Periodikus függvények összege

szakdolgozat

Harangi Viktor
matematikus hallgató

Témavezető: *Keleti Tamás*, docens
Analízis Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapest, 2007.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Keleti Tamásnak az érdekes témát valamint azt a rengeteg időt és figyelmet, amit rám szánt. Számtalan hasznos tartalmi és formai megjegyzésével is nagy mértékben segítette e szakdolgozat megírását.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény. Ha $a_1, a_2, \ldots, a_k$ valós számok esetén f felírható $f_1 + f_2 + \ldots + f_k$ alakban, ahol $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a_i-periodikus függvény, akkor azt mondjuk, hogy f *valós felbontható* az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ periódusokkal.

Tetszőleges a valós szám esetén bevezethető a Δ_a differencia operátor, melyre $(\Delta_a f)(x) = f(x + a) - f(x)$. Egy f függvény a-periodikussága úgy is megfogalmazható, hogy $\Delta_a f = 0$. Továbbá könnyen ellenőrizhetően a Δ operátorok egymással felcserélhető lineáris operátorok, így valós felbontható f esetén

$$\Delta_{a_1} \Delta_{a_2} \ldots \Delta_{a_k} f = 0. \tag{$*$}$$

Ez tehát szükséges feltétele a valós felbonthatóságnak. Az elégségesség már a legegyszerűbb esetben sem igaz: $f(x) = x$ és $a_1 = a_2 = a \neq 0$ esetén $\Delta_a f = a$ és $\Delta_a \Delta_a f = 0$. Azonban f nem bontható fel két a-periodikus függvény összegére, hiszen ekkor maga is a-periodikus lenne.

Ennek orvoslására két természetes út kínálkozik. Az egyik, hogy valamilyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ függvényosztályra szorítkozunk: $f \in \mathcal{F}$ és a felbontás tagjairól, az f_i függvényekről is megköveteljük, hogy $\mathcal{F}$-beliek legyenek. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$ rendelkezik a *felbontási tulajdonsággal (decomposition property)*, ha valahányszor egy $f \in \mathcal{F}$ függvényre fennáll ($*$), akkor léteznek $f_i \in \mathcal{F}$ a_i-periodikus függvények, melyek összege f.

A fentiekben láttuk, hogy ha egy függvényosztály tartalmazza az identitás függvényt, akkor biztosan nem rendelkezik a felbontási tulajdonsággal. Ez rögtön kizárja az összes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ osztályát vagy a folytonos függvények $C(\mathbb{R})$ osztályát. *Laczkovich Miklós* és *Révész Szilárd* [11]-ben illetve [12]-ben számos függvényosztályról megmutatták, hogy rendelkeznek a felbontási tulajdonsággal. Ilyen például a korlátos függvények $B(\mathbb{R})$, a korlátos folytonos függvények $BC(\mathbb{R})$, az egyenletesen folytonos korlátos függvények $UCB(\mathbb{R})$ osztálya illetve a korlátos mérhető függvények osztálya. A felbontási tulajdonsággal illetve periodikus függvényekre való felbontással kapcsolatos további eredmények [2], [4], [5], [6], [8], [9], [13], [14], [15]-ben találhatók.

Egy másik lehetőség az, hogy megpróbáljuk ($*$)-ot kiegészíteni hasonló típusú egyenletekkel úgy, hogy az már szükséges és elégséges feltételt adjon az $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ függvényeken. Vegyünk egy $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_N$ partíciót, melyre minden B_j-ben a periódusok összemérhetők, azaz hányadosuk racionális. Ilyenkor beszélhetünk a B_j-ben szereplő periódusok legkisebb közös többszöröséről, jelölje ezt b_j. Az $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$ felbontás esetén azon f_i-k összege, melyekhez tartozó a_i periódusok B_j-beliek egy b_j-periodikus g_j függvényt adnak. Ezen g_j-k összege pedig f, így $\Delta_{b_1}\Delta_{b_2}\ldots\Delta_{b_N} f = 0$. Tehát ezek az egyenletek is mind szükséges feltételek. A 2.3. szakaszban látni fogjuk, hogy ha ezt minden ilyen partícióra megköveteljük, abból már következik a valós felbonthatóság.

Ezt a karakterizációt, pontosabban az elégségesség bizonyításánál látott módszert fogjuk használni a következő probléma megoldására. Könnyen bizonyítható, hogy ha egy racionális értékű f függvényről tudjuk, hogy az bizonyos periódusokkal valós felbontható, akkor meg lehet adni olyan felbontást is, amelyben szereplő f_i függvények racionális értékűek. Ugyanezt kérdezhetjük egész értékű függvényekre is. *Károlyi*, *Keleti*, *Kós* és *Ruzsa* pozitív választ adtak [7]-ben, amennyiben a periódusok páronként összemérhetők. A 2.4. szakaszban tetszőleges periódusok esetén bizonyítjuk az állítást.

A *Farkassal*, *Keletivel* és *Révésszel* közös cikkünkben ([1]) a valós felbontható függvények karakterizációját jóval általánosabb környezetben vizsgáljuk, a 2. fejezet lényegében ennek a cikknek az eredményeit mutatja be a fent vázolt speciális esetben. A 3. fejezetben Abel-csoportok között menő $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ leképezések körében foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy mikor adható a fentihez hasonló szükséges és elégséges feltétel függvények periodikus felbontására előre adott periódusokkal. Ennek folyományaként belátjuk, hogy egy $\mathcal{A}$ Abel-csoportra pontosan akkor teljesül, hogy minden $\mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ függvényre a valós felbonthatóságból következik az egész felbonthatóság, ha $\mathcal{A}$ torziómentes vagy $\mathcal{A} = \bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^{n_p}}$ alakú. (Itt p a prímeken fut végig, $\bigoplus$ diszkrét direkt összeg és $n_p \in \{0, \infty\} \cup \mathbb{N}$.)

Mint már említettük, egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ valós felbontható függvénynek mindig létezik egész értékű felbontása is a megadott periódusokkal. Ha f korlátos, akkor létezik korlátos függvényekből álló valós felbontása is (ez következik abból, hogy $B(\mathbb{R})$ rendelkezik a felbontási tulajdonsággal). Azonban nem feltétlenül létezik korlátos függvényekből álló egész felbontása. Megadható olyan $0, 1$ értékű f függvény, amely megfelelően választott három periódus esetén (például $a_1 = 1$, a_2 irracionális, $a_3 = a_1 + a_2$) felbontható korlátos a_i-periodikus valós értékű függvények összegére, de nem írható fel korlátos a_i-periodikus egész értékű függvények összegeként [7]. A 4. és 5. fejezetekben azt a problémát vizsgáljuk, hogy milyen periódusok esetén van ilyen ellenpélda. Másképp fogalmazva: milyen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ periódusokra igaz, hogy ha egy egész értékű függvénynek van korlátos valós felbontása, akkor van korlátos egész felbontása is. Az derült ki, hogy ez a probléma nagy mértékben kapcsolódik az ún. *homogén megoldások*hoz, melyekkel a 4. fejezetben foglalkozunk.

Homogén egyenlet alatt a következőt értjük:

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_k = 0 \quad (h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ \Delta_{a_i} h_i = 0).$$

Ennek az egyenletnek a megoldásai azt mutatják, hogy egy f függvény különböző periodikus felbontásai miben térhetnek el egymástól, mennyire egyértelmű a felbontás. Ezen homogén egyenleteknek definiáljuk majd bizonyos *triviális megoldásait*. A 5. fejezetben megmutatjuk, hogy ugyanazon $a_1, a_2, \ldots, a_k$ periódusokra teljesül az, hogy a homogén egyenlet minden megoldása triviális, illetve az, hogy a korlátos valós felbonthatóságból következik a korlátos egész felbonthatóság. Ezek a periódusok azok, melyek közül bármely három, melyek páronként nem összemérhetők, lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}$ felett.

Keleti Tamás [10]-ben mérhető függvények felbontásait vizsgálta. Többek között karakterizálta azon $a_1, \ldots, a_k$ periódusokat, melyekre egy majdnem mindenütt egész értékű mérhető f függvényre a mérhető valós felbontás létezéséből következik majdnem mindenütt egész értékű mérhető felbontás létezése. A karakterizáció a következő feltételt adja a periódusokra. A periódusokon az összemérhetőség egy ekvivalencia-reláció. Minden osztályból vegyünk egy periódust, ezek reciprokainak kell lineárisan függetlennek lenni $\mathbb{Q}$ felett.

Mit mondhatunk, ha mindenütt egész értékű f esetén mérhető valós felbontás létezéséből mindenütt egész értékű mérhető felbontás létezésére akarunk következtetni? Ekkor is ugyanaz a feltétel a periódusokra? [10] szerint erre pontosan akkor igenlő a válasz, ha az $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvények körében tetszőleges periódusokra a valós felbonthatóságból következik az egész felbonthatóság. Ez utóbbit viszont a 2.4. szakaszban bizonyítjuk, így a mindenütt egész értékű esetben is ugyanaz a feltétel, mint a majdnem mindenütt egész értékűnél.

