi_2(K)$-t akarjuk egy $\bar{\psi}: F_1 \to F_2$ izomorfizmussá kiterjeszteni.

4.32. Állítás: *Ha $a \in \varphi_1(K)$, akkor $|a| \in \varphi_1(K)$ és $\psi(|a|) = |\psi(a)|$.*

Bizonyítás: A művelettartás miatt $\varphi_1(0_K) = 0_{F_1}$, $\varphi_2(0_K) = 0_{F_2}$, $\varphi_1(1_K) = 1_{F_1}$, $\varphi_2(1_K) = 1_{F_2}$ hiszen a műveletek egységelemeit jó helyre viszi. Emiatt $\psi(0_{F_1}) = 0_{F_2}$, $\psi^{-1}(0_{F_2}) = 0_{F_1}$, $\psi(1_{F_1}) = 1_{F_2}$, $\psi^{-1}(1_{F_2}) = 1_{F_1}$.

Legyen $a \in \varphi_1(K)$. Ekkor $\exists x \in K, \varphi_1(x) = a$, ekkor nyilván $\varphi_1(x) = -a$, mivel $|a| = a$ vagy $|a| = -a$ teljesül, ezért nyilván $|a| \in \varphi_1(K)$.

Ha $a \geq 0_{K_1}$, akkor rendezéstartás miatt $\psi(a) \geq 0_{K_2}$, ezért $\psi(|a|) = \psi(a) = |\psi(a)|$. Ha $a < 0_{K_1}$, akkor rendezéstartás miatt $\psi(a) < 0_{K_2}$, ezért $\psi(|a|) = \psi(-a) = -\psi(a) = |\psi(a)|$. Az abszolútértéktartás ugyanúgy igaz ψ^{-1}-re is.

4.33. Állítás: *Legyen* $(a_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ $\varphi_1(K)$*-ban futó sorozat* $a \in \varphi_1(K)$. *Ekkor* $a_\alpha \to a$ F_1*-ben, akkor és csak akkor, ha* $\psi(a_\alpha) \to \psi(a)$ F_2*-ben.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $a_\alpha \to a$ F_1-ben. Legyen $\varepsilon \in F_2, \varepsilon > 0_{F_2}$. Mivel $\varphi_2(K)$ sűrű F_2-ben, ezért $\exists \theta \in \varphi_2(K)$, $0_{F_2} < \theta < \varepsilon$. A ψ ráképez $\varphi_2(K)$-ra, ezért vehetünk egy $\delta \in \varphi_1(K)$-t melyre $\psi(\delta) = \theta$. A ψ^{-1} rendezéstartása miatt $\delta > 0_{F_1}$. Ekkor mivel $a_\alpha \to a$, $\exists \beta < \mathrm{cf}(K), \forall \alpha \geq \beta: |a_\alpha - a| < \delta$. Ez a β jó küszöbindex lesz $\psi(a_\alpha)$-hoz ε-ra. Legyen ugyanis $\alpha \geq \beta$, ekkor $|\psi(a_\alpha) - \psi(a)| = |\psi(a_\alpha - a)| = \psi(|a_\alpha - a|) < \psi(\delta) = \theta < \varepsilon$ a művelet és rendezéstartás illetve a 4.32. állítás alapján. Mivel $\varepsilon > 0_{F_2}$ tetszőleges volt, a konvergencia teljesül.

A megfordításhoz ugyanezt a bizonyítást kell végigvinni ψ^{-1}-re.

4.34. Állítás: *Legyen* $(a_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ $\varphi_1(K)$*-ban futó sorozat. Ekkor* a_α *Cauchy* F_1*-ben, akkor és csak akkor, ha* $\psi(a_\alpha)$ *Cauchy* F_2*-ben.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a_α Cauchy F_1-ben. Legyen $\varepsilon \in F_2, \varepsilon > 0_{F_2}$. Mivel $\varphi_2(K)$ sűrű F_2-ben, ezért $\exists \theta \in \varphi_2(K)$, $0_{F_2} < \theta < \varepsilon$. A ψ ráképez $\varphi_2(K)$-ra, ezért vehetünk egy $\delta \in \varphi_1(K)$-t melyre $\psi(\delta) = \theta$. A ψ^{-1} rendezéstartása miatt $\delta > 0_{F_1}$. Ekkor mivel a_α Cauchy $\exists \beta < \mathrm{cf}(K), \forall \alpha, \gamma \geq \beta: |a_\alpha - a_\gamma| < \delta$. Ez a β jó küszöbindex lesz $\psi(a_\alpha)$-hoz ε-ra. Legyen ugyanis $\alpha, \gamma \geq \beta$, ekkor $|\psi(a_\alpha) - \psi(a_\gamma)| = |\psi(a_\alpha - a_\gamma)| = \psi(|a_\alpha - a_\gamma|) < \psi(\delta) = \theta < \varepsilon$ a művelet és rendezéstartás illetve a 4.32. állítás alapján. Mivel $\varepsilon > 0_{F_2}$ tetszőleges volt, a Cauchy tulajdonság teljesül

A megfordításhoz ugyanezt a bizonyítást kell végigvinni ψ^{-1}-re.

4.35. Lemma: *Legyen* $(a_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ $\varphi_1(K)$*-ban futó sorozat* $a \in F_1$, *amelyre* $a_\alpha \to a$. *Ekkor* $\exists c \in F_2$, *hogy* $\psi(a_\alpha) \to c$.

Bizonyítás: Mivel $a_\alpha \to a$ a 2.18. állítás alapján a_α Cauchy F_1-ben, de a_α $\varphi_1(K)$-ban fut, a 4.34. állítás miatt $\psi(a_\alpha)$ Cauchy F_2-ben. De F_2 teljes, ezért konvergens lesz, azaz teljesül a lemma állítása.

4.36. Lemma: *Legyenek $(a_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}, (b_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ $\varphi_1(K)$-ban futó sorozatok $a \in F_1$, amelyre $a_\alpha \to a, b_\alpha \to a$. Ekkor ha $c_1, c_2 \in F_2$ melyekre, $\psi(a_\alpha) \to c_1$, $\psi(b_\alpha) \to c_2$, akkor $c_1 = c_2$.*

Bizonyítás: Ha $a_\alpha \to a, b_\alpha \to a$, a 2.9. állítás alapján $a_\alpha - b_\alpha \to a - a = 0_{F_1}$. Mivel $a_\alpha - b_\alpha$ is $\varphi_1(K)$-ban futó sorozat, a 4.34. állítás alapján $\psi(a_\alpha) - \psi(b_\alpha) = \psi(a_\alpha - b_\alpha) \to \psi(0_{F_1}) = 0_{F_2}$. Másrészt a 2.9. állítás miatt $\psi(a_\alpha) - \psi(b_\alpha) \to c_1 - c_2$, a 2.5. állítást alkalmazva $c_1 - c_2 = 0_{F_2}$, azaz $c_1 = c_2$.

4.37. Definíció: *Definiáljuk a $\bar{\psi}: F_1 \to F_2$ leképezést a következőképpen: Ha $a \in F_1$, akkor vegyünk egy $(a_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$, $\varphi_1(K)$-ban futó sorozatot, melyre $a_\alpha \to a$. Vegyük a $\psi(a_\alpha)$ sorozat határértékét, ez lesz $\bar{\psi}(a)$.*

A 4.3. lemma miatt mivel $\varphi_1(K)$ sűrű F_1-ben mindig tudunk ilyen sorozatot választani, a 4.35. lemma alapján $\psi(a_\alpha)$-nak lesz határértéke, és a 4.36. lemma miatt nem számít, hogy melyik a-ba tartó sorozatnak vettük a határértékét, így $\bar{\psi}$ az egész F_1-en értelmezett és jóldefiniált.

4.38.Tétel: *A $\bar{\psi}: F_1 \to F_2$ rendezés- és művelettartó bijekció, melyre $\bar{\psi}|_{\varphi_1(K)} = \psi$.*

Bizonyítás: Ha $a \in \varphi_1(K)$, akkor vehetjük azt a sorozatok, amelyre $a_\alpha = a$ minden $\alpha < \mathrm{cf}(K)$-ra. Ekkor nyilván $a_\alpha \to a$ és $\psi(a_\alpha) \to \psi(a)$, így $\bar{\psi}(a) = \psi(a)$.

A szimmetria miatt a 4.35. és 4.36. lemmák alkalmazhatók ψ^{-1}-re is. Ha $a, b \in F_1$-re $\bar{\psi}(a) = \bar{\psi}(b)$, akkor a definíció szerint léteznek olyan $(a_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}, (b_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ $\varphi_1(K)$-ban futó sorozatok, hogy $a_\alpha \to a, b_\alpha \to b$ és $\psi(a_\alpha), \psi(b_\alpha) \to \bar{\psi}(a) = \bar{\psi}(b)$. A 4.36. lemmát ψ^{-1}-re alkalmazva a $\psi(a_\alpha), \psi(b_\alpha)$ sorozatokon megkapjuk, hogy $a = b$, ezért $\bar{\psi}$ injektív.

A szürjektivitáshoz legyen $c \in F_2$ tetszőleges. Mivel $\varphi_2(K)$ sűrű F_2-ben, ezért $\exists (b_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ $\varphi_2(K)$-ban futó sorozat, amelyre $b_\alpha \to c$. A 4.35. lemmátψ^{-1}-re alkalmazva a b_α sorozaton, $\exists a \in F_1, \psi^{-1}(b_\alpha) \to a$, Mivel $\psi(\psi^{-1}(b_\alpha)) = b_\alpha \to c$, a definíció szerint $\bar{\psi}(a) = c$. Mivel $c \in F_2$ tetszőleges volt, ezért $\bar{\psi}$ szürjektív, az előzővel egybetéve $\bar{\psi}$ bijekció F_1, F_2 között.

A rendezéstartáshoz legyen $a, b \in F_1$, $a < b$. Indirekt tegyük fel, hogy $\bar{\psi}(a) \geq \bar{\psi}(b)$. Az injektivitás miatt $\bar{\psi}(a) = \bar{\psi}(b)$ nem lehet, így feltehetjük, hogy $\bar{\psi}(a) > \bar{\psi}(b)$. Válasszunk $(a_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}, (b_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ $\varphi_1(K)$-ban futó sorozatokat, melyekre $a_\alpha \to a, b_\alpha \to b$. Ekkor $\psi(a_\alpha) \to \bar{\psi}(a), \psi(b_\alpha) \to \bar{\psi}(b)$. A konvergenciákból következik, hogy

$\exists\beta_1 < \kappa, \forall\alpha \geq \beta_1: |a_\alpha - a| < \frac{b-a}{2}$, $\exists\beta_2 < \kappa, \forall\alpha \geq \beta_2: |b_\alpha - b| < \frac{b-a}{2}$, $\exists\beta_3 < \kappa, \forall\alpha \geq \beta_3: \left|\psi(a_\alpha) - \bar{\psi}(a)\right| < \frac{\bar{\psi}(a)-\bar{\psi}(b)}{2}$ és $\exists\beta_4 < \kappa, \forall\alpha \geq \beta_4: \left|\psi(b_\alpha) - \bar{\psi}(b)\right| < \frac{\bar{\psi}(a)-\bar{\psi}(b)}{2}$. Legyen $\alpha < \mathrm{cf}(K)$ tetszőleges olyan, hogy $\alpha \geq \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$. Ekkor $\alpha \geq \beta_1, \beta_2$ miatt $a_\alpha < \frac{a+b}{2} < b_\alpha$, illetve $\alpha \geq \beta_3, \beta_4$ miatt $\psi(b_\alpha) < \frac{\bar{\psi}(a)+\bar{\psi}(b)}{2} < \psi(a_\alpha)$, ami ellentmond a ψ rendezéstartásának.

Végül nézzük a művelettartást. Vegyünk $a, b \in F_1$-et és legyenek $(a_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}, (b_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ $\varphi_1(K)$-ban futó sorozatok, melyekre $a_\alpha \to a, b_\alpha \to b$. Ekkor a 2.6. állítás miatt $a_\alpha + b_\alpha \to a + b$, és $\psi(a_\alpha + b_\alpha) = \psi(a_\alpha) + \psi(b_\alpha) \to \bar{\psi}(a) + \bar{\psi}(b)$ azaz a definíció alapján $\bar{\psi}(a + b) = \bar{\psi}(a) + \bar{\psi}(b)$. A szorzásra is ugyanígy a 2.7. állítás miatt $a_\alpha b_\alpha \to ab$, és $\psi(a_\alpha b_\alpha) = \psi(a_\alpha)\psi(b_\alpha) \to \bar{\psi}(a)\bar{\psi}(b)$ azaz a definíció alapján $\bar{\psi}(ab) = \bar{\psi}(a)\bar{\psi}(b)$.

Rendezett testek között egy ilyen leképezés a teljes izomorfiát jelenti, azaz a teljessé tétel lényegében egyértelmű. A fejezetet összefoglaló végső tétel:

4.39. Tétel: *Ha K tetszőleges rendezett test, akkor rendezés- és művelettartó izomorfizmustól eltekintve egyértelműen létezik F rendezett test, ami a K teljessé tétele.*

5. Magasabb kofinalitású rendezett testek konstrukciója

5.1. Definíció: *Az $(R,+,\cdot,<)$ rendezett integritási tartomány, ha $(R,+,\cdot)$ egységelemes integritási tartomány, $(R,<)$ rendezett halmaz, és teljesülnek a rendezett testre vonatkozó összefüggések a rendezés és a műveletek között (1.1. definíció)*

Rendezett integritási tartományokban is le lehet vezetni számos olyan azonosságot, mint rendezett testekben. A következőhöz rendezett testekben multiplikatív inverzt kellene használni, de az rendezett integritási tartományokban nem feltétlenül létezik, így más bizonyítást kell adni.

5.2. Állítás: *Ha R rendezett integritási tartomány $a,b,c \in R$, $a > 0$ és $ab < ac$, akkor $b < c$.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz $b \geq c$, ha $b = c$, akkor nyilván $ab = ac$, így az egyenlőtlenség nem állhat fenn. Ha $b > c$, akkor $b - c > 0$ és két pozitív szorzataként $ab - ac = a(b-c) > 0$, azaz $ab > ac$, ami ellentmondás.

5.3. Jelölés: *Ha R egységelemes integritási tartomány, akkor a hányadostestét $Q(R)$-rel jelöljük.*

A hányadostest definíciója alapján a $Q(R)$ elemei ekvivalenciaosztályok olyan $\frac{a}{b}$ alakban írhatók, ahol $b \neq 0$ és $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ha $ad = bc$. A következőkben definiálunk a $Q(R)$-en egy rendezést, amivel rendezett testet alkot.

5.4. Lemma: *Ha R rendezett integritási tartomány, akkor $Q(R)$ minden eleme felírható $\frac{a}{b}$ alakban, ahol $b > 0$.*

Bizonyítás: Legyen $\frac{a}{b} \in Q(R)$ tetszőleges. Ha $b > 0$, akkor ez a feltételnek megfelelő felírás. Mivel $b = 0$ nem lehet, csak az a lehetőség maradt, hogy $b < 0$. Ekkor $-b > 0$, ezért a $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ megfelelő felírás.

5.5. Definíció: *Legyen R rendezett integritási tartomány, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q(R)$ olyan felírás mellett, hogy $b, d > 0$. Ekkor $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, ha $ad < bc$.*

Az 5.4. lemma miatt $Q(R)$ minden eleme felírható megfelelő alakban, így az $<$ reláció értelmes bármely két elem között. Most azt kell belátni, hogy ez a reláció nem függ a reprezentánsok választásától.

5.6. Állítás: *A* $Q(R)$*-en az előző ponban definiált reláció jóldefiniált, azaz ha* $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \in Q(R)$*, ahol* $b, d, b', d' > 0$ *és* $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$*, akkor* $\frac{a'}{b'} < \frac{c'}{d'}$.

Bizonyítás: Ha $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, a definíció alapján $ad < bc$, $b' > 0$ miatt $ab'd < bb'c$. Mivel $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, azaz $ab' = a'b$, ezért $ab'd = a'bd$, így $a'bd < bb'c$. Az 5.2. állítást alkalmazva $b > 0$-ra $a'd < b'c$. Most $d' > 0$ miatt $a'dd' < b'cd'$. Mivel $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, azaz $cd' = c'd$, ezért $b'cd' = b'c'd$, így $a'dd' < b'c'd$. Végül az 5.2. állítást ismételten alkalmazva $d > 0$-ra $a'd' < b'c'$, azaz $\frac{a'}{b'} < \frac{c'}{d'}$.

5.7. Állítás: *A* $<$ *reláció rendezés* $Q(R)$*-en.*

Bizonyítás: Az irreflexivitáshoz legyen $\frac{a}{b} \in Q(R), b > 0$. Ekkor nyilván $ab \nless ab$, tehát $\frac{a}{b} \nless \frac{a}{b}$.

A tranzitivitáshoz legyen $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in Q(R)$, melyekre $b, d, f > 0$ és $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$. Ekkor $ad < bc$ és $f > 0$ miatt $adf < bcf$, illetve $cf < de$ és $b > 0$ miatt $bcf < bde$. Az R-beli tranzitivitás alapján $adf < bde$, az 5.2. állítást $d > 0$-ra alkalmazva $af < be$, azaz $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$.

Végül a trichotómiához legyen $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q(R)$, $b, d > 0$. Ekkor az R-beli trichotómi miatt $ad < bc, ad = bc, ad > bc$ közül valamelyik teljesül, ami azt jelenti, hogy $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ közül is teljesül valamelyik, vagyis igaz a trichotómia.

5.8. Tétel: *A* $(Q(R), <)$ *rendezett test.*

Bizonyítás: Legyen $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in Q(R)$, melyekre $b, d, f > 0$ és $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Azt kell belátni, hogy $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$, azaz $\frac{af+be}{bf} < \frac{cf+de}{df}$. Mivel $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ $ad < bc$ és $f > 0$, ezért $adf < bcf$, ekkor $adf + bde < bde + bcf$, ezt mégegyszer beszorozva f-fel $adf^2 + bdef < bdef + bcf^2$, azaz $(af + be)df < (cf + de)bf$. Mivel $bf, df > 0$, ezekre alkalmazható a definíció, azaz $\frac{af+be}{bf} < \frac{cf+de}{df}$, amit be akartunk látni.

A másik tulajdonsághoz legyen $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q(R)$ $b, d > 0$, melyekre $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} > \frac{0}{1} = 0$. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy $a, c > 0$, de ekkor $ac > 0$, tehát $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} > \frac{0}{1} = 0$.

5.9. Állítás: *Ha R rendezett integritási tartomány, akkor a $\varphi: R \to Q(R)$ kanonikus beágyazás, amelyre $a \in R$-re $\varphi(a) = \frac{a}{1}$ rendezéstartó.*

Bizonyítás: Mivel $1 > 0$, ezért a definícióból nyilvánvaló, hogy $\frac{a}{1} < \frac{b}{1} \Leftrightarrow a < b$.

A hányadostest rendezésének konstrukcióját fogjuk alkalmazni a polinomgyűrűből a racionális törtfüggvény testre való kiterjesztéséhez alkazmazni. Ehhez először a polinomgyűrűn kell rendezést megadni.

5.10. Definíció: *Ha K rendezett test, $K[x]$ a K feletti polinomgyűrű, akkor $a, b \in K(x)$-re $a < b$, ha $b - a$ főegyütthatója > 0.*

5.11. Állítás: *A $<$ reláció rendezés $K[x]$-en.*

Bizonyítás: Az irreflexivitás nyilvánvaló, mivel $a \in K[x]$-re $a - a = 0$ nincs főegyütthatója, így $a \not< a$. Ha $a, b, c \in K[x]$, $a < b < c$, ekkor $b - a, c - b$ főegyütthatója pozitív. Ha $\deg(b - a) = \deg(c - b)$, a polinomok összeadásakor a főegyütthatók összeadódnak, különben a nagyobb fokú főegyüttható lesz az összeg főegyütthatója, így mindkét esetben $c - a = (b - a) + (c - b)$ főegyütthatója > 0, $a < c$, azaz a tranzitivitás is teljesül. Végül a trichotómiához legyen $a, b \in K[x]$. Ha $a \neq b$, akkor $b - a \neq 0$, van főegyütthatója. Ha ez pozitív, akkor $a < b$, ha negatív, akkor $a - b$ főegyütthatója ennek ellentettje pozitív, ezért $b < a$.

5.12. Tétel: *A $(K[x], <)$ rendezett integritási tartomány.*

Bizonyítás: Ha $a, b, c \in K[x]$ $a < b$, akkor $b - a$ főegyüttatója pozitív, de mivel $(b + c) - (a + c) = b - a$, ezért annak is, azaz $a + c < b + c$. A szorzási tulajdonsághoz, ha $a, b > 0$, akkor a főegyütthatójuk pozitív. Polinomok szorzásánál a főegyüttható összeszorzódik, így ab főegyütthatója is pozitív, vagyis $ab > 0$.

5.13. Állítás: *A $K[x]$-en lévő rendezés kiterjesztése a $K \subseteq K[x]$-en mint konstansokon lévő rendezésnek és $\forall a \in K$-ra $x > a$.*

Bizonyítás: A konstansok főegyütthatója önmaga, nyilván K rendezésében $a < b$, ha $b - a > 0$. A másik tulajdonsághoz, ha $a \in K$, $x - a$ főegyütthatója 1, ezért $a < x$.

5.14. Tétel: *Ha K rendezett test, akkor a $K(x)$ racionális törtfüggvények teste rendezhető olyan módon, hogy $K \subseteq K[x]$ rendezését kiterjesztjük és $\forall a \in K$-ra $x > a$.(itt $K \subseteq K(x)$*

formálisan ugyan nem teljesül, de van egy kanonikus beágyazása, a továbbiakban viszont fontos lesz, hogy úgy tekintsünk erre a testre, mint egy K-nál bővebb rendezett test).

Bizonyítás: Először kiterjesztjük a rendezést az 5.10. definíció alapján $K[x]$, majd az 5.5. definíció alapján $Q(K[x]) = K(x)$-re. Az 5.13. és 5.9. állítás miatt mindkét kiterjesztés rendezéstartó a szűkebb halmazon, így a kettő egymás után is. Végül az $a \in K$-ra $x > a$ az 5.13. állítás miatt $K[x]$-ben igaz, a kiterjesztés rendezéstartása miatt igaz marad.

5.15. Definíció: *Legyen α tetszőleges rendszám és $\beta < \alpha$-ra $(K_\beta, +_\beta, \cdot_\beta, <_\beta)$ rendezett test, és $\gamma < \beta < \alpha$-ra $K_\gamma \subseteq K_\beta$ és a műveletek, illetve a rendezés kiterjed, azaz, ha $a, b \in K_\gamma$, akkor $a +_\beta b = a +_\gamma b, a \cdot_\beta b = a \cdot_\gamma b, a <_\beta b \Leftrightarrow a <_\gamma b$. Legyen $K = \bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta$, és rajta definiáljunk $+, \cdot$ műveleteket, mint a $+_\beta, \cdot_\beta$ műveletek közös kiterjesztése. (A műveleteket úgy értelmezzük, mint $K_\beta \times K_\beta \longrightarrow K_\beta$ függvények, mivel a kiterjesztésre láncot alkotnak, lehet venni a közös kiterjesztésüket. Ennek értelmezési tartománya szintén a láncfeltétel miatt $K \times K$, tehát a műveletek mindenütt értelmezettek és jóldefiniáltak)*

5.16. Tétel: *Az előző konstrukcióban szereplő $(K, +, \cdot)$ rendezett test.*

Bizonyítás: Az összeadás asszociativitásához legyen $a, b, c \in K = \bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta$, . Ekkor létezik $\beta_1, \beta_2, \beta_3 < \alpha$, hogy $a \in K_{\beta_1}, b \in K_{\beta_2}, c \in K_{\beta_3}$. Legyen $\beta = \max(\beta_1, \beta_2, \beta_3) < \alpha$. Ekkor $a, b, c \in K_\beta$, így a K_β-beli asszociativitás miatt $(a +_\beta b) +_\beta c = a +_\beta (b +_\beta c)$, a közös kiterjesztés miatt pedig $(a + b) + c = a + (b + c)$. Hasonló módom megy az összeadás kommutativitásának, a szorzás asszociativitásának, kommutativitásának és a disztributivitásnak a bizonyítása is.

A 0,1 már K_0-ban benne vannak. Ezek minden $\beta < \alpha$-ra K_β-ban is betöltik a 0,1 szerepét, ugyanis ha egy testben $a + a = a$, akkor $a = 0$ és ha $a^2 = a, a \neq 0$, akkor $a = 1$. Ezek a tulajdonságok K_0-ból K_β-ba továbböröklődnek, így valóban betöltik az egységelemek szerepét. Ekkor nyilván az uniójukban is betöltik, tehát K-ban is ezek lesznek 0,1.

Az additív és a multiplikatív inverzhez legyen $a \in K$, ekkor $\exists \beta < \alpha, a \in K_\beta$, ebben van additív inverze, azaz $\exists (-a) \in K_\beta \subseteq K$, $a +_\beta (-a) = 0$. A közös kiterjesztés miatt $a + (-a) = 0$, azaz K-ban is additív inverze. Ugyanígy megmutatható, hogy ha $a \neq 0$, akkor van K-ban multiplikatív inverze. Ezzel mindent beláttunk, azaz K test.

5.17. Definíció: *Ha $a, b \in K$, akkor $a < b$, ha $\exists \beta < \alpha$, amelyre $a, b \in K_\beta$ és $a <_\beta b$.*

5.18. Állítás: *Az előző pontban definiált $<$ reláció rendezés K-n.*

Bizonyítás: Az irreflexivitáshoz legyen $a \in K$. Ekkor tetszőleges $\beta < \alpha$-ra melyre $a \in K_\beta$, $a \nless_\beta a$, így $a \nless a$.

A tranzitivitáshoz legyen $a, b, c \in K = \bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta$, $a < b < c$. Ekkor létezik $\beta_1, \beta_2 < \alpha$, hogy $a, b \in K_{\beta_1}, a <_{\beta_1} b, b, c \in K_{\beta_2}, b <_{\beta_2} c$. Legyen $\beta = \max(\beta_1, \beta_2) < \alpha$. Ekkor $a, b, c \in K_\beta$, és a rendezés kiterjesztése miatt $a <_\beta b, b <_\beta c$. A K_β-beli tranzitivitás miatt $a <_\beta c$, így $a < c$.

A trichotómiához legyen $a, b \in K$. Ekkor Ekkor létezik $\beta_1, \beta_2 \alpha$, hogy $a \in K_{\beta_1}, b \in K_{\beta_2}$. Legyen $\beta = \max(\beta_1, \beta_2) < \alpha$. Ekkor $a, b \in K_\beta$, a K_β-beli trichtoómia miatt $a <_\beta b,\ a = b$, vagy $b <_\beta a$. Ekkor $a < b, a = b, b < a$ közül is teljesül valamelyik.

5.19. Tétel: *A $(K, +, \cdot, <)$ rendezett test.*

Bizonyítás: Mivel $(K, +, \cdot)$ test és $(K, <)$ rendezett halmaz, már csak a rendezés és a műveletek kapcsolatait kell belátni. Ha $a, b, c \in K, a < b$, akkor $\exists \beta_1 < \alpha$, hogy $a, b \in K_{\beta_1}, a <_{\beta_1} b$. Ezenkívül $\exists \beta_2 < \alpha$, hogy $c \in K_{\beta_2}$. Legyen $\beta = \max(\beta_1, \beta_2)$. Ekkor $a, b, c \in K_\beta$, ezért $a + c, b + c \in K_\beta$, és a rendezés kiterjesztése miatt $a <_\beta b$, így $a + c <_\beta b + c$, azaz $a + c < b + c$.

A szorzás és a rendezés kapcsolatához legyen $a, b \in K$, melyekre $a, b > 0$ az 5.16. tételben kifejtettük, hogy a 0 azonos minden testben). Ekkor $\exists \beta_1 < \alpha,\ a \in K_{\beta_1}, a >_{\beta_1} 0$ és $\exists \beta_2 < \alpha,\ a \in K_{\beta_2}, b >_{\beta_1} 0$. Legyen $\beta = \max(\beta_1, \beta_2)$. Ekkor $a, b \in K_\beta$ és $a, b >_\beta 0$, így $ab >_\beta 0$, azaz $ab > 0$. Ezzel beláttuk, hogy rendezett testet alkot.

5.20. Állítás: *Az előzőekben definiált $(K, +, \cdot, <)$ rendezett testre $\forall \beta < \alpha$-ra $K_\beta \subseteq K$ és a műveletek illetve a rendezés kiterjednek.*

Bizonyítás: Az 5.15. definícióból nyilvánvaló, hogy $K_\beta \subseteq K$ és a közös kiterjesztés alapján a műveletek is kiterjednek.

A rendezés kiterjesztéséhez legyen $\beta < \alpha,\ a, b \in K_\beta$. Ekkor az $a <_\beta b \Rightarrow a < b$ az 5.17. definícióból triviálisan következik. A másik irányba indirekten tegyük fel, hogy $a < b$, de $a \nless_\beta b$. A K_β-beli trichotómia miatt ekkor $a = b$ vagy $b \nless_\beta a$. Az első eset a K beli irreflexivitás miatt nem teljesülhet, a második esetben az 5.17. definíció alapján $b < a$, ami szintén nem lehet.

A racionális törtfüggvénytest konstrukcióját és ezt a lánckonstrukciót fogjuk a továbbiakban alkalmazni, hogy tetszőleges kofinalitású rendezett testeket megkonstruáljunk.

5.21. Definíció: *Ha α tetszőleges rendszám, akkor definiáljuk a $\mathbb{K}_\alpha$ rendezett testet transzfinit rekurzióval a következőképpen:*

1. $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$

2. $\mathbb{K}_{\alpha+1} = \mathbb{K}_\alpha(x_\alpha)$ *(az 5.14. konstrukció alapján, itt az x_α jelölés azt jelzi, hogy melyrendszámra adtuk hozzá a testhez)*

3. Ha α limesz, akkor $\mathbb{K}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{K}_\beta$ *(az 5.15. konstrukciója alapján)*

Azt kell belátni, hogy ez szabályos definíció. A racionális törtfüggvénytest minden rendezett testen definiálható, tehát rákövetkező rendszámokra a definíció mindig értelmes. Transzfinit indukcióval bizonyítjuk, hogy limesz rendszámra is definiálható, azaz teljesül az 5.15. konstrukció feltétele.

Legyen α limesz, minden $\beta < \alpha$-ra $\mathbb{K}_\beta$ már definiált, $\gamma \leq \beta < \alpha$. Ekkor kell, hogy $\mathbb{K}_\gamma \subseteq \mathbb{K}_\beta$ és a rendezés és a műveletek kiterjednek. Ezt rögzített α, γ mellett β-ra bizonyítjuk. $\beta = \gamma$-ra triviális, hiszen a két test egyenlő. Ha $\beta = \tau + 1$, ahol $\tau \geq \gamma$, akkor $\mathbb{K}_\gamma \subseteq \mathbb{K}_\tau \subseteq \mathbb{K}_\tau(x_\tau) = \mathbb{K}_\beta$, és az 5.14. alapján a rendezés és a műveletek kiterjednek. Ha β limesz, akkor $\mathbb{K}_\beta = \bigcup_{\tau<\beta} \mathbb{K}_\tau$, az 5.20. állítás alapján $\mathbb{K}_\gamma \subseteq \mathbb{K}_\beta$, és a rendezés és a műveletek kiterjednek. Így a konstrukció minden rendszámra jóldefiniált.

5.22. Lemma: *Ha α limesz rendszám, akkor* $\mathrm{cf}(\mathbb{K}_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

Bizonyítás: Legyen $X = \{x_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq \mathbb{K}_\alpha$. Azt fogjuk belátni, hogy X kofinális $\mathbb{K}_\alpha$-ban. Legyen $a \in \mathbb{K}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{K}_\beta$ a limesz rendszámra vett konstrukció miatt. Ekkor $\exists \beta < \alpha, x \in \mathbb{K}_\beta$. Mivel α limesz $\beta + 1 < \alpha$. A definíció szerint $\mathbb{K}_{\beta+1} = \mathbb{K}_\beta(x_\beta)$, amiből az 5.14. alapján x_β nagyobb a $\mathbb{K}_\beta$ minden eleménél, jelesül $a < x_\beta$ $\mathbb{K}_{\beta+1}$-ben, de a rendezés kiterjesztése miatt $\mathbb{K}_\alpha$-ban is. De $x_\beta \in X$, így tetszőleges elemnél találtunk nagyobb X-beli elemet, azaz X kofinális, ezért $\mathrm{cf}(\mathbb{K}_\alpha) = \mathrm{cf}(x)$.

Ha $\gamma < \beta < \alpha$, akkor $\gamma + 1 \leq \beta$, így $\mathbb{K}_\gamma(x_\gamma) = \mathbb{K}_{\gamma+1} \subseteq \mathbb{K}_\beta$, azaz $x_\gamma \in \mathbb{K}_\beta$. Megint az 5.14. -et alkalmazva, x_β nagyobb $\mathbb{K}_\beta$ minden eleménél, tehát $x_\gamma < x_\beta$, vagyis a $\varphi : \alpha \to X$ kanonikus leképezés, melyre $\varphi(\beta) = x_\beta$ minden $\beta < \alpha$-ra, rendezéstartó. Ekkor α és X rendezéstartóan izomorfak, így $\mathrm{cf}(X) = \mathrm{cf}(\alpha)$. Ezzel a két egyenlőséggel az állítást beláttuk.

5.23. Tétel: *Ha κ reguláris számosság, akkor létezik K rendezett test, amelyre* $\mathrm{cf}(K) = \kappa$.

Bizonyítás: Az 5.21. definíció alapján $\mathbb{K}_\kappa$ megfelelő lesz, ugyanis, ha κ reguláris számosság, akkor limesz rendszám, az 5.22. lemmát alkalmazva $\mathrm{cf}(\mathbb{K}_\kappa) = \mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.

5.24. Definíció: *Ha α tetszőleges rendszám, akkor legyen $\mathbb{F}_\alpha$ a $\mathbb{K}_\alpha$ teljessé tétele.*

Ez a 4.30. tétel alapján létezik és a 4.39. tétel alapján egyértelmű.

5.25. Tétel: *Ha κ reguláris számosság, akkor létezik F teljes rendezett test, amelyre* $\mathrm{cf}(K) = \kappa$.

Bizonyítás: Az 5.24. definíció alapján $\mathbb{F}_\kappa$ megfelelő lesz, ugyanis, ha κ reguláris számosság, akkor $\mathrm{cf}(\mathbb{K}_\kappa) = \kappa$, a teljessé tétel definíciója alapján $\mathbb{F}_\kappa$ teljes és a 4.5. állítás miatt $\mathrm{cf}(\mathbb{F}_\kappa) = \mathrm{cf}(\mathbb{K}_\kappa) = \kappa$.

Felvetődik a kérdés, hogy ahogyan a teljessé tétel egyértelmű volt, úgy az adott κ reguláris számosságra a κ kofinalitású teljes rendezett test rendezés- és művelettartó izomorfizmus erejéig egyértelmű-e? A következőkben azt fogjuk belátni, hogy ez nem egyértelmű.

5.26. Jelölés: *Ha K rendezett test, akkor Z_K jelöli a K-beli egészek halmazát, azaz a K-ban az 1 által generált additív részcsoportot.*

5.27. Definíció: *Egy K rendezett test archimédeszi, ha $Z_K \subseteq K$ kofinális.*

5.28. Példa: *A $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ archimédeszi, a $\mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}(x_0)$ nem archimédeszi, ugyanis x_0 nagyobb benne minden egész elemnél.*

5.29. Állítás: *Ha K_1, K_2 rendezett testek, K_1 archimédeszi és $\varphi: K_1 \to K_2$ rendezés- és művelettartó izomorfizmus, akkor K_2 is archimédeszi.*

Bizonyítás: A művelettartás miatt nyilván $\varphi\left(1_{K_1}\right) = 1_{K_2}$, és ez a generált részcsoportra is igaz, tehát $\varphi\left(Z_{K_1}\right) = Z_{K_2}$. A rendezéstartás miatt, mivel $Z_{K_1} \subseteq K_1$ kofinális, ezért $Z_{K_2} = \varphi\left(Z_{K_1}\right) \subseteq \varphi(K_1) = K_2$ is kofinális, azaz K_2 archimédeszi.

5.30. Állítás: *Ha K rendezett test és F a K teljessé tétele, akkor F archimédeszi akkor és csak akkor, ha K archimédeszi.*

Bizonyítás: Vegyük a teljessé tétel definíciója alapján a $\varphi: K \to F$ rendezés-és művelettartó beágyazást. Erre mivel $\varphi(1_K) = 1_F$, ezért $\varphi(Z_K) = Z_F$, a művelettartás miatt pedig $Z_K \subseteq K$ kofinális, akkor és csak akkor, ha $Z_F = \varphi(Z_K) \subseteq \varphi(K)$ kofinális. Másrészt a 4.2. állítás miatt

$\varphi(K) \subseteq F$ kofinális, így $Z_F \subseteq \varphi(K)$ pontosan akkor kofinális $\varphi(K)$-ban, ha F-ben is az, így a két test ugyanakkor lesz archimédeszi.

5.31. Állítás: *Adott κ reguláris számosságra a κ kofinalitású teljes rendezett test nem egyértelmű.*

Bizonyítás: Mivel $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, nyilván $\mathrm{cf}(\mathbb{K}_0) = \omega$, $\mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}(x_0)$-ban az $\{x_0^n : n < \omega\}$ kofinális, így $\mathrm{cf}(\mathbb{K}_1) = \omega$. A 4.5. állítás miatt $\mathrm{cf}(\mathbb{F}_0) = \mathrm{cf}(\mathbb{F}_1) = \omega$.

Azt kell még belátni, hogy $\mathbb{F}_0, \mathbb{F}_1$ között nem létezik rendezés- és műveletartó izomorfizmus. Az 5.28. alapján $\mathbb{K}_0$ archimédeszi, $\mathbb{K}_1$ nem archimédeszi, így az 5.30. állítás miatt $\mathbb{F}_0$ archimédeszi, $\mathbb{F}_1$ nem archimédeszi. Ha létezne közöttük rendezés- és műveletartó izomorfizmus, az ellentmondana az 5.29. állításnak.

6. Szeparábilis rendezett testek

6.1. Definíció: *Ha K rendezett test, akkor* $\mathrm{P}(K) = \sup\{\kappa: \exists(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}\ K\text{-ban futó szigorúan monoton növő } \kappa\text{-sorozat}\}$.*A* $\mathrm{P}(K)$ *értéket a K rendezési számának nevezzük.*

6.2. Állítás: *Minden K rendezett testre* $\mathrm{P}(K) \geq \mathrm{cf}(K)$

Bizonyítás: A 3.3. állítás alapján létezik $(t_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ szigorúan monoton növő $\mathrm{cf}(K)$ sorozat, amelyre $t_\alpha > 0$ minden $\alpha < \mathrm{cf}(K)$-ra és a sorozat felülről nem korlátos. Ez megfelelő konstrukció, így $\mathrm{cf}(K) \in \{\kappa: \exists(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}\ K\text{-ban futó szigorúan monoton növő } \kappa\text{-sorozat}\}$, azaz $\mathrm{cf}(K) \leq \sup\{\kappa: \exists(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}\ K\text{-ban futó szigorúan monoton növő } \kappa\text{-sorozat}\} = \mathrm{P}(K)$.

Meg fogjuk mutatni, hogy az egyenlőség nem minden rendezett testre teljesül.

6.3. Állítás: *Ha K, L rendezett testek, $K \subseteq L$ (ugyanazokkal a műveletekkel és rendezéssel), akkor* $\mathrm{P}(K) \leq \mathrm{P}(L)$.

Bizonyítás: Ha $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ K-ban futó szigorúan monoton növő κ-sorozat, akkor az L-ben futó szigorúan monoton növő κ sorozatnak is megfelel, így $\{\kappa: \exists(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}\ K\text{-ban futó szigorúan monoton növő } \kappa\text{-sorozat}\} \subseteq$ $\{\kappa: \exists(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}\ L\text{-ban futó szigorúan monoton növő } \kappa\text{-sorozat}\}$, azaz $\mathrm{P}(K) = \sup\{\kappa: \exists(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}\ K\text{-ban futó szigorúan monoton növő } \kappa\text{-sorozat}\} \leq$ $\sup\{\kappa: \exists(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}\ L\text{-ban futó szigorúan monoton növő } \kappa\text{-sorozat}\} = \mathrm{P}(L)$

6.4. Állítás: *Létezik olyan rendezett test, amelyre* $\mathrm{P}(K) \neq \mathrm{cf}(K)$

Bizonyítás: Nézzük az 5.21. definició szerinti $\mathbb{K}_{\omega_1+\omega}$ rendezett testet. Erre az 5.22. lemma alapján mivel $\omega_1 + \omega$ limesz, $\mathrm{cf}(\mathbb{K}_{\omega_1+\omega}) = \mathrm{cf}(\omega_1 + \omega) = \omega$. Másrészt $\mathbb{K}_{\omega_1} \subseteq \mathbb{K}_{\omega_1+\omega}$, amelyre a lemmát szintén alkalmazhatjuk. $\mathrm{cf}(\mathbb{K}_{\omega_1}) = \mathrm{cf}(\omega_1) = \omega_1$. A 6.2. állítás alapján $\mathrm{P}(\mathbb{K}_{\omega_1}) \geq \mathrm{cf}(\mathbb{K}_{\omega_1}) = \omega_1$, míg a 6.3 állítás miatt $\mathrm{P}(\mathbb{K}_{\omega_1+\omega}) \geq \mathrm{P}(\mathbb{K}_{\omega_1})$, így $\mathrm{P}(\mathbb{K}_{\omega_1+\omega}) > \mathrm{cf}(\mathbb{K}_{\omega_1+\omega})$, azaz a $\mathbb{K}_{\omega_1+\omega}$ jó példa.

6.5. Definíció: *Ha K rendezett test, akkor* $\Sigma(K) = \min\{|S|: S \subseteq K \text{ sűrű}\}$. *Ezt az értéket a K szeparációs számának nevezzük.*

6.6. Állítás: *Minden K rendezett testre* $\Sigma(K) \geq \mathrm{P}(K)$

Bizonyítás: Vegyünk egy $S \subseteq K$ sűrű halmazt, amelyre $|S| = \Sigma(K)$. Legyen $\lambda \in \{\kappa : \exists (a_\alpha)_{\alpha<\kappa}\ K\text{-ban futó szigorúan monoton növő } \kappa\text{-sorozat}\}$. és vegyünk egy $(a_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ K-ban futó szigorúan monoton növő λ-sorozatot. Mivel minden $\alpha < \lambda$-ra $a_\alpha < a_{\alpha+1}$, ezért létezik $x \in S$, melyre $a_\alpha < x < a_{\alpha+1}$. Definiáljunk egy $f: \lambda \to S$ függvényt, amelyre minden $\alpha < \lambda$-ra $a_\alpha < f(\alpha) < a_{\alpha+1}$. Ez az f injektív, ugyanis ha $\alpha, \beta < \lambda$, $\alpha \neq \beta$, akkor $\alpha < \beta$ vagy $\alpha > \beta$. Szimmetria miatt feltehető, hogy az előbbi teljesül. Ekkor $\alpha + 1 \leq \beta$, így $f(\alpha) < a_{\alpha+1} \leq a_\beta < f(\beta)$, tehát $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Mivel λ-ról S-re van injektív függvény, ezért $\lambda \leq |S| = \Sigma(K)$. Mivel λ-t tetszőlegesen választottuk a halmazból, $\Sigma(K)$ a halmaz minden eleménél nagyobb egyenlő, így a supremumánál is, azaz $\Sigma(K) \geq \mathrm{P}(K)$.

6.7. Állítás: *Minden K rendezett testre* $\Sigma(K) \geq \mathrm{cf}(K)$

Bizonyítás: A 6.6. állítás miatt $\Sigma(K) \geq \mathrm{P}(K)$, míg a 6.2. állítás miatt $\mathrm{P}(K) \geq \mathrm{cf}(K)$, így ezekből következik a kívánt egyenlőtlenség.

6.8. Definíció: *A K rendezett test szeparábilis, ha* $\Sigma(K) = \mathrm{cf}(K)$

6.9. Állítás: *Ha K szeparábilis rendezett test, akkor* $\mathrm{P}(K) = \mathrm{cf}(K)$

Bizonyítás: A $\mathrm{cf}(K) \leq \mathrm{P}(K) \leq \Sigma(K) = \mathrm{cf}(K)$ egyenlőtlenség lánc két vége egyenlő, így mindenhol egyenlőség teljesül, azaz $\mathrm{P}(K) = \mathrm{cf}(K)$.

A 6.4. állításból így az is kövtkezik, hogy a $\mathbb{K}_{\omega_1+\omega}$ nem szeparábilis.

6.10. Lemma: *Ha K, L rendezett testek, $K \subseteq L$ (ugyanazokkal a műveletekkel és rendezéssel), akkor* $\Sigma(K) \leq \Sigma(L)$.

Bizonyítás: Legyen $S \subseteq L$ sűrű, melyre $|S| = \Sigma(L)$. A 6.7. állítás alapján $\mathrm{cf}(L) \leq \Sigma(L)$, így $|\mathrm{S} \times \mathrm{cf}(L)| = \Sigma(L)\mathrm{cf}(L) \leq \Sigma(L)^2 = \Sigma(L)$.

Legyen $H = \{(x, \alpha) \in \mathrm{S} \times \mathrm{cf}(L) : \exists a \in K, |x - a| < \varepsilon_\alpha\}$, ahol ε_α a 3.4. konstrukcióban megadott érték L-ben. Ha $(x, \alpha) \in H$, akkor legyen $t(x, \alpha) \in K$ ilyen és $T = \{t(x, \alpha) : (x, \alpha) \in H\}$. Nyilván $|T| \leq |H| \leq |\mathrm{S} \times \mathrm{cf}(L)| = \Sigma(L)$ és $T \subseteq K$

Azt kell belátni, hogy T sűrű K-ban. Legyen $a, b \in K$, $a < b$ tetszőleges. Vegyünk egy $\alpha < \mathrm{cf}(L)$-et, amelyre $\varepsilon_\alpha < \frac{b-a}{4}$. Mivel S sűrű L-ben, ezért $\exists x \in S$, amelyre $\frac{a+b}{2} - \varepsilon_\alpha < x < \frac{a+b}{2} + \varepsilon_\alpha$. Ekkor $\left|\frac{a+b}{2} - x\right| < \varepsilon_\alpha$ és persze $\frac{a+b}{2} \in K$, így $(x, \alpha) \in H$, azaz létezik $t(x, \alpha) \in T$. Erre

$\left|t(x,\alpha)-\frac{a+b}{2}\right| \leq |t(x,\alpha)-x| + \left|\frac{a+b}{2}-x\right| < \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\alpha < \frac{b-a}{4}+\frac{b-a}{4} = \frac{b-a}{2}$, így $a \leq t(x,\alpha) \leq b$. Mivel $a,b \in K$ tetszőleges volt, ezért T sűrű K-ban, ezért $\Sigma(K) \leq |\mathrm{T}| \leq \Sigma(\mathrm{L})$.

6.11. Lemma: *Ha K, L rendezett testek, $K \subseteq L$ (ugyanazokkal a műveletekkel és rendezéssel), és $K \subseteq L$ sűrű, akkor* $\Sigma(K) = \Sigma(L)$.

Bizonyítás: A 6.10. lemmából a $\Sigma(K) \leq \Sigma(L)$ teljesül, így elég a másik irányú egyenlőtlenséget belátni. Legyen $S \subseteq K$ sűrű,$|S| = \Sigma(K)$. Azt fogjuk belátni, hogy ez L-ben is sűrű.

Legyen $a,b \in L$, $a < b$. Mivel K sűrű L-ben ezért létezik $c \in K$, $a < c < b$ és $d \in K$, $c < d < b$, és S is sűrű K-ban, ezért $\exists x \in S\ c < x < d$. Ekkor nyilván $a < c < x < d < b$ miatt $a < x < b$, így S sűrű L-ben, azaz $\Sigma(L) \leq |S| = \Sigma(K)$.

6.12. Definíció: *Legyen K rendezett test $a,b \in K$, $a < b$. Ekkor $(a,b) = \{x: a < x < b\}$. Az $I \subseteq K$ nyílt intervallum, ha létezik $a,b \in K$, $a < b$, melyekre $I = (a,b)$. Ekkor a,b persze egyértelmű, ezek az intervallum végpontjai. Az intervallum hossza $l(I) = b - a > 0$.*

6.13. Definíció: *Legyen K rendezett test. Az $\mathcal{I} \subseteq P(K)$diszjunkt intervallumrendszer, ha minden $I \in \mathcal{I}$ nyílt intervallum és minden $I,J \in \mathcal{I}\ I \neq J$-re $I \cap J = \emptyset$.*

6.14. Definíció: *Ha K rendezett test,* $\Delta(K) = \sup\{|\mathcal{I}|: \mathcal{I} \subseteq P(K) \text{ diszjunkt intervallumrendszer}\}$.*ezt a K diszkréciós számának nevezzük.*

6.15. Lemma: *Ha K rendezett test, $\mathcal{I} \subseteq P(K)$ diszjunkt intervallumrendszer és $S \subseteq K$ sűrű, akkor* $|\mathcal{I}| \leq |S|$.

Bizonyítás: Ha $I \in \mathcal{J}$, akkor nyílt intervallum, azaz $I = (a,b)$, ahol $a,b \in K$. Mivel $S \subseteq K$ sűrű, ezért létezik $x \in S$, amelyre $a < x < b$, azaz $x \in (a,b) = I$, $S \cap I \neq \emptyset$. Definiáljunk egy $f: \mathcal{I} \to S$ függvényt, melyre $I \in \mathcal{I}$-re $f(I) \in S \cap I$. Ez a függvény injektív lesz. Legyen ugyanis $I,J \in \mathcal{I}$, $I \neq J$. Ekkor mivel $\mathcal{I}$ diszjunkt intervallumrendszer $I \cap J = \emptyset$. Indirekt tegyük fel, hogy $f(I) = f(J) = x \in S$. Ekkor $x \in (I \cap S) \cap (J \cap S) \subseteq I \cap J = \emptyset$, ami ellentmondás. Mivel f injektív, a képhalmaza legalább akkora, mint az értelmezési tartománya, azaz $|\mathcal{I}| \leq |S|$.

6.16. Állítás: *Minden K rendezett testre $\Sigma(K) \geq \Delta(K)$*

Bizonyítás: Legyen $S \subseteq K$ sűrű,$|S| = \Sigma(K)$. Ha $\kappa \in \{|\mathcal{I}|: \mathcal{I} \subseteq P(K) \text{ diszjunkt intervallumrendszer}\}$, akkor létezik $\mathcal{I} \subseteq P(K)$ diszjunkt intervallumrendszer, amelyre $|\mathcal{I}| = \kappa$. A 6.15. lemma alapján $\kappa = |\mathcal{I}| \leq |S| = \Sigma(K)$. Mivel κ-t tetszőlegesen választottuk a halmazból, $\Sigma(K)$ a halmaz minden eleménél nagyobb egyenlő, így a supremumánál is, azaz $\Sigma(K) \geq \Delta(K)$.

A következőkben egy szép minimax konstrukcióval belátjuk, hogy itt valójában egyenlőség van.

6.17. Lemma: *Legyen K rendezett test. Ekkor létezik $S \subseteq K$ sűrű és $\mathcal{I} \subseteq P(K)$ diszjunkt intervallumrendszer, amelyre $|S| = |\mathcal{I}|$.*

Bizonyítás: Legyen $\mathfrak{I} = \left\{\mathcal{I} \subseteq P(K): \mathcal{I} \text{ diszjunkt intervallumrendszer}, \forall I \in \mathcal{I}, l(I) \leq \frac{1}{3}\right\}$. Nyilván $\emptyset \in \mathfrak{I}$, így $\mathfrak{I} \neq \emptyset$.

Vegyünk egy $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{I}$ tartalmazásra vett láncot. Ha $I \in \cup\, \mathfrak{L}$, akkor $\exists \mathcal{I} \in \mathfrak{L} \subseteq \mathcal{I}$, amelyre $I \in \mathcal{I}$, ezért I nyílt intervallum és $l(I) \leq \frac{1}{3}$. Legyen $I, J \in \cup\, \mathfrak{L}$, melyekre $I \neq J$. Ekkor $\exists \mathcal{I}, \mathcal{J} \in \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{I}$, melyekre $I \in \mathcal{I}$ és $\mathcal{J} \in J$. Mivel $\mathfrak{L}$ lánc, ezért $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ vagy $J \subseteq \mathcal{I}$ teljesül. Szimmetria miatt feltehetjük, hogy az előbbi, azaz $I, J \in \mathcal{J}$. Mivel $\mathcal{J}$ diszjunkt intervallumrendszer, ezért $I \cap J \neq \emptyset$. Ezek alapján $\cup\, \mathfrak{L}$ diszjunkt intervallumrendszer és minden $I \in \cup\, \mathfrak{L}$-re $l(I) \leq \frac{1}{3}$, ezért $\cup\, \mathfrak{L} \in \mathfrak{I}$, az $\mathfrak{L}$ láncnak felső korlátja.

A Zorn-lemma miatt létezik egy $\mathcal{M} \in \mathfrak{I}$ tartalmazásra nézve maximális diszjunkt intervallumrendszer. Legyen $a \in K$ tetszőleges. Azt látjuk be, hogy $\exists I \in \mathcal{M}$, amelyre $I \subseteq (a, a+1)$. Ha $\forall I \in \mathcal{M}$-re $I \cap \left(a + \frac{1}{3}, a + \frac{2}{3}\right) = \emptyset$, akkor az $\mathcal{I}' = \mathcal{M} \cup \left\{\left(a + \frac{1}{3}, a + \frac{2}{3}\right)\right\}$ is diszjunkt intervallumrendszer lesz és mivel $l\left(a + \frac{1}{3}, a + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$, ezért ez sem tartalmaz $\frac{1}{3}$-nál hosszabb intervallumokat, azaz $\mathcal{I}' \in \mathfrak{I}$, de $\mathcal{I}' \supset \mathcal{M}$, ami ellent mond $\mathcal{M}$ maximalitásásnak. Ekkor van egy olyan $I \in \mathcal{M}$, melyre $I \cap \left(a + \frac{1}{3}, a + \frac{2}{3}\right) \neq \emptyset$. Ha $I = (b, c)$, akkor $c - b \leq \frac{1}{3}$, és $c \geq a + \frac{1}{3}$, mivel belemetsz, így $b \leq a$. Hasonló módon a metszés miatt $b \leq a + \frac{2}{3}$, így $c \leq a + 1$, tehát $I \subseteq (a, a+1)$.

Legyen minden $I \in \mathcal{M}$-re $r(I) \in I$ tetszőleges azzal a kikötéssel, hogy ha $0 \in I$, akkor $r(I) \neq 0$ (egy nyílt intervallumból nyilván tudunk más elemet választani). Legyen $R = (r(I): I \in \mathcal{M})$. Ekkor $|R| = |\mathcal{M}|$, mivel $r: \mathcal{M} \to R$ bijekció. Ha $a \in K$, akkor vegyünk egy $I \in \mathcal{M}$-et, amelyre $I \subseteq (a, a+1)$, ekkor persze $r(I) \in I \subseteq (a, a+1)$, azaz $a < r(I) < a + 1$, az R-nek bármely két 1 távolságra lévő pont között van eleme.

