A matematikában vizsgált objektumok általában halmazok, melyek el vannak látva valamilyen struktúrával. A struktúra sokféle lehet. Lehet például egy művelet a halmazon, egy rögzített reláció, részhalmazok egy kitüntetett rendszere, esetleg ilyenek kombinációja. Ahhoz, hogy a vizsgált objektumokról lehessen valamit mondani, fel kell tenni, hogy a struktúrát megadó elemek eleget tesznek bizonyos alaptulajdonságoknak, *axiómáknak*. A struktúra összes további tulajdonságát az axiómákból kiindulva, a logika szabályait felhasználva kell levezetni.

Az euklideszi geometriát ugyanezen séma szerint lehet felépíteni. A geometria volt az első területe a matematikának, ahol az axiomatikus módszer Euklidesz munkássága nyomán megjelent. Euklidesz (i.e. 300 körül) *Sztoikhea (Elemek)* c. műve a geometria axiomatikus alapokra helyezéséről kiemelkedő szellemi alkotás, de a mai matematikai elvárásoknak Euklidesz axiómarendszere nem tesz eleget. A geometria axiomatikus megalapozásának első modern szemléletű felülvizsgálata Hilbert (1862-1943) nevéhez fűződik, aki ezirányú kutatásainak eredményeit a *Die Grundlagen der Geometrie* c. művében összegezte. Az alábbiakban az euklideszi tér Hilbert -féle axiómarendszerét ismertetjük.

Az euklideszi tér Hilbert-féle axiómarendszere.

Azt mondjuk, hogy az X halmaz el van látva egy euklideszi tér struktúrával, ha adottak rajta az alábbiakban leírt $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$, R és $\equiv$ struktúraelemek, melyek eleget tesznek a felsorolt axiómáknak.

(a) $\mathcal{E} \subset P(X)$ részhalmazrendszer, melynek elemeit *egyeneseknek* fogjuk hívni.

(b) $\mathcal{S} \subset P(X)$ részhalmazrendszer, melynek elemeit *síkoknak* fogjuk hívni.

$\mathcal{E}$ és $\mathcal{S}$ elemeire teljesülniük kell az alábbi *illeszkedési axiómáknak*:

I_1. Minden $e \in \mathcal{E}$ tartalmaz legalább két pontot.

I_2. Bármely két különböző $P, Q \in X$ ponthoz létezik egyértelműen egy $e \in \mathcal{E}$ egyenes, melyre $\{P, Q\} \subset e$.

I_3. Minden $S \in \mathcal{S}$ síknak van három olyan pontja, mely nincs rajta egy egyenesen.

I_4. Ha a $P, Q, R \in X$ pontokhoz nem létezik olyan $e \in \mathcal{E}$ egyenes, mely mindhárom pontot tartalmazza, akkor létezik egyértelműen egy $S \in \mathcal{S}$ sík, melyre $\{P, Q, R\} \subset S$.

I_5. Ha $e \in \mathcal{E}$ és $S \in \mathcal{S}$ legalább két pontban metszik egymást, akkor $e \subset S$.

I_6. Ha az $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ síkok metszete nem üres, akkor a metszetnek legalább két pontja van.

I_7. Van X-ben négy olyan pont, melyek nincsenek egy egyenesen és nincsenek egy síkban.

(c) $R \subset X \times X \times X$ egy háromváltozós reláció. $(A, B, C) \in R$ teljesülése esetén azt fogjuk mondani, hogy *B az A és C között van.* Az R relációra teljesülni kell az alábbi *rendezési axiómáknak*:

II_1. $(A, B, C) \in R$ esetén A, B, C egy egyenesen fekvő, különböző pontok és $(C, B, A) \in R$ is fennáll.

II_2. Bármely két különböző $A \neq B$ ponthoz van olyan C pont melyre $(A, B, C) \in R$

II_3. Az $(A, B, C) \in R$, $(B, C, A) \in R$ és $(C, A, B) \in R$ relációk közül legfeljebb az egyik teljesül.

Mielőtt kimondanánk az utolsó rendezési axiómát, definiáljuk az (AB) *nyílt szakaszt*, mint a $\{C \in X \mid (A, C, B) \in R\}$ ponthalmazt.

II_4. (*Pasch-axióma*) Ha $A, B, C \in X$ nincsenek egy egyenesen és $e \in \mathcal{E}$ egy olyan egyenes az A, B, C pontok síkjában, mely nem megy át az A, B, C pontokon, akkor e az (AB), (BC), (CA) szakaszok közül vagy egyiket sem metszi, vagy legalább kettőt metsz közülük.

A rendezési axiómákat követően már bevezethetők az olyan fogalmak, mint a *félegyenes, félsík, féltér, konvex halmaz, konvex burok, szögvonal, szögtartomány, sokszögvonal, sokszögtartomány.*

(d) $\equiv$ egy ekvivalencia-reláció a szakaszok illetve szögtartományok halmazán. Az egymással relációban álló szakaszokat illetve szögtartományokat *kongruenseknek*, vagy *egybevágóknak* nevezzük. Az $\equiv$ relációnak eleget kell tennie az alábbi *egybevágósági axiómáknak.*

III_1. Ha a egy szakasz, e_+ egy O kezdőpontú félegyenes, akkor egyértelműen létezik egy olyan $P \in e_+$ pont, melyre $(OP) \equiv a$.

III_2. Ha $(A,B,C) \in R$ és $(A',B',C') \in R$, valamint $(AB) \equiv (A'B')$ és $(BC) \equiv (B'C')$, akkor $(AC) \equiv (A'C')$.

III_3. Ha α egy konvex szögtartomány, e_+ egy O kezdőpontú félegyenes, S_+ egy félsík, melynek határegyenese az e_+ egyenes, akkor egyértelműen létezik egy olyan O kezdőpontú $f_+ \in S_+$ félegyenes, melyre az $e_+ \cup f_+$ szögvonalhoz tartozó konvex szögtartomány kongruens α-val.

III_4. Ha az ABC és $A'B'C'$ háromszögekre teljesül, hogy $(CA) \equiv (C'A')$ és $(CB) \equiv (C'B')$ továbbá az ABC háromszög C csúcsánál fekvő konvex szögtartomány kongruens az $A'B'C'$ háromszög C' csúcsánál fekvő konvex szögtartománnyal, akkor az ABC háromszög A csúcsánál fekvő konvex szögtartomány is kongruens az $A'B'C'$ háromszög A' csúcsánál fekvő konvex szögtartománnyal.

Az eddig bemutatott három axiómacsoporthoz még két axiómát veszünk hozzá.

Definíció. Az $e \in \mathcal{E}$ egyenes egy $e = e_1 \cup e_2$ felbontását *Dedekind-féle szeletnek* vagy *Dedekind-féle felbontásnak* nevezzük, ha e_1, e_2 nem üres, diszjunkt halmazok, melyekre $A, B \in e_i$ és $(A,C,B) \in R$ esetén $C \in e_i$ is teljesül $(i = 1,2)$.

IV. *Folytonossági axióma.* Minden $e = e_1 \cup e_2$ Dedekind-féle felbontáshoz létezik olyan $P \in e$, $P \neq A \in e_1$, $P \neq B \in e_2$ esetén $(A,P,B) \in R$.

Megjegyezzük, hogy az egybevágósági axiómákat követően csak arra van lehetőségünk, hogy szakaszokat illetve szögtartományokat nagyságuk szerint összehasonlítsunk, nem tudjuk viszont a szakaszok és szögtartományok nagyságát valós számmal mérni. A folytonossági axióma segítségével azonban már bevezethető egy

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

távolságfüggvény a következő tulajdonságokkal:

- $d(A,B) \geq 0$, és egyenlőség csak $A = B$ esetén áll fenn;
- $d(A,B) = d(B,A)$;
- $d(A,B)+d(B,C) \geq d(A,C)$ és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $(A,B,C) \in R$, vagy B egybeesik az A, C pontok valamelyikével;
- $d(A,B) = d(C,D)$ akkor és csak akkor, ha $(AB) \equiv (CD)$.

Hasonlóan megadható egy nemnegatív valós értékeket felvevő *szögmérték* függvény a szögtartományok halmazán azzal a tulajdonsággal, hogy két szögtartomány pontosan akkor egybevágó, ha szögmértékük megegyezik, továbbá, ha egy szögtartományt két szögtartományra bontunk egy csúcsból kiinduló félegyenessel, akkor a szögtartomány szögmértéke a két kisebb szögtartomány mértékének összege.

V. *Párhuzamossági axióma.* Ha S egy sík, $P \in S$ egy pont, $e \subset S$ egy egyenes, $P \notin e$, akkor legfeljebb egy olyan P-n átmenő S-beli egyenes van, mely e-t nem metszi.

Ezzel az euklideszi tér axiómáinak felsorolását befejeztük.

