Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Operátoralgebrák izomorfizmusai

Diplomamunka

Simon Richárd

Matematikus MSc

Témavezető:

Dr. Tarcsay Zsigmond
adjunktus
ELTE Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2020

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Tarcsay Zsigmondnak a téma ajánlását, illetve a rengeteg segítséget, amelyet a dolgozat írása során nyújtott. Köszönet illeti továbbá a remek mesterszakos funkcionálanalízis kurzusokért, amelyek még közelebb hozták hozzám a témát. Köszönet illeti továbbá családomat egyetemi éveim alatti támogatásukért.

Előszó

Jelen szakdolgozat célja betekintést nyújtani normált algebrák (Banach-algebrák, C*-algebrák, Hilbert terek korlátos operátorainak algebrája) közötti izomorfizmusok elméletébe. Elsőként Johnson automatikus folytonossági tételét tárgyaljuk. Erre két különböző bizonyítást is mutatunk, melyek közül az elsőt Banach-algebrák reprezentációelméletének egy rövid alapozása előzi meg. Ezután belátjuk Eidelheit tételét, amely Banach-téren értelmezett korlátos operátorok algebrája közötti algebra-izomorfizmusok lehetséges alakját karakterizálja. Később a Jordan-homomorfizmusok elméletét tárgyaljuk, bebizonyítjuk Herstein tételét, majd a fejezet eredményeinek alkalmazásaként a Gleason-Zelazko-Kahane tételt. Ezután C*-algebra egységgömbjének extremális pontjainak karakterizációját tárgyaljuk, majd a következő fejezetben belátunk egy C*-algebrákra vonatkozó általánosított Schwarz-egyenlőtlenséget, illetve ennek alkalmazásaként leírjuk C^*-algebrák rendezés tartó leképezéseinek struktúráját. Végül bizonyítjuk Kadison két izometria tételét, melyek közül az első Jordan-homomorfizmusok izometrikusságát tárgyalja, a második pedig a Banach-Stone tétel általánosítása nemkommutatív C*-algebrákra.

Jelölések, felhasznált tételek

Az alábbiakban összegyűjtünk néhány, a dolgozatban használt jelölést, illetve ismertnek tekintett, bizonyítás nélkül hivatkozott tételt. $\mathbb{K}$ mindig a valós vagy komplex számtestet jelöli. $\mathcal{B}(X)$ egy X Banach-tér korlátos operátorainak algebráját jelöli.

0.0.1. Tétel. *(Kommutatív Gelfand-Naimark tétel) Minden kommutatív egységelemes C*-algebra izometrikusan *-izomorf egy alkalmas kompakt Hausdorff-tér folytonos függvényalgebrájának megfelelő részalgebrájával.*

0.0.2. Tétel. *(Nemkommutatív Gelfand-Naimark tétel) Minden nemkommutatív egységelemes C*-algebra izometrikusan *-izomorf egy alkalmas $\mathcal{H}$ Hilbert-tér korlátos operátorainak algebrájának megfelelő részalgebrájával.*

0.0.3. Tétel. *(Zárt gráf tétel) Egy T operátor grafikonján(vagy gráfján) az alábbi*

$$G(T) = \{(x, Tx) | x \in domT\}$$

halmazt értjük. Ha X, Y normált terek, akkor azt mondjuk hogy a $T : X \to Y$ operátor zárt, ha a $G(T)$ halmaz zárt $X \times Y$-ban. A Banach-féle zárt gráf tétel: Legyenek E és F Banach-terek, és $T : E \to F$ zárt lineáris operátor. Ekkor T folytonos.

0.0.4. Tétel. *(Douglas faktorizációs tétele) Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, és legyenek $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátorok. Ekkor a következő kijelentések ekvivalensek:*

(i) *A és B képtereire fennáll, hogy*

$$ran\, A \subseteq ran\, B,$$

(ii) *létezik olyan $c \geq 0$, hogy minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra*

$$||A^*x|| \leq c \cdot ||B^*x||,$$

(iii) *minden $y \in \mathcal{H}$ vektorra létezik olyan $c_y \geq 0$ szám, amelyre minden $x \in \mathcal{H}$ vektor mellett*

$$|(x|Ay)| \leq c_y \cdot ||B^*x||,$$

(iv) *létezik olyan $D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátor amelyre*

$$A = BD.$$

A fenti feltételek teljesülése mellett egyetlen olyan $D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operátor létezik, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

$$||D|| = \inf\{\lambda \geq 0 | AA^* \leq \lambda^2 BB^*\}, \tag{1}$$

$$ran\, D \subseteq [ker\, B]^{\perp}. \tag{2}$$

Ezt a D operátort a

$$BX = A,$$

X ismeretlennel felírt Douglas-egyenlet megoldásának hívjuk.

1. fejezet

Banach-algebrák reprezentációja

Ahhoz, hogy a következő fejezetben beláthassuk az automatikus folytonossági tételt szükségünk lesz néhány eredményre Banach-algebrák reprezentációelméletéből. Az alábbiakban ezeket foglaljuk össze.

1.0.1. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ algebra és $\mathcal{X}$ vektortér. $\mathcal{A}$ egy T reprezentációja $\mathcal{X}$-en egy $a \to T_a$ homomorfizmusa $\mathcal{A}$-nak $\mathcal{L}(\mathcal{X})$-be. Az $\mathcal{Y}$ altér T-invariáns, ha $T_a y$ $\mathcal{Y}$-beli minden $y \in \mathcal{Y}$-ra. Azt mondjuk, hogy a T reprezentáció:

- Hű, ha a T homomorfizmus injektív.
- Triviális, ha $T_a = 0$ minden $a \in \mathcal{A}$-ra.
- Irreducibilis, ha a $\{0\}$ és $\mathcal{X}$ az egyetlen T-invariáns alterek, és T nem triviális.
- Ciklikus, ha létezik egy $z \in \mathcal{X}$ (úgynevezett ciklikus) vektor, amelyre $\mathcal{X} = \{T_a z : a \in \mathcal{A}\}$
- Ekvivalens $\mathcal{A}$-nak egy S $\mathcal{Y}$ vektortéren adott reprezentációjához, ha létezik egy $U : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ lineáris bijekció (amit ekvivalenciának hívunk), amelyre teljesül hogy:

$$S_a U = U T_a \qquad a \in \mathcal{A}.$$

A folytonossági tétel bizonyítása az irreducibilis reprezentációkon keresztül történik, így az alábbiakban ezek néhány tulajdonságát foglaljuk össze. Először egy ekvivalens jellemzést adunk.

1.0.2. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ algebra, és T $\mathcal{A}$ egy reprezentációja $\mathcal{X}$-en. Ekkor T pontosan akkor ciklikus, ha ekvivalens $L^{\mathcal{A}/\mathcal{L}}$-lel $\mathcal{A}$-nak valamilyen $\mathcal{L}$ moduláris balideáljával. Ha z tetszőleges ciklikus vektora T-nek, akkor $\mathcal{L}$ választható úgy, hogy*

$$\mathcal{L} = \{a \in \mathcal{A} | T_a z = 0\}.$$

Bizonyítás. Legyen z tetszőleges vektor $\mathcal{X}$-ben, ekkor $\mathcal{L} = \{a \in \mathcal{A} : T_a z = 0\}$ egy balideál. Tegyük fel most, hogy z ciklikus vektor. Ekkor létezik $e \in \mathcal{A}$, hogy $T_e z = z$. Így e nyilván egy relatív jobb egysége $\mathcal{L}$-nek, tehát $\mathcal{L}$ moduláris. Tetszőleges $a \in \mathcal{A}$-ra legyen $U(a + \mathcal{L}) = T_a z$. Ez jóldefiniált $\mathcal{L}$ választása miatt, és így egy lineáris injekciója $\mathcal{A}/\mathcal{L}$-nek $\mathcal{X}$-be. Szürjektív, mivel z ciklikus vektor. Könnyen látható, hogy $T_a U = U L_a^{\mathcal{A}/\mathcal{L}}$ minden $a \in \mathcal{A}$-ra, és így U ekvivalencia, ami igazolja a feltétel szükségességét. Tegyük fel most, hogy $\mathcal{L}$ egy moduláris balideál e relatív jobb egységgel.Ekkor $L_a^{\mathcal{A}/\mathcal{L}}(e + \mathcal{L}) = a + \mathcal{L}$ minden $a \in \mathcal{A}$-ra, és így $e+\mathcal{L}$ ciklikus vektora $L^{\mathcal{A}/\mathcal{L}}$-nek. Mivel az ekvivalencia megőrzi a ciklikusságot, ezzel beláttuk a feltétel elégségességét is. □

1.0.3. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ algebra, és T az $\mathcal{A}$ egy reprezentációja az $\mathcal{X}$ vektortéren. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. *T irreducibilis.*
2. *Minden nemnulla vektor $\mathcal{X}$-ben ciklikus vektor, és $\mathcal{X}$ nem nulla dimenziós.*
3. *Létezik olyan maximális moduláris balideál $\mathcal{L}$, hogy T ekvivalens $L^{\mathcal{A}/\mathcal{L}}$-lel.*

Bizonyítás. $1 \Rightarrow 2$

A $\{z \in \mathcal{X} : T_{\mathcal{A}} z = \{0\}\}$ egy T-invariáns altér, és mivel T irreducibilis, ezért csak a $\{0\}$ vagy $\mathcal{X}$ lehet. Mivel T nemtriviális, ezért ez az altér csak a $\{0\}$ lehet. Bármely $z \in \mathcal{X}$-re $T_{\mathcal{X}} z = \{T_a z : a \in \mathcal{A}\}$ egy T-invariáns altér, ami a $\{0\}$ vagy $\mathcal{X}$. Minden nemnulla z vektorra $T_{\mathcal{A}} z = \mathcal{X}$, azaz z ciklikus.

$2 \Rightarrow 3$

Az előző állítás szerint T ekvivalens $L^{\mathcal{A}/\mathcal{L}}$-lel valamilyen $\mathcal{L}$ moduláris balideállal. Ha $\mathcal{L}$ valódi, de nem maximális, akkor tekintsünk valamilyen K balideált, ami valódi módon tartalmazza $\mathcal{L}$-et. Ekkor $K/\mathcal{L}$ egy nemnulla valódi $L^{\mathcal{A}/\mathcal{L}}$-invariáns altér. Ez azonban ellentmondás, ugyanis $K/\mathcal{L}$ minden nemnulla eleme egy ciklikus vektora $L^{\mathcal{A}/\mathcal{L}}$-nek $L^{\mathcal{A}/\mathcal{L}}$ és T ekvivalenciája miatt.

$3 \Rightarrow 1$

Ha $\mathcal{L}$ egy maximális balideál és $\mathcal{Y}$ egy $L^{\mathcal{A}/\mathcal{L}}$-invariáns altere $\mathcal{A}/\mathcal{L}$-nek akkor

$$\{a \in \mathcal{A} : a + \mathcal{L} \in \mathcal{Y}\}$$

az $\mathcal{A}$ egy balideálja, ami tartalmazza $\mathcal{L}$-t. Így $\mathcal{Y}$ csak a $\{0\}$ vagy $\mathcal{A}/\mathcal{L}$ lehet. Ekkor ha $\mathcal{L}$ moduláris, akkor mind $L^{\mathcal{A}/\mathcal{L}}$, mind a vele ekvivalens T reprezentáció irreducibilis. □

1.1. Reprezentációk normált tereken

Az alábbi alfejezetben ismertetjük a fejezet elején bevezetett fogalmak normált térbeli változatát, majd bebizonyítjuk azokat az állításokat, amelyek Johnson folytonossági tételének belátásához szükségesek.

1.1.1. Definíció. Legyen T az $\mathcal{A}$ algebra egy reprezentációja az $\mathcal{X}$ normált téren. Ekkor azt mondjuk, hogy T:

1. Normált, ha $T_a \in \mathcal{B}(X)$ minden $a \in \mathcal{A}$-ra.

2. Topologikusan ciklikus, ha létezik olyan $z \in X$ vektor, amelyre $T_{\mathcal{A}}z = \{T_a z : a \in \mathcal{A}\}$ sűrű X-ben.

3. Topologikusan irreducibilis, ha a $\{0\}$ és X az egyetlen zárt T-invariáns alterek, és T nem triviális.

4. Topologikusan ekvivalens az $\mathcal{A}$ algebra egy S reprezentációjával az Y normált téren, ha létezik olyan U lineáris homeomorfizmusa X-nek Y-ba, amelyre

$$S_a U = U T_a \qquad a \in \mathcal{A}.$$

Ha $\mathcal{A}$ egy normált algebra, akkor T:

5. Folytonos, ha normált és folytonos mint $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(X)$ leképezés.

6. Erősen folytonos, ha $a \to T_a x$ folytonos leképezés $\mathcal{A}$-ból X-be minden rögzített $x \in X$-re.

1.1.2. Állítás. *Egy Banach-algebra egy erősen folytonos normált reprezentációja folytonos.*

Bizonyítás. Legyen T egy erősen folytonos normált reprezentációja az $\mathcal{A}$ Banach-algebrának az X normált téren. Alkalmazzuk a Hahn-Banach tételt az $\{S_x : x \in X_1\}$ halmazra, ahol X_1 az X egységgömbje, és

$$S_x(a) = T_a x \qquad \forall a \in \mathcal{A}\ x \in X$$

Az erős folytonosság miatt minden S_x leképezés folytonos $\mathcal{A}$-ból X-be. T normáltságából következik, hogy

$$||S_x(a)|| = ||T_a x|| \leq ||T_a||||x|| \leq ||T_a|| \qquad \forall a \in \mathcal{A}\ x \in X.$$

Így létezik olyan M, amelyre

$$||S_x|| \leq M \qquad \forall x \in X,$$

amiből kapjuk, hogy

$$||T_a|| = \sup_{x \in X_1} ||T_a(x)|| = \sup_{x \in X_1} ||S_x(a)|| \leq M||a||,$$

azaz T folytonos.

□

1.1.3. Tétel. *Legyen T egy ciklikus reprezentációja az $\mathcal{A}$ normált algebrának az X vektortéren. Ha z egy ciklikus vektora T-nek, és az $\{a \in \mathcal{A} : T_a z = 0\}$ zárt, akkor*

$$||x||_z = \inf\{||a|| : a \in \mathcal{A}, T_a z = x\} \qquad \forall x \in X$$

egy normát definiál X-en, amelyre T egy folytonos reprezentáció $(X, ||.||_z)$-n, amelyre teljesül, hogy $||T_a(x)||_z \leq ||a||$ minden $a \in \mathcal{A}$-ra. Ha $\mathcal{A}$ Banach-algebra, akkor $(X, ||.||_z)$ Banach-tér. Ha X eleve Banach-tér a $||.||$ normával, akkor T erősen folytonos $||.||$ szerint, és $||.||_z$ ekvivalens $||.||$-val.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{L} = \{a \in \mathcal{A} : T_a z = 0\}$. Ekkor $||.||_z$ nem más, mint az $\mathcal{A}/\mathcal{L}$ faktornormájának átvitele az ekvivalenciával X-be a ciklikus reprezentációk ekvivalens jellemzésénél megadott ekvivalenciával. A $||T_a||_z \leq ||a||$ kijelentés egy egyszerű átfogalmazása annak, hogy $L^{\mathcal{A}/\mathcal{L}}$ egy kontraktív reprezentáció. Ebből azonnal következik, hogy $(X, ||.||_z)$ teljes, ha $\mathcal{A}$ Banach-algebra. □

1.1.4. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ algebra. Ekkor semelyik valódi egy-vagy kétoldali moduláris ideál sem tartalmazza a relatív egységét.*

Bizonyítás. Ha I baloldali moduláris ideál $\mathcal{A}$-ban és $e \in I$ relatív jobb egység, akkor bármely $a \in A$ elemre $a - ae \in I$ és $ae \in I$ miatt $a = (a - ae) + ae \in I$, vagyis $I = \mathcal{A}$. □

1.1.5. Tétel. *Legyen $||.||$ norma az $\mathcal{A}$ Banach-algebrán. Minden valódi egy-vagy kétoldali moduláris ideál lezárása a $||.||$ szerint valódi. Következésképp minden maximális moduláris ideál zárt.*

Bizonyítás. Mivel minden eset hasonlóan tárgyalható, csak balideálokra bizonyítjuk be az állítást. Legyen e relatív jobb egység az $\mathcal{L}$ valódi moduláris balideálhoz. Megmutatjuk, hogy bármely $b \in \mathcal{L}$ elemre $||e - b|| \geq 1$. Ha nem, $||e - b|| \leq 1$-ből következik, hogy létezik c kvázi-inverze $e - b$-nek. Ez azonban ellentmond az előző állításnak, így e nincs benne $\mathcal{L}$ lezártjában, azaz a lezárt valódi. □

1.1.6. Definíció. Egy ideált primitívnek nevezünk, ha egy irreducibilis reprezentáció magja. Egy valódi I ideált prímnek nevezünk, ha bármely I_1, I_2 ideálokra ha teljesül $I_1 I_2 \subseteq I$, akkor $I_1 \subseteq I$ vagy $I_2 \subseteq I$. Ha $\mathcal{L}$ balideál, akkor az

$$\mathcal{L} : \mathcal{A} = \{a \in \mathcal{A} \,|\, a\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}\}$$

halmazt az $\mathcal{L}$ kvóciensének hívjuk.

1.1.7. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ algebra.*

1. *Egy $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$ ideál pontosan akkor primitív, ha előáll $\mathcal{L} : \mathcal{A}$ alakban valamilyen $\mathcal{L}$ maximális moduláris balideálra. Ekkor $\mathcal{P}$ a legnagyobb ideál $\mathcal{L}$-ben.*
2. *A $\mathcal{P}$ primitív ideálra teljesül, hogy*

$$\mathcal{P} \subseteq \cap\{\mathcal{L} \,|\, \mathcal{L} \textit{ egy maximális moduláris balideál, amelyre} \mathcal{P} = \mathcal{L} : \mathcal{A}\}$$

Bizonyítás. 1.: Tegyük fel, hogy $\mathcal{P}$ a magja a nemtriviális irreducibilis $T : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(X)$ reprezentációnak. Legyen $z \in X \setminus \{0\}$ és definiáljuk $\mathcal{L}$-et a következőképp:$\mathcal{L} = \{a \in \mathcal{A} : T_a z = 0\}$. Ekkor a korábbiakban látottak szerint $\mathcal{L}$ maximális moduláris balideál, és T ekvivalens $L^{\mathcal{A}/\mathcal{L}}$-nel. Nyilván $\mathcal{P}$ a magja $L^{\mathcal{A}/\mathcal{L}}$-nek, és ez a mag $\mathcal{L} : \mathcal{A}$. $\mathcal{L} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$. Bármely $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{L}$ ideál esetén $\mathcal{I}\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ és így fennál $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{L} : \mathcal{A}$.