Legyen $S = \left\{\frac{x}{y}: x, y \in R\right\}$. Erre $|S| \leq |R|^2 = |R| = |\mathcal{M}|$ (ezek nyilván végtelen számosságok). Azt fogjuk belátni, hogy az $S \subseteq K$ sűrű. Legyen $a, b \in K$ $a < b$ tetszőleges.

Ekkor van egy olyan $y \in R$, amelyre $\frac{1}{b-a} < y < \frac{1}{b-a} + 1$, így $\frac{1}{y} < b - a$, továbbá van egy olyan $x \in R$, amelyre $ay < x < ay + 1$. Ekkor $\frac{x}{y} \in S$ és $a = \frac{ay}{y} < \frac{x}{y} < \frac{ay+1}{y} = a + \frac{1}{y} < a + (b - a) = b$. Mivel a, b tetszőleges volt, ezért $S \subseteq K$ sűrű, azaz a lemma állításának megfelel az $S, \mathcal{M}$ pár.

6.18. Tétel: *K rendezett testre $\Sigma(K) = \Delta(K)$ és $\Delta(K)$ definíciójában a supremum maximum.*

Bizonyítás: A 6.16. állítás miatt $\Sigma(K) \leq \Delta(K)$. A 6.17. lemma alapján vegyünk egy $S \subseteq K$ sűrű halmazt és agy $\mathcal{I} \subseteq P(K)$ diszjunkt intervallumrendszert, melyekre $|S| = |\mathcal{I}|$. Ekkor $\Sigma(K) \leq |S| = |\mathcal{I}| \leq \Delta(K) \leq \Sigma(K)$, tegát végig egyenlőség van, azaz $\Sigma(K) = \Delta(K)$ és $|\mathcal{I}| = \Delta(K)$, azaz a diszjunkt intervallumrendszerek számossága felveszi a supremumát, maximuma van.

A következőkben meg fogjuk mutatni, hogy κ reguláris számosságokra $\mathbb{K}_\kappa$ és $\mathbb{F}_\kappa$ (5.21 és 5.24. definícióból) szeparábilisek.

6.19. Állítás: *Ha K tetszőleges rendezett test, akkor* $|K(x)| = |K|$

Bizonyítás: Mivel $K \subseteq K(X)$, a $|K| \leq |K(x)|$ nyilván teljesül.

Először azt vegyük, hogy K végtelen. Valóban $1 > 0$ miatt $0 < 1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < \cdots$, ezek mind különböző elemei K-nak. Legyen $n \in \mathbb{N}$-re $K[x]_n = \{p \in K[x]: \deg p \leq n\}$. Ha $p \in K[x]_n$, akkor $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, ahol $a_n, \dots, a_0 \in K$. Az együtthatók $|K|^{n+1} = |K|$ -féleképpen választhatók és meghatározzák a polinomot, így $|K[x]_n| = |K|$. Mivel minden polinomnak egy természetes szám a foka (most itt a konstans 0-t 0 fokúnak tekintjük) $K[x] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K[x]_n$, így $|K[x]| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |K[x]_n| = |K|\aleph_0 = |K|$.

Ekkor persze $|K[x] \times K[x]| = |K[x]|^2 = |K[x]| \leq |K|$. Mivel $K(x) = Q(K[x])$ a $K[x] \times K[x]$ egy faktorhalmaza, ezért $|K(x)| \leq |K[x] \times K[x]| \leq |K|$, így nyilván $|K(x)| = |K|$.

6.20. Lemma: *Minden $\alpha \geq \omega$ rendszámra* $|\mathbb{K}_\alpha| = |\alpha|$

Bizonyítás: Először azt látjuk be, hogy $|\mathbb{K}_\alpha| \geq |\alpha|$. Legyen $X = \{x_\beta, \beta < \alpha\}$. Ha $\beta < \alpha$, akkor $x_\beta \in \mathbb{K}_{\beta+1} \subseteq \mathbb{K}_\alpha$, így $X \subseteq \mathbb{K}_\alpha$. Legyen $\beta, \gamma < \alpha$, melyekre $\beta \neq \gamma$. Szimmetria miatt feltehető, hogy $\beta < \gamma$. Ekkor $x_\beta \in \mathbb{K}_{\beta+1} \subseteq \mathbb{K}_\gamma$ és x_γ a $\mathbb{K}_\gamma$ minden eleménél nagyobb, így $x_\beta < x_\gamma$. Ez azt jelenti, hogy az x_β-k mind különbözőek, tehát $|\alpha| = |X| \leq |\mathbb{K}_\alpha|$.

Mivel $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, ezért $|\mathbb{K}_0| = \aleph_0$. Teljes indukcióval belátjuk, hogy $0 < n < \omega$ esetén $|\mathbb{K}_n| = \aleph_0$. A definíció szerint $\mathbb{K}_n = \mathbb{K}_{n-1}(x_{n-1})$ így a 6.19. állítás alapján

$|\mathbb{K}_n| = |\mathbb{K}_{n-1}(x_{n-1})| = |\mathbb{K}_n| = \aleph_0$. Nézzük most $\mathbb{K}_\omega$-t. Mivel $\mathbb{K}_\omega = \bigcap_{n<\omega} \mathbb{K}_n$, ezért $|\mathbb{K}_\omega| \leq \sum_{n<\omega} |\mathbb{K}_n| = \aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0 = |\omega|$.

Transzfinit indukcióval ω-ról indulva belátjuk, hogy minden $\alpha \geq \omega$-ra $|\mathbb{K}_\alpha| \leq |\alpha|$. $\alpha = \omega$-ra, mint láttuk, az állítás igaz. Ha $\alpha = \beta + 1$, akkor $\beta \geq \omega$, így $|\mathbb{K}_\beta| = |\beta|$. Mivel $\mathbb{K}_\alpha = \mathbb{K}_{\beta+1} = \mathbb{K}_\beta(x_\beta)$, a 6.19. állítás alapján $|\mathbb{K}_\alpha| = |\mathbb{K}_\beta(x_\beta)| = |\mathbb{K}_\beta| \leq |\beta| = |\beta + 1| = |\alpha|$.

Ha α limesz, akkor $\mathbb{K}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{K}_\beta$. Legyen $\beta < \alpha$ tetszőleges, ha $\beta \geq \omega$, akkor $|K_\beta| \leq |\beta| \leq |\alpha|$, ha pedig $\beta < \omega$, akkor $|K_\beta| = \aleph_0 \leq |\alpha|$, így minden esetben $|K_\beta| \leq |\alpha|$. Az unió számosságára: $|\mathbb{K}_\alpha| \leq \sum_{\beta<\alpha} |\mathbb{K}_\beta| \leq |\alpha||\alpha| = \alpha$. A transzfinit indukció működik, így minden $\alpha \geq \omega$ rendszámra $|\mathbb{K}_\alpha| \leq |\alpha|$, az előzővel összerakva $|\mathbb{K}_\alpha| = |\alpha|$.

6.21. Tétel: *Ha κ reguláris számosság, akkor $\mathbb{K}_\kappa$ szeparábilis*

Bizonyítás: A 6.20. lemma alapján, mivel $\kappa \geq \omega$, ezért $|\mathbb{K}_\kappa| = |\kappa| = \kappa$. Az 5.23. tétel alapján mivel κ reguláris, $\mathrm{cf}(\mathbb{K}_\kappa) = \kappa$. A 6.7. állítás miatt pedig $\Sigma(\mathbb{K}_\kappa) \geq \mathrm{cf}(\mathbb{K}_\kappa)$. Nyilván $\mathbb{K}_\kappa \subseteq \mathbb{K}_\kappa$ önmagában sűrű, hiszen $a, b \in \mathbb{K}_\kappa$, $a < b$ esetén $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{K}_\kappa$, $a < \frac{a+b}{2} < b$, így $\Sigma(\mathbb{K}_\kappa) \leq |\mathbb{K}_\kappa|$. Ekkor a következő egyenlőtlenséglánc írható fel: $\kappa = \mathrm{cf}(\mathbb{K}_\kappa) \leq \Sigma(\mathbb{K}_\kappa) \leq |\mathbb{K}_\kappa| = \kappa$, tehát végig egyenlőség van, azaz $\mathrm{cf}(\mathbb{K}_\kappa) = \Sigma(\mathbb{K}_\kappa) = \kappa$, $\mathbb{K}_\kappa$ szeparábilis.

6.22. Tétel: *Ha κ reguláris számosság, akkor $\mathbb{F}_\kappa$ szeparábilis*

Bizonyítás: Az előző tételt használjuk fel, miszerint $\mathrm{cf}(\mathbb{K}_\kappa) = \Sigma(\mathbb{K}_\kappa) = \kappa$. Mivel $\mathbb{F}_\kappa$ a $\mathbb{K}_\kappa$ teljessé tétele, ezért $\mathbb{K}_\kappa \subseteq \mathbb{F}_\kappa$ sűrű, a 4.5. állítás miatt $\mathrm{cf}(\mathbb{F}_\kappa) = \mathrm{cf}(\mathbb{K}_\kappa) = \kappa$ és a 6.11. lemma miatt $\Sigma(\mathbb{K}_\kappa) = \Sigma(\mathbb{F}_\kappa) = \kappa$, így $\mathbb{F}_\kappa$-ról is beláttuk, hogy szeparábilis.

7. Monoton sorozatok konvergenciája

7.1. Állítás: *Legyen K rendezett test, $\kappa \leq \mathrm{cf}(K)$ számosság és $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ egy K-ban futó κ-sorozat, ami konvergens. Ekkor a_α korlátos.*

Bizonyítás: Legyen $a \in K$ az a_α határértéke. Ekkor $\exists \beta < \kappa, \forall \alpha \geq \beta$-ra $|a_\alpha - a| < 1$, így $a_\alpha < a + 1$. Másrészt $\left|\{a_\gamma : \gamma < \beta\}\right| \leq |\beta| < \kappa \leq \mathrm{cf}(K)$, ezért az $\{a_\gamma : \gamma < \beta\}$ halmaz nem kofinális K-ban, így van egy M felső korlátja. A $\max(M, a+1)$ jó felső korlát az egész a_α sorozatra, ugyanis $\alpha < \kappa$-ra ha $\alpha < \beta$, akkor $a_\alpha \leq M \leq \max(M, a+1)$, ha $\alpha \geq \beta$, akkor $a_\alpha \leq a + 1 \leq \max(M, a+1)$.

Ezzel beláttuk, hogy a sorozat felülről korlátos. Az alulról korlátossághoz ugyanígy beláthatjuk azt is, hogy $-a_\alpha$ felülről korlátos.

Itt fontos feltétel, hogy $\kappa \leq \mathrm{cf}(K)$ teljesüljön, más esetben az állítás nem feltétlenül igaz, ahogy a következőkben látni fogjuk.

7.2. Állítás: *Ha K rendezett test, $\kappa > \mathrm{cf}(K)$ számosság, akkor van olyan $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ egy K-ban futó κ-sorozat, ami konvergens, de nem korlátos.*

Bizonyítás: Vegyük a $(t_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ sorozatot a 3.3. állítás konstrukciója szerint. Legyen $\alpha < \kappa$-ra $a_\alpha = \begin{Bmatrix} t_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(K) \\ 0 : \alpha \geq \mathrm{cf}(K) \end{Bmatrix}$. Ekkor nyilván $a_\alpha \to 0$, hiszen tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz a $\mathrm{cf}(K) < \kappa$ jó küszöbindex lesz, de a sorozat nem korlátos, mert már a t_α-k is kofinális részhalmazt alkotnak K-ban.

7.3. Lemma: *Legyen K rendezett test, κ számosság, $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ egy K-ban futó monoton növő κ-sorozat és $a \in K$. Ekkor $a_\alpha \to a$ akkor és csak akkor, ha a következő 2 tulajdonság teljesül:*

1. Minden $\alpha < \kappa$-ra $a_\alpha \leq a$.

2. Minden $b < a$-hoz van olyan $\beta < \kappa$, amelyre $a_\beta > b$.

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy $a_\alpha \to a$. Indirekt tegyük fel, hogy az 1. tulajdonság nem teljesül, azaz valamilyen $\alpha < \kappa$-ra $a_\alpha > a$, azaz $a_\alpha - a > 0$. A konvergencia miatt $\exists \beta < \kappa, \forall \gamma \geq \beta$-ra $\left|a_\gamma - a\right| < a_\alpha - a$. Legyen $\beta_1 = \max(\alpha, \beta) < \kappa$. Ekkor $\left|a_{\beta_1} - a\right| < a_\alpha - a$, tehát $a_{\beta_1} < a_\alpha$. Másrészt a monotonitás miatt $\beta_1 \geq \alpha$, így $a_{\beta_1} > a_\alpha$, ami ellentmondás.

A 2. tulajdonság bizonyításához legyen $b < a$, ekkor $a - b > 0$, a konvergencia miatt $\exists \beta < \kappa, \forall \gamma \geq \beta$-ra $\left|a_\gamma - a\right| < a - b$, jelesül $\left|a_\beta - a\right| < a - b$, így $a_\beta > b$.

Most tegyük fel, hogy 1. és 2. teljesül. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A 2. tulajdonság miatt $\exists\beta < \kappa$, amelyre $a_\beta > a - \varepsilon$. Ha $\alpha \geq \beta$, akkor a monotonitás miatt $a_\alpha \geq a_\beta > a - \varepsilon$, az 1. tulajdonság miatt pedig $a_\alpha \leq a$, így nyilván $|a_\alpha - a| < \varepsilon$.

7.4. Állítás: *Ha K rendezett test, κ számosság, $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ egy K-ban futó monoton növő, konvergens κ-sorozat, akkor a_α korlátos.*

Bizonyítás: A monotonitás miatt nyilván $a_0 \leq a_\alpha$ minden $\alpha < \kappa$-ra, így az alulról korlátosság triviális. Ha $a_\alpha \to a$, akkor a 7.3. lemma 1. tulajdonsága miatt a felső korlát lesz, így a sorozat korlátos.

7.5. Állítás: *Legyen K rendezett test, κ számosság, $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ egy K-ban futó monoton növő κ-sorozat és $a \in K$. Ekkor $a_\alpha \to a$ akkor és csak akkor, ha van egy olyan $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\lambda}$ kofinális részsorozata, amelyre $a_{\alpha_\xi} \to a$.*

Bizonyítás: Ha $a_\alpha \to a$, akkor nyilván az egész sorozat megfelelő részsorozat lesz $\lambda = \kappa$-val és $\alpha_\xi = \xi$-vel.

Tegyük fel most, hogy $a_{\alpha_\xi} \to a$ valamely $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\lambda}$ kofinális részsorozatra. Be fogjuk látni, hogy a_α teljesíti a 7.3. lemma tulajdonságait. Az 1. tulajdonsághoz legyen $\alpha < \kappa$ tetszőleges. Mivel az α_ξ-k kofinálisak κ-ban, ezért van egy olyan $\xi < \lambda$, amelyre $\alpha_\xi \geq \alpha$. Az a_{α_ξ} teljesíti az 1. tulajdonságot, így $a_{\alpha_\xi} \leq a$. A monotonitás miatt pedig $a_\alpha \leq a_{\alpha_\xi} \leq a$.

Vegyünk egy $b < a$-t. Mivel az a_{α_ξ} teljesíti a 2. tulajdonságot, létezik $\eta < \lambda$, amelyre $a_{\alpha_\eta} > b$, ekkor $\beta = \alpha_\eta$ megfelelő lesz a 2. tulajdonságra az a_α sorozatnak b-re.

7.6. Lemma: *Legyen K rendezett test, κ számosság, $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ egy K-ban futó monoton növő κ-sorozat. Ekkor a_α egy ponton túl stabilizálódik, vagy létezik egy $\lambda \leq \kappa$ számosság és $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\lambda}$ szigorúan monoton növő kofinális részsorozata a_α -nak.*

Bizonyítás: Legyen $X = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Ha X-nek van legnagyobb eleme m, akkor persze $m = a_\beta$ valamely $\beta < \kappa$-ra. Ha $\gamma \geq \beta$, akkor a monotonitás miatt $a_\gamma \geq a_\beta$, de persze $a_\gamma \leq m = a_\beta$, mert az volt a legnagyobb elem, így $a_\gamma = a_\beta$, tehát a sorozat β felett stabilizálódik $a = a_\beta$-ra.

Ha X-nek nincs legnagyobb eleme, akkor a kofinalitása egy végtelen számosság. Legyen $\lambda = \mathrm{cf}(X) \leq |X| \leq \kappa$. Hausdorff tétele miatt $\exists B \subseteq X$ kofinális, melyre $(B, <)$ jólrendezett és $\mathrm{tp}(B, <) = \lambda$. Ekkor B elemei a rendezésük alapján felsorolhatóak egy $\left(b_\xi\right)_{\xi<\lambda}$ sorozatba.

Minden $\xi < \lambda$-ra $b_\xi \in X$, így létezik egy $\alpha < \kappa$, amelyre $b_\xi = a_\alpha$. Válasszunk minden $\xi < \lambda$-hoz egy $\alpha_\xi < \kappa$-t, amire ez teljesül. Azt kell belátni, hogy az $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\lambda}$ kofinális részsorozat. Ha $\xi < \zeta < \lambda$, akkor nyilván $a_{\alpha_\xi} = b_\xi < b_\zeta = a_{\alpha_\zeta}$, ha $\alpha_\xi \geq \alpha_\zeta$ lenne, akkor a monotonitás miatt $a_{\alpha_\xi} \geq a_{\alpha_\zeta}$, ami ellentmondás lenne, így $\alpha_\xi < \alpha_\zeta$, tehát az α_ξ sorozat szigorúan monoton növő, tehát $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\lambda}$ valóban részsorozat.

Kell még, hogy kofinális részsorozat. Indirekten tegyük fel, hogy $\exists\beta < \kappa$, amelyre $\alpha_\xi < \beta$ minden $\xi < \lambda$-ra. Ekkor persze a monotonitás miatt $b_\xi = a_{\alpha_\xi} \leq a_\beta$ minden $\xi < \lambda$. Ha $a \in X$, akkor mivel $B \subseteq X$ kofinális, van egy olyan ξ, amelyre $b_\xi \geq a$, de ekkor $a_\beta \geq b_\xi \geq a$, tehát a_β maximális elem X-ben, amit már korábban kizártunk. Így beláttuk, hogy $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\lambda} = \left(b_\xi\right)_{\xi<\lambda}$ egy szigorúan monoton növő kofinális részsorozata a_α-nak.

7.7. Definíció: *Egy K rendezett test Cauchy-Weierstrass (a továbbiakban röviden CW) tulajdonságú egy κ számmosságra, ha minden $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ K-ban futó korlátos, monoton növő κ-sorozat konvergens.*

7.8. Állítás: *Egy K rendezett test pontosan akkor CW-κ, ha CW-*$\mathrm{cf}(\kappa)$

Bizonyítás: Legyen $(\alpha_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ egy szigorúan monoton növő kofinális részsorozat κ-ban. Először tegyük fel, hogy K test CW-κ és legyen $(a_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ monoton növő korlátos sorozat. Mivel az α_ξ-k kofinálisak κ-ban, ezért $\alpha < \kappa$-ra $\{\xi | \alpha_\xi \geq \alpha\} \neq \emptyset$ és a rendszámok jólrendezettek, így a $\zeta(\alpha) = \min\{\xi | \alpha_\xi \geq \alpha\}$ operáció értelmes. Könnyen ellenőrizhető, hogy ζ monoton nő és $\zeta(\alpha_\xi) = \xi$ minden $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$-ra.

Legyen $b_\alpha = a_{\zeta(\alpha)}$ $\alpha < \kappa$-ra. Ha M egy felső korlátja az a_α sorozatnak, akkor nyilván a $b_\alpha = a_{\zeta(\alpha)}$-nak is. Ha $\alpha \leq \gamma < \kappa$, akkor $\zeta(\alpha) \leq \zeta(\gamma)$, így az eredeti sorozat monotonitása miatt $b_\alpha = a_{\zeta(\alpha)} \leq a_{\zeta(\gamma)} = b_\gamma$, tehát ez a sorozat is monoton növő. A CW-κ tulajdonság miatt b_α konvergens, azaz $\exists a \in K: b_\alpha \to a$.

A 7.3. tulajdonságot ellenőrizzük a_ξ-re. Ha $\xi < \mathrm{cf}(K)$, akkor $a_\xi = a_{\zeta(\alpha_\xi)} = b_{\alpha_\xi} \leq a$, mert az 1. tulajdonság teljesül a b_α-ra, így az a_ξ-re. Ha $b < a$, akkor létezik egy $\alpha < \kappa$, amelyre $b_\alpha > b$ a b_α-ra vonatkozó 2-es tulajdonság miatt, de nyilván $a_{\zeta(\alpha)} = b_\alpha > b$, tehát a_ξ-re is igaz a 2. tulajdonság, azaz $a_\xi \to a$

A megfordításhoz tegyük fel, hogy K test CW-$\mathrm{cf}(K)$ és legyen $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ egy K-ban futó monoton növő κ sorozat. Ekkor az $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ egy korlátos, monoton növő $\mathrm{cf}(K)$ sorozat.

Ekkor a CW-cf(K) tulajdonság miatt a_{α_ξ} konvergens, azaz $a_{\alpha_\xi} \to a$ valamely $a \in K$-ra. Mivel a_{α_ξ} kofinális részsorozata a_α-nak, a 7.5. állítás alapján $a_\alpha \to a$.

Ez alapján a CW-κ tulajdonságot elég csak reguláris számosságokra vizsgálni, mert ha κ szinguláris, akkor nézhetjük helyette cf(κ)-t.

7.9. Állítás: *Ha κ reguláris, akkor a CW-κ tulajdonságot elég csak szigorúan monoton növő sorozatokra megkövetelni.*

Bizonyítás: Belátjuk, hogy ha szigorúan monoton, korlátos sorozatokra igaz az állítás, akkor minden monoton növőre igaz. Legyen $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ egy monoton növő korlátos sorozat K-ban. A 7.6. lemma miatt a_α egy ponton túl stabilizálódik, vagy van egy $\lambda \leq \kappa$-ra $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\lambda}$ szigorúan monoton növő kofinális részsorozata. Az első esetben a sorozat nyilván konvergens. A másik esetben, mivel κ reguláris, egy $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\lambda}$ részsorozat csak akkor lehet kofinális, ha $\lambda \geq \mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$, tehát $\lambda = \kappa$. A szigorúan monoton növő sorozatokra vonatkozó CW-κ miatt a_{α_ξ} konvergens így a 7.5. állítás alapján a_α is konvergens.

7.10. Állítás: *Legyen K rendezett test, $\kappa > \mathrm{P}(K)$ reguláris. Ekkor minden $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ monoton növő sorozat egy ponton túl stabilizálódik.*

Bizonyítás: A 7.6. lemma miatt a_α egy ponton túl stabilizálódik, vagy van egy $\lambda \leq \kappa$-ra $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\lambda}$ szigorúan monoton növő kofinális részsorozata. Indirekt tegyük fel, hogy az utóbbi teljesül. Az előzőhöz hasonló módon, mivel κ reguláris, ezért $\lambda = \kappa$ teljesül. De ekkor $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\kappa}$ egy $\mathrm{P}(K)$-nál hosszabb szigorúan monoton növő sorozat K-ban, ami ellentmond a $\mathrm{P}(K)$ definíciójának.

Mivel minden sorozat, ami stabilizálódik konvergens, ezért $\kappa > \mathrm{P}(K)$ reguláris számosságokra mindig teljesülni fog a CW-κ tulajdonság.

7.11. Állítás: *Legyen K rendezett test, $\kappa < \mathrm{cf}(K)$, akkor a CW-κ nem teljesül.*

Bizonyítás: Transzfinit rekurzióval definiáljunk egy $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ monoton növő sorozatok. Legyen $a_0 = 0$ és rákövetkezőre $a_{\alpha+1} = a_\alpha + 1$. Ha α limesz, akkor az $\left|\{a_\beta : \beta < \alpha\}\right| = |\alpha| < \kappa < \mathrm{cf}(K)$, tehát $\{a_\beta : \beta < \alpha\}$ korlátos K-ban. Legyen a_α tetszőleges olyan, amely mindegyiknél nagyobb. A definícióból nyilván látszik, hogy a sorozat monoton növő, ugyanis minden tagot úgy adtunk meg, hogy az előzőeknél nagyobb legyen. Mivel az $|\{a_\alpha : \alpha < \kappa\}| = \kappa < \mathrm{cf}(K)$, ezért a teljes sorozat is korlátos lesz.

Ha CW-κ teljesülne, akkor ez konvergens lenne, de meg fogjuk mutatni, hogy nem az. Indirekt tegyük fel, hogy $a_\alpha \to a$. Ekkor $\exists\beta > 0, \forall\alpha \geq \beta$-ra $|a_\alpha - a| < \frac{1}{2}$, jelesül $|a_\beta - a| < \frac{1}{2}$ és $|a_{\beta+1} - a| < \frac{1}{2}$. A definíció szerint $a_{\beta+1} = a_\beta + 1$, így $1 = |a_{\beta+1} - a_\beta| \leq |a_{\beta+1} - a| + |a_\beta - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, ami ellentmondás.

Az előző két állítás alapján elég a CW tulajdonságot olyan κ reguláris számosságokra nézni, melyekre $\mathrm{cf}(K) \leq \kappa \leq \mathrm{P}(K)$. A legtöbbször szeparábilis rendezett testeket nézünk, melyekre $\mathrm{cf}(K) = \mathrm{P}(K)$, ami indokolja a következő definíciót.

7.12. Definíció: *A K rendezett test CW tulajdonságú, ha CW-$\mathrm{cf}(K)$ tulajdonságú.*

Felmerül a kérdés, hogy a valós számok testjén kívül létezik-e még ilyen, esetleg van-e a teljessé tételhez hasonló konstrukció. Bár azt még nem tudjuk, hogy minden rendezett testnek van-e CW tulajdonságú bővítése, de a továbbikaban látni fogjuk, hogy a már korábban megkonstruált $\mathbb{F}_\kappa$ CW tulajdonságú, ha κ reguláris.

7.13. Állítás: *Ha K test, $a \in K(x)$, akkor létezik $P, q, r \in K[x]$, $q \neq 0$, hogy $a = P + \frac{r}{q}$ és $\deg(r) < \deg(q)$ (ebbe azt a lehetőséget is beleértve, hogy $r = 0$). Ha $a = P' + \frac{r'}{q'}$ egy másik ilyen felírás, akkor $P = P'$.*

Bizonyítás: Ha $a \in K(x) = Q(K[x])$, akkor a hányadostest definíciója alapján van $p, q \in K[x], q \neq 0$, hogy $a = \frac{p}{q}$. Osszuk le a $K[x]$ polinomgyűrűben maradékosan p-t q-val, ekkor $p = Pq + r$, ahol $\deg(r) < \deg(q)$, így $a = \frac{p}{q} = \frac{Pq+r}{q} = \frac{Pq}{q} + \frac{r}{q} = P + \frac{r}{q}$.

Legyen $P' + \frac{r'}{q'} = P + \frac{r}{q}$ egy másik felírás. Ekkor $P' - P = \frac{r}{q} - \frac{r'}{q'} = \frac{rq' - r'q}{qq'}$. A $P' - P \in K[x]$. Indirekten tegyük fel, hogy $P \neq P'$, vagyis $P' - P \neq 0$. Az előző egyenletet beszorozva $(P' - P)qq' = rq' - r'q$, a baloddal foka $\deg(P' - P) + \deg(q) + \deg(q') \geq \deg(q) + \deg(q')$. A jobboldalon az egyes tagok foka $\deg(r) + \deg(q') < \deg(q) + \deg(q')$ és $\deg(r') + \deg(q) < \deg(q) + \deg(q')$, tehát a jobboldal foka kisebb, mint $\deg(q) + \deg(q')$. Mivel egy polinom foka egyértelmű, ha a két oldal foka különböző, egyenlőség nem állhat fenn, így ellentmondáshoz jutunk.

7.14. Definíció: *Ha K test, $a \in K(x)$, akkor $\mathrm{poly}_K(a) = P$, ahol $a = P + \frac{r}{q}$, $P, q, r \in K[x]$, $q \neq 0$ és $\deg(r) < \deg(q)$ .Ez a 7.13. állítás alapján létezik és jól definiált. A $\mathrm{poly}_K(a)$-t az a polinomrészének nevezzük, az $a - \mathrm{poly}_K(a)$-t pedig az a törtrészének.*

Nyilvánvaló, hogy ha $a \in K[x]$, akkor az $a = a + \frac{0}{1}$ jó felírás miatt $\text{poly}_K(a) = a$. Mivel $\text{poly}_K(a) \in K[x]$, ez az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $a \in K[x]$.

7.15. Állítás: *Ha K rendezett test, $a, b \in K(x)$, melyekre $\text{poly}_K(a) < \text{poly}_K(b)$, akkor $a < b$.*

Bizonyítás: Legyen $P = \text{poly}_K(a)$, $P' = \text{poly}_K(b)$, melyekre $P < P'$, ekkor léteznek $q, q', r, r' \in K[x]$, melyekre $q, q' \neq 0$, $\deg(r) < \deg(q)$, $\deg(r') < \deg(q')$ és $a = P + \frac{r}{q}$, $b = P' + \frac{r'}{q'}$. Feltehető, hogy $q > 0$, ugyanis ha $q < 0$ lenne, akkor $\frac{r}{q} = \frac{-r}{-q}$, tehát a q, r pár $-q, -r$-re cserélhető, ahol $-q > 0$. Hasonló módon az is feltehető, hogy $q' > 0$.

A $b - a = P' + \frac{r'}{q'} - P - \frac{r}{q} = (P' - P) + \frac{r'}{q'} - \frac{r}{q}$, így $(b - a)qq' = (P' - P)qq' + \frac{r'}{q'}qq' - \frac{r}{q}qq' = (P' - P)qq' + r'q - rq'$. Ez $K[x]$-ben van, az első tag foka $\deg(P' - P) + \deg(q) + \deg(q') \geq \deg(q) + \deg(q')$, és a szorzat minden tagja pozitív, ezért $(P' - P)qq' > 0$, vagyis a főegyütthatója pozitív. A többi tag foka $\deg(r) + \deg(q') < \deg(q) + \deg(q')$ és $\deg(r') + \deg(q) < \deg(q) + \deg(q')$, így ezek a tagok nem növelik a fokszámot, és a főegyütthatót sem módosítják, azaz $(b - a)qq'$ főegyütthatója pozitív, vagyis $(b - a)qq' > 0$. A $K(x)$ rendezett testben már leoszthatunk a pozitív qq'-vel, így $b - a > 0$, vagyis $a < b$.

7.16. Lemma: *Ha K rendezett test, $a, b \in K(x)$, melyekre $\text{poly}_K(a) < \text{poly}_K(b)$, akkor létezik $R \in K[x]$, hogy $a < R < b$.*

Bizonyítás: Legyen $R = \frac{\text{poly}_K(a) + \text{poly}_K(b)}{2}$. Ekkor persze $R \in K[x]$, így $\text{poly}_K(R) = R = \frac{\text{poly}_K(a) + \text{poly}_K(b)}{2}$, tehát $\text{poly}_K(a) < \text{poly}_K(R) < \text{poly}_K(b)$. A 7.15. állítás alapján ekkor $a < R < b$.

7.17. Állítás: *Legyen K rendezett test és $P \subseteq K[x]$ szelet. Ekkor ha $K \nsubseteq P$, akkor minden $a \in P$-re, ha van olyan $c \in K$, hogy $a > c$, akkor $\text{poly}_K(a) \in K$ (azaz konstans).*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz van olyan $a \in P, a > c \in K$, hogy $\text{poly}_K(a)$ egy legalább első fokú polinom. Ha $\text{poly}_K(a)$ főegyütthatója negatív, akkor $\text{poly}_K(a) - c$ főegyütthatója is ugyanaz a negatív szám, így $\text{poly}_K(a) - c < 0$, azaz $\text{poly}_K(a) < c$. Mivel $c \in K \subseteq K(x)$, ezért $\text{poly}_K(c) = c$, a 7.15. állítás alapján $a < c$, amiről feltettük, hogy nem igaz. Ekkor $\text{poly}_K(a)$ pozitív főegyütthatójú legalább első fokú polinom. Legyen $b \in K$ tetszőleges. Ekkor $\text{poly}_K(a) - b \in K[x]$, és a főegyütthatója azonos $\text{poly}_K(a)$ főegyütthatójával ami pozitív, így $\text{poly}_K(a) - b > 0$, vagyis $b < \text{poly}_K(a)$. Mivel $b \in K[x]$ $\text{poly}_K(b) = b < \text{poly}_K(a)$, a 7.15. állítás alapján $b < a$. Mivel P szelet és $a \in P$, így $b \in P$, de $b \in K$ választása tetszőleges volt, azaz $K \subseteq P$, ami ellent mond az állítás feltételének.

7.18. Lemma: *Legyen K rendezett test és $P \subseteq K[x]$ szelet, amelyre $K \nsubseteq P$ és $P \cap K \neq \emptyset$. Ha $a, b \in P$ olyanak, hogy a, b nagyobbak $P \cap K$ minden eleménél, akkor $\forall \varepsilon \in K, \varepsilon > 0$-ra $|a - b| < \varepsilon$.*

Bizonyítás: Ha $a = b$, az állítás nyilván teljesül. Szimmetria miatt feltehető, hogy $a < b$. Legyen $c \in P \cap K$, ekkor persze $c < a, b$. Ha $\mathrm{poly}_K(a) < \mathrm{poly}_K(b)$, akkor a 7.16. lemma miatt létezik $R \in K[x]$, amelyre $a < R < b$. Nyilván $R < b$ miatt $R \in P$, a $c < a < R$ miatt alkalmazható a 7.17. állítás, miszerint $R = \mathrm{poly}_K(R) \in K$. De ekkor $R \in P \cap K$ és $a < R$, ami ellent mond annak, hogy a nagyobb $P \cap K$ minden eleménél.

Így csak az lehet, hogy $\mathrm{poly}_K(a) = \mathrm{poly}_K(b) = R$. Ekkor léteznek $q, q', r, r' \in K[x]$, melyekre $q, q' \neq 0$, $\deg(r) < \deg(q)$, $\deg(r') < \deg(q')$ és $a = R + \frac{r}{q}$, $b = R + \frac{r'}{q'}$. Itt is feltehető, hogy $q, q' > 0$. Ekkor $|b - a| = b - a = \frac{r'}{q'} - \frac{r}{q}$. Legyen $\varepsilon \in K, \varepsilon > 0$. Ekkor $\varepsilon q q'$ pozitív főegyütthatójú $\deg(q) + \deg(q')$ fokú. A $(b - a)qq' = r'q - rq'$ polinom egyik tagjának a foka $\deg(r) + \deg(q') < \deg(q) + \deg(q')$, a másiknak $\deg(r') + \deg(q) < \deg(q) + \deg(q')$, így a polinom foka kisebb, mint $\deg(q) + \deg(q')$, tehát $\varepsilon qq' - (b - a)qq'$ főegyütthatója, ugyanaz, mint $\varepsilon qq'$ főegyütthatója, ami pozitív, így $\big(\varepsilon - (b - a)\big)qq' = \varepsilon qq' - (b - a)qq' > 0$, így $\varepsilon - (b - a)$, vagyis $|b - a| = b - a < \varepsilon$.

7.19. Lemma: *Ha $\kappa > \aleph_0$ reguláris számosság, $P \subseteq \mathbb{K}_\kappa$ szelet, melyre $\emptyset \neq P \neq \mathbb{K}_\kappa$ és $\mathrm{cf}(P) = \kappa$, akkor létezik $\left(c_\xi\right)_{\xi < \kappa}$ P-ben futó, szigorúan monoton növő Cauchy sorozat, amely kofinális P-ben.*

Bizonyítás: Mivel $\emptyset \neq P = \bigcup_{\alpha<\kappa} P \cap \mathbb{K}_\alpha$, ezért létezik egy $\beta_{0,1} < \kappa$, hogy $P \cap \mathbb{K}_{\beta_{0,1}} \neq \emptyset$. Ha minden $\alpha < \kappa$-ra $\mathbb{K}_\alpha \subseteq P$ teljesülne, akkor $\mathbb{K}_\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathbb{K}_\alpha \subseteq P$ lenne, ami ellentmond a feltételeknek, így létezik $\beta_{0,2} < \kappa$, hogy $\mathbb{K}_{\beta_{0,2}} \nsubseteq P$. Legyen $\beta_0 = \max\big(\beta_{0,1}, \beta_{0,2}\big)$. Ha $\alpha < \kappa$, $\alpha \geq \beta_0$, akkor $\alpha \geq \beta_{0,1}$ miatt $P \cap \mathbb{K}_\alpha \supseteq P \cap \mathbb{K}_{\beta_{0,1}} \neq \emptyset$ és $\alpha \geq \beta_{0,2}$ miatt $\mathbb{K}_\alpha \nsubseteq P$, hiszen ha $\mathbb{K}_\alpha \subseteq P$ lenne, akkor $\mathbb{K}_{\beta_{0,2}} \subseteq \mathbb{K}_\alpha \subseteq P$ lenne, ami nem igaz.

Legyen $X = \{\alpha < \kappa | \alpha \geq \beta_0, P \cap \mathbb{K}_\alpha \text{ nem kofinális } P \cap \mathbb{K}_{\alpha+1} \text{-ben}\}$. Azt fogjuk belátni, hogy X kofinális κ-ban. Indirekt tegyük fel, hogy nem így van és legyen $\beta < \kappa$ az X felső korlátja. Ekkor tetszőleges $\alpha \leq \kappa, \alpha \geq \beta + 1$-ra a $P \cap \mathbb{K}_{\beta+1}$ kofinális lesz $P \cap \mathbb{K}_\alpha$-ban. Ezt $\beta + 1$-től induló transzfinit indukcióval látjuk be. Ha $\alpha = \beta + 1$-ra $P \cap \mathbb{K}_{\beta+1}$ nyilván kofinális önmagában. Legyen $\alpha \geq \beta + 1$ amelyről már tudjuk, hogy $P \cap \mathbb{K}_{\beta+1}$ kofinális $P \cap \mathbb{K}_\alpha$ -ban. Ekkor $\alpha > \beta$ miatt $\alpha \notin X$, hiszen β az X felső korlátja, azaz $P \cap \mathbb{K}_\alpha$ kofinális $P \cap \mathbb{K}_{\alpha+1}$-ben. Kofinális részhalmaz kofinális részhalmaza is kofinális, így $P \cap \mathbb{K}_{\beta+1}$ kofinális $P \cap \mathbb{K}_{\alpha+1}$-ben is. Legyen $\alpha \leq \kappa$ limesz, akkor $\mathbb{K}_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} \mathbb{K}_\gamma$. Ha $a \in P \cap \mathbb{K}_\alpha$, akkor létezik $\gamma < \alpha$, hogy $a \in P \cap \mathbb{K}_\gamma$. Feltehető, hogy $\gamma \geq \beta + 1$, hiszen ha $\gamma < \beta + 1$, akkor $\mathbb{K}_\gamma \subseteq \mathbb{K}_{\beta+1}$, így $a \in P \cap \mathbb{K}_\alpha \subseteq P \cap \mathbb{K}_{\beta+1}$, így γ helyére $\beta + 1$-et írhatunk. Az indukciós feltevésből $P \cap \mathbb{K}_{\beta+1}$

kofinális $P \cap \mathbb{K}_\gamma$-ben, ezért létezik egy $b \in P \cap \mathbb{K}_{\beta+1}$, melyre $b \geq a$. Mivel $a \in P \cap \mathbb{K}_\alpha$ tetszőleges volt, ezért $P \cap \mathbb{K}_{\beta+1}$ kofinális $P \cap \mathbb{K}_\alpha$-ban.

Ezt az állítást $\alpha = \kappa$-ra alkalmazva $P \cap \mathbb{K}_{\beta+1}$ kofinális $P \cap \mathbb{K}_\kappa = P$-ben, így $\mathrm{cf}(P) = \mathrm{cf}(P \cap \mathbb{K}_{\beta+1}) \leq |P \cap \mathbb{K}_{\beta+1}| \leq |\mathbb{K}_{\beta+1}| = \max(|\beta+1|, \aleph_0) < \kappa$. Ez ellent mond a $\mathrm{cf}(P) = \kappa$ feltételnek, így valóban X kofinális κ-ban. Ekkor nyilván $\mathrm{tp}(X) \geq \mathrm{cf}(X) = \kappa$, de $X \subseteq \kappa$ miatt $\mathrm{tp}(X) \leq \kappa$, így $\mathrm{tp}(X) = \kappa$, vagyis X κ típusban rendezett.

Legyen $X = (\alpha_\xi)_{\xi<\kappa}$, ahol az α_ξ sorozatban az X elemeit soroljuk fel növekvő sorrendben. Válasszunk minden $\xi < \kappa$-ra egy $c_\xi \in P \cap \mathbb{K}_{\alpha_\xi+1}$-et, amely nagyobb a $P \cap \mathbb{K}_{\alpha_\xi}$ minden eleménél. Mivel $\alpha_\xi \in X$, ilyen mindig választható. Ellenőrizzük a sorozat tulajdonságait. A sorozat nyilván P-ben fut, hiszen tetszőleges $\xi < \kappa$-re $c_\xi \in P \cap \mathbb{K}_{\alpha_\xi+1} \subseteq P$. A szigorú monoton növekedéshez legyen $\xi < \zeta < \kappa$. Ekkor $\alpha_\zeta > \alpha_\xi$ miatt $\alpha_\zeta \geq \alpha_\xi + 1$, így $c_\xi \in P \cap \mathbb{K}_{\alpha_\xi+1} \subseteq P \cap \mathbb{K}_{\alpha_\zeta}$ és c_ζ nagyobb a $P \cap \mathbb{K}_{\alpha_\zeta}$ minden eleménél, jelesül $c_\zeta > c_\xi$. A kofinális tulajdonsághoz legyen $a \in P$ tetszőleges. Mivel $a \in P = \bigcup_{\gamma<\kappa} P \cap \mathbb{K}_\gamma$, így van egy $\gamma < \kappa$, amelyre $a \in P \cap \mathbb{K}_\gamma$. Legyen $\xi < \kappa$ olyan, hogy $\alpha_\xi \geq \gamma$. Ekkor $a \in P \cap \mathbb{K}_\gamma \subseteq P \cap \mathbb{K}_{\alpha_\xi}$, ugyanakkor c_ξ nagyobb a $P \cap \mathbb{K}_{\alpha_\xi}$ minden eleménél, így $c_\xi > a$. Mivel $a \in P$ tetszőleges volt, így a sorozat kofinális P-ben.

Hátra van még a Cauchy tulajdonság bizonyítása. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{K}_\kappa, \varepsilon > 0$. Ekkor $\varepsilon \in \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathbb{K}_\alpha$ miatt létezik $\beta < \kappa$, hogy $\varepsilon \in \mathbb{K}_\beta$. Legyen $\eta < \kappa$ olyan, hogy $\alpha_\eta \geq \beta + 1$. Azt fogjuk belátni, hogy ez jó küszöbindex ε-hoz, azaz ha $\xi, \zeta < \kappa$, $\xi, \zeta \geq \eta$ tetszőleges, akkor $|c_\xi - c_\zeta| < \varepsilon$. Ha $\xi = \zeta$, akkor az állítás nyilvánvaló, a szimmetria miatt feltehetjük, hogy $\xi < \zeta$.

Tetszőleges $a \in \mathbb{K}_\kappa$-ra definiálhatjuk az a rangját, úgy, hogy $\mathrm{rk}(a) = \min\{\alpha : a \in \mathbb{K}_\alpha\}$. Ha α limesz, akkor $\mathbb{K}_\alpha$ csak korábbiak uniója, új elemei nincsenek, így $\mathrm{rk}(a)$ mindig rákövetkező, vagy 0. Mivel $a \in \mathbb{K}_\kappa$, nyilván $\mathrm{rk}(a) \leq \kappa$, de κ limesz, ezért egyenlőség nem lehet, azaz $\mathrm{rk}(a) < \kappa$.

Mivel $c_\zeta \in \mathbb{K}_{\alpha_{\zeta+1}} = \mathbb{K}_{\alpha_\zeta}\left(x_{\alpha_\zeta}\right)$, ezért a $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)$ értelmes és $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta) \in \mathbb{K}_{\alpha_\zeta}\left[x_{\alpha_\zeta}\right]$. Az $\alpha_\zeta \in X$, így nyilván $\alpha_\zeta \geq \beta_0$, azaz $P \cap \mathbb{K}_{\alpha_\zeta} \neq \emptyset$ és $\mathbb{K}_{\alpha_\zeta} \nsubseteq P$. Legyen $c \in P \cap \mathbb{K}_{\alpha_\zeta}$ tetszőleges. Mivel c_ζ nagyobb a $P \cap \mathbb{K}_{\alpha_\zeta}$ minden eleménél, ezért $c_\zeta > c$. A 7.17. állítás alapján ekkor $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta) \in \mathbb{K}_{\alpha_\zeta}$, tehát $\mathrm{rk}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)\right) \leq \alpha_\zeta$. Legyen $\nu_1 = \max\left(\alpha_\xi + 1, \mathrm{rk}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)\right)\right)$, ekkor persze ν_1 rákövetkező rendszám, tehát $\nu_1 = \theta_1 + 1$ valamely $\theta_1 < \kappa$ rendszámra , és $\nu_1 \leq \alpha_\zeta$, így $\theta_1 < \alpha_\zeta$. Tegyük fel, hogy $\theta_1 + 1 = \nu_1 = \mathrm{rk}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)\right)$. Ekkor nincs eleme $\mathbb{K}_{\theta_1}$-nek c_ζ és $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)$ között. Indirekt tegyük fel, hogy mégis van egy $a \in \mathbb{K}_{\theta_1}$, amelyre $c_\zeta \leq a \leq \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)$. Ekkor persze $a \in \mathbb{K}_{\theta_1} \subseteq \mathbb{K}_{\alpha_\zeta}$, így $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(a) = a$. A nem szigorú egyenlőtlenség átvihető a polinomrészekre is (különben ellentmondana a 7.15. állításnak), így $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta) \leq \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(a) \leq \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)\right)$, azaz $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta) \leq a \leq \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)$, vagyis $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta) = a \in \mathbb{K}_{\theta_1}$. Ez ellentmond annak, hogy $\mathrm{rk}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)\right) = \theta_1 + 1 > \theta_1$. Ha $c_\zeta \geq a \geq \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)$, akkor is felírhatnánk ugyanezt, így nem lehet c_ζ és $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)$ között $\mathbb{K}_{\theta_1}$-beli.

Ha $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta) \in P$, akkor legyen $s_1 = \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)$. Ha nem eleme, akkor kell venni egy korrekciós tagot. Ha a $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)$-nak a $\mathbb{K}_{\theta_1}$ feletti törtrésze $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta) - \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_1}}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)\right) < 0$, akkor legyen $s_1 = \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta) - \frac{1}{x_{\theta_1}}$, ha pedig $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta) - \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_1}}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)\right) > 0$, akkor legyen $s_1 = \frac{\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta) + \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_1}}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)\right)}{2}$. Mindkét esetben $s_1 \in \mathbb{K}_{\theta_1}(x_{\theta_1}) = \mathbb{K}_{\nu_1} \subseteq \mathbb{K}_{\alpha_\zeta}$, így $s_1 \in \mathbb{K}_{\alpha_\zeta + 1}$ és $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(s_1) = s_1 < \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)$, így a 7.15. állítás alapján $s_1 < c_\zeta \in P$, ezért $s_1 \in P$. Kell még, hogy s_1 és c_ζ között nincs $\mathbb{K}_{\theta_1}$-beli. Azt már láttuk, hogy $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)$ és c_ζ között nincs, így elég azt belátni, hogy s_1 és $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)$ között nincs. Tegyük fel, hogy valamely $b \in \mathbb{K}_{\theta_1}$-re $s_1 \leq b \leq \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)$. Ekkor persze $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_1}}(s_1) \leq \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_1}}(b) \leq \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_1}}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)\right)$. Mivel $b \in \mathbb{K}_{\theta_1}$, $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_1}}(b) = b$ és s_1-et úgy definiáltuk, hogy $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_1}}(s_1) = \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_1}}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)\right)$, ezért $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_1}}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)\right) \leq b \leq \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_1}}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)\right)$, vagyis $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_1}}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)\right) = b$. Ha $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)$-nek a $\mathbb{K}_{\theta_1}$ feletti törtrésze negatív volt, akkor $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta) < \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_1}}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)\right) = b$, ha pedig pozitív, akkor $s_1 > \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_1}}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_\zeta}}(c_\zeta)\right) = b$, tehát az egyenlőtlenség nem állhat fenn, vagyis valóban nincs s_1 és c_ζ között nincs $\mathbb{K}_{\theta_1}$-beli.

A c_ζ nagyobb a $P \cap \mathbb{K}_{\theta_1} \subseteq P \cap \mathbb{K}_{\alpha_\zeta}$ minden eleménél és s_1 és c_ζ között sincs $P \cap \mathbb{K}_{\theta_1}$-beli, így s_1 is nagyobb a $P \cap \mathbb{K}_{\theta_1}$ minden eleménél. Másrészt $s_1 \in P \cap \mathbb{K}_{\theta_1 + 1}$, ami azt jelenti, hogy $P \cap \mathbb{K}_{\theta_1}$ nem kofinális $P \cap \mathbb{K}_{\theta_1 + 1}$-ben, azaz $\theta_1 \in X$. Ekkor $\theta_1 = \alpha_{\zeta_1}$ valamely $\zeta_1 < \kappa$-ra. Ez akkor is igaz, ha a definíció másik oldala szerint $\theta_1 + 1 = \nu_1 = \alpha_\xi + 1$, ekkor $\zeta_1 = \xi$ írható.

Minden esetben teljesül persze a $\zeta_1 = \xi$ és $\zeta_1 < \zeta$ is, hiszen $\alpha_\xi \leq \theta_1 < \nu_1 \leq \alpha_\zeta$ és az α sorozat szigorúan monoton nő. Ha $\zeta_1 > \xi$, akkor vegyük a c_{ζ_1}-et és arra játtsszuk el az egészet: legyen $\theta_2 + 1 = \nu_2 = \max\left(\alpha_\xi + 1, \mathrm{rk}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_1}}}\left(c_{\zeta_1}\right)\right)\right)$. Itt is ugyanúgy definiálhatjuk s_2-t és kiderül, hogy $\theta_2 = \alpha_{\zeta_2}$, ahol $\xi \leq \zeta_2 < \zeta_1$. Ha $\zeta_2 > \xi$, akkor csinálunk még egy lépést, és így tovább egészen addig, amíg valamelyik $n \in \mathbb{N}$-re $\zeta_n = \xi$. Ez mindenképpen meg fog valamikor történni, mert ha nem történne meg, akkor végtelen sokáig csinálhatnánk és kapnánk egy $\zeta > \zeta_1 > \zeta_2 > \cdots$ rendszámokból álló végtelen szigorúan monoton csökkenő sorozatot, ami a rendszámok jólrendezettsége miatt nem létezik. Így van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $\zeta_n = \xi$.

Azt fogjuk belátni, hogy minden $0 \leq i \leq n-1$-re $\left|c_{\zeta_i} - c_{\zeta_{i+1}}\right| < \frac{\varepsilon}{n} \in \mathbb{K}_\beta$, ahol $\zeta_0 = \zeta$ értelmezés szerint értjük. Először nézzük az $i \leq n-2$ esetet. Mivel $\zeta_{i+1} < \zeta_i$ és a c_ξ sorozat szigorúan monoton nő, ezért $c_{\zeta_i} > c_{\zeta_{i+1}}$, így elég azt belátni, hogy $c_{\zeta_i} < c_{\zeta_{i+1}} + \frac{\varepsilon}{n}$. Nyilván $\frac{\varepsilon}{3n} \in \mathbb{K}_\beta \subseteq \mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}$, így $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right) + \frac{\varepsilon}{3n} \in \mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}$, azaz $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right) + \frac{\varepsilon}{3n}\right) = \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right) + \frac{\varepsilon}{3n} > \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right)$, a 7.15. állítás miatt $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right) + \frac{\varepsilon}{3n} > c_{\zeta_i}$. Az s_{i+1} értékére 3 lehetőség van. Az első esetben $s_{i+1} = \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right)$, ekkor nyilván teljesül, hogy $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right) < s_i + \frac{\varepsilon}{3n}$. A második esetben $s_{i+1} = \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_\zeta\right) - \frac{1}{x_{\theta_{i+1}}}$. A $0 < \frac{3n}{\varepsilon} \in \mathbb{K}_\beta \subseteq \mathbb{K}_{\theta_{i+1}}$ és $x_{\theta_{i+1}}$ nagyobb a $\mathbb{K}_{\theta_{i+1}}$ minden eleménél, így $x_{\theta_{i+1}} > \frac{3n}{\varepsilon}$ miatt $\frac{1}{x_{\theta_{i+1}}} < \frac{\varepsilon}{3n}$. Ekkor $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right) = s_{i+1} + \frac{1}{x_{\theta_{i+1}}} < s_{i+1} + \frac{\varepsilon}{3n}$. A harmadik esetben

$$s_{i+1} = \frac{\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right) + \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_{i+1}}}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right)\right)}{2}.$$

Ekkor

$$\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right) = s_{i+1} + \frac{\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right) - \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_{i+1}}}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right)\right)}{2} <$$

$$< s_{i+1} + \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right) - \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_{i+1}}}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right)\right)$$

. Az előzőhöz hasonló módon látható, hogy $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right) - \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\theta_{i+1}}}\left(\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right)\right) < \frac{\varepsilon}{3n}$, így $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right) < s_{i+1} + \frac{\varepsilon}{3n}$ itt is teljesül. Végül az s_{i+1} és a $c_{\zeta_{i+1}}$ mindketten elemei $P \cap \mathbb{K}_{\theta_{i+1}+1} = P \cap \mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_{i+1}}+1}$-nek és nagyobbak $P \cap \mathbb{K}_{\theta_{i+1}} = P \cap \mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_{i+1}}}$ minden eleménél. Mivel $\frac{\varepsilon}{3n} \in \mathbb{K}_\beta \subseteq \mathbb{K}_{\theta_{i+1}}$ és nyilván $P \cap \mathbb{K}_{\theta_{i+1}} \neq \emptyset$ és $\mathbb{K}_{\theta_{i+1}} \nsubseteq P$, hiszen $\theta_{i+1} \geq \beta_0$, a 7.18. lemma alkalmazható, így $\left|c_{\zeta_{i+1}} - s_{i+1}\right| < \frac{\varepsilon}{3n}$, azaz $s_{i+1} < c_{\zeta_{i+1}} + \frac{\varepsilon}{3n}$. Ekkor $c_{\zeta_i} < \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_i}}}\left(c_{\zeta_i}\right) + \frac{\varepsilon}{3n} < s_{i+1} + \frac{\varepsilon}{3n} + \frac{\varepsilon}{3n} < c_{\zeta_{i+1}} + \frac{\varepsilon}{3n} + \frac{\varepsilon}{3n} + \frac{\varepsilon}{3n} = c_{\zeta_{i+1}} + \frac{\varepsilon}{n}$.