A párhuzamossági axióma jellegét tekintve egy illeszkedési axióma, különválasztásának történeti oka van. Euklidesz úgy gondolta, hogy geometriai rendszere a minket körülvevő fizikai tér pontos leírására szolgál. Axiómarendszerének kialakításakor így fontos szempont volt, hogy axiómáinak teljesüléséhez a fizikai térben ne férhessen kétség. Euklidesz ugyan nem a fent ismertetett axiómákat használta, de nála is volt egy axióma, az ötödik posztulátum, mely lényegében a párhuzamossági axiómával egyenértékű. Kortársai kritizálták Euklideszt az ötödik posztulátum miatt. Az volt a véleményük, hogy az ötödik posztulátum sokkal bonyolultabb, mint a többi axióma, s ezért teljesülése a valós világban nem annyira nyilvánvaló, mint a többi axiómáé illetve posztulátumé. Kétezer éven át több matematikus is megpróbálta az ötödik posztulátumot bebizonyítani a többi axiómából, ám sikertelenül. Ma már tudjuk a sikertelenség okát: A párhuzamossági axióma független a többi axiómától. Akkor is egy konzisztens axiómarendszerhez jutunk, ha a párhuzamossági axióma helyett annak tagadását tekintjük axiómának. Az így módosított axiómarendszernek is van modellje, az úgynevezett *hiperbolikus tér*, mely geometriai szempontból éppoly érdekes és gazdag, mint az euklideszi tér. Ez a döntő felismerés Bolyai Jánosnak (1802-1860) és Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkijnek (1792-1856) köszönhető.

Az $\mathcal{E}, \mathcal{S}, R, \equiv$ struktúraelemekkel ellátott X halmazt *abszolút térnek* nevezzük, ha teljesülnek rá az illeszkedési, rendezési, egybevágósági és folytonossági axiómák. Egy abszolút tér lehet euklideszi vagy hiperbolikus attól függően, hogy benne a párhuzamossági axióma teljesül-e vagy sem. Az *abszolút geometria* mindazon tételek gyűjteménye, melyek minden abszolút térben igazak.

A középiskolás geometriában tanult tételek mind levezethetők az euklideszi tér axiómáiból, sőt egyes tételek közülük abszolútak. Az abszolút, majd abból elágazva az euklideszi és hiperbolikus geometria axiomatikus felépítése sok munkával járó, időigényes feladat. A "szemléletesen magától értetődő"tételek szigorú axiomatikus bizonyítása néha komoly ötleteket, néha szőrszálhasogató esetszétválasztásokat igényel. Idő hiányában nem fogjuk bejárni az axiomatikus utat. Az érdeklődő olvasó számára az alábbi irodalom olvasását javasoljuk. A legfontosabb abszolút geometriai tételek bizonyítása megtalálható Strohmajer János *A geometria alapjai* c. egyetemi jegyzetében. Az euklideszi geometriának a középiskolás geometriánál bővebb kifejtését találjuk Hajós György *Bevezetés a geometriába* c. könyvében. A hiperbolikus geometria megismeréséhez legtisztább forrás Bolyai János *Appendix*e, melyet feldolgoz Strohmajer János említett jegyzete is.

A továbbiakban a középiskolai geometriára támaszkodva az euklideszi tér vektoraival, a rajtuk értelmezett műveletekkel fogunk foglalkozni.

Vektorok az euklideszi térben

Vektorok bevezetése, összeadás, szorzás számmal.

Tegyük fel, hogy az X halmaz el van látva egy euklideszi tér struktúrával. Ekkor X-ben teljesülnek a középiskolában tanult tételek. Az euklideszi tér vektorainak definíciója, a vektorok összeadása és valós számmal való szorzása középiskolai tananyag. Itt csak néhány megjegyzést és kiegészítést szeretnénk fűzni a középiskolában tanultakhoz.

A vektorokat absztraktan a következő módon lehet bevezetni. A pontpárok $X \times X$ halmazán bevezetünk egy $\sim$ ekvivalencia-relációt úgy, hogy $(A, B) \sim (C, D)$

pontosan akkor teljesül, ha az $\overline{AD}$ és $\overline{BC}$ szakaszok felezőpontja egybeesik. Az (A,B) pontpárnak egyértelműen megfeleltethető az A kezdőpontú, B végpontú irányított szakasz, $\sim$ pontosan azt fejezi ki, hogy a pontpároknak megfelelő irányított szakaszok egyenlő hosszúak és ha ez a hossz nem nulla, akkor azonos irányúak is.

Definíció. A $\sim$ reláció ekvivalencia-osztályait *vektoroknak* nevezzük. A vektorok halmazát jelöljük V-vel. Az (A,B) pár ekvivalencia-osztályára az $\overrightarrow{AB}$ jelölést használjuk.

Az $(A,B)\mapsto\overrightarrow{AB}$ hozzárendelés definiál egy $X\times X\to V$ faktorleképezést, mely a következő tulajdonsággal bír. Minden $O\in X$ pontra az $A\mapsto\overrightarrow{OA}$ leképezés bijekció X és V között. Az $\overrightarrow{OA}$ vektort az A pont *helyvektorának* nevezzük az O kezdőpontból.

Definíció. Egy $\mathbf{a}$ vektor *hosszán* az $|\mathbf{a}|=d(O,A)$ számot értjük, ahol az $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$. Az $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ és $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ $\mathbf{0}$-tól különböző vektorok *szöge* az O kezdőpontú OA és OB félegyenesek által meghatározott konvex szögtartomány mértéke.

Definíció. Ha $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$ két vektor, akkor választhatunk olyan $A,B,C\in X$ pontokat, melyekre $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{BC}$. Könnyen látható, hogy a $\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}$ vektor nem függ az A,B,C pontok választásától. A $\mathbf{c}$ vektort az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok összegének nevezzük.

Az összeadásra teljesülnek az alábbi azonosságok:

- $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (asszociativitás);
- Létezik egy olyan $\mathbf{0}$ vektor, nevezetesen $\mathbf{0}=\overrightarrow{AA}$, melyra $\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$ tetszőleges $\mathbf{a}\in V$ esetén;
- Minden $\mathbf{a}$ vektorhoz létezik egy $-\mathbf{a}\in V$ vektor, melyre $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(-\mathbf{a})+\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

Ezt a három tulajdonságot úgy összegezhetjük, hogy $(V,+)$ egy *csoport.* Mivel pedig az

- $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

azonosság is fennáll, $(V,+)$ egy *kommutatív csoport.*

Definíció. Legyen $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ egy tetszőleges vektor, $\lambda\in\mathbb{R}$ egy tetszőleges valós szám. A $\lambda\mathbf{a}$ vektort definiáljuk a következőképpen.

Ha $\lambda=0$ vagy $\mathbf{a}=\mathbf{0}$, akkor legyen $\lambda\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

Ha $\lambda\neq 0$ és $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, akkor $\lambda>0$ esetén legyen C az a pont, melyre $\overline{AC}=\lambda\overline{AB}$ és $(B,A,C)\notin R$, $\lambda<0$ esetén pedig legyen C az a pont, melyre $\overline{AC}=-\lambda\overline{AB}$ és $(B,A,C)\in R$, $\lambda\mathbf{a}$ pedig legyen az $\overrightarrow{AC}$ vektor.

A valós számmal való szorzás legfontosabb tulajdonságai a következők:

- $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}\quad\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \mathbf{a},\mathbf{b}\in V.$
- $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}\quad\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \mathbf{a}\in V.$
- $(\lambda\mu)\mathbf{a}=\lambda(\mu\mathbf{a})\quad\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\ \mathbf{a}\in V.$
- $1\mathbf{a}=\mathbf{a}\quad\forall\mathbf{a}\in V.$

Az összeadásra és a számmal szorzásra felsorolt azonosságok együttesen azt fejezik ki, hogy V e műveletekre nézve egy *vektortér a valós számok teste felett.* Ezen a ponton tehát a geometria összefonódik a lineáris algebrával. A vektorterek egyik legfontosabb invariánsa a dimenziója. Ha $A,B,C,D\in X$ négy nem egysíkú pont, akkor belátható, hogy az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ vektorok a V vektortér egy bázisát alkotják, tehát V egy *háromdimenziós vektortér.* Az egyenesek és síkok $\mathcal{E}$ és $\mathcal{S}$ rendszere leírható V vektortérstruktúrája segítségével: Ha $Y \subset X$ egy halmaz, $O \in Y$ egy tetszőleges pont, akkor Y pontosan akkor egyenes illetve sík, ha az $\overrightarrow{OA}$, $A \in Y$ alakú vektorok halmaza a V-nek egy illetve kettő dimenziós lineáris altere.

Skaláris szorzás.

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ vektorok skaláris szorzata egy $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ valós szám, melyet az alábbi módon határozunk meg.

Definíció. Legyen $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ két tetszőleges vektor. Ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor legyen $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$. Ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ akkor legyen $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\gamma$, ahol γ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szög.

Tétel. *A skaláris szorzásra teljesülnek az alábbi tulajdonságok:*

(i) $\langle \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \rangle$;

(ii) $\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_1 \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_2 \rangle$;

(iii) $\langle \lambda\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \lambda\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda\mathbf{b} \rangle$;

(v) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0$ *és egyenlőség csak* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ *esetén áll fenn;*

(vi) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *merőleges vektorok, vagy egyikük nullvektor.*

Az (i), (ii), (iii) tulajdonságok együttese azt jelenti, hogy a skaláris szorzás egy *bilineáris függvény*, vagy *bilineáris forma*. A (iv) tulajdonság azt fejezi ki, hogy a skaláris szorzás egy *szimmetrikus bilineáris függvény*. Végül az (v) tulajdonság azt jelenti, hogy a skaláris szorzás *pozitív definit*.

Bizonyítás. A (iii)-(vi) tulajdonságok a definíció triviális következményei, a szimmetria miatt (i) és (ii) közül elég (i)-t bizonyítani.