2.:

Mivel $\mathcal{L} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ fennáll bármely $\mathcal{L}$ baloldali moduláris ideálra, így

$$\mathcal{P} \subseteq \cap\{\mathcal{L} \,|\, \mathcal{L} \text{ egy maximális moduláris balideál, amelyre} \mathcal{P} = \mathcal{L} : \mathcal{A}\}.$$

A fordított irányú tartalmazás belátásához tegyük fel, hogy $\mathcal{P}$ a $T : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$ irreducibilis reprezentáció magja, és $a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{P}$. Ekkor $T_a z$ nem azonosan nulla valamely $z \in \mathcal{X}$ vektorra. Így a nem eleme az $\mathcal{L} = \{a \in \mathcal{A} | T_a z = 0\}$ halmaznak. Ugyanakkor az előbb bizonyítottuk hogy $\mathcal{L}$-re teljesül $\mathcal{P} = \mathcal{L} : \mathcal{A}$. □

1.1.8. Állítás. *Egy Banach-algebra bármely primitív ideálja zárt.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{P}$ az $\mathcal{A}$ Banach-algebra egy primitív ideálja. Az előző tételben megmutattuk, hogy $\mathcal{P}$ előáll valamilyen $\mathcal{L}$ maximális moduláris balideálra mint $\mathcal{L} : \mathcal{A}$. A korábbiakban megmutattuk, hogy $\mathcal{L}$ zárt, $\mathcal{L} : \mathcal{A}$ definíciójából adódóan pedig $\mathcal{P}$ is zárt. □

1.1.9. Tétel. *Legyen T az $\mathcal{A}$ algebra egy irreducibilis reprezentációja az X vektortéren. Ekkor a*

$$(T_{\mathcal{A}})' = \{S \in \mathcal{L}(X) : ST_a = T_a S \ a \in \mathcal{A}\}$$

halmaz egy hányados algebra. Ha $(T_{\mathcal{A}})$ egy hányados algebra, akkor T felbonthatatlan.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $S \in (T_{\mathcal{A}})'$. Ekkor SX egy T-invariáns altér. Mivel $SX = \{0\}$ pontosan akkor, ha S nulla, ezért $SX = X$ minden nemnulla S-re. Hasonlóan, az $\{x : Sx = 0\}$ is T-invariáns, és így $\{0\}$ minden nemnulla S-re. Így minden nemnulla $S \in (T_{\mathcal{A}})'$ invertálható $\mathcal{L}(X)$-ben és inverze is $(T_{\mathcal{A}})'$-beli, azaz $(T_{\mathcal{A}})'$ hányados algebra. Tegyük most fel, hogy T felbontható. Ekkor a két altérre vetítő projekció $(T_{\mathcal{A}})'$-beli, mivel az alterek invariánsak. Azonban ezek a projekciók nemtriviális idempotens elemek, ami ellentmond annak, hogy $(T_{\mathcal{A}})$ hányados algebra □

1.1.10. Tétel. *Legyen T egy irreducibilis reprezentációja az $\mathcal{A}$ Banach-algebrának az X vektortéren. Ekkor a*

$$(T_{\mathcal{A}})' = \{S \in \mathcal{L}(X) : ST_a = T_a S \ a \in \mathcal{A}\}$$

halmaz az X identikus leképezésének komplex többszöröseinek a halmaza.

Bizonyítás. Legyen σ norma $\mathcal{A}$-n, továbbá legyen $z \in X$ egy nemnulla vektor, és legyen $||.||_z$ a korábban már bevezetett norma. Tegyük fel, hogy S benne van a $(T_{\mathcal{A}})'$ halmazban. Ekkor $x = T_a z$-re kapjuk, hogy $Sx = ST_a z = T_a S z$, amiből következik, hogy $||S_x||_z \leq ||T_a||_z ||Sz||_z$. □

1.1.11. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ Banach-algebra. $\mathcal{A}$ minden irreducibilis normált reprezentációja egy normált téren folytonos.*

Bizonyítás. Legyen P a magja az $\mathcal{A}$ Banach-algebra T irreducibilis normált reprezentációjának az X normált téren. Ekkor P primitív, ennélfogva zárt. Így lecserélhetjük $\mathcal{A}$-t $\mathcal{A}/P$-re, és feltehetjük, hogy T hű reprezentáció. Tekintsük $\mathcal{A}$-t mint operátorok egy $\mathcal{B}(X)$-be beágyazott irreducibilis algebráját. A korábbiak szerint elég megmutatni, hogy T erősen folytonos(azaz minden $x \in X$-re $A \to Ax$ folytonos). Ha X véges dimenziós, akkor $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(X)$ szintén véges dimenziós, így az $A \to Ax$ leképezés folytonos $\mathcal{A}$-n minden $x \in X$-re. Feltehető tehát, hogy X végtelen dimenziós. Továbbá az $\mathcal{A}$ algebra $\mathcal{A}'$ kommutátora a korábbiak szerint $\mathbb{C}I$, így megadható X-beli vektorok olyan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{A}'$ felett lineárisan független sorozata, amelyre $||x_n|| = 1$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Tegyük fel, hogy $x \in X$ olyan vektor, hogy az $A \mapsto Ax$ leképezés folytonos $\mathcal{A}$-n. Ekkor minden rögzített $B \in \mathcal{A}$-ra az $A \mapsto AB \mapsto ABx$ folytonos minden $A \in \mathcal{A}$-ra. Ugyanakkor T irreducibilitásából tudjuk, hogy $\{Bx|B \in \mathcal{A}\} = X$ minden x nem nulla vektorra. Így az $A \mapsto Ax$ leképezés vagy folytonos vagy nem folytonos minden nem nulla $x \in X$ vektorra. A második lehetőségből ellentmondásra fogunk jutni, amellyel igazoljuk a tételt. Tegyük fel, hogy $A \mapsto Ax$ nem folytonos minden $x \in X$-re. Először megmutatjuk, hogy minden $K > 0, \epsilon > 0, m \in \mathbb{N}$-hez létezik $A \in \mathcal{A}$ a következő tuladjonságokkal:

1. $||A|| < \epsilon$

2. $Ax_1 = Ax_2 = ... = Ax_{m-1}$

3. $||Ax_m|| > K$

Legyenek K, ϵ, m a továbbiakban rögzítettek, továbbá legyen $M_n = \{A \in \mathcal{A} : Ax_n = 0\}$. Ekkor M_n minden $n \in \mathbb{N}$-re egy maximális moduláris balideálja $\mathcal{A}$-nak. Definiáljuk R-et és L-et a következőképpen: $R = M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_{m_1}$, $L = R + M_m$. A tételben megmutattuk, hogy létezik olyan $B \in \mathcal{A}$ amelyre $Bx_1 = Bx_2 = ... = Bx_{m-1} = 0, Bx_m = x_m \neq 0$. Ez a $B \in \mathcal{A}$ elem $R \subseteq L$-ben van, viszont nincs benne M_m-ben, így M_m maximalitásából kapjuk, hogy $L = \mathcal{A}$. Így az összeadás egy folytonos lineáris leképezést definiál $R \oplus M_m$-ből $\mathcal{A}$-ba. A nyílt leképezés tétel szerint létezik olyan $\delta > 0$ konstans, hogy minden $B \in \mathcal{A}$-hoz, amelyre teljesül $||B|| < \delta\epsilon$ léteznek $A \in R$ és $C \in M_m$ elemek, amelyekre teljesül, hogy $B = A + C$ és $||A|| < \epsilon$, $||C|| < \epsilon$. Mivel $A \mapsto Ax_m$ nem folytonos létezik olyan $B \in \mathcal{A}$, hogy $||Bx_m|| > K$. Válasszuk most A-t és C-t a fentiek szerint. Ekkor A megfelel az 1,2,3 feltételeknek(mivel $Cx_m = 0$). Indukcióval készíthetünk olyan $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{A}$-beli sorozatot, amelyre a következők igazak:

1. $||A_n|| < 2^{-n}$

2. $A_n x_1 = A_n x_2 = ... = A_n x_{n-1} = 0$

3. $||A_n x_n|| > n + ||A_1 x_n + A_2 x_n + ... + A_{n-1} x_n||$.

Definiáljuk $B_k \in \mathcal{A}$-t úgy, hogy $B_k = \sum\limits_{n>k} A_n$. Mivel minden A_n eleme a zárt M_k ideálnak minden $n > k$-ra, B_k eleme M_k-nak. Így minden $k \in \mathbb{N}$-re kapjuk, hogy

$$||B_0 x_k|| = ||A_1 x_k + A_2 x_k + ... + A_k x_k + B_k x_k||$$

$$\geq ||A_k x_k|| - ||A_1 x_k + A_2 x_k + ... + A_{k-1} x_k||$$

$$\geq k = k||x_k||.$$

Azonban B_0 egy korlátos operátor, mivel T normális reprezentáció. Ezzel az ellentmondással beláttuk a tételt. □

2. fejezet

Algebrák radikálja

Az alábbi fejezetben összefoglaljuk azokat az ismereteket, amelyekre a későbbi állítások megértéséhez szükségünk lesz az egységelemes algebrák radikáljának elméletéből.

2.0.1. Definíció. Egy egységelemes $\mathcal{A}$ radikáljának nevezzük és $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$-val jelöljük az $\mathcal{A}$ maximális balideáljainak metszetét. Ha $\mathcal{A}$-ban nem létezik maximális balideál, akkor $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

2.0.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ algebra félig-egyszerű, ha $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$, azaz ha $\mathcal{A}$ maximális balideáljainak metszete triviális.

A Zorn-lemma alkalmazásával egyszerűen belátható az alábbi állítás:

2.0.3. Lemma. *Ha $\mathcal{A}$ egységelemes algebra, akkor $\mathcal{A}$ minden valódi ideálja része egy maximális balideálnak.*

2.0.4. Következmény. *Legyen $\mathcal{A}$ egységelemes algebra, és $a \in \mathcal{A}$ olyan elem, amelynek nincs balinverze. Ekkor létezik olyan $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ maximális balideál, amelyre $a \in \mathcal{M}$.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{I} := \mathcal{A} \cdot a$, akkor $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ valódi balideál, továbbá $a \in \mathcal{I}$. Az előző lemma szerint létezik olyan $\mathcal{M}$ maximális balideál, amelyre $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}$, speciálisan $a \in \mathcal{M}$. □

2.0.5. Lemma. *Jelölje $G(\mathcal{A})$ az $\mathcal{A}$ invertálható elemeinek halmazát. Legyen $x \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$, ekkor $\mathbf{1} - x \in G(\mathcal{A})$.*

Bizonyítás. Elsőként megmutatjuk, hogy $\mathbf{1} - x$ balinvertálható. Valóban, ha nem volna az, akkor az előző állítás szerint létezik $\mathcal{M}$ maximális balideál, amelyre $\mathbf{1} - x \in \mathcal{M}$. Ugyanakkor $x \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ miatt $x \in \mathcal{M}$, azaz $\mathbf{1} = x + (\mathbf{1} - x) \in \mathcal{M} + \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$, ami ellentmondás. Ezzel igazoltuk, hogy létezik $y \in \mathcal{A}$, amelyre $y(\mathbf{1} - x) = \mathbf{1}$. Megmutatjuk, hogy $(\mathbf{1} - x)y = \mathbf{1}$ is teljesül. Ehhez elég igazolni, hogy y-nak van balinverze. Tegyük fel indirekt, hogy y nem balinvertálható, ekkor a fentiek szerint létezik $\mathcal{M}$ maximális balideál, amelyre $y \in \mathcal{M}$, de ekkor $x \in \mathcal{M}$ miatt $yx \in \mathcal{M}$, amiből kapjuk, hogy

$$\mathbf{1} = y(\mathbf{1} - x) = y - yx \in \mathcal{M},$$

azaz $\mathbf{1} \in \mathcal{M}$, ami lehetetlen. Ezzel beláttuk, hogy y egyszerre bal- és jobbinverze is $\mathbf{1}-x$-nek, azaz $\mathbf{1}-x \in G(\mathcal{A})$. □

Az alábbi tétel a radikál egy karakterizációját adja egységelemes Banach-algebra esetén.

2.0.6. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egységelemes Banach-algebra, ekkor*

$$\operatorname{Rad}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \,|\, r(ba) = 0 \qquad \forall b \in \mathcal{A}\}.$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha $a \in \mathcal{A}$ olyan elem, amelyre minden $b \in \mathcal{A}$ esetén $r(ba) = 0$, akkor $a \in \operatorname{Rad}(\mathcal{A})$. Tegyük fel indirekten, hogy $a \notin \operatorname{Rad}(\mathcal{A})$. Ekkor létezik $\mathcal{M}$ maximális balideál, hogy $a \notin \mathcal{M}$. Világos, hogy az $\mathcal{I} = \mathcal{A} \cdot a + \mathcal{M}$ olyan balideál, amelyre $a \in \mathcal{I}$ és $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{I}$, ezért $\mathcal{M}$ maximalitása miatt $\mathcal{I} = \mathcal{A}$. Speciálisan, léteznek olyan $b \in \mathcal{A}$ és $x \in \mathcal{M}$ elemek, hogy $\mathbf{1} \in \mathcal{I}$ előáll $\mathbf{1} = ba + x$ alakban, azaz $\mathbf{1} - ba \in \mathcal{M}$. Az a elemről azonban feltettük, hogy $r(ba) = 0$, és így $\mathbf{1} - ba \in G(\mathcal{A})$, ez azonban lehetetlen, mivel az $\mathcal{M}$ valódi balideál nem tartalmazhat invertálható elemet. Megfordítva, megmutatjuk hogy ha $a \in \operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ és $b \in \mathcal{A}$, akkor $r(ba) = 0$. Mivel $\operatorname{Rad}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ balideál, ezért $b \in \mathcal{A}$ esetén $ba \in \operatorname{Rad}(\mathcal{A})$, azaz elég megmutatni, hogy tetszőleges $x \in \operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ esetén $r(x) = 0$.A korábbiak alapján bármely $y \in \operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ esetén $\mathbf{1} - y \in G(\mathcal{A})$, speciálisan bármely $x \in \operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ és $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esetén $\mathbf{1} - \lambda^{-1}x \in G(\mathcal{A})$, vagy másképp $\lambda\mathbf{1} - x \in G(\mathcal{A})$, azaz $\lambda \notin Sp(x)$. □

2.0.7. Következmény. *Ha $\mathcal{A}$ egységelemes Banach-algebra, akkor az $\mathcal{A}$ Jacobson-radikálja megegyezik az $\mathcal{A}$ jobboldali ideáljainak metszetével, azaz* $\operatorname{Rad}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ *kétoldali ideál.*

Bizonyítás. Jelölje $\operatorname{Rad}'(\mathcal{A})$ az $\mathcal{A}$ jobboldali ideáljainak metszetét. Az előző tételhez hasonlóan igazolható, hogy

$$\operatorname{Rad}'(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} | r(ab) = 0 \;\; \forall b \in \mathcal{A}\}$$

Mivel a Jacobson-lemma szerint $r(ab) = r(ba)$ teljesül minden $a, b \in \mathcal{A}$, ezért a fenti egyenlőségből és az előző tételből kapjuk, hogy $\operatorname{Rad}(\mathcal{A}) = \operatorname{Rad}'(\mathcal{A})$. Mivel $\operatorname{Rad}(\mathcal{A}$ bal, $\operatorname{Rad}'(\mathcal{A})$ pedig jobboldali ideál, ebből az egyenlőségből kapjuk, hogy a Jacobson-radikál kétoldali ideál. □

2.0.8. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ egységelemes Banach-algebra és jelölje $\pi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ a kanonikus faktor leképezést. Bármely $a \in \mathcal{A}$ esetén*

$$Sp(a) = Sp(\pi(a))$$

Bizonyítás. Mivel π egységelemtartó algebra homomorfizmus, ezért fennáll az $Sp(\pi(a) \subseteq Sp(a)$ tartalmazás. Megfordítva, elegendő azt igazolni, hogy ha $\pi(a)$ invertálható az $\mathcal{A}/\operatorname{Rad}(\mathcal{A})$ faktor algerbában, akkor $\mathcal{A}$ invertálható $\mathcal{A}$-ban. Tegyük fel tehát, hogy létezik $b \in \mathcal{A}$ amelyre

$$\pi(b)\pi(a) = \pi(a)\pi(b) = \mathbf{1} + \operatorname{Rad}(\mathcal{A}),$$

akkor létezik $x \in \operatorname{Rad}(\mathcal{A})$, hogy $ab = \mathbf{1} + x$, de akkor $r(x) = \{0\}$ miatt ab invertálható, amiből következik, hogy a-nak létezik jobb inverze. Hasonlóan kapjuk, hogy a-nak létezik bal inverze is, azaz $a \in G(\mathcal{A})$. □

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy minden C*-algebra félig-egyszerű. Ehhez szükségünk lesz az alábbi lemmára:

2.0.9. Lemma. *Egységelemes C*-algebrában bármely önadjungált balinvertálható elem invertálható.*

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathcal{A}$ önadjungált, balinvertálható elem, és $b \in \mathcal{A}$ olyan, hogy $ba = \mathbf{1}$. Ekkor

$$b^* = bab^* = (bab^*)^* = b^{**} = b,$$

azaz $b^* = b$. Ebből pedig már következik, hogy $ab = (ba)^* = \mathbf{1}^* = \mathbf{1}$, azaz b jobb inverze is a-nak. □

2.0.10. Tétel. *Minden egységelemes C*-algebra félig-egyszerű.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A}$ egységelemes C*-algebra és $a \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$.Tegyük fel indirekt, hogy $a \neq 0$, akkor $r(a^*a) = ||a^*a|| = ||a||^2 > 0$. Legyen $\lambda \in Sp(a^*a)$ olyan(az öndajungált elemek spektrumának valós volta miatt szükségképpen valós) szám, hogy $\lambda = r(a^*a)$, akkor $\lambda\mathbf{1} - a^*a$ nem invertálható, vagy ami ezzel ekvivalens, $\mathbf{1} - \frac{1}{\lambda}a^*a$ nem invertálható. Mivel $a \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ és $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ balideál, ezért $\frac{1}{\lambda}a^*a \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$, következésképp $\mathbf{1} - \frac{1}{\lambda}a^*a$ balinvertálható. Azonban $\mathbf{1} - \frac{1}{\lambda}a^*a$ önadjungált, ezért invertálható is, ami ellentmondás. Azaz $\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$, tehát $\mathcal{A}$ félig-egyszerű. □

2.0.11. Tétel. *Ha E Banach-tér, akkor $\mathcal{B}(E)$ félig-egyszerű.*

Bizonyítás. Rögzített nem nulla $u \in E$ vektor mellett jelölje

$$\mathcal{I}_u = \{T \in \mathcal{B}(E) | Tu = 0\},$$

akkor $\mathcal{I}_u$ valódi balideál. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{I}_u$ maximális balideál. Legyen ugyanis $\mathcal{I}$ olyan balideál, amelyre $\mathcal{I}_u \subseteq \mathcal{I}$. Világos, hogy ekkor az

$$E_0 = \mathcal{I}u = \{Tu | T \in \mathcal{I}\}$$

olyan lineáris altér, amelyre $E_0 \neq \{0\}$ és amely minden $T \in \mathcal{B}(E)$ operátor esetén T-invariáns. Könnyen látható, hogy emiatt $E_0 = E$. Speciálisan $u \in E_0$, azaz létezik $U \in \mathcal{I}$ amelyre $Uu = u$. Bármely $T \in \mathcal{B}(E)$ mellett $TU - T \in \mathcal{I}_u$ és $TU \in \mathcal{I}$, ezért $T = (TU - T) + TU \in \mathcal{I}_u + \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$, amiből kapjuk, hogy $\mathcal{I} = \mathcal{B}(E)$, amivel megmutattuk, hogy $\mathcal{I}_u$ maximális balideál. Ebből pedig következik, hogy

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{B}(E)) \subseteq \bigcap_{u \in E \setminus \{0\}} \mathcal{I}_u,$$

amiből pedig már egyszerűen következik, hogy $\mathrm{Rad}(\mathcal{B}(E)) = \{0\}$, ugyanis a metszetben csak olyan operátor lehet, amely minden nem nulla vektort a nullvektorba visz, ez azonban csakis a 0 operátor lehet. □

3. fejezet

Johnson automatikus folytonossági tétele

Az alábbiakban két különböző bizonyítást adunk Johnson folytonossági tételére. Az első bizonyítás az előző fejezetben kiépített reprezentációelméleti eszközöket használja, a második Ransford bizonyítása.