Az $i = n - 1$ esetben is minden ugyanúgy működik, kivéve azt hogy az utolsó becslésnél nem hivatkozhatunk minden esetben a 7.18. lemmára, mert előfordulhat, hogy $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_{n-1}}}}(c_{\zeta_{n-1}}) \in \mathbb{K}_{\theta_n} = \mathbb{K}_{\alpha_\xi}$. Ha $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_{n-1}}}}(c_{\zeta_{n-1}}) \notin P$, akkor az $s_n = \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_{n-1}}}}(c_{\zeta_{n-1}}) - \frac{1}{x_{\alpha_\theta}}$ itt is alkalmazható, és ugyanúgy s_n nagyobb lesz $P \cap \mathbb{K}_{\alpha_\xi}$ minden eleménél és használhatjuk a 7.18. lemmát. Ha pedig $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_{n-1}}}}(c_{\zeta_{n-1}}) \in P$, akkor $\mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_{n-1}}}}(c_{\zeta_{n-1}}) \in P \cap \mathbb{K}_{\alpha_\xi}$, de c_ξ nagyobb $P \cap \mathbb{K}_{\alpha_\xi}$, így $c_\xi > \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_{n-1}}}}(c_{\zeta_{n-1}})$, vagyis $c_{\gamma_{n-1}} < \mathrm{poly}_{\mathbb{K}_{\alpha_{\zeta_{n-1}}}}(c_{\zeta_{n-1}}) + \frac{\varepsilon}{3n} < c_\xi + \frac{\varepsilon}{3n} = c_{\zeta_n} + \frac{\varepsilon}{3n} < c_{\zeta_n} + \frac{\varepsilon}{n}$.

Ezek alapján $|c_\zeta - c_\xi| = |c_{\zeta_0} - c_{\zeta_n}| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |c_{\zeta_i} - c_{\zeta_{i+1}}| < \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$. Mivel $\varepsilon \in \mathbb{K}_\kappa$, $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, így beláttuk, hogy a $(c_\xi)_{\xi<\kappa}$ sorozat Cauchy.

7.20. Tétel: *Ha $\kappa > \aleph_0$ reguláris számosság, akkor $\mathbb{F}_\kappa$ CW tulajdonságú*

Bizonyítás: A 7.9. állítás miatt a CW tulajdonságot elég csak szigorúan monoton növő $\mathrm{cf}(\mathbb{F}_\kappa) = \kappa$ hosszú sorozatokra nézni. Legyen $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ $\mathbb{F}_\kappa$-ban futó szigarúan monoton növő korlátos sorozat és $M_0 \in \mathbb{F}_\kappa$ egy felső korlátja. Ekkor minden $\alpha < \kappa$-ra $a_\alpha < a_{\alpha+1}$ $\mathbb{F}_\kappa$. Mivel $\mathbb{K}_\kappa \subseteq \mathbb{F}_\kappa$ sűrű választható minden $\alpha < \kappa$-hoz egy olyan $b_\alpha \in \mathbb{K}_\kappa$, hogy $a_\alpha < b_\alpha < a_{\alpha+1}$. A $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ egy $\mathbb{K}_\kappa$. Ez a sorozat korlátos, ugyanis $\mathbb{K}_\kappa$ kofinális $\mathbb{F}_\kappa$-ban, így létezik $M \in \mathbb{K}_\kappa$, amelyre $M \geq M_0$. Ez jó felső korlát lesz, ugyanis ha $\alpha < \kappa$ tetszőleges, akkor $b_\alpha < a_{\alpha+1} \leq M_0 \leq M$. Ez a sorozat is szigorúan monoton nő, ugyanis ha $\alpha, \gamma < \kappa$, amelyekre $\alpha < \gamma$, akkor $\alpha + 1 \leq \gamma$, így $b_\alpha < a_{\alpha+1} \leq a_\gamma < b_\gamma$.

Legyen $P = \{b \in \mathbb{K}_\kappa | \exists \alpha < \kappa, b \leq b_\alpha\}$. Ez nyilván szelet, ugyanis ha $b \in P, c \in \mathbb{K}_\kappa$, melyre $c \leq b$, akkor van olyan $\alpha < \kappa$, hogy $b \leq b_\alpha$, de ekkor $c \leq b \leq b_\alpha$, így $c \in P$. Nyilván $b_0 \in P$, így $P \neq \emptyset$. Ha $\alpha < \kappa$ tetszőleges, akkor $b_\alpha \leq M < M + 1$, így nem létezik olyan α, amelyre $b_\alpha \geq M + 1$, azaz $M + 1 \notin P$, így $P \neq \mathbb{K}_\kappa$. A $\{b_\alpha : \alpha < \kappa\}$ halmaz nyilván benne van P-ben és P definíciója alapján annak kofinális részhalmaza. Mivel b_α szigorúan monoton nő $\mathrm{tp}(\{b_\alpha : \alpha < \kappa\}) = \mathrm{tp}(\kappa) = \kappa$, így $\mathrm{cf}(P) = \mathrm{cf}(\{b_\alpha : \alpha < \kappa\}) = \kappa$. A 7.19. lemma alapján ekkor létezik egy $(c_\xi)_{\xi<\kappa}$ P-ben futó szigorúan monoton növő Cauchy sorozat, ami kofinális P-ben.

Ekkor persze $(c_\xi)_{\xi<\kappa}$ mint $\mathbb{F}_\kappa$-ban futó sorozat is Cauchy. Legyen ugyanis $\varepsilon \in \mathbb{F}_\kappa$, $\varepsilon > 0$. Mivel $\mathbb{K}_\kappa \subseteq \mathbb{F}_\kappa$ sűrű ezért van $\delta \in \mathbb{K}_\kappa$, hogy $0 < \delta < \varepsilon$. Mivel c_ξ Cauchy $\mathbb{K}_\kappa$-ban, ezért létezik $\eta < \kappa$, $\forall \xi, \zeta \geq \eta$-ra $|c_\xi - c_\zeta| < \delta$. Ekkor az η jó küszöbindex lesz $\mathbb{F}_\kappa$-ben ε-hoz, ugyanis ha $\xi, \zeta \geq \eta$, akkor $|c_\xi - c_\zeta| < \delta < \varepsilon$. Mivel $\varepsilon \in \mathbb{F}_\kappa$, $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, a c_ξ sorozat $\mathbb{F}_\kappa$ is Cauchy. Mivel $\mathbb{F}_\kappa$ teljes, ezért konvergens, tehát van olyan $a \in \mathbb{F}_\kappa$, hogy $c_\xi \to a$.

Azt fogjuk belátni, hogy a legkisebb felső korlátja P-nek $\mathbb{F}_\kappa$-ban. Legyen $b \in P$, ekkor c_ξ kofinális P-ben, így van olyan $\xi < \kappa$, hogy $b \leq c_\xi$. Mivel $c_\xi \to a$ monoton növően, a 7.3.

lemma 1. feltétele szerint $c_\xi \leq a$, tehát $b \leq c_\xi \leq a$, vagyis a felső korlátja P-nek. Legyen $c \in \mathbb{F}_\kappa, c < a$ tetszőleges. Ekkor $\mathbb{K}_\kappa$ sűrűsége miatt létezik $d \in \mathbb{K}_\kappa$, amelyre $c < d < a$. Mivel $c_\xi \to a$a 7.3. lemma második feltétele alapján $\exists \xi < \kappa$, hogy $c_\xi > d > c$ és $c_\xi \in P$, hiszen a sorozat P-ben fut, így c nem felső korlát. Ez tetszőleges $c < a$-ra igaz, tehát a legkisebb felső korlát.

Végül lássuk be, hogy $a_\alpha \to a$. Ehhez a 7.3. lemma feltételeit fogjuk belátni. Minden $\alpha < \kappa$-ra $a_\alpha < b_\alpha$, így $a_\alpha \in P$ és a a P felső korlátja, tehát $a_\alpha \leq a$, az első feltétel teljesül. A második feltételhez legyen $b < a$, ekkor b nem felső korlátja P-nek, így létezik $c \in P$, hogy $c > b$. Mivel $c \in P$, a P definíciója szerint van egy $\alpha < \kappa$, hogy $b_\alpha \geq c$. Ekkor $a_{\alpha+1} > b_\alpha \geq c > b$, így a második feltétel is teljesül, a 7.3. lemma alapján $a_\alpha \to a$.

Ezzel beláttuk, hogy $\mathbb{F}_\kappa$ CW tulajdonságú.

8. Bolzano-Weierstrass tulajdonság és gyengén kompakt számosságok

8.1. Definíció: *Ha K rendezett test, $H \subseteq K$ tetszőleges részhalmaz, akkor az $x \in K$ torlódási pontja a H-nak, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists y \in H$, amelyre $y \neq x$ és $|y - x| < \varepsilon$.*

8.2. Állítás: *Ha K rendezett test, $H \subseteq K$, akkor az $x \in K$ torlódási pontja a H-nak akkor és csak akkor, ha létezik $(y_\alpha)_{\alpha < \mathrm{cf}(K)}$ H-ban futó sorozat, amelyre $y_\alpha \neq x$ semmilyen $\alpha < \mathrm{cf}(K)$-ra és $y_\alpha \to x$.*

Bizonyítás: Ha x torlódási pontja H-nak, akkor $\alpha < \mathrm{cf}(K)$-ra válasszunk egy $y_\alpha \in H$-t, amelyre $y_\alpha \neq x$ és $|y_\alpha - x| < \varepsilon_\alpha$, ahol ε_α a 3.4. állításban definiált sorozat. Az $(y_\alpha)_{\alpha < \mathrm{cf}(K)}$ nyilván H-ban fut és sehol sem veszi fel x-et. Kell még, hogy $y_\alpha \to x$. Legyen $\varepsilon > 0$, ekkor vehetünk egy $\beta < \mathrm{cf}(K)$-t, melyre $\varepsilon_\beta < \varepsilon$. Ez jó küszöbindex lesz, ugyanis ha $\alpha \geq \beta$, akkor $|y_\alpha - x| < \varepsilon_\alpha \leq \varepsilon_\beta < \varepsilon$.

A másik irányba legyen $(y_\alpha)_{\alpha < \mathrm{cf}(K)}$ egy ilyen sorozat. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor a konvergencia miatt $\exists \beta < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall \alpha \geq \beta, |y_\alpha - x| < \varepsilon$, jelesül $|y_\beta - x| < \varepsilon$. Mivel $y_\beta \in H$ és $y_\beta \neq x$, ezért y_β jó lesz a torlódási pont definíciójánál ε-hoz, vagyis x valóban torlódási pont.

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy mi a kapcsolat egy $H \subseteq K$ számossága és a között, hogy van-e torlódási pontja.

8.3. Állítás: *Ha K rendezett test, $H \subseteq K$, $|H| < \mathrm{cf}(K)$, akkor H-nak nincs torlódási pontja.*

Bizonyítás: Legyen $x \in K$ tetszőleges. Ekkor az $S = \left\{\frac{1}{|y-x|} : y \in H, y \neq x\right\}$ halmazra $|S| \leq |H| < \mathrm{cf}(K)$, így S nem lehet kofinális K-ban, van egy $M \in K$ felső korlátja. Ha $y \in H, y \neq x$ tetszőleges, akkor $\frac{1}{|y-x|} \in S$, így $\frac{1}{|y-x|} \leq M$, vagyis $|y - x| \geq \frac{1}{M}$. A torlódási pont definícióját x-ben $\varepsilon = \frac{1}{M}$-re így semmilyen $y \in H$ nem elégíti ki, így x nem torlódási pontja H-nak. Mivel $x \in K$ tetszőleges volt, a H-nak nincs torlódási pontja.

8.4. Állítás: *Minden K rendezett testhez van olyan $H \subseteq K$, amelyre $|H| = \mathrm{cf}(K)$ és H-nak van torlódási pontja.*

Bizonyítás: A $H = \{\varepsilon_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(K)\}$ jó lesz. Ennek a 0 torlódási pontja, ugyanis az $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha < \mathrm{cf}(K)}$ egy H-ban futó sorozat, amelyre $\varepsilon_\alpha \neq 0$ és $\varepsilon_\alpha \to 0$, így a 8.2. állítás alapján a 0 torlódási pont.

8.5. Állítás: *Minden K rendezett testhez van olyan $H \subseteq K$, amelyre $|H| = \Sigma(K)$ és H-nak nincs torlódási pontja.*

Bizonyítás: A 6.18. tétel alapján $\Sigma(K) = \Delta(K)$, sőt van olyan $\mathcal{I} \subseteq P(K)$ diszjunkt intervallumrendszer, amelyre $|\mathcal{I}| = \Sigma(K)$. Az ehhez használt 6.17. lemma konstrukciójában egy kis módosítással ez is igaz lesz, hogy $\forall I \in \mathcal{I}$-re $l(I) = \frac{1}{3}$ (valóban, csak az egész bizonyítás során az olyan diszjunkt intervallumrendszereket nézzük, ahol minden intervallum ilyen hosszú).

Legyen $H = \left\{\frac{a+b}{2}, (a,b) \in \mathcal{I}\right\}$ az intervallum közepek halmaza. Ha $I, J \in \mathcal{I},\ I \neq J,$ akkor $I \cap j = \emptyset$, így nyilván a közepük is különbözik, azaz az $f: \mathcal{I} \to H$ függvény, melyre $f\big((a,b)\big) = \frac{a+b}{2}$ bijekió, így $|H| = |\mathcal{I}| = \Sigma(K)$.

Kell még, hogy H-nak nincs torlódási pontja. Indirekt tegyük fel, hogy $x \in K$ torlódási pont. Ekkor $\exists y \in H, y \neq x, |y - x| < \frac{1}{6}$. Legyen $I \in \mathcal{I}$, amelynek y a középpontja. Mivel $l(I) = \frac{1}{3}$, ezért $I = \left(y - \frac{1}{6}, y + \frac{1}{6}\right)$, így $x \in I$. Másrészt $y \neq x$ miatt $|y - x| > 0$, így $\exists y' \in H, y' \neq x$, $|y' - x| < \frac{|y-x|}{2}$. Ekkor nyilván $y' \neq y$, tehát y' egy $J \in \mathcal{I}$ középpontja, ahol $J \neq I$. Emellett $|y' - x| < \frac{|y-x|}{2} < |y - x| < \frac{1}{6}$, így az előzőhöz hasonló módon $x \in J$. De ekkor $x \in I \cap J = \emptyset$, ami ellentmondás, tehát H-nak mégsincs torlódási pontja.

8.6. Állítás: *Ha K rendezett test, $H \subseteq K$, $|H| > \Sigma(K)$, akkor H-nak van torlódási pontja.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy H-nak nincs torlódási pontja. Tetszőleges $x \in H$ -ra az x saját maga nem torlódási pont, így $\exists \delta_x > 0$, hogy $\forall y \in H, y \neq x$-re $|y - x| < \delta_x$. Legyen $I_x = \left(x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}\right)$ nyílt intervallum melynek középpontja x. Ezek nyilván mind különböző intervallumok. Legyen $\mathcal{I} = \{I_x : x \in H\}$, erre $|\mathcal{I}| = |H| > \Sigma(K)$. Azt fogjuk belátni, hogy ez diszjunkt intervallumrendszer. Valóban, legyen $x, y \in H,\ x \neq y,$ szimmetria miatt feltehetjük, hogy $x < y$. A δ_x választása miatt $|y - x| < \delta_x$, a δ_y választása miatt pedig $|y - x| < \delta_y$, így a számtani közepüknél is, azaz $y - x = |y - x| < \frac{\delta_x + \delta_y}{2}$, így $x + \frac{\delta_x}{2} < y - \frac{\delta_y}{2}$, tehát az I_x végpontja az I_y kezdőpontja előtt van, vagyis $I_x \cap I_y = \emptyset$. Ekkor az $\mathcal{I}$ diszjunkt intervallumrendszerre $|\mathcal{I}| > \Sigma(K) = \Delta(K)$, ami ellent mond a diszkréciós szám definíciójának.

Az előző 4 állítást összegezve a $H \subseteq K$-nak biztosan van torlódási pontja, ha $|H| > \Sigma(K)$, biztosan nincsen, ha $|H| < \mathrm{cf}(K)$, a $\mathrm{cf}(K) \leq H \leq \Sigma(K)$ esetben pedig bármelyik lehet. A továbbiakban azt fogjuk vizsgálni, hogy mi a helyzet akkor, ha H-ról azt is feltesszük, hogy korlátos.

8.7. Definíció: *Egy K rendezett test Bolzano-Weierstrass (a továbbiakban röviden BW) tulajdonságú egy κ számmosságra, ha $H \subseteq K$ korlátos halmaznak, amelyre $|H| = \kappa$ van torlódási pontja.*

8.8. Állítás: *Ha $\kappa < \lambda$ számosságok és K rendezett test BW-κ, akkor BW-λ.*

Bizonyítás: Legyen $H \subseteq K$ korlátos halmaz, amelyre $|H| = \lambda$. Vegyünk egy $H' \subseteq H$ halmazt, amelyre $|H'| = \kappa$. Mivel K BW-κ, ezért $\exists x \in K$ a H'-nek torlódási pontja, de ez nyilván H-nak is torlódási pontja, így K *BW*-λ.

8.9. Állítás: *Ha K rendezett test, $\kappa < \mathrm{cf}(K)$, akkor K nem BW-κ.*

Bizonyítás: Legyen $H \subseteq K$ tetszőleges amelyre $|H| = \kappa$. Ekkor $|H| < \mathrm{cf}(K)$ miatt H korlátos és a 8.3. állítás miatt nincs torlódási pontja, így H megsérti a BW-κ feltételt.

8.10. Állítás: *Ha K rendezett test, $\kappa > \Sigma(K)$, akkor K BW-κ.*

Bizonyítás: Ha $H \subseteq K$ olyan korlátos halmaz, amelyre $|H| = \kappa > \Sigma(K)$, akkor H-nak van torlódási pontja a 8.6. állítás alapján (ehhez nem kell még a korlátosságot sem feltenni).

A legtöbbször szeparábilis rendezett testeket vizsgálunk, ahol $\mathrm{cf}(K) = \Sigma(K)$, így ebben az esetben a BW tulajdonság csak a $\kappa = \mathrm{cf}(K) = \Sigma(K)$ esetben érdekes, így indokolt a következő definíció.

8.11. Definíció: *Egy BW tulajdonságú, ha BW-*$\mathrm{cf}(K)$.

A továbbiakban vizsgáljuk meg a BW tulajdonság kapcsolatát a már korábban definiált CW tulajdonsággal.

8.12. Lemma: *Ha K rendezett test BW tulajdonságú, akkor CW tulajdonságú.*

Bizonyítás: Mivel $\mathrm{cf}(K)$ reguláris, a 7.9. állítás alapján elég azt belátni, hogy minden $(a_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ K-ban futó szigorúan monoton növő korlátos sorozat konvergens. Legyen $(a_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ ilyen és $H = \{a_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(K)\}$. Mivel a sorozat szigorúan monoton nő, az elemei mind különbözőek, így $|H| = \mathrm{cf}(K)$, és mivel a_α korlátos volt, az elemeiből álló H halmaz is korlátos. A BW tulajdonság miatt $\exists a \in K$ a H-nak torlódási pontja. Azt fogjuk belátni, hogy $a_\alpha \to a$, ehhez a 7.3. lemma feltételeit bizonyítjuk.

Indirekt tegyük fel, hogy az 1.tulajdonság nem teljesül, azaz $a_\alpha > a$ valamilyen $\alpha < \mathrm{cf}(K)$ -ra. Legyen $S = \left\{\frac{1}{|a_\gamma - a|} : \gamma < \alpha, a_\gamma \neq a\right\}$. Erre $|S| \leq |\alpha| < \mathrm{cf}(K)$, ezért S korlátos K-vam, legyen $M \in K$ felső korlát. Ha $\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{M}, a_\alpha - a\right\}$, akkor $\exists y \in H, y \neq a,\ |y - a| < \varepsilon$. Ekkor $y = a_\gamma$ valamely $\gamma < \mathrm{cf}(K)$-ra. Ha $\gamma < \alpha$, akkor $\frac{1}{|a_\gamma - a|} \in S$, így $\frac{1}{|a_\gamma - a|} < M$, tehát $|y - a| = |a_\gamma - a| > \frac{1}{M} \geq \varepsilon$, ami nem lehet. Ha $\gamma \geq \alpha$, akkor $a_\gamma \geq a_\alpha$ a monotonitás miatt, így $|y - a| = |a_\gamma - a| = a_\gamma - a \geq a_\alpha - a \geq \varepsilon$, ami szintén nem lehet, így mindkét esetben ellentmondásra jutunk.

A 2. tulajdonsághoz legyen $b < a$, ekkor $\exists y \in H,\ y \neq a,\ |y - a| < a - b$. Ekkor nyilván $y = a_\beta$ valamely $\beta < \mathrm{cf}(K)$, azaz $a - a_\beta \leq |a_\beta - a| = |y - a| < a - b$, így $a_\beta > b$. Mindkét tulajdonságot beláttuk, tehát $a_\alpha \to a$.

Ez a lemma sajnos nem minden esetben megfordítható, de a továbbiakban belátjuk, hogy ha $\mathrm{cf}(K)$-ra bizonyos feltételek teljesülnek, akkor igen.

8.13. Jelölés: *Tetszőleges A halmazra jelölje* $\binom{A}{2}$ *az A halmaz 2 elemű részhalmazainak halmazát. Ha* $f: \binom{A}{2} \to S$ *függvény és* $x, y \in A, x \neq y$, *akkor az* $f(\{x, y\})$*-t egyszerűen* $f(x, y)$*-nal jelöljük.*

8.14. Definíció: *Ha* $f: \binom{A}{2} \to S$ *függvény és* $s \in S$, *akkor a* $B \subseteq A$ *s-homogén* f*-re, ha* $\forall x, y \in B, x \neq y$*-ra* $f(x, y) = s$. *A* $B \subseteq A$ *homogén az* f*-re, ha* $\exists s \in S$, *amelyre s-homogén.*

8.15. Definíció: *A* κ *számosság gyengén kompakt, ha tetszőleges A halmazra, amelyre* $|A| = \kappa$ *és* $f: \binom{A}{2} \to \{0,1\}$ *függvényre* $\exists B \subseteq A$, *amelyre* $|B| = \kappa$ *és B homogén* f*-re.*

Persze ekvivalens definíciót kapnánk, akkor is, ha A nem tetszőleges halmaz lenne, hanem a $\binom{\kappa}{2}$-ről menő függvényeket néznénk, de használat szempontjából ez a definíció kényelmesebb. A gyengén kompakt számosságok létezése nem bizonyítható ZFC-ben, de ha léteznek, akkor bizonyos tulajdonságok bizonyíthatóak rá. A következőkben azt látjuk be, hogy a gyengén kompakt számosságok erősen elérhetetlenek, amelyre később még szükségünk lesz.

8.16. Állítás: *Ha* κ *gyengén kompakt, akkor reguláris.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy κ szinguláris, azaz létezik $\tau < \kappa$ számosság és $(\lambda_\alpha)_{\alpha<\tau}$ számosságok, melyekre $\lambda_\alpha < \kappa$ és $\kappa = \sum_{\alpha<\tau} \lambda_\alpha$. Legyenek $\alpha < \tau$-ra A_α halmazok olyanok, hogy $|A_\alpha| = \lambda_\alpha$ és $\alpha \neq \beta$-ra $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$. Legyen $A = \bigcup_{\alpha<\tau} A_\alpha$. Ekkor $|A| = \sum_{\alpha<\tau} \lambda_\alpha = \kappa$. Ha $a \in A$, akkor létezik $\nu(a) < \tau$, amelyre $a \in A_{\nu(a)}$, és mivel az A_α halmazok páronként diszjunktak, ezért $\nu(a)$ egyértelmű.

Legyen $a, b \in A, a \neq b$-re $f(a,b) = 0$, ha $\nu(a) = \nu(b)$ és $f(a,b) = 1$, ha $\nu(a) \neq \nu(b)$. Mivel κ gyengén kompakt, ezért $\exists B \subseteq A$, amelyre $|B| = \kappa$ és homogén f-re. Ha B 0-homogén, akkor vegyünk egy $a \in B$-t és legyen $\alpha = \nu(a)$. Tetszőleges $b \in B$-re ha $b \neq a$, akkor $f(a,b) = 0$, tehát $\nu(b) = \nu(a) = \alpha$, vagyis $b \in A_\alpha$ és nyilván $a \in A_\alpha$, így $B \subseteq A_\alpha$, tehát $|B| \leq |A_\alpha| = \lambda_\alpha < \kappa$, ami nem lehet. Ha B 1-homogén, akkor minden $a, b \in B$, $a \neq b$-re $f(a,b) = 1$, vagyis $\nu(a) \neq \nu(b)$. Ekkor a $\nu: B \to \tau$ függvény injektív, így $|B| \leq \tau < \kappa$. Mindkét esetben ellentmondásra jutunk, így κ reguláris.

8.17. Lemma: *Ha κ gyengén kompakt számosság $(A, <)$ rendezett halmaz, $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ egy A-ban futó κ sorozat. Ekkor létezik $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\kappa}$ szigorúan monoton növő kofinális részsorozata, vagy létezik $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\kappa}$ monoton csökkenő kofinális részsorozata.*

Bizonyítás: Definiáljunk egy $f: \binom{\kappa}{2} \to \{0,1\}$ függvényt, úgy, hogy tetszőleges $\alpha < \beta < \kappa$-ra legyen $f(\alpha, \beta) = 1$, ha $a_\alpha < a_\beta$ és $f(\alpha, \beta) = 0$, ha $a_\alpha \geq a_\beta$. Mivel κ gyengén kompakt, ezért $\exists B \subseteq \kappa, |B| = \kappa$, amely homogén f-re. Ekkor persze B kofinális lesz κ-ban és $\mathrm{tp}(B) = \kappa$, így az elemei egy $(\alpha_\xi)_{\xi<\kappa}$ sorozatra fűzhetőek fel, ahol $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\kappa}$ az $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ kofinális részsorozata.

Elég a monotonitást belátni. Ha B 1-homgén, akkor tetszőleges $\xi < \zeta < \kappa$-ra $\alpha_\xi < \alpha_\zeta$ és $\alpha_\xi, \alpha_\zeta \in B$, így $f(\alpha_\xi, \alpha_\zeta) = 1$, vagyis $a_{\alpha_\xi} < a_{\alpha_\zeta}$, az a_{α_ξ} sorozat szigorúan monoton növő. Ha B 0-homgén, akkor tetszőleges $\xi < \zeta < \kappa$-ra $\alpha_\xi < \alpha_\zeta$ és $\alpha_\xi, \alpha_\zeta \in B$, így $f(\alpha_\xi, \alpha_\zeta) = 0$, vagyis $a_{\alpha_\xi} \geq a_{\alpha_\zeta}$, az a_{α_ξ} sorozat monoton csökkenő.

8.18. Definíció: *Tekintsük tetszőleges κ számossárga a $\{0,1\}^\kappa$ függvények halmazát. Ha $a, b \in \{0,1\}^\kappa$ és $a \neq b$, akkor az a, b elágazási helye $Ram(a,b) = min\{\alpha: a(\alpha) \neq b(\alpha)\}$.*

8.19. Definíció: *Ha $a, b \in \{0,1\}^\kappa$, akkor legyen $a < b$, ha $a \neq b$ és $a(\mathrm{Ram}(a,b)) < b(\mathrm{Ram}(a,b))$.*

8.20. Állítás: *A $<$ reláció rendezés $\{0,1\}^\kappa$-n.*

Bizonyítás: Az irreflexivitás a definícióból triviális. A tranzitivitáshoz legyen $a, b, c \in \{0,1\}^\kappa$, amelyre $a < b$ és $b < c$. A $\{0,1\}$ kételemű halmazon az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a baloldalon 0, a jobboldalon 1 áll, így $a(\mathrm{Ram}(a,b)) = 0$, $b(\mathrm{Ram}(a,b)) = 1$, $b(\mathrm{Ram}(b,c)) = 0$ és $c(\mathrm{Ram}(b,c)) = 1$. Ebből nyilván következik, hogy $\mathrm{Ram}(a,b) \neq \mathrm{Ram}(b,c)$. Ha $\mathrm{Ram}(a,b) < \mathrm{Ram}(b,c)$, akkor minden $\alpha < \mathrm{Ram}(b,c)$-re $b(\alpha) = c(\alpha)$, ha $\alpha < \mathrm{Ram}(a,b)$ is teljesül, akkor $a(\alpha) = b(\alpha) = c(\alpha)$, így $\mathrm{Ram}(a,c) \geq \mathrm{Ram}(a,b)$. Másrészt $c(\mathrm{Ram}(a,b)) = b(\mathrm{Ram}(a,b)) = 1$ és $a(\mathrm{Ram}(a,b)) = 0$, így $\mathrm{Ram}(a,c) = \mathrm{Ram}(a,b)$ és $a(\mathrm{Ram}(a,c)) < c(\mathrm{Ram}(a,c))$, azaz $a < c$. Ha $\mathrm{Ram}(a,b) > \mathrm{Ram}(b,c)$, akkor hasonlóan az jön ki, hogy $\mathrm{Ram}(a,c) = \mathrm{Ram}(b,c)$ és ugyanúgy $a(\mathrm{Ram}(a,c)) < c(\mathrm{Ram}(a,c))$, azaz $a < c$.

A trichotómiához legyen $a, b \in \{0,1\}^\kappa$. Ha $a \neq b$, akkor $a(\mathrm{Ram}(a,b)) \neq b(\mathrm{Ram}(a,b))$ a $\mathrm{Ram}(a,b)$ definíciója szerint, így $a(\mathrm{Ram}(a,b)) < b(\mathrm{Ram}(a,b))$ vagy $a(\mathrm{Ram}(a,b)) > b(\mathrm{Ram}(a,b))$ teljesül, azaz $a < b$ vagy $a > b$.

8.21. Lemma: *Ha κ végtelen számosság λ tetszőleges limesz rendszám, $(a_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ egy $\{0,1\}^\kappa$-ban futó szigorúan monoton növő sorozat, akkor $|\lambda| \leq \kappa$. Ugyanez szigorúan monoton csökkenő sorozatokra is igaz.*

Bizonyítás: Legyen $(a_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ szigorúan monoton növő λ sorozat a $\{0,1\}^\kappa$-ban. Egy $0 < \alpha < \lambda$ rendszámot nevezzünk normális indexnek, ha $\exists \beta < \alpha$ rendszám és $\xi < \kappa$, hogy minden $\beta \leq \gamma < \alpha$-ra $\mathrm{Ram}(a_\gamma, a_\alpha) = \xi$. Ez a ξ persze egyértelmű, hiszen ha β_1, ξ_1 és β_2, ξ_2 is egy index pár az α-hoz, akkor $\gamma = \max(\beta_1, \beta_2)$-re $\beta_1 \leq \gamma < \alpha$ miatt $\mathrm{Ram}(a_\gamma, a_\alpha) = \xi_1$ és $\beta_2 \leq \gamma < \alpha$ miatt $\mathrm{Ram}(a_\gamma, a_\alpha) = \xi_2$ így $\xi_1 = \xi_2$, így α normális indexre legyen $R(\alpha) = \xi$. Ha $\alpha = \beta + 1$ rákövetkező rendszám, akkor α normális index és $R(\alpha) = \mathrm{Ram}(a_\beta, a_\alpha)$, hiszen $\beta \leq \gamma < \alpha$ esetén csak $\gamma = \beta$ lehet.

Legyen $\xi < \kappa$-ra $A_\xi = \{\alpha < \lambda | \alpha \text{ normális index}, R(\alpha) = \xi\}$. Azt fogjuk belátni, hogy minden $\xi < \kappa$-ra $|A_\xi| \leq \kappa$. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem teljesül, és legyen ζ a legkisebb olyan rendszám, amire ez nem igaz. Ekkor $|A_\zeta| > \kappa$, ezért $\mathrm{tp}(A_\zeta) = \tau$, ahol $|\tau| > \kappa$. feltehető, hogy τ limesz, mert ha levágjuk a rákövetkező részét, akkor a számossága nem csökken. Legyen az A_ζ elemeiből álló szigorúan monoton növő sorozat $(\alpha_\rho)_{\rho<\tau}$. Legyen $\rho < \tau$ tetszőleges, ekkor persze $\alpha_\rho \in A_\zeta$ miatt $R(\alpha_\rho) = \zeta$, tehát $\exists \beta < \alpha_\rho$, hogy minden $\beta \leq \gamma < \alpha_\rho$, $\mathrm{Ram}(a_\gamma, a_{\alpha_\rho}) = \zeta$ jelesül $\mathrm{Ram}(a_\beta, a_{\alpha_\rho}) = \zeta$. Másrészt $a_\beta < a_{\alpha_\rho}$, így $a_\beta(\zeta) < a_{\alpha_\rho}(\zeta)$, tehát $a_{\alpha_\rho}(\zeta) = 1$. A $\rho + 1 < \tau$-ra is ugyanez igaz, tehát $a_{\alpha_{\rho+1}}(\zeta) = 1$. Itt is vehetünk egy $\beta' < \alpha_{\rho+1}$-et, hogy minden $\beta' \leq \gamma < \alpha_{\rho+1}$-re $\mathrm{Ram}(a_\gamma, a_{\alpha_{\rho+1}}) = \zeta$. Mivel $a_\gamma < a_{\alpha_{\rho+1}}$ ezért $a_\gamma(\zeta) = 0$. Ekkor $\beta' > \alpha_\rho$, hiszen ha $\beta' \leq \alpha_\rho$ lenne, akkor az állítást $\gamma = \alpha_\rho$-ra alkalmazva azt kapnánk, hogy $a_{\alpha_\rho}(\zeta) = 0$, ami nem lehet.

Az a_{α_ρ} és $a_{\beta'}$ a ζ helyen eltérnek, mert $a_{\alpha_\rho}(\zeta) = 1$ és $a_{\beta'}(\zeta) = 0$, így $\mathrm{Ram}\left(a_{\alpha_\rho}, a_{\beta'}\right) \leq \zeta$. Ha $\mathrm{Ram}\left(a_{\alpha_\rho}, a_{\beta'}\right) = \zeta$ lenne, az azt jelentené, hogy $a_{\beta'} < a_{\alpha_\rho}$, de ez nem lehet, mert $\beta' > \alpha_\rho$ és az a_α sorozat monoton nő. Legyen $\xi = \mathrm{Ram}\left(a_{\alpha_\rho}, a_{\beta'}\right) < \zeta$. Ekkor tetszőleges $\alpha_\rho \leq \gamma \leq \beta'$-re és $\upsilon < \xi$-re $a_\gamma(\upsilon) = a_{\alpha_\rho}(\upsilon)$. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem teljesül valamilyen γ-ra, ekkor nyilván $\gamma > \alpha_\rho$, így $a_\gamma > a_{\alpha_\rho}$ és $\mathrm{Ram}\left(a_{\alpha_\rho}, a_\gamma\right) \leq \upsilon < \xi$. Ekkor persze $a_\gamma\left(\mathrm{Ram}\left(a_{\alpha_\rho}, a_\gamma\right)\right) = 1$ és $a_{\alpha_\rho}\left(\mathrm{Ram}\left(a_{\alpha_\rho}, a_\gamma\right)\right) = 0$, és mivel $\mathrm{Ram}\left(a_{\alpha_\rho}, a_\gamma\right) < \xi = \mathrm{Ram}\left(a_{\alpha_\rho}, a_{\beta'}\right)$, ezért $a_{\beta'}\left(\mathrm{Ram}\left(a_{\alpha_\rho}, a_\gamma\right)\right) = 0$. Másrészt minden $\iota < \mathrm{Ram}\left(a_{\alpha_\rho}, a_\gamma\right)$-re $a_\gamma(\iota) = a_{\alpha_\rho}(\iota) = a_{\beta'}(\iota)$, ezért $\mathrm{Ram}\left(a_{\beta'}, a_\gamma\right) = \mathrm{Ram}\left(a_{\alpha_\rho}, a_\gamma\right)$, így $a_\gamma > a_{\beta'}$, ami ellent mond a monotonitásnak.

Legyen $\eta = \min\{\gamma: \alpha_\rho \leq \gamma \leq \beta', a_\gamma(\xi) = 1\}$. Mivel $\mathrm{Ram}\left(a_{\alpha_\rho}, a_{\beta'}\right) = \xi$ és $a_{\alpha_\rho} < a_{\beta'}$, ezért $a_{\alpha_\rho}(\xi) = 0$ és $a_{\beta'}(\xi) = 1$, tehát a β' megfelel az ilyen feltételeknek, vagyis a fenti rendszámokból álló halmaz nem üres, a minimumnak van értelme és $\eta > \alpha_\rho$. Ekkor η normális index az α_ρ, ξ párral. Legyen ugyanis $\alpha_\rho \leq \gamma < \eta$. Ekkor persze $\alpha_\rho \leq \gamma \leq \beta'$ így minden $\upsilon < \xi$-re $a_\gamma(\upsilon) = a_{\alpha_\rho}(\upsilon) = a_\eta(\upsilon)$, így $\mathrm{Ram}\left(a_\gamma, a_\eta\right) \geq \xi$. Másrészt $a_\eta(\xi) = 1$ és $a_\gamma(\xi) = 0$, hiszen η minimális volt az α_ρ fölött, ami a ξ helyen 1-et vesz fel, így $\mathrm{Ram}\left(a_\gamma, a_\eta\right) = \xi$. Ezzel beláttuk, hogy η normális index és $R(\eta) = \xi < \zeta$, tehát $\eta \in A_\xi \subseteq \bigcup_{\upsilon<\zeta} A_\upsilon$. Emellett $\alpha_\rho < \eta \leq \beta' < \alpha_{\rho+1}$ is teljesül.

Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\rho < \tau$-ra $\exists f(\rho) \in \bigcup_{\upsilon<\zeta} A_\upsilon$, amelyre $\alpha_\rho < f(\rho) < \alpha_{\rho+1}$. Ekkor az $f: \tau \to \bigcup_{\upsilon<\zeta} A_\upsilon$ injektív. Legyen ugyanis $\rho, \sigma < \tau$, melyekre $\rho \neq \sigma$. Szimmetria miatt feltehetjük, hogy $\rho < \sigma$, ekkor $\rho + 1 \leq \sigma$, tehát $f(\rho) < \alpha_{\rho+1} \leq \alpha_\sigma < f(\sigma)$, tehát $f(\rho) \neq f(\sigma)$. Mivel ζ minimális volt, amelyre $\left|A_\zeta\right| > \kappa$, ezért $\upsilon < \zeta$-ra $|A_\upsilon| \leq \kappa$. Ezek uniójára $\left|\bigcup_{\upsilon<\zeta} A_\upsilon\right| \leq \sum_{\upsilon<\zeta}\left|A_\zeta\right| \leq \sum_{\upsilon<\zeta} \kappa = |\zeta|\kappa \leq \kappa\kappa = \kappa$, tehát f egy injektív függvény τ-ról egy κ számosságú halmazra, ami ellentmond annak, hogy $|\tau| > \kappa$.

Legyen $\mathrm{Suc}(\lambda)$ a λ-nál kisebb rákövetkező rendszámok halmaza. Ha $\alpha < \lambda$ rákövetkező, akkor α normális index, így $\alpha \in A_{R(\alpha)} \subseteq \bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi$, vagyis $\mathrm{Suc}(\lambda) \subseteq \bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi$, azaz $|\mathrm{Suc}(\lambda)| \leq \left|\bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi\right| \leq \sum_{\xi<\kappa}\left|A_\xi\right| \leq \sum_{\xi<\kappa} \kappa = \kappa\kappa = \kappa$. Másrészt a $g: \lambda \to \mathrm{Suc}(\lambda)$ függvény, melyre $g(\alpha) = \alpha + 1$ bijekció λ és $\mathrm{Suc}(\lambda)$ között, így $|\lambda| = |\mathrm{Suc}(\lambda)| \leq \kappa$, tehát szigorúan monoton növő sorozatokra a lemmát beláttuk.

Ha $(a_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ szigorúan monoton csökkenő λ sorozat a $\{0,1\}^\kappa$-ban, akkor képezzük a $(b_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ sorozatot, amelyre tetszőleges $\alpha < \lambda$-ra és $\xi < \kappa$-ra $b_\alpha(\xi) = 1 - a_\alpha(\xi)$. Könnyen látható, hogy ez a sorozat szigorúan monoton növő lesz, így $|\lambda| \leq \kappa$ itt is teljesül.

8.22. Tétel: *Ha κ gyengén kompakt számosság, akkor erősen elérhetetlen.*

Bizonyítás: A 8.16. Állítás alapján κ reguláris. Indirekt tegyük fel, hogy az erősen elérhetetlenség másik feltételét nem tudja, azaz valamilyen $\tau < \kappa$-ra $2^\tau \geq \kappa$. Ekkor $|\{0,1\}^\tau| = 2^\tau \geq \kappa$, azaz $\exists A \subseteq \{0,1\}^\tau$, amelyre $|A| = \kappa$. A elemeit rendezzük egy $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ sorozatba. Ez egy $(\{0,1\}^\tau, <)$ rendezett halmazban futó κ sorozat, így a 8.17. lemma alapján létezik egy $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\kappa}$ szigorúan monoton növő részsorozata az $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$-nak vagy létezik egy $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\kappa}$ monoton csökkenő részsorozata ugyanennek. Az első esetben a 8.21. lemma miatt $\kappa \leq \tau$, ami ellentmondás. A második esetben az $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\kappa}$ valójában szigorúan monoton csökkenő részsorozat, hiszen az a_α sorozat elemei mind különbözőek, így a részsorozatainak is. Ekkor szintén a 8.21. lemmából azt kapjuk, hogy $\kappa \leq \tau$, ami ellentmondás, tehát beláttuk, hogy κ erősen elérhetetlen.

A gyengén kompakt számosságoknak van még egy érdekes tulajdonsága, jelesül ha egy K rendezett testre $\mathrm{cf}(K)$ gyengén kompakt, akkor a 8.12. lemma megfordítható.

8.23. Lemma: *Ha K CW tulajdonságú rendezett test és* $\mathrm{cf}(K)$ *gyengén kompakt, akkor K BW tulajdonságú.*

Bizonyítás: Legyen $H \subseteq K$ korlátos halmaz, amelyre $|H| = \mathrm{cf}(K)$. Rendezzük H elemeit egy $(a_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ sorozatba. Ekkor ez egy K-ban mint rendezett halmazban futó $\mathrm{cf}(K)$ sorozat, így a 8.17. lemma alapján létezik egy $\left(a_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ monoton részsorozata. Mivel az a_{α_ξ} sorozat elemei H-ban vannak, ezért a sorozat korlátos és monoton, így a CW tulajdonság miatt konvergens, azaz $a_{\alpha_\xi} \to a$. Az a_{α_ξ} sorozat elemei mind különbözőek, így legfeljebb 1 tagja lehet egyenlő a-val. A sorozat elejének esetleges levágásával feltehető, hogy $a_{\alpha_\xi} \neq a$ semmilyen $\xi < \mathrm{cf}(K)$-ra. Mivel a sorozat a H-ban fut, így minden feltétel teljesül, így a 8.2. állítás miatt a torlódási pontja H-nak. Mivel H tetszőleges $\mathrm{cf}(K)$ elemszámú korlátos halmaz volt, ezért K BW tulajdonságú.

8.24. Tétel: *Ha $\kappa > \aleph_0$ gyengén kompakt számosság, akkor $\mathbb{F}_\kappa$ BW tulajdonságú.*

Bizonyítás: A 8.16. állítás alapján κ reguláris, így a 7.20 tétel szerint $\mathbb{F}_\kappa$ CW tulajdonságú és mivel κ reguláris, ezért $\mathrm{cf}(\mathbb{F}_\kappa) = \kappa$ gyengén kompakt, így a 8.23. lemma alapján $\mathbb{F}_\kappa$ BW tulajdonságú.

9. Függvények határértéke és folytonossága

9.1. Definíció: *Legyen K rendezett test $a \in K$. Ha $f: K \rightarrowtail K$ függvény, (azaz $D(f) \subseteq K, R(f) \subseteq K$) és $b \in K$, akkor azt mondjuk, hogy az f határértéke a-ban b és $\lim_{x \to a} f(x) = b$-vel jelöljük, ha $\exists \delta_0 > 0$, hogy $(a - \delta_0, a + \delta_0) \setminus \{a\} \subseteq D(f)$ és $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, hogy $\forall x \neq a, |x - a| < \delta$-ra $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

9.2. Lemma: *Ha K rendezett test $a \in K$, $f: K \rightarrowtail K$ függvény és $b \in K$, akkor $\lim_{x \to a} f(x) = b$ akkor és csak akkor, ha minden $(x_\alpha)_{\alpha < \mathrm{cf}(K)}$ sorozatra, amelyre $x_\alpha \neq a$ semmilyen α-ra és $x_\alpha \to a$ létezik egy $\beta_0 < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall \alpha \geq \beta_0$-ra $x_\alpha \in D(f)$ és $f(x_\alpha) \to b$.*

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy $\lim_{x \to a} f(x) = b$ és legyen $(x_\alpha)_{\alpha < \mathrm{cf}(K)}$ egy olyan $\mathrm{cf}(K)$ sorozat, amelyre $x_\alpha \neq a$ semmilyen α-ra és $x_\alpha \to a$. A konvergencia miatt $\exists \beta_0 < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall \alpha \geq \beta_0$-ra $|x_\alpha - a| < \delta_0$. Ha $\alpha \geq \beta_0$ tetszőleges, akkor $x_\alpha \in (a - \delta_0, a + \delta_0)$ és mivel $x_\alpha \neq a$, ezért $x_\alpha \in (a - \delta_0, a + \delta_0) \setminus \{a\} \subseteq D(f)$. Az $f(x_\alpha)$ sorozat konvergenciájához vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t. Ekkor a határérték definíciója miatt $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x \neq a, |x - a| < \delta$-ra $|f(x) - b| < \varepsilon$. Másrészt az x_α konvergenciája miatt $\exists \beta < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall \alpha \geq \beta$-ra $|x_\alpha - a| < \delta$. Legyen $\alpha \geq \beta$ tetszőleges. Ekkor $|x_\alpha - a| < \delta$ és persze $x_\alpha \neq a$, így $|f(x_\alpha) - b| < \varepsilon$. Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, így beláttuk, hogy $f(x_\alpha) \to b$.

A másik irányba indirekt tegyük fel, hogy a $\lim_{x \to a} f(x) = b$ nem teljesül. Ha az első feltétel nem teljesül, akkor $\alpha < \mathrm{cf}(K)$ tetszőlegesre a $\delta_0 = \varepsilon_\alpha$ nem lesz jó (ahol ε_α a 3.4. konstrukcióból van), azaz választhatunk egy $x_\alpha \in (a - \varepsilon_\alpha, a + \varepsilon_\alpha) \setminus \{a\}$-t, amelyre $x_\alpha \notin D(f)$. Ekkor persze $x_\alpha \to a$. Legyen ugyanis $\varepsilon > 0$, ekkor választható $\beta < \mathrm{cf}(K)$, melyre $\varepsilon_\beta < \varepsilon$. Ha $\alpha \geq \beta$ tetszőleges, akkor $x_\alpha \in (a - \varepsilon_\alpha, a + \varepsilon_\alpha)$ miatt $|x_\alpha - a| < \varepsilon_\alpha \leq \varepsilon_\beta < \varepsilon$. Nyilván $x_\alpha \neq a$ is végig teljesül. Másrészt $x_\alpha \notin D(f)$ semmilyen α-ra, így a $\exists \beta_0 < \mathrm{cf}(K), \forall \alpha \geq \beta_0, x_\alpha \in D(f)$ nyilván nem igaz.

Tegyük fel, hogy a másik feltétel nem teljesül, azaz $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall \delta > 0$-hoz $\exists x \neq a$, hogy $|x - a| < \delta$ és $|f(x) - b| \geq \varepsilon$. Legyen $\varepsilon > 0$ a továbbiakban egy fix ilyen. Válasszunk minden $\alpha < \mathrm{cf}(K)$-ra egy $x_\alpha \in (a - \varepsilon_\alpha, a + \varepsilon_\alpha) \setminus \{a\}$, amelyre $|f(x_\alpha) - b| \geq \varepsilon$, ilyet tudunk választani az indirekt feltételezést $\delta = \varepsilon_\alpha$-ra felírva. Az előzőhöz hasonló módon itt is $x_\alpha \to a$ teljesül és persze $x_\alpha \neq a$ semmnilyen α-ra. Ekkor a feltételezésünk szerint $f(x_\alpha) \to b$, azaz $\exists \beta < \mathrm{cf}(K)$, hogy minden $\alpha \geq \beta$-ra $|f(x_\alpha) - b| < \varepsilon$, jelesül $\left|f(x_\beta) - b\right| < \varepsilon$. Ez ellentmondás, hiszen x_β-t úgy választottuk, hogy $\left|f(x_\beta) - b\right| \geq \varepsilon$ legyen.

9.3. Állítás: *Ha K rendezett test $a \in K$, $f: K \rightarrowtail K$ függvény és $b, c \in K$, melykre $\lim_{x \to a} f(x) = b$ és $\lim_{x \to a} f(x) = c$ egyszerre teljesülnek, akkor $b = c$ (azaz a határérték egyértelmű, így megfelelő az "="-vel való jelölés).*

Bizonyítás: Legyen $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ egy tetszőleges K-ban futó $\mathrm{cf}(K)$-sorozat, melyre $x_\alpha \neq a$ semmilyen α-ra és $x_\alpha \to a$ (például az $x_\alpha = a + \varepsilon_\alpha$ jó). Ekkor a 9.2. lemma alapján $\exists \beta_0 < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall \alpha \geq \beta_0$-ra $x_\alpha \in D(f)$, továbbá az $f(x_\alpha) \to b$, $f(x_\alpha) \to c$ egyszerre teljesülnek. Ekkor a 2.5. állítás alapján $b = c$.

9.4. Állítás: *Ha K rendezett test $a \in K$, $f, g: K \rightarrowtail K$ függvény és $b, c \in K$, melykre $\lim_{x\to a} f(x) = b$ és $\lim_{x\to a} g(x) = c$. Ekkor $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = b + c$, $\lim_{x\to a}(f-g)(x) = b - c$, $\lim_{x\to a}(fg)(x) = bc$, tetszőleges $d \in K$-ra $\lim_{x\to a}(df)(x) = db$ és ha $c \neq 0$, akkor $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{b}{c}$.(Itt függvények összegét, különbségét, szorzatát mindenhol értelmezzük, ahol mindkettő értelmezett és a hányadost is, ha a nevező nem 0).*

Bizonyítás: Legyen $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ egy tetszőleges K-ban futó $\mathrm{cf}(K)$-sorozat, melyre $x_\alpha \neq a$ semmilyen α-ra és $x_\alpha \to a$. Ekkor a 9.2. lemma miatt $\exists \beta_{01} < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall \alpha \geq \beta_{01}$-re $x_\alpha \in D(f)$ és $\exists \beta_{02} < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall \alpha \geq \beta_{02}$-re $x_\alpha \in D(g)$. Legyen $\beta_0 = \max(\beta_{01}, \beta_{02}) < \mathrm{cf}(K)$. Ekkor $\alpha \geq \beta_0$-ra $\alpha \geq \beta_{01}$ miatt $x_\alpha \in D(f)$ és $\alpha \geq \beta_{02}$ miatt $x_\alpha \in D(g)$, azaz $x_\alpha \in D(f) \cap D(g)$. Ekkor az $f+g, f-g, fg, df$ értelmezettek x_α-ban.

A 9.2. lemma másik állítása szerint $f(x_\alpha) \to b$ és $g(x_\alpha) \to c$. Ekkor a 2.6. állítás miatt $(f+g)(x_\alpha) = f(x_\alpha) + g(x_\alpha) \to b + c$. A 2.9. állítás miatt $(f-g)(x_\alpha) = f(x_\alpha) - g(x_\alpha) \to b - c$. A 2.7. állítás miatt $(fg)(x_\alpha) = f(x_\alpha)g(x_\alpha) \to bc$, míg a 2.8. állítás miatt $(df)(x_\alpha) = df(x_\alpha) \to db$. Mivel az $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ tetszőleges olyan sorozat volt, amelyre $x_\alpha \neq a$ és $x_\alpha \to a$, ezért a 9.2. lemma megfordításával $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = b + c$, $\lim_{x\to a}(f-g)(x) = b - c$, $\lim_{x\to a}(fg)(x) = bc$ és $\lim_{x\to a}(df)(x) = db$.

Az állítás utolsó részéhez tegyük fel, hogy $c \neq 0$. Ekkor mivel $g(x_\alpha) \to c$, a 2.11. állítást alkalmazva $\exists \beta_1 < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall \alpha \geq \beta_1$-re $g(x_\alpha) \neq 0$. Legyen $\beta = \max(\beta_0, \beta_1) < \mathrm{cf}(K)$. Ekkor tetszőleges $\alpha \geq \beta$-ra $\alpha \geq \beta_0$ miatt $x_\alpha \in D(f) \cap D(g)$ és $\alpha \geq \beta_1$ miatt $g(x_\alpha) \neq 0$, így $\frac{f}{g}$ értelmes x_α-ban. A 2.11. állítás másik fele alapján $\frac{f}{g}(x_\alpha) = \frac{f(x_\alpha)}{g(x_\alpha)} \to \frac{b}{c}$ és mivel az x_α sorozat tetszőleges volt, itt is alkalmazható a 9.2. lemma megfordítása, miszerint $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{b}{c}$.

9.5. Definíció: *Legyen K rendezett test $a \in K$, $f: K \rightarrowtail K$ függvény és $b \in K$. Ekkor $\lim_{x\to a+0} f(x) = b$, ha $\exists \delta_0 > 0$, hogy $(a, a+\delta_0) \subseteq D(f)$ és $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, hogy $\forall a<x<a+\delta$-ra $|f(x) - b| < \varepsilon$, illetve $\lim_{x\to a-0} f(x) = b$, ha $\exists \delta_0 > 0$, hogy $(a-\delta_0, a) \subseteq D(f)$ és $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, hogy $\forall a - \delta < x < a$-ra $|f(x) - b| < \varepsilon$. Az előbbi esetben azt mondjuk , hogy b az f jobboldali határértéke a-ban, míg az utóbbiban a b az f baloldali határértéke a-ban.*

A féloldalas határértékekre is alkalmazható a 9.2. lemma egy változata, melynek bizonyítása hasonlóan történik: $\lim_{x\to a+0} f(x) = b$ akkor és csak akkor, ha minden $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ sorozatra, amelyre $x_\alpha > a$ minden α-ra és $x_\alpha \to a$, létezik $\beta_0 < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall\alpha \geq \beta_0$-ra $x_\alpha \in D(f)$ és $f(x_\alpha) \to b$. A $\lim_{x\to a-0} f(x) = b$-ra is ugyanaz a feltétel, csak itt $x_\alpha < a$ kell a sorozat minden tagjára. A 9.3. állításhoz hasonlóan a féloldali határértékek is egyértelműek és a 9.4. állításhoz hasonlóan a műveletek is átmennek a féloldali határértéken.

9.6. Definíció: *Legyen K rendezett test $f: K \rightarrowtail K$ függvény és $a \in D(f)$. Ekkor az f függvény folytonos a-ban, ha $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

9.7. Állítás: *Ha K rendezett test $f: K \rightarrowtail K$ függvény és $a \in D(f)$, akkor f folytonos a-ban akkor és csak akkor, ha $\exists\delta_0 > 0$, hogy $(a-\delta_0, a+\delta_0) \subseteq D(f)$ és $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, hogy $\forall x, |x-a| < \delta$-ra $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Bizonyítás: Ha f folytonos a-ban, azaz $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, akkor a határérték definíciója alapján $\exists\delta_0 > 0$, hogy $(a-\delta_0, a+\delta_0) \setminus \{a\} \subseteq D(f)$ és persze $a \in D(f)$, így $(a-\delta_0, a+\delta_0) \subseteq D(f)$. Az állítás másik részéhez legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor $\exists\delta > 0$, hogy $\forall x \neq a, |x-a| < \delta$-ra $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Ez a δ jó lesz az állításunkba is ε-hoz, hiszen ha $x \in K$ tetszőleges, ahol $|x-a| < \delta$, akkor $x \neq a$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, míg $x = a$ esetén $|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$.

