Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Korlátos csoportreprezentációk hasonlósági problémája

Gehér Boglárka

MSc Szakdolgozat

Témavezető:
Tarcsay Zsigmond, adjunktus

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2021

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Tarcsay Zsigmondnak a dolgozat elkészítésében nyújtott segítségéért.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Dolgozatom témája a funkcionálanalízis, azon belül az absztrakt harmonikus analízis témakörébe esik.

A végtelen csoportok reprezentációelméletében alapvető jelentőségűek az unitér reprezentációk. Ha ugyanis G egy lokálisan kompakt csoport, és π G-nek egy unitér reprezentációja, ami folytonos az erős operátor topológiára nézve, akkor π előáll mint ciklikus reprezentációk direktösszege. Emellett G unitér reprezentációi és az $L^1(G)$ Banach-$*$-algebra $*$-reprezentációi között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van, ezért az unitér reprezentációkat lehet a legkönnyebben vizsgálni a funkcionálanalízis eszközeivel.

Sokáig eldöntetlen kérdés volt, hogy minden korlátos reprezentáció hasonló-e egy unitér reprezentációhoz. Ha a G csoportra teljesül ez a tulajdonság, akkor G-t uniterizálhatónak nevezzük.

Egy véges csoport reprezentációi mindig korlátosak, és az ilyenekre mindig igaz, hogy hasonlóak egy unitér reprezentációhoz. Ennek bizonyítása azt használja ki, hogy ha $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_i$ a $\mathbb{C}[G]$ csoportalgebra egy eleme, és $\sum_{i=1}^{n} \mu_i t_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{s^{-1}t_i} t_i$ ennek az s-sel való baleltoltja, akkor

$$\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{n} \mu_i,$$

vagyis az átlag $\mathbb{C}[G]$-n balinvariáns.
Az olyan csoportokat, amik rendelkeznek egy balinvariáns középpel $L^\infty(G)$-n amenábilisnek nevezzük. Abban az esetben, ha a G csoport diszkrét, ez ekvivalens azzal, hogy G-nek nem létezik paradoxikus felbontása.

J. Diximer a [10] cikkében belátta, hogy az átlag helyett egy balinvariáns közepet használva a véges eset bizonyítása átvihető tetszőleges amenábilis csoportra. Ugyanebben a cikkben megfogalmazta sejtését, miszerint ha a G lokálisan kompakt csoport minden korlátos reprezentációja uniterizálható, akkor G amenábilis, bár ekkor még nem ismertek példát olyan korlátos csoportreprezentációra, ami ne lett volna hasonló egy unitér reprezentációhoz.

Mind az amenábilis, mind az uniterizálható csoportokról tudjuk, hogy nem tartalmazhatják a két elem által generált szabadcsoportot részcsoportként. Ha Diximer sejtése nem igaz, akkor egy uniterizálható, de nem amenábilis csoport egyben példa is lenne olyan csoportra, ami nem amenábilis, de nem tartalmazza F_2-t. Ilyen csoportra az első ismert példa az A. Yu. Olshanskii által konstruált Tarski monster csoportok voltak.

G. Pisier bebizonyította Diximer sejtését abban az esetben, ha a G csoport diszkrét [7], vagyis:

Tétel. *Ha G egy diszkrét csoport, és G minden korlátos reprezentációja hasonló egy unitér reprezentációhoz, akkor G amenábilis.*

A dolgozat önálló eredményt nem tartalmaz, célja a fent említett tétel bizonyításának, és a tétel bizonyításhoz szükséges eszközöknek a bemutatása. A topologikus csoportokról és az unitér reprezentációkról szóló rész G. Folland A Course in Abstract Harmonic Analysis [2] c. tankönyvén, az amenábilis csoportokról szóló rész V. Runde Lectures on Amenability [5] c. tankönyvén, az uniterizálható csoportokról szóló rész pedig G. Pisier Similarity problems and completely bounded maps [6] c. könyvén, és [7] cikkén alapszik.

1.1. Jelölések

- I felfelé irányított halmaz.
- $\mathcal{U}$ Az I rendezésfilterét kiterjesztő ultrafilter.
- Írott nagybetű jelöli a vektortereket, $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $\mathcal{E}$ Banach-tér, $\mathcal{X}$ topologikus vektortér. A vektorokat mindig x, y vagy z jelöli.
- A $\mathcal{H}$ Hilbert téren $(.|.)$ jelöli a skalárszorzást.
- Ha $\mathcal{X}$ topologikus vektortér, $x \in \mathcal{X}$ és $f \in \mathcal{X}^*$, akkor $\langle x, f \rangle$ jelöli f értékét az x helyen.
- $\mathcal{B}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ jelöli a $\mathcal{X}_1$ topologikus vektortéren értelmezett, $\mathcal{X}_2$ topologikus vektortérbe képező korlátos lineáris operátorok terét.
- $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}$ esetén $\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$.
- $\mathcal{G}(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ jelöli a $\mathcal{B}(\mathcal{X})$-beli folytonosan invertálható operátorok terét.
- $\mathcal{X}^*$ jelöli az $\mathcal{X}$ topologikus vektortér topologiai duálisát.
- w^* jelöli az $\mathcal{X}^*$-beli gyenge-$*$-topológiát.
- G topologikus csoportot jelöl. A G egységelemét 1, a többi csoportelemet mindig t, s vagy u jelöli.
- $C_c(G)$ jelöli a G-n értelmezett, komplex értékű kompakt tartójú, folytonos függvények terét.
- $C_c(G)^+$ jelöli a G-n értelmezett, kompakt tartójú, pozitív folytonos függvények halmazát.
- $C_b(G)$ jelöli a G-n értelmezett, komplex értékű, korlátos függvények terét.
- $LUC(G)$, $RUC(G)$, $UC(G)$ jelölik rendre a G-n értelmezett, komplex értékű, balról egyenletesen folytonos, jobbról egyenletesen folytonos, és egyenletesen folytons függvények terét.
- Ha $f(x, y)$ kétváltozós függvény, akkor $f_x(y) = f(x, y)$ és $f^y(x) = f(x, y)$ jelölik a szekciófüggvényeit.
- μ jelöli a bal-Haar-mértéket G-n.
- $L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ jelöli $L^p(\mu)$-t.
- $M(G)$ jelöli a G-n értelmezett komplex Radon-mértékek terét.
- Minden $t \in G$-re δ_t jelöli, a t pontba koncentrált Dirac-mértéket.

1.2. Felhasznált tételek

1.1. Tétel (Riesz reprezentációs tétel)**.** *Legyen X Hausdorff, lokálisan kompakt topologikus tér, ekkor $M(X)$ és a $C_c(X)$-en értelmezett pozitív folytonos lineáris funkcionálok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést ad a $\mu \mapsto (f \mapsto \int_X f d\mu)$ képlet.*

1.2. Tétel (Spektrál tétel, [2] Theorem 1.51)**.** *Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert tér és $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ egy önadjungált operátor. Ekkor egyértelműen létezik egy $Sp(A)$-n értelmezett, reguláris P projektorértékű mérték, amire teljesül, hogy $A = \int_{Sp(A)} \hat{A} dP$, és minden $E \subset Sp(A)$ Borel-mérhető halmaz esetén $AP(E) = P(E)A$.*

1.3. Tétel ([1] Theorem 3.12)**.** *Egy (X, τ) szeparált, lokálisan konvex topologikus vektortér E konvex részhalmazának gyenge és τ szerinti lezártja megegyezik.*

1.4. Tétel ([1] Theorem 3.1 Banach-Alaoglu)**.** *Legyen X egy szeparált topologikus vektortér, és V a 0 egy környezete. Ekkor a*

$$K = \{\Lambda \in X^* \ : \ |\Lambda x| \leq 1 \ \forall x \in V\}$$

halmaz w^*-kompakt.

1.5. Tétel ([1] Theorem 3.20 (c))**.** *Az X Fréchet-tér egy K kompakt halmazára teljesül, hogy a konvex burkának $\overline{\text{co}}(K)$ lezártja is kompakt.*

1.6. Tétel ([4] Riesz-Thorin interpolációs tétel)**.** *Legyenek (Q_1, μ_1), (Q_2, μ_2) σ-véges mértékterek és $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$. Rögzített $0 < \theta < 1$ számra definiálja p_θ-t az $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ képlet, és q_θ-t a $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ képlet. Ha $T : L^{p_0}(\mu_1) + L^{p_1}(\mu_1) \to L^{q_0}(\mu_2) + L^{q_1}(\mu_2)$ lineáris operátor, ami folytonosan képzi $L^{p_0}(\mu_1)$-et $L^{q_0}(\mu_2)$-be, és folytonosan képzi $L^{p_1}(\mu_1)$-et $L^{q_1}(\mu_2)$-be, akkor T folytonosan képzi $L^{p_\theta}(\mu_1)$-et $L^{q_\theta}(\mu_2)$-be.*

1.3. Vektorértékű függvények integrálja

1.7. Definíció. Legyen (Q,μ) egy mértéktér, $\mathcal{X}$ egy topologikus vektortér, amit $\mathcal{X}^*$ szeparál és $f : Q \to \mathcal{X}$ olyan függvény, hogy minden $\Lambda \in \mathcal{X}^*$-ra Λf μ szerint integrálható. Ha létezik egy olyan $y \in \mathcal{X}$ vektor, hogy

$$\Lambda y = \int_Q \Lambda f \; d\mu \qquad (\Lambda \in \mathcal{X}^*),$$

akkor y-t az f integráljának nevezzük, és $\int_Q f d\mu$-vel jelöljük.

1.8. Tétel. *Legyen*

(a) *$\mathcal{X}$ egy topologikus vektortér amit $\mathcal{X}^*$ szeparál,*

(b) *Q kompakt, Hausdorff tér, és μ egy Borel valószínűségi mérték Q-n.*

Ha $f : Q \to \mathcal{X}$ folytonos függvény és $H = \overline{\text{co}}(f(Q))$ $\mathcal{X}$-nek kompakt része, akkor f-nek létezik integrálja, és $y = \int_Q f \; d\mu \in H$.

Bizonyítás. Tekintsünk $\mathcal{X}$-re mint valós vektortérre. Rendeljük hozzá $\mathcal{X}^*$ egy véges $L = (\Lambda_i)_{i=1}^n$ részéhez az

$$E_L = \left\{ y \in H : \Lambda y = \int_Q \lambda f \; d\mu, \quad \forall \Lambda \in L \right\}$$

halmazt. Ha van $y \in \cap_L E_L$, akkor y a keresett vektor. E_L zárt része H-nak ezért kompakt, és így elég minden véges metszetről belátni hogy nemüres. De minden véges metszet is E_L alakú, tehát elég csak az ilyeneket tekinteni.

Minden n elemű L halmaz definiál egy $\mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ folytonos lineáris leképezést. Legyen $K = L(f(Q))$ és $m \in \mathbb{R}^n$ az a vektor, amire teljesül, hogy $m_i = \int_Q \Lambda f \; d\mu$. Ha $m \in \overline{co}(K)$, akkor L linearitása miatt van egy $y_L \in H$, amire $L(y_L) = m$, és akkor $y_L \in E_L$.

Tegyük fel tehát, hogy $m \notin \overline{\text{co}}(K)$. A Hahn-Banach tétel szerint létezik egy $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ folytonos lineáris funkcionál, ami erősen elválasztja m-et és $\overline{\text{co}}(K)$-t. $\mathbb{R}^n$-en a folytonos lineáris funkcionálok egy $\mathbb{R}^n$-beli vektorral való skalárszorzásnak felelnek meg, vagyis léteznek c_i valós számok, hogy minden $u \in K$-ra teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^n c_i u_i < \sum_{i=1}^n c_i m_i,$$

azaz minden $q \in Q$-ra, hogy

$$\sum_{i=1}^n c_i \Lambda_i f(q) < \sum_{i=1}^n c_i m_i.$$

Az egyenlőtlenség két oldalát integrálva a

$$\sum_{i=1}^{n} c_i m_i = \sum_i \int_Q c_i \Lambda_i f(q)\ d\mu < \sum_{i=1}^{n} \int_Q c_i m_i\ d\mu \leq \sum_{i=1}^{n} c_i m_i$$

ellentmondást kapjuk. □

1.9. Állítás. Ha f egy folytonos $Q \to X$ függvény, létezik $\displaystyle\int_G f\ d\mu$ és $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ egy folytonos lineáris operátor, akkor

$$T \int_Q f\ d\mu = \int_Q Tf\ d\mu.$$

Bizonyítás. Minden $\Lambda \in \mathcal{X}^*$-ra $\Lambda T \in \mathcal{X}^*$. Az integrál definíciójából látszik, hogy

$$\Lambda T y = \int_Q \Lambda(Tf(x))\ d\mu(x),$$

és ebből következik az állítás. □

1.10. Megjegyzés. Ha $\mathcal{X}$ Fréchet-tér, akkor az 1.5 Tétel szerint minden $f : Q \to \mathcal{X}$ folytonos függvényre teljesül, hogy H kompakt.

1.11. Tétel. *[Minkowski-egyenlőtlenség integrálokra, [3] 4.13] Legyenek (Q_1, μ_1), (Q_2, μ_2) σ-véges mértékterek. Legyen $f : Q_1 \times Y \to \mathbb{C}$ egy $\mu_1 \times \nu$-mérhető függvény, amire teljesülnek az alábbiak:*

(a) *majdnem minden y-ra $f^y \in L^p(\mu_1)$,*

(b) *az $y \mapsto \|f^y\|_p$ függvény $L^1(\mu_2)$-beli.*

Ekkor majdnem minden y-ra az $x \mapsto \int_Y f(x,y)\ d\mu_2(y)$ függvény $L^p(\mu_1)$-beli és

$$\left\| \int_{Q_2} f^y\ d\mu_2(y) \right\|_p \leq \int_{Q_2} \|f^y\|_p\ d\mu_2(y).$$

1.4. Ultralimeszek

1.12. Definíció. A $\mathcal{H}$ nemüres halmaz feletti nemüres $\mathcal{F}$ halmazrendszert filternek nevezzük, ha $\mathcal{F}$ metszetzárt és felszálló.

Bármelyik véges metszetre zárt halmazrendszer felszálló burka egy filter lesz. A tartalmazásra névzve maximális filtereket ultrafilternek nevezzük, és a Zorn-lemma miatt minden filter kiterjeszthető ultrafilterré. Egy $\mathcal{U}$ ultrafiltert fő ultrafilternek nevezünk, ha van olyan $h \in \mathcal{H}$ hogy $\mathcal{U}$ a $\{h\}$ felszálló burka.
Minden $\mathcal{U}$ ultrafilterre telesül, hogy ha $\cup_{i=0}^{n} H_i = \mathcal{H}$ egy véges partíció, akkor pontosan egy i-re lesz $H_i \in \mathcal{U}$.
Egy I felfelé irányított halmazra a $(\{j \in I : j \geq i\})_{i \in I}$ filtert I rendezésfilterének nevezzük.
A következőkben I mindig egy felfelé irányított halmaz, $\mathcal{U}$ egy nem fő ultrafilter ami kiterjeszti I rendezésfilterét, és $(x_i)_{i \in I}$ egy I-vel indexelt, az (X, d) metrikus térben haladó általánosított sorozat.

1.13. Definíció. Ha az $x \in X$ pontra teljesül, hogy minden $\epsilon > 0$ esetén $\{i \in I : d(x_i, x) < \epsilon\} \in \mathcal{U}$, akkor x-et a $(x_i)_{i \in I}$ sorozat ultralimeszének nevezzük és $\lim\limits_{\mathcal{U}} x_i$-vel jelöljük.

Ha egy általánosított sorozatnak van ultralimesze, akkor ez egyértelmű, mert ha $x, y \in X$ és $d(x, y) = \epsilon$, akkor az $\{i \in I : d(x_i, x) < \frac{\epsilon}{2}\}$ és $\{i \in I : d(x_i, y) < \frac{\epsilon}{2}\}$ diszjunkt halmazok közül csak egy lehet $\mathcal{U}$-beli.

1.14. Állítás. Ha (X, d) egy kompakt metrikus tér, akkor minden általánosított sorozatnak létezik ultralimesze.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $\epsilon > 0$ számot. X erősen korlátos, ezért felbontható véges sok halmaz $\cup_{j=0}^{n} X_i$ diszjunkt uniójára úgy, hogy minden j-re $\mathrm{diam}(X_j) < \epsilon$. $I_j = \{i \in I : x_i \in X_j\}$ egy véges partíciója I-nek, ezért pontosan egy I_j lesz $\mathcal{U}$-beli. Legyen $X_\epsilon = cl(X_j)$ erre a j-re és legyen minden $n \in \mathbb{N}$-ra $Y_n = \cap_{k=1}^{n} X_{\frac{1}{k}}$. Mivel $\mathcal{U}$ véges metszetre zárt, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egymásba skatulyázott, nemüres, kompakt halmazokból áll és $\mathrm{diam}\, Y_n \to 0$. Tehát $\cap_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ egypontú, és ez a pont ultralimesze a sorozatnak. □

1.15. Állítás. (átviteli elv) Ha $(X, d_1), (Y, d_2)$ metrikus terek, $f : X \to Y$ folytonos függvény, $(x_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat, és $\lim\limits_{\mathcal{U}} x_i = x$, akkor

$$\lim_{\mathcal{U}} f(x_i) = f(x).$$

Bizonyítás. Minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ szám, hogy ha $d_1(x, x') < \delta$ akkor $d_2(f(x), f(x')) < \epsilon$. Mivel $\lim\limits_{\mathcal{U}} x_i = x$, ezért $\{i \in I : d_1(x, x_i) < \delta\} \in \mathcal{U}$. De $\{i \in I : d_1(x, x_i) < \delta\} \subset \{i \in I : d_2(f(x), f(x_i)) < \epsilon\}$, és $\mathcal{U}$ felszálló, tehát $\lim\limits_{\mathcal{U}} f(x_i) = f(x)$. □

2. Topologikus csoportok reprezentációelmélete

2.1. Topologikus csoportok

2.1. Definíció. (topologikus csoport) A $(G, \cdot, \tau)$ hármas topolgikus csoport, ha $(G, \cdot)$ csoport, (G, τ) topologikus tér és $(t, s) \mapsto s^{-1}t$ folytonos. Egy topologikus csoport Hausdorff (kompakt, lokálisan kompakt stb.), ha mint topologikus tér az.