Az (i) egyenlőség bizonyításához először vegyük észre, hogy minden $\mathbf{b}$ vektor felírható $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{b}_0$ alakban, ahol $\lambda = |\mathbf{b}|$, $\mathbf{b}_0$ pedig egy egységvektor. Ha be tudjuk látni az

$$\langle \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_0 \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_0 \rangle + \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_0 \rangle$$

egyenlőséget, akkor ezt λ-val beszorozva a (iii) felhasználásával adódik (i). Elegendő tehát (i)-t arra az esetre belátni, amikor $|b| = 1$.

A $\mathbf{b}$-re merőleges vektorok a V-ben egy kétdimenziós

$$W = \{\mathbf{a} \in V \mid \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0\}$$

lineáris alteret határoznak meg. Minden $\mathbf{x}$ vektor egyértelműen bontható fel egy $\mathbf{b}$-vel párhuzamos és egy $\mathbf{b}$-re merőleges vektor összegére. Ebben a felbontásban a $\mathbf{b}$-vel párhuzamos komponens $\langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle\mathbf{b}$. Bontsuk fel ily módon az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ vektorokat:

$$\mathbf{a}_1 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b} \rangle\mathbf{b} + \mathbf{w}_1,$$

$$\mathbf{a}_2 = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \rangle\mathbf{b} + \mathbf{w}_2,$$

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \langle \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \rangle\mathbf{b} + \mathbf{w}_3,$$

ahol $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \in W$. Ha az első két egyenlőséget összeadjuk, az $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ egy másik előállítását kapjuk egy $\mathbf{b}$-vel párhuzamos és egy arra merőleges vektor összegeként:

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = (\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \rangle)\mathbf{b} + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2).$$

Mivel azonban egy vektor $\mathbf{b}$-vel párhuzamos és $\mathbf{b}$-re merőleges komponensekre bontása egyértelmű,

$$\langle \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \rangle$$

és

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

kell hogy teljesüljön, amivel az állítást beláttuk. $\square$

A bilineáris függvényekről általában.

Tegyük fel, hogy V egy tetszőleges véges dimenziós vektortér az $\mathbb{F}$ test felett.

Definíció. Egy

$$\{,\} : V \times V \to \mathbb{F}$$
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$$

leképezést *bilineáris függvénynek* vagy *bilineáris formának* nevezünk, ha teljesíti az

(i) $\{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{b}\} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{b}\} + \{\mathbf{a}_2, \mathbf{b}\}$,

(ii) $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\} = \{\mathbf{b}, \mathbf{a}_1\} + \{\mathbf{b}, \mathbf{a}_2\}$,

(iii) $\{\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = \lambda\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = \{\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}\}$

azonosságokat minden $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \in V$-re és $\lambda \in \mathbb{F}$-re. Azt mondjuk, hogy $\{,\}$ *szimmetrikus* bilineáris függvény, ha a fentieken kívül az

(iv) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = \{\mathbf{b}, \mathbf{a}\}$ azonosságnak is eleget tesz.

Ha $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ a V tér egy bázisa, akkor a $g_{ij} = \{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}$ szorzatokból összeállíthatunk egy

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

mátrixot, melyet a $\{,\}$ *bilineáris függvény* $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ *bázisra vonatkozó mátrixának* nevezünk.

Valamivel általánosabban, ha $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N$ egy tetszőleges vektorrendszer V-ben, akkor az $\{\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j\}$ szorzatokból összeállított

$$G = \begin{pmatrix} \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1\} & \dots & \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_N\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \{\mathbf{f}_N, \mathbf{f}_1\} & \dots & \{\mathbf{f}_N, \mathbf{f}_N\} \end{pmatrix}$$

mátrixot az $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N$ vektorrendszer *Gram-mátrixának* nevezzük a $\{,\}$ bilineáris szorzásra nézve.

Állítás. *A $\{,\}$ bilineáris függvényt egyértelműen meghatározza, ha ismerjük egy adott bázisra vonatkozó mátrixát.*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ a V tér egy bázisa, $G = (g_{ij})$ a $\{,\}$ bilineáris függvény mátrixa az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázisra nézve, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ két tetszőleges vektor, akkor a $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ kiszámolásához állítsuk elő az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorokat a bázisvektorok lineáris kombinációjaként $\mathbf{x} = \sum_i x^i \mathbf{e}_i$ illetve $\mathbf{y} = \sum_i y^i \mathbf{e}_i$ alakban. Ekkor a bilinearitás felhasználásával a $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ szorzatra a következő adódik:

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \{\sum_i x^i \mathbf{e}_i, \sum_j y^j \mathbf{e}_j\} = \sum_{i,j} x^i y^j \{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\} = \sum_{i,j} x^i y^j g_{ij},$$

ami bizonyítja az állítást. $\square$

Az állítás egy általános következménye, hogy egy bilineáris függvény tulajdonságai tükröződnek mátrixán. Erre példa a következő két állítás.

Állítás. *Egy bilineáris függvény pontosan akkor szimmetrikus, ha valamely bázisra vonatkozó mátrixa szimmetrikus.* $\square$

Definíció. Egy $\{,\}$ bilineáris függvényt *nemelfajulónak* nevezünk, ha az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = 0$ egyenlőség csak akkor állhat fenn minden $\mathbf{b}$-re, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Megjegyezzük, hogy ha V egy *valós* vektortér, $\{,\}$ pedig egy *pozitív definit* szimmetrikus bilineáris függvény, akkor $\{,\}$ nemelfajuló. Valóban, ha $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = 0$ minden $\mathbf{b}$-re, akkor $\{\mathbf{a}, \mathbf{a}\} = 0$ is fennáll, ami a pozitív definitség miatt csak úgy lehetséges, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Mivel a pozitív definitség nem értelmezhető tetszőleges test felett, a nemelfajultságot tekinthetjük a pozitív definitség egy olyan gyengítésének, mely tetszőleges test felett értelmes.

Tétel. *Egy $\{,\}$ bilineáris forma pontosan akkor nemelfajuló, ha valamely bázisra vonatkozó mátrixának determinánsa nem* 0.

Bizonyítás. Legyen $G = (g_{ij})$ a $\{,\}$ bilineáris forma mátrixa az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázisra vonatkozóan. $\{,\}$ pontosan akkor elfajuló, ha találunk olyan $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektort, melyre $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = 0$ minden $\mathbf{b} \in V$-re. Mivel V minden eleme előáll a bázisvektorok lineáris kombinációjaként, az a feltétel, hogy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = 0$ minden $\mathbf{b} \in V$-re, egyenértékű azzal, hogy $\{\mathbf{a}, \mathbf{e}_j\} = 0$ $j = 1, \dots, n$-re. A nullvektortól különböző vektorok a bázisvektorok nemtriviális lineáris kombinációi, tehát $\{,\}$ akkor és csak akkor elfajuló, ha találunk olyan $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ nem mind 0 számokat, melyekre

$$\{\sum_i \lambda^i \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\} = \sum_i \lambda^i g_{ij} = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Ez utóbbi feltétel azt jelenti, hogy a G mátrix sorai lineárisan összefüggnek. A lineáris algebra egy ismert tétele szerint pedig egy mátrix sorai pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha determinánsa 0. $\square$

Duális bázisokról általában.

Ha V egy véges dimenziós vektortér az $\mathbb{F}$ test felett, jelölje V^* a V duális terét. Emlékeztetünk rá, hogy V^* a V-ből $\mathbb{F}$-be menő lineáris függvények vektortere. V minden bázisa kijelöl egy bázist V^*-ban. Nevezetesen, ha $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ a V egy bázisa, akkor bevezethetők azok az l^i lineáris függvények, melyekre $l^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$, ahol δ^i_j az ún. *Kronecker-szimbólum*: $\delta^i_j = 1$, ha $i = j$ és $\delta^i_j = 0$ ha $i \neq j$. Az l^i lineáris függvény jól van definiálva, hiszen egy lineáris függvényt egyértelműen meghatároznak egy bázison felvett értékei. Könnyen látható, hogy tetszőleges l lineáris függvény egyértelműen írható fel az l^i lineáris függvények lineáris kombinációjaként a következő módon:

$$l = \sum_i l(\mathbf{e}_i) l^i.$$

Az l^i függvények tehát bázist alkotnak V^*-ban.

Definíció. Az $l^1, \dots, l^n$ V^*-beli bázist az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázis duális bázisának nevezzük.

Az alábbi állítás nyilvánvaló következménye a definícióknak.

Állítás. *Ha V^{**}-ot a természetes módon azonosítjuk V-vel, akkor egy V-beli bázis duális bázisának duális bázisa az eredeti bázis.* $\square$

Tegyük fel most, hogy V-n adott egy bilineáris forma $\{,\}$. Ez megad egy $\Phi_{\{,\}} : V \to V^*$ lineáris leképezést oly módon, hogy $\Phi_{\{,\}}(\mathbf{a})$ az a lineáris függvény, mely a $\mathbf{b}$ vektorhoz a $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ számot rendeli hozzá. A $\Phi_{\{,\}}$ leképezés magját az olyan $\mathbf{a}$ vektorok alkotják, melyekre $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}=0$ minden $\mathbf{b}\in V$ vektorra. $\Phi_{\{,\}}$ tehát pontosan akkor injektív, ha $\{,\}$ nemelfajuló. Node azonos dimenziójú vektorterek között egy lineáris leképezés pontosan akkor injektív, ha bijektív, s így beláttuk az alábbi állítást:

Állítás. *A $\Phi_{\{,\}}:V\to V^*$ lineáris leképezés pontosan akkor bijektív, ha $\{,\}$ nemelfajuló.*

Ha tehát a V vektortéren adott egy $\{,\}$ nemelfajuló bilineáris függvény, akkor $\Phi_{\{,\}}$ segítségével azonosíthatjuk V és V^* elemeit. Speciálisan, V egy bázisa duális bázisának megfeleltethetjük V egy bázisát.