3.0.1. Tétel. *(Johnson) Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges, $\mathcal{B}$ pedig félig-egyszerű Banach-algebra. Ekkor minden $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ szürjektív homomorfizmus folytonos.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ teljesíti a fenti feltételeket, de nem folytonos. Ekkor ϕ nem zárt, azaz létezik olyan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ sorozat, hogy a_n nullához tart, de $\phi(a_n)$ egy nemnulla $b \in \mathcal{B}$ elemhez konvergál. Mivel $\mathcal{B}$ félig-egyszerű, és $b \neq 0$, létezik $\mathcal{B}$-nek egy olyan T irreducibilis reprezentációja, amelyre $T_b \neq 0$. Mivel ϕ szürjektív, ezért $T \circ \phi$ egy irreducibilis normált reprezentációja $\mathcal{A}$-nak, tehát a korábbiak alapján folytonos. Így T folytonosságából következik, hogy a $\{T_{\phi(a_n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a nemnulla T_b operátorhoz tart, de $T \circ \phi$ folytonosságából kapjuk, hogy $T_{\phi(a_n)} = (T \circ \phi)(a_n)$ nullához konvergál. Ezzel az ellentmondással beláttuk a tételt. □

Az alábbiakban bebizonyítjuk Johnson tételét a Ransford-lemmán keresztül is.

3.0.2. Lemma. *(Ransford) Legyen $\mathcal{A}$ egységelemes komplex Banach-algebra, továbbá legyenek $a_0, a_1, ..., a_k \in \mathcal{A}$ tetszőlegesek, valamint vezessük be a*

$$p(z) := \sum_{j=0} z^j a_j, \quad (z \in \mathbb{C})$$

egyenlőséggel értelmezett $p : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ függvényt. Ekkor bármely $R > 0$ szám esetén fennáll, hogy

$$\sup_{t\in[0,2\pi]} r(p(e^{it}))^2 \leq \sup_{t\in[0,2\pi]} r(p(Re^{it})) \cdot \sup_{t\in[0,2\pi]} r(p(R^{-1}e^{it}))$$

Bizonyítás. Az a_j elemek $e^{it}a_j$-re való lecserélésével látható, hogy elég a

$$\sup_{t\in[0,2\pi]} r(p(1))^2 \leq \sup_{t\in[0,2\pi]} r(p(Re^{it})) \cdot \sup_{t\in[0,2\pi]} r(p(R^{-1}e^{it}))$$

egyenlőtlenséget belátni.A Hahn-Banach-tétel értelmében létezik olyan $f \in \mathcal{A}'$, $||f|| = 1$ folytonos lineáris funkcionál, amelyre $f(p(1)) = ||p(1)||$, valamint vezessük be a

$$q(z) := f(p(z)) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j z^j, \quad (z \in \mathbb{C})$$

komplex együtthatós polinomot, ahol $\beta_j = f(a_j)$. Ekkor

$$||p(1)||^2 = |f(p(1))^2 = |q(1)|^2 = |\sum_{j=0}^{k} \beta_j|^2.$$

A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget kétszer alkalmazva kapjuk, hogy

$$|\sum_{j=0}^{k} \beta_j \cdot 1|^2 \leq (k+1) \cdot \sum_{j=0}^{k} |\beta_j|^2$$

$$= (k+1) \cdot \sum_{j=0}^{k} (R^j|\beta_j|)(R^{-j}|\beta_j|)$$

$$\leq (k+1) \cdot (\sum_{j=0}^{k} R^{2j}|\beta_j|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=0}^{k} R^{-2j}|\beta_j|^2)^{\frac{1}{2}},$$

vagyis

$$||p(1)||^2 \leq (k+1) \cdot (\sum_{j=0}^{k} R^{2j}|\beta_j|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=0}^{k} R^{-2j}|\beta_j|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k} |\beta_j|^2 R^{2j} &= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\beta_j R^j e^{itj}|^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{k} |\beta_j R^j e^{itj}|^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sum_{j=0}^{k} \beta_j R^j e^{itj}|^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q(Re^{it})|^2 dt, \\
&\leq \sup_{t \in [0,2\pi]} |q(Re^{it})|^2 \\
&\leq \sup_{t \in [0,2\pi]} ||p(Re^{it})||^2
\end{aligned}$$

és hasonlóan megmutatható, hogy

$$\sum_{j=0}^{k} |\beta_j|^2 R^{-2j} \leq \sup_{t\in[0,2\pi]} ||p(R^{-1}e^{it})||^2$$

amikből figyelembe véve az első egyenlőtlenségünket, kapjuk hogy

$$||p(1)||^2 \leq (k+1) \sup_{t\in[0,2\pi]} ||p(Re^{it})||^2 \cdot \sup_{t\in[0,2\pi]} ||p(R^{-1}e^{it})||^2$$

Vegyük észre, hogy a fenti egyenlőtlenség tetszőleges $p : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ $\mathcal{A}$-együtthatós polinomra fennáll, így azt p helyett rögzített pozitív egész n számra p^n-re alkalmazva, és figyelembevéve, hogy $\deg(p^n) = nk$ kapjuk, hogy

$$||p(1)^n||^2 \leq (nk+1) \sup_{t\in[0,2\pi]} ||p^n(Re^{it})||^2 \cdot \sup_{t\in[0,2\pi]} ||p^n(R^{-1}e^{it})||^2$$

Végül vezessük be tetszőleges pozitív n egész számra az

$$f_n(t) = ||p(Re^{it})^{2^n}||^{\frac{1}{2^n}}, \quad (t \in [0, 2\pi])$$

Világos, hogy $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$, ugyanis

$$f_{n+1}(t) = (||p(Re^{it})^{2^n} \cdot p(Re^{it})||)^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

ami a norma szubmultiplikativitását használva

$$\leq (||p(Re^{it})^{2^n}||^{\frac{1}{2^n}})^{\frac{1}{2}} \cdot ||p(Re^{it})||^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

$$= f_n(t)^{\frac{1}{2}} \cdot ||p(Re^{it})||^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

továbbá a spektrálsugár-tétel szerint $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pontonként tart az

$$f(t) := p(Re^{it}), \ \ t \in [0, 2\pi]$$

egyenlőséggel értelmezett $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}_+$ függvényhez. Mivel f nem feltétlenül folytonos, így a konvergencia nem feltétlenül egyenletes. Igaz azonban a következő:

$$||f_n||_\infty \to ||f||_\infty.$$

A $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ egyenlőtlenség miatt tudjuk, hogy $||f||_\infty \leq \alpha := \lim_{n\to\infty} ||f_n||_\infty$. Megfordítva, ha $\epsilon > 0$ tetszőleges valós szám, akkor a

$$K_n := [f_n \geq \alpha - \epsilon]$$

jelöléssel $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ csupa nem-üres kompakt halmazoknól álló sorozat, amelyre $K_{n+1} \subseteq K_n$, ezért a Cantor-tétel miatt létezik olyan $x \in [0, 2\pi]$, amelyre $x \in K_n, \ \forall\ n \in \mathbb{N}^+$. Ez azt jelenti, hogy $f_n(x) \geq \alpha - \epsilon$ minden n-re, amiből $||f||_\infty \geq f(x) \geq \alpha - \epsilon$, és így $||f||_\infty \geq \alpha$ következik. Hasonlóan igazolható, hogy fennáll a

$$g_n(t) = ||p(R^{-1}e^{it})^{2^n}||^{\frac{1}{2^n}}, g(t) := r(p(R^{-1}e^{it})), \ \ t \in [0, 2\pi]$$

függvényekre a $||g_n||_\infty \to ||g||_\infty$ összefüggés. Mivel a

$$||p(1)^n||^2 \leq (nk+1) \sup_{t\in[0,2\pi]} ||p^n(Re^{it})||^2 \cdot \sup_{t\in[0,2\pi]} ||p^n(R^{-1}e^{it})||^2$$

egyenlőtlenség 2^n-edik gyökvonás után éppen azt jelenti, hogy

$$||p(1)^{2^n}||^{\frac{2}{2^n}} \leq (2^n k+1)^{\frac{1}{2^n}} ||f_n||_\infty ||g_n||_\infty,$$

ezért ebből az $n \to \infty$ határátmenettel $||f_n||_\infty \to ||f||_\infty$, $||g_n||_\infty \to ||g||_\infty$ figyelembevételével éppen a bizonyítandó

$$\sup_{t\in[0,2\pi]} r(p(1))^2 \leq \sup_{t\in[0,2\pi]} r(p(Re^{it})) \cdot \sup_{t\in[0,2\pi]} r(p(R^{-1}e^{it}))$$

egyenlőtlenséget kapjuk. □

3.0.3. Tétel. *(Johnson) Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ egységelemes komplex Banach-algebrák, $\mathcal{B}$ félig-egyszerű. Ekkor minden $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ szürjektív algebra-homomorfizmus folytonos.*

Bizonyítás. A korábbi bizonyításhoz hasonlóan, elég megmutatni, hogy ϕ zárt leképezés. Tegyük fel tehát, hogy $a_n \to 0$ és $\phi(a_n) \to b$ valamely $\mathcal{A}$-ban haladó$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra és $b \in \mathcal{B}$-re. Azt kell megmutatni tehát, hogy $b = 0$, vagy ami ezzel ekvivalens, hogy $b \in \mathrm{Rad}(\mathcal{B})$. Rögzítsünk egy $a \in \mathcal{A}$ elemet, hogy $\phi(a) = b$ és minden $n \geq 1$ egész mellett vezessük be a következő függvényt:

$$p_n(z) = z\phi(a_n) + (\phi(a) - \phi(a_n)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

A normára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségből és az $r(x) \leq ||x||$ egyenlőtlenségből adódik, hogy bármely $z \in \mathbb{C}$ számra

$$r(p_n(z)) \leq |z|||\phi(a_n)|| + ||\phi(a) - \phi(a_n)||,$$

vagyis tetszőleges $R > 0$ szám mellett $z = R^{-1}e^{it}$ $(t \in [-\pi, \pi])$ választással

$$r(p_n(R^{-1}e^{it})) \leq R^{-1}||\phi(a_n)|| + ||\phi(a) - \phi(a_n)||.$$

Másrészt ϕ szürjektivitásából látható, hogy ϕ egységelem tartó. Tegyük fel ugyanis, hogy $\phi(1) = a$. Vegyük észre, hogy ϕ szürjektivitása miatt $a \neq 0$.Ekkor tetszőleges $x \in \mathcal{B}$-re létezik $y \in \mathcal{B}$ hogy $x = ay$. Azonban ϕ szürjektivitása miatt tudjuk, hogy léteznek $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ elemek, amelyekre $\phi(a_1) = x, \phi(a_2) = y$, azaz $\phi(a_1) = a\phi(a_2) = \phi(a_1) = \phi(1)\phi(a_2)$, amiből $x = y$, amiből könnyen látható, hogy a bal egység $\mathcal{B}$-ben. Hasonlóan belátható, hogy a jobb egység, azaz $\phi(1) = 1$. Mivel ϕ egységelem tartó, ezért bármely $x \in \mathcal{A}$ elem spektrumára fennáll $Sp(\phi(x)) \subseteq Sp(x)$ és így $r(\phi(x)) \leq r(x)$ is. Következésképp

$$r(p_n(z)) = r(\phi(za_n + (a - a_n))) \leq r(za_n + (a - a_n)) \leq |z|||a_n|| + ||a - a_n||,$$

így $R > 0$ mellett $z = Re^{it}$ $(t \in [-\pi, \pi])$ választással

$$r(p_n(Re^{it})) \leq R||a_n|| + ||a - a_n||.$$

Mivel $p_n(1) = \phi(a) = b$, ezért a Ransford-lemma valamint az $r(p_n(Re^{it})$ és $r(p_n(R^{-1}e^{it}))$-re bizonyított egyenlőtlenségekből kapjuk, hogy

$$r(b)^2 \leq (R||a_n|| + ||a - a_n||) \cdot (R^{-1}||\phi(a_n)|| + ||\phi(a) - \phi(a_n||)$$

teljesül minden n természetes számra és R pozitív valós számra. Mivel $a_n \to 0$ és $\phi(a_n) \to b$, ezért az $n \to \infty$ határetmenetet véve kapjuk, hogy

$$r(b)^2 \leq R^{-1}||a||||b||.$$

Mivel ez tetszőleges $R > 0$ számra fennáll, ebből kapjuk, hogy $r(b) = 0$. Megmutatjuk, hogy $b \in \mathrm{Rad}(\mathcal{B})$, amihez a korábbiak szerint elég megmutatni, hogy $r(b'b) = 0\ \forall b' \in \mathcal{B}$-re. Legyen $a' \in \mathcal{A}$ olyan elem, amelyre $\phi(a') = b'$, akkor $b'a_n \to 0$ és $\phi(a'a_n) \to b'b$. Vegyük észre, hogy a bizonyítás első felében megmutattuk, hogy $r(y) = 0$ minden olyan $y \in \mathcal{B}$ elemre, amelyhez létezik olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ sorozat, amelyre $x_n \to 0$ és $\phi(x_n) \to y$. Ebből pedig következik, hogy az $y = b'b$ elemre is $r(b'b) = 0$ teljesül, amivel megmutattuk, hogy $b \in \mathrm{Rad}(\mathcal{B}) = \{0\}$, vagyis a zárt gráf tétel szerint ϕ folytonos. □

Egy algebra radikálja, és így félig-egyszerűsége is tisztán algebrai fogalom. Ezért meglepő az alábbi, szintén Johnsontól származó tétel:

3.0.4. Következmény. *Ha $\mathcal{A}$ féligegyszerű komplex egységelemes algebra, akkor ekvivalencia erejéig legfeljebb egy olyan norma létezik $\mathcal{A}$-n, amellyel az Banach-algebra.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $||.||$ és $||.||'$ mindketten olyan normák $\mathcal{A}$-n, amellyel az Banach-algebra. Ekkor az előző tétel szerint az

$$id : (\mathcal{A}, ||.||) \to (\mathcal{A}, ||.||')$$

homeomorfizmus (mivel nyilván bijektív algebra-homomorfizmus), ami azt jelenti, hogy a $||.||$ és a$||.||'$ normák ekvivalensek. □

3.0.1. Félig-egyszerű kommutatív Banach-algebrák

Az alábbi alfejezetben megmutatjuk Johnson tételének egy kommutatív Banach-algebrákra való élesítését. Világos, hogy ha az $\mathcal{A}$ algebra kommutatív, akkor $\mathcal{A}$ minden baloldali ideálja kétoldali ideál, ezért ekkor az $\mathcal{A}$ Jacobson-radikálja megegyezik az $\mathcal{A}$ maximális ideáljainak metszetével. A következő tétel kommutatív Banach-algebrák félig-egyszerűségének ekvivalens jellemzését adja:

3.0.5. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ kommutatív egységelemes komplex Banach-algebra. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. *$\mathcal{A}$ félig-egyszerű,*
2. *az $\mathcal{A}$ Gelfand-reprezentációja injektív,*
3. *bármely $a \in \mathcal{A}$ elemre $r(a) = 0$ pontosan akkor, ha $a = 0$,*
4. *bármely $a \in \mathcal{A}$ elemre $Sp(a) = \{0\}$ pontosan akkor, ha $a = 0$,*

5. *$X(\mathcal{A})$ szeparálja $\mathcal{A}$ pontjait.*

Bizonyítás. A 3, és 4, kijelentések ekvivalenciája világos. Legyen Γ az $\mathcal{A}$ Gelfand-reprezentációja, akkor 4, szerint $\Gamma(a) = 0$ pontosan akkor, ha $Sp(a) = \{0\}$, amiből kapjuk 2, és 4, ekvivalenciáját. Az $\mathcal{A}$ algebra ideáljai éppen az $\mathcal{A}$ karaktereinek magterei, vagyis $\mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ előáll

$$Rad(\mathcal{A}) = \bigcap_{\chi \in X(\mathcal{A})} ker(\chi)$$

alakban, azaz $a \in \mathrm{Rad}(\mathcal{A})$ pontosan akkor, ha $\chi(a) = 0$ minden $X(\mathcal{A}) \ni \chi$-re, azaz $\Gamma(a) = 0$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy

$$\mathrm{Rad}(\mathcal{A}) = ker\,\Gamma,$$

amiből az $1, \Leftrightarrow 2$, ekvivalencia adódik. Az 5, és 2, ekvivalenciájához tegyük fel először, hogy $X(\mathcal{A})$ szeparálja $\mathcal{A}$ pontjait. Ekkor tetszőleges $a \neq 0$ elemhez létezik $\chi \in X(\mathcal{A})$ amelyre $\chi(a) \neq 0$, azaz $a \notin ker\,\Gamma$, vagyis $ker\,\Gamma = \{0\}$, vagyis Γ injektív. Megfordítva, tegyük fel, hogy Γ injektív, és legyenek $a, b \in \mathcal{A}$ olyan elemek, hogy $a \neq b$, akkor $\Gamma(a) \neq \Gamma(b)$, következésképp létezik $\chi \in X(\mathcal{A})$, hogy $\Gamma(a)(\chi) \neq \Gamma(b)(\chi)$ azaz $\chi(a) \neq \chi(b)$ ami éppen azt jelenti, hogy $X(\mathcal{A})$ szeparálja $\mathcal{A}$ pontjait. □

3.0.6. Következmény. *Egy egységelemes komplex Banach-algebra pontosan akkor félig-egyszerű, ha felette a spektrálsugár függvény norma.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy kommutatív egységelemes komplex Banach-algebra fölött a spektrálsugár mindig algebra-félnorma. Az előző tétel szerint tehát r pontosan akkor algebranorma, ha az algebra félig-egyszerű. □

3.0.7. Tétel. *Ha $\mathcal{A}$ egységelemes komplex Banach-algebra, $\mathcal{B}$ félig-egyszerű kommutatív egységelemes komplex Banach-algebra, akkor minden $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ egységelem tartó algebra-homomorfizmus automatikusan folytonos.*

Bizonyítás. A zárt gráf tétel szerint elég megmutatnunk, hogy a

$$graf(\pi) = \{(a, \pi(a)) | a \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

zárt az $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ szorzattérben. Legyen tehát $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathcal{A}$-ban haladó sorozat, amelyre $a_n \to 0$ és $\pi(a_n) \to b$ valamilyen $\mathcal{B} \ni b$-re. Azt kell megmutatnunk, hogy $b = 0$. Mivel $\mathcal{B}$ félig-egyszerű ez azzal ekvivalens, hogy $\chi(b) = 0$ minden $\chi \in X(\mathcal{B})$ karakterre. Rögzítsünk egy $\chi \in X(\mathcal{B})$ karaktert és vezessük be a

$$\psi(a) = \chi(\pi(a)), \;\; a \in \mathcal{A}$$

egyenlőséggel értelmezett $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ függvényt. Világos, hogy ψ karakter, mivel χ karakter, π pedig algebra-homomorfizmus, azaz ψ multiplikatív és lineáris $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$ függvény. Mivel ψ karakter, ennélfogva folytonos, azaz $a_n \to 0$ miatt $\psi(a_n) \to 0$, ugyanakkor χ folytonossága és $\pi(a_n) \to b$ miatt

$$\psi(a_n) = \chi(\pi(a_n)) \to \chi(b),$$

azaz $\chi(b) = 0$. □

4. fejezet

Eidelheit tétele

Ebben a fejezetben Eidelheit egy tételét tárgyaljuk, amely két Banach-tér standard operátoralgebrája közötti algebra-izomorfizmusok lehetséges alakját karakterizálja.

