

A BSc-képzés szakdolgozati témái

ELTE TTK, Matematikai Intézet

2010/2011

1. Geometriai Tanszék

G1. Szabadon választható téma

Témavezető: A tanszék bármelyik oktatója, vagy (a tanszékvezető által jóváhagyott) külső szakember.

A téma rövid leírása: Ha egy hallgató tetszőleges geometriai téma iránt érdeklődik, akkor témavezetőnek választhatja azt a szakembert, aki ehhez ért, és ebben segítséget tud neki nyújtani.

Ajánlott irodalom: a hallgató és a témavezető megállapodása alapján.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

G2. Görbék és felületek geometriai vizsgálata a Mathematica programmal

Témavezető: Csikós Balázs

A téma rövid leírása: A Mathematica program egy szimbolikus számítások elvégzésére alkalmas program, mely kiváló grafikus lehetőségekkel is rendelkezik, és a pontosan nem kiszámítható feladatokra jó numerikus közelítést tud adni. Használatával a görbék és felületek analitikus vizsgálatakor a hangsúly a fárasztó számolások elvégzéséről áttevődik a különféle fogalmak és konstrukciók geometriai tartalmának és viselkedésének megértésére, az eredmények elemzésére.

Ajánlott irodalom: A. Gray, E. Abbena, S. Salamon: *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

G3. Geometriai szélsőérték-feladatok

Témavezető: Csikós Balázs

A téma rövid leírása: A geometriában gyakran találkozunk optimalizációs feladatokkal. Ezek közt nagyon sok már megoldott klasszikus probléma van (izoperimetrikus, izodiametrális egyenlőtlenségek, stb.), és vannak régóta megválaszolatlan kérdések is. Ugyanakkor felvethetők új problémák is, melyeket eddig keveset vizsgáltak.

Ajánlott irodalom: D. O. Skljarszkij, N. N. Csencov, I. M. Jaglom: *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből. II. rész, 2. kötet. Geometriai egyenlőtlenségek és szélsőérték-feladatok*, D. S. Mitrinović, J. E. Pečarič, A. M. Fink: *Recent Advances in Geometric Inequalities* (Mathematics and its Applications), Kluwer Academic Publishers.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

G4. Dinamikus geometriai programok (Geogebra, Euklides, Cabri, stb.) használata a geometriában

Témavezető: Csikós Balázs

A téma rövid leírása: A dinamikus geometriai programok hasznos segédeszközt jelentenek bizonyos típusú geometriai problémák megoldásában. Használatuk módszertanát érdemes minden középiskolai matematikatanárnak elsajátítani és továbbadni. Jól használhatja e programokat mindenki, akinek valamilyen geometriai problémát kell megoldania. A szakdolgozat célja annak bemutatása konkrét példákon keresztül, hogyan lehet e programokat a probléma elemzésére, sejtések megfogalmazására, mértani helyek megsejtésére használni.

Ajánlott irodalom: versenyfeladatok gyűjteményei, Középiskolai Matematikai Lapok.

Ajánlott szakirányok: elsősorban tanári.

G5. Geometriai egyenlőtlenségek a síkon és a gömbfelületen

Témavezető: Kertész Gábor

A téma rövid leírása: A feladat néhány egyszerűen megfogalmazható, de nem feltétlen könnyen bizonyítható egyenlőtlenség, mint a háromszöglemez pontjának csúcsoktól és oldalegyenesektől mért távolságai közti Erdős–Mordell egyenlőtlenség körbejárása. Lehetőség van még egyszerű, de a Hajós-könyvön túlmutató gömbi egyenlőtlenségek vizsgálatára is. Hogyan változik a csuklók-kal összekötött rudakból álló négyszög területe a síkon és a gömbfelületen? Analitikus és más bizonyítások.

Ajánlott irodalom: Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Skljarszkij, Csencov, Jaglom: *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből*.

Ajánlott szakirányok: tanári.

G6. Tengelyes tükrözések az euklideszi és a gömbi geometriában

Témavezető: Kertész Gábor

A téma rövid leírása: Ismert, hogy a tengelyes tükrözések generálják a sík és a gömbfelület egybevágósági csoportját, de ún. tükrözésgeometriai eszközökkel sajátosan kezelhetők a sugársorok és a ciklusok (itt kör és egyenes) is. Segítségükkel bebizonyítjuk azt is, az adott oldalhosszúságú sokszögek halmazában, ha az nem üres és gömbön a terület kisebb, mint π , egybevágóság erejéig pontosan egy körbe írható van.