Definíció. Legyen $\{,\}$ egy nemelfajuló bilineáris függvény V-n. Ha $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ a V egy bázisa, $l^1,\dots,l^n$ a duális bázis, akkor az $\mathbf{e}^i=\Phi_{\{,\}}^{-1}(l^i)$ vektorokból álló V-beli bázist az $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ bázis $\{,\}$-*re vonatkozó duális bázisának* vagy röviden $\{,\}$-*duális bázisának* nevezzük.

Tétel. *Legyen az $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ bázis $\{,\}$-duális bázisa $\mathbf{e}^1,\dots,\mathbf{e}^n$, az $\mathbf{e}^1,\dots,\mathbf{e}^n$ bázis $\{,\}$-duális bázisa $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_n$. Ekkor az $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ és $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_n$ bázisok egybeesésének szükséges és elégséges feltétele, hogy $\{,\}$ szimmetrikus legyen.*

Bizonyítás. Az $(\mathbf{e}^i)$ bázis duális bázisának vektorait egyértelműen jellemzik a

$$\{\mathbf{f}_i,\mathbf{e}^j\}=\delta_i^j$$

egyenlőségek. Ha a $\{,\}$ bilineáris forma szimmetrikus, akkor $\{\mathbf{e}_i,\mathbf{e}^j\}=\{\mathbf{e}^j,\mathbf{e}_i\}=\delta_i^j$, tehát $\mathbf{e}_i=\mathbf{f}_i$.

A fordított irány belátásához tegyük fel, hogy $\mathbf{e}_i=\mathbf{f}_i$ minden i-re. Vegyünk két tetszőleges $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektort és állítsuk elő őket $\mathbf{x}=\sum_i x^i\mathbf{e}_i$ illetve $\mathbf{y}=\sum_i y_i\mathbf{e}^i$ alakban. Ekkor egyrészt

$$\begin{aligned}\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}&=\{\sum_i x^i\mathbf{e}_i,\sum_j y_j\mathbf{e}^j\}=\sum_{i,j}x^iy_j\{\mathbf{e}_i,\mathbf{e}^j\}\\&=\sum_{i,j}x^iy_j\{\mathbf{f}_i,\mathbf{e}^j\}=\sum_{i,j}x^iy_j\delta_i^j=\sum_i x^iy_i,\end{aligned}$$

másrészt

$$\{\mathbf{y},\mathbf{x}\}=\{\sum_i y_i\mathbf{e}^i,\sum_j x^j\mathbf{e}_j\}=\sum_{i,j}x^jy_i\{\mathbf{e}^i,\mathbf{e}_j\}=\sum_{i,j}x^jy_i\delta_j^i=\sum_i x^iy_i,$$

tehát $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}=\{\mathbf{y},\mathbf{x}\}$. $\square$

A továbbiakban feltesszük, hogy $\{,\}$ egy szimmetrikus nemelfajuló bilineáris forma.

Definíció. Legyenek $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ és $\mathbf{e}^1,\dots,\mathbf{e}^n$ $\{,\}$-duális bázisok. Ha $\mathbf{x}$ egy tetszőleges vektor, akkor $\mathbf{x}$ egyértelműen előállítható mindkét bázis lineáris kombinációjaként. Az $\mathbf{x}=\sum_i x^i\mathbf{e}_i$ előállításból adódó $x^1,\dots,x^n$ számokat az $\mathbf{x}$ *vektor* $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ *bázisra vonatkozó kontravariáns koordinátáinak*, az $\mathbf{x}=\sum_i x_i\mathbf{e}^i$ előállításban szereplő $x_1,\dots,x_n$ számokat pedig az $\mathbf{x}$ *vektor* $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ *bázisra vonatkozó kovariáns koordinátáinak* nevezzük. A definícióból világos, hogy

$$x^i=\{\mathbf{x},\mathbf{e}^i\}\text{ és }x_i=\{\mathbf{x},\mathbf{e}_i\}.$$

Megjegyzések.

A "*kontravariáns*" illetve "*kovariáns*" jelzők jelentése "*ellentétesen változó*" illetve "*együtt változó*". Az elnevezést a következő egyszerű tény indokolja: Ha az $\mathbf{e}_1$ bázisvektort kicseréljük a λ-szorosára, akkor az $\mathbf{x}$ vektor első kontravariáns koordinátája az új bázisban x^1/λ lesz, míg az első kovariáns koordinátája az új bázisra vonatkozóan λx_1.

Érdemes felfigyelni arra, hogy az indexek alulra illetve felülre helyezése nem véletlenszerű. Ha megfelelően helyezzük el az indexeket, akkor megfigyelhetjük, hogy formuláinkban az összegzések mindig olyan indexek szerint történnek, melyek alsó és felső indexként is előfordulnak. Azok az indexek melyek vagy csak alul, vagy csak felül szerepelnek, az egyenlőségeknek mindkét oldalán ugyanazon a szinten kell lenniük. Ezek a szabályok egyrészt lehetőséget adnak arra, hogy formuláink helyességét ellenőrizzük, másrészt lehetőséget adnak arra, hogy formuláinkat tömörítsük. Helyesen pozicionált indexek esetén ugyanis a szumma jelek nem hordoznak információt, nélkülük is tudjuk, mely indexekre kell összegezni. Ez az ún. *Einstein-konvenció* lényege: ha ügyelünk az indexek elhelyezésére, képleteinkből elhagyhatjuk a szummákat. Mivel az Einstein-féle képlettömörítést elsősorban a bonyolult számításoknál célszerű használni, mi nem fogunk élni vele.

Tétel (Összefoglalás). *Legyenek* $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ *és* $\mathbf{e}^1,\ldots,\mathbf{e}^n$ $\{,\}$*-duális bázisok,* $G = (g_{ij}) = (\{\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\})$ *és* $\tilde{G} = (g^{ij}) = (\{\mathbf{e}^i,\mathbf{e}^j\})$ *a bázisok Gram-mátrixai. Ekkor*
(1) $\mathbf{e}_i = \sum_j g_{ij}\mathbf{e}^j$, $\mathbf{e}^i = \sum_j g^{ij}\mathbf{e}_j$*;*
(2) $G\tilde{G} = I$ *(*I *az egységmátrix);*
(3) Ha $\mathbf{x} = \sum_i x^i\mathbf{e}_i = \sum_i x_i\mathbf{e}^i$ *és* $\mathbf{y} = \sum_i y^i\mathbf{e}_i = \sum_i y_i\mathbf{e}^i$*, akkor*
(a) $x_i = \sum_j g_{ij}x^j$ *és* $x^i = \sum_j g^{ij}x_j$*;*
(b) $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\} = \sum_{i,j} x^iy^jg_{ij} = \sum_i x^iy_i = \sum_i x_iy^i = \sum_{i,j} x_iy_jg^{ij}$.

Bizonyítás.

(1) Tudjuk, hogy $\mathbf{e}_i$ felírható a duális bázis lineáris kombinációjaként $\mathbf{e}_i = \sum_j a_{ij}\mathbf{e}^j$ alakban. Ha megszorozzuk ezt az egyenlőséget $\mathbf{e}_k$-val akkor a

$$g_{ik} = \{\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k\} = \sum_j a_{ij}\{\mathbf{e}^j,\mathbf{e}_k\} = a_{ik}$$

egyenlőséget nyerjük, ami bizonyítja (1) első felét. (1) másik fele az alsó és felső indexek szerepcseréjével bizonyítható.

(2) Felhasználva (1)-t,

$$\mathbf{e}_i = \sum_j g_{ij}\mathbf{e}^j = \sum_{j,k} g_{ij}g^{jk}\mathbf{e}_k.$$

Mivel az $\mathbf{e}_i = \sum_k \delta_i^k\mathbf{e}_k$ vektort csak egyféleképpen lehet előállítani az $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként $\sum_j g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$, ami pont azt fejezi ki, hogy a G és $\tilde{G}$ mátrixok egymás inverzei.

(3) Minthogy $x^i = \{\mathbf{x},\mathbf{e}^i\}$ és $x_i = \{\mathbf{x},\mathbf{e}_i\}$ az (1)-beli egyenlőségeket $\mathbf{x}$-szel szorozva (a)-t kapjuk. A (b)-beli egyenlőségeket korábbi tételeink bizonyítása közben már levezettük. □

Irányítás.

Ebben a részben V egy végesdimenziós vektortér a *valós számok* teste felett.

A háromdimenziós tér rendezett bázisait (szemléletesen) két osztályba sorolhatjuk. *Jobbsodrású* az a bázis, melynek első, második illetve harmadik vektorára ujjaink kicsavarása nélkül rá tudjuk illeszteni jobbkezünk hüvelyk, mutató illetve középső ujját. *Balsodrású* az a rendezett bázis, melynek vektoraira a bal kezünk megfelelő ujjait tudjuk ráilleszteni. Ha adott egy síkon két közös kezdőpontú, de nem kollineáris félegyenes, akkor a sík egyik oldalán állva el tudjuk dönteni, hogy az első félegyenest a másikba az *óramutató járásával egyező, vagy ellentétes forgással* lehet átvinni. Ezek a szemléletes fogalmak szigorú értelemben véve értelmetlenek, mert feltételeznek olyan struktúraelemeket a térben (embereket, akiknek jobb kezén az ujjak ugyanúgy állnak, órákat melyek mutatói ugyanolyan irányban forognak), amelyek jelenlétét az axiómáink nem követelték meg. Célunk az, hogy az irányítás fogalmának precíz definícióját adjuk.