2.2. Definíció. (csoporthatás) Legyen G egy csoport és X egy halmaz. Egy $G \times X \to X$, $(t, x) \mapsto t \cdot x$ függvényt bal-csoporthatásnak nevezünk, ha minden $t, s \in G$-re és $x \in X$-re teljesül, hogy $1 \cdot x = x$ és $s \cdot (t \cdot x) = (st) \cdot x$.

2.3. Jelölés. *G topologikus csoport t elemére jelölje L_t az t^{-1}-zel való balszorzást, R_t az t-el való jobbszorzást.*

2.4. Jelölés. (komplexus műveletek) *G topologikus csoport A illetve B részhalmazaira legyen $A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}$ A komplexus inverze, $AB = \{ab | a \in A \quad b \in B\}$ A és B komplexusszorzata.*

2.5. Definíció. *G topologikus csoport A részhalmaza szimmetrikus ha $A^{-1} = A$.*

Az L_t eltolásoperátor a G topologikus csoport egy homeomorfizmusa, mert folytonos bijekció, aminek inverze, $L_{t^{-1}}$ szintén folytonos. $L_{t^{-1}}L_tU = U \ni 1$ pontosan akkor nyílt, akkor $L_tU \ni x$ is az, tehát a topológia eltolásinvariáns, azaz $\tau(t) = L_t(\tau(1))$.

2.6. Állítás. Minden U nyílt egységkörnyezet tartalmaz egy V szimmetrikus nyílt egységkörnyezetet is amire $VV \subset U$.

Bizonyítás. Legyen $U \ni 1$ nyílt. A szorzás folytonos, ezért vannak $V_1 \ni 1, V_2 \ni 1$ nyíltak, hogy $V_1V_2 \subset U$. Ekkor $V = V_1 \cap V_1^{-1} \cap V_2 \cap V_2^{-1}$ szimmetrikus, nyílt, $1 \in V$ és teljesül rá, hogy $VV \subset V_1V_2 \subset U$. $\square$

2.7. Állítás. G topologikus csoport H részcsoportjának $\overline{H}$ lezártja is részcsoport.

Bizonyítás. Legyenek t és s elemek $\overline{H}$-ban. A szorzás folytonosságából következően minden $V \in \tau(ts)$ környezethez vannak $V_t \in \tau(t)$ és $V_s \in \tau(s)$ környezetek, hogy $V_tV_s \subset V$. Mivel $t, s \in \overline{H}$, léteznek $t' \in V_t \cap H$ és $s' \in V_s \cap H$ elemek, és ezek szorzata $t's' \in V_tV_s \cap H \subset V \cap H$. $\square$

2.8. Állítás. G topologikus csoport minden nyílt részcsoportja zárt.

Bizonyítás. H nyílt részcsoport komplementere a mellékosztályainak uniója, ami nyílt a topológia eltolásinvarianciája miatt. $\square$

2.9. Definíció. (lokálisan kompakt csoport) $(G, \cdot, \tau)$ topologikus csoport lokálisan kompakt csoport, ha τ lokálisan kompakt Hausdorff topológia G felett.

2.10. Állítás. G lokálisan kompakt csoportnak van nyíltzárt, σ-kompakt részcsoportja.

Bizonyítás. Legyen K szimmetrikus, kompakt egységkörnyezet, és jelölje K_n a K önmagával vett n-hosszú szorzatát. K_n a K^n folytonos képe, tehát kompakt, emellett K_n szimmetrikus. Legyen $H = \cup_n K_n$. H σ-kompakt. Ha $t, s \in H$ akkor van n, m, hogy $t^{-1} \in K_n$ és $s \in K_m$, ekkor $t^{-1}s \in K_{n+m} \subseteq H$, ami azt jelenti, hogy H részcsoport. K egységkörnyezet, ezért van $V \subset K$ nyílt egységkörnyezet és $VK_n \subset K_{n+1}$ K_n minden pontja H-nak belső pontja, tehát H nyílt. Az előző állítás szerint pedig minden nyílt részcsoport nyíltzárt. □

2.11. Definíció. (függvény eltoltja) Legyen G egy topologikus csoport és legyen f egy rajta értelmezett komplex értékű függvény. Az $L_s f(t) = f(s^{-1}t)$, $R_s f(t) = f(st)$ egyenlőséggel értelmezett függvényeket f s-sel való bal-, illetve jobbeltoltjának nevezzük.

2.12. Definíció. (egyenletes folytonosság) Azt mondjuk, hogy a G topologikus csoporton értelmezett f függvény balról egyenletesen folytonos, ha $s \to 1$ esetén $\|L_s f - f\|_{\mathrm{sup}} \to 0$, illetve jobbról egyenletesen folytonos ha $\|R_s f - f\|_{\mathrm{sup}} \to 0$. Az f függvényt egyenletesen folytonosnak nevezzük, ha mindkét oldalról egyenletesen folytonos.

2.13. Jelölés. A G topologikus csoporton értelmezett bal-, jobb-, illetve egyenletesen folytonos függvények halmazát rendre $LUC(G)$, $RUC(G)$, illetve $UC(G)$ jelöli.

2.14. Állítás. A G topologikus csoporton értelmezett, kompakt tartójú, folytonos f függvény egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. Legyen $f \in C_c(G)$ és $\epsilon > 0$. Minden $t \in \mathrm{supp}(f)$ ponthoz létezik U_t egységkörnyezet, hogy minden $s \in U_t$ pontra teljesül, hogy $|f(st) - f(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Legyen V_t szimmetrikus egységkörnyezet, amire $V_t V_t \subset U_t$. Mivel $\mathrm{supp}(f)$ kompakt, ezért létezik véges sok $t_1, ..., t_n \in \mathrm{supp}(f)$ pont, hogy $\mathrm{supp}(f) \subset \cup_k V_{t_k} t_k$. Legyen $V = \cap_k V_{t_k}$.
Belátjuk, hogy minden $t \in \mathrm{supp}(f)$, $s \in V$-re teljesül, hogy $|f(s^{-1}t) - f(t)| \leq \epsilon$. Ha $t \in \mathrm{supp}(f)$, akkor létezik k, hogy $t \in V_{t_k} t_k$ és minden $s \in V$-re teljesül, hogy $s^{-1}t \in s^{-1}V_{t_k}t_k \subset VV_{t_k}t_k \subset U_{t_k}t_k$. Ebből következik, hogy

$$|f(s^{-1}t) - f(t)| \leq |f(s^{-1}t) - f(t_k)| + |f(t_k) - f(t)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ha $s^{-1}t \in \mathrm{supp}(f)$ akkor t helyére $s^{-1}t$-t, s helyére s^{-1}-et írva ugyanezt kapjuk. Ha $t, s^{-1}t \notin \mathrm{supp}(f)$, akkor $|f(s^{-1}t) - f(t)| = 0$. Tehát minden $s \in V$-re $\|L_s f - f\|_{sup} \leq \epsilon$, és f balról egyenletesen folytonos. A $g(t) = f(t^{-1})$ képlettel értelmezett függvény $C_c(G)$-beli, tehát balról egyenletesen folytonos, és ez ekvivalens azzal, hogy f jobbról egyenletesen folytonos. □

2.15. Következmény. A G csoport folytonosan hat $C_c(G)$-n.

2.2. Haar mérték

2.16. Definíció. (Radon mérték) Legyen (X, τ) egy Hausdorff topologikus tér, és $\mathcal{B}$ az X Borel-mérhető halmazainak σ-algebrája. A $\mathcal{B}$-n értelmezett μ mértéket Radon mértéknek nevezzük, ha

(a) minden K kompakt halmazra $\mu(K)$ véges,

(b) minden $B \in \mathcal{B}$ Borel-mérhető halmaz mértéke az őt fedő nyílt halmazok infimuma,

(c) és minden U nyílt halmaz mértéke a benne fekvő kompakt halmazok mértékének szuprémuma.

2.17. Megjegyzés. A (b) tulajdonságot külső, a (c) tulajdonságot belső regularitásnak hívjuk.

2.18. Definíció. (Haar mérték) G topologikus csoporton értelmezett μ mérték bal-Haar-mérték, ha

(a) μ nem azonosan 0,

(b) μ Radon mérték,

(c) μ bal-invariáns, azaz minden $S \subset G$ Borel-mérhető halmazra és minden $t \in G$ csoportelemre teljesül, hogy $\mu(tS) = \mu(S)$.

A μ mértéket jobb-Haar-mértéknek nevezzük, ha a bal-invariancia helyett jobb-invariancia teljesül, és Haar-mértéknek nevezzük, ha mindkét oldali invariancia teljesül rá.

2.19. Megjegyzés. Egy ν mérték pontosan akkor jobb-Haar-mérték, ha $\mu(S) = \nu(S^{-1})$ bal-Haar-mérték. Ha μ bal-Haar-mérték akkor tetszőleges c pozitív valós számra igaz, hogy $c\mu$ is bal-Haar-mérték.

2.20. Állítás. Ha μ Haar-mérték a G topologikus csoporton, akkor minden U nyílt halmaz mértéke pozitív.

Bizonyítás. Minden C kompakt, és U nyílt halmazra teljesül, hogy C lefedhető U véges sok eltoltjával. Ha létezne olyan U nyílt, amire $\mu(U) = 0$, akkor minden C kompakt halmaz mértéke 0 lenne, és a belső regularitás miatt $\mu(G)$ is 0 lenne. $\square$

2.21. Tétel (Haar-mérték létezése [2] Theorem 2.10)**.** *Minden lokálisan kompakt G topologikus csoporton létezik bal-Haar-mérték.*

A 2.21 tétel bizonyítása során egy pozitív, baleltolásinvariáns ϕ lineáris funkcionált konstruálunk $C_c(G)$-n. Az 1.1 Tétel szerint ϕ-nek megfeleltethető egy μ Radon-mérték, ami ϕ eltolásinvarianciája miatt bal-Haar-mérték lesz. Nem lokálisan kompakt csoportokon másképpen sem lehet bal-Haar-mértéket konstruálni, amit a következő tétel mutat.

2.22. Tétel. *(Steinhaus) Ha μ bal-Haar-mérték a G topologikus csoporton, C pozitív mértékű, kompakt része G-nek, akkor CC^{-1} egységkörnyezet.*

Bizonyítás. μ külső regularitása miatt létezik $U \supset C$ nyílt, amire teljesül, hogy $\mu(U) < 2\mu(C)$. Minden $t \in C$ ponthoz létezik U_t nyílt egységkörnyezet, hogy $tU_t \subset U$. Minden U_t-hez létezik V_t nyílt egységkörnyezet, hogy $V_tV_t \subset U_t$.
Az tV_t halmazok C egy nyílt fedését adják, ebből C kompaktsága miatt kiválasztható egy $t_1V_{t_1}, \ldots, t_nV_{t_n}$ véges részfedés. Legyen $V = \cap_k V_{t_k}$, ez egy nyílt egységkörnyezet, és

$$CV = \bigcup_{t\in C} tV \subset \bigcup_k t_k V_{t_k} V \subset \bigcup_k t_k U_{t_k} \subset U.$$

Belátjuk, hogy $V \subset CC^{-1}$. Minden $v \in V$-re $\mu(vC) = \mu(C)$, tehát C és vC nem lehetnek diszjunktak, különben

$$\mu(U) \geq \mu(C \cup vC) = \mu(C) + \mu(Vc) = 2\mu(C)$$

ellentmondásra vezetne. Tehát van $c_1, c_2 \in C$, hogy $vc_1 = c_2$, és $v = c_2c_1^{-1} \in CC^{-1}$. □

2.23. Következmény. Ha G topologikus csoporton létezik bal-Haar-mérték, akkor G lokálisan kompakt.

Bizonyítás. Legyen μ egy bal-Haar-mérték G-n. G mértéke a belső regularitás miatt kompaktakkal közelíthető, ezért ha minden kompakt mértéke 0 lenne, akkor μ azonosan 0 lenne. Legyen C kompakt, $\mu(C) > 0$. CC^{-1} a $C \times C$ kompakt halmaz folytonos képe, tehát kompakt, és a Steinhaus-tétel szerint egységkörnyezet. A topológia eltolásinvarianciája miatt ha az egységelemnek van kompakt környezete, akkor minden pontnak van kompakt környezete, vagyis G lokálisan kompakt. □

Ha μ bal-Haar mérték és f μ szerint integrálható függvény, akkor f és f bármelyik baleltoltjának integrálja megegyezik, ugyanis tetszőleges közelítőösszegre fennáll $\sum_{k=0}^n f(t_k)\mu(E_k) = \sum_{k=0}^n L_yf(yt_k)\mu(yE_k)$. Az 1.1 szerint ha μ és ν két Radon mérték, és minden nemnegatív, kompakt tarójú folytonos f függvény μ-szerinti és ν-szerinti integrálja megegyezik, akkor a két mérték is megegyezik. Tehát ha μ olyan Radon mérték, hogy minden ilyen f-re és minden $s \in G$-re $\int_G f\ d\mu = \int_G L_s f\ d\mu$, akkor μ bal-Haar-mérték.

2.24. Tétel (Haar-mérték egyértelműsége)**.** *Ha μ, ν bal-Haar-mértékek a lokálisan kompakt G csoporton, akkor létezik egy $c > 0$ konstans, hogy $\mu = c\nu$.*

Bizonyítás. Mivel a $C_c^+(G)$-beli függvények integráljai már meghatározzák a μ és ν mértékeket, ezért elég belátni hogy minden $f_1, f_2 \in C_c^+(G)$ függvényre igaz, hogy $\frac{\int_G f_1\ d\mu}{\int_G f_1\ d\nu} = \frac{\int_G g\ d\mu}{\int_G g\ d\nu}$.
Legyen tehát $f_1, f_2 \in C_c^+(G)$, és legyen $F_1(t,s) = f_1(st) - f_1(ts)$ és $F_2(t,s) = f_2(st) - f_2(ts)$. Ha V_0 egy kompakt egységkörnyezet, akkor minden $s \in V_0$ pontra

$$\mathrm{supp}(F_1^s) \subset A = V_0\,\mathrm{supp}(f_1) \cup \mathrm{supp}(f_1)V_0$$

és

$$\operatorname{supp}(F_2^s) \subset B = V_0 \operatorname{supp}(f_2) \cup \operatorname{supp}(f_2) V_0$$

kompaktak. Mivel $F_1(t,1) = F_2(t,1) = 0$ minden t pontra, és F_1, F_2 folytonos, ezért minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik egy $V \subset V_0$ szimmetrikus egységkörnyezet, hogy minden t és $s \in V$ pontra teljesül, hogy $|F_1(t,s)| < \epsilon$. Legyen $h \in C_c^+(G)$ olyan függvény, hogy $\operatorname{supp}(h) \subset V$ és $h(t) = h(t^{-1})$ minden t pontra.
Ekkor

$$\begin{aligned}\int_G h(s)\ d\nu(s) \int_G f_1(t)\ d\mu(t) &= \int_G \int_G h(s) f_1(t)\ d\mu(t)\ d\nu(s) \\ &= \int_G \int_G h(s) f_1(st)\ d\mu(t)\ d\nu(s)\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\int_G h(t)\ d\mu(t) \int_G f_1(s)\ d\nu(s) &= \int_G \int_G h(t) f_1(s)\ d\mu(t)\ d\nu(s) \\ &= \int_G \int_G h(s^{-1}t) f_1(s)\ d\mu(t)\ d\nu(s) \\ &= \int_G \int_G h(t^{-1}s) f_1(s)\ d\nu(t)\ d\mu(s) \\ &= \int_G \int_G h(s) f_1(ts)\ d\nu(s) d\mu(t).\end{aligned}$$

A két egyenletet egymásból kivonva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left| \int_G h\, d\nu \int_G f_1\, d\mu - \int_G h\, d\mu \int_G f_1\, d\nu \right| &\leq \left| \int_G \int_G F_1(s,t) h(s)\, d\nu(s)\ \ d\mu(t) \right| \\ &\leq \epsilon \mu(A) \int_G h\, d\nu.\end{aligned}$$

És hasonlóan

$$\left| \int_G h\ d\nu \int_G f_2\ d\mu - \int_G h\ d\mu \int_G f_2\ d\nu \right| \leq \epsilon \mu(B) \int_G h\ d\nu.$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket $\int_G h\, d\nu \int_G f_1\, d\nu$-vel és $\int_G h\, d\nu \int_G f_1\, d\nu$-vel osztva, majd egymáshoz adva azt kapjuk, hogy

$$\left| \frac{\int_G f_1\ d\nu}{\int_G f_1\ d\mu} - \frac{\int_G f_2\ d\nu}{\int_G f_2\ d\mu} \right| \leq \epsilon \left| \frac{\mu(A)}{\int_G f_1\ d\nu} + \frac{\mu(B)}{\int_G f_2\ d\nu} \right|.$$

Ez minden ϵ-ra teljesül, és ebből már következik az állítás. $\square$

Legyen G lokálisan kompakt csoport, és $p \in [1, \infty)$ egy szám. Jelölje $L^p(G)$ az $L^p(G, \mu)$ függvényalgebrát, ahol μ egy bal-Haar-mérték G-n.