Az 6. fejezetben karakterizáljuk azon periódusokat is, melyekre $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvények esetén korlátos mérhető valós felbontás létezéséből következik korlátos mérhető egész felbontás létezése. A feltétel az, hogy egy-egy periódust véve az összemérhetőségi ekvivalencia-osztályokból, ezek közül bármely három lineárisan független, valamint a reciprokaik lineárisan függetlenek.

2. fejezet

Valós és egész felbonthatóság

2.1. Fogalmak

Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges Abel csoport.

2.1. Definíció. *Legyen $a \in \mathcal{A}$; $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Jelölje $\Delta_a f$ azt az $\mathcal{A} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre*

$$(\Delta_a f)(x) = f(x + a) - f(x) \qquad (\forall x \in \mathcal{A}).$$

*Az f függvényt a-**periodikusnak** hívjuk, ha $(\Delta_a f)(x) = 0 \ \ (\forall x \in \mathcal{A})$.*

Ezek a Δ_a differencia operátorok könnyen ellenőrizhetően egymással felcserélhető lineáris operátorok.

2.2. Definíció. *Legyen $a \in \mathcal{A}$; $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Az $\hat{f} = \Delta_a f$ függvényt az f a **szerinti deriváltjá**nak fogjuk nevezni. Azt is mondjuk majd, hogy f az $\hat{f}$ a **szerinti primitív függvénye** vagy a **szerinti felemeltje**.*

Világos, hogy két a szerinti primitív függvény eltérése a-periodikus.

Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ tetszőlegesek.

2.3. Definíció. *Az $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ függvény kielégíti a **differencia feltételt**, ha*

$$\Delta_{a_1} \Delta_{a_2} \ldots \Delta_{a_k} f = 0.$$

Ennek fennállását $DF_{a_1,\ldots,a_k}(f)$-fel jelöljük majd.

2.4. Definíció. *Az $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ függvény **valós felbontható** az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ periódusokkal, ha*

$$\exists f_1, f_2, \ldots, f_k : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \;\; f = f_1 + f_2 + \ldots + f_k \; ; \; \Delta_{a_i} f_i = 0 \; (1 \le i \le k).$$

Jelben: $VF_{a_1,\ldots,a_k}(f)$ vagy röviden $VF(f)$, ha világos, hogy mik a periódusok.

2.5. Definíció. *Az $f : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ függvény **egész felbontható** az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ periódusokkal, ha*

$$\exists g_1, g_2, \ldots, g_k : \mathcal{A} \to \mathbb{Z} \;\; f = g_1 + g_2 + \ldots + g_k \; ; \; \Delta_{a_i} g_i = 0 \; (1 \le i \le k).$$

Jelben: $EF_{a_1,\ldots,a_k}(f)$ vagy röviden $EF(f)$, ha világos, hogy mik a periódusok.

A Δ operátorok felcserélhetősége miatt a valós felbonthatóságból következik a differencia feltétel. Természetesen az egész felbonthatóság pedig a valós felbonthatóságot vonja maga után. Az érdekes kérdés az, hogy ezek az implikációk milyen esetben fordíthatók meg.

2.6. Definíció. *Egy $\mathcal{F}$ függvényosztályra azt mondjuk, hogy rendelkezik a **felbontási tulajdonság**gal (**decomposition property**), ha minden $f \in \mathcal{F}$ függvényre és tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_k$ periódusokra $DF_{a_1,\ldots,a_k}(f)$-ből következik, hogy f felírható $f_1 + f_2 + \ldots + f_k$ alakban, ahol $f_i \in \mathcal{F}$ a_i-periodikus függvény.*

Az $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, +)$ esetben a valós számoknak csak az additív struktúrája számít, emiatt sok esetben érdemes $\mathbb{R}$-re mint $\mathbb{Q}$ feletti vektortérre gondolni. Ennek megfelelően valós számok lineárisan függetlensége alatt mindig $\mathbb{Q}$ feletti függetlenséget értünk majd. Bevezetjük még az összemérhetőség fogalmát.

2.7. Definíció. *Az $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ valós számok **összemérhetők**, ha $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a és b **összemérhetetlenek**. Több valós szám legyen összemérhető, ha páronként összemérhetők.*

*Fogunk beszélni **irány**okról is $\mathbb{R}$-en. Az összemérhetőség ekvivalencia-reláció $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-n, az ekvivalencia-osztályokat nevezzük irányoknak. Világos, hogy lehet beszélni irányok $\mathbb{Q}$ feletti lineáris függetlenségéről is.*

2.8. Definíció. *Összemérhető valós számok esetén van értelme **legnagyobb közös osztó**ról illetve **legkisebb közös többszörös**ről beszélni, ezeket $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ illetve $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ fogja jelölni.*

2.2. Az átlagoló operátor

2.9. Definíció. *Legyenek* $a, m \in \mathbb{R}$; $\frac{m}{a} \in \mathbb{N}$. *Az* $M = M_a^m$ ***átlagoló operátor*** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvényekhez rendel ugyanilyen függvényeket a következő módon:*

$$(M_a^m f)(x) := \left(\frac{m}{a}\right)^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{\frac{m}{a}-1} f(x + j \cdot a).$$

2.10. Állítás. *Az* M_a^m *operátor alábbi tulajdonságai könnyen ellenőrizhetők:*

(a) lineáris,

(b) felcserélhető a Δ *operátorokkal, így a periodikusságot megtartja,*

(c) m*-periodikus függvényből* a*-periodikus lesz,*

(d) a*-periodikus függvényeket önmagukba viszi.*

A következő Lemmát rendszeresen használjuk majd olyan indukciós bizonyításoknál, amikor a felbontandó függvényt *lederiváljuk* valamelyik periódus szerint, és a kapott függvény indukció szerint létező felbontását *visszaemelve* próbáljuk megkapni az eredeti függvény egy megfelelő felbontását.

2.11. Lemma. *Legyenek* $a, b \in \mathbb{R}$; $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy* $\Delta_b \hat{f} = 0$. *Ekkor* $\hat{f}$ a *szerinti primitív függvényeiről a következőket állíthatjuk.*

(a) Ha $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, *akkor az alábbi állítások* ***teljesülnek****.*

- *Minden* a *szerinti* f *primitív függvény* $f_a + f_b$ *alakban írható, ahol* $\Delta_a f_a = \Delta_b f_b = 0$.
- *Létezik* a *szerinti* f *primitív függvény, ami* b*-periodikus.*

(b) Ha $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, *akkor az alábbi állítások* ***ekvivalensek****.*

(i) Minden a *szerinti* f *primitív függvény* $f_a + f_b$ *alakban írható, ahol* $\Delta_a f_a = \Delta_b f_b = 0$.

(ii) Létezik a *szerinti* f *primitív függvény, ami* b*-periodikus.*

(iii) $\hat{f}(x) + \hat{f}(x+a) + \ldots + \hat{f}(x+m-a) = 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$, *azaz* $M_a^m \hat{f} = 0$, *ahol* m *tetszőleges közös többszöröse* a*-nak és* b*-nek.*

(iv) $\hat{f}(x)+\hat{f}(x+d)+\ldots+\hat{f}(x+b-d)=0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ *, ahol* d *a legnagyobb közös osztója* a*-nak és* b*-nek.*

Ha az $\hat{f}$ *értékkészlete teljes egészében* $(\mathbb{R},+)$*-nak valamilyen* $\mathcal{B}$ *részcsoportjában fekszik, akkor a primitív függvény választható úgy is, hogy az ő értékkészlete is* $\mathcal{B}$*-ben legyen. (Ezt* $\mathcal{B}=\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ *esetén fogjuk használni.)*

BIZONYÍTÁS. **(a)** Mivel két a szerinti primitív függvény különbsége a-periodikus, ezért elég megmutatni, hogy létezik b-periodikus primitív függvény. Továbbá a primitív függvény megadása nyilvánvalóan egymástól függetlenül tehető meg az $a\mathbb{Z}+x_0$ alakú részhalmazain $\mathbb{R}$-nek. Egy ilyen részhalmazon egy pontban előírhatjuk az f primitív függvényt, a többi pontra ebből egyértelműen adódik f értéke. Rögzítsük x_0-t. A b-periodikusság miatt $\hat{f}\,|_{a\mathbb{Z}+x_0+i\cdot b}$ éppen $i\cdot b$-vel való eltoltja az $\hat{f}\,|_{a\mathbb{Z}+x_0}$ függvénynek ($i\in\mathbb{Z}$). Ez utóbbin adjuk meg valahogy f-et, az eltolt halmazokon pedig a megfelelő eltoltakkal definiáljuk. (Ezek az eltolt halmazok páronként diszjunktak az a és b összemérhetetlensége miatt.) Ezzel sikerült b-periodikusan definiálnunk f-et az $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}+x_0$ halmazon. Ilyen alakú halmazok diszjunkt uniójaként pedig előáll $\mathbb{R}$.