Definícó. Legyen $(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ és $(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n)$ a V vektortér két rendezett bázisa. Írjuk fel az $\mathbf{f}_i$ vektort az $\mathbf{e}_j$-k lineáris kombinációjaként: $\mathbf{f}_i=\sum_j a_i^j\mathbf{e}_j$ és rendezzük össze a kapott a_i^j együtthatókat egy $A=(a_i^j)$ mátrixba (legyen mondjuk i a sor-, j az oszlopindex). Azt mondjuk, hogy $(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ és $(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n)$ *azonos irányítású bázisok*, ha $\det A>0$. Azonos irányítású bázisokra használjuk az $(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\sim(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n)$ jelölést.

Tétel. *A $\sim$ reláció ekvivalencia-reláció az irányított bázisok halmazán, melynek pontosan két ekvivalencia-osztálya van.*

Bizonyítás. A bizonyítás lényege az alábbi számolás. Legyen $E=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$, $F=(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n)$ $G=(\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_n)$ három rendezett bázis,

$$\mathbf{f}_i=\sum_j a_i^j\mathbf{e}_j,\quad \mathbf{g}_i=\sum_j b_i^j\mathbf{f}_j=\sum_j c_i^j\mathbf{e}_j,$$

$A=(a_i^j)$, $B=(b_i^j)$, $C=(c_i^j)$. Ekkor

$$\sum_j c_i^j\mathbf{e}_j=\mathbf{g}_i=\sum_k b_i^k\mathbf{f}_k=\sum_{k,j} b_i^k a_k^j\mathbf{e}_k.$$

Mivel egy vektor felbontása egy bázisban egyértelmű, $c_i^j=\sum_k b_i^k a_k^j$ minden i,j-re, ami éppen a $C=BA$ egyenlőség koordinátás alakja.

(1) $\sim$ *reflexív:* $E=F$ esetén $A=I$, $\det A=1>0$.

(2) $\sim$ *szimmetrikus:* Tegyük fel, hogy az előző számolásban $E=G$ és $E\sim F$. Ekkor $C=I=BA$ és $\det A>0$, következésképpen $\det B=\det A^{-1}=1/\det A>0$, tehát $E=G\sim F$.

(3) $\sim$ *tranzitív:* Ha most a fenti számolásban azt tesszük fel, hogy $E\sim F$ és $F\sim G$ akkor $\det A>0$, $\det B>0$, s így $\det C=\det B\det A>0$, azaz $E\sim G$.

(4) *Legfeljebb két ekvivalencia-osztály van:* A $\det C=\det B\det A$ egyenlőség azt is mutatja, hogy ha E és G nem azonos irányítású F-fel, akkor E és G egymással azonos irányításúak. F ekvivalencia-osztályán kívül tehát legfeljebb egy másik ekvivalencia-osztály létezhet.

(5) *Létezik két különböző ekvivalencia-osztály:* Nyilvánvaló, hogy $(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ és $(-\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n)$ különböző irányítású bázisok. $\square$

Definíció. Egy V vektortér *irányítása* a $\sim$ ekvivalencia-reláció egyik ekvivalencia-osztályának kijelölése. Ha V-t irányítottuk, a kijelölt ekvivalencia-osztályba eső bázisokat *pozitív irányításúnak*, a másik ekvivalencia-osztályba eső bázisokat *negatív irányításúnak* nevezzük.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ és $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ bázisok folytonos mozgással egymásba vihetők, ha léteznek olyan $\gamma_i : [0,1] \to V$ folytonos leképezések, hogy $\gamma_i(0) = \mathbf{e}_i$, $\gamma_i(1) = \mathbf{f}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ és $(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ a V egy bázisa minden $t \in [0,1]$-re.

Megjegyzés. Világos, hogy a $[0,1]$ intervallum szerepét a definícióban bármely más intervallum átveheti. Könnyű meggyőződni arról is, hogy a folytonos mozgással egymásba vihetőség egy ekvivalencia-reláció a rendezett bázisok halmazán.

Tétel. *Két bázis akkor és csak akkor vihető egymásba folytonos mozgással, ha azonos irányításúak.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy (γ_i) az $(\mathbf{e}_i)$ és $(\mathbf{f}_i)$ bázisokat összekötő folytonos mozgás. Legyen

$$\gamma_i(t) = \sum_j a_i^j(t)\mathbf{e}_j, \qquad f(t) = \det(a_i^j(t)).$$

Az f folytonos függvény nem veheti fel a 0 értéket, tehát állandó előjelű. Mivel $(a_i^j(0))$ az egységmátrix, $\operatorname{sgn} f(1) = \operatorname{sgn} f(0) = \operatorname{sgn} 1 = 1$, tehát $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ és $(\gamma_1(1), \dots, \gamma_n(1)) = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ azonos irányítású bázisok.

A fordított irány bizonyításához bevezetünk néhány elemi transzformációt a rendezett bázisokon úgy hogy minden bázis folytonos mozgatással átvihető az elemi transzformáltjaiba, majd belátjuk, hogy két azonos irányítású bázis elemi transzformációk egy sorozatával egymásba vihető.

Először is, ha $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ egy bázis, $1 \le i < j \le n$, akkor $\mathbf{e}_i$ és $\mathbf{e}_j$ ugyanazt a kétdimenziós alteret feszíti ki, mint $\gamma_i(t) = \cos t\mathbf{e}_i + \sin t\mathbf{e}_j$ és $\gamma_j(t) = -\sin t\mathbf{e}_i + \cos t\mathbf{e}_j$, így a

$$t \mapsto (\mathbf{e}_1, \dots, \gamma_i(t), \dots, \gamma_j(t), \dots \mathbf{e}_n)$$

leképezés az $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ bázis egy folytonos deformációja. Mivel $\gamma_i(\pi/2) = \mathbf{e}_j$, $\gamma_j(\pi/2) = -\mathbf{e}_i$, $\gamma_i(\pi) = -\mathbf{e}_i$, $\gamma_j(\pi) = -\mathbf{e}_j$, az $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_j)$ bázis folytonosan átdeformálható abba a bázisba, melyet úgy kapunk, hogy az i-edik és j-edik bázisvektorokat felcseréljük, és közülük az egyiket -1-gyel szorozzuk illetve abba a bázisba, melyet úgy kapunk, hogy két bázisvektort az ellentettjével helyettesítünk.

Egy másik deformációs lehetőség, hogy a bázis egyik vektorát megszorozzuk egy folytonosan változó pozitív számmal.

Végül deformálhatunk egy bázist úgy is, hogy egyik vektorához hozzáadjuk egy másik vektor egy folytonosan változó számszorosát.

Ha rögzítünk egy $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ bázist, akkor a tér bármely rendezett bázisa egyértelműen jellemezhető az $\mathbf{f}_i = \sum_j a_i^j \mathbf{e}_j$ felbontás együtthatóiból összerakott $A = (a_i^j)$ mátrixszal. A Gauss-elimináció módszerét követve tetszőleges nemelfajuló mátrixból eljuthatunk az egységmátrixhoz, vagy a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixhoz a következő elemi lépések segítségével:

- két sor felcserélése és az egyik sor szorzása -1-gyel;
- két sor szorzása -1-gyel;
- egy sor szorzása egy pozitív számmal;
- egy sor egy számszorosának hozzáadása egy másik sorhoz.

Ily módon minden bázisból eljuthatunk folytonos deformációval az $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ vagy az $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{n-1},-\mathbf{e}_n)$ bázishoz. Mivel e két bázis ellentétes irányítású, és folytonos deformációnál az irányítás nem változik, ha az $(\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_n)$ és $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ azonos irányítású, akkor a deformáció végeredménye csak $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$ lehet. $\square$

Ortonormált bázisok euklideszi vektorterekben, Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció.

Definíció. Egy $\mathbb{R}$ feletti V vektorteret *euklideszi vektortérnek* nevezünk, ha V-n adott egy $\{,\}$ szimmetrikus pozitív definit bilineáris függvény.

Definíció. Egy euklideszi vektortérben egy $\mathbf{a}\in V$ vektor hosszát az $|\mathbf{a}|=\sqrt{\{\mathbf{a},\mathbf{a}\}}$ képlettel adjuk meg.

Definíció. Az euklideszi vektortér egy bázisát *ortonormáltnak* nevezzük, ha saját magának a $\{,\}$-duálisa, vagyis ha $\mathbf{e}^i=\mathbf{e}_i$ minden i-re. Egy bázis pontosan akkor ortonormált, ha Gram-mátrixa az egységmátrix, azaz $\{\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\}=\delta_{ij}$ minden i,j-re. Geometriailag ez azt jelenti, hogy a bázis elemei páronként merőleges egységvektorok.

Tétel. *Tegyük fel, hogy $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k$ egy lineárisan független vektorrendszer a $(V,\{,\})$ euklideszi vektortérben. Ekkor létezik egyértelműen egy $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_k$ lineárisan független vektorrendszer, melyre*

(1) $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_i$ ugyanazt a V_i lineáris alteret feszíti ki, mint $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_i$ minden $1\le i\le k$-ra;
(2) $(\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_i)$ és $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_i)$ a V_i-nek azonos irányítású bázisai;
(3) $\{\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j\}=\delta_{ij}$ minden $1\le i,j\le k$-ra.