4.0.1. Lemma. *Legyen X normált tér, ekkor egy $T \in \mathcal{B}(X)$ nemnulla operátor pontosan akkor egy-rangú, ha minden $S \in \mathcal{B}(X)$ operátor esetén $(ST)^2 = \lambda ST$ teljesül valamely λ szám esetén.*

Bizonyítás. Ha $T \in \mathcal{B}(X)$ egy-rangú akkor létezik $z \in X$ és $f \in X^*$ hogy T előáll $T = z \otimes f$ alakban, ahol $z \otimes f$ úgy hat egy tetszőleges $x \in X$ vektoron, hogy $(z \otimes f)x = f(x)z$. Mivel bármely $S \in \mathcal{B}(X)$ operátor esetén $ST = (Sz) \otimes f$, ezért

$$(ST)^2 = STST = (STSz) \otimes f$$

Mivel $TSz \in \operatorname{ran} T = \mathbb{C}z$, ezért $TSz = \lambda z$ valamilyen alkalmas λ komplex számra. Azaz

$$(STSz) \otimes f = (\lambda Sz) \otimes f = \lambda ST,$$

azaz $(ST)^2 = \lambda ST$.

Megfordítva, tegyük fel hogy T rendelkezik a fenti tulajdonsággal és tegyük fel indirekten, hogy T nem egy-rangú. Ekkor léteznek $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ úgy hogy $Tx_j = y_j$ $(j = 1, 2)$ úgy, hogy y_1, y_2 lineárisan függetlenek. Legyenek továbbá φ_1, φ_2 X^*-beli folytonos lineáris funkcionálok úgy, hogy $\varphi_2(y_1) = \varphi_1(y_2) = 1$ és $\varphi_1(y_1) = \varphi_2(y_2) = 0$, és legyen $S = x_1 \otimes \varphi_1 + x_2 \otimes \varphi_2$. Ekkor $(ST)x_2 = x_1$ és $(ST)^2 x_2 = x_2$, azaz $x_2 \in \mathbb{C}x_1$ amiből következik, hogy $y_2 \in \mathbb{C}y_1$, ami ellentmondás.

Tehát beláttuk, hogy T egy-rangú. □

4.0.2. Tétel. *(Eidelheit) Legyenek X és Y Banach-terek és legyen $\Phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(Y)$ algebra-izomorfizmus. Ekkor létezik olyan $T : X \to Y$ lineáris homeomorfizmus, hogy*

$$\Phi(A) = TAT^{-1}, \quad A \in \mathcal{B}(X).$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $x_0 \in X$ nemnulla vektort és ehhez egy $f_0 \in X^*$ funkcionált, amelyre $f_0(x_0) = 1$. Ekkor a

$$P_0 := x_0 \otimes f_0$$

egyenlőséggel definiált lineáris operátor egy-rangú idempotens. Az egy-rangúság az előbbi lemma következménye, az pedig hogy P idempotens könnyen látszik abból, hogy $f_0(x_0) = 1$, ugyanis tetszőleges $x \in X$ vektorra

$$P^2 x = P(x_0 \otimes f_0)x = P(f_0(x)x_0) = f_0(x) \cdot f_0(x_0) \cdot x_0 = f_0(x) \cdot 1 \cdot x_0 = Px.$$

Világos, hogy a $Q_0 := \Phi(P_0)$ operátor is idempotens, hiszen algebra-homomorfizmus idempotens elemeket idempotensbe képez. Megmutatjuk, hogy Q_0 is egy-rangú, legyen ugyanis $S \in \mathcal{B}(Y)$ egy tetszőleges operátor, akkor Φ szürjektivitása miatt létezik $S_0 \in \mathcal{B}(X)$, hogy $\Phi(S_0) = S$. Az előző lemma szerint $(S_0 P_0)^2 = \lambda S_0 P_0$ valamely $\lambda \in \mathbb{C}$ számra, ezért

$$(SQ_0)^2 = \Phi(S_0 P_0)^2 = \lambda \Phi(S_0 P_0) = \lambda S Q_0,$$

amiből az előző lemmát alkalmazva kapjuk, hogy Q_0 egy-rangú. Emiatt létezik olyan $y_0 \in Y$ nem-nulla vektor és $g_0 \in Y^*$ $g_0(y_0) = 1$ funkcionál, hogy

$$Q_0 = y_0 \otimes g_0.$$

Legyen $x \in X$ tetszőleges vektor és legyen $U \in \mathcal{B}(X)$ olyan, hogy $Ux_0 = x$(ilyen operátor létezik, ugyanis $x \otimes f_0$ ilyen). Definiáljuk a $T : X \to Y$ leképezést a következőképp:

$$Tx := \Phi(U)y_0, \;\; x \in X, Ux_0 = 0.$$

Megmutatjuk, hogy T jóldefiniált, azaz értéke nem függ U megválasztásától. Legyenek ugyanis $U_1, U_2 \in \mathcal{B}(X)$ olyanok, hogy $U_1 x_0 = U_2 x_0 = x$, akkor

$$U_1 P_0 = U_1 x_0 \otimes f_0 = U_2 x_0 \otimes f_0 = U_2 P_0,$$

ezért $\Phi(U_1)Q_0 = \Phi(U_1 P_0) = \Phi(U_2 P_0) = \Phi(U_2)Q_0$, amiből

$$\Phi(U_1)y_0 = \Phi(U_1)Q_0 y_0 = \Phi(U_2)Q_0 y_0 = \Phi(U_2)y_0,$$

azaz T jóldefiniált. A Φ leképezés linearitásából nyilvánvaló, hogy T lineáris. Megmutatjuk, hogy T injektív: legyen $x \in X$ olyan, hogy $Tx = 0$, azaz

$$\Phi(U)y_0 = 0,$$

ahol $Ux_0 = x$. Ekkor Q_0 értelmezése alapján $0 = \Phi(U)Q_0 = \Phi(UP_0)$, ezért Φ injektivitása miatt $UP_0 = Ux_0 \otimes f_0 = 0$, amiből következik, hogy $Ux_0 = 0$ azaz $x = 0$. Megmutatjuk, hogy T szürjektív is: legyen $y \in Y$ tetszőleges, és legyen $V \in \mathcal{B}(Y)$ olyan, hogy $Vy_0 = y$. Legyen $U = \Phi^{-1}(V)$, akkor $x = Ux_0$ választással T definíciója alapján

$$Tx = \Phi(U)y_0 = Vy_0 = y,$$

azaz megmutattuk, hogy T szürjektív. Végül megmutatjuk, hogy T lineáris homeomorfizmus, amihez elég megmutatni, hogy T folytonos. Vegyük észre, hogy mivel $\mathcal{B}(Y)$ félig-egyszerű, ezért Φ az előző fejezetben tárgyalt Johnson-tétel alapján folytonos. Legyen

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ X-ben haladó nullsorozat és tekintsük az $U_n := x_n \otimes f_0$ egyenlőséggel értelmezett operátorsorozatot. Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $U_n x_0 = x_n$, továbbá $||U_n|| = ||x_n|| \cdot ||f_0|| \to 0$, következésképp $||\Phi(U_n)|| \to 0$. Másfelől minden n-re $Tx_n = \Phi(U_n)x_0$, amiből $Tx_n \to 0$. Ezzel bebizonyítottuk hogy $T : X \to Y$ lineáris homeomorfizmus. Végül belátjuk, hogy Φ előáll $\Phi(A) = TAT^{-1}$ alakban. Vegyük észre, hogy a T definíciója alapján tetszőleges $U \in \mathcal{B}(X)$ operátor esetén

$$TUx_0 = \Phi(U)y_0$$

Legyen $A \in \mathcal{B}(X)$ tetszőleges operátor és $x \in X$ tetszőleges vektor. Ha most $U \in \mathcal{B}(X)$ ismét olyan, hogy $Ux_0 = x$, akkor

$$TAx = TAUx_0 = \Phi(AU)y_0 = \Phi(A)\Phi(U)y_0 = \Phi(A)TUx_0 = \Phi(A)Tx.$$

Mivel a fenti egyenlőség minden $x \in X$ vektor és $A \in \mathcal{B}(X)$ operátor esetén igaz, ezért igaz a

$$TA = \Phi(A)T, \;\; A \in \mathcal{B}(X)$$

egyenlőség is, amiből T bijektivitásából következik a

$$\Phi(A) = TAT^{-1}, \;\; A \in \mathcal{B}(X)$$

egyenlőség is. □

4.0.3. Következmény. *Ha a $\mathcal{B}(X)$ és $\mathcal{B}(Y)$ algebrák izomorfak akkor az X és Y Banach-terek lineárisan homeomorfak.*

4.0.4. Következmény. *Ha X Banach-tér akkor $\mathcal{B}(X)$ minden automorfizmusa belső.*

Megjegyzés. Igaz a tétel egy könnyen ellenőrizhető megfordítása is, nevezetesen ha X és Y Banach-terek, $T : X \mapsto Y$ lineáris homeomorfizmus, akkor az

$$A \mapsto TAT^{-1} \qquad A \in \mathcal{B}(X)$$

hozzárendelés algebra-izomorfizmust definiál.

5. fejezet

Herstein tétele

A következő fejezetben bevezetjük a Jordan-homomorfizmusok fogalmát, megmutatjuk néhány elemi tulajdonságukat, majd bebizonyítjuk Herstein egy tételét. Végül ennek egy alkalmazásaként belátjuk a Gleason-Zelazko-Kahane tételt.

5.0.1. Definíció. Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ valós vagy komplex algebrák, akkor azt mondjuk, hogy a $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ leképezés Jordan-homomorfizmus, ha Φ lineáris és

$$\Phi(ab + ba) = \Phi(a)\Phi(b) + \Phi(b)\Phi(a) \;\; a, b \in \mathcal{A}.$$

Felhasználva Φ linearitását a $b = a$ választással világos, hogy $\Phi(a^2) = \Phi(a)^2$. Megmutatjuk, hogy ez fordítva is igaz. Legyen ugyanis $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ olyan lineáris leképezés amelyre $\Phi(a^2) = \Phi(a)^2$. Ekkor a

$$\Phi((a + b)^2) = \Phi(a + b)^2$$

azonosság és a linearitás miatt

$$\Phi(a^2) + \Phi(ab + ba) + \Phi(b^2) = \Phi(a)^2 + \Phi(a)\Phi(b) + \Phi(b)\Phi(a) + \Phi(b)^2,$$

amiből felhasználva hogy $\Phi(x^2) = \Phi(x)^2$ kapjuk, hogy

$$\Phi(ab + ba) = \Phi(a)\Phi(b) + \Phi(b)\Phi(a),$$

azaz Φ valóban Jordan-homomorfizmus. Ezzel beláttuk a következőt:

5.0.2. Állítás. *Egy $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ lineáris leképezés pontosan akkor Jordan-homomorfizmus, ha $\Phi(a^2) = \Phi(a)^2$ minden $a \in \mathcal{A}$ elemre.*

5.0.3. Állítás. *Legyen $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Jordan-homomorfizmus. Ekkor*

$$\Phi(bab) = \Phi(b)\Phi(a)\Phi(b) \;\; a, b \in \mathcal{A}.$$

Bizonyítás. Legyenek $a, b \in \mathcal{A}$, akkor

$$\Phi((ab + ba)b + b(ab + ba)) = \Phi(ab + ba)\Phi(b) + \Phi(b)\Phi(ab + ba)$$

$$= [\Phi(a)\Phi(b) + \Phi(b)\Phi(a)]\Phi(b) + \Phi(b)[\Phi(a)\Phi(b) + \Phi(b)\Phi(a)]$$
$$= \Phi(a)\Phi(b)^2 + \Phi(b)^2\Phi(a) + 2\Phi(b)\Phi(a)\Phi(b)$$

másrészt

$$\Phi((ab + ba)b + b(ab + ba)) = \Phi(ab^2 + 2bab + b^2a) = \Phi(ab^2 + b^2a) + 2\Phi(bab)$$

$$= \Phi(a)\Phi(b^2) + \Phi(b^2)\Phi(a) + 2\Phi(b)\Phi(a)\Phi(b).$$

A fenti két egyenlőséget összehasonlítva adódik az állítás. □

5.0.4. Következmény. *Bármely $\Phi(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Jordan-homomorfizmus és bármely $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számra fennáll, hogy*

$$\Phi(a^n) = \Phi(a)^n, \ \ a \in \mathcal{A}$$

Bizonyítás. Az eddigiek alapján a formula igaz az $n = 1, 2$ esetben, továbbá $n \geq 3$ esetén az előbbi hármas szorzatra vonatkozó azonosságot felhasználva:

$$\Phi(a^n) = \Phi(aa^{n-2}a) = \Phi(a)\Phi(a^{n-2})\Phi(a)$$

amiből a bizonyítandó állítás teljes indukcióval következik. □

5.0.5. Állítás. *Ha $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Jordan-homomorfizmus, akkor*

$$\Phi(abc + cba) = \Phi(a)\Phi(b)\Phi(c) + \Phi(c)\Phi(b)\Phi(a), \ \ a, b, c \in \mathcal{A}.$$

Bizonyítás. A hármas szorzat formulából adódik, hogy

$$\Phi((a + c)b(a + c)) = \Phi(a + c)\Phi(b)\Phi(a + c)$$

$$= [\Phi(a) + \Phi(c)]\Phi(b)[\Phi(a) + \Phi(c)]$$
$$= \Phi(a)\Phi(b)\Phi(a) + \Phi(a)\Phi(b)\Phi(c)$$
$$+\Phi(c)\Phi(b)\Phi(a) + \Phi(c)\Phi(b)\Phi(c)$$

másrészt

$$\Phi((a + c)b(a + c)) = \Phi(aba) + \Phi(abc + cba) + \Phi(cbc)$$
$$= \Phi(a)\Phi(b)\Phi(a) + \Phi(abc + cba) + \Phi(c)\Phi(b)\Phi(c)$$

amit az előző egyenlőséggel összevetve éppen a bizonyítandó állítás adódik. □

5.0.6. Lemma. *Tetszőleges $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Jordan-homomorfizmus és $a, b \in \mathcal{A}$ esetén*

$$[\Phi(ab) - \Phi(a)\Phi(b)][\Phi(ab) - \Phi(b)\Phi(a)] = 0,$$

illetve

$$[\Phi(ab) - \Phi(b)\Phi(a)][\Phi(ab) - \Phi(a)\Phi(b)] = 0.$$

Bizonyítás. Az előző állítás és a hármas szorzat formula felhasználásával

$$[\Phi(ab) - \Phi(a)\Phi(b)][\Phi(ab) - \Phi(b)\Phi(a)]$$
$$= \Phi(ab)^2 - [\Phi(ab)\Phi(b)\Phi(a) + \Phi(a)\Phi(b)\Phi(ab)] + \Phi(a)\Phi(b)^2\Phi(a)$$
$$= \Phi(abab - ab^2a - abab + ab^2a) = \Phi(0) = 0.$$

A második formula hasonlóan bizonyítható. □

5.0.7. Lemma. *Legyen $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Jordan-homomorfizmus, és $a, e \in \mathcal{A}$ úgy, hogy $e^2 = e$ és $ae = ea$. Ekkor $\Phi(e)^2 = \Phi(e)$ és $\Phi(ae) = \Phi(a)\Phi(e) = \Phi(e)\Phi(a)$.*

Bizonyítás. Az hogy $\Phi(e)$ idempotens nyilvánvaló a Jordan-homomorfizmusok azon tulajdonságából hogy $\Phi(a^2) = \Phi(a)^2$. Másrészt

$$\Phi(ae) = \Phi(aee) = \Phi(eae) = \Phi(a)\Phi(e)\Phi(e) = \Phi(a)\Phi(e).$$

Hasonlóan,

$$\Phi(ea) = \Phi(eea) = \Phi(eae) = \Phi(e)\Phi(e)\Phi(a) = \Phi(e)\Phi(a).$$

□

5.0.8. Következmény. *Ha $\mathcal{A}$ egységelemes algebra akkor minden $a \in \mathcal{A}$ elemre, $\mathcal{B}$ egységelemes algebrára és $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Jordan-homomorfizmusra $\Phi(a)\Phi(\mathbf{1}) = \Phi(\mathbf{1})\Phi(a) = \Phi(a)$. Ha Φ szürjektív, akkor $\Phi(\mathbf{1})$ a $\mathcal{B}$ egységeleme.*

5.0.9. Definíció. Egy $\mathcal{B}$ algebrát *prím* algebrának nevezünk, ha $x, y \in \mathcal{B}$ elemekre $x\mathcal{B}y = \{0\}$ esetén $x = 0$ vagy $y = 0$ teljesül.