Ajánlott irodalom: Hajós György: *Bevezetés a geometriába*.

Ajánlott szakirányok: tanári.

G7. Szimmetrikus sudoku-megoldások

Témavezető: Kiss György

A téma rövid leírása: Ha egy sudoku-megoldástól a szokásos tulajdonságokon kívül – minden sorban, minden oszlopban és minden kis négyzetben forduljon elő mind a 9 számjegy – még néhány továbbit is megkövetelünk, akkor kapjuk az ún. szimmetrikus megoldásokat. Ezek szorosan kapcsolódnak bizonyos perfekt kódokhoz és véges geometriákhoz.

Ajánlott irodalom: Bailey, Cameron, Connelly: *Sudoku, gerechte designs, resolutions, affine space, spreads, reguli and Hamming codes*, kézirat.

Ajánlott szakirányok: matematikus, alkalmazott matematikus.

G8. Focibajnokságok és véges geometriák

Témavezető: Kiss György

A téma rövid leírása: Egy körmérkőzéses focibajnokság fordulóinak összeállítása sok csapat esetén nem egyszerű. Ennek a problémának sok szép geometriai megoldása van. Ezek közül néhány leírása a dolgozat témája.

Ajánlott irodalom: Kiss, Szőnyi: *Véges geometriák*, 12. fejezet, Wallis: *One-Factorizations*.

Ajánlott szakirányok: mindegyik.

G9. Baricentrikus koordináták

Témavezető: Lakos Gyula

A téma rövid leírása: A baricentrikus koordináták a háromszög geometriájának leghatékonyabb analitikus eszközei. Segítségükkel a háromszög nevezetes alakzatai mind jól leírhatóak; a háromszög geometriájának megnyugtatóan rendszeres kezelésére van mód.

Ajánlott irodalom: Reiman István: *A geometria és határterületei*, 2., 3. fejezet.

Ajánlott szakirányok: tanári.

G10. Körök analitikus geometriája

Témavezető: Lakos Gyula

A téma rövid leírása: A körtartó (konform) leképezések nagyon szép témakör, és természetesen csatlakozik az $O(3, 1)$ csoport megértéséhez.

Ajánlott irodalom: H. S. M. Coxeter: *A geometriák alapjai*, 6. fejezet, a nem analitikus tárgyaláshoz, az alapfogalmak bemutatása végett.

Ajánlott szakirányok: matematikus, tanári.

G11. Geometriai módszerek a végtelen csoportok elméletében

Témavezető: Moussong Gábor

A téma rövid leírása: A csoportelmélet legtöbb eszköze csak a véges csoportok esetében működik hatékonyan. A végtelen csoportok megértéséhez különféle geometriai és topológiai módszerek állnak rendelkezésünkre: izometrikus csoportok, Cayley-gráf geometriája és aszimptotikus viselkedése, görbületi feltételek.

Ajánlott irodalom: M. Kapovich: *Lectures on Geometric Group Theory*, M. Bridson, A. Haefliger: *Metric Spaces of Non-positive Curvature*.

Ajánlott szakirányok: matematikus.

G12. Coxeter-csoportok

Témavezető: Moussong Gábor

A téma rövid leírása: A diszkrét transzformációcsoportok között a tükrözésekkel generált csoportokat, illetve ezek absztrakt megfelelőit, a Coxeter-csoportokat ismerjük a legalaposabban. A szakdolgozat felderítheti a geometria és az algebra között ebben a témában különösen szépen megmutatkozó összjátékot.

Ajánlott irodalom: M. W. Davis: *The geometry and topology of Coxeter groups*, H. Hiller: *The geometry of Coxeter groups*.

Ajánlott szakirányok: matematikus.

G13. Hiperbolikus geometria

Témavezető: Moussong Gábor

A téma rövid leírása: A Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria bőségesen kínál felderítésre váró érdekes témákat úgy a modern, magasabb dimenziós vonatkozások területén (pl. transzformációcsoportok, térformák leírása), mint a klasszikus síkgeometriai kérdésekben (pl. a területszámítás elemi tárgyalása, háromszögek geometriája, trigonometria, szerkesztések).

Ajánlott irodalom: E. B. Vinberg: *Geometry II.* (Springer EMS Vol. 29.), Szász P.: *Bevezetés a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriába*, Reiman I.: *A geometria és határterületei.*

Ajánlott szakirányok: matematikus, tanári.