Bizonyítás. Az $\mathbf{f}_i$ vektorokat rekurzívan fogjuk megadni a *Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció* módszerével.

(1) Ahhoz, hogy az első feltétel teljesüljön, az $\mathbf{f}_i$ vektornak elő kell állnia az $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_i$ vektorok lineáris kombinációjaként $\mathbf{f}_i=\sum_{j=1}^i a_i^j\mathbf{e}_j$ alakban.

(2) Az irányítási feltételhez és az $\mathbf{f}_i$ vektorok lineáris függetlenségéhez arra van szükség, hogy

$$\det\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & \dots & 0\\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_i^1 & a_i^2 & \dots & a_i^i\end{pmatrix}=a_1^1\cdot a_2^2\cdots a_i^i>0$$

fennálljon minden i-re. Ez egyenértékű azzal, hogy $a_i^i>0$ minden i-re.

(3) Mivel $\mathbf{f}_1$ egységvektor és előáll $a_1^1\mathbf{e}_1$ alakban, ahol $a_1^1>0$, $\mathbf{f}_1$ egyetlen lehetséges értéke $\mathbf{f}_1=\mathbf{e}_1/|\mathbf{e}_1|$. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_{i-1}$ vektorokat már definiáltuk úgy, hogy teljesülnek rájuk a megkövetelt tulajdonságok. Mivel az $\mathbf{f}_i=\sum_{j=1}^i a_i^j\mathbf{e}_j$ előállításban az $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_{i-1}$ vektorok felírhatók az $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_{i-1}$ vektorok lineáris kombinációjaként, $\mathbf{f}_i$-t kereshetjük $\mathbf{f}_i=a_i^i\mathbf{e}_i+b_i^{i-1}\mathbf{f}_{i-1}+\dots b_i^1\mathbf{f}_1$ alakban is. Megszorozva ezt az egyenletet $\mathbf{f}_j$-vel $(1\le j\le i-1)$, az $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_i$ vektorok

ortonormáltságát felhasználva a $0 = a_i^i\{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j\} + b_i^j$ egyenlőséghez jutunk, amiből $\mathbf{f}_i = a_i^i(\mathbf{e}_i - \{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_1\}\mathbf{f}_1 - \cdots - \{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_{i-1}\}\mathbf{f}_{i-1})$. Az a_i^i szám választását meghatározza az a két feltétel hogy $\mathbf{f}_i$-nek egységvektornak kell lennie és $a_i^i > 0$. Így

$$\mathbf{f}_i = \frac{\mathbf{e}_i - \{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_1\}\mathbf{f}_1 - \cdots - \{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_{i-1}\}\mathbf{f}_{i-1}}{|\mathbf{e}_i - \{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_1\}\mathbf{f}_1 - \cdots - \{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_{i-1}\}\mathbf{f}_{i-1}|}.$$

A nevezőben álló szám nem lehet 0 a lineáris függetlenség miatt. Könnyen látható, hogy az így definiált $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$ vektorrendszer eleget tesz a követelményeknek. □

Az $\mathbf{f}_i$ vektor geometriai jellemzése a következő. $\mathbf{f}_i$ a V_{i-1} lineáris tér normális egységvektora V_i-ben. Az irányításra vonatkozó feltétel mondja meg, hogy a két ellentétes normálvektor közül melyik az $\mathbf{f}_i$. V_{i-1} a V_i-t két féltérre bontja. $\mathbf{f}_i$ az a normálvektor, amelyik ugyanabba a féltérbe mutat, mint $\mathbf{e}_i$.

Következmény. *Minden (irányított) euklideszi vektortérben létezik (pozitív irányítású) ortonormált bázis.* □

Vektoriális és vegyes szorzás.

Definíció. Legyen V egy háromdimenziós irányított euklideszi vektortér, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \in V$ *vektoriális szorzata* az a vektor, mely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(1) Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan összefüggő, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.
(2) Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan független, akkor
  (a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges $\mathbf{a}$-ra és $\mathbf{b}$-re;
  (b) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ hossza az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített parallelogramma területe, azaz $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\gamma$, ahol γ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szöge;
  (c) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ pozitív irányítású bázis.

Nyilvánvaló, hogy ezek a tulajdonságok $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-t egyértelműen meghatározzák.

Tétel. *Tegyük fel, hogy* $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *pozitív irányítású ortonormált bázis* V*-ben,* $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 b^i\mathbf{e}_i$. *Ekkor*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} = (a^2b^3 - a^3b^2)\mathbf{e}_1 + (a^3b^1 - a^1b^3)\mathbf{e}_2 + (a^1b^2 - a^2b^1)\mathbf{e}_3.$$

Megjegyzés. A tételben szereplő mátrix első sorában vektorok, második és harmadik sorában számok állnak. Ennek ellenére a mátrix determinánsa formálisan kifejthető és eredményként az első sorban álló vektorok egy lineáris kombinációját adja.

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a

$$\mathbf{c} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} = (a^2b^3 - a^3b^2)\mathbf{e}_1 + (a^3b^1 - a^1b^3)\mathbf{e}_2 + (a^1b^2 - a^2b^1)\mathbf{e}_3$$

vektor rendelkezik a vektoriális szorzatot meghatározó tulajdonságokkal. Vegyük észre, hogy tetszőleges $\mathbf{d} = \sum_{i=1}^3 d^i\mathbf{e}_i$ vektorra

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle = (a^2b^3 - a^3b^2)d^1 + (a^3b^1 - a^1b^3)d^2 + (a^1b^2 - a^2b^1)d^3 = \det\begin{pmatrix} d^1 & d^2 & d^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix}.$$

(1) Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan összefügg, akkor nyilván $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.
(2) Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan független, akkor:

(a) $\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle = \det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} = 0$, tehát $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$ és hasonlóan $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$;

(b)

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}|^2 &= (a^2b^3 - a^3b^2)^2 + (a^3b^1 - a^1b^3)^2 + (a^1b^2 - a^2b^1)^2 \\ &= \big((a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2\big)\big((b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2\big) - (a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3)^2 \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \\ \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \end{pmatrix} = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\gamma) = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma)^2; \end{aligned}$$

(c) $\det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c^1 & c^2 & c^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} = \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle > 0$, tehát $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ bázis az $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ bázissal azonos, vagyis pozitív irányítású. □

Következmény. *A vektoriális szorzás bilineáris és antikommutatív művelet, azaz kielégíti az alábbi azonosságokat:*

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \times \mathbf{b} &= \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}; \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) &= \mathbf{a} \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \times \mathbf{b}_2; \\ (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b}); \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Az állítás következik a vektoriális szorzat determinánsként való előállításából és abból a lineáris algebrai tényből, hogy a determináns a soraitól lineárisan és antiszimmetrikusan függ. □

Definíció. Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ vektorok vegyes szorzata az $\mathbf{abc} = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ szám.

Az előző tétel bizonyításából, ha $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ egy pozitív irányítású ortonormált bázis, $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 b^i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{c} = \sum_{i=1}^3 c^i\mathbf{e}_i$, akkor

$$\mathbf{abc} = \det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{pmatrix}.$$

Következmény (Felcserélési tétel). *A vegyesszorzat a vektorok ciklikus permutációjakor nem változik, nem ciklikus permutáció esetén előjelet vált:*

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{acb}. \quad \square$$

A felcserélési tétel közvetlen következménye annak a ténynek, hogy egy mátrix sorainak permutációjakor a mátrix determinánsa a permutáció előjelével szorzódik. Belátható azonban a tétel geometriai úton is, ha a megértjük a vegyes szorzat geometriai jelentését.

A definíciók szerint $|\mathbf{abc}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot |\cos\gamma|$, ahol γ a $\mathbf{c}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok szöge. Ha tekintjük az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített parallelepipedont, akkor

$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ a parallelepipedon $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített lapjának területe, $|\mathbf{c}|\cdot|\cos\gamma|$ pedig a parallelepipedon e laphoz tartozó magassága, $|\mathbf{abc}|$ tehát *a parallelepipedon térfogata.* $\mathbf{abc}$ előjele az irányítástól függ. $\mathbf{abc}$ pontosan akkor pozitív, ha $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ pozitív irányítású bázis, és pontosan akkor negatív, ha negatív irányítású bázis. A vegyesszorzat pontosan akkor 0, ha $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ nem alkot bázist, vagyis a három vektor lineárisan összefüggő. A felcserélési tétel tehát azzal is magyarázható, hogy a vektorok permutációja csak az irányításra van hatással, a vektorok által kifeszített parallelepipedont és annak térfogatát viszont nem változtatja.

A vektoriális és vegyes szorzás segítségével explicit képletet adhatunk egy bázis duális bázisának vektoraira.