Ha G lokálisan kompakt, de nem σ-kompakt, akkor általában nem teljesül, hogy a μ Haar-mérték σ-véges. Viszont egy $L^p(G)$-beli $1 \leq p < \infty$ függvény tartója mindig σ-véges. Tehát ha f egy többváltozós függvény, ami $L^p(G)$-beli függvények szorzata, akkor annak a tartója is σ-véges mértékű a szorzatmérték szerint. Így ilyen esetekben a Fubini-tételt alkalmazhatjuk az f függvényre.

Lokálisan kompakt téren az L^∞ szokásos definíciójával nem teljesül, hogy L^∞ az L^1 topológiai duálisa, ezért módosítunk a definíción.

2.25. Definíció. Legyen (X, τ) Hausdorff, lokálisan kompakt topologikus tér, rajta μ egy Radon-mérték. Azt mondjuk hogy

(*a*) $E \subset X$ lokálisan Borel-mérhető, ha minden véges mértékű F Borel-mérhető halmazra $E \cap F$ is Borel-mérhető.

(*b*) $f : X \to \mathbb{C}$ függvény lokálisan mérhető, ha minden véges mértékű F Borel-mérhető halmazra való megszorítása mérhető.

(*c*) Egy tulajdonság lokálisan majdnem mindenütt teljesül, ha minden véges mértékű F Borel-mérhető halmazra, F-nek csak nullmértékű részén nem teljesül.

Az előző definícióban bevezetett fogalmakat használva

$$L^\infty(G) \coloneqq \{f : G \to \mathbb{C} \;:\; f \textit{ lokálisan mérhető, } f \textit{ lokálisan m.m. korlátos}\},$$

és

$$\|f\|_\infty = \inf\{c \;:\; |f| \leq c \textit{ lokálisan m.m.}\}.$$

Ha μ bal-Haar-mérték, akkor a $\mu_s(E) = \mu(Es)$ egyenlőséggel értelmezett mérték is bal-Haar-mérték: a topológia eltolásinvarianciája miatt E pontosan akkor nyílt, (kompakt, Borel), ha Es is az, ezért μ_s Radon mérték, és

$$\mu_s(tE) = \mu((tE)s) = \mu(t(Es) = \mu(Es) = \mu_s(E).$$

Tehát minden s-re létezik c_s pozitív konstans, hogy $\mu_s = c_s\mu$.

2.26. Definíció (Moduláris függvény)**.** Legyen G lokálisan kompakt csoport és μ bal-Haar-mérték G-n. A G moduláris függvényének nevezzük azt a függvényt, ami egy s ponthoz azt a $\Delta_G(s)$ számot rendeli, amire teljesül, hogy $\mu_s = \Delta_G(s)\mu$.

2.27. Állítás. *G lokálisan kompakt csoport moduláris függvénye egy folytonos csoport homomorfizmus G-ből a valós számok $\mathbb{R}_\times$ multiplikatív csoportjába, és minden $f \in L^1(G)$ függvényre teljesül, hogy*

$$\int_G R_s f \; d\mu = \Delta(s^{-1}) \int_G f \; d\mu.$$

Bizonyítás. Ha $s, t \in G$, akkor bármelyik Borel-mérhető $E \subset G$-re

$$\Delta(st)\mu(E) = \mu(Est) = \Delta(s)\mu(Et) = \Delta(t)\Delta(s)\mu(E)$$

tehát Δ csoport homomorfizmus.
Legyen $E \subset G$ egy mérhető halmaz. Ekkor

$$\int_G \chi_E(ts)\ d\mu(t) = \int_G \chi_{s^{-1}E}(t)\ d\mu(t) = \mu(Es^{-1}) = \Delta(s^{-1})\mu(E)$$
$$= \Delta(s^{-1}) \int_G \chi_E(t)\ d\mu(t).$$

Tetszőleges $f \in C_c(G)$ esetén az f függvényt lépcsős függvényekkel közelítve kapjuk meg az állítást.
Végül rögzítsünk egy $f \in C_c(G)$ függvényt aminek az integrálja nem 0. Az inverzképzés, az $s \mapsto R_s f$, és az $R_s f \mapsto \int_G R_s f\ d\mu$ leképezések mind folytonosak, tehát az $s \mapsto \frac{\int_G R_{s^{-1}} f\ d\mu}{\int_G f\ d\mu} = \Delta(s)$ leképezés is. □

2.28. Definíció. (unimodularitás) G lokálisan kompakt csoport *unimoduláris*, ha $\Delta_G \equiv 1$.

2.29. Példa.
- Minden K kompakt csoport unimoduláris. Valóban, a 2.27 Állítás szerint Δ_K folytonos függvény, ezért $K' := \Delta_K(K)$ kompakt részcsoportja $\mathbb{R}_\times$-nek. Ha valamely t-re $\Delta_K(t) > 1$ lenne, akkor $(\Delta_K(t)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy nemkorlátos sorozat lenne K'-ben, ami lehetetlen. Ha pedig $\Delta_K(t) < 1$ lenne valamely t-re, akkor $\Delta_K(t^{-1}) = \Delta_K(t)^{-1} > 1$ lenne. Ezzel megmutattuk, hogy $\Delta_K(K) = \{1\}$, ami azt jelenti, hogy a K csoport unimoduláris.
- Minden A lokálisan kompakt Abel csoport unimoduláris, ugyanis bármely $s \in A$ és $E \subseteq A$ Borel-mérhető halmaz esetén $\mu(Es) = \mu(sE) = \mu(E)$.

2.30. Definíció. (X, τ) topologikus téren értelmezett μ, ν Radon mértékek *erősen ekvivalensek*, ha létezik olyan $f : X \to (0, \infty)$ folytonos függvény, hogy minden $\Phi \in C_c(X)$ függvényre teljesül, hogy

$$\int_X \Phi\ d\mu = \int_X \Phi f\ d\nu.$$

2.31. Állítás. Ha G lokálisan kompakt csoporton μ bal-Haar-mérték és ν a $\nu(E) = \mu(E^{-1})$ képlettel értelmezett jobb-Haar-mérték, akkor μ és ν erősen ekvivalensek és $d\nu(t) = \Delta(t^{-1})\ d\mu(t)$.

Bizonyítás. Legyen $\Phi \in C_c(G)$ tetszőleges. Ekkor

$$\int_G R_s\Phi(t)\Delta(t^{-1})\ d\mu(t) = \Delta(s) \int_G \Phi(ts)\Delta((ts^{-1}))\ d\mu(t)$$
$$= \int_G \Phi(t)\Delta(t^{-1})\ d\mu(t).$$

Tehát a $\Phi \mapsto \int_G \Phi(x)\Delta(t^{-1})\ d\mu(t)$ funkcionál jobb invariáns. A hozzá asszociált mérték jobb Haar mérték, vagyis van egy olyan c szám, hogy $cd\nu(t) =$

$\Delta(t^{-1})\ d\mu(t)$.
Tegyük fel, hogy $c \neq 1$. Mivel Δ folytonos, ezért választhatunk egy U szimmetrikus egységkörnyezetet, úgy, hogy $|1-\Delta(t^{-1})| < \frac{1}{2}|c-1|$. Mivel U szimmetrikus, ezért $\mu(U) = \nu(U)$, továbbá

$$|c-1|\mu(U) = |c\nu(U) - \mu(U)| = \left| \int_G \Delta(t^{-1}) - 1\ d\mu(t) \right| \leq \frac{1}{2}|c-1|\mu(U).$$

Az U egységkörnyezetre $\mu(U) > 0$ teljesül, így a fenti egyenlőtlenséggel ellentmondásra jutottunk. $\square$

2.3. Konvolúció

Legyen G lokálisan kompakt csoport és legyenek $\mu, \nu \in M(G)$ komplex Radon-mértékek G felett. Könnyen látható, hogy az alábbi $\Lambda : C_c(G) \to \mathbb{C}$,

$$f \mapsto \int_G \int_G f(ts)\, d\mu(t)\, d\nu(s) \tag{1}$$

leképezés folytonos lináris funkcionált definiál. Az 1.1 Tétel szerint egyértelműen létezik olyan $\mu * \nu$ szimbólummal jelölt Radon-mérték, amelyre fennáll, hogy

$$\Lambda f = \int_G f\, d(\mu * \nu), \qquad f \in C_c(G).$$

Ezek alapján értelmes az alábbi

2.32. Definíció. Legyen G lokálisan kompakt csoport és legyenek $\mu, \nu \in M(G)$ komplex Radon-mértékek, akkor a μ és ν *konvolúciójának* nevezzük azt a $\mu * \nu \in M(G)$ komplex Radon-mértéket, amelyre fennáll, hogy

$$\int_G f\, d(\mu * \nu) = \int_G \int_G f(ts)\, d\mu(t)\, d\nu(s), \qquad f \in C_c(G).$$

2.33. Állítás. A G lokálisan kompakt csoport felett értelmezett komplex Radon-mértékek $M(G)$ vektor tere algebra a konvolúcióval mint szorzással, és a totális variácó teljes algebra-norma $M(G)$ felett.

Bizonyítás. A konvolúció asszociatív: minden $f \in C_c(G)$ függvényre, $\mu, \nu, \sigma \in M(G)$ mértékre

$$\begin{aligned}
\int_G f(t) d(\mu * \nu) * \sigma(t) &= \int_G \int_G f(ts) d(\mu * \nu)(t)\ d\sigma(s) \\
&= \int_G \int_G \int_G f(tus)\ d\mu(t)\ d\nu(u)\ d\sigma(s) \\
&= \int_G \int_G f(tu)\ d\mu(t)(\ d\nu *\ d\sigma)(u) \\
&= \int_G f(t)\ d\mu * d(\nu * \sigma)(t)
\end{aligned}$$

A δ_1 Dirac-mérték egységelem, mert minden $f \in C_c(G)$-re teljesül

$$\begin{aligned}
\int_G f(t)\ d(\delta_1 * \mu(t)) &= \int_G \left(\int_G f(st)\ d\delta_1(t) \right)\ d\mu(s) \\
&= \int_G f(s)\ d(\mu(s)).
\end{aligned}$$

Ha a $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ komplex mértékek egy $(X, \mathcal{M})$ mérhető téren, és $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ Cauchy-sorozat a totális variácó szerint, akkor minden $M \in \mathcal{M}$ mérhető halmazra a

$\mu_n(M)$ sorozat konvergens $\mathbb{C}$-ben. A $\mu(M) = \lim_n \mu_n(M)$ egy mértéket definiál. Ha mindegyik μ_n véges, akkor μ is véges, mert létezik egy m index, hogy $|\mu_m - \mu| \leq 1$, és akkor $|\mu(X)| \leq |\mu_m(X)| + 1$.

Tegyük fel, hogy mindegyik μ_n Radon-mérték. Legyen $\epsilon > 0$ rögzített. Legyen $M \in \mathcal{M}$ és legyen N olyan index, hogy minden $n > N$-re teljesül, hogy $|\mu_n - \mu| < \epsilon$. Mivel μ_n Radon-mérték, létezik egy $V \supset M$ nyílt halmaz, hogy $|\mu_n(G \setminus M)| < \epsilon$. és $|\mu_n - \mu| < \epsilon$. Emiatt

$$\mu(G \setminus M) \leq |\mu_n(G \setminus M)| + |\mu_n - \mu| \leq 2\epsilon.$$

Ez minden ϵ-ra teljesül, tehát ezzel beláttuk μ külső regularitását, és a belső regularitás hasonló gondolatmenettel adódik. Tehát μ Radon-mérték, és $M(G)$ teljes a megadott normával. $\square$

2.34. Definíció. (mérték adjungáltja) Az $M(G)$ mértékalgebrán a $\mu^*(E) = \overline{\mu(E^{-1})}$ képlet involúciót definiál. A μ^* mértéket a μ mérték adjungáltjának nevezzük.

Minden $f \in L^1(G)$-beli függvénynek megfeleltethetjük azt a μ_f mértéket, aminek f a Radon-Nikodym deriváltja. Két ilyen mérték konvolúciójára teljesül a következő:

$$\begin{aligned}
\int_G \Phi(t)\ d\mu_f * \mu_g &= \int_G \int_G \Phi(ts)\ d\mu_f(t)\ d\mu_g(s) \\
&= \int_G \int_G \Phi(ts) f(t) d\lambda(t) g(s) d\lambda(s) \\
&= \int_G \Phi(s) \left(\int_G f(t) g(t^{-1}s) d\lambda(t) \right) d\lambda(s)
\end{aligned}$$

Tehát $\mu_f * \mu_g$ Radon-Nikodym deriváltja $\int_G f(t)g(t^{-1}s)d\lambda(t)$, ez indokolja az alábbi definíciót:

2.35. Definíció. (függvények konvolúciója) Az $f, g \in L^1(G)$ függvények konvolúciójának az

$$f * g(t) = \int_G f(s) g(s^{-1}t) d\lambda(s)$$

függvényt nevezzük.

2.36. Definíció. (függvény adjungáltja) Ha μ_f az a mérték aminek f a Radon-Nikodym deriváltja, akkor μ_f^* deriváltja az

$$f^*(t) = \Delta(t^{-1}) \overline{f(t^{-1})}$$

függvény, és ezt a függvényt f adjungáltjának hívjuk.

Tehát az $L^1(G)$ függvénytér Banach-$*$-részalgebrája az $M(G)$ mértékalgebrának. $L^1(G)$-t a G csoport *csoport* Ha G nem diszkrét, akkor $L^1(G)$ nem egységelemes. Ha G véges, diszkrét csoport $l^1(G)$ egybeesik a véges csoportok reprezentáció elméletében csoportalgebrának nevezett $\mathbb{C}[G]$-vel.
Két L^1-beli függvény konvolúcióját megadhatjunk nem csak pontonként, hanem mint egy L^1-értékű függvény integrálja:

$$f * g = \int_G f L_s g d\lambda(s).$$

Ebből a felírásból látszik, hogy $L_u(f * g) = L_u f * g$ és $R_u(f * g) = f * (R_u g)$.

A 2.35 Definícióban megadott képlettel kiterjeszthetjük a konvolúciót $L^p(G)$-beli függvényekre is:

2.37. Tétel. *Ha $f \in L^1(G)$ és $g \in L^p(G)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, akkor*

(1) *az $f * g$-t definiáló integrál majdnem minden pontban konvergens, $f * g \in L^p(G)$, és $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$,*

(2) *ha G unimoduláris vagy f kompakt tartójú, akkor ugyanez igaz $g * f \in L^p(G)$,*

(3) *$p = \infty$ esetén $f * g$ folytonos,*

(4) *és ha G f kompakt tartójú, akkor ugyanez igaz $g * f$-re is.*

Bizonyítás. (1) Az 1.11 Tételt alkalmazva a $h(s,t) = f(s)g(t^{-1})$ függvényre, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_p &= \left\| \int_G f(s) L_s(g) \; d\mu(s) \right\|_p \\
&\leq \int_G f(s) \|L_s(g)\|_p \; d\mu(s) \\
&\leq \|f\|_1 \|g\|_p .
\end{aligned}$$

(2) Ha G unimoduláris, vagy $\mathrm{supp}(f) = K$ kompakt, akkor létezik c konstans, hogy $\sup\limits_K \Delta(t) < c$. Ismét az 1.11 Tételt alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\|g * f\|_p &= \left\| \int_G g(s) L_s(f) \; d\mu(s) \right\|_p \\
&= \left\| \int_G \Delta(s^{-1}) R_{s^{-1}}(g) f(s) \; d\mu(s) \right\|_p \\
&\leq \|R_{s^{-1}}(g)\|_p \int_G |f(s)| \Delta(s)^{\frac{1}{p}-1} \\
&\leq c \|g\|_p \|f\|_1
\end{aligned}$$

(3) Legyen $f \in C_c(G)$, $\operatorname{supp}(f) = K$. Felhasználva, hogy f egyenletesen folytonos:

$$\begin{aligned}
\left|f * g(t^{-1}t_0) - f * g(t_0)\right| &= \left|\int_G f(t_0 s)g(s^{-1}) - f(t^{-1}t_0 s)g(s^{-1})\ d\mu(s)\right| \\
&\leq \int_G \left|\left(f(t_0 s) - f(t^{-1}t_0 s)\right) g(s^{-1})\right|\ d\mu(s) \\
&\leq \|g\|_\infty \int_G \left|f(t_0 s) - f(t^{-1}t_0 s)\right|\ d\mu(s) \\
&\leq \|g\|_\infty 2\mu(K)\|f - L_t f\|_{sup} \xrightarrow[t\to 1]{} 0.
\end{aligned}$$

A kompakt tartójú folytonos függvények sűrűn vannak $L^1(G)$-ben, és ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $L^1(G)$-beli sorozat, hogy $\|f_n - f\|_1 \to 0$, akkor minden t-re

$$|f_n * g(t) - f * g(t)| \leq \int_G |f_n(s) - f(s)| g(s^{-1}t)\ d\mu(s) \leq \|g\|_\infty \|f_n - f\|_1,$$

tehát $f_n * g \to f * g$ egyenletesen, és így $f * g$ folytonos.