5.0.10. Lemma. *Legyen $\mathcal{B}$ prím algebra. Ha valamely $u, v \in \mathcal{B}$ elemekre $ubv + vbu = 0$ teljesül minden $b \in \mathcal{B}$ elemre, akkor $u = 0$ vagy $v = 0$.*

Bizonyítás. Legyenek $x, y \in \mathcal{B}$ tetszőlegesek, ekkor $b = xuy$ választással a feltételből kapjuk, hogy

$$uxuyv + vxuyu = 0,$$

ugyanakkor $vxu = -uxv$ és $uyv = -vyu$, amit a fenti egyenlőségbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$0 = -uxvyu - uxvyu,$$

azaz $uxvyu = 0$ minden $x, y \in \mathcal{B}$ elem esetén. Rögzítsük le most az y elemet, ekkor kapjuk, hogy $u\mathcal{B}vyu = \{0\}$, és mivel $\mathcal{B}$ prím algebra, ebből következik, hogy $u = 0$ vagy $vyu = 0$. Ez utóbbi azonban tetszőleges $y \in \mathcal{B}$ elemre fenn kell, hogy álljon, ezért $v\mathcal{B}u = \{0\}$, ami csak úgy lehet ha $v = 0$ vagy $u = 0$. □

5.0.11. Definíció. Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ algebrák. Azt mondjuk, hogy a $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ lineáris leképezés algebra-antihomomorfizmus, ha

$$\Phi(ab) = \Phi(b)\Phi(a), \quad a, b \in \mathcal{A}$$

5.0.12. Tétel. *(Herstein) Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ valós vagy komplex algebrák, és tegyük fel, hogy $\mathcal{B}$ prím algebra. Ekkor minden $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ szürjektív Jordan-homomorfizmus algebra homomorfizmus, vagy algebra anti-homomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyenek $a, b \in \mathcal{A}$ tetszőlegesek. Először megmutatjuk, hogy az $u = \Phi(ab) - \Phi(a)\Phi(b)$ vagy a $v = \Phi(ab) - \Phi(b)\Phi(a)$ kifejezések valamelyike 0.Legyen $c \in \mathcal{B}$ tetszőleges, akkor Φ szürjektivitása miatt c előáll $c = \Phi(d)$ alakban valamely $d \in \mathcal{A}$ elemre. A Jordan-homomorfizmusokra bizonyított műveleti tulajdonságok alapján kapjuk, hogy

$$ucv = [\Phi(ab) - \Phi(a)\Phi(b)]\Phi(d)[\Phi(ab) - \Phi(b)\Phi(a)]$$

$$= \Phi(ab)\Phi(d)\Phi(ab) + \Phi(a)\Phi(b)\Phi(d)\Phi(b)\Phi(a) - \Phi(ab)\Phi(d)\Phi(b)\Phi(a)$$

$$-\Phi(a)\Phi(b)\Phi(d)\Phi(ab)$$

$$= \Phi(abdab) + \Phi(abdba) - \Phi(ab)\Phi(d)\Phi(b)\Phi(a) - \Phi(a)\Phi(b)\Phi(d)\Phi(ab),$$

és hasonlóan

$$vcu = [\Phi(ab) - \Phi(b)\Phi(a)]\Phi(d)[\Phi(ab) - \Phi(a)\Phi(b)]$$

$$= \Phi(abdab) + \Phi(badab) - \Phi(ab)\Phi(d)\Phi(a)\Phi(b) - \Phi(b)\Phi(a)\Phi(d)\Phi(ab),$$

és így ezek összegére:

$$ucv + vcu = \Phi(2abdab + badab + abdba) - \Phi(ab)\Phi(d)[\Phi(a)\Phi(b) + \Phi(b)\Phi(a)]$$

$$-[\Phi(a)\Phi(b) + \Phi(b)\Phi(a)]\Phi(d)\Phi(ab)$$

$$= \Phi(2abdab + badab + abdba)$$

$$-[\Phi(ab)\Phi(d)\Phi(ab + ba) + \Phi(ab + ba)\Phi(d)\Phi(ab)]$$

$$= \Phi(2abdab + badab + abdba) - \Phi(abd(ab + ba) + (ab + ba)dab) = 0.$$

Az előző lemma szerint ekkor $u = 0$ vagy $v = 0$ teljesül. Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges $a, b \in \mathcal{A}$ elemek esetén $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$ vagy $\Phi(ab) = \Phi(b)\Phi(a)$ teljesül. Rögzített $a \in \mathcal{A}$ elem mellett jelölje

$$\mathcal{M}_a = \{b \in \mathcal{A} | \Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)\}, \ \mathcal{N}_a = \{b \in \mathcal{A} | \Phi(ab) = \Phi(b)\Phi(a)\}$$

akkor $\mathcal{A}$ és $\mathcal{N}_a$ az $\mathcal{A}$ lineáris alterei, legyenek ugyanis $b_1, b_2 \in \mathcal{M}_a$, $c \in \mathbb{C}$ akkor

$$\Phi(a(b_1 + cb_2)) = \Phi(ab_1) + \Phi(acb_2) = \Phi(a)\Phi(b_1) + \Phi(a)\Phi(cb_2)$$

$$= \Phi(a)[\Phi(b_1) + \Phi(cb_2)] = \Phi(a)\Phi(b_1 + cb_2).$$

Hasonló számolással adódik, hogy $\mathcal{N}_a$ altér. Az eddigiek alapján $\mathcal{M}_a \cup \mathcal{N}_a = \mathcal{A}$, ami csak úgy lehet, ha $\mathcal{M}_a = \mathcal{A}$ vagy $\mathcal{N}_a = \mathcal{A}$. Végül jelölje

$$\mathcal{M} = \{a \in \mathcal{A} | \mathcal{M}_a = \mathcal{A}\}, \ \mathcal{N} = \{a \in \mathcal{A} | \mathcal{N}_a = \mathcal{A}\}.$$

Ekkor $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ lineáris alterei $\mathcal{A}$-nak és az előbbihez hasonlóan $\mathcal{M} \cup \mathcal{N} = \mathcal{A}$, vagyis $\mathcal{M} = \mathcal{A}$ vagy $\mathcal{N} = \mathcal{A}$. Előbbi esetben Φ algebra homomorfizmus, utóbbiban algebra anti-homomorfizmus. $\square$

Megjegyzés. Ha X normált tér, akkor $\mathcal{B}(X)$ minden olyan részalgebrája prím, amely tartalmazza az egy-rangú operátorokat. Legyenek ugyanis $A, B \in \mathcal{B}(X)$ olyanok, hogy

$$A\mathcal{B}(X)B = \{0\},$$

és tegyük fel, hogy $A \neq 0$, $B \neq 0$. Ekkor léteznek $y, z \in X$ vektorok, hogy $By \neq 0$ és $Az \neq 0$ továbbá a Hahn-Banach tétel szerint létezik $f \in X^*$ folytonos lineáris funkcionál, amelyre $f(By) = 1$. Definiáljuk a T operátort a következőképpen:

$$Tx := (z \otimes f)x.$$

Akkor

$$ATBy = Af(By)z = Az \neq 0,$$

ami ellentmondás.

5.0.13. Tétel. *(Gleason-Zelazko-Kahane): Legyen $\mathcal{A}$ egységelemes Banach-algebra, és legyen $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ lineáris egységelem-tartó leképezés(azaz $\varphi(\mathbf{1}) = 1$). Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

1. *$\varphi(a) = 0$-ból következik $\varphi(a^2) = 0$ minden $a \in \mathcal{A}$-ra.*
2. *$\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$ minden $a \in \mathcal{A}$-ra.*
3. *ha $\varphi(a) = 0$ valamely $a \in \mathcal{A}$-ra, akkor minden $b \in \mathcal{A}$-ra is $\varphi(ba) = 0$, azaz ker(φ) balideál.*
4. *φ algebra-homomorfizmus, azaz $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ minden $a, b \in \mathcal{A}$-ra.*
5. *ker(φ) nem tartalmaz invertálható elemet.*
6. *Minden $a \in \mathcal{A}$-ra $\varphi(a) \in Sp(a)$.*

Bizonyítás. 1, $\Longrightarrow$ 2, :

Mivel $\varphi(a - \varphi(a)\mathbf{1}) = 0$, ezért

$$\begin{aligned} 0 = \varphi((a - \varphi(a)\mathbf{1})^2) &= \varphi(a^2 - 2a\varphi(a) + \varphi(a)^2\mathbf{1}) \\ &= \varphi(a^2) - 2\varphi(a)^2 + \varphi(a)^2 \cdot \varphi(\mathbf{1}), \end{aligned}$$

azaz $\varphi(a^2) = \varphi(a)^2$

2, $\Longrightarrow$ 3,

Ekkor φ Jordan-homomorfizmus, és így

$$\varphi(bc + cb) = \varphi(b)\varphi(c) + \varphi(c)\varphi(b),$$

azonban $\varphi(b), \varphi(c) \in \mathbb{C}$, és így $\varphi(b)\varphi(c) = \varphi(c)\varphi(b)$, azaz

$$\varphi(bc + cb) = 2\varphi(b)\varphi(c).$$

Ebből kapjuk, hogy $\varphi(a) = 0$ esetén $\varphi(ab + ba) = 0$ minden $b \in \mathcal{A}$-ra, és a 2, tulajdonság alapján $\varphi((ab + ba)^2) = 0$. Ezután felhasználva a

$$(bc - cb)^2 = 2((bcb)c + c(bcb)) - (bc + cb)^2$$

azonosságot kapjuk, hogy

$$(\varphi(ba-ab))^2 = \varphi((ba-ab)^2)$$

$$= 2\varphi((bab)a + a(bab)) = 4\varphi(bab)\varphi(a) = 0.$$

Ezután $\varphi(ab+ba)$-t és $\varphi(ba-ab)$-t összeadva nyerjük, hogy

$$2\varphi(ba) = \varphi(ab+ba) + \varphi(ba-ab) = 0.$$

3, $\implies$ 4,

Mivel $\varphi(a - \varphi(a)\mathbf{1}) = 0$, ezért a 3, tulajdonságot felhasználva kapjuk, hogy tetszőleges $a, b \in \mathcal{A}$-ra

$$0 = \varphi(b(a - \varphi(a)\mathbf{1})) = \varphi(ba) - \varphi(a)\varphi(b).$$

4, $\implies$ 1,

Triviális.

4, $\implies$ 5,

Ha $a \in \mathcal{A}$ olyan invertálható elem, amelyre $\varphi(a) = 0$, akkor a

$$0 = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(\mathbf{1}) = 1$$

ellentmondást kapjuk.

5, $\implies$ 6,

Következik abból, hogy

$$\varphi(\varphi(a)\mathbf{1} - a) = 0.$$

6, $\implies$ 5,

Ha a invertálható, akkor a 0 nincs benne a spektrumában.

6, $\implies$ 1,

Rögzített $n \in \mathbb{N}$ természetes számra és $a \in \mathcal{A}$ elemre tekintsük a

$$p(\lambda) = \varphi((\lambda \cdot \mathbf{1} - a)^n)$$

polinomot, és jelölje ennek gyökeit λ_j, $1 \leq j \leq n$. A $\varphi((\lambda_j \cdot \mathbf{1} - a)^n) = 0$ egyenlőségből következik, hogy $(\lambda_j \cdot \mathbf{1} - a)^n$ nem invertálható, és így $\lambda_j \cdot \mathbf{1} - a$ sem invertálható. Ez azzal ekvivalens, hogy $\lambda_j \in Sp(a)$ minden $1 \leq j \leq n$-re.

Kifejtve

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - \lambda_j) = \lambda^n - n\varphi(a)\lambda^{n-1} + \binom{n}{2}\varphi(a^2)\lambda^{n-2} - ...$$

és az együtthatók összehasonlításával kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = n\varphi(a) = 0$$

és

$$\sum_{j<k} \lambda_j \lambda_k = \binom{n}{2} \varphi(a^2).$$

Ugyanakkor

$$0 = (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j)^2 = \sum_{j=1} \lambda_j^2 + 2 \sum_{j<k} \lambda_j \lambda_k$$

miatt kapjuk, hogy

$$n(n-1)|\varphi(a)^2| = 2|\sum_{j<k} \lambda_j \lambda_k| = |\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2| \leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j^2| \leq n\rho(a)^2.$$

Mivel $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges volt, és $\rho(a)$ véges, ezért kapjuk, hogy $\varphi(a^2) = 0$.

$\square$

6. fejezet

C*-algebra egységgömbjének extremális pontjai

A következő fejezet célja C*-algebra egységgömbjének extremális pontjainak karakterizációja.

6.0.1. Lemma. *Legyen $\mathcal{A}$ egységelemes C*-algebra, és legyenek $a, b \in \mathcal{A}_{sa}$ önadjungált elemek, amelyekre $ab = 0$. Ekkor $||a + b|| \leq \max\{||a||, ||b||\}$.*

Bizonyítás. Az a, b elemek önadjungáltsága miatt teljesül $ba = (ab)^* = 0$ is, azaz a, b felcserélhető elemek. Legyen $\mathcal{B}$ olyan kommutatív egységelemes C*-részalgebra $\mathcal{A}$-ban, amelyre $a, b \in \mathcal{B}$. Jelölje Γ a $\mathcal{B}$ Gelfand-reprezentációját, ez a kommutatív Gelfand-Naimark tétel szerint izometrikus algebra-izomorfizmus. Továbbá fennáll, hogy $\Gamma(a) \cdot \Gamma(b) = 0$, amiből következik hogy $||\Gamma(a) + \Gamma(b)|| \leq \max\{||\Gamma(a)||, ||\Gamma(b)||\}$ amiből kapjuk, hogy $||a + b|| \leq \max\{||a||, ||b||\}$. $\square$

6.0.2. Lemma. *Legyen E valós vagy komplex normált tér, és jelölje B az E zárt egységgömbjét. Legyenek $x, y \in \partial B$ olyan egységvektorok és $0 < \alpha < 1$ olyan pozitív valós szám, amelyre $\alpha x + (1 - \alpha) y \in \partial B$. Ekkor $[x, y] \subseteq \partial B$.*

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy ha $u, v \in E$ olyan vektorok, amelyekre $||u + v|| = ||u|| + ||v||$, akkor tetszőleges $s, t \geq 0$ számokra

$$||su + tv|| = s||u|| + t||v||$$

is fennáll. Világos, hogy elég a fenti egyenlőséget $0 \leq s \leq t$ esetben belátni.

$$||su + tv|| = ||t(u + v) - (t - s)u|| \geq |t||u + v|| - (t - s)||u|||$$

$$= t||u|| + t||v|| - (t - s)||u|| = s||u|| + t||v||.$$

A fordított irányú egyenlőtlenség következik a háromszög-egyenlőtlenségből. Tegyük fel, hogy x, y egységvektorok, és $0 < \alpha < 1$ olyan szám, amelyre $||\alpha x + (1 - \alpha) y|| = 1$. Ekkor az $u = \alpha x$ és $v = (1 - \alpha) y$ jelöléseket bevezetve fennáll, hogy

$$||u|| + ||v|| = 1 = ||u + v||,$$

ezért tetszőleges $0 < \lambda < 1$ szám esetén

$$||\lambda x + (1-\lambda)y|| = \left\|\frac{\lambda}{\alpha}u + \frac{1-\lambda}{1-\alpha}v\right\| = \frac{\lambda}{\alpha}||u|| + \frac{1-\lambda}{1-\alpha}||v|| = \lambda + 1 - \lambda = 1,$$

amivel beláttuk, hogy $[x, y] \subseteq \partial B$. $\square$

6.0.3. Következmény. *Legyen E valós vagy komplex normált tér, és jelölje B az E zárt egységgömbjét. Ha $z \in B$ nem extremális pontja B-nek akkor léteznek $x, y \in B$ különböző pontok, hogy $z = \frac{1}{2}(x+y)$.*

Bizonyítás. Ha $z \in B \setminus \partial B$ akkor létezik olyan $u \in E$ nem-nulla vektor, hogy $z + u \in B$ és $z - u \in B$, ekkor z előáll $z = \frac{1}{2}[(z+u) + (z-u)]$ alakban. Ha $z \in \partial B$ és z előáll $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ alakban valamely $x, y \in B$ különböző vektorok és $0 < \alpha < 1$ szám mellett, akkor $x, y \in \partial B$, és így az előző lemmából kapjuk, hogy $[x, y] \subseteq \partial B$. Ebből pedig $u = x - y$ és elég kicsi $t > 0$ választással $z + -tu \in [x, y] \subseteq B$, vagyis $z = \frac{1}{2}[(z+tu) + (z-tu)]$. $\square$

6.0.4. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ egységelemes C^*-algebra és legyen B az $\mathcal{A}$ zárt egységgömbje. Ekkor $\mathbf{1}$ extremális pont B-ben. Ha $e \in \mathcal{A}$ projekció, akkor ha B_e jelöli az $e\mathcal{A}e$ redukált C^*-részalgebra zárt egységgömbjét, akkor $e \in B_e$ extremális pont.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $\mathbf{1}$ nem extremális pontja B-nek, akkor az előző következmény szerint léteznek olyan $a, b \in B$ különböző elemek, amelyekre $\mathbf{1}$ előáll $\frac{a+b}{2}$ alakban. Ekkor $c = \frac{1}{2}(a^* + a)$ és $d = \frac{1}{2}(b^* + b)$ olyan önadjungált elemek, amelyekre $\mathbf{1} = \frac{1}{2}(c + d)$. Ezt átrendezve kapjuk, hogy $d = 2 \cdot \mathbf{1} - c$, azaz d benne van a c által generált kommutatív egységelem C*-részalgebrában. Jelölje Γ ennek a Gelfand-reprezentációját, akkor

$$\mathbf{1} = \Gamma(\mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\Gamma(c) + \Gamma(d)).$$

Ha valamely χ karakterre $\Gamma_c(\chi) < 1$ akkor szükségképpen $\Gamma_d(\chi) > 1$, ami Γ izometrikussága miatt lehetetlen. Emiatt $\Gamma(c) = \Gamma(d) = \mathbf{1}$ és ezért $c = d = \mathbf{1}$. Ebből következik, hogy $a^* + a = 2 \cdot \mathbf{1}$. Az előzőekkel azonos módon kapjuk, hogy $a = \mathbf{1}$ és $b = \mathbf{1}$, azaz $\mathbf{1}$ valóban extremális pont. A második állítás belátásához tekintsük tetszőleges $e \in \mathcal{A}$ projekció mellett a $\mathcal{B} = e\mathcal{A}e$ redukált C*-részalgebrát, akkor e a $\mathcal{B}$ egységeleme, ezért az előző érvelés alapján e a $\mathcal{B}_e$ extremális eleme. $\square$

6.0.5. Definíció. Legyen $\mathcal{A}$ egységelemes C*-algebra. Ekkor azt mondjuk, hogy az $a \in \mathcal{A}$ elem parciális izometria ha a^*a önadjungált idempotens.

6.0.6. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egységelemes C^*-algebra, és jelölje B az $\mathcal{A}$ zárt egységgömbjét. Ekkor $x \in B$ pontosan akkor extremális pont, ha parciális izometria és ha*

$$(\mathbf{1} - xx^*)\mathcal{A}(\mathbf{1} - x^*x) = \{0\}. \tag{6.1}$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $x \in B$ extremális pont. Megmutatjuk, hogy ekkor $e := x^*x \in \mathcal{A}$ projekció, azaz önadjungált idempotens elem. Mivel e pozitív elem, ezért ehhez elég megmutatnunk, hogy $Sp(e) \subseteq \{0, 1\}$. Mivel $||e|| \leq 1$, ezért $Sp(e) \subseteq [0, 1]$, tehát azt kell megmutatni, hogy ha $0 < \lambda < 1$, akkor $\lambda \notin Sp(e)$.Tegyük fel indirekt ennek ellenkezőjét, azaz hogy valamely $\lambda \in (0, 1)$-re $\lambda \in Sp(e)$. Jelölje C_e az e elemhez tartozó folytonos függvényszámító operátort. Legyen továbbá $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ olyan nemnegatív függvény, amelyre $\varphi(\lambda) > 0$, ugyanakkor

$$|z \cdot (1 \pm \varphi(z))^2| \leq 1, \quad z \in [0,1].$$

Tekintsük a $C_e : \mathcal{C}(Sp(e); \mathbb{C}) \to \mathcal{A}$ folytonos függvényszámító operátort, akkor C_e izometrikussága és $e\varphi(e) = \varphi(e)e$ alapján kapjuk, hogy

$$1 \geq ||e \cdot (\mathbf{1} \pm \varphi(e))^2|| = ||(\mathbf{1} \pm \varphi(e))x^*x(\mathbf{1} \pm \phi(e))|| = ||x(\mathbf{1} \pm \varphi(e))||^2,$$

amiből kapjuk, hogy $x \pm x\varphi(e) \in B$.Ebből a $z_\pm = x \pm x\varphi(e)$ jelölés bevezetésével nyerjük az x extremális elem $x = \frac{1}{2}(z_+ + z_-)$ előállítását, amiből x extremális voltából következik, hogy $x = z_+ = z_-$, azaz $x\varphi(e) = 0$, és így egyúttal $e\varphi(e) = 0$. Ez azonban lehetetlen, ugyanis $\lambda\varphi(\lambda) > 0$, $\lambda \in Sp(e)$ így a folytonos függvényszámító operátor injektivitása miatt $e\varphi(e) \neq 0$. Ezzel beláttuk, hogy x^*x projekció. Ugyanakkor a Jacobson-lemmából tudjuk, hogy $Sp(xx^*) = Sp(x^*x) \cup \{0\} \subseteq \{0,1\}$, ezért xx^* pozitivitása alapján xx^* is projekció, amivel beláttuk, hogy x parciális izometria. A második állításhoz legyen $a \in (1 - xx^*)\mathcal{A}(1 - x^*x)$, $||a|| \leq 1$, megmutatjuk, hogy ekkor $a = 0$. Mivel x^*x projekció, ezért $(\mathbf{1} - x^*x)x^*x = 0$, ezért $ax^*x = 0$, és így a C*-azonosság alapján