(b) A (ii) $\Rightarrow$ (i) irány ugyanúgy következik, mint az (a) résznél.

Az (i) $\Rightarrow$ (iii) implikáció bizonyításához vegyük a és b egy tetszőleges m közös többszörösét. Felhasználva, hogy M_a^m és Δ_a felcserélhetők, valamint hogy az M_a^m operátor m-periodikus (speciálisan b-periodikus) függvényből a-periodikusat csinál:

$$M_a^m\hat{f}=M_a^m\Delta_a(f_a+f_b)=M_a^m\Delta_a f_b=\Delta_a\left(M_a^m f_b\right)=0.$$

Megjegyezzük, hogy (iii) pontosan akkor teljesül valamelyik m közös többszörösre, ha az $m_0=[a,b]$ legkisebb közös többszörösre teljesül. Valóban,

$$M_a^m\hat{f}=M_a^{m_0}\hat{f},$$

ugyanis $\hat{f}(x+m_0)=\hat{f}(x)$ miatt mindkét operátor ugyanazon értékeket átlagolja, de M_a^m-ban minden érték $\frac{m}{m_0}$-szor szerepel. Ez persze az átlagon nem változtat.

Így (iii) $\Leftrightarrow$ (iv)-hez elég látni, hogy b-periodikus $\hat{f}$ függényre

$$\frac{m_0}{a}M_a^{m_0}\hat{f}=\hat{f}(x)+\hat{f}(x+d)+\ldots+\hat{f}(x+b-d).$$

Ez azért teljesül, mert modulo $\frac{b}{d}$ teljes maradékrendszert alkotnak a $\frac{0}{d},\frac{a}{d},\ldots,\frac{m_0-a}{d}$ illetve a $\frac{0}{d},\frac{d}{d},\ldots,\frac{b-d}{d}$ egész számok is, így mindkét oldalon ugyanazon értékeket adjuk össze, esetleg más sorrendben.

Végül (iii) $\Rightarrow$ (ii) belátásához tekintsük a $d\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ részhalmazt. Persze elég ezen megadni b-periodikusan az f primitív függvényt. Válasszuk meg f-et tetszőlegesen a 0 pontban. Ekkor $\Delta_a f = \hat{f}$ feltétel mellett egyértelműen terjed ki f a $0, a, 2a, \ldots, m_0 - a$ pontokra. Ha ezeket d-vel osztjuk, olyan egész számokat kapunk, melyek teljes maradékrendszert alkotnak modulo $\frac{b}{d}$. Emiatt ezekről a pontokról a $\Delta_b f = 0$ feltétel mellett egyértelműen terjed ki a függvényünk $d\mathbb{Z}$-re. A kapott f tehát biztosan b-periodikus lesz, de mi a helyzet a $(\Delta_a f)(x) = \hat{f}(x)$ feltétellel? Az $x = 0, a, \ldots, m_0 - 2a$ pontokban teljesül, hiszen erre az elején ügyeltünk. Az $x = m_0 - a$ pontban is igaz, mert

$$f(m_0) - f(m_0 - a) = f(0) - f(m_0 - a) = -\sum_{i=0}^{\frac{m_0}{a}-2} \hat{f}(i \cdot a) \overset{(iii)}{=} \hat{f}(m_0 - a).$$

A többi pontban pedig a b-periodikus kiterjesztés miatt triviálisan igaz.

Annak bizonyítása van még hátra, hogy $\hat{f}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B} \leq (\mathbb{R}, +)$ esetén f is választható úgy, hogy $f(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}$. Ehhez annyit kell csupán megjegyezni, hogy amikor a fentiekben valahol azt mondtuk, hogy bizonyos pontokban válasszuk meg tetszőlegesen f értéket, ezután vigyázzunk rá, hogy $\mathcal{B}$-beli értéket válasszunk. Ekkor a többi pontra automatikusan $\mathcal{B}$-értékűként terjed ki f, hiszen az *előírt* különbségek is $\mathcal{B}$-beliek. ∎

Mi a helyzet, ha az $\hat{f}$ függvény több periódus szerint is periodikus? Ekkor a következőt állíthatjuk.

2.12. Lemma. *Legyenek $a, b_1, \ldots, b_r$ periódusok lineárisan függetlenek, az $\hat{f}$ pedig olyan függvény, ami b_i-periodikus minden $1 \leq i \leq r$-re. Ekkor létezik olyan a szerinti f primitív függvénye $\hat{f}$-nak, ami b_i-periodikus minden $1 \leq i \leq r$-re.*

BIZONYÍTÁS. Ugyanúgy járunk el, mint az előző lemma (a) részének bizonyításánál. Rögzített x_0-ra $a\mathbb{Z} + x_0$ halmazon megválasztjuk az f primitív függvényt, majd ezt kiterjsztjük az $a\mathbb{Z}+b_1\mathbb{Z}+\ldots+b_r\mathbb{Z}+x_0$ halmazra $b_1, \ldots, b_r$-periodikusan. Minden pontban egyértelműen definiált f értéke, hiszen $a\mathbb{Z} + b_1\mathbb{Z} + \ldots + b_r\mathbb{Z}$ pontjai egyértelműen írhatók fel $a, b_1, \ldots, b_r$ egész együtthatós lineáris kombinációjaként a lineáris függetlenség miatt. Az is világos, hogy így primitív függvényt kapunk az $a\mathbb{Z} + b_1\mathbb{Z} + \ldots + b_r\mathbb{Z} + x_0$ halmazon. Ilyen halmazok diszjunkt uniójaként pedig előáll $\mathbb{R}$. ∎

2.3. Valós felbonthatóság karakterizációja

Mint már a bevezetőben említettük, az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények osztálya nem rendelkezik a felbontási tulajdonsággal, azaz $\Delta_{a_1} \dots \Delta_{a_k} f = 0$ nem elégséges feltétele a valós felbonthatóságnak. Ezt az egyenletet hasonló típusúakkal szeretnénk kiegészíteni olyan módon, hogy így már szükséges és elégséges feltételt kapjunk.

Vegyünk egy $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_N$ partíciót, melyre minden B_j-ben a periódusok összemérhetők. Jelölje b_j a B_j-ben szereplő periódusok legkisebb közös többszörösét. Egy $f = f_1 + f_2 + \dots + f_k$ felbontás esetén azon f_i-k összege, melyekhez tartozó a_i periódusok B_j-beliek, egy b_j-periodikus g_j függvény. Ezen g_j-k összege pedig f, így $DF_{b_1,\dots,b_N}(f)$, azaz $\Delta_{b_1}\Delta_{b_2} \dots \Delta_{b_N} f = 0$.

2.13. Definíció. *Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kielégíti az $ADF_{a_1,\dots,a_k}$* ***általánosított differencia feltételt****, ha az összes olyan $\{a_1, a_2, \dots, a_k\} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_N$ partícióra, ahol minden B_j-ben a periódusok összemérhetők, fennáll, hogy*

$$\Delta_{b_1}\Delta_{b_2} \dots \Delta_{b_N} f = 0, \tag{2.1}$$

ahol b_j a B_j-ben szereplő periódusok legkisebb közös többszöröse. Ha f teljesíti a fentieket, azt $ADF_{a_1,\dots,a_k}(f)$-fel jelöljük.

Az imént láttuk, hogy ADF szükséges feltétele a valós felbonthatóságnak. Az alábbi tétel állítása az, hogy elégséges is. Ezt a karakterizációt [1]-ben adtuk, ott jóval általánosabb környezetben bizonyítottuk a tételt, most maradunk az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeknél.