(4) Ismét legyen $f \in C_c(G)$ és $\operatorname{supp}(f) = K$. Ekkor

$$\begin{aligned}
|g * f(tt_0) - g * f(t_0)| &= \left|\int_G \left(f(tt_0 s^{-1}) - f(t_0 s^{-1})\right) g(s^{-1})\Delta(s^{-1})\ d\mu(s)\right| \\
&\leq \int_G |f(tt_0 s^{-1}) - f(t_0 s^{-1})||g(s^{-1})\Delta(s^{-1})|\ d\mu(s) \\
&\leq \|g\|_\infty 2\mu(K) \sup_K \Delta \|f - L_t f\|_{\text{sup}} \xrightarrow[t\to 1]{} 0.
\end{aligned}$$

□

2.38. Tétel. *Az eltolásoperátorok folytonosak $L^p(G)$-n ($1 \leq p \leq \infty$), vagyis ha $f \in L^p(G)$ és $t \to 1$, akkor $\|L_t f - f\|_p \to 0$ és $\|R_t f - f\|_p \to 0$.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy V kompakt egységkörnyezetet. Legyen $g \in C_c(G)$ és $K = \operatorname{supp}(g)V \cup V \operatorname{supp}(g)$. K kompakt, ezért $\mu(K)$ véges, és $\operatorname{supp}(L_t(g))$, $\operatorname{supp}(R_t(g)) \subset K$. Tehát

$$\|L_t(g) - g\|_p \leq \mu(K)^{-\frac{1}{p}} \|L_t(g) - g\|_\infty \xrightarrow[t\to 1]{} 0,$$

mert g egyenletesen folytonos.

Ha $f \in L^p(G)$, akkor $\|L_t(f)\|_p = \|f\|_p$ és $\|R_t(f)\|_p = \Delta(t)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p$. Mivel Δ folytonos, ezért korlátos, vagyis létezik egy C konstans, hogy minden $t \in V$-re $\|R_t(f)\|_p = C\|f\|_p$. Minden $f \in L^p(G)$ approximálható $C_c(G)$-beli függvényekkel. Ha $\|f - g\|_p \leq \epsilon$ és $t \in V$, akkor

$$\begin{aligned}
\|L_t f - f\|_p &\leq \|L_t(f - g)\|_p + \|L_t g - g\|_p + \|f - g\|_p \\
&\leq 2\epsilon + \|L_t g - g\| \xrightarrow[t\to 1]{} 0,
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\|R_tf - f\|_p &\leq \|R_t(f-g)\|_p + \|R_tg - g\|_p + \|f-g\|_p \\ &\leq (C+1)\epsilon + \|R_tg - g\| \xrightarrow[t\to 1]{} 0.\end{aligned}$$

□

Ha G nem diszkrét, akkor az $M(G)$ mértékalgebra δ_1 egység eleme nincsen benne az $L^1(G)$ csoport algebrában. Az egységelem hiányát az alábbi tétel értelmében kiküszöböli a következő definíció:

2.39. Definíció. (Approximatív egység) Legyen $\mathcal{V}$ az egységelem egy környezetbázisa, ez a fordított tartalmazással egy felfelé irányított halmaz. Minden $U \in \mathcal{V}$ környezethez rendeljünk egy olyan ψ_U függvényt, amire teljesül, hogy

(a) $\operatorname{supp}\psi_U$ kompakt része U-nak,

(b) $\psi_U \geq 0$,

(c) $\psi_U(t^{-1}) = \psi_U(t)$,

(d) $\int_G \psi_U d\mu = 1$.

Ekkor a ψ_U függvények $\mathcal{V}$-vel indexelt általánosított sorozatát approximatív egységnek nevezzük.

2.40. Tétel. *Ha ψ_U egy approximatív egység, akkor*

(1) *Ha $f \in L^p(G)$ $(1 \leq p < \infty)$, akkor* $\lim\limits_U \|f * \psi_U - f\|_p = 0$.

(2) *Ha $f \in L^p(G)$ $(1 \leq p < \infty)$, akkor* $\lim\limits_U \|\psi_U * f - f\|_p = 0$.

(3) *Ha $f \in L^\infty(G)$ és jobbról egyenletesen folytonos, akkor* $\lim\limits_U \|f * \psi_U - f\|_\infty = 0$.

(4) *Ha $f \in L^\infty(G)$ és balról egyenletesen folytonos, akkor* $\lim\limits_U \|\psi_U * f - f\|_\infty = 0$.

Bizonyítás. Felhasználva, hogy $\psi(t^{-1}) = \psi(t)$ és $\int_G \psi_U \ d\mu = 1$, teljesül

$$\begin{aligned} f * \psi_U(s) - f(s) &= \int_G f(st)\psi_U(t^{-1}) \ d\mu(t) - f(s) \int_G \psi(t) \ d\mu(t) \\ &= \int_G [R_tf(s) - f(s)]\psi_U(t) \ d\mu(t) \\ \psi_U * f(s) - f(s) &= \int_G \psi(t) f(t^{-1}s) \ d\mu(t) - f(s) \int_G \psi_U(t) \ d\mu(t) \\ &= \int_G [L_tf(s) - f(s)]\psi_U(t) \ d\mu(t). \end{aligned}$$

Ezért az 1.11 Tétel szerint

$$\begin{aligned}
\|f * \psi_U - f\|_p &\leq \int_G \|R_t f(s) - f(s)\|_p \psi_U(t) \\
&\leq \sup_{t\in U} \|R_t f - f\|_p, \\
\|\psi_U * f - f\|_p &\leq \int_G \|L_t f(s) - f(s)\|_p \psi_U(t) \\
&\leq \sup_{t\in U} \|L_t f - f\|_p.
\end{aligned}$$

Ha $f \in L^p(G)$, $(0 \leq p < \infty)$, akkor $\|L_t f - f\|_p$ tart a 0-hoz a 2.38 Tétel szerint, ha $f \in L^\infty(G)$, akkor $\|L_t f - f\|_\infty$ tart a 0-hoz f egyenletes folytonossága miatt. $\square$

3. Lineáris reprezentációk

3.1. Definíció. (lineáris reprezentáció) Legyen G lokálisan kompakt csoport, $\mathcal{E}$ Banach-tér. Egy olyan $\pi : G \to \mathcal{G}((\mathcal{B}(\mathcal{E}))$ csoport homomorfizmust, ami folytonos a G-n adott topológiára és $\mathcal{G}((\mathcal{B}(\mathcal{E}))$-en a gyenge operátor topológiára nézve, G folytonos lineáris reprezentációjának (vagy folytonos lineáris ábrázolásának) nevezzük.

3.2. Megjegyzés. Az dolgozatban szereplő minden csoportreprezentáció folytonos lineáris reprezentáció, ezért ezeket a jelzőket a továbbiakban elhagyjuk.

3.3. Lemma. G lokálisan kompakt csoport π reprezentációja folytonos az erős operátor topológiára nézve.

Bizonyítás. Legyen K kompakt egységkörnyezet. Mivel π folytonos a gyenge operátortopológiára nézve, ezért $\pi(K)$ gyengén kompakt, és minden $x \in H$ vektorra $\pi(K)x$ gyengén korlátos, azaz korlátos része H-nak. Tehát a Banach-Steinhaus tétel szerint a $\pi(K)$ pontonként korlátos operátorcsalád normában is korlátos, vagyis van olyan $c > 0$ konstans, hogy minden $t \in K$ pontra $\|\pi(t)\| < c$.

Legyen V olyan szimmetrikus egységkörnyezet, amire teljesül, hogy $VV \subset K$, és legyen ψ_{U_α} olyan approximatív egység, hogy minden α-ra $\operatorname{supp}(\psi_{U_\alpha}) \subset V$.
Rögzítsünk egy $x \in H$ vektort. Minden $s \in K$ pontra és minden α indexre tekintsük a $\phi_{s,\alpha}(t) = \psi_{U_\alpha}(s^{-1}t)\pi(t)x$ függvényt. Ha $s^{-1}t \in V$ akkor $t \in VK \subset KK$, tehát $\operatorname{supp}(\phi_{s,\alpha})$ kompakt és $\phi_{s,\alpha}(G)$ gyengén kompakt, vagyis $\phi_{s,\alpha}$-ra teljesülnek az 1.8 tétel feltételei.
Jelölje $y_{s,\alpha}$ a $\phi_{s,\alpha}$ integrálját. Legyen $x_\alpha = y_{1,\alpha}$. A $t \mapsto \pi(t)x_\alpha$ függvény folytonos G-ből H-ba, mert minden $u \in U$-ra

$$\begin{aligned}
\|\pi(t)x_\alpha - x_\alpha\| &= \left\|\pi(t)\int_G \psi_{U_\alpha}(s)\pi(s)x \, d\mu(s) - \int_G \psi_{U_\alpha}(s)\pi(s)x \, d\mu(s)\right\| \\
&= \left\|\int_G \left(\psi_{U_\alpha}(s)\pi(ts) - \psi_{U_\alpha}(s)\pi(s)\right) x \, d\mu(s)\right\| \\
&= \left\|\int_G \left(\psi_{U_\alpha}(t^{-1}s) - \psi_{U_\alpha}(s)\right)\pi(s)x \, d\mu(s)\right\| \\
&\le C\|x\|\|L_t\psi_{U_\alpha} - \psi_{U_\alpha}\|_1,
\end{aligned}$$

ami a 2.40 Tétel szerint tart a 0-hoz, ha t tart az 1-hez.

Legyen F azon $z \in X$ vektorok halmaza, amikre $t \mapsto \pi(t)z$ folytonos. F lineáris altér, és zárt a normatopológiában mert minden $z_n \to z$ sorozatra és $t_i \to 1$ általánosított sorozatra teljesül, hogy

$$\begin{aligned}
\|\pi(t_i)z - z\| &\le \|\pi(t_i)z - \pi(t_i)z_n\| + \|\pi(t_i)z_n - z_n\| + \|z_n - z\| \\
&\le (C+1)\|z_n - z\| + \|\pi(t_i)z_n - z_n\| \to 0.
\end{aligned}$$

F konvex halmaz, ezért az 1.3 Tétel szerint zárt. F tartalmazza az $(x_\alpha)_\alpha$ általánosított sorozatot és x ennek gyenge limesze, tehát F tartalmazza x-et is.

Ez minden x-re teljesül, vagyis $F = H$ és ebből következik, hogy π folytonos az erős operátor topológiára nézve. $\square$

3.4. Definíció. G lokálisan kompakt csoport π reprezentációja korlátos, ha létezik egy $C > 0$ konstans, hogy minden $t \in G$ pontra $\|\pi(t)\| \leq C$.

3.5. Definíció. G lokálisan kompakt csoport π reprezentációja unitér, ha minden $t \in G$ képe unitér operátor.

3.6. Megjegyzés. Az előző lemma unitér reprezentációkra sokkal könnyebben megkapható: az unitér operátorok $U(H)$ algebrájára megszorítva a gyenge operátor topológia és az erős operátor topológia megegyeznek, ugyanis

$$\begin{aligned}\|(S-T)u\|^2 &= ((S-T)u|(S-T)u) \\ &= \|Su\|^2 - 2\operatorname{Re}(Tu|Su) + \|Tu\|^2 \\ &= 2\|u\|^2 - 2\operatorname{Re}(Tu|Su) \to 2(\|u\|^2 - \|Tu\|^2 = 0,\end{aligned}$$

ha $S \to T$ gyengén.

3.7. Definíció. Legyen G lokálisan kompakt csoport ami hat az X Hausdorff, lokálisan kompakt téren. A $\mu \in M(X)$ mértéket G-kváziinvariánsnak nevezzük ha létezik egy folytonos, $\phi : G \times X \to \mathbb{R}_+$ függvény, hogy minden $t \in G$ és minden $x \in X$-re teljesül $d\mu(tx) = \phi(t,x)d\mu(x)$.

3.8. Példa.

- Ha G lokálisan kompakt csoport hat X-en és $\mu \in M(X)$ G-kváziinvariáns mérték akkor $\pi(f) = \phi(t, t^{-1}x)^{-\frac{1}{2}} f(t^{-1}x)$ G egy unitér reprezentációját definiálja az $L^2(G)$ Hilbert-téren.
- Ha az előző példában G önmagán hat a baleltolással és μ bal-Haar-mérték, akkor az így kapott π reprezentációt G bal-reguláris reprezentációjának nevezzük és ezentúl mindig λ-val jelöljük.

3.9. Definíció. Ha π_1, π_2 a G lokálisan kompakt csoport reprezentációi a $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ Hilbert tereken, akkor a $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ operátort összekötő operátornak nevezzük, ha minden $g \in G$ pontra teljesül, hogy $T\pi_1(g) = \pi_2(g)T$.

3.10. Jelölés. Az összekötő operátorok halmazát $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ jelöli, és $\mathcal{C}(\pi) = \mathcal{C}(\pi, \pi)$ a $\pi(G)$ centralizátora $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$-ben.

3.11. Definíció. A π_1, π_2 reprezentációk hasonlók, ha létezik egy $T \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ invertálható operátor, és unitér ekvivalensek, ha létezik $U \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ unitér operátor.

3.12. Definíció. Az $\mathcal{M} \leq \mathcal{H}$ alteret π invariáns alterének nevezzük, ha minden $t \in G$-re $\pi(t)M \subset \mathcal{M}$. Ilyenkor π megszorítása $\mathcal{M}$-re π egy részreprezentációját adja, amit $\pi^{\mathcal{M}}$ jelöl.

3.13. Definíció. Ha $(\pi_i)_{i \in I}$ ($\pi_i : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$) reprezentációk egy családja, akkor ezen reprezentációk direktösszege az a $\pi = \bigoplus_i \pi_i : G \to \mathcal{B}\left(\hat{\bigoplus}_i \mathcal{H}_i\right)$ reprezentáció, amit a $\pi(t)(\sum(x_i)) = \sum \pi_i(t)x_i$ képlet definiál.

Ebben az esetben a $\mathcal{H}_i$ alterek invariáns alterek, sőt, ha $\mathcal{M}$ invariáns altér, akkor $\pi^{\mathcal{M}}$ mindig direktösszeadandó:

3.14. Állítás. Ha $\mathcal{M}$ invariáns altér, akkor $\mathcal{M}^{\perp}$ is invariáns altér.

Bizonyítás. Minden $x \in \mathcal{M}$, $y \in \mathcal{M}^{\perp}$ és $t \in G$ esetén

$$(\pi(t)x|\pi(t)y) = (\pi(t)^* x|y) = 0.$$

$\square$

3.15. Következmény. Ha $\mathcal{M}$ invariáns altér akkor $\pi = \pi^{\mathcal{M}} \oplus \pi^{\mathcal{M}^{\perp}}$.

Minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra az $\mathcal{M}_x = \overline{\operatorname{span}}\{\pi(t)x : t \in G\}$ altér invariáns altér. Ha $\mathcal{M}_x = \mathcal{H}$ akkor x-et a π ciklikus vektorának hívjuk.

3.16. Állítás. Minden unitér reprezentáció ciklikus reprezentációk direkt összege.

Bizonyítás. Páronként ortogonális, invariáns alterekből álló rendszerek felszálló uniója is ilyen, vagyis a Zorn-lemma szerint létezik ezek között maximális $(\mathcal{M}_\alpha)_\alpha$. Tegyük fel, hogy $\bigoplus\limits_\alpha \mathcal{M}_\alpha \neq \mathcal{H}$. Akkor létezik egy $x \in \left(\bigoplus\limits_\alpha \mathcal{M}_\alpha\right)^{\perp}$ vektor, és az ez által generált ciklikus altér ortogonális minden $\mathcal{M}_\alpha$-ra, ami ellentmond $(\mathcal{M}_\alpha)_\alpha$ maximalitásának.

$\square$

3.17. Állítás. Legyen $\mathcal{M}$ zárt altér és P az ortogonális projekció $\mathcal{M}$-re. $\mathcal{M}$ pontosan akkor invariáns altér ha P benne van π centralizátorában.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $P \in \mathcal{C}(\pi)$. Ekkor minden $t \in G$-re, minden $x \in \mathcal{M}$-re és minden $y \in \mathcal{M}^{\perp}$-re teljesül $\pi(t)x = \pi(t)Px = P\pi(t)x$ és $\pi(t)P(y) = P\pi(t)y = 0$, vagyis $\mathcal{M}$ invariáns.
Fordítva, tegyük fel, hogy $\mathcal{M}$ invariáns altér. Ekkor minden $x \in \mathcal{M}$-re teljesül $P\pi(t)x = \pi(t)x = \pi(t)Px$ és $0 = P\pi(t)y = \pi(t)Py$, vagyis $P \in \mathcal{C}(\pi)$. $\square$

3.18. Lemma. (Schur) Ha π_1, π_2 a lokálisan kompakt G csoport unitér reprezentációi, akkor teljesülnek az alábbiak:

(1) π_1 pontosan akkor irreducibilis ha a centralizátora az identitás skalárszorosaiból áll,

(2) ha π_1, π_2 unitér ekvivalensek akkor $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ 1-dimenziós, különben 0-dimenziós.

Bizonyítás. (1) Ha π_1 nem irreducibilis, akkor a centralizátora tartalmaz egy nem triviális projekciót, tehát $\mathcal{C}(\pi)$ nem állhat csak az identitás skalárszorosaiból.
Fordítva, tegyük fel, hogy létezik egy $T \in \mathcal{C}(\pi)$ ami nem cId alakú. Ekkor az $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$ és a $\frac{1}{2i}(T - T^*)$ operátorok is $\mathcal{C}(\pi)$-ben vannak. Feltehetjük,

hogy A nem cId alakú. A önadjungált, ezért minden operátor ami kommutál vele kommutál az ő spektrális projekcióival is. Mivel A nem cId alakú, ezért ezek között van nemtriviális projekció, és így az előző állítás szerint π_1 nem irreducibilis.