$$0 = ||ax^*xa^*|| = ||xa^*||^2 = ||ax^*||^2,$$

vagyis $ax^* = xa^* = 0$. Mivel xx^* is projekció, ezért $xx^*(\mathbf{1} - xx^*) = 0$, és így a alakja miatt $xx^*a = 0$, azaz $xx^*aa^* = 0$. A korábbi lemma alapján

$$||x \pm a||^2 = ||(x \pm a)(x \pm a)^*|| = ||xx^* \pm xa^* \pm ax^* + aa^*||$$

$$= ||xx^* + aa^*|| \leq \max\{||xx^*||, ||aa^*||\} \leq 1,$$

azaz $x \pm a \in B$. Felhasználva, hogy $x \in B$ extremális pont és hogy $x = \frac{1}{2}[(x+a) + (x-a)]$ kapjuk, hogy $a = 0$, amivel beláttuk a (6.1) egyenlőséget. Tegyük fel most, hogy $x \in B$-re teljesül a (6.1) egyenlőség, akkor

$$0 = x^*(1 - xx^*)x(1 - x^*x) = (x - xx^*x)^*(x - xx^*x)$$

amiből a C*-azonosságból $x - xx^*x = 0$, és ezt jobbról illetve balról is x^*-gal szorozva adódik hogy $x^*x = (x^*x)^2$ és $xx^* = (xx^*)^2$, azaz x parciális izometria. Az $e := x^*x$ és $f := xx^*$ jelöléseket bevezetve adódik, hogy

$$(ex^* - x^*)(ex^* - x^*)^* = (ex^* - x^*)(xe - x)$$

$$= ex^*xe - ex^*x - x^*xe + x^*x$$

$$= eee - ee - ee + e = e - e - e + e = 0,$$

amiből kapjuk, hogy $ex^* = x^*$ és $xe = x$. Tegyük fel, hogy $x \in B$ nem extremális pont, akkor a 6.0.2 Lemma értelmében léteznek olyan $a, b \in B$, $a \neq b$ vektorok, amelyekre $x = \frac{a+b}{2}$. Ekkor

$$e = e^3 = ex^*xe = ex^*\frac{a+b}{2}e = \frac{ex^*ae + ex^*be}{2}.$$

Jelölje B_e az $e\mathcal{A}e$ redukált C*-részalgebra zárt egységgömbjét, akkor $ex^*ae, ex^*be \in B_e$, ugyanakkor a 6.0.4 Állítás szerint $e \in B_e$ extremális pont, amiből

$$e = ex^*ae = ex^*be.$$

Ebből pedig

$$x = xe = x(ex^*ae) = (xe)x^*ae = xx^*ae = fae,$$

és hasonlóan

$$x = xe = x(ex^*be) = (xe)x^*be = xx^*be = fbe.$$

Kihasználva, hogy $ae = fae + (\mathbf{1} - f)ae$ és hogy

$$ea^*fae = x^*x = e :$$

$$1 \geq ||ea^*ae|| = ||[fae + (\mathbf{1} - f)ae]^*[fae + (\mathbf{1} - f)ae]||$$

$$= ||ea^*fae + ea^*(\mathbf{1} - f)ae|| = ||xx^* + ea^*(\mathbf{1} - f)ae|| = ||e + ea^*(\mathbf{1} - f)ae||,$$

vagyis $h = ea^*(\mathbf{1} - f)ae \in e\mathcal{A}e$ olyan elem, amelyre $||e + h|| \leq 1$. Így tetszőleges $e\mathcal{A}e$ feletti ρ állapotra

$$1 \leq 1 + \rho(h) = \rho(e + h) \leq 1$$

vagyis $\rho(h) = 0$ teljesül, amiből $h = 0$ következik, azaz $ea^*(\mathbf{1} - f)ae = 0$. Hasonlóan kapjuk, hogy $eb^*(\mathbf{1} - f)be = 0$. Ebből következik, hogy $(\mathbf{1} - f)ae = 0 = (\mathbf{1} - f)be$, azaz

$$ae = fae = x = fbe = be.$$

Ezzel beláttuk tehát, hogy ha $x \in B$-re (6.1) teljesül, akkor $x = \frac{1}{2}(a + b)$ $a, b \in B$ esetén $ae = be = x$ teljesül, ahol $e = x^*x$. (6.1) mellett ugyanakkor $(1 - x^*x)\mathcal{A}(1 - xx^*) = \{0\}$ is fennáll, továbbá $x^* = \frac{1}{2}(a^* + b^*)$, ezért $a^*f = b^*f = x^*$, vagyis $fa = fb = x$. Végül az $ae = be = fa = fb$ egyenlőségek és $(\mathbf{1} - f)\mathcal{A}(\mathbf{1} - e) = \{0\}$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$a = [f + (\mathbf{1} - f)]a[e + (\mathbf{1} - e)]$$

$$= fa(\mathbf{1} - e) + (\mathbf{1} - f)ae + fae$$

$$= fb(\mathbf{1} - e) + (\mathbf{1} - f)be + fbe$$

$$= [f + (\mathbf{1} - f)]b[e + (\mathbf{1} - e)] = b$$

amivel beláttuk, x extremális voltát és ezzel a tételt is. □

6.0.7. Következmény. *Legyen T kompakt Hausdorff-tér és jelölje B a $\mathcal{C}(T; \mathbb{C})$ C^*-algebra zárt egységgömbjét. Ekkor egy $\varphi \in B$ függvény pontosan akkor extremális pont, ha minden $t \in T$-re $|\varphi(t)| = 1$, azaz*

$$ex\ B = \{\varphi \in \mathcal{C}(T; \mathbb{C}) | |\varphi(t)| = 1 \ \ (t \in T)\}.$$

Bizonyítás. Ha $|\varphi| = 1$, akkor $\mathbf{1} - \varphi \cdot \varphi^* = 0$ és így az előző tétel figyelembevételével φ extremális pontja B-nek. Megfordítva, ha φ extremális pont, akkor az előző tétel szerint $(\mathbf{1} - \varphi\varphi^*)\mathbf{1}(\mathbf{1} - \varphi^*\varphi) = 0$, amiből $|\varphi| = 1$ következik. □

6.0.8. Következmény. *Legyen $\mathcal{A}$ kommutatív egységelemes C^*-algebra, és jelölje B az $\mathcal{A}$ zárt egységgömbjét. Ekkor B extremális pontjai éppen az unitér elemek, azaz*

$$ex\ B = \{u \in \mathcal{A} | u^*u = \mathbf{1}\}$$

Bizonyítás. Jelölje Γ az $\mathcal{A}$ Gelfand-reprezentációját, akkor a kommutatív Gelfand-Naimark tétel szerint Γ izometrikus *-algebra izomorfizmus $\mathcal{A}$ és $\mathcal{C}(X(\mathcal{A});\mathbb{C})$ között valamely alkalmas $X(\mathcal{A})$ kompakt Hausdorff-térre. Γ linearitása és izometrikussága folytán világos, hogy Γ^{-1} a $\mathcal{C}(X(\mathcal{A});\mathbb{C})$ zárt egységgömbjét illetve annak extremális pontjait B-re illetve $ex\ B$-re képezi. Ebből és az előző következményből kapjuk, hogy

$$ex\ B = \{\Gamma^{-1}\varphi | \varphi \in \mathcal{C}(X(\mathcal{A});\mathbb{C}), |\varphi(x)| = 1,\ (x \in X(\mathcal{A}))\},$$

ami valóban az $\mathcal{A}$ unitér elemeinek halmaza. □

A következőkben az egy normájú pozitív elemek halmazának extremális pontjait vizsgáljuk. Ehhez szükségünk lesz a következő állításra:

6.0.9. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ egységelemes C*-algebra, $a \in \mathcal{A}_+$ pozitív elem és legyen $e \in \mathcal{A}$ projekció. Ekkor ha $a \leq \lambda e$ valamely $\lambda > 0$ szám mellett, akkor $a = eae$.*

Bizonyítás. A nemkommutatív Gelfand-Naimark tétel szerint létezik $\mathcal{A}$-nak hű ábrázolása egy alkalmas $\mathcal{H}$ Hilbert-térben, azaz létezik egy $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ injektív *-algebra izomorfizmus. Ekkor az $E = \pi(e)$ és $A = \pi(a)$ jelölések mellett $A \leq \lambda E$, amiből a Douglas-féle faktorizációs tétel szerint $ran\ A \subseteq \operatorname{ran}\ E$, vagyis $A = EA$, illetve $\ker\ A^\perp \subseteq \operatorname{ran}\ E$ miatt $A = AE$ következik. Ebből tehát a $\pi(a) = \pi(eae)$ összefüggést nyerjük, amiből π injektivitása miatt $a = eae$.

□

6.0.10. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egységelemes C*-algebra és jelölje P az $\mathcal{A}$ legfeljebb egy normájú pozitív elemeinek halmazát. Ekkor P extremális pontjai éppen a projekciók, azaz fennáll, hogy*

$$ex\ P = \{e \in \mathcal{A} | e = e^2 = e^*\}.$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $e \in \mathcal{A}$ projekció és $e = \alpha a + (1-\alpha)b$ valamely $a, b \in P$-re és $0 < \alpha < 1$ számra, akkor alkalmas $\lambda > 0$ számra $a \leq \lambda e$ és $b \leq \lambda e$, így az előző állítást felhasználva adódik, hogy $a = eae$ és $b = ebe$. Ebből kapjuk, hogy a és b elemei az $e\mathcal{A}e$ redukált C*-részalgebrának, és ha B_e jelöli ennek zárt egységgömbjét, akkor $a, b \in B_e$, továbbá a 6.0.4. Állítás szerint $e \in B_e$ extremális pont, azaz $a = b = e$, amiből már következik, hogy e extremális pont. Tegyük fel most, hogy $e \in P$ extremális pont, tudjuk hogy ekkor $Sp(e) \subseteq [0,1]$. Ha lenne olyan $\lambda \in Sp(e)$ spektrumpont, amelyre $0 < \lambda < 1$ akkor az e által generált kommutatív C*-részalgebra Gelfand-reprezentációját véve kapnánk olyan x pozitív eleme létezését, amelyre $0 \leq \Gamma(e \pm x) \leq \mathbf{1}$, azaz $e \pm x \in P$, ami ellentmond e extremalitásának. Ezzel beláttuk, hogy $Sp(e) \subseteq \{0,1\}$, vagyis e projekció. □

A fejezet zárásaként C*-algebra legfeljebb egy normájú önadjungált elemeinek halmazának extremális pontjait vizsgáljuk. Ehhez először bevezetjük a szimmetria fogalmát C*-algebra elemei között.

6.0.11. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ egységelemes C*-algebra s eleme szimmetria, ha önadjungált és unitér, azaz $s = s^* = s^{-1}$.

6.0.12. Állítás. *Az $\mathcal{A}$ egységelemes C*-algebra egy s elemére a következők ekvivalensek:*

1. *s szimmetria, vagyis $s = s^* = s^{-1}$,*
2. *s normális és $Sp(s) \subseteq \{-1, 1\}$,*
3. *létezik olyan $e \in \mathcal{A}$ projekció, hogy $s = e - e^{\perp}$, ahol $e^{\perp} = \mathbf{1} - e$.*

Bizonyítás. Legyen s normális elem, akkor az önadjungált és unitér elemek spektrális jellemzése alapján kapjuk, hogy s pontosan akkor szimmetria, ha $Sp(s) \subseteq \mathbb{D} \cap \mathbb{R}$, azaz pontosan akkor, ha $Sp(s) \subseteq [-1, 1]$, amivel beláttuk az $1, \Leftrightarrow 2,$ ekvivalenciát. Tegyük fel, hogy s-re 2, teljesül, akkor a $\varphi := \chi_{\{-1\}}$ és $\psi := \chi_{\{1\}}$ függvények $Sp(s)$-re vett megszorításai folytonosak. A

$$\psi(z) = 1 - \varphi(z),\ \varphi(z) - \psi(z) = z\ \ (z \in Sp((s)$$

egyenlőségek figyelembevételével a folytonos függvényszámítás tételéből adódik, hogy $e := \varphi(s) \in \mathcal{A}$ olyan projekció, amelyre $e^{\perp} = \psi(s)$ és egyúttal $s = \varphi(s) - \psi(s) = e - e^{\perp}$ teljesül, amivel igazoltuk a $2, \rightarrow 3,$ implikációt. Végül ha $e \in \mathcal{A}$ projekció, akkor $s := e - e^{\perp}$ nyilvánvalóan önadjungált, továbbá

$$s^2 = (e - e^{\perp})^2 = e^2 - ee^{\perp} - e^{\perp}e + (e^{\perp})^2$$

$$= e - e + e - e + e^2 + \mathbf{1} - 2e + e^2 = \mathbf{1},$$

azaz s unitér, vagyis szimmetria. □

6.0.13. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egységelemes C*-algebra, és jelölje S az $\mathcal{A}$ zárt egységgömbjének önadjungált elemeit, azaz $S := \mathcal{A}_{sa} \cap B$, akkor S extremális pontjai éppen a szimmetriák, azaz*

$$ex\, S = \{s \in \mathcal{A} \,|\, s = s^* = s^{-1}\}$$

Bizonyítás. Ha s szimmetria, akkor világos hogy $(1 - ss^*)\mathcal{A}(1 - s^*s) = \{0\}$ teljesül, így a 6.0.6. Tétel szerint s extremális pontja a B egységgömbnek, és így nyilván S-nek is. Megfordítva tegyük fel, hogy s extremális pontja S-nek. Ekkor léteznek s^+, s^- egymással felcserélhető pozitív elemek, amelyekre $||s^{\pm}|| \leq 1$, $s^+s^- = 0$ és s előáll $s^+ - s^-$ alakban. Jelölje P az $\mathcal{A}$ legfeljebb egy normájú pozitív elemeinek halmazát, megmutatjuk, hogy $s^{\pm}$ extremális pontok P-ben. Tegyük fel, hogy s^+ előáll $s^+ = \frac{1}{2}(h + k)$ alakban valamely $h, k \in P$ elemek mellett, akkor

$$-\mathbf{1} \leq -s^- \leq h - s^- \leq h \leq \mathbf{1}$$

figyelembevételével kapjuk, hogy $||h - s^-||$, vagyis $h - s^- \in S$. Hasonlóan adódik, hogy $k - s^- \in S$, vagyis

$$s = s^+ - s^- = \frac{h - s^-}{2} + \frac{k - s^-}{2}$$

és $s \in ex\ S$ figyelembevételével kapjuk, hogy $\frac{h-s^-}{2} = \frac{k-s^-}{2}$, azaz $h = k$ adódik, amivel beláttuk, hogy $s^+ \in P$ extremális pont. Hasonlóan igazolható, hogy s^- is extremális pont. A 6.0.10. Tételből kapjuk, hogy s^+ és s^- projekciók, ezért a tétel igazolva lesz, ha megmutatjuk, hogy $s^+ + s^- = \mathbf{1}$. Jelölje $\mathcal{B}$ az s^+ és s^- által generált kommutatív C*-algebrát, és legyen $e = \mathbf{1} - s^+ + s^-$, továbbá jelölje $\mathcal{B}$ Gelfand-reprezentációját Γ, akkor e projekció és $se = 0$, amiből látható hogy a $\Gamma(s)$ és $\Gamma(e)$ függvények diszjunkt tartójúak, és ezért $||s \pm e|| = ||\Gamma(s \pm e)|| \leq 1$, azaz $s \pm e \in S$. Ebből viszont s extremalitása miatt $e = 0$, azaz $s^+ + s^- = \mathbf{1}$, amivel igazoltuk a tételt. $\square$

7. fejezet

Kadison általánosított Schwarz-egyenlőtlensége

7.0.1. Lemma. *Legyen $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-tér és legyenek $A_1, A_2, ...A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátorok. Ekkor tetszőleges $x_1, x_2, ...x_n \in \mathcal{H}$ vektorok esetén fennáll, hogy*

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} A_j x_j \Big\|^2 \leq \Big\| \sum_{j=1}^{n} A_j \Big\| \cdot \sum_{j=1}^{n} (A_j x_j | x_j).$$

Bizonyítás. Először konstruálunk egy segéd Hilbert-teret minden tetszőleges $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátorhoz a következő módon:tekintsük A képterét és lássuk el azt az $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ skalárszorzattal a következőképp:

$$\langle Ax, Ay \rangle_A := (Ax|y) \;\; x, y \in \mathcal{H}.$$

Megmutatjuk, hogy $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ jóldefiniált skalárszorzat ran A-n. Legyenek ugyanis $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ olyan vektorok, amelyekre $Ax_1 = Ax_2$ és $Ay_1 = Ay_2$, akkor

$$(Ax_1|y_1) = (Ax_2|y_1) = (x_2|Ay_1) = (x_2|Ay_2) = (Ax_2|y_2),$$

amivel megmutattuk, hogy $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ jól definiált. Legyen továbbá $x \in \mathcal{H}$ olyan, hogy $\langle Ax, Ax \rangle_A = 0$, azaz $(Ax|x) = 0$. Ekkor a fél-skalárszorzatokra vonatkozó Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy minden $y \in \mathcal{H}$ vektorra

$$|(Ax|y)|^2 \leq (Ax|x) \cdot (Ay|y),$$

amiből kapjuk, hogy $Ax = 0$. Ezzel beláttuk, hogy $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ pozitív definit, azaz skalárszorzat. Jelölje ezután $\mathcal{S}_A$ az így nyert (ran A, $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$) prehilbert tér teljessé tételét, mely a skaláris szorzat $\mathcal{S}_A$-ra való kiterjesztésével Hilbert-tér. A $\mathcal{S}_A$ feletti skalárszorzatot is az $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ szimbólummal jelöljük, és az $\mathcal{S}_A$ teret az A operátorhoz társított segéd Hilbert-térnek nevezzük. Ezután tekintsük az $A_1, A_2, ..., A_n$ pozitív operátorok előbbi konstrukcióval kapott segéd Hilbert-tereit, és jelölje ezek direkt összegét $\mathcal{K}$, azaz

$$\mathcal{K} := \bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{H}_{A_k}.$$

Tekintsük az alábbi

$$Vx := (A_1x, A_2x, ..., A_nx), \;\; x \in \mathcal{H}$$

egyenlőséggel értelmezett $V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ függvényt, amely lineáris operátor. Továbbá az alábbi

$$((A_1x, A_2x, ..., A_nx)|(A_1x, A_2x, ..., A_nx))_{\mathcal{K}} = \sum_{j=1}^{n}(A_jx|x) \leq \Big\| \sum_{j=1}^{n} A_j \Big\| \cdot ||x||^2$$

egyenlőtlenségből látszik, hogy V korlátos operátor, és normájára fennáll a $||V||^2 \leq \Big\| \sum_{j=1}^{n} A_j \Big\|$ becslés. Tekintsük a V operátor adjungáltját, azaz a $V^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ operátort, továbbá legyenek $x_1, x_2, ..., x_n$ és y $\mathcal{H}$-beli vektorok, akkor

$$\begin{aligned}(V^*(A_1x_1, A_2x_2, ..., A_nx_n)|y) &= ((A_1x_1, A_2x_2, ..., A_nx_n)|(A_1y, A_2y, ..., A_ny))_{\mathcal{K}} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (A_jx_j|y) = \Big(\sum_{j=1}^{n} A_jx_j|y \Big),\end{aligned}$$

amiből kapjuk, hogy

$$V^*(A_1x_1, A_2x_2, ..., A_nx_n) = \sum_{j=1}^{n} A_jx_j, \;\; x_1, x_2, ..., x_n \in \mathcal{H}.$$

Végül a $||V^*|| = ||V||$ összefüggés figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{j=1}^{n} A_jx_j \Big\|^2 &= ||V^*(A_1x_1, A_2x_2, ..., A_nx_n)||^2 \\ &\leq ||V^*||^2 \cdot ||(A_1x_1, A_2x_2, ..., A_nx_n)||^2_{\mathcal{K}} \\ &\leq \Big\| \sum_{j=1}^{n} A_j \Big\| \cdot \sum_{j=1}^{n} (A_jx_j|x_j),\end{aligned}$$

amivel beláttuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. □

A következőkben $\mathcal{B}^\infty(T;\mathbb{C})$ jelöli a T kompakt Hausdorff-téren értelmezett komplex értékű korlátos Borel-mérhető függvények C*-algebráját, amelyen a norma a szokásos

$$||f|| := \sup_{t \in T} |f(t)|, \;\; t \in T$$

egyenlőséggel értelmezett szuprémum-norma.