Tétel. *Ha $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ a $(V,\langle,\rangle)$ 3-dimenziós euklideszi vektortér egy bázisa, akkor a $\langle,\rangle$-duális bázis a következőképpen kapható:*

$$\mathbf{e}^1=\frac{\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3},\quad \mathbf{e}^2=\frac{\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1},\quad \mathbf{e}^3=\frac{\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2}.$$

Bizonyítás. Mivel $\mathbf{e}^1$ merőleges $\mathbf{e}_2$-re és $\mathbf{e}_3$-re, párhuzamosnak kell lennie $\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3$-mal, vagyis $\mathbf{e}^1$ előáll $\lambda\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3$ alakban. Behelyettesítve ezt az $\langle\mathbf{e}^1,\mathbf{e}_1\rangle=1$ egyenlőségbe $\lambda\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3=1$ adódik, amiből $\lambda=1/(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$, $\mathbf{e}^1=\frac{\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3}$. Az $\mathbf{e}^2,\mathbf{e}^3$ vektorokra vonatkozó képleteket az indexek ciklikus permutációjával kapjuk. □

Tétel. *Legyen $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ egy tetszőleges bázis, $\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2,\mathbf{e}^3$ a $\langle,\rangle$-duális bázisa, $\mathbf{a}=\sum_{i=1}^3 a^i\mathbf{e}_i=\sum_{i=1}^3 a_i\mathbf{e}^i$, $\mathbf{b}=\sum_{i=1}^3 b^i\mathbf{e}_i=\sum_{i=1}^3 b_i\mathbf{e}^i$ két tetszőleges vektor. Ekkor*

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\frac{1}{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2,\mathbf{e}^3}\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}^1&\mathbf{e}^2&\mathbf{e}^3\\a^1&a^2&a^3\\b^1&b^2&b^3\end{pmatrix}.$$

Bizonyítás. Mivel

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b}&=(a_1\mathbf{e}^1+a_2\mathbf{e}^2+a_3\mathbf{e}^3)\times(b_1\mathbf{e}^1+b_2\mathbf{e}^2+b_3\mathbf{e}^3)\\&=(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{e}^1\times\mathbf{e}^2+(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{e}^2\times\mathbf{e}^3+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{e}^3\times\mathbf{e}^1\\&=\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}^2\times\mathbf{e}^3&\mathbf{e}^3\times\mathbf{e}^2&\mathbf{e}^1\times\mathbf{e}^2\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}=(\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3)\det\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2&\mathbf{e}_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix},\end{aligned}$$

az első bizonyítandó egyenlőséghez elég megmutatni, hogy

$$(\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)=1.$$

Ennek bizonyítása céljából vegyünk fel egy pozitív irányítású ortonormált bázist. Tekintsük azt a mátrixot, melynek sorai az $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ illetve $\mathbf{e}_3$ vektorok koordinátái ezen ortonormált bázisra vonatkozóan. Ennek determinánsa az $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ vegyes szorzat. Hasonlóan annak a mátrixnak a determinánsa, melynek oszlopai az $\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2$ illetve $\mathbf{e}_3$ vektorok koordinátái az ortonormált bázisra vonatkozóan, egyenlő a az $\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3$ vegyesszorzattal. Ha ezt a két mátrixot összeszorozzuk, a szorzat i-edik sorának j-edik eleme az $\langle\mathbf{e}_i,\mathbf{e}^j\rangle=\delta_i^j$ skaláris szorzat lesz, tehát a két mátrix szorzata az egységmátrix. Ebből következik, hogy a két mátrix determinánsának szorzata 1. Ezzel az első egyenlőséget beláttuk. A második egyenlőség következik az elsőből, ha az alsó és felső indexek szerepét felcseréljük. □

Tétel (Kifejtési tétel). *Tetszőleges három vektorra fennáll az*

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = -\langle\mathbf{c},\mathbf{b}\rangle\mathbf{a} + \langle\mathbf{c},\mathbf{a}\rangle\mathbf{b}$$

összefügés.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan összefüggő ($\mathbf{b}=\mathbf{0}$, vagy $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}$), akkor nyilván mindkét oldal $\mathbf{0}$, elegendő tehát azzal az esettel foglalkozni, amikor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan függetlenek. Ekkor az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektorok egy bázist alkotnak.

A bázisvektorok vegyes szorzata:

$$\mathbf{ab}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \langle\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rangle = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2.$$

Az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektor kovariáns koordinátái a bázisra nézve:

$$\langle\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{a}\rangle = 0, \quad \langle\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\rangle = 0, \quad \langle\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rangle = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2.$$

A $\mathbf{c}$ vektor kovariáns koordinátái a bázisra nézve:

$$\langle\mathbf{c},\mathbf{a}\rangle, \quad \langle\mathbf{c},\mathbf{b}\rangle, \quad \langle\mathbf{c},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rangle.$$

Alkalmazva az előző tétel eredményét az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektoriális szorzatának kiszámolására

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \frac{1}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2}\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{a}\times\mathbf{b} \\ 0 & 0 & |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 \\ \langle\mathbf{c},\mathbf{a}\rangle & \langle\mathbf{c},\mathbf{b}\rangle & \langle\mathbf{c},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rangle \end{pmatrix} = -\langle\mathbf{c},\mathbf{b}\rangle\mathbf{a} + \langle\mathbf{c},\mathbf{a}\rangle\mathbf{b}$$

adódik, amit bizonyítani akartunk. $\square$

Jelölés. Ha F egy háromváltozós függvény, akkor jelölje $\circlearrowleft F(a,b,c)$ az (a,b,c) ciklikus permutációin F által felvett értékek összegét:

$$\circlearrowleft F(a,b,c) = F(a,b,c) + F(b,c,a) + F(c,a,b).$$

Nyilvánvaló, hogy $\circlearrowleft F(a,b,c) = \circlearrowleft F(b,c,a)$.

Tétel (Jacobi-azonosság). *Tetszőleges három* $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ *vektorra*

$$\circlearrowleft (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Bizonyítás. A kifejtési tételt alkalmazva

$$\circlearrowleft (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = -\circlearrowleft \langle\mathbf{c},\mathbf{b}\rangle\mathbf{a} + \circlearrowleft \langle\mathbf{c},\mathbf{a}\rangle\mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad \square$$

Definíció. A $(V,[,])$ párt *Lie-algebrának* nevezzük, ha V egy vektortér (valamilyen $\mathbb{F}$ test felett), $[,] : V\times V \to V$ pedig egy kétváltozós művelet, mely bilineáris, antiszimmetrikus, és teljesíti a Jacobi-azonosságot.

A definíció értelmében a háromdimenziós valós euklideszi vektortér a vektoriális szorzattal ellátva Lie-algebrát alkot.

Megjegyezzük, hogy a vektoriális szorzás, és általában a Lie-algebrák $[,]$ művelete nem asszociatív. Az asszociativitást a Jacobi-azonosság helyettesíti, mely egyben azt is mutatja, hogy mennyire sérül az asszociativitás. Valóban, ha a művelet asszociatív lenne, akkor az $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]$ és $[[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}]$ megegyezne, a Jacobi-azonosság szerint viszont

$$[[\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}] = [\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] + [\mathbf{b},[\mathbf{c},\mathbf{a}]].$$

A Lie-algebrák a transzformációcsoportok (Lie-csoportok) elméletében játszanak fontos szerepet.

Vektorok alkalmazása a gömbháromszögtanban.

Ha S egy felület az euklideszi térben, akkor beszélhetünk a felület belső geometriájáról. Két pont távolsága a felület belső metrikája szerint a két pontot összekötő, a felületen haladó görbék hosszának infimuma. A felület belső geometriájában az egyenesek szerepét az olyan felületi görbék veszik át, melyekre teljesül, hogy a görbe nem túl hosszú íveinek hossza az ív végpontjainak belső távolsága.

Belátható, hogy ha S egy gömbfelület, akkor az $A, B \in S$ pontokat összekötő S-beli görbék közül az A-t és B-t összekötő rövidebbik főkörív lesz a lehető legrövidebb. Ez a tény motiválja az alábbi definíciókat.

Definíció. A gömb belső geometriájának egyenesei, a *gömbi egyenesek*, a gömb főkörei, azaz az olyan körök a gömbön, melyek síkja átmegy a gömb középpontján.

A gömb belső geometriája sok szempontból eltér az euklideszi sík geometriájától. A különbség már az egyenesek illeszkedési tulajdonságain is látszik. A gömbön két pontra mindig illeszthető gömbi egyenes, de ez csak akkor egyértelmű, ha a két pont nem átellenes. Átellenes pontokra végtelen sok főkör illeszthető. Az euklideszi síkon két különböző egyenesnek 0 vagy 1 közös pontja lehet. A gömbön ezzel szemben két különböző gömbi egyenesnek mindig pontosan két átellenes közös pontja van.

Definíció. A gömbfelület A és B pontjainak *gömbi távolságán* az őket összekötő főkörívek közül a rövidebbik hosszát értjük. Egységsugarú gömb esetén a gömbi távolság megegyezik az AB húrhoz tartozó AOB középponti szöggel, általában pedig ennek a szögnek a sugárszorosa.

Definíció. Ha A, B, C három pont a gömbfelületen, melyek nem esnek egy főkörre, akkor e pontok meghatároznak egy *gömbháromszöget.* Az A, B, C pontokat a *gömbháromszög csúcsainak* nevezzük. Mivel az A, B, C pontok nincsenek egy főkörön, nincs köztük átellenes pár, s így bármely két csúcshoz egyértelműen létezik az a főkörív, melynek hossza a két csúcs távolsága. Ezek a főkörívek a *gömbháromszög oldalai.* A gömbháromszög egy csúcsánál találkozó két oldal érintő félegyenesei által bezárt szög mértéke a *gömbháromszög* adott *csúcsánál fekvő szög mértéke.*

A gömbháromszög oldalai és szögei között fennálló összefüggések tana a gömbháromszögtan, avagy gömbi trigonometria. A vektorok alkalmazásával levezetjük a gömbi trigonometria legfontosabb formuláit. Előbb azonban bevezetünk egy elemi konstrukciót, melynek nincs megfelelője az euklideszi síkgeometriában, de szorosan kapcsolódik a konvex geometria poláris halmaz konstrukciójához és a projektív geometria dualitási elvéhez.