2.14. Tétel. (Farkas, Harangi, Keleti, Révész) *Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_k$ tetszőleges periódusok, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor*

$$VF_{a_1,\dots,a_k}(f) \iff ADF_{a_1,\dots,a_k}(f).$$

BIZONYÍTÁS. A hiányzó $\Leftarrow$ irányt a periódusok számára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. A $k = 1$ eset triviális, tegyük fel, hogy $k \geq 2$ és legfeljebb $k - 1$ periódusra az állítás igaz. Vegyük az $a_1, a_2, \dots, a_k$ periódusokat. Feltehető, hogy közülük azok, amik a_1-gyel összemérhetők $a_1, a_2, \dots, a_l$ valamilyen $1 \leq l \leq k$ egészre. Ezek legkisebb közös többszörösét jelölje m. Az indukciós feltevést két függvényre is alkalmazzuk. Könnyű meggondolni, hogy $ADF_{a_1,\dots,a_k}(f)$-ből következik $ADF_{a_2,\dots,a_k}(\Delta_{a_1} f)$ illetve $ADF_{a_{l+1},\dots,a_k}(\Delta_m f)$ is. Ezek tehát valós felbonthatók a megfelelő periódusokkal. Legyen $\hat{f} = \Delta_{a_1} f; h = \Delta_m f$, illetve

$$\begin{aligned} \hat{f} = \hat{f}_2 + \dots \hat{f}_l + \hat{f}_{l+1} + \dots + \hat{f}_k \quad & (\hat{f}_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \Delta_{a_i} \hat{f}_i = 0), \\ h = h_{l+1} + \dots + h_k \quad & (h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \Delta_{a_i} h_i = 0) \end{aligned}$$

a felbontásaik. Alkalmazzuk a 2.9. Definícióban bevezetett $M = M_{a_1}^m$ operátort az $\hat{f}_i$ függvényekre: $(M\hat{f}_i)$ a_i-periodikus minden $2 \le i \le k$-ra, sőt $2 \le i \le l$ esetén még a_1-periodikus is. Továbbá fennáll, hogy

$$h(x) = f(x+m) - f(x) = \sum_{t=0}^{\frac{m}{a_1}-1} \left(f(x + (t+1)\cdot a_1) - f(x + t\cdot a_1) \right) = \\ = \sum_{t=0}^{\frac{m}{a_1}-1} \hat{f}(x + t\cdot a_1) = \frac{m}{a_1} \cdot (M\hat{f})(x) = \frac{m}{a_1} \cdot \sum_{i=2}^{k} (M\hat{f}_i)(x).$$

Az utolsó egyenlőség M linearitásából következik. Írjuk be h felbontását, majd osszunk át:

$$\left(\frac{m}{a_1}\right)^{-1} \cdot (h_{l+1} + \ldots + h_k) = M\hat{f}_2 + \ldots + M\hat{f}_k. \tag{2.2}$$

Most megadjuk $\hat{f}$-nek egy másik felbontását ($\hat{g}_i$).

$$\hat{g}_i := \begin{cases} \hat{f}_i - M\hat{f}_i & (2 \le i \le l) \\ \hat{f}_i - M\hat{f}_i + \left(\frac{m}{a_1}\right)^{-1} \cdot h_i & (l+1 \le i \le k) \end{cases}$$

Ez valóban felbontást ad, hiszen (2.2) miatt $\sum_{i=2}^{k} \hat{g}_i = \sum_{i=2}^{k} \hat{f}_i = \hat{f}$, és persze $\hat{g}_i$ a_i-periodikus, mert ilyenek összegéből kaptuk. Azonban ez a felbontás már *felemelhető* f egy felbontásává. A 2.11. Lemma vizsgálja, hogy mi a feltétele, hogy $\hat{g}_i$-nek legyen olyan a_1 szerinti primitív függvénye, amely a_i-periodikus.

Ha $l+1 \le i \le k$, akkor a_1 és a_i nem összemérhetők – ilyenkor mindig létezik a megfelelő primitív függvény.

Ha $2 \le i \le l$, akkor pedig $M\hat{g}_i = 0$ a felemelés feltétele. Ez pedig most teljesül, hiszen $M\hat{f}_i$ a_1-periodikus, így M önmagába viszi, emiatt

$$M\hat{g}_i = M\hat{f}_i - M(M\hat{f}_i) = 0.$$

Kapunk tehát $g_2, \ldots, g_l, g_{l+1}, \ldots, g_k$ primitív függvényeket, melyek a megfelelő a_i szerint periodikusak. Ezek összegének a_1 szerinti deriváltja $\hat{f}$. Mivel ez f-re is igaz, ezért $f - (g_2 + \ldots + g_k)$ egy a_1-periodikus függvény, ezt válasszuk g_1-nek. ■

A bizonyításban megadott eljárás racionális értékű f esetén racionális értékű felbontást ad. Azonban ennél sokkal több is következik, erről lesz szó a 2.4. szakaszban.

Megjegyezzük, hogy ha csak azt akarnánk bizonyítani, hogy racionális értékű, valós felbontható f esetén létezik racionális felbontás is, akkor jóval egyszerűbben is eljárhatunk. A legelegánsabb, ha veszünk egy Hamel-bázist, mely tartalmazza 1-et, és a valós $f_i(x)$ felbontás helyett tekintjük a következőt. Felírjuk $f_i(x)$-et a Hamel-bázisban, és az 1-hez tartozó együtthatót választjuk $g_i(x)$-nek. Ez kétség kívül racionális értékű, a_i-periodikus, és összegben $f(x)$-et állítja elő, hiszen 1 együtthatója $f(x)$-nél maga $f(x)$.

2.4. Egész felbonthatóság

2.15. Tétel. (Farkas, Harangi, Keleti, Révész) *Tetszőleges $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ periódusokra és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvényre fennáll, hogy*

$$VF_{a_1,a_2,\dots,a_k}(f) \Longleftrightarrow EF_{a_1,a_2,\dots,a_k}(f),$$

azaz f pontosan akkor áll elő a_i-periodikus valós értékű függvények összegeként, ha előáll a_i-periodikus egész értékű függvények összegeként.

BIZONYÍTÁS. Az $\Leftarrow$ irány triviális, a másik irányt indukcióval bizonyítjuk, egy periódus esetén az állítás persze igaz. Feltesszük, hogy k-nál kevesebb periódus esetén is igaz az állítás. Az a_1-gyel összemérhető periódusok továbbra is legyenek $a_1, a_2, \dots, a_l$, ezek legkisebb közös többszöröse m.

Vegyünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvényt, amely $a_1, \dots, a_k$ periódusokkal valós felbontható. Ekkor $\hat{f} = \Delta_{a_1} f$ ugyancsak egész értékű, és valós felbontható $a_2, \dots, a_k$ periódusokkal. (Hiszen f felbontását deriválva az a_1-periodikus tag eltűnik.) Hasonlóan, $h = \Delta_m f$ egész értékű és valós felbontható $a_{l+1}, \dots, a_k$ periódusokkal. (Ezúttal f felbontását m szerint deriváljuk, így az $a_1, \dots, a_l$-periodikus tagok mind eltűnnek.)

Így az indukció miatt léteznek $\hat{f}_i$ ($2 \le i \le k$) illetve h_i ($l+1 \le i \le k$) egész értékű felbontások is. Innen a 2.14. Tétel gondolatmenetét követve elkészítjük $\hat{f}$-nak azt a másik $\hat{g}_i$ felbontását, ami már a_1 szerint *felemelhető*. Ebben az új felbontásban $\hat{f}_i$, $M_{a_1}^m \hat{f}_i$ és $\left(\frac{m}{a_1}\right)^{-1} h_i$ függvények szerepelnek, azaz a $\hat{g}_i$-k értékkészlete $\mathbb{Q}$-ban van, és a fellépő nevezők mind osztói $\left(\frac{m}{a_1}\right)$-nek. A 2.11.

Lemmánál tett megjegyzéseink értelmében $\hat{g}_i$-khez úgy is választható a megfelelő primitív függvény, hogy ez rájuk is igaz legyen. Vagyis f-nek olyan felbontását kapjuk, melyben a függvények racionális értékűek, és az előforduló nevezők mind osztói $\left(\frac{m}{a_1}\right)$-nek.

Azonban a_1 szerepét lecserélhetjük bármely más, vele összemérhető a_i periódusra ($i = 1, 2, \dots, l$). Azt kapjuk, hogy

$$\forall\, 1 \le i \le l \ \exists\, f = f_1^i + f_2^i + \ldots + f_k^i,$$

ahol $\frac{m}{a_i} \cdot f_j^i(x)$ egész minden x-re, illetve $\Delta_{a_j} f_j^i = 0$.

Könnyen átgondolhatóan $(\frac{m}{a_1}, \frac{m}{a_2}, \dots, \frac{m}{a_l}) = 1$, így vannak $c_1, c_2, \dots, c_l \in \mathbb{Z}$ együtthatók, melyekkel

$$c_1 \cdot \frac{m}{a_1} + c_2 \cdot \frac{m}{a_2} + \ldots + c_l \cdot \frac{m}{a_l} = 1.$$

Vegyük az f_j^i felbontások következő lineáris kombinációját:

$$g_j(x) := \sum_{i=1}^{l} c_i \cdot \frac{m}{a_i} \cdot f_j^i(x).$$

Az így definiált $g_j(x)$ a_j-periodikus, hiszen ilyenek lineáris kombinációja. Sőt, $g_j(x)$ egész, hiszen $\frac{m}{a_i} \cdot f_j^i(x)$ is egész minden i-re. Végül igazolnunk kell, hogy valóban $f(x)$ felbontását adják, amit a

$$\sum_{j=1}^{k} g_j(x) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{l} c_i \frac{m}{a_i} f_j^i(x) = \sum_{i=1}^{l} c_i \frac{m}{a_i} \sum_{j=1}^{k} f_j^i(x) = \left(\sum_{i=1}^{l} c_i \frac{m}{a_i} \right) \cdot f(x) = f(x)$$

számolás mutat. ∎

3. fejezet

Leképezések Abel-csoportok között

Mint már a bevezetőben említettük, az előző fejezet eredményei jóval általánosabban is igazak. [1]-ben tetszőleges A halmazon vett $T : A \to A$ invertálható transzformációkat tekintünk, és egy $f : A \to \mathbb{R}$ függvényt akkor nevezünk T-periodikusnak, ha $\Delta_T f := f \circ T - f = 0$. Ha adottak $T_1, \ldots, T_k$ páronként felcserélhető transzformációk, akkor a 2.14. Tételhez hasonló, de annál bonyolultabb szükséges és elégséges feltétel adható arra, hogy egy $A \to \mathbb{R}$ függvény mikor írható fel T_i-periodikus függvények összegeként.