(2) Ha $T \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$, akkor a

$$T^*\pi_2(t) = [\pi_2(t^{-1})T]^* = [T\pi_1(t^{-1})]^* = \pi_2(t)T^*$$

azonosság szerint $T^* \in \mathcal{C}(\pi_2, \pi_1)$. Továbbá

$$TT^*\pi_2(t) = T\pi_1 T^* = \pi(t)TT^*,$$

ezért $TT^* \in \mathcal{C}(\pi_2)$ és hasonlóan $T^*T \in \mathcal{C}(\pi_1)$. Tehát $TT^* = T^*T = cId$, és ebből következik, hogy $T = 0$, vagy $c^{-\frac{1}{2}}$ unitér operátor. Az előbbi esetben π_1, π_2 nem unitér ekvivalensek, és $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ 0-dimenziós. Az utóbbi esetben, ha $T_1, T_2 \in \mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$, akkor $T_2^{-1}T_1 \in \mathcal{C}(\pi_1)$, vagyis cId alakú. Tehát $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ bármelyik két eleme lineárisan összefüggő, és $\mathcal{C}(\pi_1, \pi_2)$ 1-dimenziós. $\square$

3.1. Az $L^1(G)$ csoportalgebra $*$-reprezentációi.

3.19. Definíció. Legyen B egy Banach-$*$-algebra, és $\mathcal{H}$ egy Hilbert-tér. Egy $\pi : B \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ leképezést $*$-*reprezentációnak* nevezünk ha π egy folytonos $*$-algebra-homomorfizmus. A π $*$-reprezentációt nemelfajulónak nevezzük, ha teljesül

$$\overline{\operatorname{span}}\{\pi(a)x : a \in B, \quad x \in \mathcal{H}\} = \mathcal{H}.$$

3.20. Állítás. A B Banach-$*$-algebra π reprezentációja pontosan akkor nem elfajuló, ha minden $x \in \mathcal{H}$ vektorhoz létezik $x \in B$ algebra elem, hogy $\pi(a)\xi \neq 0$.

Bizonyítás. Ha $K = \overline{\operatorname{span}}\{\pi(a)x : a \in B, \quad x \in \mathcal{H}\} \neq \mathcal{H}$, akkor létezik egy $x \in K^\perp$ vektor. Minden $y \in \mathcal{H}$-ra és $a \in B$-re teljesül, hogy

$$0 = (\pi(a^*)y|x) = (y|\pi(a^*)^*x) = (y|\pi(a)x),$$

vagyis minden $a \in B$-re $\pi(a)x = 0$.
Fordítva, tegyük fel, hogy létezik egy $x \in \mathcal{H}$, hogy minden $a \in B$-re $\pi(a)x = 0$. De akkor minden $y \in \mathcal{H}$-ra

$$(\pi(a^*)y|x) = (y|\pi(a)x) = 0,$$

vagyis

$$x \in \{\pi(a)x : x \in B, \quad \xi \in \mathcal{H}\}^\perp = \overline{\operatorname{span}}\{\pi(a)x : x \in B, \quad x \in \mathcal{H}\}^\perp,$$

és ebből következik az állítás.

$\square$

A G lokálisan kompakt csoport minden π unitér reprezentációja meghatároz egy

$$\tilde{\pi} : L^1(G) \to \mathcal{B}(L^2(G)), \quad f \mapsto= \int_G f(t)\pi(t)\ d\mu(t)$$

leképezést.

3.21. Példa. Ha λ a G bal-reguláris reprezentációja, akkor

$$\tilde{\lambda}(f)g = \int_G f(t)L_t g\ d\mu(t) = f * g.$$

3.22. Tétel. *Legyen π a G lokálisan kompakt csoport egy unitér reprezentációja $\mathcal{H}_\pi$ felett. Ekkor az*

$$f \mapsto \tilde{\pi}(f) = \int_G f(t)\pi(t)\ d\mu(t)$$

leképezés $L^1(G)$-nek egy nem elfajuló $*$-reprezentációja. Továbbá minden $t \in G$, és $f \in L^1(G)$-re teljesül, hogy

$$\pi(t)\tilde{pi}(f) = \tilde{\pi}(L_t f), \quad \tilde{\pi}(f)\pi(t) = \Delta(t^{-1})\pi(R_{t^{-1}}f.)$$

Bizonyítás. Ez a hozzárendelés valóban egy $*$-algebra-morfizmus, mert

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(f*g) &= \int_G \int_G f(s)g(s^{-1}t)\pi(t)\ d\mu(s)d\mu(t) \\
&= \int_G \int_G f(s)g(t)\pi(st)\ d\mu(s)d\mu(t) \\
&= \int_G \int_G f(s)\pi(s)g(t)\pi(t)\ d\mu(t)d\mu(s) = \tilde{\pi}(f)\pi(g) \\
\tilde{\pi}(f*) &= \int_G \Delta(t^{-1}\overline{f(t^{-1})}\pi(t)\ d\mu(t) = \int_G \overline{f(t)}\pi(t^{-1})\ d\mu(t) \\
&= \int_G [f(t)\pi(t)]^*\ d\mu(t) = \tilde{\pi}(f)^* \\
\pi(t)\tilde{\pi}(f) &= \int_G f(s)\pi(s)\pi(t)\ d\mu(s) = \int_G f(s)\pi(ts)\ d\mu(s) \\
&= \int_G f(t^{-1}s)\pi(s)\ d\mu(s) = \tilde{\pi}(L_t f) \\
\tilde{\pi}(f)\pi(t) &= \int_G f(s)\pi(s)\pi(t)\ d\mu(s) = \Delta(t^{-1}) \int_G f(s)\pi(st)\ d\mu(s) \\
&= \Delta(t^{-1}) \int_G f(st^{-1})\pi(s)\ d\mu(s) = \Delta(t^{-1})\tilde{\pi}(R_{t^{-1}} f)
\end{aligned}$$

Legyen $0 \neq x \in \mathcal{H}_\pi$. Válasszunk egy V kompakt egységkörnyezetet, úgy hogy $\|\tilde{\pi}(t)x - x\| \leq \|x\|$ teljesüljön minden $t \in V$-re. Legyen $f = \frac{1}{\mu(V)}\chi_V$. Ekkor

$$\|\pi(f)\tilde{x} - x\| = \frac{1}{\mu(V)} \Big\| \int_G [\pi(t)x - x] d\mu(t) \Big\| \leq \|x\|,$$

vagyis $\tilde{\pi}(f)(x) \neq 0$ és így a 3.20 Állításból már következik, hogy $\tilde{\pi}$ nem elfajuló. $\square$

3.23. Tétel. *A G lokálisan kompakt csoport $L^1(G)$ csoportalgebrájának minden $\rho : L^1(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nem elfajuló $*$-reprezentációjának megfeleltethető egy π unitér reprezentációja G-nek, amire teljesül $\rho = \tilde{\pi}$.*

Bizonyítás. Legyen $D = \operatorname{span}\{\rho(f)x :\ f \in L^1(G),\ x \in \mathcal{H}\}$, ez $\mathcal{H}$ sűrű altere, mert ρ nem elfajuló. A 2.40 Tétel szerint $\psi_U * f \to f$ $L^1(G)$-ben. Így minden $t \in G$ esetén $(L_t\psi_u) * f = \psi_U * (L_t f) \to L_t f$ $L^1(G)$-ben és ρ folytonossága miatt $\rho(L_t\psi_U)\rho(f)x \to \rho(L_t f)x$ $\mathcal{B}(\mathcal{H})$-ban. Tehát $\rho(L_t f)$ konvergál egy lineáris operátorhoz D-n, jelölje ezt $\pi(t)$. Ez jóldefiniált, ugyanis ha $\sum_{i=1}^n \rho(f_i)x_i = 0$, akkor

$$\rho\left(\sum_{i=1}^n \rho(L_t f_i)x_i\right) = \sum \rho(L_t f_i)x_i = \lim \sum (L_t\psi_u)\rho(f_i)x_i = 0.$$

Minden U-ra $\|\psi_u\|_1 = 1$, ezért minden $t \in G$-re $\|\rho(L_t\psi)\| \leq 1$, is teljesül, ebből pedig következik, hogy $\|\pi\| \leq 1$. Tehát minden t-re $\pi(t)$ kiterjed $\mathcal{H}$-ra normatartó módon.

Az így definiált π egy unitér reprezentációja G-nek. Szorzattartó, mert

$$\pi(ts)\rho(f)x = \rho(L_tsf)x = \pi(t)\rho(L_sf)x = \pi(t)\pi(s)\rho(f)x,$$

és minden $t \in G$-re $\pi(t)$ unitér, mert

$$\|x\| = \|\pi(t^{-1})\pi(t)x\| \leq \|\pi(t)x\| \leq \|x\|,$$

és egy szürjektív izometria unitér. Mivel az eltolások folytonosak $L^1(G)$-ben, ezért egy $(t_i)_{i\in I}$ G-beli általánosított sorozatra teljesül, hogy

$$\pi(t_i)\rho(f) = \rho(L_{t_i}f) \to \pi(L_tf) = \pi(t)\rho(f),$$

vagyis π folytonos az erős operátor topológiára nézve.
Belátjuk, hogy $\rho = \tilde{\pi}$. Minden $f \in L^1(G)$-re $\rho(f)$ folytonos lineáris operátor, ezért a az 1.9 Tétel szerint kommutál az $L^1(G)$-értékű függvények integráljával. Ebből azt kapjuk, hogy minden $f, g \in L^1(G)$re teljesül, hogy

$$\begin{aligned}
\rho(f)\rho(g) = \rho(f * g) &= \int_G f(t)\rho(L_tg)\ d\mu(t) \\
&= \int_G f(t)\pi(t)\rho(g)\ d\mu(t) \\
&= \left[\int_G f(t)\pi(t)\ d\mu(t)\right]\rho(g) \\
&= \pi\tilde{(f)}\rho(g).
\end{aligned}$$

Tehát $\tilde{\pi} = \rho$ D-n, és így $\mathcal{H}$-n is.

$\square$

4. Amenábilis csoportok

4.1. Paradoxikus felbontások

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor az X halmazt G paradoxikusnak hívjuk, ha létezik egy

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \bigcup_{k=1}^{m} B_k$$

véges partíciója és olyan $(g_i)_{i=1}^n$, $(h_j)_{j=1}^k$ csoportelemek, hogy

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^{k} h_j(B_j).$$

Minden csoport hat saját magán a balszorzással, és egy csoportot paradoxikusnak nevezünk, ha erre a hatásra van paradoxikus részhalmaza.

Az F_2, két elem által generált szabad csoport paradoxikus. Tekintsük ugyanis az alábbi felbontását. Jelölje a és b az F_2 két generátorát. Ekkor

$$F_2 = W(a) \cup W(a^{-1}) \cup W(b) \cup W(b^{-1}),$$

ahol $W(x)$ jelöli az x-szel kezdődő redukált szavak halmazát. Minden $w \in F_2$ redukált szóra vagy $w \in W(a)$ igaz vagy $w \in aW(a^{-1})$, és ugyanígy $w \in W(b)$ vagy $w \in bW(b^{-1})$, tehát ezek F_2-nek egy paradoxikus felbontását adják.

A Banach-Tarski paradoxon szerint $\mathbb{R}^3$ D^3 egységgömbjének van paradoxikus felbontása, ha $\mathbb{R}^3$ izometriái hatnak rajta. A tétel bizonyítása azon alapszik, hogy van két olyan forgatás $\mathbb{R}^3$ izometriacsoportjában, amik F_2-t generálják.

Tarski tétele szerint egy G csoport pontosan akkor nem paradoxikus, ha

(1) létezik egy olyan $\mathcal{P}(G)$-n értelmezett nemnegatív, végesen additív μ mérték, amelyre $\mu(G) = 1$, és amely balinvariáns, azaz minden $t \in G$ csoportelemre és $E \subset G$ részhalmazra teljesül, hogy $\mu(tE) = \mu(E)$.

Ha a G csoportot ellátjuk a diszkrét topológiával, akkor ez a feltétel ekvivalens azzal, hogy

(2) létezik egy $m \in l^\infty(G)^*$ folytonos lineáris funkcionál amire teljesül, hogy $\|m\| = \langle 1, m \rangle = 1$.

Ha egy G diszkrét csoport megfelel ezen feltételeknek, akkor G-t amenábilisnek hívjuk. Az amenábilis csoportok definícióját a (2) feltétel segítségével terjesztjük ki tetszőleges lokálisan kompakt csoportra.

4.2. Amenábilis lokálisan kompakt csoportok

4.1. Definíció. (közép) Legyen G lokálisan kompakt topologikus csoport, és legyen E $L^\infty(G)$ egy olyan altere, ami tartalmazza a konstans függvényeket, ekkor egy $m \in E^*$ folytonos lineáris funkcionált középnek hívunk, ha $\langle m, 1\rangle = \|m\| = 1$.

4.2. Állítás. Az E felett értelmezett közepek E^* konvex, w^*-kompakt részét alkotják.

Bizonyítás. Ha $0 \leq \lambda_1, \lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ és m, n közepek, akkor $\lambda_1 m + \lambda_2 n$ is közép, mert

$$\langle 1, \lambda_1 m + \lambda_2 n\rangle = \lambda_1\langle 1, m\rangle + \lambda_2\langle 1, n\rangle = 1$$

és tetszőleges $\phi \in E$ függvényre

$$|\langle \phi, \lambda_1 m + \lambda_2 n\rangle| = |\langle \phi, \lambda_1 m_1\rangle + \langle \phi, \lambda_2 n\rangle| \leq \lambda_1\|m\|\|\phi\| + \lambda_2\|n\|\|\phi\| \leq \|\phi\|.$$

Mind a norma, mind az 1 behelyettesítése folytonos, ezért $\|m\| = 1$ és $\langle 1, m\rangle = 1$ zárt feltételek, és a közepek halmaza $B_1(0, E^*) \cap [\langle 1, m\rangle = 1]$ az E^* egységgömbjének w^*-zárt része. Az 1.4 Tétel szerint $B_1(0, E^*)$ w^*-kompakt, ezért a közepek halmaza is w^*-kompakt. □

4.3. Példa.

- Ha $f \in L^1(G)$, $\|f\|_1 = 1$, akkor $\langle \Phi, m\rangle = \int_G \Phi f \, d\mu$ egy közepet definiál.
- Hasonlóan, ha λ diszkrét valószínűségi mérték G-n, azaz $\lambda = \sum \lambda_i \delta_{t_i}$, ahol $\sum_i \lambda_i = 1$, akkor $\langle \Phi, m\rangle = \int_G \Phi d\lambda = \sum \lambda_i \Phi(t_i)$ is egy közép.

4.4. Állítás. Ha $m \in E^*$ olyan folytonos lineáris funkcionál, hogy $\langle 1, m\rangle = 1$ akkor m pontosan akkor közép, ha pozitív.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy m közép. Legyen $f \in E$ valós értékű, és legyen $\langle f, m\rangle = \alpha + \beta i$, ahol α, β valós számok. Tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ számra teljesül, hogy

$$(\beta + t)^2 \leq |\alpha + (\beta + t)i|^2 \leq |\langle f + it \cdot 1\rangle|^2 \leq \|f + it \cdot 1\|_\infty \leq \|f\|_\infty + t^2.$$

Ezt átrendezve azt kapjuk, hogy minden t-re $2t\beta \leq \|f\|_\infty - \beta^2$, de ez csak akkor lehet ha $\beta = 0$, tehát valós értékű függvényeken m is valós értéket vesz fel.
Legyen most $f > 0$. Ekkor $g = 2f - \|f\|_\infty \cdot 1$ valós értékű, és $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. $\|m\| \leq 1$ miatt

$$\langle f, m\rangle = \frac{1}{2}\langle g + \|f\|_\infty \cdot 1, m\rangle = \frac{1}{2}\langle g, m\rangle + \|f\|_\infty \geq \|f\|_\infty - \|g\|_\infty \geq 0$$

tehát m pozitív funkcionál.

Fordítva, tegyük fel, hogy m pozitív. Egy valós értékű $f \in E$ függvényre

$$\begin{aligned}0 &\leq \langle \|f\|_\infty \cdot 1 - f, m\rangle = \langle \|f\|_\infty \cdot 1, m\rangle - \langle f, m\rangle = \|f\|_\infty - \langle f, m\rangle \\ 0 &\leq \langle \|f\|_\infty \cdot 1 + f.m\rangle = \langle \|f\|_\infty \cdot 1, m\rangle + \langle f, m\rangle = \|f\|_\infty + \langle f, m\rangle \\ &|\langle f, m\rangle| \leq \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Legyen $f \in E$ tetszőleges függvény, és λ olyan szám, hogy $|\langle f, m\rangle| = \lambda\langle f, m\rangle$. E zárt a komplex konjugálásra, ezért

$$\mathrm{Re}(\lambda f) = \frac{1}{2}\left(\lambda f + \overline{\lambda f}\right) \in E,$$

$$\mathrm{Im}(\lambda f) = \frac{1}{2i}\left(\lambda f - \overline{\lambda f}\right) \in E$$

valós értékűek, és $f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$.

$$\begin{aligned}0 \leq |\langle f, m\rangle| &= \langle \lambda f, m\rangle = \langle \mathrm{Re}(\lambda f), m\rangle + i\langle \mathrm{Im}(\lambda f), m\rangle \\ &= \langle \mathrm{Re}(\lambda f), m\rangle \leq \|\mathrm{Re}(\lambda f)\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty\end{aligned}$$

□

4.5. Következmény. Az $\langle m, 1\rangle = 1$ feltételből következik, hogy ha f valós értékű, akkor $\langle f - \sup f \cdot 1, m\rangle = \langle f, m\rangle - \sup f$ vagyis $\langle f, m\rangle \leq \sup f$. Hasonlóan $\langle f, m\rangle \geq \inf f$.