G14. Gömbi geometria.

Témavezető: Moussong Gábor

A téma rövid leírása: A nem-euklideszi geometriák közül a legszemléletesebb és legismertebb a gömbi geometria. Kísérletezni lehet bármilyen ismert síkgeometriai témakör átültetésével a gömbi geometriába (pl. háromszögek geometriája, szerkesztések, kúpszeletek, izoperimetrikus problémakör).

Ajánlott irodalom: Csikós B.: *Gömbi geometria*, Moussong G.: *Izoperimetrikus egyenlőtlenségek és gömbi geometria.*

Ajánlott szakirányok: tanári.

G15. Poliéderek, mozaikok

Témavezető: Moussong Gábor

A téma rövid leírása: A jól ismert szabályos poliédereken kívül jó néhány érdekes poliédertípus vár feltérképezésre és osztályozásra: félig szabályos, uniform, csillag-, Johnson-, Catalan-, stb. poliéderek. Rokon téma a mozaikok világa: a periodikus mozaikok osztályozása, nevezetes nem-periodikus mozaikok.

Ajánlott irodalom: D. Wells: *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry.*

Ajánlott szakirányok: tanári.

G16. Érdekes síkgörbék

Témavezető: Moussong Gábor

A téma rövid leírása: A geometria hosszú története során változatos céllal és igen nagy számban vizsgáltak különféle síkbeli görbéket. Ezek összegyűjtése, rejtett összefüggéseik feltárása lehet a szakdolgozat témája.

Ajánlott irodalom: Reiman I.: *A geometria és határterületei*, Pelikán J.: *Klasszikus algebrai görbék*, D. Wells: *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry.*

Ajánlott szakirányok: tanári.

G17. Kombinatorikus geometriai problémák

Témavezető: Naszódi Márton

A téma rövid leírása: Különböző elemi módszereken alapuló síkgeometriai eredményeket lehet bemutatni, illetve nyitott kérdéseket vizsgálni. Néhány

példa: Erdős–Szekeres-tételkör, azaz konvex n -szög létezése megfelelően nagy pontthalmazban, gráf síkbarajzolásában az élek metszeteinek száma, körlapok családjában páronként diszjunkt elemkből álló részcsalád keresése.

Ajánlott irodalom: J. Matoušek: *Lectures on Discrete Geometry*, Pach J.: *Combinatorial Geometry*

Ajánlott szakirányok: tanári.

G18. Normált terek geometriája

Témavezető: Naszódi Márton

A téma rövid leírása: Az euklideszi távolságot a síkon (általánosabban \mathbf{R}^n -ben) kicserélhetjük más távolságfüggvényekre, amelyek az euklideszitől különböző érdekes geometriákhoz vezetnek. Lehet például vizsgálni, hogy az euklideszi síkbeli trigonometria hogyan vihető át normált síkba, mi a merőlegesség fogalma, mik az állandó szélességű halmazok, stb.

Ajánlott irodalom: A. C. Thompson: *Minkowski Geometry*

Ajánlott szakirányok: matematikus, tanári, alkalmazott matematikus.

G19. Konvex geometriai módszerek

Témavezető: Naszódi Márton

A téma rövid leírása: A magasdimenziós konvex testek vizsgálatában alkalmazott valószínűségi módszert lehetne bemutatni a Dvoretzky-tétel egy bizonyításán keresztül. E tétel szerint tetszőleges k természetes számhoz van olyan n természetes szám, hogy minden n -dimenziós konvex testnek van olyan k -dimenziós metszete, amely „nagyon hasonlít” az euklideszi gömbre.

Ajánlott irodalom: K. Ball: *Introduction to Modern Convex geometry*, J. Matoušek: *Lectures on Discrete Geometry*

Ajánlott szakirányok: matematikus.

G20. Egybevágóságok

Témavezető: Szeghy Dávid

A téma rövid leírása: Az egybevágóságok euklideszi osztályozásának mintájára a gömbi és a hiperbolikus geometria egybevágóságait tekintjük át.

Ajánlott irodalom: H. S. M. Coxeter: *A geometriák alapjai*, M. Berger: *Geometry*, E. B. Vinberg: *Geometry II*. (Springer EMS Vol. 29.)

Ajánlott szakirányok: matematikus, tanári.

G21. Affin transzformációk

Témavezető: Szeghy Dávid

A téma rövid leírása: Az affinitások áttekintése és felhasználása sík- és térgeometriai kérdésekben.