7.0.2. Lemma. *Legyen T kompakt Hausdorff-tér, $\mathcal{H}$ pedig komplex Hilbert-tér. Legyen továbbá $\Phi_0 : \mathcal{C}(T;\mathbb{C}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris leképezés, amelyre $||\Phi_0|| \leq 1$ és amely rendezéstartó abban az értelemben, hogy ha valamely $\psi, \varphi \in \mathcal{C}(T;\mathbb{R})$ valós értékű függvények esetén $\varphi \leq \psi$ teljesül, akkor $\Phi_0(\varphi) \leq \Phi_0(\psi)$. Ekkor létezik Φ_0-nak egyetlen $\Phi : \mathcal{B}^\infty(T;\mathbb{C}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris és rendezéstartó kiterjesztése, amelyre $||\Phi|| \leq 1$.*

Bizonyítás. Legyenek $x, y \in \mathcal{H}$ rögzített vektorok, és tekintsük az

$$u_{x,y}(\varphi) := (\Phi_0(\varphi)x|y), \;\; \varphi \in \mathcal{C}(T;\mathbb{C})$$

egyenlőséggel értelmezett $u_{x,y} : \mathcal{C}(T;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionált. Az alábbi

$$|(\Phi_0(\varphi)x|y)| \leq ||\Phi_0(\varphi)||||x||||y|| \leq ||\varphi|| \cdot ||x||||y||$$

becslés alapján $u_{x,y}$ folytonos, és normájára fennáll az $||u_{x,y}|| \leq ||x||||y||$ becslés. Ezért a Riesz reprezentációs tétel szerint létezik egy $\mu_{x,y}$ reguláris Borel-mérték a T Borel-halmazain, amelyre fennáll, hogy

$$u_{x,y}(\varphi) = \int\limits_T \varphi \, d\mu_{x,y}, \qquad \varphi \in \mathcal{C}(T;\mathbb{C}),$$

továbbá a $\mu_{x,y}$ teljes változására teljesül, hogy $|\mu_{x,y}|(T) \leq ||x||||y||$. Vegyük észre továbbá, hogy ha $\varphi \in \mathcal{C}(T;\mathbb{C})$ olyan függvény, amelyre $\varphi \geq 0$, akkor Φ_0 rendezéstartó tulajdonsága miatt $\Phi_0(\varphi) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátor. Ekkor minden $x \in \mathcal{H}$-ra

$$0 \leq (\Phi_0(\varphi)x|x) = u_{x,x},$$

vagyis $u_{x,x}$ pozitív funkcionál. Ebből ismét a Riesz reprezentációs tételből kapjuk, hogy $u_{x,x}$ mérték minden $x \in \mathcal{H}$ esetén. Legyen $f \in \mathcal{B}^\infty(T;\mathbb{C})$ korlátos Borel-mérhető függvény és tekintsük az

$$F(x,y) := \int\limits_T f d\mu_{x,y} \;\; x, y \in \mathcal{H}$$

$F : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ függvényt. Vegyük észre, hogy az $(x, y) \mapsto \mu_{x,y}$ hozzárendelés sesquilineáris, ezért az F függvény is az, továbbá az

$$\left| \int\limits_T f d\mu_{x,y} \right| \leq ||f||_\infty \cdot |\mu_{x,y}|(T) \leq ||f||_\infty \cdot ||x||||y||$$

becslés alapján F korlátos, éspedig $||F|| \leq ||f||_\infty$, így egyértelműen létezik egy olyan $\Phi(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folytonos lineáris operátor, amelyre

$$(\Phi(f)x|y) = \int\limits_T f d\mu_{x,y} \;\; x, y \in \mathcal{H}.$$

Megmutatjuk, hogy a $\Phi : \mathcal{B}^\infty(T;\mathbb{C}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eleget tesz a Lemma állításában szereplő feltételeknek. A definíció alapján világos, hogy Φ lineáris, továbbá

$$||\Phi(f)|| = ||F|| \leq ||f||_\infty$$

miatt Φ folytonos és $||\Phi|| \leq 1$. Az is könnyen látható, hogy Φ kiterjeszti Φ_0-t, legyenek ugyanis $x, y \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektorok és $\varphi \in \mathcal{C}(T;\mathbb{C})$ függvény, akkor

$$(\Phi(\varphi)x|y) = \int\limits_T \varphi d\mu_{x,y} = (\Phi_0(\varphi)x|y),$$

amiből $\Phi_0(\varphi) = \Phi(\varphi)$ következik. Meg kell mutatnunk még, hogy Φ rendezéstartó: ehhez elég megmutatni, hogy tetszőleges $f \in \mathcal{B}^\infty(T;\mathbb{C})$, $f \geq 0$ függvény esetén $\Phi(f) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pozitív operátor, azaz

$$(\Phi(f)x|x) = \int_T f d\mu_{x,x} \geq 0.$$

Ez azonban nyilvánvaló abból, hogy $\mu_{x,x}$ mérték. □

7.0.3. Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ egységelemes C*-algebra, $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, és legyen $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olyan rendezéstartó folytonos lineáris leképezés, amelyre $||\Phi|| \leq 1$. Ekkor minden $a \in \mathcal{A}_{sa}$ önadjungált elemre fennáll, hogy*

$$\Phi(a)^2 \leq \Phi(a^2).$$

Bizonyítás. Rögzítsük az $a \in \mathcal{A}$ önadjungált elemet, és jelölje $\mathcal{B}$ az a által generált kommutatív egységelemes C*-részalgebrát. Mivel bármely $b \in \mathcal{B}$ esetén $Sp_{\mathcal{B}}(b) = Sp_{\mathcal{A}}(b)$, ezért az $\mathcal{A}$ önadjungált elemein bevezetett rendezés $\mathcal{B}$-re vett megszorítása megegyezik a $\mathcal{B}$ C*-algebrabeli pozitivitás által indukált rendezéssel. Ezért ha Ψ jelöli a Φ leképezés $\mathcal{B}$-re vett megszorítását, akkor kapjuk, hogy a $\Phi(a)^2 \leq \Phi(a^2)$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $\Psi(a)^2 \leq \Psi(a^2)$, vagyis az állítást elegendő kommutatív C*-algebrákra belátnunk. Ugyanakkor ha $\mathcal{A}$ kommutatív C*-algebra akkor a Gelfand-reprezentációja rendezéstartó izometrikus *-izomorfizmust létesít az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{C}(X(\mathcal{A});\mathbb{C})$ C*-algebrák között. Ezek alapján látható, hogy a tétel állítását elég abban a speciális esetben igazolnunk, amikor $\mathcal{A} = \mathcal{C}(T;\mathbb{C})$ alakú valamely T kompakt Hausdorff-térre. Legyen tehát $\mathcal{A} = \mathcal{C}(T;\mathbb{C})$ és legyen $\Phi_0 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ olyan folytonos lineáris rendezéstartó leképezés, amelyre $||\Phi_0|| \leq 1$. Jelölje Φ a Φ_0 $\mathcal{B}^\infty(T;\mathbb{C})$-re vett kiterjesztését az előző Lemma értelmében. Először azt mutatjuk meg, hogy bármely $\varphi : T \to \mathbb{R}$ mérhető lépcsős függvény esetén

$$\Phi(\varphi)^2 \leq \Phi(\varphi^2).$$

Legyenek $E_1, E_2, ..., E_n$ olyan páronként diszjunkt mérhető T-beli halmazok és $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ valós számok, amelyek mellett φ előáll $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \chi_{E_j}$ alakban. Ekkor Φ linearitása és $\varphi^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \chi_{E_j}$ figyelembevételével a $\Phi(\varphi)^2 \leq \Phi(\varphi^2)$ egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

$$\left[\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Phi(\chi_{E_j})\right]^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \Phi(\chi_{E_j}),$$

ami az $A_j := \Phi(\chi_{E_j})$ $(j = 1, 2..., n)$ jelölést használva pontosan akkor teljesül, ha minden $x \in \mathcal{H}$ vektor mellett

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j x \right\|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j A_j x | \lambda_j x).$$

Mivel $\chi_{E_j} \leq 0$, ezért Φ rendezéstartó tulajdonsága miatt $A_j = \Phi(\chi_{E_j})$ pozitív operátor, és az E_j halmazok diszjunktsága miatt $\sum_{j=1}^{n} \chi_{E_j} \leq \mathbf{1}$, ezért $\sum_{j=1}^{n} A_j \leq \Phi(\mathbf{1})$, és így egyúttal

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} A_j \Big\| \leq ||\Phi(\mathbf{1})||,$$

így a Lemmát az A_j pozitív operátorokra és $x_j := \lambda_j x$ $(j = 1, 2, .., n)$ vektorokra alkalmazva éppen a $\Big\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j x \Big\|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j A_j x | \lambda_j x)$ egyenlőtlenséget nyerjük, amivel a $\Phi(\varphi)^2 \leq \Phi(\varphi^2)$ egyenlőtlenséget tetszőleges φ valós lépcsős függvény esetén beláttuk. Legyen most $\varphi \in \mathcal{C}(T; \mathbb{R})$ tetszőleges valós értékű folytonos függvény, és legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan valós lépcsős függvényekből álló sorozat, amely egyenletesen konvergál φ-hez, akkor Φ folytonossága miatt $\Phi(\varphi_n^2) \to \Phi(\varphi^2)$ és $\Phi(\varphi_n)^2 \to \Phi(\varphi)^2$ $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ az operátor normában. Ezért ha $x \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektor akkor az előbb igazolt egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$(\Phi(\varphi)^2 x | x) = \lim_{n\to\infty} (\Phi(\varphi_n)^2 x | x) \leq \lim_{n\to\infty} (\Phi(\varphi_n^2) x | x) = (\Phi(\varphi^2) x | x),$$

amivel a bizonyítandó állítást beláttuk tetszőleges φ folytonos valós függvény esetén.

□

7.0.4. Következmény. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ egységelemes C*-algebrák, és legyen $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ rendezéstartó folytonos lineáris leképezés, amelyre $||\Phi|| \leq 1$. Ekkor bármely $a \in \mathcal{A}$ önadjungált elemre teljesül, hogy*

$$\Phi(a)^2 \leq \Phi(a^2).$$

Bizonyítás. Legyen $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{B}$ C*-algebra egy hű reprezentációja, akkor a $b \in \mathcal{B}$ elem pontosan akkor pozitív, ha $\pi(b) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pozitív, és így π és $\Psi := \pi \circ \Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ is rendezéstartó. Legyen $a \in \mathcal{A}$ önadjungált elem, akkor az általánosított Schwartz-egyenlőtlenség szerint $\Psi(a)^2 \leq \Psi(a^2)$, azaz

$$\pi(\Phi(a)^2) = \pi(\Phi(a))^2 \leq \pi(\Phi(a^2)),$$

azaz $\Phi(a)^2 \leq \Phi(a^2)$. □

A következő tétel bizonyításához bizonyítás nélkül hivatkozzuk a következő állítást(Russo-Dye tétel).

7.0.5. Állítás. *Legyen $\mathcal{A}$ C*-algebra, és jelölje $\mathcal{A}_e$ az*

$$\{\exp ih | h = h^*, \qquad h \in \mathcal{A}\}$$

halmazt. Ekkor $\mathcal{A}_e$ norma-zárt konvex burka az $\mathcal{A}$ egységgömbje.

7.0.6. Tétel. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ egységelemes C*-algebrák, és legyen $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ olyan egységelemtartó lineáris bijekció, amely mindkét irányban rendezéstartó, azaz*

$$a \leq b \Leftrightarrow \Phi(a) \leq \Phi(b), \;\; a, b \in \mathcal{A}_{sa}.$$

Ekkor Φ Jordan-homomorfizmus, azaz $\Phi(a^2) = \Phi(a)^2, \; a \in \mathcal{A}$.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy Φ folytonos és $||\Phi|| = 1$. Legyen $h \in \mathcal{A}_{sa}$ önadjungált elem, akkor $-||h||\mathbf{1} \leq h \leq ||h||\mathbf{1}$, és így $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ miatt és Φ rendezéstartó tulajdonságát figyelembevéve $-||h||\mathbf{1} \leq \Phi(h) \leq ||h||\mathbf{1}$, amiből kapjuk, hogy $||\Phi(h)|| \leq ||h||$. Legyen most $a \in \mathcal{A}$ tetszőleges elem, és legyen $h := Re\, a$, $k := Im\, a$, akkor $||h||, ||k|| \leq ||a||$. Legyen ugyanis $f \in \mathcal{A}'$, $||f|| = 1$ olyan állapot, amelyre $|f(h)| = ||h||$, akkor $f(h)$, $f(k) \in \mathbb{R}$ figyelembevételével

$$||h||^2 = |f(h)|^2 \leq |f(h)|^2 + |f(k)|^2 = |f(h + ik)|^2 = |f(a)|^2 \leq ||a||^2,$$

vagyis $||h|| \leq ||a||$, és hasonlóan adódik, hogy $||k|| \leq ||a||$. Ebből pedig már adódik, hogy Φ folytonos és hogy $||\Phi|| \leq 2$. Legyen ugyanis $a \in \mathcal{A}$ tetszőleges, akkor

$$||\Phi(a)|| \leq ||\Phi(h)|| + ||\Phi(k)|| \leq ||h|| + ||k|| \leq 2||a||.$$

Az nyilvánvaló, hogy $||\Phi(\mathbf{1})|| \leq ||\Phi||$, meg kell mutatnunk, hogy

$$||\Phi(a)|| \leq ||\Phi(\mathbf{1})|, \qquad a \in \mathcal{A} \tag{7.1}$$

Feltehető, hogy $||\Phi(\mathbf{1})|| = 1$. A Russo-Dye tétel szerint (7.1) bizonyításához elég az egyenlőtlenséget a helyett tetszőleges u unitér elemre megmutatni. Ekkor az általánosított Schwarz-egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\Phi(u)^*\Phi(u) \leq \Phi(u^*u) = \Phi(\mathbf{1}) \leq ||\Phi(\mathbf{1})||\mathbf{1} = \mathbf{1},$$

és így $||\Phi(u)|| \leq 1 = ||\Phi(\mathbf{1})||$. Ekkor mivel Φ^{-1} is rendezéstartó, a Tétel állítása következik a 7.0.4. Következményből.

□

8. fejezet

Kadison izometria tétele

Az alábbi fejezetben belátjuk Kadison tételét.

8.0.1. Tétel. *(Kadison) Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ egységelemes C*-algebrák, és legyen $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ olyan bijektív Jordan-homomorfizmus, amely pontosan az önadjungált elemeket képezi önadjungáltakba. Ekkor Φ olyan izometria, amely megtartja a kommutativitást, azaz ha $a, b \in \mathcal{A}$ olyan elemek, amelyre $ab = ba$, akkor $\Phi(a)\Phi(b) = \Phi(b)\Phi(a)$.*

Bizonyítás. Látható, hogy $\Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = \Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{B}})$, különben $\Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}})$ egy projekció, melyre tetszőleges $a \in \mathcal{A}$ elemre

$$\Phi(a) = \Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}\, a\, \mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = \Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}})\Phi(a)\Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}),$$

azaz Φ az $\mathcal{A}$ C*-algebrát a $\Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}})\mathcal{A}\Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}})$ C*-algebrára képezi, amelynek $\Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}})$ az egységeleme, azonban a szürjektivitás miatt tudjuk, hogy $\Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}})\mathcal{A}\Phi(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = \mathcal{B}$. Megmutatjuk, hogy Φ pontosan a pozitív elemeket képezi pozitív elemekbe. Legyen ugyanis $a \in \mathcal{A}$ pozitív elem, akkor $a = b^2$ valamely $b \in \mathcal{A}_{sa}$ önadjungált elemre, és így $\Phi(a) = \Phi(b^2) = \Phi(b)^2$ pozitív. Megfordítva tegyük fel, hogy $\Phi(a)$ pozitív, akkor az $|a| = \sqrt{a^*a}$ jelöléssel

$$\Phi(|a|)^2 = \Phi(|a|^2) = \Phi(a^*a) = \Phi(a^2) = \Phi(a)^2,$$

amiből a pozitív elem négyzetgyökének unicitását figyelembevéve kapjuk, hogy $\Phi(|a|) = \Phi(a)$, és így Φ injektivitása miatt $a = |a| \geq 0$. Belátjuk, hogy Φ az önadjungált elemeken izometria. Legyen $a \in \mathcal{A}$ önadjungált elem, akkor a spektrálleképezés tétel figyelemvevételével és $Sp(a) \subseteq [-||a||, ||a||]$ miatt

$$Sp(||a||\mathbf{1} - a) = \{||a|| - \lambda | \lambda \in Sp(a)\} \subseteq [0, 2||a||] \subseteq \mathbb{R}_+,$$

amiből kapjuk, hogy $||a||\mathbf{1} - a \in \mathcal{A}_+$. Mivel Φ pozitívat pozitívba képez, ezért

$$\Phi(||a||\mathbf{1} - a) = ||a||\mathbf{1} - \Phi(a)$$

is pozitív, speciálisan $Sp(\Phi(||a||\mathbf{1} - a)) \subseteq \mathbb{R}_+$, amiből ismét a spektrálleképezés tételt használva kapjuk, hogy

$$\max Sp(\Phi(a)) \leq ||a||.$$

Cseréljük le ezután az a elemet $-a$-ra, akkor kapjuk, hogy

$$||a|| \geq \max Sp(\Phi(-a)) = -\min Sp(\Phi(a)).$$

A fenti egyenlőtlenségekből kapjuk, hogy $||\Phi(a)|| = r(\Phi(a)) \leq ||a||$. Hasonlóan, mivel $\Phi(a)$ önadjungált, ezért $||\Phi(a)||\mathbf{1} - \Phi(a) \in \mathcal{B}_+$, ahol

$$||\Phi(a)||\mathbf{1} - \Phi(a) = \Phi(||\Phi(a)||\mathbf{1} - a).$$

Mivel Φ csak pozitív elemet vihet pozitívba, ezért $||\Phi(a)||\mathbf{1} - a \in \mathcal{A}_+$. Ismét a spektrálleképezés tételt használva kapjuk, hogy