Ennek speciális esetét kapjuk, ha egy $\mathcal{A}$ Abel-csoporton az eltolásokat, azaz a $T(x) = x + a$ ($a \in \mathcal{A}$) alakú transzformációkat tekintjük. Ezek ugyanis automatikusan egymással felcserélhetők, így az általános tétel alkalmazható rájuk. (Ebben a speciális esetben az általános tételben szereplő feltétel az alábbi (2) feltétellé egyszerűsödik.) Arra vagyunk kíváncsiak, hogy ez akkor is jó feltétel marad-e, ha valós értékű függvények helyett $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ leképezések körében vagyunk, ahol $\mathcal{B}$ valamilyen Abel-csoport. Ezt a kérdést vizsgáljuk ebben a fejezetben.

Legyenek tehát $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ tetszőleges Abel-csoportok. Milyen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ esetén ekvivalens az alábbi két állítás tetszőleges $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{A}$ elemekre és $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ függvényre?

(1) Az f függvény felbontható a_j-periodikus $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ függvények összegére.

(2) Minden $B_1 \cup \ldots \cup B_N = \{a_1, \ldots, a_k\}$ partícióra és tetszőleges $b_j \in [B_j]$ elemekre fennáll, hogy

$$\Delta_{b_1} \ldots \Delta_{b_n} f = 0.$$

(Itt $[B]$ alatt a B-be eső elemek közös többszörösei alkotta $\bigcap_{b \in B} \langle b \rangle$ részcsoportot értjük. Ez egy véges vagy végtelen ciklikus csoport, és (2)-t nyilvánvalóan elég ellenőrizni a $[B_j]$ valamelyik b_j generátorelemére.)

Az $(1) \Rightarrow (2)$ implikáció tetszőleges $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ esetén fennáll. (Ez triviálisan bizonyítható, és ugyanúgy megy, mint az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esetben.) A továbbiakban a másik iránnyal foglalkozunk.

3.1. Pozitív eredmények

Az alábbi esetekben fennáll (1) és (2) ekvivalenciája.

- *$\mathcal{A}$ tetszőleges, $\mathcal{B} = \mathbb{R}$.* [1]

- *$\mathcal{A}$ torziómentes, $\mathcal{B}$ torziómentes.* [1]

- *$\mathcal{A} = \mathbb{Z}_m$ ciklikus csoport valamilyen m egészre, $\mathcal{B}$ torziómentes.*
  Ezt vissza lehet vezetni az $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$ esetre, ami már torziómentes. Az $f : \mathbb{Z}_m \to \mathcal{B}$ függvény helyett vegyük ugyanis azt az $\tilde{f} : \mathbb{Z} \to \mathcal{B}$ függvényt, amire $\tilde{f}(x) = f(x \bmod m)$. Tegyük fel, hogy f-re teljesül bizonyos $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ periódusok esetén a (2) feltétel. Mivel $\mathbb{Z}_m$-ben a Δ_a operátor megegyezik a $\Delta_{(a,m)}$ operátorral, ezért az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy a_i osztja m-et minden i-re. Ha mint $\mathbb{Z}$-beli számokra gondolunk ezekre a periódusokra, akkor azt jelöljük írásban is, $a_i^{\mathbb{Z}}$-vel. Mivel $B \subset \mathbb{Z}_m$ esetén a megfelelő $B^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$ halmazra a $[B^{\mathbb{Z}}] \leq \mathbb{Z}$ részcsoport $\bmod m$ éppen a $[B] \leq \mathbb{Z}_m$ részcsoportba megy át, ezért $\tilde{f}$-re teljesül (2) az $a_1^{\mathbb{Z}}, \ldots, a_k^{\mathbb{Z}}$ periódusokkal. Így $\tilde{f}$-nek létezik a megfelelő $\tilde{f}_j : \mathbb{Z} \to \mathcal{B}$ felbontása. A periódusok osztják m-et, így a felbontás minden tagja m-periodikus, vagyis ebből kaphatjuk f-nek egy $f_j : \mathbb{Z}_m \to \mathcal{B}$ felbontását.

- *$\mathcal{A} = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ a kváziciklikus csoport valamilyen p prímre, $\mathcal{B}$ torziómentes.*
  Világos, hogy mindig elég a kérdést az $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{A}$ periódusok által generált részcsoporton vizsgálni. Azonban $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ végesen generált részcsoportjai $\mathbb{Z}_{p^n}$ prímrendű ciklikusok, amikre pedig már tudjuk, hogy fennáll az ekvivalencia.

- *$\mathcal{B}$ torziómentes,*
  $$\mathcal{A} = \bigoplus_{p \text{ prím}} \mathbb{Z}_{p^{n_p}},$$

ahol ez egy diszkrét direkt összeg, és n_p lehet 0, pozitív egész és ∞ is.
Ezen $\mathcal{A}$ csoport végesen generált részcsoportjai mind ciklikusak.

3.2. Negatív eredmények

Az alábbi esetekben **nem** áll fenn az ekvivalencia.

- *$\mathcal{A} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathcal{B} = \mathbb{Z}$.*
  Legyenek $a_1 = (1,0); a_2 = (0,1); a_3 = (1,1) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Egy $f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{R}$ függvényre gondolhatunk mint 2×2-es valós mátrixra: $\begin{pmatrix} f(0,0) & f(0,1) \\ f(1,0) & f(1,1) \end{pmatrix}$. Tekintsük a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot. A hozzá tartozó $f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ függvényről látjuk be, hogy teljesül rá (2), de (1) nem. Vegyük a következő felbontását:

  $$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Világos, hogy az ezekhez tartozó $f_j : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{R}$ függvények a_j-periodikusak ($j = 1,2,3$). Tehát egy $f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ függvényt felbontottunk valós a_j-periodikus függvények összegére, így $\mathcal{B} = \mathbb{R}$ esetén (1) teljesül, ekkor persze (2) is. A (2) feltétel azonban nem függ $\mathcal{B}$-tól, így ez $\mathcal{B} = \mathbb{Z}$ esetén is teljesül.

  Meg kell még mutatnunk, hogy nincs egész értékű felbontás. Világos, hogy egy egész értékű a_j-periodikus $g_j : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ függvényhez tartozó 2×2-es mátrix elemeinek az összege páros kell legyen ($j = 1,2,3$). Ilyen tulajdonságú mátrixok összege is ilyen. Azonban a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ jól láthatóan nem ilyen.

- *$\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ tetszőleges p prímre, $\mathcal{B} = \mathbb{Z}$.*
  Az előző példát általánosítjuk. Tekintsük a következő $p+1$ darab periódust

  $$a_1 = (1,0); a_2 = (1,1); \ldots; a_p = (1, p-1); a_{p+1} = (0,1),$$

  valamint az alábbi $f_j : \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \to \mathbb{R}$ függvényeket:

  $$f_j(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } (x,y) \text{ skalárszorosa } a_j\text{-nek} \\ \frac{1}{p} & \text{különben.} \end{cases}$$

Világos, hogy az így definiált f_j függvények a_j-periodikusak. Meggondolható az is, hogy ezek összege éppen az

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = y = 0 \\ 1 & \text{különben} \end{cases}$$

egész értékű függvény. Ennek tehát van valós felbontása az $a_1, \ldots, a_{p+1}$ periódusokkal, de nincs egész felbontása, mert a függvényértékek összege $p^2 - 1$, ami nem osztható p-vel.

- *$\mathcal{A} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$, $\mathcal{B} = \mathbb{Z}$.*
  Ugyanaz a példa némi módosítással jó itt is. A periódusok megint

  $$a_1 = (1,0); a_2 = (1,1); \ldots; a_p = (1, p-1); a_{p+1} = (0,1),$$

  a függvények pedig az $1 \le j \le p$ esetben

  $$f_j(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } (x,y) \text{ skalárszorosa } a_j\text{-nek} \\ \frac{1}{p} & \text{különben,} \end{cases}$$

  illetve a $j = p+1$ esetben

  $$f_{p+1}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } p \text{ osztja } x\text{-et} \\ \frac{1}{p} & \text{különben.} \end{cases}$$

  Ekkor minden $\{kp, kp+1, \ldots, (k+1)p-1\} \times \mathbb{Z}_p$ alakú halmazon ugyanazt kapjuk, mint az imént $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$-n.