A másik irány világos, mert ha $\exists\delta_0 > 0$, hogy $(a-\delta_0, a+\delta_0) \subseteq D(f)$, akkor persze $(a-\delta_0, a+\delta_0) \setminus \{a\} \subseteq D(f)$ és ha $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, amelyre $\forall x, |x-a| < \delta$-ra $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, akkor ez továbbra is igaz marad az $x \neq a$ feltétel mellett is, így $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, azaz f folytonos a-ban.

9.8. Lemma: *Ha K rendezett test , $f: K \rightarrowtail K$ függvény és $a \in D(f)$, akkor f folytonos a-ban akkor és csak akkor, ha minden $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ sorozatra, amelyre $x_\alpha \to a$ létezik egy $\beta_0 < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall\alpha \geq \beta_0$-ra $x_\alpha \in D(f)$ és $f(x_\alpha) \to f(a)$.*

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy f folytonos a-ban és legyen $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$, $x_\alpha \to a$ $\mathrm{cf}(K)$ sorozat K-ban. A konvergencia miatt $\exists\beta_0 < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall\alpha \geq \beta_0$-ra $|x_\alpha - a| < \delta_0$. Ha $\alpha \geq \beta_0$ tetszőleges, akkor $x_\alpha \in (a-\delta_0, a+\delta_0) \subseteq D(f)$ a 9.7. állítás miatt. Az $f(x_\alpha)$ sorozat konvergenciájához vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t. Ekkor a 9.7. állítás miatt $\exists\delta > 0$, hogy $\forall x, |x-a| < \delta$-ra $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Másrészt az x_α konvergenciája miatt $\exists\beta < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall\alpha \geq \beta$-ra $|x_\alpha - a| < \delta$. Legyen $\alpha \geq \beta$ tetszőleges. Ekkor $|x_\alpha - a| < \delta$ így $|f(x_\alpha) - f(a)| < \varepsilon$. Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, így beláttuk, hogy $f(x_\alpha) \to f(a)$.

A másik irányba indirekt tegyük fel, hogy a f nem folytonos a-ban, azaz a 9.7. állítás nem teljesül. Ha az első feltétel nem teljesül, akkor $\alpha < \mathrm{cf}(K)$ tetszőlegesre a $\delta_0 = \varepsilon_\alpha$ nem lesz jó (ahol ε_α a 3.4. konstrukcióból van), azaz választhatunk egy $x_\alpha \in (a-\varepsilon_\alpha, a+\varepsilon_\alpha)$-t, amelyre

$x_\alpha \notin D(f)$. Ekkor persze $x_\alpha \to a$. Legyen ugyanis $\varepsilon > 0$, ekkor választható $\beta < \mathrm{cf}(K)$, melyre $\varepsilon_\beta < \varepsilon$. Ha $\alpha \geq \beta$ tetszőleges, akkor $x_\alpha \in (a - \varepsilon_\alpha, a + \varepsilon_\alpha)$ miatt $|x_\alpha - a| < \varepsilon_\alpha \leq \varepsilon_\beta < \varepsilon$. Másrészt $x_\alpha \notin D(f)$ semmilyen α-ra, így a $\exists \beta_0 < \mathrm{cf}(K), \forall \alpha \geq \beta_0, x_\alpha \in D(f)$ nyilván nem igaz.

Tegyük fel, hogy a másik feltétel nem teljesül, azaz $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall \delta > 0$-hoz $\exists x$, hogy $|x - a| < \delta$ és $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Legyen $\varepsilon > 0$ a továbbiakban egy fix ilyen. Válasszunk minden $\alpha < \mathrm{cf}(K)$-ra egy $x_\alpha \in (a - \varepsilon_\alpha, a + \varepsilon_\alpha)$-t, amelyre $|f(x_\alpha) - f(a)| \geq \varepsilon$, ilyet tudunk választani az indirekt feltételezést $\delta = \varepsilon_\alpha$-ra felírva. Az előzőhöz hasonló módon itt is $x_\alpha \to a$ Ekkor a feltételezésünk szerint $f(x_\alpha) \to f(a)$, azaz $\exists \beta < \mathrm{cf}(K)$, hogy minden $\alpha \geq \beta$-ra $|f(x_\alpha) - f(a)| < \varepsilon$, jelesül $|f(x_\beta) - f(a)| < \varepsilon$. Ez ellentmondás, hiszen x_β-t úgy választottuk, hogy $|f(x_\beta) - f(a)| \geq \varepsilon$ legyen.

9.9. Állítás: *Ha K rendezett test $f, g: K \rightarrowtail K$ függvény és $a \in D(f) \cap D(g)$ olyan, hogy f, g folytonos a-ban. Ekkor $f + g, f - g, fg$ és $d \in K$ tetszőlegesre df folytonos a-ban. Ha $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is folytonos a-ban.*

Bizonyítás: A folytonosság definíciója alapján $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ és $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$, így a 9.4. állítás alapján $\lim_{x \to a}(f + g)(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a)$, $\lim_{x \to a}(f - g)(x) = f(a) - g(a) = (f - g)(a)$, $\lim_{x \to a}(fg)(x) = f(a)g(a) = (fg)(a)$, és $d \in K$-ra $\lim_{x \to a}(df)(x) = df(a) = (df)(a)$, így $f + g, f - g, fg, df$ folytonosak a-ban. Ha $g(a) \neq 0$, akkor a 9.4. állítás utolsó része alapján $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f}{g}(a)$, így $\frac{f}{g}$ is folytonos a-ban.

9.10. Állítás: *Legyen K rendezett test $f, g: K \rightarrowtail K$ függvény és $a \in D(g)$ olyan, hogy $g(a) \in D(f)$. Ekkor persze $a \in D(f \circ g)$. Ha g folytonos a-ban és f folytonos $g(a)$-ban, akkor $f \circ g$ is folytonos a-ban.*

Bizonyítás: A 9.8. lemma állítását fogjuk belátni $f \circ g$-re. Legyen $(x_\alpha)_{\alpha < \mathrm{cf}(K)}$ egy K-ban futó $\mathrm{cf}(K)$ sorozat, melyre $x_\alpha \to a$. Ekkor mivel g folytonos a-ban, a 9.8. lemma alapján $\exists \beta_{01} < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall \alpha \geq \beta_{01}$-re $x_\alpha \in D(g)$ és $g(x_\alpha) \to g(a)$. Mivel f is folytonos $g(a)$-ban, ezért a 9.8. lemma alapján $\exists \beta_{02} < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall \alpha \geq \beta_{02}$-re $g(x_\alpha) \in D(f)$. Legyen $\beta_0 = \max(\beta_{01}, \beta_{02}) < \mathrm{cf}(K)$. Ha $\alpha \geq \beta_0$ tetszőleges akkor $\alpha \geq \beta_{01}$ miatt $x_\alpha \in D(g)$ és $\alpha \geq \beta_{02}$ miatt $g(x_\alpha) \in D(f)$, tehát $x_\alpha \in D(f \circ g)$. Másrészt $(f \circ g)(x_\alpha) = f(g(x_\alpha)) \to f(g(a)) = (f \circ g)(a)$, tehát a 9.8. lemma megfordítása alapján $f \circ g$ folytonos a-ban.

9.11. Definíció: *Legyen K rendezett test $f: K \rightarrowtail K$ függvény és $a \in D(f)$. Ekkor az f függvény jobbról folytonos a-ban, ha* $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, *balról folytonos a-ban, ha* $\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a)$.

A féloldali folytonossághoz is könnyen felírhatók a 9.7. és 9.8. -hoz hasonló ekvivalens állítások és a 9.9. állításhoz hasonlóan a féloldali folytonosságot is megőrzik a műveletek.

9.12. Állítás: *Ha K rendezett test $c \in K$ és f egész K-n értelmezett függvény, amelyre $f(x) = c$ minden $x \in K$-ra. Ekkor f folytonos minden $a \in K$-ban.*

Bizonyítás: A 9.7. állítás feltételeit látjuk be. Az első feltételre nyilván $\delta_0 = 1$ jó lesz minden $a \in K$-hoz, hiszen $(a-1, a+1) \subseteq K = D(f)$. A másik feltételhez tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz $\delta = 1$ jó lesz, ugyanis ha $x \in K$ tetszőleges, amelyre $|x - a| < 1$, akkor $|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

9.13. Állítás: *Ha K rendezett test és f egész K-n értelmezett függvény, amelyre $f(x) = x$ minden $x \in K$-ra. Ekkor f folytonos minden $a \in K$-ban.*

Bizonyítás: A 9.7. állítás feltételeit látjuk be. Az első feltételre nyilván $\delta_0 = 1$ jó lesz minden $a \in K$-hoz, hiszen $(a-1, a+1) \subseteq K = D(f)$. A másik feltételhez tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz $\delta = \varepsilon$ jó lesz, ugyanis ha $x \in K$ tetszőleges, amelyre $|x - a| < \varepsilon$, akkor $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \varepsilon$.

9.14. Tétel: *Ha K rendezett test, $p(x) \in K[x]$ polinom, akkor p folytonos minden $a \in K$-ra.*

Bizonyítás: Legyen $a \in K$ tetszőleges és $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, ahol $a_n, \dots, a_0 \in K$. A 9.13. állítás alapján az x függvény folytonos a-ban. A 9.9. állítás alapján folytonos függvények szorzata is folytonos, így x^k is folytonos lesz minden $k \in \mathbb{N}$-re. Szintén a 9.9. állítás miatt folytonos függvények konstansszorosa is folytonos, így $a_k x^k$ is folytonos lesz a-ban minden $1 \leq k \leq n$-re és a 9.12. állítás alapján a konstans a_0 függvény is folytonos a-ban, így a 9.9. állítás alapján ezek összege, tehát $p(x)$ is.

9.15. Tétel: *Ha K rendezett test, $R(x) \in K(x)$ racionális törtfüggvény, ami $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ alakba írható, ahol $p, q \in K[x]$. Ha $a \in K$ olyan, hogy $q(a) \neq 0$, akkor R folytonos a-ban.*

Bizonyítás: A 9.14. tétel alapján $p(x), q(x)$ folytonosak a-ban, így ha $q(a) \neq 0$, akkor a 9.9. állítás alapján $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ folytonos a-ban

A határérték és folytonosság eddig belátott tulajdonságai mind olyanok, amiket már a valós számokon is megszokhattunk. A továbbiakban azt fogjuk belátni, hogy ha K nem archimédeszien rendezett test, akkor a folytonos függvények bizonyos szép tulajdonságai biztosan nem fognak teljesülni, míg más tulajdonságok bizonyos feltételek mellett teljesülhetnek.

9.16. Definíció: *Legyen K rendezett test. Egy $x \in K$ elemet archimédeszinek nevezünk, ha $\exists a \in Z_K$, amelyre $a \geq |x|$. Az $A: K \to K$ a K archimédeszi függvénye, ahol minden $x \in K$-ra $A(x) = 0$, ha x archimédeszi és $A(x) = 1$, ha x nem archimédeszi.*

9.17. Állítás: *Ha K rendezett test, az $A(x)$ archimédeszi függvény folytonos minden $a \in K$-ban és ha K nem archimédeszi, akkor nem konstans.*

Bizonyítás: Legyen $a \in K$ tetszőleges. Azt fogjuk belátni, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz a $\delta = 1$ jó lesz a 9.7. állításhoz. Ha a archimédeszi, akkor $A(a) = 0$ és létezik $b \in Z_K$, hogy $b \geq |a|$. Ha $x \in K$ olyan, hogy $|x - a| \leq 1$, akkor $|x| \leq |a| + |x - a| \leq b + 1 \in Z_K$, tehát x is archimédeszi, $A(x) = 0$, így $|A(x) - A(a)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$. Ha a archimédeszi, akkor $A(a) = 1$. Azt fogjuk belátni, hogy ha $x \in K$ olyan, hogy $|x - a| \leq 1$, akkor x sem lehet archimédeszi. Indirekt tegyük fel, hogy mégis az, tehát $\exists b \in Z_K$, hogy $|x| \leq b$. Ekkor persze $|a| \leq |x| + |x - a| \leq b + 1 \in Z_K$, így a is archimédeszi, ami ellentmondás. Mivel x nem archimédeszi, ezért $A(x) = 1$, így $|A(x) - A(a)| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$, azaz mindkét esetben tejesül a 9.7. állítás, A folytonos minden $a \in K$-ban.

Nyilván $0 \leq 0 \in Z_K$, így a 0 archimédeszi, azaz $A(0) = 0$. Ha K nem archimédeszi, akkor $Z_K \subseteq K$ korlátos, azaz van egy $M \in K$ felső korlátja, nyilván $M \geq 0$. Ekkor $M + 1$ a Z_K minden eleménél nagyobb és $|M + 1| = M + 1$ nem archimédeszi, azaz $A(M + 1) = 1$. Mivel A felveszi a 0-t és az 1-et is, ezért nem konstans.

9.18. Definíció: *Ha K rendezett test, $a, b \in K$, ahol $a < b$, az $[a, b]$ zárt intervallumnak nevezzük az $\{x \in K: a \leq x \leq b\}$ halmazt. Egy $f: [a, b] \to K$ függvény folytonos az $[a, b]$-n, ha f folytonos minden $x \in (a, b)$-ben, jobbról folytonos a-ban és balról folytonos b-ben.*

A valós számok zárt intervallumain folytonos függvényeknek a következő 4 nevezetes tulajdonsága van:

1. Korlátosság

2. Weierstrass tulajdonság: Azaz ha $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor $\exists x \in [a, b]$, hogy $\forall y \in [a, b]$-re $f(y) \leq f(x)$, tehát f felveszi a maximumát

3. Darboux tulajdonság: Azaz ha $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $f(a) \leq f(b)$, akkor $\forall c, f(a) \leq c \leq f(b)$-re $\exists x \in [a, b]$, hogy $f(x) = c$ és hasonlóan $f(b) \leq f(a)$ esetben is

4. Egyenletes folytonosság: Azaz ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos, akkor $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, hogy $\forall x,y\in[a,b]$, melyekre $|y-x|<\delta$, $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$.

E közül a 4 tulajdonság közül nem archimédeszi rendezett testekben a 2. és 3. biztosan nem teljesül, ahogy a következő állítások mutatják.

9.19. Állítás: *Ha K rendezett test nem archimédeszi, akkor K-n nem teljesül a Darboux tulajdonság minden zárt intervallumon folytonos függvényre.*

Bizonyítás: Legyen $a=0$ és $b\in K$ tetszőleges olyan, amelyre $b>0$ és b nem archimédeszi. Ekkor a 9.17. állítás alapján az $A:[0,b]\to K$ függvény folytonos és $A(0)=0\leq\frac{1}{2}\leq 1=A(b)$, de az archimédeszi függvény definíciója alapján nem veszi fel sehol sem az $\frac{1}{2}$-et, így nem Darboux tulajdonságú.

9.20. Állítás: *Ha K rendezett test nem archimédeszi, akkor K-n nem teljesül a Weierstrass tulajdonság minden zárt intervallumon folytonos függvényre.*

Bizonyítás: Legyen $a=0$ és $b\in K$ tetszőleges olyan, amelyre $b>0$ és b nem archimédeszi. Ekkor a 9.17. állítás alapján az $A:[0,b]\to K$ függvény folytonos és a 9.9. állítás miatt az $f(x)=\frac{1}{b}x-A(x)$ is folytonos az $[a,b]$-n. Erre a függvényre $f(a)=f(b)=0$. Ha $x>0$ archimédeszi, akkor $f(x)=\frac{1}{b}x-A(x)=\frac{1}{b}x>0$, ha pedig $0\leq x\leq b$ nem archimédeszi, akkor $f(x)=\frac{1}{b}x-A(x)=\frac{1}{b}x-1\leq\frac{1}{b}b-1=0$. Indirekt tegyük fel, hogy f felveszi valahol a maximumát egy $0\leq x\leq b$-ben. Ekkor mivel f vesz fel pozitív értéket, ezért $f(x)>0$. Mivel f nem archimédeszi helyeken csak 0-t és negatív értékeket vehet fel, ezért x archimédeszi, azaz $\exists c\in Z_K$, hogy $x\leq c$. Ekkor $c+1\in Z_K$ és b nem archimédeszi, azaz $c+1\leq|b|=b$, vagyis $c+1\in[0,b]$ és persze $c+1$ archimédeszi és $c+1>x$. Ekkor $f(c+1)=\frac{1}{b}(c+1)-A(c+1)=\frac{1}{b}(c+1)>\frac{1}{b}x=\frac{1}{b}x-A(x)=f(x)$, tehát f-nek mégsincs x-ben maximuma.

Az eddigi negatív eredményekkel szemben vannak pozitív eredményeink is. A következőkben belátjuk, hogy ha a K rendezett test BW tulajdonságú (tehát például $K=\mathbb{F}_\kappa$, ahol κ gyengén kompakt), akkor az 1. és a 4. tulajdonság teljesül.

9.21. Lemma: *Ha K rendezett test BW tulajdonságú, $a,b\in K$, $a\leq b$ és $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ egy olyan K-ban futó $\mathrm{cf}(K)$ sorozat, hogy $x_\alpha\in[a,b], \forall\alpha<\mathrm{cf}(K)$-ra, akkor $\exists\left(x_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ kofinális részsorozata, ami konvergens.*

Bizonyítás: Legyen $H = \{x_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(K)\}$. Ekkor nyilván $|H| \le \mathrm{cf}(K)$ és $H \subseteq [a,b]$, ezért korlátos. Ha $|H| < \mathrm{cf}(K)$, akkor legyen $x \in H$-ra $A_x = \{\alpha < \mathrm{cf}(K): x_\alpha = x\}$. Mivel $\forall \alpha < \mathrm{cf}(K)$-ra $x_\alpha \in H$, így $\alpha \in A_{x_\alpha}$, tehát $\bigcup_{x\in H} A_x = \mathrm{cf}(K)$. Mivel $\mathrm{cf}(K)$ reguláris, nem áll elő $\mathrm{cf}(K)$-nál kevesebb $\mathrm{cf}(K)$-nál kisebb halmaz uniójaként, vagyis $\exists x \in H$, amelyre $|A_x| = \mathrm{cf}(K)$. Ekkor legyen $(\alpha_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ az A_x növekvő sorrendbe rendezése. Mivel $|A_x| = \mathrm{cf}(K)$, ez nyilván kofinális részsorozat lesz és $\xi < \mathrm{cf}(K)$-ra $\alpha_\xi \in A_x$, tehát $x_{\alpha_\xi} = x$, így nyilván $x_{\alpha_\xi} \to x$, konvergens.

A továbbiakban tegyük fel, hogy $|H| = \mathrm{cf}(K)$. Ekkor a BW tulajdonság miatt $\exists x \in K$ torlódási pontja H-nak. Transzfinit rekurzióval fogunk konstruálni egy olyan $\left(x_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ kofinális részsorozatot, amelyre $x_{\alpha_\xi} \ne x$ semmilyen $\xi < \mathrm{cf}(K)$-ra és $x_{\alpha_\xi} \to x$. Legyen $\zeta < \mathrm{cf}(K)$ és tegyük fel, hogy minden $\xi < \zeta$-ra már választottunk α_ξ-t, melyekre $x_{\alpha_\xi} \ne x$. Legyen $\beta = \sup\{\alpha_\xi : \xi < \zeta\}$. Mivel $|\zeta| \le \zeta < \mathrm{cf}(K) = \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(K))$, ezért $\{\alpha_\xi : \xi < \zeta\}$ nem kofinális $\mathrm{cf}(K)$-ban, vagyis $\beta < \mathrm{cf}(K)$. Legyen $S = \left\{\frac{1}{|x_\gamma - x|} : \gamma \le \beta, x_\gamma \ne x\right\}$. Ekkor $|S| \le |\beta| < \mathrm{cf}(K)$, ezért S nem kofinális K-ban, létezik egy M felső korlátja. Legyen $\delta = \min\left(\frac{1}{M}, \varepsilon_\zeta\right)$, ahol ε_ζ a 3.4. állítás konstrukciójából van. Mivel x torlódási pontja H-nak, ezért vehetünk egy $y \in H$-t, melyre $y \ne x$ és $|y - x| < \delta$. Válasszunk egy $\alpha_\zeta < \mathrm{cf}(K)$-t, melyre $x_{\alpha_\zeta} = y$. Ekkor persze $\alpha_\zeta > \beta$, hiszen, ha $\alpha_\zeta \le \beta$ lenne, akkor $x_{\alpha_\zeta} = y \ne x$ miatt $\frac{1}{|x_{\alpha_\zeta} - x|} \in S$, tehát $\frac{1}{|x_{\alpha_\zeta} - x|} \le M$, vagyis $\left|x_{\alpha_\zeta} - x\right| \ge \frac{1}{M}$ lenne, ami ellentmond annak, hogy $\left|x_{\alpha_\zeta} - x\right| = |y - x| < \delta \le \frac{1}{M}$. Így a részsorozat választása jó, és nyilván az $x_{\alpha_\zeta} = y \ne x$ továbbra is teljesül. Mivel $\mathrm{cf}(K)$-ig választjuk az elemeket, ezért $\left(x_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ kofinális részsorozat.

Kell még, hogy $x_{\alpha_\xi} \to x$. Ehhez vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t és legyen $\eta < \mathrm{cf}(K)$ olyan, hogy $\varepsilon_\eta < \varepsilon$. Ekkor minden $\xi \ge \eta$-ra $\left|x_{\alpha_\xi} - x\right| < \varepsilon_\xi \le \varepsilon_\eta < \varepsilon$, tehát a konvergencia valóban teljesül.

9.22. Tétel: *Ha K rendezett test BW tulajdonságú, $a, b \in K, a \le b$ és $f: [a,b] \to K$ folytonos, akkor f korlátos.*

Bizonyítás: Először azt látjuk be, hogy f felülről korlátos. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem teljesül. Ekkor nézzük a 3.3. állítás során előállított $(t_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ sorozatot. Ha $\alpha < \mathrm{cf}(K)$ tetszőleges, akkor a feltevésünk szerint t_α nem lesz felső korlátja f-nek $[a,b]$-n, így $\exists x_\alpha \in [a,b]$, amelyre $f(x_\alpha) > t_\alpha$. Mivel az $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ sorozat minden tagja $[a,b]$ intervallumban van és K BW tulajdonságú, a 9.21. lemma alapján $\exists \left(x_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ kofinális részsorozata, amely konvergens, azaz $x_{\alpha_\xi} \to x$ valamely $x \in K$-ra. Mivel minden $\xi < \mathrm{cf}(K)$-

ra $a \leq x_{\alpha_\xi} \leq b$, ezért $a \leq x \leq b$, vagyis $x \in [a, b]$. Ekkor f folytonos x-ben (vagy féloldalról folytonos, ha az intervallum szélén van), így a 9.8. állítás alapján $f\left(x_{\alpha_\xi}\right) \to f(x)$. A konvergencia definícióját $\varepsilon = 1$-re felírva $\exists \eta < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall \xi \geq \eta$-ra $\left|f\left(x_{\alpha_\xi}\right) - f(x)\right| < 1$, így $t_{\alpha_\xi} < f\left(x_{\alpha_\xi}\right) < f(x) + 1$. Ekkor az $f(x) + 1$ a t_α sorozat felső korlátja. Legyen ugyanis $\alpha < \mathrm{cf}(K)$ tetszőleges. Ekkor $\exists \xi_0 < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\alpha_{\xi_0} \geq \alpha$. Legyen $\xi = \max(\xi_0, \eta)$. A t_α sorozat monotonitása miatt $t_\alpha \leq t_{\alpha_{\xi_0}} \leq t_{\alpha_\xi}$, másrészt $\xi \geq \eta$, így $t_\alpha \leq t_{\alpha_\xi} < f(x) + 1$. Mivel $\alpha < \mathrm{cf}(K)$ tetszőleges volt, ezért $f(x) + 1$ valóban felső korlát, ami ellent mond annak, hogy a t_α sorozat felülről nem korlátos.

Ezzel beláttuk, hogy f felülről korlátos $[a, b]$-n. Ha f folytonos $[a, b]$-n, akkor a 9.9. állítás alapján $-f$ is, tehát felülről korlátos. Legyen M a $-f$ felső korlátja $[a, b]$-n. Ekkor $\forall x \in [a, b]$-re $-f(x) \leq M$, tehát $f(x) \geq -M$, vagyis a $-M$ jó alsó korlát lesz f-re $[a, b]$-n. Mivel f felülről és alulról is korlátos, így korlátos.

9.23. Tétel: *Ha K rendezett test BW tulajdonságú, $a, b \in K, a \leq b$ és $f: [a, b] \to K$ folytonos, akkor f egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy az egyenletes folytonosság nem teljesül, azaz $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall \delta > 0$-ra $\exists x, y \in [a, b]$, melyekre $|y - x| < \delta$ és $|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$. Legyen $\varepsilon > 0$ fix, ami teljesíti ezt az indirekt feltevést. Ekkor $\delta = \varepsilon_\alpha$-ra (3.4. állítás konstrukciója) válasszunk egy x_α, y_α párt, melyekre $|y_\alpha - x_\alpha| < \varepsilon_\alpha$ és $|f(y_\alpha) - f(x_\alpha)| \geq \varepsilon$. Mivel az $(x_\alpha)_{\alpha < \mathrm{cf}(K)}$ sorozat minden tagja $[a, b]$ intervallumban van és K BW tulajdonságú, a 9.21. lemma alapján $\exists \left(x_{\alpha_\xi}\right)_{\xi < \mathrm{cf}(K)}$ kofinális részsorozata, amely konvergens, azaz $x_{\alpha_\xi} \to x$ valamely $x \in K$-ra. Mivel minden $\xi < \mathrm{cf}(K)$-ra $a \leq x_{\alpha_\xi} \leq b$, ezért $a \leq x \leq b$, vagyis $x \in [a, b]$. Ekkor f folytonos x-ben (vagy féloldalról folytonos, ha az intervallum szélén van), így a 9.8. állítás alapján $f\left(x_{\alpha_\xi}\right) \to f(x)$. Másrészt mivel $\forall \alpha < \mathrm{cf}(K)$-ra $|y_\alpha - x_\alpha| < \varepsilon_\alpha$, ezért nyilván minden $\xi < \mathrm{cf}(K)$-ra $\left|y_{\alpha_\xi} - x_{\alpha_\xi}\right| < \varepsilon_{\alpha_\xi}$, tehát $y_{\alpha_\xi} - x_{\alpha_\xi} \to 0$. A 2.6. állítás alapján $y_{\alpha_\xi} = x_{\alpha_\xi} + \left(y_{\alpha_\xi} - x_{\alpha_\xi}\right) \to x + 0 = x$, így a 9.8. állítást ismételten alkalmazva $f\left(y_{\alpha_\xi}\right) \to f(x)$. A konvergenciák miatt $\exists \eta_1 < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall \xi \geq \eta_1$-re $\left|f\left(x_{\alpha_\xi}\right) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\exists \eta_2 < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall \xi \geq \eta_2$-re $\left|f\left(y_{\alpha_\xi}\right) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $\eta = \max(\eta_1, \eta_2)$. Ekkor $\eta \geq \eta_1$ miatt $\left|f\left(x_{\alpha_\eta}\right) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, míg $\eta \geq \eta_2$ miatt $\left|f\left(y_{\alpha_\eta}\right) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ez alapján $\left|f\left(y_{\alpha_\eta}\right) - f\left(x_{\alpha_\eta}\right)\right| \leq \left|f\left(y_{\alpha_\eta}\right) - f(x)\right| + \left|f\left(x_{\alpha_\eta}\right) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. Ez ellentmondás, hiszen x_{α_η}, y_{α_η}-t úgy választottuk, hogy $\left|f\left(y_{\alpha_\eta}\right) - f\left(x_{\alpha_\eta}\right)\right| \geq \varepsilon$ legyen, tehát f valóban egyenletesen folytonos $[a, b]$-n.

10. K metrikus terek

10.1. Definíció: *Legyen K rendezett test. Egy (X,d) párt K-metrikus térnek nevezünk, ha X tetszőleges halmaz, $d: X \times X \to K$, melyekre a következő tulajdonságok teljesülnek:*

1. $\forall x,y \in X: d(x,y) \geq 0$ *és* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2. $\forall x,y \in X: d(x,y) = d(y,x)$

3. $\forall x,y,z \in X: d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(Háromszög egyenlőtlenség)*

10.2. Példa: *Ha K rendezett test, a (K,d) K-metrikus tér, ahol $\forall x,y \in K$-ra $d(x,y) = |x-y|$.*

Bizonyítás: Az abszolútérték elemi tulajdonságaiból

1. $\forall x,y \in K$-ra $d(x,y) = |x-y| \geq 0$ és $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2. $\forall x,y \in K$-ra $d(x,y) = |x-y| = |-(x-y)| = |y-x| = d(y,x)$.

3. $\forall x,y \in K$-ra $d(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$.

10.3. Példa: *Legyen K rendezett test, $n \in \mathbb{N}$, akkor $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y) \in K^n$-re legyen $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ és $d_{\max}(x,y) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$. Ekkor (K^n, d_1) és $(K^n, d_{\max})$ K metrikus terek*

Bizonyítás: Nézzük meg a 3 feltételt

1. Mivel minden $i = 1 \dots n$-re $|x_i - y_i| \geq 0$ tetszőleges $x,y \in K^n$-re, ezért nyilván $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \geq 0$ és $d_{\max}(x,y) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \geq 0$. Egyenlőség pontosan akkor van mindkét esetben, ha $\forall i = 1 \dots n$-re $|x_i - y_i| = 0$, azaz $x_i = y_i$. Ez pontosan azt jelenti, hogy $x = y$.

2. Minden $x,y \in K^n$-re és $i = 1 \dots n$-re $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$, így $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(y,x)$ és $d_{\max}(x,y) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \max_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_{\max}(y,x)$.

3. A háromszög egyenlőtlenséghez legyen $x,y \in K^n$. Ekkor minden $i = 1 \dots n$-re $|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$, így $d_1(x,z) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| = d_1(x,y) + d_1(y,z)$. A max metrika háromszög egyenlőtlenségéhez legyen $1 \leq k \leq n$ az a hely, amelyre $|x_k - z_k|$

maximális az $|x_i - z_i|$-k közül. Ekkor $d_{\max}(x,z) = |x_k - z_k| \leq |x_k - y_k| + |y_k - z_k| \leq$ $\leq \max_{i=1}^n |x_i - y_i| + \max_{i=1}^n |y_i - z_i| = d_{\max}(x,y) + d_{\max}(y,z)$.

10.4. Definíció: *Ha K rendezett test, (X,d) K-metrikus tér, $x \in X$ és $r \in K, r > 0$. Akkor az x körüli r sugarú nyílt gömbnek nevezzük a $B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ halmazt és az x körüli r sugarú zárt gömbnek nevezzük a $\bar{B}_r(x) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ halmazt.*

10.5. Definíció: *Legyen K rendezett test, (X,d) K-metrikus tér. Egy $U \subseteq X$ halmaz nyílt, ha $\forall x \in U$-ra $\exists r > 0$, hogy $B_r(x) \subseteq U$. Egy $F \subseteq X$ halmaz zárt, ha $X \setminus F$ nyílt.*

10.6. Tétel: *Ha K rendezett test, (X,d) K-metrikus tér, akkor a $\tau = \{U \subseteq X | \, U \text{ nyílt}\}$ topológiával az (X,τ) topologikus tér.*

Bizonyítás: Az $\emptyset$-ra nyilván teljesül a nyíltság feltétele, mert nincs eleme, amire vonatkozhatna. Az X halmaz is nyílt, mivel tetszőleges $x \in X$-re $r = 1$ jó, hiszen $B_1(x) \subseteq X$.

Az unióra zártsághoz legyen $\mathcal{U} \subseteq P(X)$ olyan, hogy minden $U \in \mathcal{U}$ nyílt. Ekkor $\cup\, \mathcal{U}$ is nyílt lesz. Vegyünk ugyanis egy tetszőleges $x \in \cup\, \mathcal{U}$, ekkor létezik $U \in \mathcal{U}$, amelyre $x \in U$. Mivel U nyílt, ezért $\exists r > 0$, hogy $B_r(x) \subseteq U \subseteq \cup\, \mathcal{U}$, tehát $\cup\, \mathcal{U}$ valóban nyílt.

A véges metszetre zártsághoz legyen $U_1, \ldots, U_n \subseteq X$ nyíltak valamely $n \in N$-re és $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. Ekkor $\forall i = 1 \ldots n$-re $x \in U_i$ és U_i nyílt, így $\exists r_i > 0$, hogy $B_{r_i}(x) \subseteq U_i$. Legyen $r = \min(r_1, \ldots, r_n) > 0$. Ekkor tetszőleges i-re $B_r(x) \subseteq B_{r_i}(x) \subseteq U_i$, így $B_r(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$. Mivel $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ tetszőleges volt, ezért $\bigcap_{i=1}^n U_i$ is nyílt.

Ez alapján minden topológiai fogalom is értelmezhető K metrikus terekre és azokon lévő objektumokra. A topologikus terek utolsó feltételét, a véges metszetre való zártságot viszont erősíteni lehet K metrikus terek esetén.

10.7. Definíció: *Egy (X,τ) topologikus tér egy κ számosságra κ-metsző, ha tetszőleges $\{U_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ nyíltak rendszerére $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha$ is nyílt. Az (X,τ) $< \kappa$ metsző, ha minden $\lambda < \kappa$ számosságra λ-metsző.*

Könnyen látható, hogy κ minél nagyobb, a κ-metsző tulajdonság annál erősebb.

10.8. Állítás: *Ha K rendezett test, akkor minden (X,d) K-metrikus tér $< \mathrm{cf}(K)$ metsző.*

Bizonyítás: Legyen (X,d) K-metrikus tér, $\lambda < \mathrm{cf}(K)$ és minden $\alpha < \lambda$-ra $U_\alpha \subseteq X$ nyílt. Meg kell mutatnunk, hogy $\bigcap_{\alpha<\lambda} U_\alpha$ is nyílt. Vegyünk egy tetszőleges $x \in \bigcap_{\alpha<\lambda} U_\alpha$-t. Ekkor minden $\alpha < \lambda$-ra $x \in U_\alpha$ és U_α nyílt, így $\exists r_\alpha > 0$, hogy $B_{r_\alpha}(x) \subseteq U_\alpha$. Legyen $S = \left\{\frac{1}{r_\alpha} : \alpha < \lambda\right\} \subseteq K$. Mivel $|S| \leq \lambda < \mathrm{cf}(K)$, ezért $S \subseteq K$ nem kofinális, $\exists M \in K$ felső korlátja. Ekkor nyilván $M > 0$, legyen $r = \frac{1}{M}$. Ekkor tetszőleges $\alpha < \lambda$-ra $\frac{1}{r} = M \geq \frac{1}{r_\alpha}$, így $r \leq r_\alpha$, így $B_r(x) \subseteq B_{r_\alpha}(x) \subseteq U_\alpha$. Ez minden $\alpha < \lambda$-ra igaz, így $B_r(x) \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} U_\alpha$. Mivel x választása is tetszőleges volt, ezért $\bigcap_{\alpha<\lambda} U_\alpha$ nyílt.

10.9. Állítás: *Ha K rendezett test, (X, d) K-metrikus tér, $x \in X$ és $r > 0$, akkor a $B_r(x)$ nyílt gömb nyílt, a $\bar{B}_r(x)$ zárt gömb zárt.*

Bizonyítás: Ha $y \in B_r(x)$ tetszőleges, akkor $d = d(x, y) < r$, tehát $r - d > 0$. Ha $z \in B_{r-d}(y)$, akkor a háromszög egyenlőtlenség miatt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d + (r - d) = r$, tehát $z \in B_r(x)$, azaz $B_{r-d}(y) \subseteq B_r(x)$, tehát $r - d$ jó lesz $B_r(x)$ nyíltságához y-ban.

A $\bar{B}_r(x)$ zártságához azt kell belázni, hogy $X / \bar{B}_r(x)$ nyílt. Legyen $y \in X / \bar{B}_r(x)$. Ekkor $d = d(x, y) > r$, tehát $d - r > 0$. Ha $z \in B_{d-r}(y)$, akkor a háromszög egyenlőtlenség miatt $d = d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < d(x, z) + d - r$, így $d(x, z) > r$, azaz $z \in X / \bar{B}_r(x)$, vagyis $B_{d-r}(y) \subseteq X / \bar{B}_r(x)$, tehát $d - r$ jó lesz $X / \bar{B}_r(x)$ nyíltságához y-ban.

10.10. Állítás: *Ha K rendezett test, (X, d) K-metrikus tér, akkor ennek topologikus bázisát adják a $B_r(x)$ halmazok, ahol $x \in X, r > 0$.*

Bizonyítás: A 10.9. állítás miatt minden ilyen halmaz nyílt. Azt kell belátnunk, hogy tetszőleges $U \subseteq X$ nyílt előáll ilyenek uniójaként. Ez a következő formában áll elő $U = \bigcup\{B_r(x) : x \in X, r > 0, B_r(x) \subseteq U\}$. Az egyik irányú tartalmazás világos, mivel minden $x \in X, r > 0$-ra, amire a $B_r(x)$ a jobboldali halmazban van $B_r(x) \subseteq U$, tehát ezek uniója is $U \supseteq \bigcup \{B_r(x) : x \in X, r > 0, B_r(x) \subseteq U\}$. Másrészt, ha $x \in U$ akkor az U nyíltsága miatt $\exists r > 0$, hogy $B_r(x) \subseteq U$, azaz $x \in B_r(x) \subseteq \bigcup \{B_r(x) : x \in X, r > 0, B_r(x) \subseteq U\}$. Mivel $x \in U$ tetszőleges volt, ezért $U \subseteq \bigcup \{B_r(x) : x \in X, r > 0, B_r(x) \subseteq U\}$, tehát a két halmaz egyenlő.

10.11. Állítás: *Ha K rendezett test, akkor minden (X, d) K-metrikus tér T2.*

Bizonyítás: Legyen $x, y \in X$ $x \neq y$. Ekkor $d = d(x, y) > 0$. Nyilván $x \in B_{\frac{d}{2}}(x)$ és $y \in B_{\frac{d}{2}}(y)$ és ezek a 10.9. állítás alapján nyíltak. Elég belátni, hogy diszjunktak. Indirekt tegyük fel, hogy $z \in B_{\frac{d}{2}}(x) \cap B_{\frac{d}{2}}(y)$. Ekkor a háromszög egyenlőtlenség miatt $d = d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d$, ami ellentmondás, tehát $B_{\frac{d}{2}}(x)$ és $B_{\frac{d}{2}}(y)$ valóban diszjunktak.

10.12. Tétel: *Ha K rendezett test, akkor minden (X, d) K-metrikus tér T4.*

Bizonyítás: Mivel (X, d) metrikus tér a 10.11. állítás miatt T2, ezért nyilván T1 is, tehát ahhoz, hogy T4 legyen elég belátni, hogy normális. Legyen $F_1, F_2 \subseteq X$ zártak, melyekre $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Legyen $U_1 = \{x \in X: \exists\delta > 0, y \in F_1, d(x, y) < \delta, \forall z \in F_2, d(x, z) \geq \delta\}$ és hasonlóan $U_2 = \{x \in X: \exists\delta > 0, y \in F_2, d(x, y) < \delta, \forall z \in F_1, d(x, z) \geq \delta\}$. Ezekről látjuk be, hogy F_1, F_2-t elválasztó nyíltak.

Először azt bizonyítjuk, hogy $F_1 \subseteq U_1$. Ha $x \in F_1$ tetszőleges, akkor $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ miatt $x \notin F_2$, tehát $x \in X / F_2$. Mivel X / F_2 nyílt, ezért $\exists\delta > 0$, hogy $B_\delta(x) \subseteq X / F_2$. Ekkor ez a δ jó lesz x-ben U_1 feltételéhez $y = x \in F_1$-gyel. Nyilván $d(x, x) = 0 < \delta$ teljesül, ha $z \in F_2$, akkor $z \notin B_\delta(x)$, hiszen a $B_\delta(x) \subseteq X / F_2$ miatt a $B_\delta(x) \cap F_2 = \emptyset$, így $d(x, z) \geq \delta$, tehát minden feltétel teljesül, $x \in U_1$. Mivel $x \in F_1$ tetszőleges volt, ezért $F_1 \subseteq U_1$. Ugyanígy belátható, hogy $F_2 \subseteq U_2$.

Most azt látjuk be, hogy U_1 nyílt. Legyen $x \in U_1$ tetszőleges és $\delta > 0, y \in F_1$ olyanok, hogy $d(x, y) < \delta$ és $\forall z \in F_2, d(x, z) \geq \delta$. Legyen $s = \delta - d(x, y) > 0$. Azt fogjuk belátni, hogy $B_{\frac{s}{3}}(x) \subseteq U_1$. Legyen $t \in B_{\frac{s}{3}}(x)$, ekkor t-re ugyanaz az $y \in F_1$ jó lesz $\delta' = \delta - \frac{s}{3}$-mal U_1-hez. Egyrészt $d(t, y) \leq d(x, y) + d(t, x) < d(x, y) + \frac{s}{3} = \delta - s + \frac{s}{3} = \delta - \frac{2s}{3} < \delta - \frac{s}{3} = \delta'$. Másrészt ha $z \in F_2$ tetszőleges, akkor $\delta \leq d(x, z) \leq d(t, z) + d(t, x) < d(t, z) + \frac{s}{3}$, így $d(t, z) > \delta - \frac{s}{3} = \delta'$. Ebből követhezően $t \in U_1$, tehát $B_{\frac{s}{3}}(x) \subseteq U_1$, azaz U_1 nyílt. Hasonló módon belátható, hogy U_2 is nyílt.

Végül azt látjuk be, hogy $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Indirekt tegyük fel, hogy $x \in U_1 \cap U_2$. Ekkor $x \in U_1$ miatt $\exists\delta_1 > 0, y_1 \in F_1, d(x, y_1) < \delta_1, \forall z \in F_2, d(x, z) \geq \delta_1$ és $x \in U_2$ miatt $\exists\delta_2 > 0, y_2 \in F_2, d(x, y_2) < \delta_2, \forall z \in F_1, d(x, z) \geq \delta_2$. Ekkor $y_2 \in F_2$ miatt $\delta_1 \leq d(x, y_2) < \delta_2$ és $y_1 \in F_1$ miatt $\delta_2 \leq d(x, y_1) < \delta_1$, ami egyszerre nem teljesülhet. Így ellentmondásra jutottunk, tehát $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

A következő lépés során megvizsgáljuk a zárt halmazok kapcsolatát a sorozatok konvergenciájával.

10.13. Definíció: *Ha K rendezett test, (X, d) K-metrikus tér, κ számosság és $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ X-ben futó κ sorozat. Egy $x \in X$-re azt mondjuk, hogy $x_\alpha \to x$, ha $\forall\varepsilon > 0, \exists\beta < \kappa, \forall\alpha \geq \beta$-ra $d(x_\alpha, x) < \varepsilon$. Az $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ sorozat konvergens, ha $\exists x \in X$, hogy $x_\alpha \to x$.*

10.14. Állítás: *Az előbb definiált konvergancia megegyezik a topológia által indukált konvergenciával.*

Bizonyítás: Legyen $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ egy X-beli κ sorozat és $x \in X$. Először tegyük fel, hogy $x_\alpha \to x$ a 10.13. definíció szerint. Legyen U tetszőleges nyilt, amelyre $x \in U$. Ekkor $\exists r > 0, B_r(x) \subseteq U$. Másrészt a konvergencia miatt $\exists \beta < \kappa, \forall \alpha \geq \beta$-ra $d(x_\alpha, x) < r$, azaz $x_\alpha \in B_r(x) \subseteq U$, vagyis a β jó lesz a topológiai értelemben vett konvergenciához U-ban. A másik irányba tegyük fel, hogy $x_\alpha \to x$ topológiai értelemben és vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t a 10.13. definícióhoz. Mivel $x \in B_\varepsilon(x) \subseteq X$ nyílt, ezért $\exists \beta < \kappa, \forall \alpha \geq \beta$-ra $x_\alpha \in B_\varepsilon(x)$, azaz $d(x_\alpha, x) < \varepsilon$, tehát β jó lesz ε-hoz a 10.13. definícióba.

Mivel minden K-metrikus tér T_2, ezért a topológiai értelemben vett határérték egyértelmű, azaz az előbbi definíció alapján is csak egy határértéke lehet egy sorozatnak.

10.15. Állítás: *Ha K rendezett test, (X, d) K-metrikus tér, $F \subseteq X$ zárt, κ számosság és $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ egy olyan κ sorozat, melynek elemei F-ben vannak és $x_\alpha \to x$ valamely $x \in X$-re, akkor $x \in F$.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy $x \notin F$, tehát $x \in X \setminus F$. Ekkor mivel $X \setminus F$ nyílt, ezért $\exists r > 0$, hogy $B_r(x) \subseteq X \setminus F$. Mivel $x_\alpha \to x$, ezért $\exists \beta < \kappa$, hogy $\forall \alpha \geq \beta$-ra $d(x_\alpha, x) < r$, jelesül $d(x_\beta, x) < r$, vagyis $x_\beta \in B_r(x) \subseteq X \setminus F$. Ez ellent mond annak, hogy $x_\beta \in F$, így $x \in F$ teljesül.

Ennek az állításnak a megfordítása is igaz, sőt elég csak $\mathrm{cf}(K)$ hosszú szorozatokra feltenni az állítást.

10.16. Állítás: *Ha K rendezett test, (X, d) K-metrikus tér, $F \subseteq X$ olyan halmaz, hogy minden $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ sorozatra, melynek elemei F-ben vannak és $x_\alpha \to x$ valamely $x \in X$-re, akkor $x \in F$, akkor $F \subseteq X$ zárt.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy F nem zárt, azaz $X \setminus F$ nem nyílt. A definíció alapján ez azt jelenti, hogy $\exists x \in X \setminus F$, hogy $\forall r > 0$-ra $B_r(x) \nsubseteq X \setminus F$, azaz $B_r(x) \cap F \neq \emptyset$. Vegyük a 3.4. állítás során megkonstruált $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ sorozatot és válasszunk egy $x_\alpha \in B_{\varepsilon_\alpha}(x) \cap F$ elemet. Ekkor az $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ sorozat elemei F-ben vannak. Másrészt $x_\alpha \to x$. Vegyünk ugyanis egy $\varepsilon > 0$-t. Ekkor van egy $\beta < \mathrm{cf}(K)$, amelyre $\varepsilon_\beta < \varepsilon$. Ha $\alpha \geq \beta$ tetszőleges, akkor $x_\alpha \in B_{\varepsilon_\alpha}(x)$, tehát $d(x_\alpha, x) < \varepsilon_\alpha \leq \varepsilon_\beta < \varepsilon$, tehát $x_\alpha \to x$ valóban teljesül. De a feltétel szerint ekkor $x \in F$, de $x \in X \setminus F$, ami ellentmondás, így F valóban zárt.

10.17. Definíció: *Ha K rendezett test, (X, d) K-metrikus tér, κ számosság és $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ X-ben futó κ sorozat, akkor az x_α sorozat Cauchy, ha $\forall \varepsilon > 0, \exists \beta < \kappa$, hogy $\forall \alpha, \gamma \geq \beta$-ra $d(x_\alpha, x_\gamma) < \varepsilon$.*

A rendezett testeken a 2.18. állítás alapján minden konvergens sorozat Cauchy, ennek a bizonyítása pontosan átvihető K-metrikus terekre is. Ez alapján lesz értelme a következő definíciónak. Az is igaz lesz, hogy elég a $\mathrm{cf}(K)$ hosszú Cauchy sorozatokat nézni, hiszen a más reguláris hosszú Cauchy sorozat itt is stabilizálódni fog.

10.18. Definíció: *Ha K rendezett test, az (X, d) K-metrikus tér teljes, ha minden $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ Cauchy sorozat konvergens.*

Ha (X, d) K-metrikus tér és $A \subseteq X$ tetszőleges halmaz, akkor az $(A, d|_{A\times A})$ is nyilván K metrikus tér. Az is világos, hogy a megszorított metrika szerinti topológia az A-n megegyezik az eredeti tér altér topológiájával. Ez alapján K-metrikus terek részhalmazai esetén is beszélhetünk teljességről.

10.19. Állítás: *Ha K rendezett test, (X, d) teljes K-metrikus tér és $F \subseteq X$ zárt, akkor F is teljes.*

Bizonyítás: Legyen $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ F-ben futó Cauchy sorozat. Mivel a Cauchy sorozat definíciójában nem szerepel alaphalmaz, ezért x_α mint X-beli sorozat Cauchy. Mivel X teljes, ezért $\exists x \in X$, hogy $x_\alpha \to x$, de a sorozat elemei F-ben vannak és F zárt, így a 10.15. állítás miatt $x \in F$, tehát az x_α sorozat az altéren is konvergens, vagyis F teljes.

10.20. Állítás: *Ha K rendezett test, az (X, d) K-metrikus tér és $F \subseteq X$ teljes, akkor F zárt.*

Bizonyítás: A 10.16-os állítás feltételét fogjuk belátni F-re. Tegyük fel, hogy $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ F-ben futó sorozat, amelyre $x_\alpha \to x$ valamely $x \in X$-re. Ekkor persze az x_α sorozat konvergens így Cauchy és F pedig teljes, ezért $\exists y \in F$ hogy $x_\alpha \to y$. Ez a konvergencia viszont X-ben is érvényes, és egy K metrikus térben egy sorozatnak csak 1 határértéke lehet, így $x = y \in F$. Mivel az $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ tetszőleges F-ben futó sorozat volt, ami X-ben konvergens, a 10.16. állítás alapján $F \subseteq X$ zárt.

10.21. Definíció: *Legyen K rendezett test és $(X, d_X), (Y, d_Y)$ K-metrikus terek és $f: X \to Y$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény folytonos, ha $\forall x \in X, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, hogy $\forall x' \in X$-re melyre $d_X(x, x') < \delta$ arra $d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon$.*

10.22. Állítás: *Az előbb definiált folytonosság megegyezik a topológiai értelemben vett folytonossággal, azaz, hogy minden $U \subseteq Y$ nyíltra $f^{-1}(U) \subseteq X$ nyílt.*

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy f folytonos a 10.21.-es definíció szerint és legyen $U \subseteq Y$ nyílt. Azt kell belátni, hogy $f^{-1}(U)$ is nyílt. Vegyünk egy $x \in f^{-1}(U)$-t. Ekkor $f(x) \in U$ és U nyílt, ezért $\exists r > 0$, hogy $B_r\big(f(x)\big) \subseteq U$. A folytonosság miatt $\exists \delta > 0$, hogy $\forall x' \in X$-re melyre $d_X(x, x') < \delta$, $d_Y\big(f(x), f(x')\big) < r$. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $x' \in B_\delta(x)$-re $f(x') \in B_r\big(f(x)\big) \subseteq U$, vagyis $x' \in f^{-1}(U)$. Ez azt jelenti, hogy $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$, azaz $f^{-1}(U)$ nyílt, vagyis f topológiai értelemben folytonos.

A másik irányba legyen f topológiai értelemben folytonos, és vegyünk egy $x \in X$-et és $\varepsilon > 0$-t. Mivel a $B_\varepsilon\big(f(x)\big) \subseteq Y$ nyílt és f topológiai értelemben folytonos, ezért $f^{-1}\Big(B_\varepsilon\big(f(x)\big)\Big) \subseteq X$ is nyílt és nyilván $x \in f^{-1}\big(f(x)\big) \subseteq f^{-1}\Big(B_\varepsilon\big(f(x)\big)\Big)$, így $\exists \delta > 0$, hogy $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}\Big(B_\varepsilon\big(f(x)\big)\Big)$. Ez a δ jó lesz a 10.21-es definícióhoz x-ben ε-hoz. Legyen ugyanis $x' \in X$, melyre $d_X(x, x') < \delta$. Ekkor $x' \in B_\delta(x) \subseteq f^{-1}\Big(B_\varepsilon\big(f(x)\big)\Big)$, így $f(x') \in B_\varepsilon\big(f(x)\big)$, vagyis $d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon$.

A következőkben a kompaktság fogalmát fogjuk általánosítani.

10.23. Definíció: *Az (X, τ) topologikus tér κ-kompakt egy κ számosságra, ha minden $\mathcal{U}$ nyílt fedéshez (azaz $\mathcal{U}$ olyan halmaz, amelnek minden eleme az X nyílt részhalmaza és $\cup\,\mathcal{U} = X$) létezik $\lambda < \kappa$ és $\alpha < \lambda$-ra $U_\alpha \in \mathcal{U}$, hogy $\bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha = X$.*

Könnyen látható, hogy κ minél kisebb számosság, a κ-kompaktság annál erősebb. Az ω-kompaktság a hagyományos értelemben vett kompaktságot jelenti, az ω_1-kompaktság pedig a Lindelöf-féle fedési tulajdonságot. Itt is vizsgálható egy $K \subseteq X$ halmaz κ-kompaktsága, ami azt jelenti, hogy az altér topológiában κ-kompakt. Ez az eredeti topológiában úgy fogalmazható meg, hogy ha $\mathcal{U}$ olyan halmaz, amelynek elemei nyíltak és $\cup\,\mathcal{U} \supseteq K$, akkor $\exists \lambda < \kappa$ és $\alpha < \lambda$-ra $U_\alpha \in \mathcal{U}$, hogy $\bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha \supseteq K$.

10.24. Állítás: *Ha (X, τ) topologikus tér κ-kompakt és $F \subseteq X$ zárt, akkor F is κ-kompakt.*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{U}$ tetszőleges olyan halmaz, amelynek elemei nyíltak és $\cup\,\mathcal{U} \supseteq F$. Ekkor Az $X \setminus F$ nyílt, így az $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ halmaz elemei is nyíltak, és $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ miatt $F \subseteq \cup\,\mathcal{U} \subseteq \cup\,\mathcal{U}'$ és $X \setminus F \in \mathcal{U}'$ miatt $X \setminus F \subseteq \cup\,\mathcal{U}'$, tehát $X = F \cup (X \setminus F) \subseteq \cup\,\mathcal{U}'$, vagyis $\cup\,\mathcal{U}' = X$. Mivel az X κ-kompakt, ezért $\exists \lambda < \kappa$ és minden $\alpha < \lambda$-hoz $U_\alpha \in \mathcal{U}'$, melyekre $\bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha = X$. Legyen minden $\alpha < \lambda$-ra $U'_\alpha = U_\alpha$ ha $U_\alpha \in \mathcal{U}$ és $U'_\alpha \in \mathcal{U}$ tetszőleges, ha $U_\alpha = X \setminus F$. Kell, hogy ez jó lesz, tehát $F \subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha{}'$. Ha $x \in F$ tetszőleges, akkor persze $x \in X = \bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha$, így $\exists \alpha < \lambda$, hogy $x \in U_\alpha$. Ekkor persze $U_\alpha = X \setminus F$ nem lehet, hiszen $x \in F$, így $x \notin X \setminus F$, így $U_\alpha \in \mathcal{U}$, vagyis $x \in U_\alpha = U'_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha{}'$. Mivel $x \in F$ tetszőleges volt, így $F \subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha{}'$, tehát F is κ-kompakt.