4.6. Állítás. A diszkrét valószínűségi mértékek Σ_d halmaza w^*-sűrű részét alkotják az L^∞-en értelmezett közepeknek.

Bizonyítás. Σ_d konvex részét alkotja $(L^\infty(G)^*, w^*)$-nak. Legyen $m \in L^\infty(G)^*$ egy közép, és tegyük fel, hogy m nincs benne Σ_d w^*-lezártjában. $(L^\infty(G)^*, w^*)$ lokálisan konvex tér, tehát a Hahn-Banach tétel szerint létezik

$$f \in (L^\infty(G)^*, w^*)^* = L^\infty(G),$$

hogy

$$\langle m, \mathrm{Re}(f)\rangle\langle m', \mathrm{Re}(f)\rangle$$

minden m' diszkrét mértékre. Tehát

$$\langle \mathrm{Re}(f), m\rangle > \langle \mathrm{Re}(f), \delta_t\rangle = f(t)$$

minden $t \in G$-re. De akkor $\sup \mathrm{Re}(f) < \langle f, m\rangle$, ami ellentmondás. □

4.7. Következmény. A véges tartójú valószínűségi mértékek is w^*-sűrű részét alkotják az $L^\infty(G)$-n értelmezett közepeknek.

4.8. Jelölés. $P(G) = \{f \in L^1(G) \,:\, f \geq 0, \|f\|_1 = 1\}$

4.9. Megjegyzés. Ha $P(G)$-t azonosítjuk az $L^1(G)^{**} = L^\infty(G)^*$-beli képével, akkor $P(G)$ az $L^\infty(G)$ felett értelmezett közepek halmazának balinvariáns, w^*-sűrű része.

Bizonyítás. Hasonlóan a 4.6 Állítás bizonyításához, ha m nincs benne $P(G)$ w^*-lezártjában, akkor létezik egy $g \in L^\infty$ függvény, hogy $\langle \mathrm{Re}\, g, m\rangle > \delta + \langle \mathrm{Re}\, g, f\rangle$ minden $f \in P(G)$-re. Legyen $\epsilon > 0$ és $E = [\mathrm{Re}\, g > \sup \mathrm{Re}\, g - \epsilon]$. Ekkor $f_\epsilon = \frac{1}{\mu(E)}\chi_E \in P(G)$ és $\langle \mathrm{Re}\, g, f_\epsilon\rangle \geq \sup f - \epsilon$. Az $\epsilon = \frac{\delta}{2}$ választással $\langle \mathrm{Re}\, g, m\rangle > \sup \mathrm{Re}\, g$, ami ellentmondás. □

4.10. Definíció. $L^\infty(G)$-beli függvények egy H halmaza balinvariáns, ha minden $f \in H$ függvényre és $t \in G$ csoportelemre teljesül, hogy $\delta_t * f \in H$.

4.11. Definíció. (balinvariáns közép) $L^\infty(G)$ egy E balinvariáns altere E felett értelmezett m közepet balinvariásnak nevezünk, ha minden $f \in E$ függvényre és minden $t \in G$ csoportelemre teljesül, hogy $\langle \delta_t * f, m\rangle = \langle f, m\rangle$.

4.12. Példa. Tekintsük az egész számok $\mathbb{Z}^+$ additív csoportját, legyen $\mathcal{U}$ egy nemfő ultraszűrű $\mathbb{N}$-en és definiálja m-et a $\langle f, m\rangle = \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} f(k)$ a képlet. Ez pozitív, $\langle 1, m\rangle = 1$ és

$$\begin{aligned} |\langle \delta_t * f, m\rangle - \langle f, m\rangle| &= \left| \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{k=-n-t}^{-n} f(k) + \sum_{k=n-t}^{n} f(k) \right) \right| \\ &\leq \lim_{\mathcal{U}} \frac{t}{2n+1} \|f\|_\infty = 0. \end{aligned}$$

4.13. Definíció. A G lokálisan kompakt csoportot *amenáblisinek* nevezzük, ha létezik $L^\infty(G)$ felett értelmezett balinvariáns közép.

Ha m balinvariáns közép, és legyen $\hat{f}(t) = f(t^{-1})$. Ekkor a $\langle f, m'\rangle = \langle \hat{f}, m\rangle$ képlettel definiált m' egy jobbinvariáns közép. Így ha egy jobbinvariáns közép létét követelnénk meg, akkor is ugyanazokat a csoportokat kapnánk.

4.14. Definíció. Legyen E az $L^\infty(G), C_b(G), LUC(G), RUC(G), UC(G)$ terek valamelyike. Egy E felett értelmezett m közepet topologikusan balinvariánsnak nevezünk ha minden $f \in P(G)$ és $g \in E$ függvényre teljesül, hogy $\langle f * g, m\rangle = \langle f, m\rangle$.

4.15. Lemma. Legyen E az $L^\infty(G), C_b(G), LUC(G), RUC(G), UC(G)$ terek valamelyike. Ha egy E felett értelmezett m topologikusan balinvariáns, akkor balinvariáns.

Bizonyítás. Legyenek $\Phi \in E$, $f \in P(G)$ függvények és $g \in G$ csoportelem. Ekkor

$$\langle \delta_t * \Phi, m\rangle = \langle f * (\delta_g * \Phi), m\rangle = \langle (f * \delta_g) * \Phi), m)\rangle = \langle \Phi, m\rangle.$$

□

4.16. Lemma. Egy G lokálisan kompakt csoportra az alábbiak ekvivalensek:

(i) G amenábilis,

(ii) Létezik egy $P(G)$-beli függvényeknek egy $(f_\alpha)_\alpha$ általánosított sorozata, hogy minden $t \in G$ pontra $\delta_t * f_\alpha - f_\alpha \to 0$ a w^* topológiában, (*iii*) Létezik egy $P(G)$-beli függvényeknek egy $(f_\alpha)_\alpha$ általánosított sorozata, hogy minden $t \in G$ pontra $\|\delta_t * f - f\|_1 \to 0$.

Bizonyítás. ((*i*) $\Leftrightarrow$ (*ii*)) Ha G amenábilis, akkor létezik rajta egy m balinvariáns közép, és mivel $P(G)$ w^*-sűrű része a közepek halmazának, ezért van egy f_α $P(G)$-beli általánosított sorozat, ami m-hez konvergál a w^* topológiában.

Ha pedig f_α olyan, mint (*ii*)-ben akkor alkalmas részsorozatra áttérve feltehetjük, hogy f_α konvergens, mert. A közepek halmaza w^*-kompakt része $L^\infty(G)$-nek. Ha $\lim_\alpha f_\alpha = m$, akkor m pontosan akkor balinvariáns ha $\delta_t * f_\alpha - f_\alpha \to 0$ a w^*-topológiában, mert

$$\begin{aligned}\langle \phi, m\rangle - \langle \delta_t * \phi, m\rangle &= \lim_\alpha \langle \phi, f_\alpha\rangle - \lim_\alpha \langle \delta_t * \phi, f_\alpha\rangle \\ &= \lim_\alpha \langle \delta_t * \phi - \phi, f_\alpha\rangle.\end{aligned}$$

((*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*)) Legyen $E = \prod_G L^1(G)$ az $L^(G)$-beli normatopológiák szorzattopológiával. Legyen

$$T : L^1(G) \to E,\ f \mapsto (\delta_t * f - f)_t.$$

Ha f_α olyan $P(G)$-beli sorozat amire teljesül, hogy

$$\delta_t * f_\alpha - f_\alpha \xrightarrow{w^*} 0 \ (t \in G),$$

akkor $\delta_t * f_\alpha - f_\alpha \to 0$ az $L^1(G)$-beli gyenge topológiában. A gyenge topológia E-n az $L^1(G)$-beli gyenge topológiák szorzata, vagyis $0 \in E$ benne van a $T(P(G))$ gyenge lezártjában. De E lokálisan konvex terek szorzata, tehát lokálisan konvex, és akkor az 1.3 Tétel szerint 0 benne van a $\mathrm{co}(T(P(G)))$ E-beli (erős) lezártjában. Ez ekvivalens azzal, hogy van egy g_α általánosított sorozat $P(G)$ konvex burkában, amire teljesül, hogy

$$\|\delta_t * g_\alpha - g_\alpha\|_1 \to 0 \ (t \in G).$$

□

4.17. Lemma. Ha m egy balinvariáns közép UC(G)-n, akkor m topologikusan balinvariáns.

Bizonyítás. Minden $\phi \in UC(G)$-re az $L^1(G)$-n értelmezett $f \mapsto \langle f * \phi, m\rangle$ lineáris funkcionál folytonos, ezért egyértelműen létezik egy $\psi \in L^\infty(G)$ függvény, hogy

$$\langle f * \phi, m\rangle = \int_G f(t)\psi(t)\ d\mu(t).$$

A 2.37 Tétel szerint minden $f \in L^1(G)$ függvényre $f * \phi \in UC(G)$, ezért

$$\langle \delta_t * f * \phi, m\rangle = \langle f * \phi, m\rangle,$$

vagyis

$$\begin{aligned}
\langle \delta_s * f * \phi, m\rangle &= \int_G f(s^{-1}t)\phi(t)d\lambda(t) = \int_G f(t)\psi(st)d\lambda(t) \\
\langle f * \phi, m\rangle &= \int_G f(t)\psi(t)d\lambda(t) \\
\delta_{s^{-1}} * \psi &= \psi.
\end{aligned}$$

Tehát minden ϕ-hez létezik egy C_ϕ konstans, hogy $\langle f * \phi, m\rangle = C_\phi \int_G f \; d\mu$. Legyen $\psi_U \subset P(G)$ approximatív egység. Minden $f \in P(G)$ függvényre

$$\langle f * \phi, m\rangle = \lim_U \langle f * \psi_U * \phi, m\rangle = C_\phi = \lim_U \langle \psi_U * \phi, m\rangle = \langle \phi, m\rangle.$$

Tehát m topologikusan balinvariáns. □

4.18. Tétel. *Egy G lokálisan kompakt csoportra ekvivalensek az alábbiak:*

(i) *G amenábilis,*

(ii) *létezik balinvariáns közép $C_b(G)$-n,*

(iii) *létezik balinvariáns közép $LUC(G)$-n,*

(iv) *létezik balinvariáns közép $RUC(G)$-n,*

(v) *létezik balinvariáns közép $UC(G)$-n.*

Bizonyítás. Egy balinvariáns közép megszorítása egy balinvariáns altérre egy balinvariáns közép, ezért $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (v)$, $(i) \rightarrow (iv)$.

($(ii) \Rightarrow (i)$) Legyen m egy balinvariáns közép $UC(G)$-n, és ψ_U egy $P(G)$-beli approximatív egység. Definiáljuk az m' közepet a

$$\langle \phi, m'\rangle = \lim_U \langle \psi_U * \phi * \psi_U, m\rangle$$

képlettel. Legyen $f \in L^1(G)$. Az előző lemma szerint m topologikusan invariáns, ezért

$$\begin{aligned}
\langle f * \phi, m'\rangle &= \lim_U \langle \psi_U * f * \phi * \psi_U, m\rangle \\
&= \lim_U \langle f * \psi_U * \phi * \psi_U, m\rangle \\
&= \lim_U \langle \psi_U * \phi * \psi_U, m\rangle \\
&= \langle \phi, m\rangle.
\end{aligned}$$

Tehát m' topologikusan invariáns, és akkor balinvariáns. □

4.19. Következmény. Legyen G lokálisan kompakt csoport, és jelölje G_d a G csoportot a diszkrét topológiával. Ha G_d amenábilis, akkor G is amenábilis.

Bizonyítás. Ha m balinvariáns közép $l^\infty(G_d)$-n, akkor $C_b(G) \subset l^\infty(G_d)$, és vehetjük m megszorítását $C_b(G)$-re, ami egy balinvarinás közép $C_b(G)$-n, vagyis G amenábilis. $\square$

4.20. Tétel. *Legyen G egy amenábilis lokálisan kompakt csoport és H egy lokálisan kompakt csoport. Ha θ egy folytonos $G \to H$ csoport homomorfizmus aminek sűrű a képe H-ban, akkor H is amenábilis.*

Bizonyítás. Legyen θ^* a $\phi \mapsto \phi \circ \theta$ képlettel definiált $C_b(H) \to C_b(G)$ folytonos algebramorfizmus. Minden ϕ-re $\theta^* \circ \phi$ balról egyenletesen folytonos. Legyen ugyanis $(t_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat G-ben, ami a t elemhez konvergál. Ekkor

$$\begin{aligned}\lim_i \delta_{t_i} * \theta^* \phi &= \lim \theta^*(\delta_{\theta^*(t_i)} * \phi) \\ &= \theta^*(\delta_{\theta^* t} * \phi) \\ &= \delta_t * \theta^* \phi.\end{aligned}$$

Legyen m balinvariáns közép $LUC(G)$-n, és definiáljuk az m' közepet a

$$\langle \phi, m' \rangle = \langle \theta^* \phi, m \rangle$$

képlettel. Mivel θ^*-nál pozitív függvény képe pozitív, és a konstans 1 függvény képe a konstans 1 függvény, ezért m' valóban közép. Továbbá minden $t \in G$-re teljesül

$$\langle \delta_{\theta(t)} * \phi, m' \rangle = \langle \theta^*(\delta_{\theta(t)} * \phi), m \rangle = \langle \theta * \phi, m \rangle = \langle \phi, m \rangle.$$

Mivel θ képe sűrű és m folytonos, ebből már következik m' balinvarianciája. $\square$

4.21. Következmény. Egy G amenábilis lokálisan kompakt csoport minden folytonos homomorfizmusnál vett képe is amenábilis.

4.22. Tétel. *Ha G lokálisan kompakt csoport, $N \trianglelefteq G$ normálosztó, és N, G/N amenábilis csoportok, akkor G is az.*

Bizonyítás. Legyen az m_1 balinvariáns közép $C_b(N)$-en. Minden $\phi \in LUC(G)$ függvényre legyen

$$T\phi : G \to \mathbb{C} \quad t \mapsto \langle \delta_t * \phi|_N, m_1 \rangle.$$

Mindegyik $T\phi$ balról egyenletesen folytonos, ugyanis $\delta_s * T\phi = T(\delta_{s^{-1}} * \phi)$ és így

$$\|\delta_s * T\phi - T\phi\|_{sup} \le \sup_t |\langle \delta_{s^{-1}t} * \phi, m_1 \rangle - \langle \delta_t * \phi, m_1 \rangle| \le \|\delta_{s^{-1}t} * \phi - \delta_t * \phi\|_{sup}.$$

És ez utóbbi tart a 0-hoz, ha s^{-1} tart az 1-hez. Legyenek t, s olyanok, hogy $Ns = Nt$, azaz van egy olyan $n \in N$, hogy $nt = s$. Ekkor

$$\begin{aligned}(T\phi)(t) &= \langle \delta_t * \phi|_N, m_1 \rangle = \langle \delta n * \delta_s * \phi|_N, m_1 \rangle \\ &= \langle \delta_s * \phi|_N, m_1 \rangle = (T\phi)(s).\end{aligned}$$

Tehát $T\phi$ konstans az N mellékosztályain, és ezért létezik egy $\hat{T} : LUC(G) \to C_b(G/N)$ leképezés, aminek T felemeltje. Legyen m_2 egy jobbinvariáns közép $C_b(G/N)$-en és legyen m az a közép amit a

$$\langle \phi, m \rangle = \langle \hat{T}\phi, m_2 \rangle$$

T-nél és $\hat{T}$-nál is pozitív függvény képe pozitív, és a konstans 1 függvény képe a konstans 1 függvény, vagyis m valóban közép. Minden $t \in G$, $\phi \in LUC(G)$ esetén

$$\langle \delta_t * \phi, m \rangle = \langle \hat{T}(\delta_t * \phi), m_2 \rangle = \langle \hat{T}(\phi) * \delta_{t^{-1}N}, m_2 \rangle = \langle \hat{T}\phi, m_2 \rangle = \langle \phi, m \rangle,$$

tehát m balinvariáns. $\square$

4.3. Kesten-Hulanicki kritérium

4.23. Tétel. *G diszkrét csoportra az alábbiak ekvivalensek:*

(i) G amenábilis,

(ii) Létezik egy C konstans, hogy minden G-n értelmezett, véges tartójú, pozitív f függvényre teljesül, hogy

$$\sum_{t\in G} f(t) \leq C\|\lambda(f)\|_{\mathcal{B}(l^2(G))},$$

(iii) (ii) teljesül $C = 1$ választással.

Bizonyítás. ($(i) \Rightarrow (ii)$) Legyen m balinvariáns közép $L^\infty(G)$-n. A 4.16 Lemma szerint létezik $(f_i)_{i\in I}$ olyan $l^1(G)$- beli általánosított sorozat, hogy minden i-re $\|f_i\| = 1$, $f_i \geq 0$ és $g_i \xrightarrow{l^1(G)} m$. Ekkor m balinvarianciája miatt minden $t \in G$-re

$$\lim_i \|\delta_t * g_i - g_i\|_1 = \|\lim_i \delta_t * g_i - g_i\|_1 = \|\delta_t * m - m\|_1 = 0.$$

A $h_i(t) = g_i(t)^{\frac{1}{2}}$ jelölést használva $\lim_i\|\delta_t * h_i - h_i\|_2 = 0$.