- *$\mathcal{A}$-nak van $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$-vel vagy $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$-vel izomorf részcsoportja, $\mathcal{B} = \mathbb{Z}$.*
  Az előző példákat a részcsoporton kívül 0-ként terjesztjük ki.

- *$\mathcal{A}$-nak van $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$-vel vagy $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$-vel izomorf részcsoportja, $\mathcal{B}$ „nem osztható p-vel”.*
  Azalatt, hogy $\mathcal{B}$ nem osztható p-vel, azt értjük, hogy van olyan $c \in \mathcal{B}$ elem, melyhez nincs $d \in \mathcal{B}$ úgy, hogy $c = pd$. Ágyazzuk be $\mathcal{B}$-t valamilyen $\mathcal{B}_0$ osztható Abel csoportba, és legyen $c_0 \in \mathcal{B}_0$ olyan, hogy $c = pc_0$. Ekkor a korábbi példákat 1 helyett c-vel, $\frac{1}{p}$ helyett c_0-val elkészítve olyan $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ függvényt kapunk, aminek bizonyos periódusokkal lesz $\mathcal{B}_0$ értékű felbontása, így (2) teljesül rá. Azonban $\mathcal{B}$ értékű felbontása nincs, mert ekkor – a korábbiakhoz hasonlóan – kapnánk, hogy $(p^2-1)c = pd$ valamilyen $d \in \mathcal{B}$-re, amiből $c = p(pc-d)$ következne.

Megjegyezzük, hogy ha a $\mathcal{B}$ Abel-csoport nem osztható, akkor lehet hozzá találni olyan $\mathcal{A}$ Abel csoportot, hogy az $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ párra ne álljon fenn (1) és (2) ekvivalenciája. Valóban, ha $\mathcal{B}$ nem osztható, akkor van olyan p prím, amivel nem osztható, és ekkor $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ megfelelő választás.

Minden ellenpéldánkban az $\mathcal{A}$ szerepét játszó csoportnak volt torziója.

3.1. Kérdés. *Igaz-e, hogy ha $\mathcal{A}$ torziómentes, akkor tetszőleges $\mathcal{B}$ Abel-csoport esetén (1) és (2) ekvivalensek?*

3.3. Valós és egész felbonthatóság

Meghatározzuk azon $\mathcal{A}$ Abel-csoportokat, melyekre tetszőleges $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{A}$ periódusok esetén egy $f : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ függvény valós felbonthatóságából következik az egész felbonthatósága. (A 2.15. Tétel azt állítja, hogy $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ esetén ez az implikáció fennáll.) Mivel a valós felbonthatóság tetszőleges $\mathcal{A}$ Abel-csoport esetén ekvivalens (2)-vel, ezért a feltétel az, hogy $\mathcal{A}$-ra $\mathcal{B} = \mathbb{Z}$ esetén is legyen ekvivalens a két állítás. A fejezet eddigi részeiben már láttuk, hogy ez teljesül, ha $\mathcal{A}$ torziómentes vagy $\mathcal{A} = \bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^{n_p}}$ alakú (p a prímeken fut végig, $\bigoplus$ diszkrét direkt összeg és $n_p \in \{0, \infty\} \cup \mathbb{N}$). Másrészt mutattunk ellenpéldát azokban az esetekben, mikor $\mathcal{A}$ tartalmaz $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$-vel vagy $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$-vel izomorf részcsoportot. Ezek az esetek azonban már kiadják az összes Abel-csoportot (lásd 3.7. Állítás). Így beláttuk az alábbi Tételt.

3.2. Tétel. *Az $\mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ függvényekre akkor és csak akkor következik a valós felbonthatóságból az ugyanolyan periódusokkal való egész felbonthatóság, ha $\mathcal{A}$ torziómentes vagy $\mathcal{A} = \bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^{n_p}}$ valamilyen $n_p \in \{0, \infty\} \cup \mathbb{N}$-ekre.*
(A 3.7. Állításban két további ekvivalens jellemzését kapjuk az ilyen csoportoknak.)

Rátérünk annak a kérdésnek a vizsgálatára, hogy melyek azok az $\mathcal{A}$ Abel-csoportok, melyekre az $\mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ leképezésekből álló függvényosztály rendelkezik a felbontási tulajdonsággal (lásd 2.6. Definíció). Ezt a függvényosztályt kissé pongyolán $\{\mathcal{A} \to \mathbb{Z}\}$-vel jelöljük a továbbiakban.

Ha $\mathcal{A}$ nem torziócsoport, azaz létezik $a \in \mathcal{A}$, melyre $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$, akkor a következő $f : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ leképezés mutatja, hogy $\{\mathcal{A} \to \mathbb{Z}\}$ nem rendelkezik a felbontási tulajdonsággal:

$$f(x) := \begin{cases} n & x = na \;\; (n \in \mathbb{Z}) \\ 0 & x \notin \langle a \rangle \, . \end{cases}$$

Valóban, az f függvényre $\Delta_a\Delta_a f = 0$, azonban f nem a-periodikus.

Ha $\mathcal{A}$ tartalmaz $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$-vel izomorf részcsoportot, akkor a korábbiak szerint már a valós felbonthatóságból sem következik az egész felbonthatóság, azaz vannak olyan $a_1, \ldots, a_k$ periódusok és $f : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ függvény, hogy f felbontható a_i-periodikus $\mathcal{A} \to \mathbb{R}$ függvények összegére, de egész értékűek összegére nem. Azonban a valós felbonthatóságból következik $\Delta_{a_1} \ldots \Delta_{a_k} f = 0$, így f mutatja, hogy ebben az esetben sem rendelkezhet $\{\mathcal{A} \to \mathbb{Z}\}$ a felbontási tulajdonsággal.

Ha $\mathcal{A} = \bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^{n_p}}$, akkor könnyen ellenőrizhetően $\mathcal{A}$ minden végesen generált részcsoportja véges ciklikus. Vegyünk $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{A}$ tetszőleges periódusokat. Belátjuk, hogy egy $f : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ függvényre a $\Delta_{a_1} \ldots \Delta_{a_k} f = 0$ feltételből következik, hogy f egész felbontható $a_1, \ldots, a_k$ periódusokkal. Most is elég a kérdést az $\mathcal{A}_0 := \langle a_1, \ldots, a_k \rangle \leq \mathcal{A}$ végesen generált részcsoporton vizsgálni, ami az előzőek szerint véges ciklikus csoport. [12]-ben megmutatták, hogy tetszőleges A halmazra, az $\{f : A \to \mathbb{R} | f \text{ korlátos}\}$ függvények rendelkeznek a felbontási tulajdonsággal. Most $\mathcal{A}_0$ véges, így f rajta automatikusan korlátos, vagyis létezik $f_i : \mathcal{A}_0 \to \mathbb{R}$ a_i-periodikus valós felbontás. Ebből pedig már 3.2. Tétel miatt következik a megfelelő periódusokkal történő egész értékű felbontás létezése is.

Mivel e három eset (nem torziócsoport; tartalmaz $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$-t; $\mathcal{A} = \bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^{n_p}}$) kiadja az összes Abel-csoportot (lásd a 3.6. Lemma), ezért a következő Tételt kaptuk.

3.3. Tétel. *Egy $\mathcal{A}$ Abel-csoportra $\{\mathcal{A} \to \mathbb{Z}\}$ pontosan akkor rendelkezik a felbontási tulajdonsággal, ha $\mathcal{A} = \bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^{n_p}}$ valamilyen $n_p \in \{0, \infty\} \cup \mathbb{N}$-ekre.*
(A 3.6. Lemmában két további ekvivalens jellemzését kapjuk az ilyen csoportoknak.)

3.4. Megjegyzés. *Hasonló gondolatmenettel megmutatható, hogy $\{\mathcal{A} \to \mathbb{R}\}$ akkor és csak akkor rendelkezik a felbontási tulajdonsággal, ha $\mathcal{A}$ torziócsoport.*

3.5. Kérdés. *Mik azok az $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Abel-csoportok, melyekre $\{\mathcal{A} \to \mathcal{B}\}$ rendelkezik a felbontási tulajdonsággal?*

A fejezet végére hagytuk a felhasznált tisztán algebrai állítások igazolását. Ezek egyszerű és bizonyára (köz)ismert tények Abel-csoportokról, a teljesség kedvéért vázlatosan bizonyítjuk őket.

3.6. Lemma. *Egy $\mathcal{A}$ Abel-csoportra ekvivalensek az alábbi állítások.*

(i) $\mathcal{A} = \bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^{n_p}}$ *alakú.*
(Itt p a prímeken fut végig, $\bigoplus$ diszkrét direkt összeg és $n_p \in \{0, \infty\} \cup \mathbb{N}$.)