10.25. Állítás: *Ha (X, τ) topologikus tér T2 és $< \kappa$ metsző, akkor minden $K \subseteq X$ κ-kompakt halmaz zárt.*

Bizonyítás: Azt kell belátni, hogy $X \setminus K$ nyílt. Topologikus terekben ez ekvivalens azzal, hogy minden pontjának tartalmazza egy nyílt környezetét, azaz $\forall x \in X \setminus K$-hoz $\exists V \subseteq X$ nyílt, hogy $V \subseteq X \setminus K$ és $x \in V$. Legyen $x \in X \setminus K$ tetszőleges. Mivel X T2, ezért minden $y \in K$-ra vehetünk U_y, V_y nyílt halmazokat, melyekre $y \in U_y, x \in V_y$ és $U_y \cap V_y = \emptyset$. Legyen $\mathcal{U} = \{U_y : y \in K\}$. Ekkor $\mathcal{U}$ elemei nyíltak, és minden $y \in K$-ra $y \in U_y \subseteq \cup\, \mathcal{U}$, tehát $K \subseteq \cup\, \mathcal{U}$. Mivel K κ-kompakt, ezért $\exists \lambda < \kappa$ és $\alpha < \lambda$-ra $U_\alpha \in \mathcal{U}$, hogy $\bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha \supseteq K$. Legyen $\alpha < \lambda$-ra y_α olyan, hogy $U_\alpha = U_{y_\alpha}$. Legyen $V = \bigcap_{\alpha<\lambda} V_{y_\alpha}$. Mivel a topologikus tér $< \kappa$ metsző, és a V_{y_α} halmazok nyíltak, ezért V is nyílt. Nyilván $x \in V$ is teljesül, hiszen $x \in V_{y_\alpha}$ minden $\alpha < \lambda$. Azt kell még belátni, hogy $V \subseteq X \setminus K$. Indirekt tegyük fel, hogy $V \cap K \neq \emptyset$ és $y \in V \cap K$. Ekkor $y \in K \subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha$ miatt $\exists \alpha < \lambda$, hogy $y \in U_\alpha = U_{y_\alpha}$, másrészt $y \in V \subseteq V_{y_\alpha}$, azaz $y \in U_{y_\alpha} \cap V_{y_\alpha} = \emptyset$, ami nem lehet, azaz valóban $V \subseteq X \setminus K$. Ekkor $X \setminus K$ nyílt, tehát K zárt.

A 10.8. állításból tudjuk, hogy ha K rendezett test, (X, d) K-metrikus tér, akkor $< \mathrm{cf}(K)$ metsző, a 10.11. állítás miatt pedig T2, így $\kappa \leq \mathrm{cf}(K)$-ra a κ kompakt részhalmazai zártak. Később látni fogjuk, hogy a $\kappa \leq \mathrm{cf}(K)$ feltétel itt nagyon fontos, ugyanis nagyobb számosságokra teljesen másképp fognak viselkedni a κ-kompakt halmazok.

10.26. Állítás: *Ha $(X, \tau), (Y, \tau')$ topologikus terek, $f: X \to Y$ folytonos és $K \subseteq X$ κ-kompakt valamilyen κ számosságra, akkor $f(K) \subseteq Y$ is κ-kompakt.*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{U} \subseteq P(Y)$ nyílt halmazok rendszere, melyre $\cup\, \mathcal{U} \supseteq f(K)$. Legyen $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$. Mivel f folytonos és a $\mathcal{V}$ minden eleme nyílt ősképe, ezért nyílt. Ekkor tetszőleges $x \in K$-ra $f(x) \in f(K) \subseteq \cup\, \mathcal{U}$, tehát $\exists U \in \mathcal{U}$, hogy $f(x) \in U$, tehát $x \in f^{-1}(U) \subseteq \cup\, \mathcal{V}$, így $K \subseteq \cup\, \mathcal{V}$. Mivel K κ-kompakt, ezért $\exists \lambda < \kappa$ és $\forall \alpha < \lambda$-ra $V_\alpha \in \mathcal{V}$, hogy $\bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \supseteq K$. Legyen $\alpha < \lambda$-ra $U_\alpha \in \mathcal{U}$ olyan, hogy $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$. Azt fogjuk belátni, hogy $\bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha \supseteq f(K)$. Legyen $y \in f(K)$ tetszőleges. Ekkor $\exists x \in K$, hogy $f(x) = y$. Mivel $x \in K \subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$, így $\exists \alpha < \kappa$, hogy $x \in V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$, így $y = f(x) \in U_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha$. Mivel $y \in f(K)$ tetszőleges volt, ezért az $\bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha \supseteq f(K)$ valóban teljesül, így $f(K)$ is κ-kompakt.

A továbbiakban a rendezett testek feletti metrikus terek κ^+-kompaktságát fogjuk vizsgálni, ahol $\kappa \geq \mathrm{cf}(K)$. Az ezzel kapcsolatos állításokat minden esetben a lehető legáltalánosabb módon bizonyítjuk és a végén összefoglaljuk egy tételben.

10.27. Definíció: *Ha (X, τ) topologikus tér, akkor az $S \subseteq X$, sűrű, ha $\forall U \subseteq X$, $U \neq \emptyset$ nyíltra $S \cap U \neq \emptyset$. Az X tér κ-szeparábilis, ha $\exists S \subseteq X$ sűrű, amelyre $|S| \leq \kappa$*

10.28. Állítás: *Ha K rendezett test, (X, d) K-metrikus tér κ-szeparábilis, ahol $\kappa \geq \mathrm{cf}(K)$, akkor minden $A \subseteq X$ is κ-szeparábilis.*

Bizonyítás: Legyen $S \subseteq X$ sűrű és $H = \{(x, \alpha): x \in S, \alpha < \mathrm{cf}(K), B_{\varepsilon_\alpha}(x) \cap A \neq \emptyset\}$. Nyilván $H \subseteq S \times \mathrm{cf}(K)$, így $|H| \leq |S \times \mathrm{cf}(K)| = |S|\mathrm{cf}(K) \leq \kappa\mathrm{cf}(K) \leq \kappa^2 = \kappa$. Minden $(x, \alpha) \in H$ párra legyen $t(x, \alpha) \in B_{\varepsilon_\alpha}(x) \cap A$ tetszőleges és $T = \{t(x, \alpha), (x, \alpha) \in H\}$. Ekkor nyilván $T \subseteq A$, hiszen minden elemét onnan választottuk és $|T| \leq |H| \leq \kappa$. Azt kell még belátni, hogy $T \subseteq A$ sűrű. Legyen $V \subseteq A$ az altér topológiában nyílt halmaz, ekkor $V = U \cap A$ valamely $U \subseteq X$ nyíltra. Ha $V \neq \emptyset$, akkor legyen $y \in V \subseteq U$. Mivel U nyílt az X-ben, ezért $\exists r < 0$, hogy $B_r(y) \subseteq U$. Legyen $\alpha < \mathrm{cf}(K)$ olyan, hogy $\varepsilon_\alpha < \frac{r}{2}$. Mivel $B_{\varepsilon_\alpha}(y) \subseteq X$ nem üres nyílt és $S \subseteq X$ sűrű, ezért $B_{\varepsilon_\alpha}(y) \cap S \neq \emptyset$, legyen $x \in B_{\varepsilon_\alpha}(y) \cap S$. Ekkor egyrészt $x \in S$, másrészt $d(x, y) < \varepsilon_\alpha$, így $y \in B_{\varepsilon_\alpha}(x) \cap A$, azaz $B_{\varepsilon_\alpha}(x) \cap A \neq \emptyset$, tehát $(x, \alpha) \in H$. Vegyük a $t(x, \alpha) \in T$-t. Erre $d(t(x, \alpha), y) \leq d(t(x, \alpha), x) + d(x, y) < \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\alpha < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, így $t(x, \alpha) \in B_r(y) \subseteq U$. Másrészt nyilván $t(x, \alpha) \in A$, így $t(x, \alpha) \in U \cap A = V$, tehát $V \cap T \neq \emptyset$. Mivel $V \subseteq A$ tetszőleges nem üres nyílt volt, ezért $T \subseteq A$ valóban sűrű.

10.29. Állítás: *Ha K rendezett test, (X, d) K-metrikus tér κ-szeparábilis, ahol $\kappa \geq \mathrm{cf}(K)$, akkor létezik $\mathcal{B} \subseteq \tau$ topologikus bázis, amelyre $|\mathcal{B}| \leq \kappa$.*

Bizonyítás: Legyen $S \subseteq X$ sűrű, $|S| \leq \kappa$ és $\mathcal{B} = \{B_{\varepsilon_\alpha}(x): x \in S, \alpha < \mathrm{cf}(K)\}$. Ekkor $|\mathcal{B}| \leq |S \times \mathrm{cf}(K)| = |S|\mathrm{cf}(K) \leq \kappa\mathrm{cf}(K) \leq \kappa^2 = \kappa$. Kell, hogy ez bázis. Ehhez először azt látjuk be, hogy ha $U \subseteq X$ nyílt és $y \in U$, akkor $\exists V \in \mathcal{B}$, amelyre $y \in V \subseteq U$. Mivel U nyílt, ezért $\exists r > 0$, hogy $B_r(y) \subseteq U$. Legyen $\alpha < \mathrm{cf}(K)$ olyan, hogy $\varepsilon_\alpha < \frac{r}{2}$. Mivel $B_{\varepsilon_\alpha}(y) \subseteq X$ nem üres nyílt és $S \subseteq X$ sűrű, ezért $B_{\varepsilon_\alpha}(y) \cap S \neq \emptyset$, legyen $x \in B_{\varepsilon_\alpha}(y) \cap S$. Legyen V=$B_{\varepsilon_\alpha}(x) \in \mathcal{B}$. Ekkor egyrészt $x \in B_{\varepsilon_\alpha}(y)$, így $d(x, y) \leq \varepsilon_\alpha$, tehát $y \in B_{\varepsilon_\alpha}(x) = V$, másrészt $\forall z \in V$-re $d(x, z) \leq \varepsilon_\alpha$, így $d(y, z) \leq d(x, y) + d(x, z) \leq \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\alpha < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, azaz $z \in B_r(y) \subseteq U$, vagyis $V \subseteq U$.

Legyen most $U \subseteq X$ tetszőleges nyílt. Ekkor $U = \cup \{V \in \mathcal{B}, V \subseteq U\}$. A jobboldali halmaz minden V elemére $V \subseteq U$, így ezek uniója is, vagyis a $U \supseteq \cup \{V \in \mathcal{B}, V \subseteq U\}$ tartalmazás triviális. A másik irányba legyen $y \in U$ tetszőleges, ekkor $\exists V \in \mathcal{B}$, amelyre $y \in V \subseteq U$. Ez a V benne van a jobboldali halmazban, így y benne van az unióhalmazában. Ez minden $y \in U$-ra igaz, így $U \subseteq \cup \{V \in \mathcal{B}, V \subseteq U\}$, a kétirányú tartalmazás miatt a két halmaz egyenlő. Mivel tetszőleges U nyíltat fel tudtunk írni $\mathcal{B}$-beliek uniójaként, ezért $\mathcal{B}$ valóban bázis.

10.30. Állítás: *Ha (X, τ) topologikus tér, κ számosság és létezik $\mathcal{B} \subseteq \tau$ bázis, melyre $|\mathcal{B}| \leq \kappa$, akkor X κ^+ kompakt.*

Bizonyítás: Legyen $(V_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ a $\mathcal{B}$ elemeinek felsorolása (ha $|\mathcal{B}| < \kappa$, akkor szerepelhet egy halmaz többször is, de mindet felsoroljuk legalább egyszer). Vegyünk egy tetszőleges

$\mathcal{U} \subseteq P(X)$ halmazt, melynek elemei nyíltak és $\cup\,\mathcal{U} = X$. Ekkor $\kappa < \kappa^+$ nyilván teljesül. Egy $\alpha < \kappa$-ra legyen $U_\alpha \in \mathcal{U}$ olyan, amelyre $V_\alpha \subseteq U_\alpha$, ha van ilyen, ha nincs akkor legyen $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tetszőleges. Kell, hogy $\bigcup_{\alpha<\kappa} U_\alpha = X$. Legyen $x \in X = \cup\,\mathcal{U}$ tetszőleges, ekkor $\exists U \in \mathcal{U}$, amelyre $x \in U$. Mivel U nyílt, felírható bázisnyíltak uniójaként, és ebben a felírásban lesz egy $V \in \mathcal{B}$, melyre $x \in V$ és $V \subseteq U$ is nyilván teljesül. Ekkor van egy $\alpha < \kappa$, melyre $V = V_\alpha$, tehát $V_\alpha = V \subseteq U$, ahol $U \in \mathcal{U}$. Ez azt jelenti, hogy U_α-t is úgy választottuk, hogy $V_\alpha \subseteq U_\alpha$ teljesüljön, azaz $x \in V = V_\alpha \subseteq U_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} U_\alpha$. Mivel $x \in X$ tetszőleges volt, ezért $X \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} U_\alpha$, így nyilván $\bigcup_{\alpha<\kappa} U_\alpha = X$, tehát X κ^+-kompakt.

A 10.29. és 10.30. állításokat egyesítve azt kapjuk, hogy ha K rendezett test, (X, d) K-metrikus tér κ-szeparábilis valamely $\kappa \geq \mathrm{cf}(K)$ számosságra, akkor κ^+-kompakt. Vegyük észre, hogy ez a Lindelöf-tétel messzemenő általánosítása. A 10.28. állítás miatt minden $A \subseteq K$ részhalmaz is κ-szeparábilis, így azok is κ^+ kompaktak, vagyis a 10.25. állításnál tényleg szükséges volt a κ-ra vonatkozó feltétel. A következőkben megnézzük a megfordítást is.

10.31. Definíció: *Ha K rendezett test, (X, d) K-metrikus tér és $\varepsilon \in K, \varepsilon > 0$, akkor az $L \subseteq X$ ε-háló, ha $\forall x \in X, \exists y \in L$, hogy $d(x, y) < \varepsilon$.*

10.32. Állítás: *K rendezett test κ tetszőleges számosság, és (X, d) K-metrikus tér κ-kompakt, akkor $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists L \subseteq K$ ε-háló, amelyre $|L| < \kappa$.*

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $\mathcal{U} = \{B_\varepsilon(x) : x \in X\}$. Ekkor $\mathcal{U}$ elemei nyíltak és $\forall x \in X$-re $x \in B_\varepsilon(x) \subseteq \cup\,\mathcal{U}$, így $\cup\,\mathcal{U}$. Ekkor a κ-konpaktság miatt $\exists \lambda < \kappa$ és $\alpha < \lambda$-ra $U_\alpha \in \mathcal{U}$, hogy $\bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha = X$. Mivel minden $\alpha < \lambda$-ra $U_\alpha \in \mathcal{U}$, így az $\mathcal{U}$ definíciója alapján $\exists y_\alpha \in X$, hogy $U_\alpha = B_\varepsilon(y_\alpha)$. Legyen $L = \{y_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Ekkor nyilván $|L| \leq \lambda < \kappa$. Azt látjuk be, hogy L ε-háló. Legyen $x \in X = \bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha$ tetszőleges, ekkor $\exists \alpha < \lambda$, hogy $x \in U_\alpha = B_\varepsilon(y_\alpha)$, tehát $d(x, y_\alpha) < \varepsilon$ és $y_\alpha \in L$, így L valóban ε-háló.

Ha ezt az állítást κ helyett κ^+-ra írjuk fel, akkor azt kapjuk, hogy ha (X, d) κ^+ kompakt és $\varepsilon > 0$, akkor $\exists L \subseteq X$ ε-háló, melyre $|L| < \kappa^+$, azaz $|L| \leq \kappa$.

10.33. Állítás: *Ha K rendezett test, (X, d) K-metrikus tér és $\kappa \geq \mathrm{cf}(K)$ olyan számosság, hogy $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists L \subseteq X$ ε-háló amelyre $|L| \leq \kappa$, akkor X κ-szeparábilis.*

Bizonyítás: Legyen $\alpha < \mathrm{cf}(K)$-ra $L_\alpha \subseteq X$ ε_α-háló, amelyre $|L_\alpha| \leq \kappa$ és legyen $S = \bigcup_{\alpha<\kappa} L_\alpha$. Ekkor nyilván $|S| \leq \sum_{\alpha<\mathrm{cf}(K)} |L_\alpha| \leq \sum_{\alpha<\mathrm{cf}(K)} \kappa = cf(K)\kappa \leq \kappa^2 = \kappa$. Azt kell még belátni, hogy $S \subseteq X$ sűrű. Legyen $U \subseteq X, U \neq \emptyset$ tetszőleges nyílt. Vegyünk egy $x \in U$-t. Mivel U nyílt, $\exists r > 0$, hogy $B_r(X) \subseteq U$. Legyen $\alpha < \mathrm{cf}(K)$ olyan, hogy $\varepsilon_\alpha < r$. Mivel L_α ε_α-háló, ezért $\exists y \in L_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} L_\alpha = S$, hogy $d(x, y) < \varepsilon_\alpha < r$, így $y \in B_r(x) \subseteq U$. Ekkor $y \in U \cap S$, tehát $U \cap S \neq \emptyset$, vagyis $S \subseteq X$ tényleg sűrű.

Az előző 2 állítással a korábbi következtetésünk megfordítható, vagyis ha K rendezett test, (X,d) K-metrikus tér κ^+-kompakt valamely $\kappa \geq \mathrm{cf}(K)$ számosságra, akkor κ-szeparábilis. Az ilyen tereknek van egy további érdekes tulajdonsága is.

10.34. Definíció: *Ha (X,τ) topologikus tér, az $\mathcal{A} \subseteq P(X)$-et antiláncnak nevezzük, ha $\emptyset \notin \mathcal{A}$, $\forall U \in \mathcal{A}$ nyílt és $\forall U,V \in \mathcal{A}$, $U \neq V$-re $U \cap V = \emptyset$. Az X teljesíti a κ- antilánc feltételt egy κ számmosságra, ha minden $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ antiláncra $|\mathcal{A}| \leq \kappa$.*

10.35. Állítás: *Ha (X,τ) topologikus tér, κ olyan számosság, hogy $\forall A \subseteq X$ κ^+-kompakt, akkor X teljesíti a κ antilánc feltételt.*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ antilánc és $A = \cup\mathcal{A}$. Ekkor az $\mathcal{A}$ egy nyílt halmazokból álló rendszer, amelynek az uniója fedi A-t, így az A κ^+-kompaktsága miatt $\exists\lambda < \kappa^+$ és $\alpha < \lambda$-ra $U_\alpha \in A$, hogy $\bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha \supseteq A$. Ekkor nyilván $\lambda \leq \kappa$. Azt fogjuk belátni, hogy minden $U \in \mathcal{A}$ szerepel az U_α-k között. Legyen $U \in \mathcal{A}$ tetszőleges, mivel $\mathcal{A}$ antilánc, $\emptyset \notin \mathcal{A}$, így $U \neq \emptyset$. Vegyünk egy tetszőleges $x \in U$-t. Ekkor $x \in U \subseteq\cup \mathcal{A} = A$, így $\exists\alpha < \lambda$, hogy $x \in U_\alpha$. Ekkor $U_\alpha = U$, ugyanis ha nem így lenne, akkor $U, U_\alpha \in \mathcal{A}$ miatt $U \cap U_\alpha = \emptyset$ lenne, de ez nem lehet mert $x \in U \cap U_\alpha$. Ez azt jelenti, hogy minden $U \in \mathcal{A}$-hoz van egy $\alpha < \lambda$, hogy $U_\alpha = U$. Legyen $f\colon \mathcal{A} \to \lambda$ olyan függvény, hogy $\forall U \in \mathcal{A}$-ra $U_{f(U)} = U$. Ekkor ha $U,V \in \mathcal{A}$-ra $f(U) = f(V)$, akkor $U = U_{f(U)} = U_{f(V)} = V$, tehát az $f\colon \mathcal{A} \to \lambda$ injektív, így $|\mathcal{A}| \leq \lambda \leq \kappa$. Mivel $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ tetszőleges antilánc volt, ezért X teljesíti a κ-antilánc feltételt.

10.36. Állítás: *Ha K rendezett test, κ számosság és az (X,d) K-metrikus tér teljesíti a κ-antilánc feltételt, akkor $\forall\varepsilon > 0$-ra $\exists L \subseteq K$ ε-háló, amelyre $|L| \leq \kappa$.*

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Nevezzünk egy $D \subseteq X$ részhalmazt ε-diszkrétnek, ha $\forall x,y \in D$, $x \neq y$-ra $d(x,y) \geq \varepsilon$. Legyen $\mathcal{D} = \{D \subseteq X, D\ \varepsilon\text{-diszkrét}\}$. Nyilván $\emptyset \in \mathcal{D}$, így $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Legyen $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}$ a tartalmazásra nézve lánc. Ekkor $\cup\mathcal{L} \in \mathcal{D}$. Azt kell belátni, hogy $\cup\mathcal{L}$ is ε-diszkrét. Legyen $x,y \in\cup \mathcal{L}$, $x \neq y$. Ekkor $\exists D_1, D_2 \in \mathcal{L}$, hogy $x \in D_1, y \in D_2$. Mivel $\mathcal{L}$ a tartalmazásra nézve lánc, ezért $D_1 \subseteq D_2$ vagy $D_2 \subseteq D_1$ telsejül. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $D_1 \subseteq D_2$, így $x,y \in D_2$. Mivel D_2 ε-diszkrét, ezért $d(x,y) \geq \varepsilon$, vagyis $\cup\mathcal{L}$ is ε-diszkrét.

A Zorn-lemma miatt $\exists L \in \mathcal{D}$ tartalmazásra nézve maximális elem. Ekkor L ε-háló. Indirekt tegyük fel, hogy nem az, ekkor $\exists z \in X$, hogy $\forall x \in L$-re $d(z,x) \geq \varepsilon$. Ekkor nyilván $z \notin L$, mert különben a $d(z,z) = 0 < \varepsilon$ miatt megsértené a feltételt, így $L \cup \{z\} \supset L$. Másrészt $L \cup \{z\}$ is ε-diszkrét. Legyen ugyanis $x,y \in L \cup \{z\}$, $x \neq y$. Ha x,y egyike sem z, akkor $x,y \in L$, így $d(x,y) \geq \varepsilon$. Ha valamelyikük z, a másik L-ben van, akkor az indirekt feltevésünk miatt teljesül. Ez azt jelenti, hogy $L \cup \{z\} \in \mathcal{D}$, ami ellent mond L maximalitásának, így L valóban ε-háló.

Kell még, hogy $|L| \leq \kappa$. Legyen $\mathcal{A} = \left\{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x): x \in L\right\}$. Ekkor nyilván $|\mathcal{A}| = |L|$. Azt fogjuk belátni, hogy $\mathcal{A}$ antilánc. Nyilván $\mathcal{A}$ elemei nem üresek és nyíltak. Legyen $U, V \in \mathcal{A}$, $U \neq V$. Ekkor $\exists x, y \in L$, hogy $U = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x), V = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$ és $U \neq V$ miatt nyilván $x \neq y$. Mivel L ε-diszkrét, ezért $d(x,y) \geq \varepsilon$. Ekkor $U \cap V = \emptyset$. Indirekt tegyük fel, hogy $z \in U \cap V = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$, azaz $d(x,z), d(y,z) < \frac{\varepsilon}{2}$. De ez azt jelenti, hogy $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ami nem lehet, mert $d(x,y) \geq \varepsilon$. Így $U \cap V = \emptyset$, azaz $\mathcal{A}$ valóban antilánc. Ekkor a κ-antilánc feltétel miatt $|L| = |\mathcal{A}| \leq \kappa$ és ezt akartuk belátni.

Az összes eddigi állítást összegezve a következőt kapjuk.

10.37. Tétel: *Ha K rendezett test, (X, d) K-metrikus tér és $\kappa \geq \mathrm{cf}(K)$ számosság, akkor a következők ekvivalensek:*

1. X κ-szeparábilis

2. $\forall A \subseteq X$ κ-szeparábilis

3. $\exists \mathcal{B}$ bázisa X-nek, amelyre $|\mathcal{B}| \leq \kappa$

4. X κ^+-kompakt

5. $\forall A \subseteq X$ κ^+-kompakt

6. X teljesíti a κ antilánc feltételt

7. $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists L \subseteq X$ ε-háló, amelyre $|L| \leq \kappa$

Bizonyítás: A 10.27-10.36 állításokból

Vegyük észre, hogy ha K rendezett test, akkor $\Sigma(K)$ szeparábilis és a K-ra mint önmaga feletti K-metrikus térre ezt a tételt használva az antilánc feltételre a 6.18. tétel is következik.

A következőkben a $\mathrm{cf}(K)$ kompaktságot fogjuk vizsgálni. Ez lényegesen másképp viselkedik, mint a $\mathrm{cf}(K)^+$-ra és nagyobb számosságokra való kompaktság. Míg a 10.37. tétel alapján a $\mathrm{cf}(K)^+$ kompaktság a K-metrikus terek minden részhalmazára átterjed, addig, ha (X, d) K-metrikus tér $\mathrm{cf}(K)$-kompakt, akkor a 10.25. állítás miatt ennek csak a zárt részhalmazai lehetnek $\mathrm{cf}(K)$-kompaktak, de a 10.24. állítás miatt ezek valóban olyanok. A szokásos metrikus tereknek a kompaktságnak a zártságon kívül van még egy szükséges feltétele, ami itt is igaz.

10.38. Állítás: *Ha K rendezett test, (X, d) K-metrikus tér $\mathrm{cf}(K)$-kompakt, akkor korlátos, azaz $\exists M \in K$ korlát, hogy $\forall x, y \in X$-re $d(x, y) \leq M$*

Bizonyítás: Legyen $z \in X$ egy tetszőleges pont és $\mathcal{U} = \{B_{t_\alpha}(z): \alpha < \mathrm{cf}(K)\}$, az $\mathcal{U}$ elemei nyíltak. Ha $x \in X$, akkor $\exists \alpha < \mathrm{cf}(K)$, hogy $t_\alpha > d(x,z)$, hiszen a $(t_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ kofinális K-ban. Ez azt jelenti, hogy $x \in B_{t_\alpha}(z) \subseteq \cup\, \mathcal{U}$, így $\cup\, \mathcal{U} = X$. Mivel X $\mathrm{cf}(K)$-kompakt, ezért $\exists \lambda < \mathrm{cf}(K)$ és $\xi < \lambda$-ra $U_\xi \in \mathcal{U}$, hogy $\bigcup_{\xi<\lambda} U_\xi = X$. Ekkor minden $\xi < \lambda$-hoz $U_\xi \in \mathcal{U}$ választhatunk egy $\alpha_\xi < \mathrm{cf}(K)$-t, hogy $U_\xi = B_{t_{\alpha_\xi}}(z)$. Legyen $\beta = \sup\{\alpha_\xi: \xi < \lambda\}$. Mivel $|\{\alpha_\xi: \xi < \lambda\}| \le \lambda < \mathrm{cf}(K)$ és $\mathrm{cf}(K)$ reguláris, ezért ez a halmaz nem lehet kofinális $\mathrm{cf}(K)$-ban, vagyis $\beta < \mathrm{cf}(K)$. Ha $\xi < \lambda$ tetszőleges, akkor $\alpha_\xi \le \beta$ miatt $t_{\alpha_\xi} \le t_\beta$, így $U_\xi = B_{t_{\alpha_\xi}}(z) \subseteq B_{t_\beta}(z)$. Ekkor ezek uniójára is $X = \bigcup_{\xi<\lambda} U_\xi \subseteq B_{t_\beta}(z)$, azaz $\forall x \in X$-re $d(x,z) < t_\beta$.

Legyen $M = 2t_\beta$. Ha $x, y \in X$ tetszőleges, akkor a háromszög egyenlőtlenség miatt $d(x,y) \le d(d,z) + d(y,z) < t_\beta + t_\beta = M$, tehát X korlátos.

A teljesen korlátossághoz is bizonyítható hasonló, méghozzá a 10.32. állítást $\kappa = \mathrm{cf}(K)$-ra alkalmazva azt kapjuk, hogy $\forall \varepsilon > 0$-ra van $L \subseteq X$ ε-háló, amelyre $|L| < \mathrm{cf}(K)$.

Ismert, hogy metrikus terek pontosan akkor kompaktak, ha minden bennük futó sorozatnak van konvergens részsorozata. Ennek megfelelő tételt is tudunk ebben az általános esetben bizonyítani.

10.39. Állítás: *Ha K rendezett test, (X,d) K-metrikus tér, $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ X-ben futó $\mathrm{cf}(K)$ sorozat és $x \in X$, akkor $\exists \left(x_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ kofinális részsorozata, hogy $x_{\alpha_\xi} \to x$, vagy $\exists r > 0, \beta < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall \alpha \ge \beta$-ra $d(x_\alpha, x) \ge r$.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a 2. lehetőség nem teljesül, azaz $\forall r > 0, \beta < \mathrm{cf}(K)$-hoz $\exists \alpha < \mathrm{cf}(K), \alpha \ge \beta$, hogy $d(x_\alpha, x) < r$, és ebből belátjuk, hogy létezik ilyen részsorozat. Transzfinit rekurzióval konstruáljuk meg ezt a részsorozatot. Legyen $\zeta < \mathrm{cf}(K)$ és tegyük fel, hogy minden $\xi < \zeta$-ra α_ξ-t már kiválasztottuk. Legyen $\beta = \sup\{\alpha_\xi: \xi < \zeta\} + 1$. Mivel $|\{\alpha_\xi: \xi < \zeta\}| \le |\zeta| < \mathrm{cf}(K)$ és $\mathrm{cf}(K)$ reguláris, ezért ez a halmaz nem lehet kofinális $\mathrm{cf}(K)$-ban, vagyis $\beta < \mathrm{cf}(K)$. A feltevésünket erre a β-ra és $r = \varepsilon_\zeta$-ra használva $\exists \alpha \ge \beta$, hogy $d(x_\alpha, x) < \varepsilon_\zeta$. Legyen α_ζ tetszőleges ilyen. Az így konstruált sorozatra, ha $\xi < \zeta$, akkor $\alpha_\xi < \alpha_\xi + 1 \le \beta \le \alpha_\zeta$ a konstrukció miatt, így $\left(x_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ valóban részsorozat és mivel $\mathrm{cf}(K)$-ig indexelt, ezért kofinális is. Kell még, hogy $x_{\alpha_\xi} \to x$. Vegyünk egy $\varepsilon > 0$-t és legyen $\eta < \mathrm{cf}(K)$ olyan, hogy $\varepsilon_\eta < \varepsilon$. Ekkor ha $\xi \ge \eta$ tetszőleges, akkor az α_ξ konstrukiója miatt $d\left(x_{\alpha_\xi}, x\right) < \varepsilon_\xi \le \varepsilon_\eta < \varepsilon$. Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért $x_{\alpha_\xi} \to x$ valóban teljesül.

10.40. Tétel: *Ha K rendezett test, (X,d) K-metrikus tér* $\mathrm{cf}(K)$*-kompakt,* $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ *X-ben futó* $\mathrm{cf}(K)$ *sorozat, akkor* $\exists \left(x_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ *kofinális részsorozata, amely konvergens.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy nincs ilyen részsorozat, azaz semmilyen $x \in X$-re nincs $\left(x_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ kofinális részsorozat, hogy $x_{\alpha_\xi} \to x$. Ez azt jelenti, hogy $\forall x \in X$-re a 10.39. állításban a 2. lehetőség teljesül, azaz $\exists r_x > 0, \beta_x < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall \alpha \geq \beta_x$-re $d(x_\alpha, x) \geq r_x$. Legyen $\mathcal{U} = \{B_{r_x}(x), x \in X\}$. Ennek elemei nyíltak és nyilván tetszőleges $x \in X$-re $x \in B_{r_x}(x) \subseteq \cup\, \mathcal{U}$, tehát $\cup\, \mathcal{U} = X$. Mivel X $\mathrm{cf}(K)$-kompakt, ezért $\exists \lambda < \mathrm{cf}(K)$ és $\alpha < \lambda$-ra $U_\alpha \in \mathcal{U}$, hogy $\bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha = X$. Legyen minden $\alpha < \lambda$-ra $y_\alpha \in X$ olyan, hogy $U_\alpha = B_{r_{y_\alpha}}(y_\alpha)$, ilyen mindig választható, hiszen $U_\alpha \in \mathcal{U}$, és legyen $\beta = \sup\{\beta_{y_\alpha} : \alpha < \lambda\}$. Mivel $\left|\{\beta_{y_\alpha} : \alpha < \lambda\}\right| \leq \lambda < \mathrm{cf}(K)$ és $\mathrm{cf}(K)$ reguláris, ezért ez a halmaz nem lehet kofinális $\mathrm{cf}(K)$-ban, vagyis $\beta < \mathrm{cf}(K)$, vagyis $x_\beta \in X$ létezik. Ha $\alpha < \lambda$ tetszőleges, akkor $\beta \geq \beta_{y_\alpha}$ miatt $d(x_\beta, y_\alpha) \geq r_{y_\alpha}$, így $x_\beta \notin B_{r_{y_\alpha}}(y_\alpha) = U_\alpha$. Ez minden $\alpha < \lambda$-ra igaz, így az uniójuknak sem eleme, $x_\beta \notin \bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha = X$, ami nyilván ellentmondás. Így mégis az első eset teljesül, azaz $\exists \left(x_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ konvergens kofinális részsorozata.

Ennek következményeként felírható a következő is.

10.41. Állítás: *Ha K rendezett test, (X,d) K-metrikus tér* $\mathrm{cf}(K)$*-kompakt, akkor teljes.*

Bizonyítás: Legyen $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ X-ben futó Cauchy-sorozat. A 10.40. tétel miatt $\exists \left(x_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ kofinális részsorozata, amely konvergens, azaz $x_{\alpha_\xi} \to x$ valamely $x \in X$-re. Azt kell belátnunk, hogy $x_\alpha \to x$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel az x_α sorozat Cauchy, ezért legyen $\beta < \mathrm{cf}(K)$ olyan, hogy $\forall \alpha, \gamma \geq \beta$-ra $d(x_\alpha, x_\gamma) < \frac{\varepsilon}{2}$. Mivel $x_{\alpha_\xi} \to x$, ezért $\exists \eta < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall \xi \geq \eta$-ra $d\left(x_{\alpha_\xi}, x\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $\xi < \mathrm{cf}(K)$ tetszőleges olyan, hogy $\xi \geq \eta$ és $\alpha_\xi \geq \beta$. Ha $\alpha \geq \beta$, akkor $\alpha, \alpha_\xi \geq \beta$ miatt $d\left(x_{\alpha_\xi}, x_\alpha\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\xi \geq \eta$ miatt $d\left(x_{\alpha_\xi}, x\right) < \frac{\varepsilon}{2}$, így $d(x_\alpha, x) \leq d\left(x_{\alpha_\xi}, x_\alpha\right) + d\left(x_{\alpha_\xi}, x\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Mivel $\alpha \geq \beta$ tetszőleges volt, ezért β jó lesz a konvergenciába ε-hoz, tehát $x_\alpha \to x$ valóban teljesül.

A következőkben látni fogjuk, hogy a 10.40. tétel megfordítása is igaz.

10.42. Tétel: *Ha K rendezett test, (X,d) K-metrikus tér olyan, hogy* $\forall (x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$*-nak* $\exists \left(x_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ *konvergens kofinális részsorozata, akkor X* $\mathrm{cf}(K)$*-kompakt.*

Bizonyítás: Először azt látjuk be, hogy $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists L \subseteq X$ ε-háló, amelyre $|L| < \mathrm{cf}(K)$. A 10.36. állítás bizonyításának első fele alapján $\exists L \subseteq X$ ε-diszkrét ε-háló. Ez jó lesz, ugyanis indirekten tegyük fel, hogy $|L| \geq \mathrm{cf}(K)$. Ekkor választható $\alpha < \mathrm{cf}(K)$-ra $x_\alpha \in L$, hogy $\alpha \neq \beta < \mathrm{cf}(K)$-ra $x_\alpha \neq x_\beta$. A tétel feltételei miatt ekkor $\exists \left(x_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ kofinális részsorozata, amely konvergens, azaz $x_{\alpha_\xi} \to x$ valamilyen $x \in X$-re. A konvergencia miatt $\exists \eta < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\forall \xi \geq \eta$-ra $d\left(x_{\alpha_\xi}, x\right) < \frac{\varepsilon}{2}$, jelesül $d\left(x_{\alpha_\eta}, x\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ és $d\left(x_{\alpha_{\eta+1}}, x\right) < \frac{\varepsilon}{2}$, így $d\left(x_{\alpha_\eta}, x_{\alpha_{\eta+1}}\right) \leq d\left(x_{\alpha_\eta}, x\right) + d\left(x_{\alpha_{\eta+1}}, x\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Másrészt L ε-diszkrét, $x_{\alpha_\eta}, x_{\alpha_{\eta+1}} \in L$ és $x_{\alpha_\eta} \neq x_{\alpha_{\eta+1}}$, így $d\left(x_{\alpha_\eta}, x_{\alpha_{\eta+1}}\right) \geq \varepsilon$. Ez ellentmondás, így $|L| < \mathrm{cf}(K)$ teljesül.

Mivel X-ben $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists L \subseteq X$ ε-háló, amelyre $|L| \leq \mathrm{cf}(K)$, sőt még $<$ is, ezért a 10.37. tételt $\kappa = \mathrm{cf}(K)$-ra alkalmazva azt kapjuk, hogy X $\mathrm{cf}(K)^+$-kompakt. Ez még gyengébb annál amit bizonyítani akarunk, de ennek segítségével mehetünk tovább. Legyen $\mathcal{U} \subseteq P(X)$ olyan, halmaz, amelynek elemei nyíltak és $\cup\,\mathcal{U} = X$. Ekkor a $\mathrm{cf}(K)^+$ kompaktság miatt $\exists \lambda < \mathrm{cf}(K)^+$ és $\alpha < \lambda$-ra $U_\alpha \in \mathcal{U}$, hogy $\bigcup_{\alpha<\lambda} U_\alpha = X$. Ha $\lambda < \mathrm{cf}(K)$, akkor ez a rendszer a $\mathrm{cf}(K)$ kompaktsághoz is jó, így a továbbiakban feltehető, hogy $\lambda = \mathrm{cf}(K)$. Ha valamilyen $\beta < \mathrm{cf}(K)$-ra $\bigcup_{\alpha<\beta} U_\alpha = X$, akkor legyen $|\beta| = \tau$ számosság, amelyre nyilván $\tau < \mathrm{cf}(K)$. Legyen $f\colon \tau \to \beta$ bijekció és $\alpha < \tau$-ra $V_\alpha = U_{f(\alpha)} \in \mathcal{U}$. Mivel f bijekció, ezért nyilván $\bigcup_{\alpha<\tau} V_\alpha = \bigcup_{\alpha<\tau} U_{f(\alpha)} = \bigcup_{\alpha<\beta} U_\alpha = X$, tehát a $\tau < \mathrm{cf}(K)$ és $\alpha < \tau$-ra V_α jó rendszer lesz a $\mathrm{cf}(K)$-kompaktsághoz X-re.

Tegyük most fel, hogy ez sem igaz, azaz $\forall \beta < \mathrm{cf}(K)$-ra $\bigcup_{\alpha<\beta} U_\alpha \neq X$, tehát $F_\beta = X \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} U_\alpha \neq \emptyset$. Az F_α halmazok nyilván zártak is, hiszen $\bigcup_{\alpha<\beta} U_\alpha$ nyílt, így F_β zárt. Ezen kívül, ha $\beta \leq \gamma$, akkor nyilván $\bigcup_{\alpha<\beta} U_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha<\gamma} U_\alpha$, így $F_\gamma = X \setminus \bigcup_{\alpha<\gamma} U_\alpha \subseteq X \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} U_\alpha = F_\beta$. Minden $\alpha < \mathrm{cf}(K)$-ra válasszunk egy $x_\alpha \in F_\alpha$-t. Alkalmazzuk a tétel feltételét az $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ részsorozatra. E szerint $\exists \left(x_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ kofinális konvergens részsorozata, legyen $x \in X$, melyre $x_{\alpha_\xi} \to x$. Ha $\alpha > \mathrm{cf}(K)$ tetszőleges, akkor mivel x_{α_ξ} kofinális részsorozat, $\exists \zeta < \mathrm{cf}(K)$, hogy $\alpha_\zeta \geq \alpha$. Ekkor minden $\xi \geq \zeta$-ra $\alpha_\xi \geq \alpha_\zeta \geq \alpha$, így $x_{\alpha_\xi} \in F_{\alpha_\xi} \subseteq F_\alpha$. Ez azt jelenti, hogy az $\left(x_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ sorozat elemei egy ponton túl F_α-ban vannak és F_α zárt, vagyis a 10.15. állítást alkalmazva $x \in F_\alpha$. Ez minden $\alpha < \mathrm{cf}(K)$-ra igaz. Másrészt mivel $x \in X \bigcup_{\alpha<\mathrm{cf}(K)} U_\alpha$, ezért $\exists \beta < \mathrm{cf}(K)$, hogy $x \in U_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha<\beta+1} U_\alpha$ és $x \in F_{\beta+1} = X \setminus \bigcup_{\alpha<\beta+1} U_\alpha$. Mivel ez a két halmaz egymás komplementere, így x nem lehet benne mindkettőben. Ez ellentmondás, így ez az eset nem lehet, csak az lehet, hogy X $\mathrm{cf}(K)$ kompakt.

Ennek következménye a következő tétel is.

10.43. Tétel: *Ha K rendezett test BW tulajdonságú és $F \subseteq K$ korlátos és zárt, akkor* $\mathrm{cf}(K)$-*kompakt.*

Bizonyítás: Legyen $a \in K$ az F alsó korlátja és $b \in K$ a felső korlátja. Ekkor nyilván $a \leq b$ és $F \subseteq [a, b]$. Ha $(x_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(K)}$ tetszőleges F-ben futó sorozat, az nyilván $[a, b]$-ben fut, így a 9.21. lemma miatt $\exists \left(x_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ kofinális, konvergens részsorozata., azaz $\exists x \in K,$ hogy $x_{\alpha_\xi} \to x$. Mivel az x_{α_ξ} F-ben fut és F zárt, ezért a 10.15. állítás miatt $x \in F$, vagyis az $\left(x_{\alpha_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(K)}$ sorozat F-en belül is konvergens. Ekkor alkalmazhatjuk a 10.42. tételt, miszerint F $\mathrm{cf}(K)$-kompakt.

11. Artin-Schreirer tétel

11.1. Állítás: *Legyen R rendezett integritási tartomány. Ekkor ha $n \in \mathbb{N}$-re és $a_1, \dots, a_n \in R$-re melyekre $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0$ teljesül, akkor $a_1 = \cdots a_n = 0$.*

Bizonyítás: Vegyünk $a_1, \dots, a_n \in R$ elemeket, melyekre $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0$. Mivel minden $i = 1, \dots, n$-re $a_i^2 \geq 0$, ezért $0 \leq a_1^2 \leq a_1^2 + a_2^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \leq a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0$. Ebben az egyenlőtlenség láncban a két vége között egyenlőség van, ami azt jelenti, hogy végig egyenlőség van, azaz minden $i = 1, \dots, n$-re $a_1^2 + \cdots + a_{i-1}^2 = a_1^2 + \cdots + a_{i-1}^2 + a_i^2$, tehát $a_i^2 = 0$, ami a nullosztómentesség miatt azt jelenti, hogy $a_i = 0$, és ezt akartuk belátni.

Az itt bizonyított tulajdonságot Artin-Schreirer, a továbbiakban röviden AS tulajdonságnak nevezzük. Testek felett ez a tulajdonság átfogalmazható a következő módon is.

11.2. Lemma: *Egy K test akkor és csak akkor AS tulajdonságú, ha a $-1 \in K$ nem írható fel négyzetösszegként.*

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy a -1 felírható négyzetösszegként, és ebből belátjuk, hogy K nem AS tulajdonságú. Legyen $n \in N$ és $a_1, \dots, a_n \in K$ melyekre $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = -1$. Ekkor $a_1^2 + \cdots + a_n^2 + 1^2 = -1 + 1 = 0$, tehát a 0-t felírtuk négyzetösszegként, amelyre az utolsó tag $1 \neq 0$, így K nem AS tulajdonságú.

A másik irányba tegyük fel, hogy K nem AS tulajdonságú és legyen $n \in N$, $a_1, \dots, a_n \in K$, melyekre $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0$ és $a_i \neq 0$ valamilyen $1 \leq i \leq n$-re. Mivel a tagokat felcserélhetjük, feltehető, hogy $a_1 \neq 0$. Az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy $-a_1^2 = a_2^2 + \cdots + a_n^2$. Mivel K test és $a_1 \neq 0$, leoszthatunk a_1^2-tel, így azt kapjuk, hogy $-1 = -\frac{a_1^2}{a_1^2} = \frac{a_2^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_1^2} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^2$ felírható négyzetösszegként.

A továbbiakban a 11.1. állítás megfordítását fogjuk belátni, azaz ha R integritási tartomány AS tulajdonságú, akkor lehet rajta definiálni egy rendezést, amellyel rendezett integritási tartományt ad.

11.3. Definíció: *Ha R integritási tartomány egy $P \subseteq R$ halmazt pozitivitástartománynak nevezünk, ha teljesülnek rá a következő tulajdonságok:*

1. $0 \in P$

2. $\forall a, b \in P$*-re* $a + b \in P$

3. $\forall a, b \in P$*-re* $ab \in P$

4. Ha valamely $a \in R$*-re* $a, -a \in P$*, akkor* $a = 0$

11.4. Definíció: *Ha R integritási tartomány egy $P \subseteq R$ pozitivitástartomány teljes, ha $\forall a \in R$-re $a \in P \vee (-a) \in P$ teljesül.*

A következő két lemma kapcsolatot teremt a rendezések és a teljes pozitivitástartományok között.

11.5. Lemma: *Ha R rendezett integritási tartomány, akkor a $P = \{a \in R, a \geq 0\}$ egy teljes pozitivitástartomány R-en.*

Bizonyítás: Mivel $0 \geq 0$, ezért az 1. tulajdonság $0 \in P$ teljesül. a 2. tulajdonsághoz ha $a, b \in P$, akkor $a, b \geq 0$, az összeadási szabály és a rendezés tranzitivitása miatt $0 \leq a \leq a + b$, így $a + b \in P$. A 3. tulajdonság egyszerűen a szorzási szabály, hiszen ha $a, b \geq 0$, akkor $ab \geq 0$, tehát $ab \in P$. A 4. tulajdonsághoz legyen $a \in R$, melyre $a, -a \in P$, tehát $a \geq 0$ és $-a \geq 0$, így $a \leq 0$. A rendezés antiszimmetrikussága miatt ez azt jelenti, hogy $a = 0$.

A P teljességéhez legyen $a \in R$. A trichotómia miatt $a \geq 0$ vagy $a \leq 0$, azaz $-a \geq 0$ teljesül. Mindkét esetben $a, -a$ valamelyike P-ben van, tehát P teljes.

11.6. Lemma: *Ha R integritási tartomány $P \subseteq R$ teljes pozitivitástartomány, akkor a $\leq$ reláció R-en, melyet úgy definiálunk, hogy $a, b \in R$-re $a \leq b$, ha $b - a \in P$ egy rendezés R-en, mellyel R rendezett integritási tartomány.*

Bizonyítás: Először az látjuk be, hogy $\leq$ rendezés R-en. A reflexivitáshoz ha $a \in R$, akkor az 1. tulajdonság miatt $a - a = 0 \in P$ teljesül, így $a \leq a$. Az antiszimmetriához legyen $a, b \in R$, amelyre $a \leq b$ és $b \leq a$. Ez azt jelenti, hogy $b - a \in P$ és $a - b = -(b - a) \in P$, ekkor a 4. tulajdonság miatt $b - a = 0$, vagyis $a = b$. A tranzitivitáshoz vegyünk $a, b, c \in R$-et, melyekre $a \leq b \leq c$, ekkor $b - a, c - b \in P$, a 2. tulajdonság miatt $c - a = (b - a) + (c - b) \in P$, azaz $a \leq c$. Végül a trichotómiához legyen $a, b \in R$. A teljesség miatt ekkor $b - a \in P$, vagy $a - b = -(b - a) \in P$. Előbbi esetben $a \leq b$, míg az utóbbiban $b \leq a$.

A rendezés és az összeadás kapcsolatához legyen $a, b, c \in R$, melyekre $a \leq b$, tehát $b - a \in P$. Ekkor $(b + c) - (a + c) = b - a \in P$, így $a + c \leq b + c$. A szorzási szabályhoz pedig legyen $a, b \in R$, $a, b \geq 0$. Ekkor $a, b = a - 0, b - 0 \in P$, így a 3. tulajdonság miatt $ab \in P$, tehát $ab \geq 0$.

Az előző két lemma az R integritási tartományon való rendezések és az R teljes pozitivitástartományai között bijekciót ad, ugyanis ha $P \subseteq R$ teljes pozitivitás tartomány, akkor a rendezést a 11.6. lemma alapján definiálva és ebből a 11.5. lemma segítségével egy P' teljes pozitivitástartományt definiálva azt kapjuk, hogy $a \in P' \Leftrightarrow a \geq 0 \Leftrightarrow a - 0 = a \in P$, tehát $P = P'$. A másik irányba, ha $\leq$ rendezés R-en, mellyel rendezett integritási tartományt alkot, akkor a 11.5. lemma alapján definiálva egy P pozitivitástartományt, majd ebből a 11.6 lemma alapján egy $\leq'$ rendezést azt kapjuk, hogy $a \leq' b \Leftrightarrow b - a \in P \Leftrightarrow b - a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq b$, tehát a két rendezés ugyanaz. A továbbiakban a rendezhetőséghez elég lesz egy teljes pozitivitástartomány létezését bizonyítani.

11.7. Definíció: *Legyen R integritási tartomány. Ekkor* $\mathrm{SQ}(R) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 : n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in R\}$.

11.8. Állítás: *Ha R integritási tartomány AS tulajdonságú, akkor $\mathrm{SQ}(R) \subseteq R$ pozitivitástartomány.*

Bizonyítás: Nyilván $0 = 0^2 \in \mathrm{SQ}(R)$, így az 1. tulajdonság teljesül. Ha $a, b \in \mathrm{SQ}(R)$, akkor legyen $m, n \in \mathbb{N}$ és $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in R$, melyekre $a = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$ és $b = \sum_{j=1}^{m} b_j^2$. Ekkor $a + b = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{j=1}^{m} b_j^2 \in \mathrm{SQ}(R)$ és $ab = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i^2 b_j^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left(a_i b_j\right)^2 \in \mathrm{SQ}(R)$, így a 2. és a 3. tulajdonságok is teljesülnek. a 4. tulajdonsághoz legyen $a \in R$, melyre $a, -a \in \mathrm{SQ}(R)$. Ekkor $a = a_1^2 + \dots + a_n^2$ és $-a = b_1^2 + \dots + b_m^2$ valamely $n, m \in \mathbb{N}$-re és $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in R$-re, tehát $0 = a + (-a) = a_1^2 + \dots + a_n^2 + b_1^2 + \dots + b_m^2$. Az AS tulajdonság miatt ez azt jelenti, hogy $a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_n = 0$, így $a = a_1^2 + \dots + a_n^2 = 0$.

11.9. Állítás: *Ha R integritási tartomány $P \subseteq R$ pozitivitástartomány, amelyre $\mathrm{SQ}(R) \subseteq P$ és $x \in R$ tetszőleges, akkor létezik egy $P' \subseteq R$ pozitivitástartomány, amelyre $P \subseteq P'$ és $x \in P'$ vagy $-x \in P'$.*

Bizonyítás: Ha $x \in P$ vagy $-x \in P$, akkor az állítás triviális, hiszen $P' = P$ jó lesz, így a továbbiakban feltehetjük, hogy $x, -x \notin P$ és ekkor persze $x \neq 0$.

Vizsgáljuk meg az $ax + b = 0$ egyenletet, ahol $a, b \in P$. Az $a = b = 0$ nyilván kielégíti ezt az egyenletet. Nézzük meg, hogy van-e más olyan P-beli pár, ami kielégíti. Tegyük fel, hogy nincs ilyen, ekkor a $P' = \{ax + b : a, b \in P\}$ jó lesz. Nyilván $1 = 1^2 \in \mathrm{SQ}(R) \subseteq P$ és $0 \in P$, így $x = 1 \cdot x + 0 \in P'$. Az is világos, hogy ha $b \in P$, akkor $b = 0 \cdot x + b \in P'$, így $P \subseteq P'$. Azt kell még belátni, hogy P' poztitivitástartomány. Az 1. tulajdonság a $0 \in P \subseteq P'$ nyilván teljesül. Legyen most $A, B \in P'$, ekkor $A = ax + b, B = cx + d$ valamely $a, b, c, d \in P$-re. Ekkor $A + B = ax + b + cx + d = (a + c)x + (b + d) \in P'$, hiszen a P-re vonatkozó 2. tulajdonság miatt $a + c, b + d \in P$, így a 2. tulajdonság teljesül P'-re. A szorzatuk $AB = (ax + b)(cx + d) = acx^2 + adx + bcx + bd = (ad + bc)x + (acx^2 + bd) \in P'$, hiszen $\mathrm{SQ}(R) \subseteq P$ miatt $x^2 \in P$ és a 2. és 3. tulajdonságok miatt $ad + bc, acx^2 + bd \in P$, így a 3. tulajdonság is teljesül P'-re. Végül a 4. tulajdonsághoz legyen $A \in R$, melyre $A, -A \in P'$. Ekkor létezik $a, b, a', b' \in P$, melyekre $A = ax + b, -A = a'x + b'$. Ezeket összeadva $0 = A + (-A) = (a + a')x + (b + b')$. A feltevésünk szerint ekkor $a + a' = b + b' = 0$, vagyis $a' = -a$, $b' = -b$. Mivel $a, -a \in P$, a P-re vonatkozó 4. tulajdonság miatt $a = 0$ és hasonlóan $b = 0$, tehát $A = 0x + 0 = 0$.

Hasonlóan vizsgáljuk meg a $-cx + d = 0$ egyenletet, ahol $c, d \in P$. Ha ennek van csak triviális megoldása, akkor az előzőhöz hasonló módon a $P' = \{-cx + d : c, d \in P\}$ egy pozitivitástartomány lesz, amelyre $P \subseteq P'$ és $-x \in P'$. Tegyük fel, hogy mindkét egyenletnek van nemtriviális megoldása, azaz van $a, b, c, d \in P$, hogy $ax + b = -cx + d = 0$ és a, b illetve c, d közül is legalább az egyik nem 0. Ekkor persze egyik sem 0, mert ha $a = 0$ lenne, akkor $0 = 0x + b = b$ is 0 lenne, míg ha $b = 0$ lenne, akkor $ax = ax + 0 = 0$ lenne és mivel $x \neq 0$ és R nullosztómentes, ez azt jelentené, hogy $a = 0$, hasonló módon c, d között sem lehet 0.

Írjuk fel a következőt: $0 = c \cdot 0 + a \cdot 0 = c \cdot (ax + b) + a \cdot (-cx + d) = acx + bc - acx + ad = bc + ad$. Mivel $bc, ad \in P$ és $ad = -bc$, a P-re vonatkozó 4. tulajdonság miatt $bc = 0$, de ez nem lehet, mert $b, c \neq 0$ és R nullosztómentes. Ez az eset ellentmondásra vezet, így valóban csak az első 2 eset jöhet szóba, amelyekre az állítást már beláttuk.