Rögzítsünk egy $f \in \mathbb{C}[G]$ függvényt amire $\|\lambda(f)\|_{\mathcal{B}(l^2(G))} \leq 1$. Ekkor

$$\left|\sum_{u,s} f(u)h_i(u^{-1}s)\overline{h_i}(s)\right| = (\lambda(f)h_i|h_i) \leq \|\lambda(f)\|_{\mathcal{B}(l^2(G))}\|h_i\|^2 \leq 1,$$

és miatt

$$\sum_u f(u) \leq \sum_u f(u)\|h\|_2^2 \leq \left|\sum_{s,u} f(u)h(s)\overline{h}(s)\right| \leq 1.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív homogén, ezért ebből már következik (ii).

($(ii) \Rightarrow (iii)$) Ha $f \in \mathbb{C}[G]$, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra $f^{*n} \in \mathbb{C}[G]$ is teljesül. Alkalmazva erre a (ii) feltételt, azt kapjuk, hogy

$$\left(\sum_t f(t)\right)^n = \sum f^{*n}(t) \leq C\|\lambda(f^{*n})\|_{\mathcal{B}(l^2(G))} \leq C\|\lambda(f)\|^n_{\mathcal{B}(l^2(G))}.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalából n-ik gyököt vonva és n-nel a végtelenhez tartva adódik (iii).

($(iii) \Rightarrow (i)$) Legyen $1 \in E \subset G$ egy véges halmaz. A (iii) feltétel szerint teljesül, hogy

$$|E| \leq \left\|\sum_{t\in E} \lambda(t)\right\|_{\mathcal{B}(l^2(G))} \leq \sum_{t\in E}\|\lambda(t)\|_{\mathcal{B}(l^2(G))} = |E|.$$

Tehát létezik $l^2(G)$-beli függvényeknek egy $(g_n^E)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy minden n-re $\|g_n^E\|_2 = 1$ és $\lim_{n\to\infty}\|\frac{1}{|E|}\sum_{t\in E}\lambda(t) * g_n^E\| = 1$. Ezzel ekvivalens, hogy

$$\left\|\sum \lambda(t) g_n^E\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum \|\lambda(t) g_n^E\|$$

Mivel $l^2(G)$ Hilbert-tér, ezért ez csak úgy lehet, ha minden $t, s \in E$-re teljesül $\|\lambda(t)g_n^E - \lambda(s)g_n^E\|_2 \to 0$, és speciálisan $\|\lambda(t)g_n^E - g_n^E\|_2 \to 0$. A g_n^E sorozatot úgy is választhatjuk, hogy minden $n > k$-ra és minden $t \in E$-re már teljesüljön $\|\lambda(t) * g_n^E - g_n^E\|_2 < \frac{1}{k}$.

A természetes számok, és G véges részhalmazainak rendezett párjain definiáljuk a

$$(n, E) \leq (n', E') \Leftrightarrow E \subset E' \text{ és } n \leq n'$$

részbenrendezést, ami felfelé irányított halmazzá teszi. A g_n^E általánosított sorozatra igaz, hogy minden $t \in G$ esetén $\|\lambda(t)g_n^E - g_n^E\|_2 \to 0$.

Terjesszük ki a rendezésfiltert egy $\mathcal{U}$ ultrafilterré. Definiáljunk egy m közepet $l^\infty(G)$-n a

$$\langle f, m\rangle = \lim_{\mathcal{U}}(f g_n^E | g_n^E)$$

képlettel. Ez az m lineáris, pozitív, mert minden g_n^E pozitív, $\langle 1, m\rangle = 1$, mert minden g_n^E-re $(1 \cdot g_n^E | g_n^E) = \|g_n^E\|_{l^2(G)} = 1$. Továbbá m balinvariáns, mert

$$\begin{aligned}
\langle \delta_t * f, m\rangle &= \lim_{\mathcal{U}}((\delta_t * f) g_n^E | g_n^E) \\
&= \lim_{\mathcal{U}}(f \delta_{t^{-1}} * g_n^E | \delta_{t^{-1}} * g_n^E) \\
&= \lim_{\mathcal{U}}(f g_n^E | g_n^E) \\
&= \langle f, m\rangle,
\end{aligned}$$

tehát G amenábilis. □

5. Uniterizálható csoportok

Ismert, hogy egy G véges csoport egy $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklideszi tér feletti π reprezentációja hasonló egy unitér reprezentációhoz, amit úgy kaphatunk meg, hogy újradefiniáljuk a skalárszorzatot a

$$[x, y] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \pi(g)x, \pi(g) \rangle$$

képlettel. Ezen a téren, a

$$\sum_{g \in G} \pi(g) = \sum_{g \in G} \pi(gh)$$

azonosság miatt a reprezentáció már unitér lesz.
Általában nem lehet igaz, hogy minden lokálisan kompakt csoport minden folytonos reprezentációja hasonló lenne egy unitér reprezentációhoz. Például az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}^2 \quad t \mapsto \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

reprezentáció nem lehet hasonló egy unitér reprezentációhoz, mert csak egy invariáns altere van, és ha hasonló lenne egy unitér reprezentációhoz, akkor fel kellene bomlania ilyenek direkt összegére.

Sokáig eldöntetlen volt, hogy minden lokálisan kompakt csoport minden korlátos reprezentációja hasonló-e egy unitér reprezentációhoz.

5.1. Definíció. A G lokálisan kompakt csoportot uniterizálhatónak nevezzük, ha minden $\pi : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ korlátos reprezentációja hasonló egy unitér reprezentációhoz.

A véges eset bizonyítását terjeszti ki az alábbi tétel tetszőleges lokálisan kompakt amenábilis csoportra, az átlag helyett egy m balinvariáns közepet használva:

5.2. Tétel (Dixmier-Day)**.** *Egy G amenábilis csoport minden $\pi : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ korlátos reprezentációja hasonló egy unitér reprezentációhoz.*

Bizonyítás. Minden $x, y \in H$ vektorra definiáljuk a

$$\Phi_{x,y}(t) = \big(\pi(t^{-1})x | \pi(t^{-1})y\big)$$

függvényt. Mivel π folytonos az erős operátor topológiára nézve, ezért $\Phi_{x,y}$ folytonos függvények kompozíciója. Ha $|\pi| < c$ akkor a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség miatt $|\Phi_{x,y}(x)| \leq c^2 \|x\| \|y\|$, vagyis $\Phi_{x,y} \in C_b(G)$. Továbbá minden $x, y \in H$ vektorra teljesül, hogy

$$\Phi_{\pi(t)x, \pi(t)y}(s) = \big(\pi(s^{-1})\pi(t)x | \pi(s^{-1})\pi(t)y\big) = (\delta_t * \Phi_{x,y})(s)$$

Legyen $m \in C_b(G)^*$ balinvariánis közép és $[x,y] = \langle \Phi_{x,y}, m\rangle$. Ez egy pozitív-definit szeszkvilineáris forma H-n, vagyis létezik egy $S : (H, (\cdot|\cdot)) \to (H, (\cdot|\cdot))$ invertálható pozitív operátor, hogy $[x,y] = (Sx|y)$. Ha $T = S^{1/2}$ az S pozitív négyzetgyöke, akkor $[x,y] = (Tx|Ty)$ és $T\pi(t)T^{-1}$ unitér operátor minden t-re, mert

$$\begin{aligned}(T\pi(t)T^{-1}x|T\pi(t)T^{-1}y) &= [\pi(t)T^{-1}x, \pi(t)T^{-1}y] \\ &= \langle \Phi_{\pi(t)T^1x,\pi(t)T^{-1}}y, m\rangle \\ &= \langle \delta_t * \Phi_{T^{-1}x,T^{-1}y}, m\rangle \\ &= \langle \Phi_{T^{-1}x,T^{-1}y}, m\rangle \\ &= [T^{-1}x, T^{-1}y] \\ &= (x|y).\end{aligned}$$

Mivel $\langle \phi_{x,x}, m\rangle \leq \sup \phi_{x,x}$,

$$(Tx|Tx) = [x,x] = \langle \phi_{x,x}, m\rangle \leq \sup \leq c^2(x|x)$$

és

$$(x|x) = (\pi(t)x\pi(t^{-1}|\pi(t)x\pi(t^{-1}) \leq c^2\phi_{x,x}(t),$$

vagyis

$$(x|x) \leq c^2 \inf \phi_{x,x} \leq \langle \phi_{x,x}, m\rangle = c^2[x,x].$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq c, \quad \|T^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq c.$$

□

Ha $K \leq G$ zárt részcsoport, akkor K minden korlátos reprezentációja indukálja G egy reprezentációját. Tehát ha G uniterizálható, akkor minden zárt részcsoportja is az. Viszont uniterizálható csoportokról nem ismeretes a 4.22 Tételhez hasonló tétel, sőt, olyan eredmény sincs, ami azt mondaná, hogy uniterizálható csoportok direktösszege uniterizálható.

A Diximer-tétel megfordításának bizonyításához szükségünk lesz az alábbi függvényterek definíciójára, és néhány alapvető tulajdonságukra.

5.3. Definíció. $B_c(G)$-vel jelöljük azon korlátos $f : G \to \mathbb{C}$ függvények halmazát, amikre teljesül, hogy létezik egy $\pi : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $|\pi| \leq c$ reprezentáció és léteznek $x, y \in H$ vektorok, hogy minden t csoportelemre $(\pi(t)x|y) = f(t)$.

$B_1(G)$ a csoport Fourier-Stieltjes algebrája.

5.4. Állítás. $B_c(G)$ Banach-tér az

$$\|f\|_{B_c(G)} = \inf_{\pi,x,y}\{\|x\|\|y\|\}$$

normával ellátva.

Bizonyítás. $B_c(G)$ vektortér: ha $f_1, f_2 \in B_c(G)$ függvények, $\lambda \in \mathbb{C}$ szám és $f_1(t) = (\pi_1(t)x_1|y_1)$ és $f_1(t) = (\pi_2(t)x_2|y_2)$, $|\pi_1| \leq c$, $|\pi_2| \leq c$ akkor a $|\pi_1(t) \oplus \pi_2(t)| \leq c$,

$$(\lambda f)(t) = (\pi_1(t)(\lambda x)|y) \tag{2}$$

$$f_1(t) + f_2(t) = ((\pi_1(t) \oplus \pi_2(t))(x_1 \oplus x_2)|y_1 \oplus y_2), \tag{3}$$

A (2) egyenlőségből látszik, hogy

$$\|\lambda(f)\|_{B_c(G)} \leq \|\lambda x\|\|y\| \leq |\lambda|\|x\|\|y\|,$$

vagyis a definiált norma abszolút homogén.
Minden $\epsilon > 0$-ra választhatjuk π_1, π_2, x_1, y_1, x_2, y_2-t olyannak, hogy

(a) $\|x_1\|\|y_1\| < (1+\epsilon)\|f_1\|_{B_c(G)}$,

(b) $\|x_2\|\|y_2\| < (1+\epsilon)\|f_1\|_{B_c(G)}$,

(c) $\|x_1\|^2 = \|y_1\|^2 < (1+\epsilon)\|f_1\|_{B_c(G)}$,

(d) $\|x_2\|^2 = \|y_2\|^2 < (1+\epsilon)\|f_2\|_{B_c(G)}$.

A $(c), (d)$ állítások azért igazak, mert minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re

$$f(t) = (\pi(t)x|\lambda y) = (\pi(t)\overline{\lambda}x|y).$$

A (3) egyelőség alapján

$$\begin{aligned}\|f_1 + f_2\|^2_{B_c(G)} &\leq \|x_1 \oplus x_2\|^2\|y_1 \oplus y_2\|^2 \\ &\leq (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2) \\ &\leq (\|f_1\|_{B_c(G)} + \|f_2\|_{B_c(G)} + 2\epsilon)^2\end{aligned}$$

négyzetgyököt vonva, és ϵ-nal a 0-hoz tartva a norma szubadditivitását kapjuk.

$B_c(G)$ teljes: Mivel minden $t \in G$.re $f(t) \leq C\|x\|\|y\|$, ezért $B_c(G)$-beli függvények egy $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ Cauchy-sorozata egyenletesen konvergens. Áttérhetünk egy

olyan részsorozatra, hogy minden N-re $n, m > N$ esetén $\|f_n - f_m\|_{B_c(G)} \leq \frac{1}{2^N}$
Legyen

$$g_0 = f_0, \quad g_n = f_n - f_{n-1} \quad (n > 0)$$

Válasszunk olyan π_n a $\mathcal{H}_n$ Hilbert-terek felett értelmezett reprezentációkat,és x_n, y_n vektorokat, hogy teljesüljön $g_n(t) = (\pi_n(t)x_n|y_n)$, és

$$\|x_n\|^2 < \|g_n\|_{B_c(G)}(1+\epsilon), \quad \|y_n\|^2 < \|g_n\|_{B_c(G)}(1+\epsilon).$$

Ekkor $\oplus_n x_n$ és $\oplus_n y_n$ bennek vannak a $\mathcal{H}_n$ Hilbert-terek Hilbert-direktösszegében és

$$f(t) = \sum g_n = \left(\bigoplus \pi_n(t)(\oplus_n x_n)|(\oplus_n y_n)\right).$$

$\square$

5.5. Megjegyzés. Minden $c < c'$-re teljesül, hogy $B_c(G) \subset B_{c'}(G)$ és ha $f \in B_c(G)$, akkor $\|f\|_{B_{c'}(G)} \leq \|f\|_{B_c(G)}$.

5.6. Jelölés. $UB(G)$ jelöli $\cup B_c(G)$-t.

Ha $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ egy invertálható operátor, akkor

$$f(t) = (\pi(t)\xi|\eta) = (T\pi(t)T^{-1}(T\xi)|(T^*)^{-1}y),$$

vagyis ha G uniterizálható, akkor $B_c(G) \subset B_1(G)$ és

$$\|f\|_{B_1(G)} \leq \|Tx\|\|(T^*)^{-1}y\| \leq \|T\|\|(T^*)^{-1}\|\|x\|\|y\|,$$

vagyis

$$\|f\|_{B_1(G)} \leq \|T\|\|(T^*)^{-1}\|\|f\|_{B_c(G)}.$$

5.7. Definíció. $M_d(G)$ jelöli azon korlátos $f : G \to \mathbb{C}$ függvények halmazát, amikre teljesül, hogy léteznek $(\mathcal{H}_i)_{i=0}^d$ Hilbert-terek, és $(\xi_i)_{i=1}^d$ korlátos leképezések, hogy $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_d = \mathbb{C}$, $\xi_i : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_{i-1})$ és minden $(t_i)_{i=1}^d$-re teljesül, hogy $f(t_1...t_d) = \xi_1(t_1)...\xi_d(t_d)$ (a $\mathcal{B}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ azonosítás mellet).

$M_d(G)$ a pontonkénti szorzásra algebra és a

$$\|f\|_{M_d(G)} = \inf_{\xi_1,\ldots,\xi_d} \left\{\prod \sup_{t_i} \|\xi_1(t_i)\|\right\}$$

normával Banach-algebra.
Minden d esetén $M_{d+1}(G) \subset M_d(G)$ és $\|f\|_{M_d(G)} \leq \|f\|_{M_{d+1}(G)}$, mert

$$f(t_1...t_d) = f(1 \cdot t_1...t_d) = \xi_1(1)\xi_2(t_1)...\xi_{d+1}(t_d) = \xi_1'(t_1)\xi_2'(t_2)...\xi_d'(t_d).$$

5.8. Állítás. Minden c, d-re $B_c(G) \subset M_d(G)$ és $\|f\|_{B_c(G)} \leq c^d \|f\|_{M_d(G)}$ A $B_c(G)$ és $M_d(G)$ terek között a következő tartalmazás áll fenn:

Bizonyítás. Legyen $f \in B_c(G)$. Ennek $f(t) = (\pi(t)x|y)$ egy $B_c(G)$-beli előállítása. A $\xi_d(t_d)(\lambda) = \lambda\pi(t_d)x$, $\xi_i(t_i) = \pi(t_i)$ $(1 < i < d)$, $\xi_1(t_1)z = (\pi(t_1)z|y)$ választással f egy $M_d(G)$-beli előállítását kapjuk, és

$$\prod_i \sup_t \|\xi_i(t)\| \leq |\pi|^d \|x\| \|y\|.$$

Mivel minden $B_1(G)$ beli előállításhoz találtunk egy $M_d(G)$-belit amire teljesül ez az egyenlőtlenség, ezért az

$$\inf_{\xi_1,\ldots,\xi_d} \left\{ \prod \sup_{t_i} \|\xi_1(t_i)\| \right\} \leq c^d \inf_{\pi,x,y} \|x\| \|y\|$$

is teljesülni fog. □

5.9. Definíció. $T_p(G)$ jelöli azon $f : G \to \mathbb{C}$ függvények halmazát, amik előállnak $f(t_1 t_2) = \alpha(t_1, t_2) + \beta(t_1, t_2)$ alakban, ahol α és β olyanok, hogy minden t-re az α_t és β^t szekciófüggvények $l^p(G)$-beliek.

$T_p(G)$ Banach-tér a

$$\|f\|_{T_p(G)} = \inf_{\alpha,\beta} \left\{ \sup_s \|\alpha_s\|_p + \sup_t \|\beta^t\|_p \right\}$$

normával ellátva.