Definíció. Legyen ABC egy gömbháromszög egy O középpontú gömbön. Az ABC gömbháromszög *poláris gömbháromszöge* az az $A^*B^*C^*$ gömbháromszög, melynek csúcsait egyértelműen jellemzik az alábbi feltételek:

$$\begin{array}{lll} OA^* \perp OB, & OA^* \perp OC, & \angle AOA^* < \pi/2, \\ OB^* \perp OC, & OB^* \perp OA, & \angle BOB^* < \pi/2, \\ OC^* \perp OA, & OC^* \perp OB, & \angle COC^* < \pi/2. \end{array}$$

Ezek a feltételek tényleg egyértelműen leírják a poláris gömbháromszöget. Az $OA^* \perp OB$ és $OA^* \perp OC$ feltételek szerint például, az OA^* egyenesnek merőlegesnek kell lennie a BOC síkra. A BOC sík O-n átmenő normálisa a gömböt két átellenes pontban metszi. Az $AOA^*\angle < \pi/2$ feltétel szerint A^* e két pont közül azzal lesz egyenlő, amelyik a BOC síknak ugyanarra az oldalára esik, mint A.

Mivel a poláris gömbháromszöget definiáló feltételrendszerben a gömbháromszög és a poláris gömbháromszög csúcsainak szerepe teljesen szimmetrikus, a poláris gömbháromszög poláris gömbháromszöge az eredeti gömbháromszög.

Tétel. *Legyenek az egységsugarú gömb egy gömbháromszögének A, B, C csúcsainál fekvő szögei és a velük szemben fekvő oldalai rendre α, β, γ illetve a, b, c. Az $A^*B^*C^*$ poláris gömbháromszög megfelelő adatait jelölje $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$, illetve a^*, b^*, c^*. Ekkor*

$$a + \alpha^* = \alpha + a^* = b + \beta^* = \beta + b^* = c + \gamma^* = \gamma + c^* = \pi$$

Bizonyítás. A logikai szimmetria miatt elegendő az $\alpha + a^* = \pi$ egyenlőséget belátni. Az α szög nem más, mint az OA által határolt B-t illetve C-t tartalmazó félsíkok szöge. Az $\overrightarrow{OB^*}$ és $\overrightarrow{OC^*}$ vektorok e félsíkok normálvektorai. Két félsík szöge vagy megegyezik normálvektoraik szögével, vagy π-re egészíti ki azt attól függően, hogy a normálvektorok a félsíkok melyik oldalára mutatnak. Mivel esetünkben az $\overrightarrow{OB^*}$ vektor az OAC síknak abba a félterébe mutat amelyik B-t tartalmazza, az $\overrightarrow{OC^*}$ vektor pedig az OAB síknak abba a félterébe mutat amelyik C-t tartalmazza, most a második eset fog fennállni, azaz $\alpha + B^*OC^*\angle = \alpha + a^* = \pi$. □

Bármely két gömb hasonló, ezért elegendő az egységsugarú gömbbel foglalkozni. A továbbiakban feltesszük, hogy a vizsgált gömbháromszögek egy egységsugarú gömbön találhatók és az olvasóra bízzuk a kapott formulák kiterjesztését tetszőleges gömb esetére.

Ha az egységgömb középpontjából a gömbháromszög csúcsaiba mutató vektorok $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ és a csúcsok sorrendjét úgy választjuk meg, hogy $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ egy pozitív irányítású bázis legyen, akkor a poláris gömbháromszög csúcsainak helyvektorai a középpontból

$$\mathbf{c}^* = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}, \quad \mathbf{b}^* = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{c} \times \mathbf{a}|}, \quad \mathbf{a}^* = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|}.$$

Tétel (Gömbi szinusz-tétel). *Az egységgömb egy gömbháromszögének oldalait és szögeit a szokásos módon jelölve fennáll a*

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Szorozzuk össze skalárisan a

$$\mathbf{c}^* = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}, \quad \text{és az} \quad \frac{\mathbf{a}^* \times \mathbf{b}^*}{|\mathbf{a}^* \times \mathbf{b}^*|} = \mathbf{c}$$

egyenlőségeket. A kapott

$$\frac{\mathbf{a}^*\mathbf{b}^*\mathbf{c}^*}{|\mathbf{a}^* \times \mathbf{b}^*|} = \frac{\mathbf{abc}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

egyenlőséget átrendezve az

$$\frac{\mathbf{a}^*\mathbf{b}^*\mathbf{c}^*}{\mathbf{abc}} = \frac{|\mathbf{a}^* \times \mathbf{b}^*|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \frac{\sin c^*}{\sin c} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

összefüggéshez jutunk. Mivel a felcserélési tétel miatt $\frac{\mathbf{a}^*\mathbf{b}^*\mathbf{c}^*}{\mathbf{abc}}$ nem változik, ha a csúcsok szerepét ciklikusan permutáljuk,

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = \frac{\mathbf{a}^*\mathbf{b}^*\mathbf{c}^*}{\mathbf{abc}}. \quad \square$$

Tétel (Gömbi koszinusz-tétel oldalakra). *Az egységgömbre írt gömbháromszög oldalai és szögeit a szokásos módon jelölve*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Bizonyítás. A korábbi jelölések mellett egyrészt

$$-\cos \alpha = \cos a^* = \langle \mathbf{b}^*, \mathbf{c}^* \rangle = \frac{\langle \mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle}{|\mathbf{c} \times \mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = \frac{\langle \mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle}{\sin b \sin c},$$

vagyis

$$\langle \mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle = -\sin b \sin c \cos \alpha,$$

másrészt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle &= \mathbf{ca}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \langle \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \mathbf{c} \rangle = \langle \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \\ &= -\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \cdot \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = -\cos a + \cos c \cos b. \quad \square \end{aligned}$$

Tétel (Gömbi koszinusz-tétel szögekre). *A szokásos jelölések mellett*

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az oldalakra vonatkozó koszinusz-tételt a poláris háromszögre:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\cos a^* = -\cos b^* \cos c^* - \sin b^* \sin c^* \cos \alpha^* \\ &= -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a. \quad \square \end{aligned}$$

Következmény. *Egy gömbháromszög a, b, c oldalaira teljesül az $a + b > c$ háromszögegyenlőtlenség.*

Bizonyítás. Az oldalakra vonatkozó koszinusz-tétel szerint

$$\cos a \cos b + \sin a \sin b > \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma > \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

azaz

$$\cos(|a - b|) > \cos c > \cos(a + b).$$

Mivel a koszinusz függvény a $[0, \pi]$ intervallumon szigorúan monoton csökken, és $|a - b|$ illetve c a $[0, \pi]$ intervallumba esnek, ezért $a + b > c > |a - b|$. $\square$

Következmény. *Egy gömbháromszög a, b, c oldalainak összege kisebb, mint 2π.*

Bizonyítás. Hosszabbítsuk meg az ABC gömbháromszög AB és AC oldalait a B és C csúcsokon túl. A meghosszabbítások az A-val átellenes A' pontban fogják metszeni egymást. Ha az ABC gömbháromszög A, B, C-vel szemközti oldalainak hossza rendre a, b, c, akkor az $A'BC$ gömbháromszög oldalai $a, \pi - b, \pi - c$ nagyságúak. Alkalmazva a háromszögegyenlőtlenséget az $A'BC$ gömbháromszög oldalaira a $(\pi - b) + (\pi - c) > c$ egyenlőtlenséghez jutunk, amiből átrendezéssel adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség. □

Következmény. *Egy gömbháromszög α, β, γ szögeire teljesülnek az*

$$\alpha + \beta < \pi + \gamma \text{ és } \alpha + \beta + \gamma > \pi$$

egyenlőtlenségek.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az oldalakra vonatkozó egyenlőtlenségeket a poláris gömbháromszögre. □

Egy gömbháromszögben tehát a szögek összege mindig nagyobb, mint π, nem úgy, mint az euklideszi síkon. Egy gömbháromszög szögösszegének a π-től való eltérését a gömbháromszög *szögtöbbletének* nevezzük. A szögtöbbletnek egyszerű geometriai jelentése van: nem más, mint a gömbháromszög területe.

Tétel. *Egy gömbháromszög területe megegyezik a szögtöbbletével.*

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy egy gömbkétszög területe arányos a kétszög nyílásszögével. A 2π teljes szöghöz tartozó gömbkétszög az egész gömb, melynek felszíne 4π, tehát az arányossági tényező 2. Egy α nyílásszögű gömbkétszög területe tehát 2α.

Tekintsünk egy ABC gömbháromszöget és a szögei illetve azok csúcsszögei által meghatározott gömbkétszögeket. Ezek együttes területe $4(\alpha + \beta + \gamma)$. A hat gömbkétszög háromrétűen fedi az ABC gömbháromszöget és annak középpontos tükörképét a gömbközéppontra nézve. A gömb többi pontját a hat gömbkétszög uniója egyrétűen fedi, tehát ha a gömbkétszögek területösszegéből kivonjuk az ABC gömbháromszög T területének 4-szeresét, végeredményül a gömbfelszínt kapjuk:

$$4(\alpha + \beta + \gamma) - 4T = 4\pi.$$

Ebből a bizonyítandó állítás egyszerű átrendezéssel adódik. □