

# Az MSc-képzés szakdolgozati témái

## Geometriai Tanszék

2022/2023

### 1. téma: Szabadon választható téma

**Témavezető:** A tanszék bármelyik oktatója.

**Rövid leírás:** Ha egy hallgató tetszőleges geometriai téma iránt érdeklődik, akkor témavezetőnek választhatja azt a szakembert, aki ehhez ért, és ebben segítséget tud neki nyújtani.

**Ajánlott irodalom:**

a hallgató és a témavezető megállapodása alapján.

**Szakirány:** bármely szakos hallgató

### 2. téma: Integráltranszformációk

**Témavezető:** Csikós Balázs

**Rövid leírás:** Egy  $\mathbb{R}^n$ -en értelmezett kompakt tartójú sima  $f$  függvény Radon-transzformáltja egy olyan függvény, mely a tér hipersíkjain van értelmezve, és egy hipersíkhöz az  $f$  függvénynek a hipersíkon vett integrálja értékét rendeli hozzá. Az elmélet fő kérdése, hogy  $f$  miként rekonstruálható a Radon-transzformáltjának ismeretében. A Radon-transzformáció elmélete kulcsfontosságú a modern tomográfiában. A Radon-transzformáció gömbi analogonja a Funk-transzformáció. A Funk-transzformációnak is egy szép elmélete van, mely összefonódik a gömbi harmonikus függvények elméletével. Több konvex geometriai rekonstrukciós probléma hátterében a Funk-transzformáció áll. A szakdolgozat célja a Radon-transzformáció, vagy valamely rokona esetén az alapvető tételek, inverziós formulák és az alkalmazások bemutatása.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] Daniel Hug, Rolf Schneider: Kinematic and Crofton formulae of integral geometry: recent variants and extensions.

**Szakirány:** matematikus, alkalmazott matematikus

**3. téma: Geometriai szélsőérték-feladatok és geometriai egyenlőtlenségek**

**Témavezető:** Csikós Balázs

**Rövid leírás:** A szakdolgozat célja egy geometriai szélsőérték-feladat megoldása, vagy valamely nevezetes témakör (izoperimetrikus, izodiametrális egyenlőtlenségek, ponthalmaz kontrakcióira nézve monoton geometriai mennyiségek, a Kneser–Poulsen-sejtés stb.) áttekintése.

**Ajánlott irodalom:**

A kiválasztott témától függ.

**Szakirány:** matematikus

**4. téma: Általánosított sokszögek**

**Témavezető:** Kiss György

**Rövid leírás:** Az általánosított sokszögek a véges projektív síkokhoz (ebben az értelemben általánosított háromszögek) hasonlóan néhány egyszerű illeszkedési axiómával definiált kombinatorikus struktúrák, melyek szorosan kapcsolódnak véges csoportokhoz és magasabb dimenziós véges terekhez. A diplomamunkában néhány kiválasztott általánosított sokszög geometriai tulajdonságait kellene feldolgozni.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] Feit, W. and Higman, G., *The nonexistence of certain generalized polygons*, *J. Algebra*, **1** (1964), 114–131.

[\*] Hirschfeld, J. W. P. and Thas, J. A., *General Galois Geometries*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

**Szakirány:** matematikus

**5. téma: Baker-Campbell-Hausdorff formula speciális Lie-algebrákban**

**Témavezető:** Lakos Gyula

**Rövid leírás:** A téma feldolgozása a szakirodalom alapján. Szükséges előismeretek: Baker-Campbell-Hausdorff formula, Poincaré-Birkhoff-Witt tétel.

**Ajánlott irodalom:**

**Szakirány:** matematikus

**6. téma: Hőmag konstrukciója kompakt sokaságokon**

**Témavezető:** Lakos Gyula

**Rövid leírás:** A téma feldolgozása a szakirodalom alapján. Szükséges előismeretek: Funkcionálanalízis, az operátorfélcsoportok elméletének alapjai.

**Ajánlott irodalom:**

**Szakirány:** matematikus

**7. téma: Helly típusú kérdések****Témavezető:** Naszódi Márton**Rövid leírás:** Helly tétele szerint, ha  $\mathbb{R}^n$ -beli konvex halmazok egy véges családjából tetszőlegesen kiválasztott  $(n + 1)$ -elemű részcsalád metszete nem üres, akkor az egész család metszete sem üres. Ennek a tételnek rengeteg variánsa van, amelyek már a síkon is, és persze magasabb dimenzióban izgalmas ismert nyitott kérdésekhez vezetnek.**Ajánlott irodalom:**[\*] Matoušek: *Lectures on Discrete Geometry*.**Szakirány:****8. téma: Konvex testek metszetei****Témavezető:** Naszódi Márton**Rövid leírás:** A magasdimenziós konvex testek vizsgálatában alkalmazott valószínűségi módszer egy gyönyörű és rendkívül hatásos példája a Dvoretzky-tétel. E tétel szerint tetszőleges  $k$  természetes számhoz van olyan  $n$  természetes szám, hogy minden  $n$ -dimenziós konvex testnek van olyan  $k$ -dimenziós metszete, amely „nagyon hasonlít” az euklideszi gömbre. Ezen tétel bizonyítását, továbbfejlesztéseit, következményeit lehet vizsgálni.**Ajánlott irodalom:**[\*] V. Milman, G. Schechtman: *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*.**Szakirány:****9. téma: Konvex test közelítése poliéderekkel****Témavezető:** Naszódi Márton**Rövid leírás:** Valamilyen módon adott egy magasdimenziós konvex test. Hogyan találunk olyan kevés csúcú vagy kevés hiperlapú poliédert, amely a testet - valamilyen szempontból- jól közelíti? Rengeteg kérdés tehető fel erre a sémára, sokra közülük ismertek jó algoritmusok, becslések, és sok izgalmas nyitott kérdés is van.**Ajánlott irodalom:**

Cikkek.