5.10. Tétel. *Ha egy G diszkrét csoport uniterizálható, akkor $T_1(G) \subset B_1(G)$.*

Bizonyítás. Rögzítsük egy $f \in T_1(G)$ függvényt. Ekkor léteznek olyan α, β függvények, és C konstans, hogy

$$f(s^{-1}t) = \alpha(t, s) + \beta(t, s),$$

és

$$\sup_s \|\alpha_s\|_1 \leq C \qquad \sup_t \|\beta^t\|_1 \leq C. \tag{4}$$

Definiáljuk az $A, B, \rho(f) : l^\infty(G) \to l^\infty(G)$ lineáris operátorokat a

$$Ag(t) = \sum_s \alpha(t, s) g(s),$$
$$Bg(t) = \sum_s \beta(t, s) g(s),$$
$$\rho(f) g(t) = \sum_s f(s^{-1}t) g(s)$$

képlettel.
Ekkor $A + B = \rho(f)$, és $\rho(f)g$ nem más mint $g * \hat{f}$, ahol $\hat{f}(t) = f(t^{-1})$. Ezért minden $t \in G$-re teljesül, hogy $\lambda(t)\rho(f) = \rho(f)\lambda(t)$. Tehát

$$0 = [\rho(f), \lambda(t)] = [A, \lambda(t)] + [B, \lambda(t)].$$

Legyen $D(a) = [A_2, a]$. A (4) feltétel ekvivalens azzal, hogy

$$\|A\|_{\mathcal{B}(l^1(G))} \leq C, \quad \|B\|_{\mathcal{B}(l^\infty(G))} \leq C,$$

ezért minden $t \in G$-re

$$\|D(\lambda(t))\|_{\mathcal{B}(l^1)} < 2C, \quad \|D(\lambda(t))\|_{\mathcal{B}(l^\infty(G))} < 2C.$$

Az 1.6 Tétel szerint ebből következik, hogy

$$\|D(\lambda(t)\|_{\mathcal{B}(l^2(G)} < 2C. \tag{5}$$

Legyen $H = l^2(G) \oplus l^2(G)$ és definiálja a $\pi : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ leképezést a

$$\pi(t) = \begin{bmatrix} \lambda(t) & D(\lambda(t)) \\ 0 & \lambda(t) \end{bmatrix}$$

képlet. Ez G-nek egy reprezentációja, mert $\lambda(t)\lambda(s) = \lambda(ts)$ és

$$D(\lambda(t)\lambda(s)) = B\lambda(t)\lambda(s) - \lambda(t)\lambda(s)B = D(\lambda(t))\lambda(s) - \lambda(t)D(\lambda(s)).$$

A $x = (0, \delta_1), y = (\delta_1, 0)$ választással

$$\begin{aligned}(\pi(t)x|y) &= ((D(\lambda(t)\delta_1, \lambda(t)\delta_1)|(\delta_1, 0)) \\ &= (D(\lambda(t)\delta_1|\delta_1) \\ &= ((B\lambda(t) - \lambda(t)B)\delta_1|\delta_1) \\ &= \beta(1, t) - \beta(t^{-1}, 1).\end{aligned}$$

$$f(t) = \alpha(1, t) + \beta(1, t) = [\alpha(1, t) + \beta(t^{-1}, 1)] + [\beta(1, t) - \beta(t^{-1}, 1)]$$

Az összeg első tagja $l^1(G) \subset B_1(G)$-beli és a π reprezentációra, (5) miatt $|\pi| \leq 2C + 1$ teljesül, és így (5.5) miatt az összeg második tagja $B_{2C+1}(G) = B_1(G)$-beli. □

A fenti tétel segítségével lehet példát adni olyan csoportra, ami nem uniterizálható. Ez a következő állításon alapszik:

5.11. Állítás. Legyen F_∞ a $(t_n)_{n=1}^\infty$ elemek által generált szabad csoport. Egy t csoportelem hossza legyen az őt reprezentáló (egyértelmű) redukált szó hossza. Ekkor az 1-hosszú szavak f indikátor függvénye $T_1(F_\infty) \setminus B_1(F_\infty)$-beli.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f \in B_1(F_\infty)$. Ekkor létezik egy $\pi : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ unitér reprezentáció és $x, y \in H$ vektorok, hogy

$$f(t) = (\pi(t)x|y) = 1 \quad (|t| = 1)$$

$$f(t) = (\pi(t)x|y) = 0 \quad (|t| \neq 1).$$

Jelölje a_j a $\pi(t_j)$ valós részét, vagyis $a_j = \frac{1}{2}\pi(t_j) + \pi(t_j)^*$. Minden $n \in \mathbb{N}$-re definiáljuk az

$$R_n = \prod_{j=1}^{n} \left(I + \frac{i}{\sqrt{n}} a_j \right)$$

operátort. Minden j-re $\|a_j\| \leq 1$, és

$$\left\| (I + \frac{i}{\sqrt{n}} a_j \right\|^2 = \left\| I + \frac{a_j^2}{n} \right\| \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right),$$

ezért minden n-re

$$\|R_n\| \leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq e.$$

Ugyanakkor a szorzatot kibontva

$$R_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{i}{2\sqrt{n}} (\pi(t_j) + \pi(t_j)^*) + \sum_{1 < |t| \leq n} \psi(t)\pi(t).$$

Tehát

$$(Rx|y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{i}{2\sqrt{n}} ((\pi(t_j) + \pi(t_j)^*)x|y) = \frac{i}{2\sqrt{n}} 2n = i\sqrt{n},$$

és ebből a

$$\lim_n \frac{i}{\sqrt{n}} = \lim_n (R_n x|y) \leq \lim_n \|R_n\| \|x\| \|y\| \leq e\|x\| \|y\|$$

ellentmondást kapjuk.

Legyen $A = \{(s,t) : |st| = 1, \quad |s| > |t|\}$ és $B = \{(s,t) : |st| = 1, \quad |t| > |s|\}$. Az $\alpha = \chi_A$ és $\beta = \chi_B$ függvények mutatják, hogy $f \in T_1(F_\infty)$. $\square$

5.12. Következmény. Ha a G lokálisan kompakt tartalmaz egy legalább 2 elem által generált szabad csoportot zárt részcsoportként, akkor G nem uniterizálható.

5.1. A Diximer tétel megfordítása

5.13. Tétel. *([9]) Egy G lokálisan kompakt csoport $B_1(G)$ Fourier-Stieltjes algebrája 2-kotípusú, vagyis létezik egy C konstans, hogy minden véges $(x_i)_{i=0}^n$ vektorsorozatra teljesül, hogy*

$$\left(\sum \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{2^n} \left\| \sum_{\epsilon,i} \epsilon(i) x_i \right\| = C \,\mathrm{average}_{\mp}(\|x_i\|),$$

ahol ϵ az $\{1,..,n\} \to \{-1,1\}$ függvényeken fut.

5.14. Tétel. *([8] Theorem 1.12) Legyen G egy diszkrét csoport, $\mathcal{H}$ egy Hilbert-tér és $f : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ függvény. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(i) Létezik egy $\pi : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ korlátos reprezentáció, és $\xi \in \mathcal{B}(H, H_\pi)$, $\eta \in \mathcal{B}(H_\pi, H)$ korlátos operátorok, hogy minden $t \in G$-re $f(t) = \eta\pi(t)\xi$.

(ii) Léteznek K, c konstansok, hogy minden $d \in \mathbb{N}$-re léteznek $(\mathcal{H}_i)_{i=0}^d$ Hilbert-terek, és $(\xi_i)_{i=1}^d$ leképezések, hogy $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_d = H$, $\xi_i : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_{i-1})$, minden t-re $\sup_t \|\xi_i(t)\| \leq c$ és minden $(t_i)_{i=1}^d$-re teljesül, hogy $f(t_1...t_d) = K\xi_1(t_1)...\xi_d(t_d)$.

5.15. Következmény. Ha $f \in \cap_d M_d(G)$ és létezik egy $c > 1$ szám, hogy $\sum_{k=1}^\infty c^{-k} \|f\|_{M_k(G)} \leq \infty$, akkor $f \in B_c(G)$, továbbá teljesül

$$\|f\|_{B_c(G)} \leq |f(1)| + \sum c^{-k} \|f\|_{M_k(G)}.$$

Bizonyítás. □

5.16. Következmény. Legyen $f \in B_1(G)$ és $d \geq 2$. Ekkor minden $c \geq 2$-re teljesül

$$\|f\|_{B_c(G)} \leq 2\|f\|_{M_d(G)} + 2c^{-(d+1)} \|f\|_{B_1(G)}.$$

Bizonyítás. Felhasználva, hogy $d' > d$, $f \in M_d(G)$ esetén $\|f\|_{M_d(G)} \leq \|f\|_{M_{d'}(G)}$, és hogy $|f(1)| \leq \sup_t f(t) \leq \|f\|_{M_d(G)}$:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B_c(G)} &\leq |f(1)| + \sum_{m=1}^{\infty} c^{-m} \|f\|_{M_m(G)} \\
&= |f(1)| + \sum_{m=1}^{d} c^{-m} \|f\|_{M_m(G)} + \sum_{m=d+1}^{\infty} c^{-m} \|f\|_{M_m(G)} \\
&\leq \|f\|_{M_d(G)} \left(1 + \sum_{m=1}^{d} c^{-m}\right) + \sum_{m=d+1}^{\infty} c^{-m} \|f\|_{B_1(G)} \\
&\leq 2\|f\|_{M_d(G)} + 2c^{-(d+1)} \|f\|_{B_1(G)}.
\end{aligned}$$

□

5.17. Lemma. Ha G diszkrét csoport és $f \in \mathbb{C}[G]$ véges tartójú függvény, akkor $\|f\|_{M_2(G)} \leq \|f\|_{T_2(G)}$.

Bizonyítás. Rögzítsük f egy $T_2(G)$-beli $f(t_1t_2) = \alpha(t_1,t_2)+\beta(t_1,t_2)$ előállítását. Tekintsük az

$$\begin{aligned}
\xi_2 : G \to B(\mathbb{C}, l^2(G)), &\quad t \mapsto \left(\lambda \mapsto \lambda \sum_{t_2} \alpha(t,t_2)\delta_{t_2}\right) \\
\xi_1 : G \to B(l^2(G), \mathbb{C}), &\quad t \mapsto \left(g \mapsto (g|\delta_{t_2})_{l^2(G)}\right) \\
\eta_2 : G \to B(\mathbb{C}, l^2(G)), &\quad t \mapsto \left(\lambda \mapsto \lambda \sum_{t_2} \overline{\beta(t_1,t)}\delta_{t_1}\right) \\
\eta_1 : G \to B(l^2(G), \mathbb{C}), &\quad t \mapsto \left(g \mapsto (\delta_{t_1}|g)_{l^2(G)}\right)
\end{aligned}$$

leképezéseket. Ezekre teljesül, hogy $\xi_1(t_1)\xi_2(t_2) = \alpha(t_1,t_2)$ és $\eta_1(t_1)\eta_2(t_2) = \beta(t_1,t_2)$. Továbbá

$$\sup_{t_1}\|\xi_1(t_1)\| \sup_{t_2}\|\xi_2(t_2)\| = \sup_{t_1}\Big\|\sum_{t_2} \alpha(t_1,t_2)\delta_{t_2}\Big\|_{l^2(G)}$$

$$\sup_{t_1}\|\eta_1(t)\| \sup_{t_2}\|\eta_2(t_2)\| = \sup_{t_1}\Big\|\sum_{t_2} \beta(t_1,t_2)\delta_{t_2}\Big\|_{l^2(G)}$$

Tehát f minden α,β $T_2(G)$-beli előállításra találtunk egy $M_2(G)$-beli ξ_1,ξ_2 előállítást, aminek a normája kisebbegyenlő, tehát az ilyenek infimuma is kisebegyenlő lesz. □

5.18. Tétel. *Ha G diszkrét csoport és $B_1(G) = M_2(G)$ akkor G amenábilis.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $B_1(G) = M_2(G)$.
Az 5.8 Állítás szerint az $Id : B_1(G) \to M_2(G)$ folytonos leképezés Banach-terek között, és a feltevésünk szerint invertálható is, tehát a lineáris homeomorfizmus tétel szerint az inverze is folytonos. Létezik tehát egy K konstans, hogy minden $f \in B_1(G)$-re

$$\|f\|_{B_1(G)} \leq K\|f\|_{M_2(G)}.$$

5.19. Lemma. Ha $f \in \mathbb{C}[G]$ egy véges tartójú függvény, akkor léteznek C_1, C_2 konstansok, hogy

$$\|f\|_2 \leq C_1 \operatorname{average}_{\mp}(\|f\|_{B_1(G)})$$

$$\operatorname{average}_{\mp}(\|f\|_{M_2(G)} \leq C_2\Big\|\sum |f(t)|^2\lambda(t)\Big\|^{\frac{1}{2}}_{B(l^2(G))}$$

A lemmából következik, hogy

$$\|f\|_2^2 \leq (C_1KC_2)^2\Big\|\sum |f(t)|^2\lambda(t)\Big\|^{\frac{1}{2}}_{B(l^2(G))}$$

amiből A 4.23 Tétel alapján következik hogy G amenábilis.

A lemma első egyenlőtlensége következik az 5.13 tételből. Az 5.17 Lemma szerint

$$\|f\|_{M_2(G)} \leq \|f\|_{T_2(G)}$$

és minden ϵ előjelsorozatra $\|f\|_{T_2(G)} = \|\epsilon f\|_{T_2(G)}$, ezért

$$\text{average}_{\mp}(\|f\|_{M_2(G)} \leq \|f\|_{T_2(G)}$$

is teljesül.

Elég tehát azt belátni, hogy

$$\|f\|_{T_2(G)} \leq C_2 \Big\| \sum |f(t)|^2 \lambda(t) \Big\|_{B(l^2(G))}^{\frac{1}{2}}$$

Ha

$$\Big\| \sum |f(t)|^2 \lambda(t) \Big\|_{B(l^2(G))} < 1,$$

akkor $\|f\|_2 \leq 1$, mert

$$\|\lambda(f)\|_{B(l^2(G))} \geq \|\lambda(f)\|_2 = \|f\|_2.$$

Az $\alpha(t_1, t_2) = f(t_1 t_2)$, $\beta(t_1, t_2) = 0$ választással azt kapjuk, hogy

$$\|f\|_{T_2} \leq \|f\|_2 \leq 1.$$

A norma abszolút homogenitása miatt ebből már következik az állítás. □

5.20. Megjegyzés. A $B_1(G) = M_2(G)$ feltételből valójában csak annyit használtunk ki, hogy minden $f \in \mathbb{C}[G]$-re teljesül $\|f\|_{B_1(G)} \leq K\|f\|_{M_2(G)}$, és ez a gyengébb feltétel már elég ahhoz, hogy G amenábilis legyen.

5.21. Tétel. *Egy G egy diszkrét csoportra az alábbiak ekvivalensek.*

- (i) *G amenábilis,*
- (ii) *Léteznek K és $\alpha < 3$ konstansok, hogy G minden korlátos $\pi : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ reprezentációjára teljesül, hogy létezik egy olyan $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ invertálható operátor, hogy $\|T^{-1}\|\|T\| \leq K|\pi|^{\alpha}$, és $S^{-1}\pi(.)S$ unitér reprezentáció.*
- (iii) *Léteznek K és $\alpha < 3$ konstansok, hogy minden $c > 1$-re $B_c(G) \subset B_1(G)$ és minden $f \in B_c(G)$-re teljesül $\|f\|_{B_1(G)} \leq Kc^{\alpha}\|f\|_{B_c(G)}$.*

Bizonyítás. $((i) \to (ii))$ Az 5.2 Tétel szerint G amenábilis csoportra (ii) teljesül $K = 1$, $\alpha = 2$ választással.

$((ii) \to (iii))$ Az 5.5 Megjegyzés alapján

$$\|f\|_{B_1(G)} \leq \|T^{-1}\|\|T\|\|f\|_{B_c(G)} \leq K|\pi|^{\alpha}\|f\|_{B_c(G)}.$$

((iii) $\to$ (i)) A (iii) feltételből és az 5.16 Következményből $d = 2$ választással látszik, hogy

$$\begin{aligned}\|f\|_{B_1(G)} &\le Kc^\alpha \|f\|_{B_c(G)} \\ &\le Kc^\alpha \|f\|_{M_2(G)} + 2Kc^{\alpha-3}\|f\|_{B_1(G)}\end{aligned}$$

A $c = K^{\frac{1}{3-\alpha}}$ választással $2Kc^{\alpha-3} = \frac{1}{2}$, és akkor

$$\frac{1}{2}\|f\|_{B_1G} \le Kc^\alpha \|f\|_{M_2G}.$$

Az 5.20 Megjegyzés alapján ebből már következik, hogy G amenábilis. $\square$

Hivatkozások

[1] W. Rudin, Funtional Analysis. (2nd ed.) McGraw-Hill, New York, 1991.

[2] G. B. Folland, A Course in Abstract Harmonic Analysis. CRC Press, 1995.

[3] A. Zygmund, Trigonometrical Series, 1935.

[4] N. Dunford; J. T. Schwartz, (1958), Linear operators, Parts I and II, Wiley-Interscience.

[5] V. Runde, Lectures on Amenability. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.

[6] Similarity problems and completely bounded maps. Second, Expanded Edition. Springer Lecture Notes 1618 (2001)

[7] G. Pisier, Are Unitarizable Groups Amenable? arXiv:math/0405282 [math.OA]

[8] G. Pisier, The similarity degree of an operator algebra. St. Petersburg Math. J. 10 (1999) 103-146

[9] N. Tomczak-Jaegermann. The moduli of convexity and smoothness and the Rademacher averages of trace class Sp. Studia Math. 50 (1974) 163–182.

[10] J. Dixmier. Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications Acta Sci. Math. Szeged 12 (1950) 213-227.