Ajánlott irodalom: H. S. M. Coxeter: *A geometriák alapjai*, M. Berger: *Geometry*.

Ajánlott szakirányok: tanári.

G22. Állandó görbületű zárt felületek

Témavezető: Szeghy Dávid

A téma rövid leírása: Áttekintjük a zárt felületek topológiai osztályozását és felderítjük, melyiken milyen állandó görbületű geometria létezik.

Ajánlott irodalom: E. B. Vinberg: *Geometry II.* (Springer EMS Vol. 29.)

Ajánlott szakirányok: matematikus, tanári.

G23. Projektív geometriai módszerek a Cayley–Klein-modellben

Témavezető: Verhóczy László

A téma rövid leírása: A síkbeli hiperbolikus geometria legismertebb modellje a Cayley-Klein-féle körmodell. Alapvető projektív geometriai ismereteket alkalmazva ebben a modellben már megoldhatóak olyan problémák, mint például egy szakasz felezőmerőlegesének vagy két egyenes korrespondáló pontjainak a megszerkesztése. Azt is igazolni lehet, hogy a modellbeli körök, paraciklusok és hiperciklusok euklideszi értelemben ellipszisek.

Ajánlott irodalom: Reiman István: *A geometria és határterületei.*

Ajánlott szakirányok: tanári.

G24. Trigonometriai összefüggések a Cayley–Klein-modellben

Témavezető: Verhóczy László

A téma rövid leírása: A Cayley-Klein-féle modellben viszonylag könnyen igazolni lehet a hiperbolikus trigonometria olyan alapvető eredményeit, mint a szinusztétel és a két koszinusztétel. Ezen kívül le lehet vezetni a paralelszögre, valamint a kör kerületére és területére vonatkozó összefüggéseket is.

Ajánlott irodalom: Reiman István: *A geometria és határterületei.*

Ajánlott szakirányok: tanári.

G25. Másodrendű görbesorok a projektív síkon.

Témavezető: Verhóczy László

A téma rövid leírása: Mint ismeretes, a projektív síkon egy másodrendű görbét öt független adattal (például három ponttal és közülük kettőben az érintővel) lehet egyértelműen leírni. Alapvető kérdés, hogy az ilyen koordináta-adatokból

miként lehet egyszerően kiszámítani a másodrendű görbe egyenletét. Ez a probléma jól kezelhető a másodrendű görbesorok alkalmazásával.

Ajánlott irodalom: I. Faux and M. Pratt: *Computational geometry for design and manufacture*.

Ajánlott szakirányok: tanári.

G26. Geometriai vetítések analitikus leírása

Témavezető: Verhóczy László

A téma rövid leírása: A számítógépes grafikában a térbeli alakzatok párhuzamos vagy centrális vetületeinek előállításakor különféle geometriai transzformációkat alkalmaznak. A cél ezen transzformációk részletes leírása és néhány ábrázoló geometriai eredmény analitikus igazolása.

Ajánlott irodalom: Foley, van Dam, Feiner, Hughes: *Computer graphics, principles and practice*, Szirmay-Kalos László: *Számítógépes grafika*.

Ajánlott szakirányok: tanári, alkalmazott matematikus.

G27. Vonalfelületek és minimálfelületek

Témavezető: Verhóczy László

A téma rövid leírása: A klasszikus differenciálgeometria gyakorlatban is alkalmazható eredményei közé sorolhatjuk a síkba lefejthető vonalfelületek és a minimálfelületek jellemzését. A cél egy olyan könyvfejezet részletes feldolgozása, amely ezen felülettípusokat tárgyalja.

Ajánlott irodalom: M. do Carmo: *Differential geometry of curves and surfaces*.

Ajánlott szakirányok: alkalmazott matematikus.

G28. A másodrendű felületek affin osztályozása

Témavezető: Verhóczy László

A téma rövid leírása: Ha megfelelő koordináta-transzformációt alkalmazunk az euklideszi térben, akkor egy másodrendű felület egyenlete kanonikus alakra hozható. Ez a módszer lehetőséget nyújt a másodrendű felületek affin osztályozására. Emellett célszerű még tárgyalni a síkba nem lefejthető másodrendű vonalfelületek (az egyikpenyű hiperboloid és a hiperbolikus paraboloid) geometriai tulajdonságait.

Ajánlott irodalom: Hajós György: *Bevezetés a geometriába*.

Ajánlott szakirányok: tanári.