**Szakirány:****10. téma: Algebrai csomók****Témavezető:** Némethi András

**Rövid leírás:** Polinomok által meghatározott csomók elmélete, az algebrai sík görbék szingularitásait jellemzik. Nagyon sok terület találkozási pontja: algebrai geometria, topológia (homológia), kombinatorika (Newton diagrammok), gráfelmélet (feloldási gráfok), félcsoportelmélet. Pár éve a klasszikus elmélet új lendületet kapott az algebrai görbék szingularitásaihoz rendelt csomók HOMFLY polinomjainak és a görbék Hilbert sémáinak kapcsolatával.

**Ajánlott irodalom:**

könyvek, cikkek

**Szakirány:** mindegyik

### 11. téma: Hirzebruch-Riemann-Roch tétel

**Témavezető:** Némethi András

**Rövid leírás:** Klasszikus index tételek általánosítása, a sima és algebrai sokaságok indexeit (Euler karakterisztika, szignatúra, Todd osztály, vektornyalábok analitikus Euler karakterisztikái, stb) adja meg karakterisztikus osztályok (Chern, Todd, Euler, Pontrjagin) segítségével. Differenciáltopológia, algebrai geometria alaptétele. A globális geometria szinte minden tétele ehhez kötődik, ennek alkalmazása.

**Ajánlott irodalom:**

könyvek, cikkek

**Szakirány:** matematikus

### 12. téma: Komplex hiperfelület-szingularitások

**Témavezető:** Némethi András

**Rövid leírás:** Egy egyenlettel megadott terek szingularitásainak lokális leírása, Milnor klasszikus könyve alapján (Milnor fibrum, Milnor fibrálás, monodromia, a lokális csomó és a vele való kapcsolat). Kiindulási pont az algebrai geometria és differenciáltopológia felé.

**Ajánlott irodalom:**

könyvek, cikkek

**Szakirány:** matematikus

### 13. téma: Komplex sokaságok kohomológia csoportjai

**Témavezető:** Némethi András

**Rövid leírás:** A sima komplex projektív sokaságok kohomológia csoportjainak szerkezete nagyon különleges. Egyik legfontosabb klasszikus tulajdonság a Lefschetz-felbontás (kiindulási tételek: Lefschetz hipersík metszet tétele, és a Hard Lefschetz Theorem).

**Ajánlott irodalom:**

könyvek, cikkek

**Szakirány:** matematikus

#### 14. téma: Komplex felületszingularitások

**Témavezető:** Némethi András

**Rövid leírás:** Topológiai szempontból a felület szingularitások csomóit tanulmányozza, ezek 3 dimenziós gráf sokaságok. Analitikus (algebrai geometriai) szempontból analitikus invariánsokat tárgyal (kévekohomológia, geometriai génusz). Konkrétabb téma lehet a Seiberg Witten Invariáns Sejtés, ami a csomó Seiberg Witten invariánsát köti össze a geometriai génusszal.

**Ajánlott irodalom:**

könyvek, cikkek

**Szakirány:** matematikus

#### 15. téma: Algebrai görbék

**Témavezető:** Némethi András

**Rövid leírás:** A (komplex) affin vagy projektív tér görbéit egy polinom zerushelyeként definiáljuk. A polinom algebrai merevsége és a görbe alakja között érdekes összefüggések vannak, összekötve az algebrát a topológiával. Ez az algebrai geometria születési helye, elementárisan megfogalmazható százéves nyílt kérdésekkel. Magába foglalja a lokális algebrai csomók elméletét, de már az algebrai geometria globális invariánsaira (kohomológiaelmélet) is támaszkodik.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] könyvek, cikkek

**Szakirány:** matematikus

#### 16. téma: Speciális részsokaságok konstans görbület Riemann-terekben

**Témavezető:** Verhóczki László

**Rövid leírás:** Amennyiben a Riemann-sokaságban vett részsokaság nem hiperfelület, illetve nem görbe, akkor a normális vektornyalábja általában nem lapos. A szakdolgozó feladata olyan részsokaságok konstrukciója konstans görbületű Riemann-terekben, melyeknél a normális vektornyaláb görbületi tenzora eltűnik. Egy ilyen részsokaság esetében a párhuzamos normális vektormezők által értelmezni lehet az ún. parallel részsokaságokat. További feladat a parallel részsokaságok görbületi jellemzőinek a meghatározása.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] M. P. do Carmo: *Riemannian geometry*

[\*] B.-Y. Chen: *Geometry of submanifolds*.

**Szakirány:** matematikus

**17. téma: Kivételes kompakt Lie-csoportok szimmetrikus részcsoportjai**

**Témavezető:** Verhóczy László

**Rövid leírás:** Az irreducibilis szimmetrikus Riemann-terek osztályozása az egyszerű Lie-csoportok ún. szimmetrikus részcsoportjainak a meghatározásán alapul. A szimmetrikus Lie-részcsoporthoz el lehet jutni oly módon, hogy vesszük a megfelelő Lie-algebrák involutív automorfizmusait és azoknál a fixen hagyott elemekből álló részalgebrákat. A szakdolgozó feladata a kivételes kompakt Lie-csoportok szimmetrikus részcsoportjainak a meghatározása és jellemzése.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] S. Helgason: *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces.*

**Szakirány:** matematikus