11.10. Lemma: *Ha R integritási tartomány $P_0 \subseteq R$ pozitivitástartomány, amelyre* $\mathrm{SQ}(R) \subseteq P_0$, *akkor létezik egy $P^* \subseteq R$ teljes pozitivitástartomány, amelyre $P_0 \subseteq P^*$.*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{P} = \{P \subseteq R : P \text{ pozitivitástartomány}, P_0 \subseteq P\}$ mint tartalmazásra vett részbenrendezett halmaz. Vegyünk egy $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$ láncot, azt kell belátni, hogy van felső korlátja. $\mathcal{L} = \emptyset$ esetén $P_0 \in \mathcal{P}$ jó felső korlát $\mathcal{L} \neq \emptyset$ esetén pedig belátjuk, hogy $\cup \mathcal{L} \in \mathcal{P}$, ami nyilván jó. Vegyünk egy tetszőleges $P \in \mathcal{L}$-et, ekkor $P_0 \subseteq P \subseteq \cup \mathcal{L}$ teljesül, így $P_0 \subseteq \cup \mathcal{L}$. Azt kell még belátni, hogy $\cup \mathcal{L}$ pozitivitástartomány. Mivel $0 \in P_0 \subseteq \cup \mathcal{L}$, az 1. tulajdonság nyilván teljesül. Legyen $a, b \in \cup \mathcal{L}$. Ekkor léteznek $P_1, P_2 \in \mathcal{L}$, hogy $a \in P_1$, $b \in P_2$. Mivel $\mathcal{L}$ lánc, ezért $P_1 \subseteq P_2$ vagy $P_2 \subseteq P_1$ teljesül. Szimmetria miatt feltehető, hogy az előbbi, tehát $a, b \in P_2$. Ekkor a P_2-re vonatkozó 2. és 3. tulajdonság miatt $a + b, ab \in P_2 \subseteq \cup \mathcal{L}$, tehát $\cup \mathcal{L}$-ben is teljesül a 2. és 3. tulajdonság. Végül a 4. tulajdonsághoz legyen $a \in R$ olyan, hogy $a, -a \in \cup \mathcal{L}$. Ekkor léteznek $P_1, P_2 \in \mathcal{L}$, hogy $a \in P_1$, $-a \in P_2$, és megint feltehető, hogy $P_1 \subseteq P_2$. Mivel $a, -a \in P_2$, a P_2-re vonatkozó 4. tulajdonság miatt $a = 0$. Így minden tulajdonság teljesül, $\cup \mathcal{L}$ valóban pozitivitástartomány, $\cup \mathcal{L} \in \mathcal{P}$ felső korlát.

A Zorn-lemma miatt $\exists P^* \in \mathcal{P}$ maximális. Nyilván $P_0 \subseteq P^*$ és P^* pozitivitástartomány. Azt kell már csak belátni, hogy P^* teljes. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem teljesül, azaz valamely $x \in R$-re $x, -x \notin P^*$. Mivel $\mathrm{SQ}(R) \subseteq P_0 \subseteq P^*$, ezért a 11.9. állítás alapján $\exists P' \subseteq R$ pozitivitástartomány, amelyre $P^* \subseteq P'$ és $x \in P' \vee (-x) \in P'$, tehát $P' \supset P^*$ szigorúan bővebb, ami ellent mond P^* maximalitásának, így P^* valóban teljes.

11.11. Tétel: *Ha R integritási tartomány AS tulajdonságú, akkor rendezhető.*

Bizonyítás: A 11.8. állítás miatt ekkor $\mathrm{SQ}(R) \subseteq R$ pozitivitástartomány és mivel $\mathrm{SQ}(R) \subseteq \mathrm{SQ}(R)$, alkalmazható rá a 11.10. lemma, tehát $\exists P^* \subseteq R$ teljes pozitivitástartomány, hogy $\mathrm{SQ}(R) \subseteq P^*$. Ez a teljes pozitivitástartomány pedig a 11.6. lemma szerint megad egy rendezést, mellyel R rendezett integritási tartomány lesz.

12. Rendezett testek és algebrai zártság

12.1. Állítás: *Ha K rendezett test, akkor nem lehet algebrailag zárt*

Bizonyítás: Az $x^2+1=0$ egyenletnek nem lehet a K-ban megoldása, hiszen minden $x \in K$-ra $x^2 \geq 0$ és így $x^2+1 \geq 0+1=1>0$, tehát nem lehet 0.

Ebből nyilván látszik, hogy nincs értelme arról beszélni, hogy egy rendezett testet beágyazzunk egy algebrailag zárt rendezett testbe, de a fent említett és ahhoz hasonló egyenletek jelentik szinte az egyetlen problémát ebben a kérdésben. Az $\mathbb{R}$ mint rendezett test közel van az algebrai zártsághoz olyan értelemben, hogy minden páratlan fokú polinomnak van fölötte gyöke és a pozitív valósaknak négyzetgyöke is van. Sőt az $\mathbb{R}$ egy másodfokú bővítése $\mathbb{C}$ már algebrailag zárt. Azt fogjuk belátni, hogy hasonló más rendezett testek bővítésével is elérhető.

12.2. Lemma: *Legyen $(R,<)$ rendezett integritási tartomány, S integritási tartomány, melyre $R \subseteq S$ (ugyanazokkal a műveletekkel) és minden $n \in \mathbb{N}$, $r_1,\dots,r_n \in R$, $r_1,\dots,r_n>0$ és $s_1,\dots,s_n \in S$-re, melyekre $r_1s_1^2+\dots+r_ns_n^2=0$ teljesül, hogy $s_1=\dots=s_n=0$. Ekkor van egy $<'$ rendezés S-en, mellyel S rendezett integritási tartomány és $<'_{|R}=<$.*

Bizonyítás: Legyen $P=\{\sum_{i=1}^n r_is_i^2 : n \in \mathbb{N}, r_1,\dots,r_n \in R, r_1,\dots,r_n>0, s_1,\dots,s_n \in S\}$. Azt fogjuk belátni, hogy ez pozitivitástartomány S-en. Az 1. feltétel nyilván teljesül, hiszen $0=1\cdot 0^2 \in P$. Legyen most $a,b \in P$ és $n,m \in \mathbb{N}$, $r_1,\dots,r_n,t_1,\dots,t_m \in R$, $r_1,\dots,r_n,t_1,\dots,t_m>0$ és $s_1,\dots,s_n,u_1,\dots,u_m \in S$ olyanok, hogy $a=\sum_{i=1}^n r_is_i^2$ és $b=\sum_{j=1}^m t_ju_j^2$. Ekkor $a+b=\sum_{i=1}^n r_is_i^2+\sum_{j=1}^m t_ju_j^2 \in P$ nyilván teljesül és $ab=(\sum_{i=1}^n r_is_i^2)(\sum_{j=1}^m t_ju_j^2)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m r_is_i^2t_ju_j^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m r_it_j(s_iu_j)^2 \in P$, hiszen $\forall i,j$-re $r_it_j \in R, r_it_j>0$, így P-re a 2. és 3. tulajdonság is teljesül. Végül a 4. tulajdonsághoz legyen $a \in S$ olyan, hogy $a,-a \in P$. Legyen $n,m \in \mathbb{N}$, $r_1,\dots,r_n,t_1,\dots,t_m \in R$, $r_1,\dots,r_n,t_1,\dots,t_m>0$ és $s_1,\dots,s_n,u_1,\dots,u_m \in S$ olyanok, hogy $a=\sum_{i=1}^n r_is_i^2$ és $-a=\sum_{j=1}^m t_ju_j^2$. Ez azt jelenti, hogy $0=a+(-a)=\sum_{i=1}^n r_is_i^2+\sum_{j=1}^m t_ju_j^2$, így az állítás feltételéből $s_1=\dots=s_n=u_1=\dots=u_m=0$, tehát $a=\sum_{i=1}^n r_i0^2=0$. Ezzel beláttuk, hogy $P \subseteq S$ pozitivitástartomány. Az is világos, hogy $\mathrm{SQ}(S) \subseteq P$, ugyanis ha $a \in \mathrm{SQ}(S)$, akkor $\exists n \in \mathbb{N}, s,\dots,s_n \in S$, hogy $a=\sum_{i=1}^n s_i^2=\sum_{i=1}^n 1s_i^2 \in P$.

A 11.10. lemma miatt, ekkor van egy $P^* \subseteq S$ teljes pozitivitástartomány, amelyre $P \subseteq P^*$. Legyen $<'$ a P^* által 11.6. lemma szerint definiált rendezés szigorú (egyenlőséget nem megengedő változata). Ekkor $(S,<')$ rendezett integritási tartomány. Kell még, hogy kiterjeszti a $<$ rendezést R-en. Legyen $a,b \in R, a<b$, ekkor $b-a=(b-a)1^2 \in P \subseteq P^*$, és persze $a \neq b$, így $a<'b$, vagyis $<'_{|R} \supseteq <$. teljesül. De nyilván ha egy halmazon az egyik rendezés bővebb a másiknál, akkor a két rendezés megegyezik, így $<'$ valóban kiterjesztés.

Ennek a lemmának számos hasznos alkalmazása lesz a továbbiakban.

12.3. Állítás: *Ha K rendezett test $t \in K$ nem négyzetelem, melyre $t > 0$, akkor a bővített test, $K\left[\sqrt{t}\right]$ is rendezhető K rendezésének megtartásával.*

Bizonyítás: Elég a 12.2. lemma feltételeit belátni $K \subseteq K\left[\sqrt{t}\right]$ testekre, mint integritási tartományokra. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $r_1, \dots, r_n \in K$, $r_1, \dots, r_n > 0$, és $s_1, \dots, s_n \in K\left[\sqrt{t}\right]$, melyekre $r_1 s_1^2 + \dots + r_n s_n^2 = 0$. Minden $1 \leq i \leq n$-re $s_i \in K\left[\sqrt{t}\right]$ egyértelműen felírható $s_i = a_i + b_i\sqrt{t}$ alakban, ahol $a_i, b_i \in K$. Ekkor $0 = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i^2 = \sum_{i=1}^{n} r_i \left(a_i + b_i\sqrt{t}\right)^2 =$ $= \sum_{i=1}^{n} r_i\left(a_i^2 + tb_i^2 + 2a_i b_i\sqrt{t}\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i(a_i^2 + tb_i^2) + (\sum_{i=1}^{n} 2r_i a_i b_i)\sqrt{t}$. Mivel $K\left[\sqrt{t}\right]$ minden elemének, speciálisan a 0-nak is a felírása egyértelmű, ezért mindkét tag 0, vagyis $\sum_{i=1}^{n} r_i(a_i^2 + tb_i^2) = 0$. Az összeg minden tagja nemnegatív K-ban, így $r_i(a_i^2 + tb_i^2) = 0$ minden i-re. Mivel $r_i \neq 0$, ezért minden i-re $a_i^2 + tb_i^2 = 0$, és a $t > 0$ miatt ez nyilván azt jelenti, hogy $a_i = b_i = 0$, tehát $s_i = a_i + b_i\sqrt{t} = 0$. Ekkor teljesül a feltétel, a 12.2. lemmát alkalmazva a rendezés kiterjeszthető $K\left[\sqrt{t}\right]$.

Vegyük észre, hogy a $K\left[\sqrt{t}\right]$ rendezését elemien is meg tudnánk konstruálni a $\sqrt{t}$ valamilyen módon való beillesztésével, és az előbb adott bizonyítás nem túl konstruktív. Később majd látni fogjuk, hogy magasabb fokú polinomok gyökeivel való bővítés esetén ez sokkal hasznosabb módszer lesz.

12.4. Lemma: *Ha K rendezett test, $q \in K[x]$ irreducibilis polinom, amelyre $\deg(q)$ páratlan, akkor minden $n \in \mathbb{N}$-re $r_1, \dots, r_n \in K$, $r_1, \dots, r_n > 0$ -ra és $p_1, \dots, p_n \in K[x]$ polinomokra, melyekre $q | r_1 p_1^2 + \dots + r_n p_n^2$ teljesül, hogy $\forall 1 \leq i \leq n$-re $q | p_i$.*

Bizonyítás: Teljes indukció $\deg(q)$-ra nézve. Ha $\deg(q) = 1$, akkor $q = c(x - a)$, ahol $c, a \in K$. Ekkor nyilván tetszőleges $p \in K[x]$-re a $q | p$ pontosan azt jelenti, hogy $p(a) = 0$, ha $r_1, \dots, r_n \in K$, $r_1, \dots, r_n > 0$ és $p_1, \dots, p_n \in K[x]$ olyanok, hogy $r_1 p_1^2(a) + \dots + r_n p_n^2(a) = 0$, akkor nyilván minden tag 0, hiszen nemnegatívak, azaz $\forall 1 \leq i \leq n$-re $p_i^2(a) = 0$, vagyis $p_i(a) = 0$, tehát $q | p_i$.

Tegyük most fel, hogy $\deg(q) \geq 3$ páratlan és kisebb páratlan fokú q-ra az állítás igaz. Legyen $r_1, \dots, r_n \in K$, $r_1, \dots, r_n > 0$ és $p_1, \dots, p_n \in K[x]$ tetszőleges, melyekre $q \nmid r_1 p_1^2 + \dots + r_n p_n^2$. Először is feltehető, hogy $\deg(p_i) < \deg(q)$ minden i-re, hiszen maradékosan leosztva $p_i = a_i q + b_i$, ahol $\deg(b_i) < \deg(q)$ és $b_i \equiv p_i (\operatorname{mod} q)$, így $q | r_1 b_1^2 + \dots + r_n b_n^2$, tehát a p_i-ket lecserélhetnénk b_i-kre.

Legyen $h \in K[x]$ a $p_1, \dots, p_n \in K[x]$ legnagyobb közös osztója. Ha $q | h$, akkor $q | p_i$ $\forall 1 \leq i \leq n$-re, ebben az esetben a lemmát beláttuk. Tegyük most fel, hogy $q \nmid h$. Legyen $f_i \in K[x]$, melyre $p_i = h f_i$ és legyen $f = r_1 f_1^2 + \dots + r_n f_n^2$. Ekkor $q \nmid r_1 p_1^2 + \dots + r_n p_n^2 = h^2 r_1 f_1^2 + \dots + h^2 r_n f_n^2 = h^2 f$. Mivel q irreducibilis, a $K[x]$-beli egyértelmű prímfaktorizáció miatt ez azt jelenti, hogy $q|f = r_1 f_1^2 + \cdots + r_n f_n^2$. Ekkor a p_i-ket f_i-kre cserélve a fokszámokat nem növelve elértük, hogy ne legyen p_i-knek 1-nél nagyobb közös osztója, így a továbbiakban ez feltehető.

Legyen $r_1 p_1^2 + \cdots + r_n p_n^2 = qs$, ahol $s \in K[x]$. Legyen a baloldalon lévő p_i-k közül a legnagyobb fokszámú foka m, ekkor persze $m < \deg(q)$, továbbá legyen a p_i főegyütthatója c_i. A baloldali összegnek nyilván nem lehet $2m$-nél nagyobb fokú tagja és a $2m$ fokú tagja pedig nem más, mint $\sum_{\substack{i=1 \\ \deg(p_i)=m}}^{n} r_i c_i^2 > 0$, mert legalább 1 tag van és minden tag pozitív. Ez azt jelenti, hogy a baloldal foka $2m$. Ekkor persze a jobboldal foka is, tehát $\deg(s) = 2m - \deg(q) < 2\deg(q) - \deg(q) = \deg(q)$, és persze $\deg(q)$ páratlan, így $\deg(s)$ is. Legyen $s = \prod_{l=1}^{k} s_l$, ahol $s_l \in K[x]$ irreducibilis. Mivel $\deg(s) = \sum_{l=1}^{k} \deg(s_l)$ páratlan, ezért $\exists 1 \leq l \leq k$, hogy $\deg(s_l)$ páratlan. Ekkor s_l páratlan fokú irreducibilis poinom és $\deg(s_l) \leq \deg(s) < \deg(q)$, így s_l-re alkalmazható az indukciós feltevés és mivel $s_l | s | qs = r_1 p_1^2 + \cdots + r_n p_n^2$, ezért $s_l | p_i$, $\forall 1 \leq i \leq n$-re, de ez ellent mond annak, hogy a p_i-knek nincs 1-nél nagyobb közös osztója, így az egyetlen lehetséges eset az, amire már beláttuk a lemmát.

12.5. Állítás: *Ha K rendezett test, $q \in K[x]$ irreducibilis polinom, amelyre $\deg(q)$ páratlan, akkor $K[x]/(q(x))$ is rendezhető a K-beli rendezés kiterjesztésével.*

Bizonyítás: Legyen $n \in \mathbb{N}$ $r_1, \ldots, r_n \in K$, $r_1, \ldots, r_n > 0$ és $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n} \in K[x]/(q(x))$, melyekre $r_1 \overline{p_1}^2 + \cdots + r_n \overline{p_n}^2 = 0$ a $K[x]/(q(x))$-ben. Legyen minden $1 \leq i \leq n$-re a $p_i \in K[x]$ a $\overline{p_i}$ egy tetszőleges felemeltje. Ekkor az $r_1 p_1^2 + \cdots + r_n p_n^2$ a 0 egy felemeltje lesz, vagyis $q | r_1 p_1^2 + \cdots + r_n p_n^2$. A 12.4. lemma miatt ez azt jelenti, hogy $q | p_i$ minden i-re, azaz minden i-re $\overline{p_i} = 0$. Ekkor a 12.2. lemmát alkalmazva a K rendezése kiterjeszthető $K[x]/(q(x))$-re.

12.6. Definíció: *Egy K rendezett test algebrailag félig zárt, ha $\forall p(x) \in K[x]$ páratlan fokú polinomnak van gyöke K-ban és $\forall t \in K, t \geq 0$-nak van négyzetgyöke K-ban.*

12.7. Tétel: *Minden $(K, <_K)$ rendezett testhez van egy olyan $(M, <_M)$ algebrailag félig zárt rendezett test, amelyre $K \subseteq M$ és a rendezés és a műveletek kiterjednek.*

Bizonyítás: Jelölje $\overline{K}$ a K algebrai lezártját és legyen $\mathcal{A} = \{(L, <_L) : K \leq L \leq \overline{K} \text{ résztest}, (L, <_L) \text{ rendezett test}, <_L|_K = <_K\}$. Ha

$(L_1,<_{L_1}),(L_2,<_{L_2}) \in \mathcal{A}$, akkor $(L_1,<_{L_1}) \preccurlyeq (L_2,<_{L_2})$, ha $L_1 \subseteq L_2$ és $<_{L_2}|_{L_1} =<_{L_1}$. Ez nyilván egy részbenrendezést ad $\mathcal{A}$-n. Azt fogjuk belátni, hogy minden $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ láncnak van felső korlátja $\mathcal{A}$-ban. Ha $\mathcal{L} = \emptyset$, akkor a $(K,<_K)$ jó felső korlát lesz.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Ekkor az $\cup\,\mathcal{L} \subseteq \overline{K}$ résztestek láncának uniója, így résztest. Ezen kell definiálni egy rendezést. Legyen $a,b \in \cup\,\mathcal{L}$-re $a <_{\cup\mathcal{L}} b$, ha $\exists L \in \mathcal{L}$, hogy $a,b \in L$ és $a <_L b$. Azt kell belátni, hogy ez rendezés $\cup\,\mathcal{L}$. Az irreflexivitás nyilván igaz, hiszen ha $a \in \cup\,\mathcal{L}$, akkor $\forall L \in \mathcal{L}, a \in L$-re $a \not<_L a$, így $a \not<_{\cup\mathcal{L}} a$. A tranzitivitáshoz legyen $a,b,c \in \cup\,\mathcal{L}$, melyekre $a <_{\cup\mathcal{L}} b <_{\cup\mathcal{L}} c$. Ekkor $\exists L_1,L_2 \in \mathcal{L}$, hogy $a,b \in L_1, a <_{L_1} b$ és $b,c \in L_2, b <_{L_2} c$. Mivel $\mathcal{L}$ lánc, ezért $(L_1,<_{L_1}) \preccurlyeq (L_2,<_{L_2})$, vagy $(L_2,<_{L_2}) \preccurlyeq (L_1,<_{L_1})$. Szimmetria miatt feltehetjük, hogy az előbbi. Ekkor az $L_1 \subseteq L_2$ miatt $a,b,c \in L_2$ és a rendezés kiterjesztése miatt $a <_{L_2} b$, így $a <_{L_2} b <_{L_2} c$, tehát $a <_{L_2} c$, így $a <_{\cup\mathcal{L}} c$ is teljesül. A trichotómiához vegyünk $a,b \in \cup\,\mathcal{L}$ tetszőleges elemeket. Ezekhez van olyan $L_1,L_2 \in \mathcal{L}$, hogy $a \in L_1, b \in L_2$. Láncfeltételből feltehető, hogy $(L_1,<_{L_1}) \preccurlyeq (L_2,<_{L_2})$, tehát $a,b \in L_2$. Az L_2-beli trichotómia miatt ekkor $a <_{L_2} b$, $a = b$ vagy $b <_{L_2} a$ teljesül, így $a <_{\cup\mathcal{L}} b$, $a = b$ vagy $b <_{\cup\mathcal{L}} a$ is.

Most azt látjuk be, hogy $(\cup\,\mathcal{L},<_{\cup\mathcal{L}})$ rendezett test. Az összeadási szabályhoz vegyünk $a,b,c \in \cup\,\mathcal{L}$-t, melyekre $a <_{\cup\mathcal{L}} b$. Legyen $L_1 \in \mathcal{L}$ olyan, hogy $a,b \in L_1, a <_{L_1} b$ és $L_2 \in \mathcal{L}$ melyre $c \in L_2$. Megint feltehető, hogy $(L_1,<_{L_1}) \preccurlyeq (L_2,<_{L_2})$, azaz $a,b,c \in L_2$, így $a+c, b+c \in L_2$, továbbá $a <_{L_2} b$, így $a + c <_{L_2} b + c$, tehát $a + c <_{\cup\mathcal{L}} b + c$. A szorzási szabályhoz legyen $a,b \in \cup\,\mathcal{L}$ melyekre $a,b >_{\cup\mathcal{L}} 0$. Vegyünk $L_1,L_2 \in \mathcal{L}$-et melyekre $a \in L_1, a >_{L_1} 0$ és $b \in L_2, b >_{L_2} 0$. Ismét feltehető, hogy $(L_1,<_{L_1}) \preccurlyeq (L_2,<_{L_2})$. Ekkor $a,b \in L_2$ és $a,b >_{L_2} 0$, így $ab \in L_2$ és $ab >_{L_2} 0$, tehát $ab >_{\cup\mathcal{L}} 0$. Ezzel beláttuk, hogy $(\cup\,\mathcal{L},<_{\cup\mathcal{L}})$ rendezett test.

Kell még, hogy $<_{\cup\mathcal{L}}|_K =<_K$. Vegyünk $a,b \in K$-et, melyekre $a <_K b$. Ha $L \in \mathcal{L}$ tetszőleges, akkor nyilván $a,b \in L$ és $a <_L b$ teljesül, mert $<_L|_K =<_K$. Ez azt jelenti, hogy $a <_{\cup\mathcal{L}} b$, tehát $<_K \subseteq <_{\cup\mathcal{L}}|_K$, de mindkettő rendezés K-n így az egyenlőség fenáll. Ekkor $(\cup\,\mathcal{L},<_{\cup\mathcal{L}}) \in \mathcal{A}$, továbbá az is világos, hogy felső korlát, hiszen a definícióból adódóan $\forall L \in \mathcal{L}$-re $<_L \subseteq <_{\cup\mathcal{L}}|_L$, és így egyenlőség áll.

A Zorn-lemma alapján létezik $(M,<_M) \in \mathcal{A}$ maximális. Azt kell belátni, hogy M algebrailag félig zárt. Indirekt tegyük fel, hogy az első feltétel nem teljesül, azaz $\exists p(x) \in M[x]$ páratlan fokú polinom, amelynek nincs gyöke M-ben. Feltehető, hogy p minimális fokú az ilyenek közül. Ekkor p-nek muszáj irreducibilisnek lenni $M[x]$ felett, hiszen ha felbomlana két kisebb fokú polinom szorzatára, az egyik páratlan fokú lenne és annak lenne gyöke M-ben, ami p-nek is gyöke lenne. Mivel $M \subseteq \overline{K}$ és $\overline{K}$ algebrailag zárt, ezért p-nek van egy $\alpha \in \overline{K}$ gyöke $\overline{K}$-ban. Mivel $p(\alpha) = 0$ és p irreducibilis $M[x]$ felett, az α M feletti minimálpolinomja p, azaz $M(\alpha) \cong {M[x]}\big/{(p(x))}$. A 12.5. állítás alapján ekkor $M(\alpha)$-n van egy $<_{M(\alpha)}$ rendezés, amely kiterjeszti a $<_M$ rendezést, azaz $(M(\alpha),<_{M(\alpha)}) \in \mathcal{A}$ és $(M,\leq_M) \preccurlyeq (M(\alpha),<_{M(\alpha)})$, és mivel

p-nek nincs gyöke M-ben, ezért $\alpha \notin M$, vagyis a bővítés valódi, ami ellent mond M maximalitásának.

A másik feltételhez tegyük fel, hogy valamely $t \in M, t > 0$-nak nincs négyzetgyöke. Ekkor a $\bar{K}$ algebrai zártsága miatt $\exists\sqrt{t} \in \bar{K}$ négyzetgyök. Ekkor az 12.3. állítás alapján $M(\sqrt{t})$ rendezhető az M rendezését kiterjesztve, ami az előzőhöz hasonló módon megint ellent mond M maximalitásának.

Ezzel beláttuk, hogy minden rendezett test beágyazható algebrailag félig zárt rendezett testbe. Az algebrailag félig zártság már a definícióból is látszik, hogy elég közel van az algebrailag zártsághoz úgy mint például $\mathbb{R}$-re teljesül. A valós számok más szempontból is közel vannak az algebrailag zártsághoz, hiszen azoknak egy egyszerű másodfokú bővítése $\mathbb{C}$ már algebrailag zárt. A továbbiakban azt fogjuk belátni, hogy ez általánosan is igaz algebrailag félig zárt rendezett testekre.

12.8. Definíció: *Ha K rendezett test, akkor a $K(i) = K(\sqrt{-1}) \cong K[x]/_{(x^2+1)}$-et a K komplex bővítésének nevezzük.*

Mivel az $x^2 + 1 = 0$ egyenletnek egy rendezett testben nem lehet gyöke és másodfokú, ezért irreducibilis, tehát rendezett testek komplex bővítése is test. A $K(i)$ minden eleme egyértelműen felírható $a + bi$ alakban, ahol $a, b \in K$. Ha ilyen alakba írjuk az elemeket, akkor köztük a műveletek is ugyanúgy működnek, ahogy a komplex számok körében már megszoktuk, de természetesen $K(i)$ nem rendezhető.

12.9. Állítás: *Ha K rendezett testben minden $t \in K, t \geq 0$ négyzetelem, akkor a $C = K(i)$ minden eleme négyzetelem.*

Bizonyítás: Minden $t \in K, t \geq 0$-ra jelöljük $\sqrt{t}$-vel az egyik négyzetgyökét. Ha $t = 0$, akkor nyilván az egyetlen négyzetgyök a 0, míg $t > 0$ esetén a két négyzetgyök $\sqrt{t}$ és $-\sqrt{t}$. Ezek közül az egyik pozitív, másik negatív, ezért feltehetjük, hogy úgy választjuk meg a gyököt, hogy $\sqrt{t} \geq 0$ minden t-re. Ekkor minden $a \in K$-ra $\sqrt{a^2} = |a|$, hiszen a^2 két négyzetgyöke a és $-a$ és ezek közül a nemnegatív $|a|$. Ha $0 \leq a \leq b$, akkor a $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ is igaz, ugyanis ha indirekten feltesszük, hogy $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, akkor $a = \sqrt{a}\sqrt{a} > \sqrt{a}\sqrt{b} \geq \sqrt{b}\sqrt{b} = b$, ami nem lehet.

Vegyünk egy $z \in C$-t ekkor ez felírható $a + bi$ alakban, ahol $a, b \in K$. Ekkor $a^2 + b^2 \geq 0$, így a $\sqrt{a^2 + b^2}$ értelmes és ≥ 0. Nyilván $\sqrt{a^2 + b^2} + |a| \geq 0$ mert 2 nemnegatív összege és $a^2 + b^2 \geq a^2$ miatt $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a|$, tehát $\sqrt{a^2 + b^2} - |a| \geq 0$. Ez az két egyeltőtlenség azt jelenti, hogy $\sqrt{a^2+b^2}+a, \sqrt{a^2+b^2}-a \geq 0$, így persze $\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \geq 0$ és $\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \geq 0$, azaz $\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \in K$ értelmesek.

Ha $b \geq 0$, akkor legyen $w = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} i \in C$. Ennek a négyzete

$$w^2 = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} i =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} + 2\sqrt{\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}{4}} i =$$

$$= \frac{2a}{2} + 2\sqrt{\frac{a^2+b^2-a^2}{4}} i = a + 2\frac{\sqrt{b^2}}{2} i = a + bi = z$$

Ez azt jelenti, hogy z négyzetelem. Ha $b < 0$, akkor hasonló számolás mutatja, hogy a $w = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} i \in C$ jó lesz.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy algebrailag félig zárt rendezett testek komplex bővítése algebrailag zárt. Ehhez felhasználjuk a Galois-elmélet néhány alapvető eredményét is.

12.10. Tétel: *Minden K algebrailag félig zárt rendezett test $C = K(i)$ komplex bővítése algebrailag zárt.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy C nem algebrailag zárt. Ekkor van egy $p(x) \in C[x]$ polinom, aminek nincs gyöke C-ben. Legyen a $\bar{C}$ algebrai lezártban $\alpha \in \bar{C}$ egy gyöke a p polinomnak. Ekkor a $C(\alpha)|C$ valódi véges testbővítés, így nyilván a $C(\alpha)|K$ is. Legyen N ennek a testbővítésnek a normális lezártja (felbontási teste), így $N|K$ egy véges, normális bővítés. Mivel K rendezett test, nyilván 0 karakterisztikájú, így minden testbővítése szeparábilis, vagyis az $N|K$ bővítés Galois.

Legyen $G = \mathrm{Gal}(N|K)$ a Galois-csoport. Vegyünk egy $P \leq G$ 2-Sylow részcsoportot és legyen $K \leq F \leq N$ a P fixtestje. A Galois elmélet főtétele szerint ekkor $|F:K| = |G:P|$, ami páratlan, hiszen a 2-Sylow részcsoport indexe [3]. Ha veszünk egy $\beta \in F \,/\, K$-t, akkor $K \leq K(\beta) \leq F$, így a fokszámtételből $|F:K| = |F:K(\beta)||K(\beta):K|$, így $|K(\beta):K|$ is páratlan. Ha $q(x) \in K[x]$ a β minimálpolinomja K felett, akkor $\deg(q) = |K(\beta):K|$ páratlan. Mivel K algebrailag félig zárt, ezért q-nak van gyöke K felett, másrészt q egy legalább 3 fokú irreducibilis polinom, ami nem lehet.

Az egyetlen megmaradt lehetőség, ha nem tudunk elemet választani $F \,/\, K$-ból, azaz $F = K$. Ekkor persze $|G:P| = |F:K| = 1$, tehát $P = G$, vagyis G egy 2-hatvány rendű csoport. Legyen $|G| = 2^r$. Mivel N a C-nek valódi bővítése, ezért $|G| = |N:K| > |C:K| = 2$, vagyis $r \geq 2$. Legyen $H = \mathrm{Gal}(N|C)$ a C elemeit fixáló részcsoport. Ekkor a Galois elmélet főtétele szerint $|G:H| = |C:K| = 2$, vagyis $|H| = 2^{r-1}$. A Sylow-tételekből az is következik, hogy az adott prím minden kisebb hatványára is van megfelelő elemszámú részcsoport, így $\exists Q \leq H$, $|Q| = 2^{r-2}$ [1]. Legyen $K \leq L \leq N$ a Q fixtestje. Mivel C elemeit már H minden eleme pontonként fixálja, nyilván Q minden eleme is, így $C \leq L$. Ismét alkalmazva a Galois-elmélet főtételét: $|L:K| = |G:Q| = \frac{2^r}{2^{r-2}} = 4$, míg a fokszámtételből $4 = |L:K| = |L:C||C:K| = 2|L:C|$, vagyis $|L:C| = 2$. Ha az L a C-nek másodfokú bővítése, akkor az nyilván csak egy elem négyzetgyökének adjungálása lehet (másodfokú egyenlet megoldása), de a 12.9. állítás miatt C-ben már minden elemnek van négyzetgyöke, azaz C-nek nincs valódi másodfokú bővítése. Ez ellentmondás, tehát C valóban algebrailag zárt. [2]

13. Dedekind bővítés

13.1. Definíció: *Egy K rendezett test $D \subseteq K$ részhalmazát Dedekind szeletnek nevezzük, ha D szelet, $D \neq \emptyset, D \neq K$ és D-nek nincs legnagyobb eleme. A K Dedekind szeleteinek halmazát $\mathcal{D}(K)$-val jelöljük.*

13.2. Jelölés: *Ha K rendezett test, $a \in K$, akkor $D_a = \{x \in K, x < a\}$.*

13.3. Állítás: *Ha K rendezett test, akkor minden $a \in K$-ra D_a Dedekind szelet*

Bizonyítás: Ha $x \in D_a$, $y \in K, y < x$, akkor $y < x < a$, így $y < a$, tehát $y \in D_a$, azaz $D_a \subseteq K$ szelet. Nyilván $a - 1 \in D_a$, így $D_a \neq \emptyset$ és $a \notin D_a$, így $D_a \neq K$. Azt kell még belátni, hogy nincs legnagyobb eleme. Minden $x \in D_a$-ra $x < \frac{a+x}{2} < a$, így $\frac{a+x}{2} \in D_a$, tehát x nem lehet legnagyobb elem D_a-ban.

13.4. Állítás: *Tetszőleges K rendezett testre a $\mathcal{D}(K)$ rendezett halmaz a $\subseteq$ relációval mint rendezéssel.*

Bizonyítás: A részhalmaz reláció tetszőleges halmazokra reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, tehát csak a trichotómiát kell belátni. Legyen $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(K)$. Ha $D_1 \subseteq D_2$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy nem ez a helyzet és legyen $a \in D_1 \setminus D_2$. Ha $x \in D_2$ tetszőleges, akkor nyilván $x \neq a$ és $a < x$ sem lehet, hiszen akkor $a \in D_2$ lenne, mert D_2 szelet. Ez azt jelenti, hogy $x < a$ és mivel D_1 is szelet, ezért $x \in D_1$. Az $x \in D_2$ tetszőleges volt, így $D_2 \subseteq D_1$.

13.5. Állítás: *Ha K rendezett test, akkor a $\varphi: K \to \mathcal{D}(K)$ leképezés, amelyre $\varphi(a) = D_a$ rendezéstartó.*

Bizonyítás: Legyen $a, b \in K, a < b$. Ekkor minden $x \in D_a$-ra $x < a < b$, így $x \in D_b$, vagyis $D_a \subseteq D_b$ és $a \in D_b, a \notin D_a$, tehát $D_a \neq D_b$, így a tartalmazás szigorú.

Felvetődik a kérdés, hogy vannak-e más Dedekind szeletek is a D_a alakúakon kívül. Azt fogjuk látni, hogy a $K \cong \mathbb{R}$ esetet kivéve mindig vannak.

13.6. Lemma: *Ha K rendezett test, akkor $\mathcal{D}(K)$-ban teljesül a legkisebb felső korlát tétele.*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}(K), \mathcal{A} \neq \emptyset$ és felülről korlátos, azaz $\exists D' \in \mathcal{D}(K)$, hogy $\forall D \in \mathcal{A}$-ra $D \subseteq D'$. Ekkor persze $\cup \mathcal{A} \subseteq D'$. Azt fogjuk belátni, hogy $\cup \mathcal{A}$ is Dedekind szelet. Ha $x \in \cup \mathcal{A}, y < x$, akkor vegyünk egy $D \in \mathcal{A}$-t, melyre $x \in D$. Mivel D szelet, ezért $y \in D \subseteq \cup \mathcal{A}$, vagyis $\cup \mathcal{A}$ is szelet. Az $\cup \mathcal{A} \neq \emptyset$ triviális, hiszen $\mathcal{A} \neq \emptyset$ és $\emptyset \notin \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$-nak van egy nem üres eleme, az uniója sem lehet üres. Az $\cup \mathcal{A} \subseteq D' \neq K$ miatt az $\cup \mathcal{A} \neq K$ is teljesül. Végül azt kell belátni, hogy $\cup \mathcal{A}$-nak nincs legnagyobb eleme. Ha $x \in \cup \mathcal{A}$, akkor vegyünk egy $D \in \mathcal{A}$-t, melyre $x \in D$. Mivel D-nek nincs legnagyobb eleme, ezért $\exists y > x$, $y \in D \subseteq \cup \mathcal{A}$, vagyis $\cup \mathcal{A}$-nak nincs legnagyobb eleme.

Kell még, hogy $\cup \mathcal{A}$ legkisebb felső korlát. Mivel $\forall D \in \mathcal{A}$-ra $D \subseteq \cup \mathcal{A}$, ezért nyilván felső korlát. Másrészt ha $D^* \in \mathcal{D}(K)$ tetszőleges felső korlát, akkor $\cup \mathcal{A} \subseteq D^*$ így $\cup \mathcal{A}$ legkisebb felső korlát.

Ez a lemma azt jelenti, hogy ha valamilyen K rendezett testre az összes Dedekind szelet D_a alakú, akkor K-ban igaz a legkisebb felső korlát tétele. Ilyen rendezett test pedig csak $\mathbb{R}$ lehet semmi más.

A valós számok egyik megkonstruálásának a módja, hogy $\mathcal{D}(\mathbb{Q})$-n definiálunk valamilyen módon műveleteket, így felvetődik a kérdés, hogy ezt meg lehet-e csinálni magasabb kofinalitású rendezett testeken. A válasz nem, ugyanis ha K nem archimédeszien rendezett, akkor semmilyen bővítése sem lesz az, míg ha $\mathcal{D}(K)$-n definiálnánk műveleteket, melyek ezzel a rendezéssel rendezett testet adnának a K-beli műveletek megtartásával, akkor olyan rendezett testet kapnánk, amiben teljesül a legkisebb felső korlát tétele tehát izomorf $\mathbb{R}$-rel, vagyis archimédeszi. Az viszont nem kizárt, hogy berakjuk $\mathcal{D}(K)$-t egy bővebb rendezett testbe rendezéstartóan izomorf módon.

Ebből felvetődik egy általános kérdés: Ha adott $(K, <_K)$ rendezett test és $(A, <_A)$ rendezett halmaz melyekre $K \subseteq A$ és a rendezés kiterjed, akkor tudunk-e konstruálni olyan $(L, <_L)$ rendezett testet, melyre $A \subseteq L$, a rendezés megtartja A-n és K-n még a műveleteket is megtartja. A továbbiakban azt fogjuk belátni, hogy ilyen van, sőt bizonyos "szép" tulajdonságok megmaradhatnak.

13.7. Definíció: *Legyen B egy tetszőleges halmaz. B-monomnak nevezzük az olyan $b_1 \dots b_n$ szavakat, ahol $n \in \mathbb{N}$, $b_1, \dots, b_n \in B$. Egy B-monom fokának ezt az n számot mondjuk és 2 monomot azonosítunk, ha azonos a fokuk és a két szó a tagok egy permutációjával egymásba vihető. Az üres szó egy 0 fokú monom és általában 1-gyel jelöljük. Két monom szorzata az egymás után írásuk.*

Világos, hogy az így definiált szorzás nem függ a konkrét szavak választásától, ha azok azonos monomban vannak, továbbá a szorzás asszociatív és kommutatív, az 1 pedig egységeleme. Két monom szorzatának a foka a fokok összege.

13.8. Definíció: *Ha K test és B tetszőleges halmaz, akkor B feletti K polinomnak mondjuk az olyan $\sum_{i=1}^{n} c_i m_i$ összegeket, ahol $n \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_n \in K$, $c_1, \dots, c_n \neq 0$ és $m_1, \dots, m_n$ B-monomok, melyekre $i \neq j$ esetén $m_i \neq m_j$ (az üres összeg 0 lehet). A B feletti K polinomok halmazát $K[B]$-vel jelöljük. Ha $x = \sum_{i=1}^{n} c_i m_i$, $y = \sum_{j=1}^{k} d_j m'_j$, akkor ezek összege $x + y = \sum_{i=1}^{n} c_i m_i + \sum_{j=1}^{k} d_j m'_j$, ha ebben lenne 2 azonos monom, azokat összevonjuk az együtthatók összeadásával, ha az összeg 0, akkor a tagot kitöröljük az összegből. Hasonlóan $xy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} c_i d_j (m_i m'_j)$, és itt is hasonlóan járunk el.*

Könnyen ellenőrizhető, hogy $K[B]$ egy kommutatív gyűrű lesz, $1 \cdot 1$-el mint egységelemmel, sőt K-algebra lesz. Az egyetlen dolog, amit be kell látni, hogy ez nullosztómentes. Ehhez néhány előkészület szükséges.

13.9. Definíció: *Legyen B tetszőleges halmaz, $\prec$ egy rendezés B-n. Az m B-monom rendezett alakja egy $m = b_1 \dots b_n$, ahol $b_1 \preccurlyeq \dots \preccurlyeq b_n$. Nyilván minden monomnak van egy egyértelmű rendezett alakja. Ha m, m' B-monomok $m \neq m'$, $m = b_1 \dots b_n, m' = b'_1 \dots b'_k$ rendezett alakban azt mondjuk, hogy $a <_{lex} b$, vagyis a lexikografikusan megelőzi b-t, ha $n > k$ vagy $n = k$ és ha az i. helyen különböznek először, akkor $b_i \prec b'_i$.*

13.10. Állítás: *Ha B tetszőleges halmaz és $\prec$ rendezés rajta, akkor az előbb definiált $<_{lex}$ reláció rendezés a B-monomokon.*

Bizonyítás: Az irreflexivitás nyilvánvaló, hiszen a $<_{lex}$ rendezés feltétele, hogy a két oldalon különböző monom áljon. A tranzitivitáshoz legyen m, m', m'' B-monomok, melyekre $m <_{lex} m' <_{lex} m''$. Legyen $m = b_1 \dots b_n, m' = b'_1 \dots b'_k, m'' = b''_1 \dots b''_l$ rendezett alakban. A fokszámokra vonatkozóan $n \geq k \geq l$. Ha bármelyik egyenlőtlenség szigorú, akkor $n > l$, így $m <_{lex} m''$ teljesül. Tegyük fel, hogy $n = k = l$. Legyen az i. az első hely, ahol $b_i \neq b'_i$ és j. az első hely, ahol $b'_j \neq b''_j$. Ha $j \leq i$, akkor $\forall p < j$-re $p < i$ is teljesül, így $b_p = b'_p = b''_p$ és $i = j$ esetén $b_j \prec b'_j$ míg $j < i$ esetén $b_j = b'_j$, így $b_j \preccurlyeq b'_j \prec b''_j$, tehát m, m'' először a j. helyen térnek el és ott jó irányba áll az egyenlőtlenség. Ha $i < j$ akkor pedig $\forall p < i$-re $p < j$ is teljesül, így $b_p = b'_p = b''_p$ és $b_i \prec b'_i = b''_i$, tehát m, m'' először az i. helyen térnek el és ott jó irányba áll az egyenlőtlenség. Mindkét esetben azt kapjuk, hogy $m <_{lex} m''$, tehát a tranzitivitás teljesül.

Végül a trichotómiához legyenek m, m' B-monomok $m = b_1 \dots b_n, m' = b'_1 \dots b'_k$ rendezett alakban. Ha $n > k$, akkor $m <_{lex} m'$, ha $n < k$, akkor $m' <_{lex} m$, ha pedig $n = k$ akkor keressük meg a legkisebb olyan i-t melyre $b_i \neq b'_i$ és ez meghatározza a rendezést.

13.11. Lemma: *Ha tetszőleges halmaz és $\prec$ rendezés rajta és m_1, m_2, m'_1, m_2' B-monomok, melyekre $m_1 \leq_{lex} m_1'$ és $m_2 \leq_{lex} m_2'$, akkor $m_1 m_2 \leq_{lex} m_1' m_2'$ és egyenlőség csak akkor fordulhat elő, ha $m_1 = m_1'$, $m_2 = m_2'$.*

Bizonyítás: Legyen $m_1 = b_1 \dots b_n, m_2 = c_1 \dots c_k, m_1' = b'_1 \dots b'_{n'}, m_2{}' = c'_1 \dots c_k{}'$ rendezett alakban. Mivel $m_1 \leq_{lex} m_1{}'$, ezért $n \geq n'$, míg $m_2 \leq_{lex} m_2{}'$ miatt $k \geq k'$. Ez azt jelenti, hogy $n + k \geq n' + k'$. Ha szigorú egyenlőtlenség áll akkor már a fokszám miatt $m_1 m_2 <_{lex} m_1{}' m_2{}'$ teljesül. A továbbiakban tegyük fel, hogy egyenlőség áll, ami csak úgy lehet ha $n = n', k = k'$. Nézzük először azt az esetet, amikor $m_1 <_{lex} m_1{}'$ és $m_2 <_{lex} m_2{}'$. Legyen i az első hely, ahol $b_i \neq b'_i$ és j az első hely ahol $c_j \neq c'_j$. Ekkor persze $b_i \prec b'_i$ és $c_j \prec c'_j$. Ha $b_i \preccurlyeq c_j$, akkor az $m_1 m_2$ rendezett alakjában előrébb szerepel. Az $m_1{}' m_2{}'$ rendezett felírásában az ez előtti tagok ugyanazok, mint az $m_1 m_2$ felírásában. A következő tag az $m_1 m_2$ felírásában b_i, míg az $m_1{}' m_2{}'$ felírásában vagy b'_i vagy az $m_2{}'$ monomjainak egyike, ami szintén b_i-nél nagyobb, hiszen vagy az $m_1 m_2$-ben hátrébb szerepel, vagy c'_j, ami nyilván nagyobb b_i-nél. Így az első eltérés helye alapján $m_1 m_2 <_{lex} m_1{}' m_2{}'$. Ha $c_j \prec b_i$, akkor hasonló a helyzet csak meg kell cserélni a 2 oldalt. Ha $m_1 = m_1{}'$, akkor csak j létezik, ha pedig $m_2 = m_2{}'$, akkor csak i. Ugyanezen okból áll akkor is az egyenlőtlenség. Végül ha $m_1 = m_1{}'$ és $m_2 = m_2{}'$, akkor nyilván $m_1 m_2 = m_1{}' m_2{}'$.

13.12. Tétel: *Ha K test, B tetszőleges halmaz, akkor $K[B]$ nullosztómentes.*

Bizonyítás: Legyen $x, y \in K[B]$, $x, y \neq 0$. Ekkor létezik egy olyan $n, k \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_n, m'_1, \dots, m'_k$ B-monomok és $c_1, \dots, c_n, d_i, \dots, d_k \in K$, hogy $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_k \neq 0$ és $i \neq j$-re $m_i \neq m_j$, $m'_i \neq m'_j$, melyekre $x = \sum_{i=1}^{n} c_i m_i\,, y = \sum_{j=1}^{k} d_j m'_j$. Mivel $x, y \neq 0$, mindkét összegnek legalább 1 tagja van. Vegyünk B halmazon egy tetszőleges $\prec$ rendezést és definiáljuk a monomokon az ebből eredő $<_{lex}$ rendezést. Szabadon átrendezhetjük az összegeket, így feltehető, hogy $m_1 <_{lex} m_2 <_{lex} \dots <_{lex} m_n$ és $m'_1 <_{lex} m'_2 <_{lex} \dots <_{lex} m'_k$ A szorzatuk $xy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} c_i d_j \big(m_i m'_j\big)$. Ha $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$ nem mindkettő 1, akkor az $m_1 \leq_{lex} m_i$ és $m'_1 \leq_{lex} m'_j$-re a 13.11-es lemmát alkalmazva $m_1 m'_1 \leq_{lex} m_i m'_j$ és nem mindkét tag egyenlő, ezért valójában $m_1 m'_1 <_{lex} m_i m'_j$. Ez azt jelenti, hogy az xy összegben az $m_1 m'_1$ először szerepel $c_1 d_1 \neq 0$ együtthatóval, aztán többet nem szerepel, így a teljes összegből nem esik ki, vagyis $xy \neq 0$.

Legyen most $(K, <_K)$ rendezett test és $(A, <_A)$ rendezett halmaz melyekre $K \subseteq A$ és a rendezés kiterjed. Ha $A' = A \setminus K$, akkor $K[A']$ egy integritási tartomány, ami tartalmazza A-t és K része az önmagán vett műveletekkel. A továbbiakban azt fogjuk belátni, hogy $K[A']$ rendezhető úgy, hogy az A-n megtartsuk a $<_A$ rendezést.

13.13. Állítás: *Ha K test, B tetszőleges halmaz $x \notin B$, akkor $K[B \cup \{x\}] \cong K[B][x]$.*

Bizonyítás: Legyen $a \in K[B \cup \{x\}]$. Ekkor $a = \sum_{i=1}^{n} c_i m_i$, ahol $c_i \in K$, m_i pedig $B \cup \{x\}$ monom és teljesülnek a megfelelő feltételek. Az m_i egyértelműen felírható $x^{r_i} l_i$, ahol l_i B monom, tehát $a = \sum_{i=1}^{n} c_i\, l_i x^{r_i}$. Az összeget x hatványai szerint csoportosítva egy $K[B]$ együtthatós polinomját kapjuk x-nek. A másik irányba ha $p \in K[B][x]$, akkor $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, ahol $a_i \in K[B]$. Az a_i tagjaiba a monomok mellé x^i-t írva $B \cup \{x\}$-monomokat kapunk, így megkapjuk p-t mind $K[B \cup \{x\}]$ egy elemét. Világos, hogy ez a két átalakítás egymás megfordítása és megtartják a műveleteket.

13.14. Definíció: *Egy R rendezett integritási tartomány önmagában sűrű, ha $\forall a, b \in R$, $a < b$-hez $\exists x \in R$, hogy $a < x < b$.*

A rendezett testek nyilván önmagában sűrűek, de létezik olyan rendezett integritási tartomány is mint például $\mathbb{Z}$, ami nem önmagában sűrű, mert egymást követő egész számok között nincs másik.

13.15. Állítás: *Ha R rendezett integritási tartomány K-algebra egy K rendezett test felett (K elemeit mint az egységelem skalárszorosait ugyanúgy rendezi), akkor R önmagában sűrű.*

Bizonyítás: Ha $a, b \in R, a < b$, akkor az $\frac{1}{2} \in K$-val $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \in R$ és $b - a > 0, \frac{1}{2} > 0$ miatt $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a > 0$, így $a < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b < b$ is teljesül.

13.16. Lemma: *Ha R rendezett integritási tartomány önmagában sűrű és $D \subseteq R$ szelet, akkor létezik egy rendezés $R[x]$-en, ami kiterjeszti az R rendezését és $a \in R$-re $a < x \Leftrightarrow a \in D$.*

Bizonyítás: Legyen $S=\{(x - a_1) \dots (x - a_n)(b_1 - x) \dots (b_m - x) \colon m, n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in D, b_1, \dots, b_m \in R \setminus D\}$. Itt megengedjük azt, hogy m, n 0-k legyenek és csak az egyik fajta tagból legyen a szorzatban, sőt ha mindkettő 0, akkor az üres szorzat $1 \in K$. Az S egy polinomhalmaz és definíciójából könnyen látszik, hogy szorzásra zárt.

Legyen $P \subseteq R[x]$, melyre $P=\{\sum_{i=1}^{n} r_i s_i p_i^2, r_1, \dots, r_n \in R, r_1, \dots, r_n > 0, s_1, \dots, s_n \in S, p_1, \dots, p_n \in R[x]\}$. Azt fogjuk belátni, hogy P pozitivitástartomány $R[x]$-ben. Nyilván $0 = 1 \cdot 1 \cdot 0^2 \in P$. Ha $A, B \in P$, akkor $A = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i p_i^2$, $B = \sum_{j=1}^{m} t_j u_j q_j^2$, ahol $r_1, \dots, r_n, t_1, \dots, t_m \in R, r_1, \dots, r_n, t_1, \dots, t_m, > 0$, $s_1, \dots, s_n, u_1, \dots, u_m \in S$ és $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m \in R[x]$. Ekkor $A + B = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i p_i^2 + \sum_{j=1}^{m} t_j u_j q_j^2 \in P$ és $AB = (\sum_{i=1}^{n} r_i s_i p_i^2)(\sum_{j=1}^{m} t_j u_j q_j^2) =$
$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_i s_i p_i^2 t_j u_j q_j^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (r_i t_j)(s_i u_j)(p_i q_j)^2 \in P$.

Az utolsó tulajdonsághoz legyen $A \in R[x]$ olyan, hogy $A, -A \in P$. Legyen $A = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i p_i^2$, $-A = \sum_{j=1}^{m} t_j u_j q_j^2$, ahol $r_1, \dots, r_n, t_1, \dots, t_m \in R, r_1, \dots, r_n, t_1, \dots, t_m, > 0$, $s_1, \dots, s_n, u_1, \dots, u_m \in S$ és $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m \in R[x]$. Legyen tetszőleges $1 \le i \le n$-re $s_i = (x - a_{i,1}) \dots (x - a_{i,k_i})(b_{i,1} - x) \dots (b_{i,l_i} - x)$ és $1 \le i \le m$-re $u_i = (x - a'_{i,1}) \dots (x - a'_{i,k'_i})(b'_{i,1} - x) \dots (b'_{i,l'_i} - x)$. Ekkor persze minden $a_{i,j}$ és $a'_{i,j}$ amely értelmezett, az D-ben van, a$b_{i,j}$ és $b'_{i,j}$-k pedig $R \setminus D$-ben. Legyen $a = \max a_{i,j}$,

$b = \min b_{i,j}$. Mivel $a \in D$ és $b \in R \setminus D$, ezért $a < b$. Legyen $d = \max\{\deg(p_1), \dots, \deg(p_n), \deg(q_1), \deg(q_n)\}$. Mivel R önmagában sűrű, ezért választhatunk $c_1 \in R$-et, melyre $a < c_1 < b$, $c_2 \in R$-et, hogy $c_1 < c_2 < b$ és így tovább egészen c_{d+1}-ig. Ekkor $c_1, \dots, c_{d+1}$ páronként különbözőek és $1 \le j \le d+1$-re $a < c_j < b$. Külön esetet képez, ha a, b valamelyike nem létezik, mert a halmaz, aminek maximumát vagy minimumát nézzük üres. Ekkor is hasonló módon járunk el. Ha mondjuk b nem létezik, akkor $c_1 = a+1, \dots, c_{d+1} = a+d+1$ jó lesz, ezek is páronként különbözőek és a-nál nagyobbak. Tetszőleges $1 \le j \le d+1$-re és $1 \le i \le n$-re $(c_j - a_{i,1}), \dots, (c_j - a_{i,k_i}), (b_{i,1} - c_j), \dots, (b_{i,l_i} - c_j) > 0$, így $s_i(c_j) = (c_j - a_{i,1}) \dots (c_j - a_{i,k_i})(b_{i,1} - c_j) \dots (b_{i,l_i} - c_j) > 0$, és ugyanígy $1 \le i \le m$-re $u_i(c_j) > 0$. Mivel $0 = A + (-A) = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i p_i^2 + \sum_{i=1}^{m} t_i u_i q_i^2$, ezért minden $1 \le j \le d+1$-re is $0 = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i(c_j) p_i^2(c_j) + \sum_{i=1}^{m} t_i u_i(c_j) q_i^2(c_j)$. Ennek az összegnek minden tagja nemnegatív, így az összeg csak akkor lehet 0, ha minden tagja 0. Ez azt jelenti, hogy $\forall i$-re $r_i s_i(c_j) p_i^2(c_j) = 0$, de $r_i s_i(c_j) > 0$, így $p_i^2(c_j) = 0$, azaz $p_i(c_j) = 0$ és ugyanígy $\forall i$-re $t_i u_i(c_j) q_i^2(c_j) = 0$, de $t_i u_i(c_j) > 0$, így $q_i^2(c_j) = 0$, azaz $q_i(c_j) = 0$. Ez minden j-re igaz, azaz egy rögzített p_i a $c_1, \dots, c_{d+1}$ helyeken 0, de p_i legfeljebb d fokú polinom csak úgy lehet $d+1$ helyen 0, ha azonosan 0. Ekkor minden p_i, q_i azonosan 0, tehát $A = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i p_i^2 = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i 0^2 = 0$. Ezzel beláttuk, hogy P valóban pozitivitástartomány.