$$||\Phi(a)|| \geq \max Sp(a),$$

majd ismét lecserélve a-t $-a$-ra és a fenti érvelést megismételve kapjuk, hogy $||\Phi(a)|| \geq r(a) = ||a||$, vagyis $||\Phi(a)|| = ||a||$, amivel beláttuk, hogy Φ az öndajungált elemeken izometria. Legyen most $a \in \mathcal{A}$ tetszőleges egységnyi normájú elem. Mivel $(aa^*)^n$ és $(a^*a)^n$ önadjungáltak fennálnak a következő egyenlőségek:

$$\begin{aligned}
1 &= ||a||^{4n} = ||aa^*||^{2n} = ||(aa^*)^{2n}|| \\
&= ||\frac{1}{2}[(aa^*)^n + i(a^*a)^n + ((aa^*)^n + i(a^*a)^n)^*]|| \\
&\qquad \cdot ||\frac{1}{2}[(aa^*)^n - i(a^*a)^n + ((aa^*)^n - i(a^*a)^n)^*]|| \\
&\leq ||(aa^*)^n + i(a^*a)^n|| \cdot ||(aa^*)^n - i(a^*a)^n|| \\
&= ||(aa^*)^{2n} + (a^*a)^{2n} + i((a^*a)^n(aa^*)^n - (aa^*)^n(a^*a)^n)|| \\
&= ||\Phi((aa^*)^{2n} + (a^*a)^{2n}) + i\,\Phi((a^*a)^n(aa^*)^n - (aa^*)^n(a^*a)^n)|| \\
&= ||(\Phi(a)\Phi(a^*))^{2n} + (\Phi(a^*)\Phi(a))^{2n} + i((\Phi(a^*)\Phi(a))^n(\Phi(a)\Phi(a^*))^n \\
&\qquad - (\Phi(a)\Phi(a^*))^n(\Phi(a^*)\Phi(a))^n)|| \\
&\leq ||(aa^*)^{2n}|| + ||(a^*a)^{2n}|| + ||(a^*a)^n(aa^*)^n|| + ||(aa^*)^n(a^*a)^n|| \leq 4||a||^{4n} = 4,
\end{aligned}$$

amiből nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}
4 &\leq ||(\Phi(a)\Phi(a^*))^{2n} + (\Phi(a^*)\Phi(a))^{2n} + i((\Phi(a^*)\Phi(a))^n)(\Phi(a)\Phi(a^*))^n \\
&\quad - (\Phi(a)\Phi(a^*))^n(\Phi(a^*)\Phi(a))^n|| \leq 4||\Phi(a)||^{4n},
\end{aligned}$$

azaz $||\Phi(a)||^{4n} \geq 1$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, azaz $||\Phi(a)|| \geq 1$. Hasonló gondolatmenetet követve $\Phi(a)$-ra mint a-ra kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&4||\Phi(a)||^{4n} \leq ||(\Phi(a)\Phi(a^*))^{2n} + (\Phi(a^*)\Phi(a))^{2n} \\
&+ i((\Phi(a^*)\Phi(a))^n)(\Phi(a)\Phi(a^*))^n - (\Phi(a)\Phi(a^*))^n(\Phi(a^*)\Phi(a))^n|| \leq 4,
\end{aligned}$$

azaz $||\Phi(a)||^{4n} \leq 1$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, vagyis $||\Phi(a)|| \leq 1$, amivel bebizonyítottuk, hogy ha $||a|| = 1$, akkor $||\Phi(a)|| = 1$, amiből az izometrikusság már következik. Hátra van még a kommutatív struktúra megőrzésének bizonyítása. Elsőként belátjuk, hogy Φ megőrzi az $[[a, b], c]$ Lie-zárójelet, azaz

$$\Phi([[a,b],c]) = [[\Phi(a),\Phi(b)],\Phi(c)].$$

Valóban, legyenek $a,b,c \in \mathcal{A}$, akkor:

$$[[\Phi(a),\Phi(b)],\Phi(c)] = \Phi(a)\Phi(b)\Phi(c) - \Phi(b)\Phi(a)\Phi(c) - \Phi(c)\Phi(a)\Phi(b) + \Phi(c)\Phi(b)\Phi(a)$$

$$= \Phi(abc+cba) - \Phi(bac+cab) = \Phi((ab-ba)c - c(ab-ba)) = \Phi([[a,b],c]).$$

Hasonlóan egyszerű számolással megmutatható, hogy $\Phi([a,b]^2) = [\Phi(a),\Phi(b)]^2$. Így ha a és b kommutálnak, akkor tetszőleges $c \in \mathcal{A}$ elemre $[[a,b],c] = 0$, amiből $[[\Phi(a),\Phi(b)],\Phi(c)] = 0$ és $[\Phi(a),\Phi(b)]$ benne van a $\mathcal{B}$ centrumában. Ugyanakkor $[a,b]^2 = 0$, és így $[\Phi(a),\Phi(b)]^2 = 0$, vagyis $[\Phi(a),\Phi(b)]$ egy centrumbeli nilpotens, azaz $[\Phi(a),\Phi(b)] = 0$, ami ekvivalens azzal, hogy $\Phi(a)$ és $\Phi(b)$ kommutálnak.

□

8.0.2. Lemma. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ egységelemes C*-algebrák, és legyen $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ olyan egységelem tartó leképezés, amely az $\mathcal{A}$ normális elemein izometria, akkor ρ involúció tartó, azaz $\rho(a^*) = \rho(a)^*$, $a \in \mathcal{A}$.*

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathcal{A}$, $||a|| = 1$ önadjungált elem, és legyen $\rho(a) = b + ic$ valamely $b,c \in \mathcal{B}$ önadjungáltakra, és tegyük fel, hogy $c \neq 0$, ekkor létezik $\beta > 0$, $\beta \in Sp(c)$(ellenkező esetben tekintsük az a helyett a $-a$ elemet). Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra a C*-tulajdonság figyelembevételével $||a+in\mathbf{1}||^2 = ||a^2+n^2\mathbf{1}|| \leq 1+n^2$, és így $(1+n^2)^{\frac{1}{2}} - n \to 0$ miatt elég nagy n-re

$$||a+in\mathbf{1}|| < \beta + n,$$

ahol $\beta + n \in Sp(c+in\mathbf{1})$ figyelembevételével $\beta + n \leq ||c+n\mathbf{1}|| = ||ic+in\mathbf{1}||$, és így

$$||a+in\mathbf{1}|| < ||ic+in\mathbf{1}|| \leq ||b+ic+in\mathbf{1}|| = ||\rho(a+in\mathbf{1})||.$$

Viszont $a+in\mathbf{1}$ normális elem, és így a feltétel szerint $||\rho(a+in\mathbf{1})|| = ||a+in\mathbf{1}||$, ami ellentmondás. Ebből kapjuk, hogy $\rho(a)$ önadjungált, amiből pedig következik, hogy ρ involúció tartó. Legyen ugyanis $x \in \mathcal{A}$ önadjungált, akkor

$$\rho(x^*) = \rho(x) = \rho(x)^*.$$

Legyen most $a \in \mathcal{A}$ tetszőleges, és legyenek $x,y \in \mathcal{A}$ önadjungáltak, amelyekre $a = x+iy$. Ekkor

$$\begin{aligned}\rho(a^*) &= \rho((x+iy)^*) = \rho(x-iy) = \rho(x) - i\rho(y)\\ &= [\rho(x)^* + i\rho(y)^*]^* = \rho(x+iy)^* = \rho(a)^*\end{aligned}$$

□

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az előző bizonyításban csak azt használtuk fel, hogy az $x = a+in\mathbf{1}$ alakú elemeken, ahol a önadjungált és $n \in \mathbb{N}$ természetes szám $||\rho(x)|| \leq ||x||$ teljesül, így igaz a következő állítás:

8.0.3. Állítás. *Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ egységelemes C*-algebrák, és $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ olyan lineáris leképezés, amelyre $\rho(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ és*

$$||\rho(a + in\mathbf{1})|| \leq ||a + in\mathbf{1}||, \qquad a \in \mathcal{A}_{sa},\ n \in \mathbb{N},$$

akkor ρ involúció tartó.

8.0.4. Tétel. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ egységelemes C*-algebrák és legyen $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ olyan lineáris izometrikus bijekció, amely az $\mathcal{A}$ önadjungált elemeit a $\mathcal{B}$ önadjungált elemeire képezi. Ekkor létezik olyan $u \in \mathcal{B}$ önadjungált unitér elem, amely $\mathcal{B}$ minden elemével felcserélhető, és létezik $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Jordan *-izomorfizmus, hogy Φ előáll*

$$\Phi(a) = u\pi(a),\ \ a \in \mathcal{A}$$

alakban.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy Φ az $A := \{a \in \mathcal{A} |\, ||a|| \leq 1,\, a^* = a\}$ halmazt a $B := \{b \in \mathcal{B} |\, ||b|| \leq 1,\, b^* = b\}$ halmazra képezi, és mivel Φ lineáris és izometrikus, ezért Φ az A halmaz extremális pontjait a B extremális pontjaiba képezi, speciálisan $u := \Phi(\mathbf{1})$ extremális pontja a $\mathcal{B}$ C*-algebra legfeljebb egy normájú önadjungált elemeinek halmazának, ezért a Tétel szerint $u \in \mathcal{B}$ unitér elem. Definiáljuk a $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ leképezést a következő egyenlőséggel:

$$\pi(a) := u\Phi(a),\ \ a \in \mathcal{A},$$

akkor π szintén lineáris bijektív izometria, továbbá $\pi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ és $||\pi|| = 1$, ezért az előző lemma szerint π involúció tartó. Továbbá $\pi\langle\mathcal{A}_+\rangle = \mathcal{B}_+$, ugyanis a $b \in \mathcal{B}$ önadjungált elem pontosan akkor pozitív, ha $||||b||\mathbf{1} - b|| \leq ||b||$, ez azonban a $b = \pi(a)$ önadjungált elemre fennál π izometrikussága és egységelem tartó tulajdonsága miatt. Ebből kapjuk, hogy π rendezéstartó bijekció $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között. Hasonlóan belátható, hogy π^{-1} is rendezéstartó, továbbá $||\pi|| = 1$, és így π Jordan-homomorfizmus $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ között. Végül megmutatjuk, hogy $u \in Com(\mathcal{B})$, amihez elegendő azt igazolni, hogy u $\mathcal{B}$ minden önadjungált elemével felcserélhető. Legyen tehát $b \in \mathcal{B}$ egy önadjungált elem, ekkor $b = \Phi(a)$ valamely $a \in \mathcal{A}$, $a = a^*$ elemre, továbbá $u = u^* = u^{-1}$ miatt $u\pi(a) = \Phi(a) = b = b^* = \pi(a)^*u^* = \pi(a)u$, amiből már következik, hogy u a $\mathcal{B}$ minden elemével felcserélhető. □

8.0.5. Tétel. *Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ C*-algebrák. Bármely $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ izometrikus izomorfizmushoz létezik $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ Jordan-izomorfizmus és $u \in \mathcal{B}$ unitér elem, amelyre*

$$\Phi(a) = u\pi(a), \qquad a \in \mathcal{A}.$$

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításával analóg módon megmutatható, hogy $\Phi(\mathbf{1})$ unitér, amiből $u = \Phi(\mathbf{1})$ jelöléssel $\pi = u^*\Phi$ izometrikus vektortér izomorfizmus, amelyre $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Megmutatjuk, hogy π Jordan-izomorfizmus. Bebizonyítjuk, hogy az olyan u unitér elemeket, amelyek $a = \frac{1}{2}(u+u^*)$ valós része pozitív és invertálható, a π leképezés unitér elemekbe küldi. Legyen az $\alpha > 0$ szám az a spektrumának minimuma, és legyen n elég nagy, hogy $2n\alpha > 1$.

Ekkor

$$\begin{aligned}\|u - n\mathbf{1}\|^2 &= \|(u - n\mathbf{1})^*(u - n\mathbf{1})\| = \|(n^2 + 1)\mathbf{1} - n(u + u^*)\| = \|(n^2 + 1)\mathbf{1} - 2na\| \\ &= r((n^2 + 1)\mathbf{1} - 2na) = \sup_{\lambda \in Sp(a)} |n^2 + 1 - 2n\lambda| = n^2 + 1 - 2n\alpha,\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $\alpha = \min Sp(a) \geq 0$.

Ekkor $||u - n\mathbf{1}|| = \sup\{((n-\lambda^2) + 1 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} | \lambda \in Sp(a)\} = \sup\{(n^2 - 2\lambda n + 1)^{\frac{1}{2}} | \lambda \in Sp(a)\} = (n^2 - 2\alpha n + 1)^{\frac{1}{2}} < n$. Ha $\pi(u)$ nem lenne unitér, akkor az egységgömb egy extremális pontjaként egy nem invertálható parciális izometria lenne. Ekkor $||\pi(u) - n\mathbf{1}|| \geq n > ||u - n\mathbf{1}||$, ami ellentmond π izometrikusságának, azaz $\pi(u)$ unitér. Legyen most a tetszőleges legfeljebb egységnyi normájú pozitív invertálható elem, akkor az $a + i(\mathbf{1} - a^2)^{\frac{1}{2}}$ unitér elem valós része pozitív invertálható, és így $\pi(a) + i\pi((\mathbf{1} - a^2)^{\frac{1}{2}})$ unitér,és így normális elem. Normális elem valós és képzetes része felcserélhető, legyen ugyanis $b \in \mathcal{A}$ normális, akkor $b = \mathrm{Re}(b) + i\,\mathrm{Im}(b)$ és $b^* = \mathrm{Re}(b) - i\,\mathrm{Im}(b)$. Ekkor

$$\begin{aligned} bb^* &= (\mathrm{Re}(b) + i\,\mathrm{Im}(b))(\mathrm{Re}(b) - i\,\mathrm{Im}(b)) \\ &= \mathrm{Re}^2(b) - i\,\mathrm{Re}(b)\,\mathrm{Im}(b) + i\,\mathrm{Im}(b)\,\mathrm{Re}(b) + \mathrm{Im}^2(b) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} b^*b &= (\mathrm{Re}(b) - i\,\mathrm{Im}(b))(\mathrm{Re}(b) + i\,\mathrm{Im}(b)) \\ &= \mathrm{Re}^2(b) - i\,\mathrm{Im}(b)\,\mathrm{Re}(b) + i\,\mathrm{Re}(b)\,\mathrm{Im}(b) + \mathrm{Im}^2(b). \end{aligned}$$

A $b^*b = bb^*$ egyenlőség figyelembevételével pedig adódik, hogy

$$2i\,\mathrm{Im}(b)\,\mathrm{Re}(b) = 2i\,\mathrm{Re}(b)\,\mathrm{Im}(b),$$

amivel igazoltuk az állítást. Ezért az $x := \pi(a)$ és $y := \pi((\mathbf{1} - a^2)^{\frac{1}{2}})$ elemek benne vannak egy kommutatív C*-algebrában, ami a kommutatív Gelfand-Naimark tétel szerint tekinthető egy folytonos függvény algebrának. Ugyanakkor x és y pozitív elemek(vagyis pozitív folytonos függvények), amelyekre $\mathbf{1} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$, ezért $y^2 = \mathbf{1} - \pi(a)^2$. Mivel C*-algebrában pozitív elem négyzetgyöke egyértelmű, ezért $y = (\mathbf{1} - \pi(a)^2)^{\frac{1}{2}}$. Hasonló mondható el αa-ról, ahol α elég kicsi pozitív szám. Ezután a binomiális tételből kapjuk, hogy

$$(\mathbf{1} - (\alpha a)^2)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{1} - \frac{1}{2}\alpha^2 a^2 - \frac{\alpha^4 a^4}{8} - ...,$$

és

$$(\mathbf{1} - \pi(\alpha a)^2)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{1} - \frac{\alpha^2 \pi(a)^2}{2} - \frac{\alpha^4 \pi(a)^4}{8} - \cdots .$$

Mivel π izometria és így folytonos, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{1} - (\alpha a)^2)^{\frac{1}{2}} &= \mathbf{1} - \frac{\alpha^2 \pi(a^2)}{2} - \frac{\alpha^4 \pi(a^4)}{8} - \cdots \\ &= (\mathbf{1} - \pi(\alpha a)^2)^{\frac{1}{2}} = \mathbf{1} - \frac{\alpha^2 \pi(a)^2}{2} - \frac{\alpha^4 \pi(a)^4}{8} - \cdots . \end{aligned}$$

Amiből

$$-\frac{1}{2}\pi(a^2) - \frac{1}{8}\alpha^4 \pi(a^4) - \cdots = -\frac{1}{2}\pi(a)^2 - \frac{1}{8}\alpha^4 \pi(a)^4 - \ldots,$$

amiből α-val nullához tartva kapjuk, hogy $-\frac{1}{2}\pi(a^2) = -\frac{1}{2}\pi(a)^2$, azaz $\pi(a^2) = \pi(a)^2$. Tetszőleges normájú pozitív invertálható a elem esetén hasonló bizonyítás adható az $\frac{a}{2||a||}$ esetre. Kommutáló a, b invertálható pozitív elemek esetén $a + b$ pozitív és invertálható, ugyanis ha $ab = ba$, akkor a és b benne van egy kommutatív C*-részalgebrában, amire az első Gelfand-Naimark tétel szerint gondolhatunk folytonos függvényalgebraként.Ekkor ha f, g pozitív függvények, akkor nyilván $f + g$ is az, és könnyen látható, hogy létezik $f + g$ pontonkétni inverze. Így $\pi((a + b)^2) = \pi(a + b)^2$, amiből $2\pi(ab) = \pi(a)\pi(b) + \pi(b)\pi(a)$. Tetszőleges $a \in \mathcal{A}$ önadjungáltra $a = a \vee 0 + \mathbf{1} - (\mathbf{1} - a \wedge 0)$ és jelölje $b = a \vee \mathbf{1}$ és $c = \mathbf{1} - a \wedge 0$ pozitív, invertálható elemeket. Ekkor $\pi(a^2) = \pi(b^2) - 2\pi(bc) + \pi(c^2) = \pi(b)^2 - \pi(b)\pi(c) - \pi(c)\pi(b) + \pi(c)^2 = (\pi(b) - \pi(c))^2 = \pi(a)^2$, amivel beláttuk, hogy π Jordan-homomorfizmus. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] H.G. Dales, Banach algebras and automatic continuity, *London Mathematical Society Monographs* (**24**), 2000

[2] R.G. Douglas, On Majorization, Factorization, and Range Inclusion of Operators on Hilbert Space, *Proceedings of the American Mathematical Society* **17**, 413-415 (1966)

[3] M. Eidelheit, On isomorphisms of rings of linear operators, *Studia Mathematica* **9**, 97-105 (1940)

[4] R.V. Kadison, Isometries of operator algebras *Annals of Mathematics* **54**, 325-338 (1951)

[5] R.V. Kadison, A Generalized Schwarz Inequality and Algebraic Invariants for Operator Algebras *Annals of Mathematics* **56**, 494-503 (1952)

[6] R.V. Kadison, J.R. Ringrose, Fundamentals of the Theory of Operator Algebras I-II *Graduate Studies in Mathematics,* **(16)**, (1997)

[7] T.W. Palmer, Banach Algebras and the General Theory of *-algebras, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* (**49**), (1994)

[8] S. Sakai, C*-algebras and W*-algebras *Classics in Mathematics*, (1998)

NYILATKOZAT

Név: SIMON RICHÁRD

ELTE Természettudományi Kar, szak: MATEMATIKUS MSC

NEPTUN azonosító: D8ABLP

Szakdolgozat címe: OPERÁTORALGEBRÁK IZOMORFIZMUSAI

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2020.05.29.

Simon Richárd

a hallgató aláírása