(ii) *$\mathcal{A}$ minden végesen generált részcsoportja véges ciklikus.*

(iii) *$\mathcal{A}$ torziócsoport és nem tartalmaz $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$-vel izomorf részcsoportot semmilyen p prímre.*

BIZONYÍTÁS. Az $(i) \Rightarrow (ii)$ és $(ii) \Rightarrow (iii)$ irány világos; $(iii) \Rightarrow (i)$-hez a következőképp járunk el. Abel-csoportban egy p prímre részcsoportot alkotnak a p-hatvány rendű elemek, jelölje ezt a részcsoportot $T_p(\mathcal{A})$. Ezek diszkrét direkt összege éppen a csoport torzió-részcsoportja (lásd például [3, 21. oldal]). Esetünkben $\mathcal{A}$ torziócsoport, így $\mathcal{A} = \bigoplus_p T_p(\mathcal{A})$.

Tehát elegendő meghatározni a $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$-t részcsoportként nem tartalmazó kommutatív p-csoportokat. Ha a csoport véges, akkor a véges Abel-csoportok alaptételéből következik, hogy csak a p-hatvány rendű ciklikus csoportok ilyenek. Ha a csoport rendje végtelen, akkor vegyünk két elemet a csoportból (x, y). Az ezek által generált részcsoport egy p-hatvány rendű ciklikus. Ezt x vagy y egymaga is generálja. Tehát a csoport bármely két elemére az egyik többszöröse a másiknak. Ebből már következik, hogy a legfeljebb p^k rendű elemek egy $\mathbb{Z}_{p^k}$-val izomorf részcsoportot alkotnak. Ezen részcsoportok uniójaként áll elő a teljes csoport, így az izomorf a $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ kváziciklikus csoporttal. ∎

3.7. Állítás. *Egy $\mathcal{A}$ Abel-csoportra ekvivalensek az alábbi állítások.*

(i) *$\mathcal{A}$ torziómentes vagy $\mathcal{A} = \bigoplus_p \mathbb{Z}_{p^{n_p}}$ alakú.*
(Itt p a prímeken fut végig, $\bigoplus$ diszkrét direkt összeg és $n_p \in \{0, \infty\} \cup \mathbb{N}$.)

(ii) *$\mathcal{A}$ minden végesen generált részcsoportja $\mathbb{Z}_n$-nel vagy $\mathbb{Z}^n$-nel izomorf valamilyen n pozitív egészre.*

(iii) *$\mathcal{A}$ nem tartalmaz $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$-vel vagy $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$-vel izomorf részcsoportot semmilyen p prímre.*

BIZONYÍTÁS. Ezúttal is egyedül a $(iii) \Rightarrow (i)$ irány nem triviális. Ennek bizonyításához vegyünk egy $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$-t és $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_p$-t nem tartalmazó $\mathcal{A}$ Abel-csoportot. Feltesszük, hogy $\mathcal{A}$ nem torziómentes, ekkor van prímrendű x eleme. Ha lenne egy végtelen rendű y eleme $\mathcal{A}$-nak, akkor persze $\langle x, y \rangle \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}$ lenne. Tehát $\mathcal{A}$ torziócsoport, és alkalmazhatjuk az előző lemma $(iii) \Rightarrow (i)$ irányát. ∎

4. fejezet

Homogén megoldások

A 2.3. szakaszban azt vizsgáltuk, hogy egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek milyen feltételek mellett létezik felbontása periodikus függvények összegére előre adott periódusokkal. A felbontás (feltéve, hogy létezik) nem egyértelmű. Ebben a fejezetben azzal foglalkozunk, hogy ezek a felbontások mennyiben térhetnek el egymástól.

Ezekre az eredményekre a következő fejezetben lesz szükségünk, ahol a korlátos valós felbonthatóság és a korlátos egész felbonthatóság kapcsolatát vizsgáljuk.

Legyenek a megadott periódusok $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény valós felbontható ezen periódusokkal, ha előáll $f_1 + \ldots + f_k$ alakban ($\Delta_{a_i} f_i = 0$). Ha f_i' egy másik ilyen előállítás, akkor ezek különbsége $h_i := f_i - f_i'$ megoldása lesz a következő, ún. *homogén egyenlet*nek:

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_k = 0 \quad (\Delta_{a_i} h_i = 0). \tag{4.1}$$

Tehát f összes felbontását megkapjuk, ha egy tetszőleges (*partikuláris*) felbontásához hozzáadjuk a (4.1) egyenlet megoldásait.

4.1. Triviális megoldások

Két periódus esetén az egyenlet így írható: $h_1 = -h_2$. Vagyis a homogén megoldások azok, ahol h_1 és h_2 egyszerre a_1 és a_2-periodikusak, és egymás ellentettjei.

Több periódus esetén már nem ennyire egyszerű a helyzet. Mindenesetre mindig homogén megoldást kapunk, ha a következőképp járunk el.

4.1. Definíció. *A homogén egyenlet **triviális megoldás**áról beszélünk, ha a megoldás az alábbi alakban írható:*

$$h_i = \sum_{j=1}^{k} h_{i,j} \quad (h_{i,i} = 0\ ;\ h_{i,j} = -h_{j,i}\ ;\ \Delta_{a_i} h_{i,j} = \Delta_{a_j} h_{i,j} = 0). \tag{4.2}$$

Az ilyen alakú h_i-k valóban kielégítik (4.1)-t, hiszen h_i a_i-periodikus függvények összege, így maga is az, illetve $h_1 + \ldots + h_k$-ban minden $h_{i,j}$ $(i < j)$ egyszer pozitív, egyszer negatív előjellel fordul elő, így az összeg 0.

Megjegyezzük, hogy a és b összemérhető periódusokra egy f függvény pontosan akkor a és b-periodikus, ha (a, b)-periodikus, ahol (a, b) jelöli a és b legnagyobb közös osztóját.

Valójában sok esetben csak ezek a triviális megoldások vannak. A következő fejezet 5.9. Tételében látni fogjuk, hogy pontosan akkor létezik nem-triviális megoldás, ha a periódusok között található három, melyek lineárisan összefüggőek, de páronként összemérhetetlenek. Ebben a fejezetben ebből annyit bizonyítunk, hogy ha a periódusok között nincs három ilyen, akkor minden megoldás triviális. Először néhány egyszerű lemmát látunk be.

4.2. Definíció. *Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Az $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre azt mondjuk, hogy a-**lineáris**, ha $\Delta_a \Delta_a L = 0$. (Az elnevezést az indokolja, hogy L pontosan akkor a-lineáris, ha $L\,|_{a\mathbb{Z}+x_0}$ lineáris függvény tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén.)*

4.3. Lemma. *Legyenek a és b összemérhető periódusok, $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig b-periodikus függvény. Ekkor $\hat{f}$-nak tetszőleges a szerinti primitív függvénye előáll $f + L$ alakban, ahol f b-periodikus és L a-lineáris.*

Ha még azt is tudjuk, hogy $\hat{f}$ c-periodikus valamilyen a, b-vel nem összemérhető c periódusra, akkor f még c-periodikusnak is választható.

BIZONYÍTÁS. Legyen $m = [a, b]$. Vegyük a 2.9.-ben definiált M_a^m operátort. Bontsuk két részre az $\hat{f}$ függvényt az alábbi módon:

$$\hat{f} = \left(\hat{f} - M_a^m \hat{f}\right) + M_a^m \hat{f}.$$

Az M_a^m operátor 2.10. Állításban kimondott tulajdonságai miatt $(M_a^m \hat{f})$ a-periodikus, és így M_a^m önmagába viszi. Vagyis M_a^m az első (zárójeles) tagot 0-ba viszi. Így a 2.11. Lemma miatt létezik olyan primitív függvénye a szerint, amelyik b-periodikus, ezt válasszuk f-nek. A második tag a-periodikus, így annak minden primitív függvénye a-lineráis.

Ha $\hat{f}$ c-periodikus is, akkor $\left(\hat{f} - M_a^m \hat{f}\right)$ is az. Mivel az a szerinti primitív függvény megválasztása egymástól függetlenül tehető meg az $a\mathbb{Z} + x_0 \subset \mathbb{R}$ alakú részeken, és mivel $i \cdot c \notin a\mathbb{Z}$, ezért az $a\mathbb{Z} + x_0 + i \cdot c$ ($i \in \mathbb{Z}$) részeken megtehetjük, hogy *ugyanazt* a primitív függvényt választjuk. ■

Ugyan nem fogjuk használni, de megjegyezzük, hogy az előzőnél valamivel erősebb alábbi állítás is igaz.