Ha $A \in \mathrm{SQ}(R[x])$, akkor $A = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot 1 \cdot p_i^2 \in P$, így $\mathrm{SQ}(R[x]) \subseteq P$ is teljesül. A 11.10. lemma alapján, ekkor van egy $P^* \subseteq R[x]$ teljes pozitivitástartomány, hogy $P \subseteq P^*$. Vegyük az $R[x]$-en a P^* által meghatározott rendezést. Ha $a, b \in R, a < b$, akkor $b - a > 0$, így $b - a = (b-a) \cdot 1 \cdot 1^2 \in P \subseteq P^*$, így az $R[x]$ -beli rendezésen is $a < b$, tehát a megszorított rendezés megegyezik. Ha $a \in D$, akkor $x - a \in S$, így $x - a = 1 \cdot (x-a) \cdot 1^2 \in P \subseteq P^*$, így $a < x$ az $R[x]$ rendezésében, míg ha $b \in R \setminus D$, akkor $b - x \in S$, így $b - x = 1 \cdot (b-x) \cdot 1^2 \in P \subseteq P^*$, így $b > x$ az $R[x]$ rendezésében, azaz az utolsó feltétel is teljesül.

13.17. Tétel: *Ha $(K, <_K)$ rendezett test, $(A, <_A)$ rendezett halmaz, melyre $K \subseteq A$ és $<_A|_K = <_K$, akkor az $A' = A \setminus K$-ra létezik a $K[A']$-n egy olyan $<_{K[A']}$ rendezés, hogy $(K[A'], <_{K[A']})$ rendezett integritási tartomány és $<_{K[A']}|_A = <_A$.*

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{A} = \{(B, <_{K[B]}) : B \subseteq A', (K[B], <_{K[B]}) \text{ rendezett int. tartomány}, <_{K[B]}|_{K \cup B} = <_A|_{K \cup B}\}$. Ha $(B_1, <_{K[B_1]}), (B_2, <_{K[B_2]}) \in \mathcal{A}$, akkor $(B_1, <_{K[B_1]}) \preccurlyeq (B_2, <_{K[B_2]})$, ha $B_1 \subseteq B_2$ és $<_{K[B_2]}|_{B_1} = <_{K[B_1]}$. Ez nyilván egy részbenrendezést ad $\mathcal{A}$-n azt kell belátni, hogy minden $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ láncnak van felső korlátja. Ha $\mathcal{L} = \emptyset$, akkor $(\emptyset, <_K) \in \mathcal{A}$ nyilván jó lesz. Tegyük fel, hogy $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Ekkor a felső korlátban a halmaz az $\mathcal{L}$-beli baloldalon szereplő halmazok uniója, ami most a jelölésünkben $\cup \mathcal{L}$ lesz. Azt fogjuk először belátni, hogy $K[\cup \mathcal{L}] = \bigcup_{B \in \mathcal{L}} K[B]$. Az egyik irányú tartalmazás világos, ugyanis ha $B \in \mathcal{L}$, akkor $B \subseteq \cup \mathcal{L}$, így $K[B] \subseteq K[\cup \mathcal{L}]$, tehát ezek uniója $\bigcup_{B \in \mathcal{L}} K[B] \subseteq K[\cup \mathcal{L}]$. A másik irányba legyen $x \in K[\cup \mathcal{L}]$, ekkor $x = \sum_{i=1}^{n} c_i m_i$, ahol $n \in \mathbb{N}$, $c_i \in K$ és m_i pedig $\cup \mathcal{L}$-monom minden i-re. Legyen $m_i = b_{i,1} \dots b_{i,k_i}$, ahol $b_{i,j} \in\cup \mathcal{L}$ mindenhol, ahol értelmes. Válasszunk olyan $B_{i,j} \in \mathcal{L}$-eket, melyekre $b_{i,j} \in B_{i,j}$. Mivel $\mathcal{L}$ lánc, ezért a véges sok $B_{i,j}$ között van egy tartalmazásra nézve legnagyobb, ez legyen $B \in \mathcal{L}$. Ekkor minden i,j-re $b_{i,j} \in B$, tehát m_i B-monom, azaz $x \in K[B] \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{L}} K[B]$. Mivel $x \in K[\cup \mathcal{L}]$ tetszőleges volt, ezért $K[\cup \mathcal{L}] \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{L}} K[B]$, vagyis a kétriányú tartalmazás miatt a két halmaz egyenlő. A $K[\cup \mathcal{L}]$-en mint unióhalmazon úgy definiáljuk a $<_{K[\cup\mathcal{L}]}$ rendezést, hogy $x,y \in K[\cup \mathcal{L}]$-re $x <_{K[\cup\mathcal{L}]} y$, ha $\exists (B,<_B) \in \mathcal{L}$, hogy $x,y \in K[B]$ és $x <_{K[B]} y$. A 12.7. tétel bizonyításának megfelelő részével analóg módon belátható, hogy $\left(K[\cup \mathcal{L}],<_{K[\cup\mathcal{L}]}\right)$ rendezett integritási tartomány és minden $(B,<_B) \in \mathcal{L}$-re $<_{K[\cup\mathcal{L}]} |_{K[B]} =<_{K[B]}$. Az egyetlen dolog, ami szükséges még, hogy $\left(\cup \mathcal{L},<_{K[\cup\mathcal{L}]}\right) \in \mathcal{A}$ legyen, hogy az utolsó feltétel is teljesüljön. Vegyünk $x,y \in K \cup [\cup \mathcal{L}] \subseteq K[\cup \mathcal{L}] = \bigcup_{B\in\mathcal{L}} K[B]$-t. Legyen $B_1, B_2 \in \mathcal{L}$, melyekre $x \in B_1, y \in B_2$. Mivel $\mathcal{L}$ lánc, ezért $\left(B_1,<_{K[B_1]}\right) \preccurlyeq \left(B_2,<_{K[B_2]}\right)$ vagy $\left(B_2,<_{K[B_2]}\right) \preccurlyeq \left(B_1,<_{K[B_1]}\right)$ teljesül. Szimmetria miatt feltehető, hogy az előbbi, azaz $x,y \in B_2$, így $\left(B_2,<_{K[B_2]}\right) \in \mathcal{A}$ tulajdonsága miatt $x <_A y \Leftrightarrow x <_{K[B_2]} y \Rightarrow x <_{K[\cup\mathcal{L}]} y$, azaz $<_A |_{K\cup[\cup\mathcal{L}]} \subseteq<_{K[\cup\mathcal{L}]} |_{K\cup[\cup\mathcal{L}]}$ és mindkettő rendezés a $K \cup [\cup \mathcal{L}]$ halmazon, tehát megegyeznek. Ez azt jelenti, hogy $\left(\cup \mathcal{L},<_{K[\cup\mathcal{L}]}\right) \in \mathcal{A}$ jó felső korlát $\mathcal{L}$-re.

A Zorn-lemma miatt $\exists\left(B^*,<_{K[B^*]}\right) \in \mathcal{A}$ maximális elem. Ha $B^* = A'$, akkor $<_{K[B^*]}$ a feltételeknek megfelelő rendezés lesz $K[A']$-n vagyis az állítást beláttuk. Tegyük fel, hogy $B^* \neq A'$ és legyen $x \in A' \setminus B^*$. A 13.13. állítás alapján $K[B^* \cup \{x\}] \cong K[B^*][x]$. Legyen $D = \left\{a \in K[B^*]: \exists b \in K \cup B^*, a \leq_{K[B^*]} b <_A x\right\} \subseteq K[B^*]$. Ha $a \in D, a' <_{K[B^*]} a$, akkor ugyanaz a b jó lesz hozzá, így $a' \in D$, tehát D valóban szelet. Mivel $K[B^*]$ K-algebra, a 13.15. állítás alapján önmagában sűrű, így $K[B^*]$-ra és D-re alkalmazhatjuk a 13.16. lemmát, miszerint van egy olyan $<_{K[B^*\cup\{x\}]}$ rendezés $K[B^* \cup \{x\}]$-en, amelyre $<_{K[B^*\cup\{x\}]} |_{K[B^*]} =<_{K[B^*]}$ és $a \in K[B^*]$-ra $a <_{K[B^*\cup\{x\}]} x \Leftrightarrow a \in D$. Azt kell belátni. hogy $<_{K[B^*\cup\{x\}]} |_{K\cup B^*\cup\{x\}} =<_A |_{K\cup B^*\cup\{x\}}$. A két rendezés $K \cup B^*$-on megegyezik, így azt kel csak belátni, hogy x-et ugyanúgy rendezik a $K \cup B^*$ elemeihez képest. Vegyünk egy $a \in K \cup B^*$-ot. Ha $a <_A x$, akkor $a \leq_{K[B^*]} a \leq_A x$ miatt $a \in D$ és így $<_{K[B^*\cup\{x\}]}$ választása alapján $a <_{K[B^*\cup\{x\}]} x$, ha pedig $a >_A x$, akkor minden $b \in K \cup B^*$-ra $a \leq_{K[B^*]} b \Rightarrow x <_A a \leq_A b$, tehát $b <_a x$ nem teljesülhet, így $a \notin D$, vagyis $a >_{K[B^*\cup\{x\}]} x$. Mivel ez a feltétel is teljesül, ez azt jelenti, hogy $\left(B^* \cup \{x\},<_{K[B^*\cup\{x\}]}\right) \in \mathcal{A}$ és persze $\left(B^*,<_{K[B^*]}\right) \prec \left(B^* \cup \{x\},<_{K[B^*\cup\{x\}]}\right)$, ami ellent mond B^* maximalitásának, így csak a $B^* = A'$ eset állhat fenn.

Ezzel az $(A,<_A)$ rendezett halmazt beágyaztuk egy rendezett integritási tartományba. Innen már rendezett testbe sem lesz nehéz.

13.18. Tétel: $(K,<_K)$ *rendezett test,* $(A,<_A)$ *rendezett halmaz, melyre* $K \subseteq A$ *és* $<_A |_K =<_K$*, akkor létezik egy* $(L,<_L)$ *rendezett test, hogy* $K \leq L$ *résztest,* $A \subseteq L$ *és* $<_L |_A =<_A$.

Bizonyítás: Ha $A' = A \setminus K$, akkor a 13.17. tétel alapján $K[A']$-n van egy $<_{K[A']}$ rendezés, amellyel $K[A']$ rendezett integritási tartomány és az A-ra vett megszorítás $<_A$. Az 5.8. tétel szerint az $L = Q(K[A'])$ hányadostest rendezhető a $<_{K[A']}$ rendezés kiterjesztésével, így az egy megfelelő rendezett test lesz.

Nézzük most megint a Dedekind szeletek esetét. Ha K rendezett test, akkor $K \subseteq \mathcal{D}(K)$ felfogható úgy, mint a D_a alakú Dedekind szeletek halmaza, amelyen ugyanaz a rendezés. Ezek szerint $K[\mathcal{D}(K) \setminus K]$ rendezhető rendezett integritási tartományként és ez tovább vihető a $Q(K[\mathcal{D}(K) \setminus K])$ rendezett test egy rendezésévé, ami kiterjed. Nézzük meg ennek a tulajdonságait.

13.19. Állítás: *Ha K rendezett test, akkor $K \subseteq \mathcal{D}(K)$ kétoldalról kofinális (azaz $\mathcal{D}(K)$minden eleme felett és alatt is van K-nak eleme).*

Bizonyítás: Vegyünk egy tetszőleges $D \in \mathcal{D}(K)$ Dedekind szeletet. Mivel $D \neq K$, ezért $\exists a \in K$, hogy $a \notin D$. Ha $b \in K$-ra $b > a$, akkor b nem lehet D-ben, mert ha benne lenne, akkor a is benne lenne, azaz $\forall b \in D$-re $b < a$, vagyis $b \in D_a$. Ez azt jelenti, hogy $D \subseteq D_a$, vagyis K valóban kofinális.

A másik irányba, ha $D \in \mathcal{D}(K)$, akkor $D \neq \emptyset$, vehetünk egy $a \in D$-t. Mivel D szelet, ezért minden $b < a$-ra is $b \in D$, tehát $D_a \subseteq D$ alatta van.

Felvetődik a kérdés, hogy ez a tulajdonság tovább meg-e $Q(K[\mathcal{D}(K) / K])$-ra is.

13.20. Lemma: *Legyen $(K, <_K)$ rendezett test, $(A, <_A)$ rendezett halmaz, melyre $K \subseteq A$ és $<_A |_K =<_K$. Ha $K \subseteq A$ kétoldalról kofinális, akkor $K[A']$ tetszőleges kiterjesztett rendezésére, ($A' = A \setminus K$) amellyel rendezett integritási tartományt ad $K \subseteq K[A']$ kétoldalról kofinális.*

Bizonyítás: Legyen $x \in K[A']$. Ekkor $x = \sum_{i=1}^{n} c_i m_i$, ahol $n \in \mathbb{N}$, $c_i \in K$ és m_i A'-monom minden i-re. Írjuk fel m_i-t $m_i = a_{i,1} \dots a_{i,k_i}$ alakban, melyekre $a_{i,j} \in A'$, ahol értelmes. Mivel $K \subseteq A$ kétoldalról kofinális, minden $a_{i,j}$-hez választhatunk $r_{i,j} \in K$-t, hogy $-r_{i,j} < a_{i,j} < r_{i,j}$ A-ban, így $|a_{i,j}| < r_{i,j}$ $K[A']$-ben. Ekkor $|m_i| = |a_{i,1}| \dots |a_{i,k_i}| < r_{i,1} \dots r_{i,k_i} = s_i \in K$ és így $|x| = |\sum_{i=1}^{n} c_i m_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i||m_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i| s_i = t \in K$, vagyis $-t \leq x \leq t$ $K[A']$-ben. Mivel $x \in K[A']$ tetszőlegesre találtunk K-beli alsó és felső korlátot, ezért $K \subseteq K[A']$ kétoldalról kofinális.

Ez a lépés még működik általánosan is. A következő lépés a hányadostest képzése, és itt sajnos a $K \subseteq Q(K[\mathcal{D}(K) / K])$ megszűnhet kofinálisnak lenni. Ennek az oka, hogy a $K[\mathcal{D}(K) / K]$-ban lehetnek a 0-hoz nagyon közeli elemek is, amelyek reciproka a hányadostestben nagyon nagy lesz. A következőkben megnézzük, hogy ezt hogyan tudjuk kiküszöbölni.

13.21. Definíció: *Ha K rendezett test, R rendezett integritási tartomány, melyekre* $K \subseteq R$ *(ekkor persze R egy K algebra), akkor azt mondjuk, hogy a K a 0 körül sűrű R-ben, ha* $\forall x \in R, x > 0$*-hoz* $\exists a \in K$*, hogy* $0 < a \leq x$.

13.22. Definíció: *Ha K rendezett test, R rendezett integritási tartomány, melyekre* $K \subseteq R$ *kofinális (itt ekvivalens azzal, hogy kétoldalról kofinális), akkor* $I_K(R)$*-el jelöljük és az R K szerinti nullideáljának nevezzük az* $\{x \in R | \forall a \in K, a > 0\text{-ra } |x| < a\}$ *halmazt.*

13.23.Állítás: *Ha K rendezett test, R rendezett integritási tartomány, melyekre* $K \subseteq R$ *kofinális, akkor* $I_K(R) \lhd R$ *valóban ideál.*

Bizonyítás: Ha $x, y \in I_K(R)$, akkor minden $a \in K, a > 0$-ra $|x|, |y| < \frac{a}{2} \in K$, így $|x + y| \leq |x| + |y| < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$, tehát $x + y \in I_K(R)$. A $0 \in I_K(R)$ nyilván teljesül és ha $x \in I_K(R)$, akkor $|-x| = |x|$ miatt $-x \in I_K(R)$. Legyen $x \in I_K(R), y \in R$. Mivel $K \subseteq R$ kofinális, ezért választhatunk egy $b \in K$-t, melyre $b > |y|$. Ekkor persze $b > 0$ is teljesül. Ha $a \in K, a > 0$ tetszőleges, akkor $\frac{a}{b} \in K, \frac{a}{b} > 0$, így $|x| < \frac{a}{b}$, vagyis $|xy| = |x||y| < \frac{a}{b} b = a$, tehát $xy \in I_K(R)$. Ezzel minden tulajdonságot beláttunk, vagyis $I_K(R) \lhd R$ ideál.

A definíciókból látható, hogy ha $K \subseteq R$ kofinális, akkor a 0 körül sűrű akkor és csak akkor, ha $I_K(R) = \{0\}$.

13.24.Állítás: *Ha K rendezett test, R rendezett integritási tartomány, melyekre* $K \subseteq R$ *kofinális, akkor* $I_K(R) \lhd R$ *prímideál.*

Bizonyítás: Azt látjuk be, hogy ha $x, y \in R$, $x, y \notin I_K(R)$, akkor a szorzatuk sincs benne. Az $x, y \notin I_K(R)$ azt jelenti, hogy $\exists a, b \in K, a, b > 0$, hogy $|x| \geq a, |y| \geq b$. Ekkor $ab > 0$ és $|xy| = |x||y| \geq ab$, így $xy \notin I_K(R)$.

Ez az állítás azt jelenti, hogy az ${}^{R}/_{I_K(R)}$ faktorgyűrű nullosztómentes. Nyilvánvaló, hogy emellett kommutatív és egységelemes is, tehát ${}^{R}/_{I_K(R)}$ integritási tartomány. Az R rendezéséből a faktorgyűrűnek is előállítható egy rendezése.

13.25.Definíció: *Ha K rendezett test, R rendezett integritási tartomány, melyekre* $K \subseteq R$ *kofinális, akkor* $\bar{x}, \bar{y} \in {}^{R}/_{I_K(R)}$*-re tetszőleges* $x, y \in R$ *mellékosztály reprezentánsokat választva azt mondjuk, hogy* $\bar{x} < \bar{y}$*, ha* $x < y$ *és* $\bar{x} \neq \bar{y}$.

13.26. Állítás: *Az előző pontban definiált reláció nem függ a reprezentánsok választásától.*

Bizonyítás: Legyen $x, x' \in R$ az $\bar{x}$ reprezentánsa és $y, y' \in R$ az $\bar{y}$ reprezentánsa. Mivel ugyanazt a mellékosztályt reprezentálják, ezért $x - x', y - y' \in I_K(R)$. Ha az x, y reprezentánsokat választva azt kapjuk, hogy $\bar{x} < \bar{y}$, akkor $x < y$ és $\bar{x} \neq \bar{y}$, vagyis $y - x > 0$ és $y - x \notin I_K(R)$. Ekkor valamely $a \in K$-ra $0 < a \leq y - x$ és $(y - y') + (x' - x) \in I_K(R)$ miatt$(y - y') + (x' - x) < a \leq y - x$, tehát $0 < (y - x) - \left((y - y') + (x' - x)\right) = y - x - y + y' - x' + x = y' - x'$, azaz $x' < y'$ és persze az $\bar{x} \neq \bar{y}$ nem függ a reprezentánsoktól, így az x', y' választásával is azt kapjuk, hogy $\bar{x} < \bar{y}$, tehát a reláció nem függ a reprezentánsoktól.

13.27. Állítás: *Ha K rendezett test, R rendezett integritási tartomány, melyekre $K \subseteq R$ kofinális, akkor az $R/_{I_K(R)}$-en definiált reláció rendezés, mellyel $R/_{I_K(R)}$ rendezett integritási tartomány.*

Bizonyítás: Az irreflexivitás nyilvánvaló, ugyanis ha $\bar{x}, \bar{y} \in R/_{I_K(R)}$-re $\bar{x} < \bar{y}$, akkor a definícióból adódóan $\bar{x} \neq \bar{y}$, tehát minden $\bar{x} \in R/_{I_K(R)}$-re $\bar{x} \nless \bar{x}$ teljesül. A tranzitivitáshoz vegyünk $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in R/_{I_K(R)}$, melyekre $\bar{x} < \bar{y} < \bar{z}$ és $x, y, z \in R$ legyenek a reprezentánsaik. Ekkor persze $x < y < z$ miatt nyilván $x < z$. A rendezés fennállásához az kell még, hogy $\bar{x} \neq \bar{z}$. Mivel $\bar{y} \neq \bar{x}$ és $\bar{z} \neq \bar{y}$, ezért $y - x, z - y \notin I_K(R)$-nek és $y - x, z - y > 0$, ezért van olyan $a, b \in K$, hogy $0 < a \leq y - x$ és $0 < b \leq z - y$. Ekkor $0<a+b\leq (y - x) + (z - y) = z - x$, így $z - x \notin I_K(R)$, vagyis $\bar{x} \neq \bar{z}$. Ebből már következik, hogy $\bar{x} < \bar{z}$. Végül a trichotómiához legyen $\bar{x}, \bar{y} \in R/_{I_K(R)}$, $\bar{x} \neq \bar{y}$ és válasszunk $x, y \in R$ reprezentánsokat. Ekkor az $x < y, y < x$ közül valamelyik teljesül, így $\bar{x} < \bar{y}$ vagy $\bar{y} < \bar{x}$ is.

A rendezés és a műveletek kapcsolatához legyen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in R/_{I_K(R)}$, melyekre $\bar{x} < \bar{y}$. Vegyünk $x, y, z \in R$ reprezentánsokat. Ekkor $x + z, y + z$ jó reprezentánsok lesznek $\bar{x} + \bar{z}, \bar{y} + \bar{z}$-hoz. Mivel $x < y$, ezért $x + z < y + z$, másrészt $\bar{x} \neq \bar{y}$ miatt $(y + z) - (x + z) = y - x \notin I_K(R)$, tehát $\bar{x} + \bar{z} \neq \bar{y} + \bar{z}$, így $\bar{x} + \bar{z} < \bar{y} + \bar{z}$. A szorzási szabályhoz vegyünk $\bar{x}, \bar{y} \in R/_{I_K(R)}$, $\bar{x}, \bar{y} > 0$-t és hozzájuk $x, y \in R$ reprezentánsokat. Ekkor xy jó reprezentánsa lesz $\bar{x}\bar{y}$-nák és $xy > 0$, továbbá az $R/_{I_K(R)}$-beli nullosztómentesség miatt $\bar{x}\bar{y} \neq 0$, így $\bar{x}\bar{y} > 0$ is teljesül.

13.28.Állítás: *Ha K rendezett test, R rendezett integritási tartomány, melyekre $K \subseteq R$ kofinális, akkor az előbb definiált rendezéssel az $R \to R/_{I_K(R)}$ kanonikus leképezés gyengén rendezéstartó.*

Bizonyítás: Vegyünk $x, y \in R$-et melyekre $x \leq y$. Ha $x = y$, akkor nyilván $x + I_K(R) = y + I_K(R)$. Ha $x < y$, akkor 2 eset van. Az egyikben $x + I_K(R) = y + I_K(R)$, a másikban $x + I_K(R) \neq y + I_K(R)$, és az $x < y$ reprezentánsok miatt ekkor $x + I_K(R) < y + I_K(R)$. Minden esetben $x + I_K(R) \leq y + I_K(R)$, tehát a gyenge rendezéstartás teljesül.

Ez a kanonikus leképezés általában nem lesz rendezéstartó, mert $I_K(R) \neq \{0\}$ esetén nem is injektív. $I_K(R) = \{0\}$ esetén pedig nyilván rendezéstartó izomorfizmus.

13.29. Állítás: *Ha K rendezett test, R rendezett integritási tartomány, melyekre $K \subseteq R$ kofinális, akkor a $K \to R \to {}^{R}/_{I_K(R)}$ kanonikus leképezés injektív, és így az előző állítás alapján rendezéstartó is.*

Bizonyítás: Ha $a, b \in K$, $a \neq b$, akkor $0 < |a - b| = |a - b|$ és $|a - b| \in K$, így $a - b \notin I_K(R)$, vagyis $a + I_K(R) \neq b + I_K(R)$.

Ez a leképezés K-ról egy rendezéstartó homomorfizmus, így a képe rendezéstartóan izomorf K-val. A továbbiakban tekinthetjük úgy, hogy $K \subseteq {}^{R}/_{I_K(R)}$.

13.30. Lemma: *Ha K rendezett test, R rendezett integritási tartomány, melyekre $K \subseteq R$ kofinális, akkor a $K \subseteq {}^{R}/_{I_K(R)}$ kofinális és a 0 körül sűrű.*

Bizonyítás: Ha $\bar{x} \in {}^{R}/_{I_K(R)}$, akkor válasszunk egy $x \in R$ reprezentánst hozzá. Mivel $K \subseteq R$ kofinális, ezért választható $a \in K$, amelyre $x \leq a$, így a gyenge rendezéstartás miatt $\bar{x} = x + I_K(R) \leq a + I_K(R)$, tehát a kép valóban kofinális.

A 0 körüli sűrűséghez vegyünk $\bar{x} \in {}^{R}/_{I_K(R)}$, melyre $\bar{x} > 0$ és válasszunk egy $x \in R$ reprezentánst. Mivel $\bar{x} \neq 0$, ezért $x \notin I_K(R)$, és $x > 0$, ezért van olyan $a \in K$, hogy $0 < a \leq x$. A kanonikus leképezés gyengén rendezéstartó és a K-n rendezéstartó, ezért $0 < a + I_K(R) \leq x + I_K(R) = \bar{x}$, tehát a kép a 0 körül sűrű.

Ez alapján természetes gondolat, hogy ha K rendezett test, A rendezett halmaz, melyre $K \subseteq A$ ugyanazzal a rendezéssel és $K \subseteq A$ kétoldalról kofinális, akkor egy olyan rendezett integritási tartományba ágyazzuk be, ahol a K kofinális és 0 körül sűrű. Erre egy jó jelöltnek tűnik a ${}^{K[A']}/_{I_K(K[A'])}$, ahol $A' = A \setminus K$ és $K[A']$-n egy kiterjesztett rendezést veszünk (amiről beláttuk, hogy létezik és a 13.20. lemma alapján K kofinális benne). Az egyetlen probléma ami jelentkezhet, hogy az $A \to K[A'] \to {}^{K[A']}/_{I_K(K[A'])}$ kanonikus leképezés nem lesz injektív. Ez viszont az $A = \mathcal{D}(K)$ esetben nem fordulhat elő.

13.31. Állítás: *Ha K rendezett test, akkor $K \subseteq \mathcal{D}(K)$ sűrű.*

Bizonyítás: Vegyünk $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(K)$ Dedekind szeleteket, melyekre $D_1 \subset D_2$. Vegyünk egy $a \in D_2 \setminus D_1$ elemet. Mivel D_2 Dedekind-szelet, az a nem lehet legnagyobb eleme, így van $b \in D_2$, hogy $b > a$. Ekkor a D_b jó lesz köztes elemnek. Ha $x \in D_1$, akkor $x \neq a$ és $x > a$ sem lehet, mert az is azt jelentené, hogy $a \in D_1$, így $x < a < b$, vagyis $x \in D_b$, tehát $D_1 \subseteq D_b$ teljesül. Emellett $a \notin D_1, a \in D_b$, így a $D_1 \subset D_b$ tartalmazás valódi. Mivel $b \in D_2$, ezért minden $x < b$-re is $x \in D_2$, tehát $D_b \subseteq D_2$ és $b \notin D_b, b \in D_2$ miatt a $D_b \subset D_2$ tartalmazás is valódi, így D_b valóban jó.

13.32. Állítás: *Ha $(K, <_K)$ rendezett test, $(A, <_A)$ rendezett halmaz, $K \subseteq A$ úgy hogy $<_A|_K = <_K$ és $K \subseteq A$ kofinális és sűrű. Akkor az $A' = A \setminus K$-ra a $K[A']$-t tetszőlegesen rendezve az eredeti rendezések kiterjesztésével az $A \to K[A'] \to K[A'] / I_K(K[A'])$ leképezés injektív.*

Bizonyítás: Legyen $a, b \in A$, amelyekre $a \neq b$. Szimmetria miatt feltehető, hogy $a <_A b$. Mivel a $K \subseteq A$ sűrű, ezért $\exists c \in K$, hogy $a <_A c <_A b$ és $d \in K$, hogy $c <_A d <_A b$. Ekkor az $a < c < d < b$ egyenlőtlenséglánc $K[A']$-ben is igaz, így $b - a = (c - a) + (d - c) + (b - d) > d - c > 0$ és $d - c \in K$, így $b - a \notin I_K(K[A'])$, azaz $a + I_K(K[A']) \neq b + I_K(K[A'])$, tehát a leképezés valóban injektív.

Az összes eddigit összefoglalva azt kapjuk, hogy $\mathcal{D}(K)$ beleképezhető injektíven rendezés és művelettartóan a $K[\mathcal{D}(K) \setminus K] / I_K(K[\mathcal{D}(K) \setminus K])$ rendezett integritási tartományba úgy, hogy a K képe a 0 körül sűrű legyen. Fontos megjegyezni, hogy szó sincs arról, hogy a K képe sűrű lenne ebben a rendezett integritási tartományban. Tegyük fel, hogy K nem archimédeszien rendezett test és $D = \{x \in K | \exists m \in Z_K, m \geq x\}$. Ez a D nyilván szelet, $0 \in D$, így $D \neq \emptyset$ és $D \neq K$, mert különben K archimédeszi lenne és persze legnagyobb eleme sincs, mert ha $a \in D$, akkor $a \leq m$ valamely $m \in Z_k$-ra, így $a + 1 \leq m + 1$, tehát $a + 1 \in D$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy $D \in \mathcal{D}(K)$ Dedekind-szelet. Vegyünk a $K[\mathcal{D}(K) \setminus K]$-nak egy tetszőleges rendezését és legyen $x \in K$. Ha $x \in D$, akkor nyilván $x < D$ $K[\mathcal{D}(K) \setminus K]$-ban, míg ha $x \notin D$, akkor $x - 1 \notin D$, tehát $x - 1 > D$, vagyis $x > D + 1$ $K[\mathcal{D}(K) \setminus K]$-ban. Ez azt jelenti, hogy D és $D + 1$ között nincsen K-beli, de nyilván $D + 1 - D = 1 \notin I_K(K[\mathcal{D}(K) \setminus K])$, így $D + 1 + I_K(K[\mathcal{D}(K) \setminus K]) \neq D + I_K(K[\mathcal{D}(K) \setminus K])$, ezért $D + 1 + I_K(K[\mathcal{D}(K) \setminus K]) < D + I_K(K[\mathcal{D}(K) \setminus K])$, de nincs köztük K-beli elem $K[\mathcal{D}(K) \setminus K] / I_K(K[\mathcal{D}(K) \setminus K])$-ban.

Ettől függetlenül ez az állítás zöld utat ad a befejezéshez.

13.33. Állítás: *Ha K rendezett test, R rendezett integritási tartomány, melyekre $K \subseteq R$ kofinális és a 0 körül sűrű, akkor a hányadostestére is $K \subseteq Q(R)$ kofinális és a 0 körül sűrű.*

Bizonyítás: Vegyünk egy $z \in Q(R)$ tetszőleges elemet és írjuk fel $z = \frac{x}{y}$ alakbak, ahol $x, y \in R, y > 0$. Mivel K kofinális és 0 körül sűrű R-ben, ezért vehetünk egy $a \in K$-t, melyre $a \geq x$ ($a > 0$ is feltehető) és $b \in K$-t, melyre $0 < b \leq y$. Ekkor $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{y}$, így az $\frac{a}{b} \in K$-ra $\frac{a}{b} \geq \frac{a}{y} \geq \frac{x}{y} = z$. Mivel $z \in Q(R)$ tetszőleges volt, a K kofinális $Q(R)$-ben.

A 0 körül sűrűséghez legyen $z \in Q(R), z > 0$, ekkor felírható $z = \frac{x}{y}$ alakban, ahol $x, y \in R$, $x, y > 0$. Mivel K kofinális és 0 körül sűrű R-ben, ezért vehetünk egy $b \in K$-t, melyre $b \geq y$ és $a \in K$-t, melyre $0 < a \leq x$, így $\frac{a}{b} \in K$-ra $0 < \frac{a}{b} \leq \frac{a}{y} \leq \frac{x}{y} = z$, így valóban K a 0 körül sűrű.

13.34. Definíció: *Egy D rendezett test egy Dedekind bővítése egy* $L = Q\left({K[\mathcal{D}(K) \setminus K]}\big/{I_K(K[\mathcal{D}(K) \setminus K])} \right)$ *alakú rendezett test, ahol $K[\mathcal{D}(K) \setminus K]$a $\mathcal{D}(K)$-n vett rendezés egy kiterjesztését vesszük. A K Dedekind bővítéseinek halmazát* $\mathrm{Ded}(K)$*-val jelöljük.*

Az előző állításokból következik, hogy minden rendezett testnek létezik Dedekind bővítése. Mivel a $K[\mathcal{D}(K) \setminus K]$-n lévő rendezés megkonstruálásához több ponton is használtuk a Zorn-lemmát, ezért a rendezés nem lesz egyértelmű, de a lehetséges rendezések egy halmazt alkoznak, így a Dedekind bővítések is. Az előzőkből szintén látszik, hogy ha $L \in \mathrm{Ded}(K)$, akkor $K \subseteq L$ kofinális és a 0 körül sűrű.

13.35. Állítás: *Ha K rendezett test, $L = \mathrm{Ded}(K)$, akkor $\mathrm{cf}(L) = \mathrm{cf}(K)$.*

Bizonyítás: Mivel $K \subseteq L$ kofinális, a két rendezett halmaz kofinalitása megegyezik.

13.36. Állítás: *Ha K rendezett test, $L = \mathrm{Ded}(K)$, akkor $|L| \leq 2^{|K|}$.*

Bizonyítás: Minden rendezett test elemszáma végtelen számosság, így $|K|$ végtelen, $2^{|K|}$ is végtelen. Mivel $\mathcal{D}(K) \subseteq P(K)$, ezért $|\mathcal{D}(K)| \leq 2^{|K|}$ és így nyilván $|\mathcal{D}(K) \setminus K| \leq 2^{|K|}$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor minden n-edfokú $\mathcal{D}(K)/K$-monom felírható $m = b_1 \dots b_n$ alakban, ahol $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{D}(K) \setminus K$, így az n-edfokú monomok száma $\leq |\mathcal{D}(K) \setminus K|^n \leq \left(2^{|K|}\right)^n = 2^{|K|}$. Az összes $\mathcal{D}(K) \setminus K$-monom száma $\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{|K|} = \aleph_0 2^{|K|} = 2^{|K|}$. Ha $p \in K[\mathcal{D}(K) \setminus K]$ n

tagú, akkor léteznek $c_1, \dots, c_n \in K$ és $m_1, \dots, m_n$ $\mathcal{D}(K) \setminus K$-monomok, hogy $p = c_1 m_1 + \dots + c_n m_n$, így az n tagú polinomok száma $\leq |K|^n \left(2^{|K|}\right)^n = |K| 2^{|K|} = 2^{|K|}$. Az összes elem száma $|K[\mathcal{D}(K) \setminus K]| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{|K|} = \aleph_0 2^{|K|} = 2^{|K|}$. Mivel a $K[\mathcal{D}(K) \setminus K] \to {K[\mathcal{D}(K) \setminus K]}\big/{I_K(K[\mathcal{D}(K) \setminus K])}$ kanonikus leképezés szürjektív, ezért $\left| {K[\mathcal{D}(K) \setminus K]}\big/{I_K(K[\mathcal{D}(K) \setminus K])} \right| \leq |K[\mathcal{D}(K) \setminus K]| \leq 2^{|K|}$. Végül pedig $L = Q\left({K[\mathcal{D}(K) \setminus K]}\big/{I_K(K[\mathcal{D}(K) \setminus K])} \right)$ minden eleme felírható $\frac{x}{y}$ alakban, ahol $x, y \in {K[\mathcal{D}(K) \setminus K]}\big/{I_K(K[\mathcal{D}(K) \setminus K])}$, így

$$|L| \leq \left| {K[\mathcal{D}(K) \setminus K]}\big/{I_K(K[\mathcal{D}(K) \setminus K])} \right|^2 \leq \left(2^{|K|}\right)^2 = 2^{|K|}.$$

14. Cantor tulajdonságú rendezett testek

14.1. Definíció: *Legyen K rendezett test. Az $\mathcal{I} \subseteq P(K)$ intervallumlánc, ha $\mathcal{I} \neq \emptyset$, minden $I \in \mathcal{I}$-re $I = [a, b]$, $a, b \in K, a \leq b$ zárt intervallum és $\forall I, J \in \mathcal{I}$-re $I \subseteq J$ vagy $J \subseteq I$.*

14.2. Definíció: *Egy K rendezett test Cantor tulajdonságú, ha minden $\mathcal{I} \subseteq P(K)$ intervallumláncra $\cap \mathcal{I} \neq \emptyset$.*

14.3. Definíció: *Ha K rendezett test, $\alpha > 0$ rendszám, akkor K α-Cantor, ha minden $(I_\beta)_{\beta<\alpha}$ rendszerre, ahol $I_\beta = [a_\beta, b_\beta]$ zárt intervallum és $\gamma < \beta < \alpha$-ra $I_\beta \subseteq I_\gamma$ teljesül, hogy $\bigcap_{\beta<\alpha} I_\beta \neq \emptyset$.*

14.4. Lemma: *Egy K rendezett test Cantor tulajdonságú akkor és csak akkor, ha minden $\alpha > 0$ rendszámra α-Cantor.*

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy K Cantor tulajdonságú és vegyünk egy $\alpha > 0$ rendszámot és $(I_\beta)_{\beta<\alpha}$ zárt intervallumokból álló rendszert, melyekre $\gamma < \beta < \alpha$-ra $I_\beta \subseteq I_\gamma$. Legyen $\mathcal{I} = \{I_\beta : \beta < \alpha\}$. Ez nyilván intervallumlánc, ugyanis $I, J \in \mathcal{I}$ esetén létezik $\beta, \gamma < \alpha$, hogy $I = I_\beta, J = I_\gamma$. Ha $\beta = \gamma$, akkor nyilván $I = I_\beta = I_\gamma = J$, ha $\beta < \gamma$, akkor $I = I_\beta \supseteq I_\gamma = J$, ha pedig $\beta > \gamma$, akkor $I = I_\beta \subseteq I_\gamma = J$, így a tartalmazás valamelyik irányban mindig teljesül. Mivel K Cantor tulajdonságú, ezért $\bigcap_{\beta<\alpha} I_\beta = \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$.

A másik irányba tegyük fel, hogy K minden $\alpha > 0$-ra α-Cantor és legyen $\mathcal{I} \subseteq P(K)$ intervallumlánc. Legyen $I_0 \in \mathcal{I}$ tetszőleges és transzfinit rekurzióval, ha egy α rendszámra az $(I_\beta)_{\beta<\alpha}$ $\mathcal{I}$-beli halmazokat már definiáltuk, akkor legyen $I_\alpha \in \mathcal{I}$ olyan, hogy $\forall \beta < \alpha$-ra $I_\alpha \subset I_\beta$ szigorú tartalmazással, ha van ilyen. Ezt addig definiáljuk, amíg egy rendszámnál el nem akadunk. Az nem lehet, hogy végig tudunk menni az összes rendszámon. Ebben az esetben kapnánk ugyanis egy RSZ $\to \mathcal{I}$ operációt, amely minden α rendszámhoz I_α-t rendeli. Ha $\alpha \neq \beta$ rendszámok, akkor $\beta < \alpha$ vagy $\alpha < \beta$. Az első esetben az I_α-t úgy definiáltuk, hogy $I_\alpha \subset I_\beta$ teljesüljön így $I_\alpha \neq I_\beta$, a második esetben is hasonlóan, tehát az operáció injektív. RSZ-t pedig nem tudjuk egy injektív operációval egy halmazba beágyazni, mert akkor az operáció inverzére a pótlás axiomáját alkalmazva azt kapnánk, hogy RSZ halmaz, ami nem igaz.

Ha valamilyen α-nál elakadtunk, akkor az $(I_\beta)_{\beta<\alpha}$ intervallumrendszerre nyilván teljesül, hogy $\gamma < \beta < \alpha$-ra $I_\beta \subseteq I_\gamma$, így a K α-Cantor tulajdonsága miatt $\bigcap_{\beta<\alpha} I_\beta \neq \emptyset$. Legyen $x \in \bigcap_{\beta<\alpha} I_\beta$. Azt fogjuk belátni, hogy $\cap \mathcal{I}$-ben is benne van. Vegyünk egy $J \in \mathcal{I}$-t, erre minden $\beta < \alpha$-ra $I_\beta \subseteq J$ vagy $J \subset I_\beta$, mert $\mathcal{I}$ intervallumlánc. Ha minden $\beta < \alpha$-ra az utóbbi állna fenn, ekkor az $I_\alpha = J$ jó választás lenne, de mivel elakadunk, ez nem fordulhat elő. Ez azt jelenti, hogy van egy olyan $\beta < \alpha$, hogy $x \in I_\beta \subseteq J$. Mivel $J \in \mathcal{I}$ tetszőleges volt, ezért $x \in \cap\, \mathcal{I}$, vagyis K Cantor tulajdonságú.

14.5. Lemma: *K rendezett test, $\alpha > 0$ rendszám, akkor K α-Cantor akkor és csak akkor, ha* $\mathrm{cf}(\alpha)$*-Cantor.*

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy K $\mathrm{cf}(\alpha)$-Cantor és legyen $\left(I_\beta\right)_{\beta<\alpha}$ zárt intervallumokból álló rendszert, melyekre $\gamma < \beta < \alpha$-ra $I_\beta \subseteq I_\gamma$. Vegyünk egy $\left(\beta_\xi\right)_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)}$ rendszámokból álló növő sorozatot, amelyre $\beta_\xi < \alpha$ minden $\xi < \mathrm{cf}(\alpha)$-ra és β_ξ kofinális α-ban. Ha $\xi < \zeta < \mathrm{cf}(\alpha)$ tetszőleges, akkor $\beta_\xi \leq \beta_\zeta$ miatt $I_{\beta_\zeta} \subseteq I_{\beta_\xi}$. Ekkor az $\left(I_{\beta_\xi}\right)_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)}$ intervallumrendszerre alkalmazva K $\mathrm{cf}(\alpha)$-Cantor tulajdonságát, az kapjuk, hogy $\bigcap_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)} I_{\beta_\xi} \neq \emptyset$. Legyen $x \in \bigcap_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)} I_{\beta_\xi}$ tetszőleges. Ekkor minden $\beta < \alpha$-hoz van olyan $\xi < \mathrm{cf}(\alpha)$, hogy $\beta \leq \beta_\xi$, így $x \in I_{\beta_\xi} \subseteq I_\beta$, vagyis $x \in \bigcap_{\beta<\alpha} I_\beta$, ezért $\bigcap_{\beta<\alpha} I_\beta \neq \emptyset$. Ezzel minden ilyen rendszerre beláttuk, hogy a metszet nem üres, így K α-Cantor.

A másik irányba tegyük fel, hogy K α-Cantor és legyen $\left(I_\xi\right)_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)}$ zárt intervallumokból álló rendszer, melyekre $\zeta < \xi < \mathrm{cf}(\alpha)$-ra $I_\xi \subseteq I_\zeta$. Vegyünk egy $\left(\beta_\xi\right)_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)}$ rendszámokból álló szigorúan növő sorozatot, amelyre $\beta_\xi < \alpha$ minden $\xi < \mathrm{cf}(\alpha)$-ra és β_ξ kofinális α-ban. Legyen testszőleges $\gamma < \alpha$-ra $\zeta(\gamma) = \min\{\xi : \beta_\xi \geq \gamma\}$. Mivel a β_ξ kofinális α-ban, ezért ez a halmaz nem üres, így a rendszámok jólrendezettsége miatt van legkisebb eleme, tehát a ζ operáció értelmes. Nyilván $\zeta(\gamma)$ monoton nő és $\zeta\left(\beta_\xi\right) = \xi$ minden $\xi < \mathrm{cf}(\alpha)$-ra. A monoton növés miatt $\gamma < \beta <$ α-ra $I_{\zeta(\beta)} \supseteq I_{\zeta(\gamma)}$, így az α-Cantor tulajdonság miatt $\bigcap_{\gamma<\alpha} I_{\zeta(\gamma)} \neq \emptyset$. Vegyünk egy $x \in \bigcap_{\gamma<\alpha} I_{\zeta(\gamma)}$. Ekkor minden $\xi < \mathrm{cf}(\alpha)$-ra $x \in I_{\gamma(\beta_\xi)} = I_\xi$, tehát $x \in \bigcap_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)} I_\xi$, vagyis $\bigcap_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)} I_\xi \neq \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy K $\mathrm{cf}(\alpha)$-Cantor.

E lemma alapján a továbbiakban az α-Cantor tulajdonságot nem kell minden $\alpha > 0$ rendszámra vizsgálni, elég csak reguláris számosságokra.

14.6. Állítás: *Ha K rendezett test CW-κ valamilyen κ számosságra, akkor κ-Cantor*

Bizonyítás: Legyen K $CW - \kappa$ és vegyünk egy $(I_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ zárt intervallumsorozatok, melyekre $\beta < \alpha < \kappa$-ra $I_\alpha \subseteq I_\beta$. Ha az $I_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$ intervallum, akkor ez azt jelenti, hogy $\beta < \alpha < \kappa$-ra $a_\beta \leq a_\alpha \leq b_\alpha \leq b_\beta$. Nézzük az $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ sorozatot. Ez a sorozat egyrészt korlátos, mert minden $\alpha < \kappa$-ra $a_0 \leq a_\alpha \leq b_\alpha \leq b_0$ és monoton is, mert $\beta < \alpha < \kappa$-ra $a_\beta \leq a_\alpha$. A $CW - \kappa$ tulajdonság alapján ekkor létezik $a \in K$, hogy $a_\alpha \to a$. A 7.3. lemma 1. fele alapján minden $\alpha < \kappa$-ra $a_\alpha \leq a$. Indirekt tegyük fel, hogy valamely $\alpha < \kappa$-ra $b_\alpha > a$. Ekkor a 7.3. lemma 2.

fele alapján van egy $\beta < \kappa$, hogy $b_\alpha < a_\beta$. Másrészt ha $\alpha \leq \beta$, akkor $a_\beta \leq b_\beta \leq b_\alpha$, ha pedig $\alpha > \beta$, akkor $a_\beta \leq a_\alpha \leq b_\alpha$, így mindkét esetben $a_\beta \leq b_\alpha$. Ez ellentmondáshoz vezet, így csak az lehet, hogy minden $\alpha < \kappa$-ra $a_\alpha \leq a \leq b_\alpha$, azaz $a \in I_\alpha$, Ekkor $a \in \bigcap_{\alpha<\kappa} I_\alpha$, vagyis $\bigcap_{\alpha<\kappa} I_\alpha \neq \emptyset$. Ezzel beláttuk, hogy K κ-Cantor.

14.7. Állítás: *Ha K rendezett test, $\kappa > \mathrm{P}(K)$ reguláris számosság, akkor K κ-Cantor*

Bizonyítás: A 7.10. állítás alapján a K $\mathrm{CW} - \kappa$, így a 14.6. állítás alapján κ-Cantor.

A 14.4. lemma és ezen állítás miatt a Cantor tulajdonsághoz elég belátni, hogy az adott rendezett test κ-Cantor a $\kappa \leq \mathrm{P}(K)$ reguláris számosságokra. Ha K szeparábilis, akkor valójában $\mathrm{P}(K) = \mathrm{cf}(K)$, így elég csak az ennél kisebb egyenlő reguláris számosságokra belátni.

14.8. Tétel: *Ha $\kappa > \aleph_0$ reguláris számosság, akkor $\mathbb{F}_\kappa$ κ-Cantor.*

Bizonyítás: A 7.20. tétel miatt $\mathbb{F}_\kappa$ $\mathrm{CW} - \kappa$, így a 14.6. állítást alkalmazhatjuk.

A 14.6. lemma alapján a κ-Cantor tulajdonság gyengébb a $CW - \kappa$-nál. A $CW - \kappa$ tulajdonság, ahogy a 7.11. állítás is mutatja nem érhető el $\kappa < \mathrm{cf}(K)$ számosságokra. Ezzel szemben a κ-Cantor tulajdonság igen, sőt akár minden $\kappa < \mathrm{cf}(K)$ számosságra egyszerre.

14.9. Definíció: *Ha α tetszőleges rendszám, akkor definiáljuk a $\mathbb{D}_\alpha$ rendezett testet transzfinit rekurzióval a következőképpen:*

1. $\mathbb{D}_0 = \mathbb{R}$

2. $\mathbb{D}_{\alpha+1} \in \mathrm{Ded}\big(\mathbb{D}_\alpha(x_\alpha)\big)$ (az 5.14. és 13.34. konstrukció alapján, itt az x_α jelölés azt jelzi, hogy mely rendszámra adtuk hozzá a testhez)

3. Ha α limesz, akkor $\mathbb{D}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{D}_\beta$ (az 5.15. konstrukciója alapján)

Azt kell belátni, hogy ez szabályos definíció. A racionális törtfüggvénytest és a Dedekind-bővítés minden rendezett testen definiálható, tehát rákövetkező rendszámokra a definíció mindig értelmes. A Dedekind bővítés általában nem egyértelmű, így szigorúan véve nem tudunk egy rendszámokon értelmezett operációt definiálni, mert minden rákövetkező rendszámra választani kell egy elemet a $\mathrm{Ded}\big(\mathbb{D}_\alpha(x_\alpha)\big)$ halmazból. Persze Gödel-modellben, ahol az összes halmazt jól tudjuk rendezni, ott konstruálható ilyen operáció. Nekünk most viszont elég, hogy egy fix α rendszám esetén definiáljuk a $\beta \leq \alpha$ rendszámokra, amit a kiválasztási axióma alapján megtehetünk és ezzel tudunk konstruálni egy $\mathbb{D}_\alpha$ rendezett testet. Transzfinit indukcióval bizonyítjuk, hogy limesz rendszámra is definiálható, azaz teljesül az 5.15. konstrukció feltétele.

Legyen α limesz, minden $\beta < \alpha$-ra $\mathbb{D}_\beta$ már definiált, $\gamma \le \beta < \alpha$. Ekkor kell, hogy $\mathbb{D}_\gamma \subseteq \mathbb{D}_\beta$ és a rendezés és a műveletek kiterjednek. Ezt rögzített α, γ mellett β-ra bizonyítjuk. $\beta = \gamma$-ra triviális, hiszen a két test egyenlő. Ha $\beta = \tau + 1$, ahol $\tau \ge \gamma$, akkor $\mathbb{D}_\gamma \subseteq \mathbb{D}_\tau \subseteq \mathbb{D}_{\tau+1} = \mathbb{D}_\beta$, és a Dedekind bővítés konstrukciója miatt a rendezés és a műveletek kiterjednek. Ha β limesz, akkor $\mathbb{D}_\beta = \bigcup_{\tau<\beta} \mathbb{D}_\tau$, így $\mathbb{D}_\gamma \subseteq \mathbb{D}_\beta$, és a rendezés és a műveletek kiterjednek. Így a konstrukció minden rendszámra jóldefiniált.

14.10. Állítás: *Ha α limesz rendszám, akkor* $\mathrm{cf}(\mathbb{D}_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

Bizonyítás: Azt látjuk be, hogy az $X = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ kofinális $\mathbb{D}_\alpha$-ban. Legyen $a \in \mathbb{D}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{D}_\beta$, tehát $a \in \mathbb{D}_\beta$ valamely $\beta < \alpha$-ra. A hányadostest konstrukciója alapján $\mathbb{D}_\beta(x_\beta)$-ban $a < x_\beta$. Ez az egyenlőtlenség tovább terjed a $\mathbb{D}_{\beta+1} \in \mathrm{Ded}\left(\mathbb{D}_\beta(x_\beta)\right)$ Dedekind-bővítésre is és onnan tovább $\mathbb{D}_\alpha$-ra, így X valóban kofinális. Ha $\gamma < \beta < \alpha$, akkor $\gamma + 1 \le \beta$, így $x_\gamma \in \mathbb{D}_{\gamma+1} \subseteq \mathbb{D}_\beta$ és x_β a $\mathbb{D}_\beta$ minden eleménél nagyobb, ezért $x_\gamma < x_\beta$. Ez azt jelenti, hogy a $\varphi : \alpha \to X$ leképezés, amelyre $\beta < \alpha$-ra $\varphi(\beta) = x_\beta$ rendezéstartó, azaz $\mathrm{tp}(X) = \mathrm{tp}(\alpha)$, így $\mathrm{cf}(X) = \mathrm{cf}(\alpha)$, de mivel $X \subseteq \mathbb{D}_\alpha$ kofinális, így $\mathrm{cf}(\mathbb{D}_\alpha) = \mathrm{cf}(X)$, amiből az állítás már következik.

14.11. Lemma: *Ha $\kappa > \aleph_0$ erősen elérhetetlen számosság, akkor* $|\mathbb{D}_\kappa| = \kappa$.

Bizonyítás: Ha $\beta < \alpha < \kappa$, akkor $x_\beta < x_\alpha$, így $x_\beta \ne x_\alpha$. Ez azt jelenti, hogy az x_α elemek mind különbözők, így $X \subseteq \mathbb{D}_\kappa$-ra $|X| = \kappa$, tehát $|\mathbb{D}_\kappa| \ge \kappa$ nyilván teljesül.

A másik irányú egyenlőtlenséghez azt látjuk be, hogy minden $\alpha < \kappa$-ra $|\mathbb{D}_\alpha| < \kappa$. Az $\alpha = 0$-ra $|\mathbb{D}_0| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$, így $\kappa > \aleph_0$ és κ erősen elérhetetlen miatt $|\mathbb{D}_0| < \kappa$. Ha egy $\alpha < \kappa$-ra igaz, akkor a 6.19. állítás alapján $|\mathbb{D}_\alpha(x_\alpha)| = |\mathbb{D}_\alpha| < \kappa$, míg a Dedekind bővítésre a 13.36. állítás alapján $|\mathbb{D}_{\alpha+1}| \le 2^{|\mathbb{D}_\alpha(x_\alpha)|}$, és mivel $|\mathbb{D}_\alpha(x_\alpha)| < \kappa$ és κ erősen elérhetetlen, ezért $|\mathbb{D}_{\alpha+1}| \le 2^{|\mathbb{D}_\alpha(x_\alpha)|} < \kappa$ teljesül. Ha α limesz és $\beta < \alpha$-ra teljesül az állítás, akkor $|\mathbb{D}_\alpha| = \left|\bigcup_{\beta<\alpha} \mathbb{D}_\beta\right| \le \sum_{\beta<\alpha} |\mathbb{D}_\beta| < \kappa$, mert κ reguláris, így κ-nál kevesebb κ-nál kisebb számosság összege is κ-nál kisebb. Ezzel transzfinit indukcióval beláttuk az állítást. Ez azt jelenti, hogy $|\mathbb{D}_\kappa| = |\bigcup_{\alpha<\kappa} \mathbb{D}_\alpha| \le \sum_{\alpha<\kappa} |\mathbb{D}_\alpha| \le \sum_{\alpha<\kappa} \kappa = \kappa\kappa = \kappa$, tehát a másik irányú egyenlőtlenség is áll, vagyis $|\mathbb{D}_\kappa| = \kappa$.

14.12.Állítás: *Ha $\kappa > \aleph_0$ erősen elérhetetlen számosság, akkor $\mathbb{D}_\kappa$ szeparábilis.*

Bizonyítás: A 14.10. állítás alapján $\mathrm{cf}(\mathbb{D}_\kappa) = \kappa$, míg a 14.11. lemma miatt $|\mathbb{D}_\kappa| = \kappa$. A $\kappa = \mathrm{cf}(\mathbb{D}_\kappa) \le \mathrm{P}(\mathbb{D}_\kappa) \le \Sigma(\mathbb{D}_\kappa) \le |\mathbb{D}_\kappa| = \kappa$ végig egyenlőség áll, így $\mathbb{D}_\kappa$ szeparábilis.

14.13. Tétel: *Ha κ reguláris számosság, akkor $\mathbb{D}_\kappa$ α-Cantor minden $\alpha < \kappa$ számosságra.*

Bizonyítás: Vegyünk egy $\alpha < \kappa$ rendszámot és minden $\beta < \alpha$ rendszámra $I_\beta = [a_\beta, b_\beta]$ zárt intervallumot, melyekre $\gamma < \beta < \alpha$-ra $I_\beta \subseteq I_\gamma$. Mivel minden $\beta < \alpha$-ra $a_\beta, b_\beta \in \mathbb{D}_\kappa = \bigcup_{\xi<\kappa} \mathbb{D}_\xi$, ezért választható olyan $\xi_{\beta,1}.\xi_{\beta,2} < \kappa$, hogy $a_\beta \in \mathbb{D}_{\xi_{\beta,1}}$ és $b_\beta \in \mathbb{D}_{\xi_{\beta,2}}$. Legyen $\eta = \sup(\{\xi_{\beta,1} : \beta < \kappa\} \cup \{\xi_{\beta,2} : \beta < \kappa\})$. Mivel $|\{\xi_{\beta,1} : \beta < \kappa\} \cup \{\xi_{\beta,2} : \beta < \kappa\}| \leq |\alpha| + |\alpha| < \kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$, ezért a halmaz nem kofinális κ-ban, vagyis $\eta < \kappa$. Ekkor persze minden $\beta < \alpha$-ra $\xi_{\beta,1} \leq \eta$ miatt $a_\beta \in \mathbb{D}_{\xi_{\beta,1}} \subseteq \mathbb{D}_\eta$ és $\xi_{\beta,2} \leq \eta$ miatt $b_\beta \in \mathbb{D}_{\xi_{\beta,2}} \subseteq \mathbb{D}_\eta$.

Legyen $D = \{x \in \mathbb{D}_\eta(x_\eta) | \exists\beta < \alpha, x < a_\beta\}$. Ez nyilván szelet $\mathbb{D}_\eta(x_\eta)$, hiszen ha $y < x \in D$, akkor ugyanaz a β jó lesz y-hoz mint x-hez. Az $a_0 - 1 < a_0$ miatt $a_0 - 1 \in D$, így $D \neq \emptyset$. Mivel minden $\beta < \alpha$-ra $a_\beta \leq b_\beta \leq b_0$, így $b_0 \notin D$, tehát $D \neq \mathbb{D}_\eta(x_\eta)$ is teljesül. Végül ha $x \in D$, akkor valamely $\beta < \alpha$-ra $x < a_\beta$, így $x < \frac{x+a_\beta}{2} < a_\beta$, vagyis $\frac{x+a_\beta}{2} \in D$, így $x \in D$ nem legnagyobb elem. Ekkor $D \in \mathcal{D}\left(\mathbb{D}_\eta(x_\eta)\right)$ Dedekind szelet. A $\mathbb{D}_\eta(x_\eta)$ Dedekind szeleteit nézve, ha $\beta < \alpha$, akkor minden $x \in D_{a_\beta}$-hoz β jó az x-hez D definíciójába, így $x \in D$, vagyis $D_{a_\beta} \subseteq D$. Másrészt ha $\beta < \alpha$, akkor tetszőleges $x \in D$-re választhatunk $\gamma < \alpha$-t, amelyre $x < a_\gamma$. Ha $\gamma \leq \beta$, akkor $x < a_\gamma \leq a_\beta \leq b_\beta$, ha pedig $\gamma > \beta$, akkor $x < a_\gamma \leq b_\gamma \leq b_\beta$, így minden esetben $x < b_\beta$, azaz $x \in D_{b_\beta}$. Ez azt jelenti, hogy minden $\beta < \alpha$-ra $D_{a_\beta} \subseteq D \subseteq D_{b_\beta}$, így a $\mathcal{D}\left(\mathbb{D}_\eta(x_\eta)\right)$-ról a rendezést a $\mathbb{D}_{\eta+1}$ Dedekind bővítésbe felemelve $a_\beta < D < b_\beta$. Ez a $\mathbb{D}_\kappa$-ra is kiterjed, így $\mathbb{D}_\kappa$-ban $D \in I_\beta$. Ez azt jelenti, hogy $D \in \bigcap_{\beta<\alpha} I_\beta$, így $\bigcap_{\beta<\alpha} I_\beta \neq \emptyset$, vagyis $\mathbb{D}_\kappa$ α-Cantor.

Abban az esetben, ha κ erősen elérhetetlen $\mathbb{D}_\kappa$ nagyon közel áll a Cantor tulajdonsághoz, hiszen $\lambda < \kappa$ eguláris számosságra λ-Cantor és a 14.7. állítás miatt $\lambda > \kappa$-ra is λ-Cantor. Egyedül a $\lambda = \kappa$ esetben nem láttuk, hogy teljesül ez a tulajdonság. A következő fejezetben fogunk mutatni olyan konstrukciót, ahol ez is teljesül.

15. Ultrahatvány konstrukció

15.1. Definíció: *Ha A tetszőleges halmaz, κ számosság és $\mathcal{U} \subseteq P(\kappa)$ ultrafilter, akkor azt mondjuk $a, b \in A^\kappa$-ra, hogy $a \sim_\mathcal{U} b$, ha $\{\xi < \kappa | a_\xi = b_\xi\} \in \mathcal{U}$ (ahol az a_ξ, b_ξ az a, b értékeit jelöli alsó indexes jelöléssel).*

15.2. Állítás: *Ha A tetszőleges halmaz, κ számosság és $\mathcal{U} \subseteq P(\kappa)$ ultrafilter, akkor a $\sim_\mathcal{U}$ reláció ekvivalenciareláció A^κ-n.*

Bizonyítás: Minden $a \in A^\kappa$-ra $\{\xi < \kappa | a_\xi = a_\xi\} = \kappa \in \mathcal{U}$, így nyilván $a \sim_\mathcal{U} a$, vagyis $\sim_\mathcal{U}$ reflexív. Ha $a \in A^\kappa$, akkor $\{\xi < \kappa | a_\xi = b_\xi\} = \{\xi < \kappa | b_\xi = a_\xi\}$, így a két halmaz ugyanakkor van $\mathcal{U}$-ban, tehát $a \sim_\mathcal{U} b \Leftrightarrow b \sim_\mathcal{U} a$, így $\sim_\mathcal{U}$ szimmetrikus. A tranzitivitáshoz vegyünk $a, b, c \in A^\kappa$-t, melyekre $a \sim_\mathcal{U} b, b \sim_\mathcal{U} c$. Legyen $C_1 = \{\xi < \kappa | a_\xi = b_\xi\} \in \mathcal{U}$ és $C_2 = \{\xi < \kappa | b_\xi = c_\xi\} \in \mathcal{U}$. Ekkor $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{U}$. Legyen továbbá $C = \{\xi < \kappa | a_\xi = c_\xi\}$. Ha $\xi \in C_1 \cap C_2$, akkor $a_\xi = b_\xi = c_\xi$, így $C_1 \cap C_2 \subseteq C$, vagyis $C \in \mathcal{U}$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy $a \sim_\mathcal{U} c$, vagyis $\sim_\mathcal{U}$ valóban tranzitív. Ezzel beláttuk, hogy ekvivalenciareláció.

15.3. Definíció: *Ha A tetszőleges halmaz, κ számosság és $\mathcal{U} \subseteq P(\kappa)$ ultrafilter, akkor az $A^\kappa/_{\sim_\mathcal{U}}$ faktorhalmazt az A halmaz $\mathcal{U}$ szerinti ultrahatványának nevezzük és $\mathrm{ULT}(A, \mathcal{U})$-val jelöljük. Ha $a \in A^\kappa$, akkor annak az osztályát, azaz az $\{a' \in A^\kappa | a \sim_\mathcal{U} a'\}$-t $[a]$-val jelöljük.*

A következőkben megnézzük, hogy ha A-n van valami struktúra is, azt hogyan tudjuk felemelni az ultrahatványba.

15.4. Állítás: *Ha K test, κ számosság és $\mathcal{U} \subseteq P(\kappa)$ ultrafilter, akkor tetszőleges $a, a', b, b' \in K^\kappa$-ra ahol $a \sim_\mathcal{U} a'$ és $b \sim_\mathcal{U} b'$ teljesül, hogy $a + b \sim_\mathcal{U} a' + b'$ és $ab \sim_\mathcal{U} a'b'$, ahol az K^κ-n a műveleteket pontonként végezzük el K-ban.*

Bizonyítás: Legyen $C_1 = \{\xi < \kappa | a_\xi = a'_\xi\} \in \mathcal{U}$ és $C_2 = \{\xi < \kappa | b_\xi = b'_\xi\} \in \mathcal{U}$. Ekkor $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{U}$. Legyen $C = \{\xi < \kappa | a_\xi + b_\xi = a'_\xi + b'_\xi\}$ és $C' = \{\xi < \kappa | a_\xi b_\xi = a'_\xi b'_\xi\}$. Ha $\xi \in C_1 \cap C_2$, akkor $a_\xi = a'_\xi, b_\xi = b'_\xi$, így $a_\xi + b_\xi = a'_\xi + b'_\xi$ és $a_\xi b_\xi = a'_\xi b'_\xi$, vagyis $\xi \in C$ és $\xi \in C'$. Ebből az következik, hogy $C_1 \cap C_2 \subseteq C$ és $C_1 \cap C_2 \subseteq C'$, így $C \in \mathcal{U}, C' \in \mathcal{U}$.

15.5. Definíció: *Ha K test, κ számosság és $\mathcal{U} \subseteq P(\kappa)$ ultrafilter, akkor $[a], [b] \in \mathrm{ULT}(A, \mathcal{U})$-ra $[a] + [b] = [a + b]$ és $[a][b] = [ab]$*

A 15.4. állítás miatt ez a definíció értelmes, azaz az összeg és a szorzat osztálya nem függ a reprezentánsok választásától.

15.6. Tétel: *Ha K test, κ számosság és $\mathcal{U} \subseteq P(\kappa)$ ultrafilter, akkor az* $\mathrm{ULT}(K,\mathcal{U})$ *az előző pontban definiált műveletekkel test.*

Bizonyítás: Ha $[a],[b],[c] \in \mathrm{ULT}(K,\mathcal{U})$, ahol $a,b,c \in K^\kappa$, akkor $([a]+[b])+[c] = [a+b]+[c] = [(a+b)+c] = [a+(b+c)] = [a]+[b+c] =$ $= [a]+([b]+[c])$, tehát $\mathrm{ULT}(K,\mathcal{U})$-n az összeadás asszociatív. Hasonló módon belátható, hogy az összeadás kommutatív, a szorzás asszociatív és kommutatív és az összeadásra disztributív. A $0^\kappa \in K^\kappa$ konstans sorozatra minden $a \in K^\kappa$-ra $a + 0^\kappa = a$, így $[a]+[0^\kappa] = [a+0^\kappa] = [a]$, vagyis a $[0^\kappa]$ additív egységelem $\mathrm{ULT}(K,\mathcal{U})$-ban. Hasonlóképpen az $[1^\kappa]$ multiplikatív egységelem. Az $a \in K^\kappa$-ra vehetjük a $-a \in K^\kappa$-t, amelyre minden $\xi < \kappa$-ra $(-a)_\xi = -a_\xi$. Erre $\big(a+(-a)\big)_\xi = a_\xi - a_\xi = 0$, azaz $a+(-a) = 0^\kappa$, vagyis $[a]+[-a] = [a+(-a)] = [0^\kappa]$, tehát $[-a]$ az $[a]$ additív inverze $\mathrm{ULT}(K,\mathcal{U})$-ban. Ha $a \in K^\kappa$-ra $[a] \neq [0^\kappa]$, akkor $a \nsim_\mathcal{U} 0^\kappa$, tehát $\{\xi < \kappa | a_\xi = 0\} \notin \mathcal{U}$. Mivel $\mathcal{U}$ ultrafilter, ennek komplementere $C = \{\xi < \kappa | a_\xi \neq 0\} \in \mathcal{U}$. Legyen $a'_\xi = \begin{Bmatrix} \frac{1}{a_\xi} : a_\xi \neq 0 \\ 0 : a_\xi = 0 \end{Bmatrix}$.
Ekkor $(aa')_\xi = \begin{Bmatrix} 1 : a_\xi \neq 0 \\ 0 : a_\xi = 0 \end{Bmatrix}$, vagyis aa' a $C \in \mathcal{U}$-ban 1, így $aa' \sim_\mathcal{U} 1^\kappa$, azaz $[a][a'] = [aa'] = [1^\kappa]$. Ez azt jelenti, hogy $[a']$ jó $[a]$-hoz multiplikatív inverznek. Ezzel mindent beláttunk, $\mathrm{ULT}(K,\mathcal{U})$ valóban test.

15.7. Definíció: *Ha K rendezett test, κ számosság és $\mathcal{U} \subseteq P(\kappa)$ ultrafilter, akkor $a,b \in K^\kappa$-ra $a <_\mathcal{U} b$, ha $\{\xi < \kappa | a_\xi < b_\xi\} \in \mathcal{U}$.*

15.8. Állítás: *Ha K rendezett test, κ számosság és $\mathcal{U} \subseteq P(\kappa)$ ultrafilter és $a,a',b,b' \in K^\kappa$ olyanok, hogy $a \sim_\mathcal{U} a', b \sim_\mathcal{U} b'$, valamint $a <_\mathcal{U} b$, akkor $a' <_\mathcal{U} b'$.*

Bizonyítás: Legyen $C_1 = \{\xi < \kappa | a_\xi = a'_\xi\} \in \mathcal{U}$, $C_2 = \{\xi < \kappa | b_\xi = b'_\xi\} \in \mathcal{U}$ és $C_3 = \{\xi < \kappa | a_\xi < b_\xi\} \in \mathcal{U}$. Ekkor $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \in \mathcal{U}$. Vegyük továbbá a $C = \{\xi < \kappa | a_\xi < b_\xi\}$ halmazt. Ha $\xi \in C_1 \cap C_2 \cap C_3$, akkor $a'_\xi = a_\xi < b_\xi = b'_\xi$, így $a'_\xi < b'_\xi$, vagyis $\xi \in C$. Ekkor $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \subseteq C$, így $C \in \mathcal{U}$, ami pontosan azt jelenti, hogy $a' <_\mathcal{U} b'$.

15.9. Definíció: *Ha K rendezett test, κ számosság és $\mathcal{U} \subseteq P(\kappa)$ ultrafilter, akkor $[a],[b] \in \mathrm{ULT}(K,\mathcal{U})$-ra$[a] < [b]$, ha $a <_\mathcal{U} b$.*

A 15.8. állítás miatt ez a definíció értelmes, azaz az így definiált $<$ reláció nem függ a reprezentánsok választásától.

15.10. Tétel: *Ha K rendezett test, κ számosság és $\mathcal{U} \subseteq P(\kappa)$ ultrafilter, akkor az* $\mathrm{ULT}(K, \mathcal{U})$ *az előző pontokban definiált műveletekkel és rendezéssel rendezett test.*

Bizonyítás: A 15.6. tételből már tudjuk, hogy $\mathrm{ULT}(K, \mathcal{U})$ test, ezért csak azt kell belátni, hogy a $<$ reláció rendezés $\mathrm{ULT}(K, \mathcal{U})$-n és ez kompatibilis a műveletekkel. Ha $a \in K^\kappa$, akkor a $\{\xi < \kappa | a_\xi < a_\xi\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$, így $a \nless_\mathcal{U} b$, vagyis $[a] \nless [a]$, tehát a reláció irreflexív. Ha $a, b, c \in K^\kappa$-ra $[a] < [b] < [c]$, akkor $C_1 = \{\xi < \kappa | a_\xi < b_\xi\} \in \mathcal{U}$ és $C_2 = \{\xi < \kappa | b_\xi < c_\xi\} \in \mathcal{U}$, így $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{U}$. Legyen $C = \{\xi < \kappa | a_\xi < c_\xi\}$. Ha $\xi \in C_1 \cap C_2$, akkor $a_\xi < b_\xi < c_\xi$, így $a_\xi < c_\xi$, vagyis $\xi \in C$. Ez azt jelenti, hogy $C_1 \cap C_2 \subseteq C$, így $C \in \mathcal{U}$, azaz $a <_\mathcal{U} c$, tehát $[a] < [c]$. Ezzel beláttuk, hogy a $<$ reláció tranzitív. A trichotómiához legyen $a, b \in K^\kappa$. Legyen $C_1 = \{\xi < \kappa | a_\xi = b_\xi\}$, $C_2 = \{\xi < \kappa | a_\xi < b_\xi\}$ és $C_3 = \{\xi < \kappa | b_\xi < a_\xi\}$. Mivel $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \kappa$, ezért valamelyik $\mathcal{U}$-ban van. Ha $C_1 \in \mathcal{U}$, akkor $a \sim_\mathcal{U} b$, azaz $[a] = [b]$, ha $C_2 \in \mathcal{U}$, akkor $a <_\mathcal{U} b$, azaz $[a] < [b]$, ha pedig $C_3 \in \mathcal{U}$, akkor $b <_\mathcal{U} a$, azaz $[b] < [a]$, így a trichotómia teljesül.

Az összeadás és a rendezés kapcsolatához legyen $a, b, c \in K^\kappa$, melyekre $[a] < [b]$, vagyis $a <_\mathcal{U} b$. Ekkor a $\{\xi < \kappa | a_\xi + c_\xi < b_\xi + c_\xi\} = \{\xi < \kappa | a_\xi < b_\xi\} \in \mathcal{U}$, azaz $a + c <_\mathcal{U} b + c$. Ekkor $[a] + [c] = [a + c] < [b + c] = [b] + [c]$, tehát ez a kapcsolat teljesül. A szorzás kapcsolatára a rendezéssel vegyünk $a, b \in K^\kappa$-t, melyekre $[a], [b] > [0^\kappa]$, azaz $a, b >_\mathcal{U} 0^\kappa$. Legyen $C_1 = \{\xi < \kappa | a_\xi > 0\} \in \mathcal{U}$, $C_2 = \{\xi < \kappa | b_\xi > 0\} \in \mathcal{U}$. Ekkor $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{U}$. Legyen $C = \{\xi < \kappa | a_\xi b_\xi > 0\}$. Ha $\xi \in C_1 \cap C_2$, akkor $a_\xi, b_\xi > 0$ miatt $a_\xi b_\xi > 0$, így $\xi \in C$. Ekkor $C_1 \cap C_2 \subseteq C$, így $C \in \mathcal{U}$. Ez azt jelenti, hogy $ab >_\mathcal{U} 0^\kappa$, vagyis $[a][b] = [ab] > [0^\kappa]$. Ezzel mindent beláttunk, így $\mathrm{ULT}(K, \mathcal{U})$ valóban rendezett test.

15.11. Definíció: *Ha K rendezett test, κ számosság és $\mathcal{U} \subseteq P(\kappa)$ ultrafilter, akkor a j:K→*$\mathrm{ULT}(K, \mathcal{U})$ *leképezést amelyre minden $x \in K$-ra $j(x) = [x^\kappa]$ a K* $\mathrm{ULT}(K, \mathcal{U})$*-ba való kanonikus beágyazásának nevezzük.*

15.12. Állítás: *Ha K rendezett test, κ számosság és $\mathcal{U} \subseteq P(\kappa)$ ultrafilter, akkor a j:K→*$\mathrm{ULT}(K, \mathcal{U})$ *kanonikus beágyazás injektív, rendezés- és művelettartó.*

Bizonyítás: Ha $x, y \in K$, $x \neq y$, akkor $\{\xi < \kappa | (x^\kappa)_\xi = (y^\kappa)_\xi\} = \{\xi < \kappa | x = y\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$, azaz $x^\kappa \nsim_\mathcal{U} y^\kappa$, így $j(x) = [x^\kappa] \neq [y^\kappa] = j(y)$, tehát j injektív. A rendezéstartáshoz vegyünk $x, y \in K$-t melyekre $x < y$. Ekkor $\{\xi < \kappa | (x^\kappa)_\xi < (y^\kappa)_\xi\} = \{\xi < \kappa | x < y\} = \kappa \in \mathcal{U}$, azaz $x^\kappa <_\mathcal{U} y^\kappa$, így $j(x) = [x^\kappa] < [y^\kappa] = j(y)$, tehát j rendezéstartó is. A művelettartáshoz vegyünk $x, y \in K$-t. Ekkor $j(x+y) = [(x+y)^\kappa] = [x^\kappa + y^\kappa] = [x^\kappa] + [y^\kappa] = j(x) + j(y)$ és $j(xy) = [(xy)^\kappa] = [x^\kappa y^\kappa] = [x^\kappa][y^\kappa] = j(x)j(y)$, tehát a műveletartás is teljesül.

Mivel K képe $\mathrm{ULT}(K, \mathcal{U})$-ban izomorf K-val ezért tekinthetjük úgy is, hogy $K \subseteq \mathrm{ULT}(K, \mathcal{U})$ résztestként. Az eddigi definíciókhoz és bizonyításokhoz κ tetszőleges számosság $\mathcal{U}$ tetszőleges ultrafilter megfelelő volt. Most nézzük meg, hogy mi a helyzet, ha κ mérhető és $\mathcal{U}$ egy normális $< \kappa$-teljes nemfő- ultrafilter. Ezekben az esetekben az ultrahatvány konstrukció segítségével fogunk konstruálni egy olyan rendezett testet, ami κ kofinalitású és egyszerre κ-Cantor és minden $\alpha < \kappa$-ra α-Cantor is. Tudjuk, hogy minden κ reguláris számosságra $\mathbb{F}_\kappa$ az előbbit, míg $\mathbb{D}_\kappa$ az utóbbit teljesíti. Bár a mérhető számosságok jóval ritkábbak, olyannyira, hogy ZFC-ben még a létezésüket, vagy annak konzisztenciáját sem lehet belátni, de ilyen számosságokra ötvözni tudjuk a kettőt.

15.13. Lemma: *Ha κ mérhető számosság, K rendezett test α-Cantor valamilyen $\alpha < \kappa$-ra és $\mathcal{U} \subseteq P(\kappa) < \kappa$-teljes ultrafilter, akkor* $\mathrm{ULT}(K, \mathcal{U})$ *is α-Cantor.*

Bizonyítás: Legyen $\beta < \alpha$-ra $I^\beta = \left[[a^\beta], [b^\beta]\right]$ zárt intervallum $\mathrm{ULT}(K, \mathcal{U})$-ban, melyekre $\gamma < \beta < \alpha$-ra $I^\beta \subseteq I^\gamma$. Legyen tetszőleges $\gamma \le \beta < \alpha$-ra $C_{\gamma,\beta} = \left\{\xi < \kappa | a_\xi^\gamma \le a_\xi^\beta \le b_\xi^\beta \le b_\xi^\gamma\right\}$. Minden $\beta < \alpha$-ra $[a^\beta] \le [b^\beta]$ miatt $C_\beta = \left\{\xi < \kappa | a_\xi^\beta \le b_\xi^\beta\right\} \in \mathcal{U}$ (a definícióból könnyen látható, hogy a nem szigorú egyenlőtlenségre is átvihető ez a karakterizáció). Hasonlóan $\gamma \le \beta < \alpha$-ra $[a^\gamma] \le [a^\beta]$ miatt $C_{\gamma,\beta,1} = \left\{\xi < \kappa | a_\xi^\gamma \le a_\xi^\beta\right\} \in \mathcal{U}$ és $[b^\beta] \le [b^\gamma]$ miatt $C_{\gamma,\beta,2} = \left\{\xi < \kappa | b_\xi^\beta \le b_\xi^\gamma\right\} \in \mathcal{U}$, így $C_{\gamma,\beta} = C_\beta \cap C_{\gamma,\beta,1} \cap C_{\gamma,\beta,2} \in \mathcal{U}$. Az olyan (β, γ) párok száma, ahol $\gamma \le \beta < \alpha$ legfeljebb $|\alpha|^2 = |\alpha| < \kappa$ végtelen α esetén, véges α-ra pedig véges, így nyilván $< \kappa$. Ekkor az $\mathcal{U} < \kappa$ teljessége miatt $C = \bigcap_{\gamma \le \beta < \alpha} C_{\gamma,\beta} \in \mathcal{U}$.

Ha $\xi \in C$, akkor minden $\gamma \le \beta < \alpha$-ra $a_\xi^\gamma \le a_\xi^\beta \le b_\xi^\beta \le b_\xi^\gamma$, így a $J_\xi^\beta = \left[a_\xi^\beta, b_\xi^\beta\right] \subseteq K$ zárt intervallumokból álló rendszer, melyekre $\gamma < \beta < \alpha$-ra $J_\xi^\gamma \subseteq J_\xi^\beta$. Ekkor a K α-Cantor tulajdonsága miatt $\bigcap_{\beta < \alpha} J_\xi^\beta \neq \emptyset$, így vehetünk egy $x_\xi \in \bigcap_{\beta < \alpha} J_\xi^\beta$. Válasszunk minden $\xi \in C$-re egy ilyen x_ξ-t és legyen $\xi \in \kappa \,/\, C$-re x_ξ tetszőleges. Ezekből rakjunk össze egy $x \in K^\kappa$ elemet. Legyen $\beta < \alpha$-ra $D_\beta = \left\{\xi < \kappa | a_\xi^\beta \le x_\xi \le b_\xi^\beta\right\}$. Ha $\xi \in C$, akkor az x_ξ-t úgy választottuk, hogy $x_\xi \in J_\xi^\beta$ teljesüljön, azaz $a_\xi^\beta \le x_\xi \le b_\xi^\beta$, vagyis $\xi \in D_\beta$. Ez azt jelenti, hogy minden $\beta < \alpha$-ra $C \subseteq D_\beta$, így $D_\beta \in \mathcal{U}$. Ekkor $[a^\beta] \le [x] \le [b^\beta]$ teljesül $\mathrm{ULT}(K, \mathcal{U})$-ban, azaz $[x] \in \left[[a^\beta], [b^\beta]\right] = I^\beta$. Ez minden $\beta < \alpha$-ra igaz, így $[x] \in \bigcap_{\beta < \alpha} I^\beta$, tehát $\bigcap_{\beta < \alpha} I^\beta \neq \emptyset$, vagyis $\mathrm{ULT}(K, \mathcal{U})$ α-Cantor.

15.14. Lemma: *Ha κ mérhető számosság, K rendezett test minden $\alpha < \kappa$-ra α-Cantor és $\mathcal{U} \subseteq P(\kappa) < \kappa$-teljes, normális, nemfő- ultrafilter, akkor* $\mathrm{ULT}(K, \mathcal{U})$ *κ-Cantor.*

Bizonyítás: Vegyünk az előzőhöz hasonló módon $\beta < \kappa$-ra $I^\beta = \left[[a^\beta], [b^\beta]\right]$ zárt intervallumokat $\mathrm{ULT}(K, \mathcal{U})$-ban, melyekre $\gamma < \beta < \kappa$-ra $I^\beta \subseteq I^\gamma$. Ha definiáljuk $\gamma \leq \beta < \kappa$-ra a $C_{\gamma,\beta} = \left\{\xi < \kappa | a_\xi^\gamma \leq a_\xi^\beta \leq b_\xi^\beta \leq b_\xi^\gamma\right\}$ halmazokat, akkor itt is igaz, hogy $C_{\gamma,\beta} \in \mathcal{U}$, de a metszetükről itt már nem állíthatjuk, hogy $\mathcal{U}$-ban van.

Egy $\alpha < \kappa$ rendszámra és $\xi < \kappa$-ra azt mondjuk, hogy a ξ α-jó, ha $\xi \in \bigcap_{\gamma \leq \beta < \alpha} C_{\gamma,\beta}$, más szóval minden $\gamma \leq \beta < \alpha$-ra $a_\xi^\gamma \leq a_\xi^\beta \leq b_\xi^\beta \leq b_\xi^\gamma$. Legyen $\xi < \kappa$-ra $t(\xi) = \sup\left\{\alpha < \kappa | \xi\ \alpha\text{--jó}\right\} \leq \kappa$, (nyilván κ is lehet, ha a ξ minden indexre jó). Vegyük észre, hogy minden ξ valójában $t(\xi)$-jó, hiszen ha $\gamma \leq \beta < t(\xi)$, akkor $t(\xi) \geq \beta + 1$ és a $t(\xi)$ mint supremum definíciója miatt $\exists \alpha \geq \beta + 1$, hogy ξ α-jó, tehát $\gamma \leq \beta < \alpha$ miatt $a_\xi^\gamma \leq a_\xi^\beta \leq b_\xi^\beta \leq b_\xi^\gamma$, és ez minden $\gamma \leq \beta < t(\xi)$-re igaz. Ez azt jelenti, hogy a supremum valójában maximum. Az is látszik, hogy ha $t(\xi) < \kappa$, akkor a ξ nem $t(\xi) + 1$- jó, de $t(\xi)$-jó, vagyis a $t(\xi) + 1$-jóságot csak olyan $\gamma \leq \beta < t(\xi) + 1$ pár ronthatja el, ahol valamelyik tag $t(\xi)$, azaz nyilván $\beta = t(\xi)$. Ekkor vagy $a_\xi^{t(\xi)} > b_\xi^{t(\xi)}$, vagy pedig valamilyen $\gamma < t(\xi)$-re $a_\xi^\gamma > a_\xi^{t(\xi)}$ vagy $b_\xi^\gamma < b_\xi^{t(\xi)}$ áll. Legyen $J = \{\xi < \kappa | t(\xi) \geq \xi\}$ a jó indexek halmaza és $R = \{\xi < \kappa | t(\xi) < \xi\}$ a rossz indexek halmaza. Mivel $\kappa = J \cup R$, ezért a kettő közül valamelyik $\mathcal{U}$-ban van.

Ha $R \in \mathcal{U}$, akkor a $t: R \to \kappa$ egy $\mathcal{U}$-beli halmazon értelmezett regresszív függvény, így az $\mathcal{U}$ normalitása miatt $\exists R' \subseteq R$ és $\alpha < \kappa$, hogy $R' \in \mathcal{U}$ és minden $\xi \in R'$-re $t(\xi) = \alpha$. Mivel $|\alpha + 1| < \kappa$ és $\mathcal{U} < \kappa$-teljes, ezért $C = \bigcap_{\gamma < \alpha + 1} C_{\gamma,\alpha} \in \mathcal{U}$. Másrészt ha $\xi \in R'$, akkor ξ nem $\alpha + 1$-jó, de α-jó, ezért vagy $\xi \notin C_\alpha = C_{\alpha,\alpha}$ vagy valamilyen $\gamma < \alpha$-ra $\xi \notin C_{\gamma,\alpha}$, azaz $\xi \notin C$, vagyis $C \cap R' = \emptyset$. Na de két $\mathcal{U}$-beli halmaz metszete nem lehet üres, így ez az eset ellentmondáshoz vezet.

Így csak az fordulhat elő, hogy $J \in \mathcal{U}$. Ha $\xi \in J$, akkor $t(\xi) \geq \xi$ és ξ $t(\xi)$-jó, így nyilván ξ-jó is, hiszen csak gyengítjük a feltételt. Ekkor minden $\gamma \leq \beta < \xi$-re $a_\xi^\gamma \leq a_\xi^\beta \leq b_\xi^\beta \leq b_\xi^\gamma$, így a $J_\xi^\beta = \left[a_\xi^\beta, b_\xi^\beta\right] \subseteq K$ zárt intervallumokból álló rendszer, melyekre $\gamma < \beta < \xi$-re $J_\xi^\gamma \subseteq J_\xi^\beta$. Ekkor a K ξ-Cantor tulajdonsága miatt $\bigcap_{\beta < \xi} J_\xi^\beta \neq \emptyset$, így vehetünk egy $x_\xi \in \bigcap_{\beta < \xi} J_\xi^\beta$. Válasszunk minden $\xi \in J$-re egy ilyen x_ξ-t és legyen $\xi \in R$-re x_ξ tetszőleges. Ezekből rakjunk össze egy $x \in K^\kappa$ elemet.

Legyen $\beta < \kappa$-ra $D_\beta = \left\{\xi < \kappa | a_\xi^\beta \leq x_\xi \leq b_\xi^\beta\right\}$. Minden $\beta < \kappa$-ra $|\beta + 1| < \kappa$. Mivel $\mathcal{U}$ nem főfilter, $\{\xi\} \notin \mathcal{U}$ semmilyen $\xi \leq \beta$-ra, így a $< \kappa$ teljesség miatt $\{\xi < \kappa | \xi \leq \beta\} = \bigcup_{\xi \leq \beta}\{\xi\} \notin \mathcal{U}$, így $\{\xi < \kappa | \xi > \beta\} \in \mathcal{U}$, tehát $\{\xi < \kappa | \xi > \beta\} \cap J \in \mathcal{U}$. Ha $\xi \in J, \xi > \beta$, akkor x_ξ-t úgy választottuk, hogy $x_\xi \in \bigcap_{\gamma < \xi} J_\xi^\gamma$ teljesüljön, jelesül $x_\xi \in J_\xi^\beta$, azaz $a_\xi^\beta \leq x_\xi \leq b_\xi^\beta$, vagyis $\xi \in D_\beta$. Ez azt jelenti, hogy minden $\beta < \alpha$-ra $\{\xi < \kappa | \xi > \beta\} \cap J \subseteq D_\beta$, így $D_\beta \in \mathcal{U}$. Ekkor $[a^\beta] \leq [x] \leq [b^\beta]$ teljesül $\mathrm{ULT}(K,\mathcal{U})$-ban, azaz $[x] \in \left[[a^\beta],[b^\beta]\right] = I^\beta$. Ez minden $\beta < \kappa$-ra igaz, így $[x] \in \bigcap_{\beta<\kappa} I^\beta$, tehát $\bigcap_{\beta<\kappa} I^\beta \neq \emptyset$, vagyis $\mathrm{ULT}(K,\mathcal{U})$ κ-Cantor.

15.15. Tétel: *Ha κ mérhető számosság, $\mathcal{U} \subseteq P(\kappa)$ $<\kappa$-teljes, normális, nemfő- ultrafilter, akkor $\mathrm{ULT}(\mathbb{D}_\kappa,\mathcal{U})$ minden $\alpha \leq \kappa$-ra α-Cantor.*

Bizonyítás: Mivel κ mérhető, nyilván reguláris is, ezért a 14.13. tétel miatt minden $\alpha < \kappa$-ra $\mathbb{D}_\kappa$ α-Cantor. Ekkor egyrészt minden $\alpha < \kappa$-ra a 15.13. lemma miatt $\mathrm{ULT}(\mathbb{D}_\kappa,\mathcal{U})$ α-Cantor, másrészt a 15.14. lemma miatt $\mathrm{ULT}(\mathbb{D}_\kappa,\mathcal{U})$ κ-Cantor is.

Ezzel megkonstruáltunk egy olyan rendezett teste, amely egyszerre κ-Cantor és $\alpha < \kappa$-ra α-Cantor is. Az egyetlen lehetséges probléma, hogy az ultrahatvány konstrukciónál a kofinalitás megnőhet és sajnos ebben az esetben pontosan ez történik.

15.16. Állítás: *Ha κ mérhető számosság, K rendezett test melyre $\mathrm{cf}(K) \geq \kappa$ és $\mathcal{U} \subseteq P(\kappa)$ $<\kappa$-teljes, nemfő- ultrafilter, akkor $\mathrm{cf}\big(\mathrm{ULT}(K,\mathcal{U})\big) > \kappa$.*

Bizonyítás: Legyen $X \subseteq \mathrm{ULT}(K,\mathcal{U})$ olyan részhalmaz, hogy $|X| \leq \kappa$. Soroljuk fel X elemeit egy $([a^\alpha])_{\alpha<\kappa}$, ahol $\alpha < \kappa$-ra $a^\alpha \in K^\kappa$ (ha $|X| < \kappa$, akkor a felsorolásban ismétlés megengedett). Minden $\xi < \kappa$-ra az $\left|\{a_\xi^\alpha : \alpha < \xi\}\right| \leq |\alpha| < \kappa$, így a halmaz nem lehet K-ban kofinális, azaz választhatunk egy $x_\xi \in K$-t, hogy minden $\alpha < \xi$-re $a_\xi^\alpha < x_\xi$. Legyen $x \in K^\kappa$ egy ilyenekből előállított sorozat. Minden $\xi < \kappa$-hoz legyen $C_\alpha = \{\xi < \kappa | a_\xi^\alpha < x_\xi\}$. Az x_ξ-ket úgy választottuk meg, hogy $\xi > \alpha$-ra ez teljesüljön, tehát $\{\xi < \kappa | \xi > \alpha\} \subseteq C_\alpha$. Másrészt ahogy az előző lemmánál is láthattuk, a $<\kappa$ teljesség és a nemfőség miatt $\{\xi < \kappa | \xi > \alpha\} \in \mathcal{U}$, így $C_\alpha \in \mathcal{U}$ minden $\alpha < \kappa$-ra. Ez a definíció szerint azt jelenti, hogy $\mathrm{ULT}(K,\mathcal{U})$-ban $[x] > [a^\alpha]$ minden $\alpha < \kappa$-ra, tehát $[x]$ az X minden eleménél nagyobb. így az X nem lehet kofinális $\mathrm{ULT}(K,\mathcal{U})$-ban. Ez testszőleges $|X| \leq \kappa$-ra igaz, így $\mathrm{cf}\big(\mathrm{ULT}(K,\mathcal{U})\big) > \kappa$.

Ebből az is látszik, hogy $\mathrm{cf}\big(\mathrm{ULT}(\mathbb{D}_\kappa,\mathcal{U})\big) > \kappa$, tehát az mégsem igaz, hogy a saját kofinalitására Cantor lenne. De egy további konstrukvióval segíthetünk rajta.

15.17. Definíció: *Ha K, L rendezett testek, melyekre $K \subseteq L$ (ugyanazokkal a műveletekkel és rendezéssel), akkor az $\{x \in L | \exists a \in K, |x| \leq a\}$ halmazt az L K szerinti levágásának nevezzük és $R_K(L)$-lel jelöljük.*

15.18. Állítás: *Ha K, L rendezett testek, melyekre $K \subseteq L$, akkor $R_K(L) \subseteq L$ részgyűrű, mely a megszorított rendezéssel rendezett integritási tartomány és $K \subseteq R_K(L)$.*

Bizonyítás: Ha $x, y \in R_K(L)$, akkor $\exists a, b \in K$, hogy $|x| \leq a, |y| \leq b$. Ezekre nyilván $a, b \geq 0$. Ekkor $|x + y| \leq |x| + |y| \leq a + b \in K$ és $|xy| = |x||y| \leq ab \in K$, így $x + y, xy \in R_K(L)$. Nyilván $|0| \leq 0 \in K$, így $0 \in R_K(L)$ és ha $x \in R_K(L)$, akkor $|-x| = |x|$ miatt $-x \in R_K(L)$. Ezzel beláttuk, hogy $R_K(L) \subseteq L$ részgyűrű. Világos, hogy $|1| \leq 1 \in K$, így $1 \in R_K(L)$, vagyis $R_K(L)$ egységelemes. A kommutativitás és a nullosztómentesség minden részgyűrűre öröklődik, így $R_K(L)$ integritási tartomány. Az L-en vett rendezés megszorítása nyilván rendezés $R_K(L)$-en és a műveletekkel való kapcsolatai is megfelelnek. Végül, ha $a \in K$, akkor $|a| \leq |a| \in K$, így $a \in R_K(L)$, vagyis az utolsó állítás is teljesül.

15.19. Állítás: *Ha K, L rendezett testek, melyekre $K \subseteq L$, akkor $K \subseteq R_K(L)$ kofinális (és így $\mathrm{cf}(R_K(L)) = \mathrm{cf}(K)$)*

Bizonyítás: Ha $x \in R_K(L)$, akkor $x \leq |x| \leq a$ valamely $a \in K$-ra, így $R_K(L)$ minden eleme felett van K-beli, vagyis K kofinális.

15.20. Állítás: *Ha K, L rendezett testek, melyekre $K \subseteq L$ és egy α rendszámra L α-Cantor, akkor $R_K(L)$ is α-Cantor.*

Bizonyítás: Először azt látjuk be, hogy ha $I = [x, y] \subseteq L$ intervallum, amelyre $x, y \in R_K(L)$, akkor $I \subseteq R_K(L)$. Vegyünk ugyanis $a, b \in K$-t, melyekre $|x| \leq a, |y| \leq b$. Ha $z \in I$, akkor $x \leq z \leq y$, így $|z| \leq \max(|x|, |y|) \leq \max(a, b) \in K$, így $z \in R_K(L)$. Ebből az is világos, hogy az $R_K(L)$-beli $[x, y]$ intervallum megegyezik I-vel, és fordítva $R_K(L)$ minden intervalluma valójában L egy intervalluma.

Legyen $(I_\beta)_{\beta<\alpha}$ zárt intervallumokból álló rendszer $R_K(L)$-ben, melyekre $\gamma < \beta < \alpha$-ra $I_\gamma \supseteq I_\beta$. Mivel az I_β-k L intervallumai és L α-Cantor, ezért $\bigcap_{\beta<\alpha} I_\beta \neq \emptyset$, tehát $R_K(L)$ valóban α-Cantor.

15.21. Állítás: *Ha K, L rendezett testek, melyekre $K \subseteq L$, akkor $R_K(L)$ lokális gyűrű az $I_K(R_K(L))$-lel mint egyetlen maximális ideállal.*

Bizonyítás: A 15.19. állítás alapján $K \subseteq R_K(L)$ kofinális, így a 13.23. állítás miatt $I_K(R_K(L)) \lhd R_K(L)$ ideál. Ahhoz, hogy ez az egyetlen maximális ideál elég annyit belátni, hogy $R_K(L) \setminus I_K(R_K(L))$ minden eleme invertálható $R_K(L)$-ben. Legyen $x \in R_K(L)$, melyre $x \notin I_K(R_K(L))$. Ekkor van egy $a \in K, a > 0$, hogy $|x| \geq a$. Mivel $x \in L$, van egy $\frac{1}{x}$ inverze L-ben és erre $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{a} \in K$, így $\frac{1}{x} \in R_K(L)$ az $R_K(L)$-ben is inverz.

Mivel $I_K(R_K(L)) \lhd R_K(L)$ maximális ideál, ezért ${}^{R_K(L)}\!/\!{}_{I_K(R_K(L))}$ test, amely a 13.25. ponban definiált rendezéssel rendezett testet ad.

15.22. Lemma: *Ha K rendezett test, R rendezett integritási tartomány, melyekre $K \subseteq R$ kofinális és R α-Cantor valamilyen α-Cantor valamilyen α rendszámra, akkor ${}^{R}\!/\!{}_{I_K(R)}$ is α-Cantor.*

Bizonyítás: Válasszunk minden $\bar{a} \in {}^{R}\!/\!{}_{I_K(R)}$-hez egy $r_{\bar{a}} \in R$ reprezentánst. Ha $\bar{a}, \bar{b} \in {}^{R}\!/\!{}_{I_K(R)}$, melyekre $\bar{a} \leq \bar{b}$, akkor $r_{\bar{a}} \leq r_{\bar{b}}$, hiszen ha $\bar{a} < \bar{b}$, akkor ez tetszőleges reprezentánsokra igaz, ha pedig $\bar{a} = \bar{b}$, akkor a két oldalon ugyanaz áll.

Legyen $(I_\beta)_{\beta<\alpha}$ egy ${}^{R}\!/\!{}_{I_K(R)}$-beli zárt intervallumokból álló rendszer, melyre $\gamma < \beta < \alpha$-ra $I_\gamma \supseteq I_\beta$. Ha $I_\beta = [\overline{a_\beta}, \overline{b_\beta}]$, akkor minden $\beta < \alpha$-ra $\overline{a_\beta} \leq \overline{b_\beta}$ ér minden $\gamma < \beta < \alpha$-ra $\overline{a_\gamma} \leq \overline{a_\beta} \leq \overline{b_\beta} \leq \overline{b_\gamma}$. Ez a reprezentánsokra is átvihető, tehát $\beta < \alpha$-ra $r_{\overline{a_\beta}} \leq r_{\overline{b_\beta}}$ és $\gamma<\beta<\alpha$-ra $r_{\overline{a_\gamma}} \leq r_{\overline{a_\beta}} \leq r_{\overline{b_\beta}} \leq r_{\overline{b_\gamma}}$. Ez azt jelenti, hogy a $J_\beta = \left[r_{\overline{a_\beta}}, r_{\overline{b_\beta}}\right] \subseteq R$ zárt intervallumokra is teljesül, hogy $\gamma < \beta < \alpha$-ra $J_\gamma \supseteq J_\beta$. Mivel R α-Cantor, ezért $\bigcap_{\beta<\alpha} J_\beta \neq \emptyset$. Legyen $x \in \bigcap_{\beta<\alpha} J_\beta$. Ekkor minden $\beta < \alpha$-ra $r_{\overline{a_\beta}} \leq x \leq r_{\overline{b_\beta}}$, így a 13.28. állítás alapján $\overline{a_\beta} \leq x + I_K(R) \leq \overline{b_\beta}$, vagyis $x + I_K(R) \in [\overline{a_\beta}, \overline{b_\beta}] = I_\beta$. Ez minden $\beta < \alpha$-ra igaz, így $x + I_K(R) \in \bigcap_{\beta<\alpha} I_\beta$, vagyis $\bigcap_{\beta<\alpha} I_\beta \neq \emptyset$. Mivel az intervallumrendszer tetszőleges volt, ezért ${}^{R}\!/\!{}_{I_K(R)}$ α-Cantor.

Innen már minden megvan a konstrukció befejezéséhez.

15.23. Tétel: *Ha κ mérhető számosság, akkor létezik K rendezett test, melyre* $\mathrm{cf}(K) = \kappa$ *és minden $\alpha \leq \kappa$-ra K α-Cantor.*

Bizonyítás: Vegyünk egy $\mathcal{U} \subseteq P(\kappa)$ $<\kappa$-teljes, normális nemfő- ultrafiltert. Ekkor a 15.15. tétel alapján $\mathrm{ULT}(\mathbb{D}_\kappa, \mathcal{U})$ minden $\alpha \leq \kappa$-ra α-Cantor. Mivel κ limesz rendszám, a 14.10. állítás alapján a $\mathbb{D}_\kappa \subseteq \mathrm{ULT}(\mathbb{D}_\kappa, \mathcal{U})$ résztestre a $\mathrm{cf}(\mathbb{D}_\kappa) = \mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$. A 15.19. állítás miatt $\mathbb{D}_\kappa \subseteq R_{\mathbb{D}_\kappa}(\mathrm{ULT}(\mathbb{D}_\kappa, \mathcal{U}))$ kofinális, így $\mathrm{cf}\left(R_{\mathbb{D}_\kappa}(\mathrm{ULT}(\mathbb{D}_\kappa, \mathcal{U}))\right) = \mathrm{cf}(\mathbb{D}_\kappa) = \kappa$. Legyen $K = {}^{R_{\mathbb{D}_\kappa}(\mathrm{ULT}(\mathbb{D}_\kappa, \mathcal{U}))}\!/\!{}_{I_{\mathbb{D}_\kappa}\left(R_{\mathbb{D}_\kappa}(\mathrm{ULT}(\mathbb{D}_\kappa, \mathcal{U}))\right)}$. Erre a $\mathbb{D}_\kappa \subseteq K$ a 13.30. lemma miatt kofinális, így $\mathrm{cf}(K) = \mathrm{cf}(\mathbb{D}_\kappa) = \kappa$. Ha $\alpha \leq \kappa$ tetszőleges rendszám, akkor $\mathrm{ULT}(\mathbb{D}_\kappa, \mathcal{U})$

α-Cantor, így a 15.20. állítás alapján $R_{\mathbb{D}_\kappa}(\mathrm{ULT}(\mathbb{D}_\kappa, \mathcal{U}))$ is α-Cantor, amiből a 15.22. állítás alapján következik, hogy $K = {R_{\mathbb{D}_\kappa}(\mathrm{ULT}(\mathbb{D}_\kappa, \mathcal{U}))} \big/ {I_{\mathbb{D}_\kappa}\left(R_{\mathbb{D}_\kappa}(\mathrm{ULT}(\mathbb{D}_\kappa, \mathcal{U}))\right)}$ is α-Cantor.

16. Fennmaradó kérdések

Az alábbi részben összegyűjtöttem azokat a kérdéseket, amelyek a dolgozat során felmerültek és nem tudtam eldönteni, hogy igazak-e, vagy legalább is nem tudtam bizonyítást adni rájuk. Szintén gyűjtöttem általánosabb kérdéseket is, olyan alfejezeteket, amelybe kevésbé mentem bele, de akár egy későbbi kutatás során lehetne velük foglalkozni.

- *Lehet-e végtelen sorok konvergenciájáról beszélni rendezett testekben? Értelmezhető-e bizonyos feltételek mellett a $\sum_{\alpha<\kappa} a_\alpha$, ahol $(a_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ egy K rendezett testben futó sorozat?*

A valós számok között megszokott módszerrel, hogy vesszük a véges részösszegeket és azoknak nézzük a határértékét (mondjuk $\kappa = \mathrm{cf}(K)$-ra) az a baj, hogy a részösszegekhez a köztes kisebb limesz rendszámokra is kellene határértéket számolni, ez pedig $\mathrm{cf}(K)$-nál kisebb rendszámokra nem nagyon értelmezhető.

- *Létezik-e olyan K rendezett test, amelyre $\mathrm{P}(K) < \Sigma(K)$?*

- *Igaz-e, hogy minden CW tulajdonságú rendezett test teljes?*

Ez az állítás az ennél erősebb BW tulajdonság esetén nyilván teljesül, hiszen a Cauchy-sorozatok korlátosak, és azoknak BW tulajdonságú rendezett testben van konvergens részsorozata, de ekkor az egész sorozat konvergens.

- *Lehet-e valamilyen tulajdonságú rendezett testek között a folytonos függvények egy bizonyos szűkebb osztályát kijelölni, úgy hogy abban teljesüljenek a Weierstrass és Darboux-tulajdonságok (ebbe az osztályba nyilván nem tartozhat az $A(x)$ archimédeszi függvény, de ha mondjuk olyan egyszerű függvényekre igaz lenne, mint a polinomok, akkor már következne az algebrailag félig zártság is).*

Eddig nem tárgyaltuk, de értelmezhető a következő is: Egy K rendezett testen $a \in K$-ra és $f: K \rightarrowtail K$ függvényre melyre $\exists \delta_0 > 0$, hogy $(a-\delta_0, a+\delta_0) \setminus \{a\} \subseteq D(f)$ azt mondjuk, hogy az f differenciálható az a-ban, ha létezik a $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ határérték, és ekkor ezt $f'(a)$-val jelöljük és az f a-beli deriváltjának nevezzük. Az is könnyen látható, hogy a derivált megfelelő tulajdonságai (pl. műveletekre itt is igazak). Az archimédeszi függvény itt is problémát okoz, mert $A'^{(x)} = 0$ mindenhol, mégsem konstans, így felvetődik a kérdés.

- *Lehet-e valamilyen tulajdonságú rendezett testek között a differenciálható függvények egy bizonyos szűkebb osztályát kijelölni, ahol teljesülnek a deriváltra a Rolle és Lagrange középértéktételek?*

Vegyük észre, hogy ha ezek teljesülnek, akkor a primitív függvény is konstanstól eltekintve egyértelmű az adott függvényosztályon belül. Ebből felvetődik a következő kérdés is.

- Lehet-e valamilyen tulajdonságú rendezett testekre bizonyos függvényosztályokon egy integráláshoz hasonló fogalmat definiálni, ami visszaad egy primitív függvényt.

Ha ez működne, akkor nagyon sok szép a valósakhoz hasonló dolgot tudnánk csinálni. Legyen például $L(x)$ egy olyan függvény egy K test pozitív elemein értelmezve, amelyre $L(1) = 0, L'(x) = \frac{1}{x}$. Erre igazak lesznek-e a logaritmus elemi tulajdonságai, pl. $L(xy) = L(x) + L(y)$? Mit mondhatunk ennek inverzéről $E(x)$-ről? Vagy ha vesszük az $ATG(x)$-et, melyre $ATG(0) = 0$ és $ATG'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, ebből ki tudunk hozni a szögfüggvényekhez hasonlót?

Egy K rendezett test felett egy $(E, \|.\|)$ párt normált térnek nevezünk, ha E vektortér K felett $\|.\|: E \longrightarrow K^+$ leképezés, melyekre:

1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

2. $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|, \forall \lambda \in K, v \in E$

3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \forall v, w \in E$

Ekkor persze a $d(v, w) = \|v - w\|$-vel ellátva E K-metrikus tér. Így van értelme beszélni ezek teljességéről is (persze csak akkor ha K önmaga teljes).

- A Banach-terek elméletéből melyek azok az állítások, amelyek átvihetők teljes normált terekre rendezett testek felett?

Ha K rendezett test, melyben minden pozitív elemnek van négyzetgyöke (ilyet könnyen tudunk csinálni), akkor a $(H, \langle .,. \rangle)$ egy K feletti euklideszi tér, ahol H vektortér K felett $\langle .,. \rangle: H \times H \to K$ lejképezés ha

1. $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle, \forall \lambda, \mu \in K, u, v, w \in H$

2. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in H$

3. $\langle v, v \rangle \geq 0, \forall v \in H$ és $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Ekkor a $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$-vel H normált tér lesz. Hasonló módon a K komplex bővítése felett is definiálhatók euklideszi terek, de ott a második pontban konjugálással kell felírni. Itt is beszélhetünk teljességről.

- A Hilber-terek elméletéből melyek azok az állítások, amelyek átvihetők teljes euklideszi terekre rendezett testek vagy azok komplex bővítése felett?

- Létezik-e $\mathbb{R}$*-en kívül még Cantor tulajdonságú rendezett test?*

- Létezik-e olyan rendezett test $\mathbb{R}$*-en kívül, ami CW tulajdonságú és minden* $\alpha < \mathrm{cf}(K)$*-ra* α*-Cantor (belátható, hogy ilyen csak akkor lehet, ha* $\mathrm{cf}(K)$ *erősen elérhetetlen)?*

- Igaz-e, hogy ha egy rendezett test $\mathrm{cf}(K)$*-Cantor, akkor teljes?*

Irodalomjegyzék:

[1] Pálfy Péter Pál - Csoportelmélet jegyzet

[2] Pelikán József - Algebra jegyzet (Az algebra alaptétele II. bizonyítás)

[3] Zábrádi Gergely - Algebrai számelmélet jegyzet