4.4. Állítás. *Legyenek a és b összemérhető periódusok, f pedig olyan függvény, melyre $\Delta_a \Delta_b f = 0$. Ekkor f a következő alakban írható:*

$$f = L + f_a + f_b \quad (L\ (a,b)\text{-}\textit{lineáris; } \Delta_a f_a = \Delta_b f_b = 0).$$

BIZONYÍTÁS. Ha b egész számszorosa a-nak, akkor $(a,b) = a$ és így az előző Lemma szerint f valóban előáll a kívánt alakban.

Legyenek most a és b tetszőleges összemérhető periódusok. Ekkor $\Delta_a \Delta_b f = 0$ feltételből következik, hogy

$$\Delta_{[a,b]} \Delta_b f = 0; \Delta_a \Delta_{[a,b]} f = 0,$$

azaz a $\Delta_{[a,b]} f$ függvény a és b-periodikus, így (a,b)-periodikus. Tehát

$$\Delta_{(a,b)} \Delta_{[a,b]} f = 0.$$

Itt viszont $[a,b]$ egész számszorosa (a,b)-nek, vagyis léteznek L (a,b)-lineáris és f' $[a,b]$-periodikus függvények, melyre $f = L + f'$. Azonban

$$\Delta_{(a,b)} \Delta_{(a,b)} L = 0 \Rightarrow \Delta_a \Delta_b L = 0 \Rightarrow \Delta_a \Delta_b f' = \Delta_a \Delta_b (f - L) = 0.$$

Tehát f'-re fennállnak, hogy

$$\Delta_a \Delta_b f' = 0; \Delta_{[a,b]} f' = 0,$$

vagyis f'-re teljesül az általánosított differencia feltétel a, b periódusok esetén. A 2.14. Tétel miatt ekkor f' felírható egy a-periodikus és egy b-periodikus függvény összegeként. ■

4.5. Lemma. *Legyenek a és b összemérhető periódusok, L pedig a-lineáris függvény. Ha L még b-periodikus is vagy korlátos, akkor egyúttal a-periodikus.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $m := na$ valamelyilyen n pozitív egészre. Az a-linearitás azt jelenti, hogy $f(x+2a) - f(x+a) = f(x+a) - f(x)$ minden x-re. Rögzítsük x-et, ekkor $c := f(x+a) - f(x) = f(x+(i+1)\cdot a) - f(x+i\cdot a)$ tetszőleges i egész számra. Ebből azt kapjuk, hogy

$$f(x+m) - f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x+(i+1)\cdot a\right) - f(x+i\cdot a) = nc.$$

Ha L b-periodikus, akkor $m = [a, b]$ esetén a fenti képletben $f(x+m)-f(x) = 0$, tehát $c = 0$ adódik, azaz $f(x+a) = f(x)$. Ez minden x-re elmondható, így L valóban a-periodikus.

Ha L korlátos valamilyen $K \in \mathbb{R}_+$ korláttal, akkor $|f(x+m) - f(x)| \leq 2K$, vagyis $|c| \leq \frac{2K}{n}$, és $n \to \infty$ adja, hogy $c = 0$. ∎

4.6. Következmény. *Ha az a periódusra, f korlátos függvényre és k pozitív egészre*

$$\Delta_a^k f = 0,$$

akkor f a-periodikus.

BIZONYÍTÁS. Ha $k = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló. Ha $k \geq 2$, akkor vegyük az $L = \Delta_a^{k-2} f$ függvényt. Ez korlátos és a-lineáris, így az előző Lemma szerint a-periodikus. Vagyis

$$0 = \Delta_a L = \Delta_a \Delta_a^{k-2} f = \Delta_a^{k-1} f.$$

Ezt addig ismételhetjük, amíg a kitevő lemegy 1-re. Az viszont éppen azt jelenti, hogy f a-lineáris.

Megjegyezzük, hogy ez az állítás következik abból a bevezetésben említett tényből is, hogy $B(\mathbb{R})$ rendelkezik a felbontási tulajdonsággal [12]. (Emlékeztetőül, ez azt jelenti, hogy ha egy korlátos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $\Delta_{a_1} \ldots \Delta_{a_k} f = 0$, akkor f felírható korlátos, a_i-periodikus függvények összegeként. A most bizonyított állítás ennek éppen az $a_1 = \ldots = a_k = a$ speciális esete.) ∎

Mielőtt rátérnénk a legáltalánosabb eset (4.9. Tétel) tárgyalására, két speciális esetet (4.7. és 4.8.) bizonyítunk, amiknek az eredményét és módszereit használni fogjuk az általános esetnél.

4.7. Állítás. *Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ periódusok összemérhetők, akkor a homogén egyenletnek csak triviális megoldásai vannak.*

BIZONYÍTÁS. Indukcióval bizonyítunk. Egy illetve két periódus esetén persze igaz. Legyen $k \geq 3$, és tegyük fel, hogy k-nál kevesebb periódusra az állítás igaz. Ha a $h_1 + \ldots + h_k = 0$ homogén megoldást a_1 szerint deriváljuk, akkor egy

$$\hat{h}_2 + \hat{h}_3 + \ldots + \hat{h}_k = 0 \quad (\hat{h}_i = \Delta_{a_1} h_i)$$

homogén megoldást kapunk az $a_2, a_3, \ldots, a_k$ periódusokra. Az indukció miatt ez triviális megoldás, azaz léteznek a megfelelő $\hat{h}_{i,j}$ (a_i, a_j)-periodikus függvények $(2 \leq i, j \leq k)$. Ezeknek vegyük valamilyen primitív függvényét a_1 szerint. A 4.3. Lemma szerint ezek $h_{i,j} + L_{i,j}$ alakban írhatók, ahol $h_{i,j}$ (a_i, a_j)-periodikus, $L_{i,j}$ pedig a_1-lineáris. Arra is nyilván tudunk ügyelni, hogy $\hat{h}_{i,j}$ illetve $\hat{h}_{j,i}$ (amik egymás ellentettjei) primitív függvényében a $h_{i,j}$ illetve $h_{j,i}$ függvények is egymás ellentettjei legyenek.

Belátjuk, hogy az $L_{i,j}$-k úgy is megválaszthatók, hogy

$$h_i = \sum_{j=2}^{k} h_{i,j} + L_{i,j} \quad (i = 2, 3, \ldots, k) \tag{4.3}$$

teljesüljön. Ugyanis $\hat{h}_i$-nek a_1 szerinti felemeltje h_i és $\sum_{j=2}^{k} h_{i,j} + L_{i,j}$ is, ezért ezek különbsége egy a_1-periodikus függvény. Ezt a függvényt adjuk hozzá valamely j-re $L_{i,j}$-hez. Továbbra is igaz, hogy $L_{i,j}$ a_1-lineáris és $h_{i,j} + L_{i,j}$ primitív függvénye $\hat{h}_{i,j}$-nek, és így már (4.3) is fennáll.

Mivel a $h_{i,j}$-k a_i-periodikusak minden j-re, ezért $\sum_{j=2}^{k} L_{i,j}$ is a_i-periodikus. Másrészt a_1-lineáris is, így a 4.5. Lemma miatt a_1-periodikus. Válasszuk ezt a függvényt $h_{i,1}$-nek és az ellentettjét $h_{1,i}$-nek. A megfelelő periodikusságok teljesülnek, az indexeket megcserélve mindig ellentett függvényt kapunk, és $h_{i,1}$-et úgy választottuk, hogy $h_i = \sum_{j=1}^{k} h_{i,j}$ fennálljon $(i = 2, 3, \ldots, k)$. Egyedül azt kell még ellenőrizni, hogy ez $i = 1$-re is teljesül. Valóban,

$$h_1 = -h_2 - \ldots - h_k = -\sum_{i=2}^{k} \sum_{j=1}^{k} h_{i,j} \stackrel{*}{=} -\sum_{i=2}^{k} h_{i,1} = \sum_{i=2}^{k} h_{1,i},$$

ahol a $*$-gal megjelölt egyenlőség azért áll fenn, mert

$$\sum_{i=2}^{k} \sum_{j=2}^{k} h_{i,j} = 0,$$

ami pedig a $h_{i,j} = -h_{j,i}$ egyenlőségekből következik. ■

4.8. Lemma. *Ha az $a_2, \dots, a_k$ periódusokra igaz, hogy minden homogén megoldás triviális, akkor ez igaz az $a_1, a_2, \dots, a_k$ periódusokra is feltéve, hogy minden $2 \le i, j \le k$ indexpárra fennáll, hogy $a_1 \notin \langle a_i, a_j \rangle_{\mathbb{Q}}$. (Azaz vagy a_i és a_j összemérhetők egymással, de a_1-gyel nem, vagy a_1, a_i és a_j lineárisan függetlenek.)*

BIZONYÍTÁS. Ha a $h_1 + \ldots + h_k = 0$ homogén megoldást a_1 szerint deriváljuk, akkor egy

$$\hat{h}_2 + \hat{h}_3 + \ldots + \hat{h}_k = 0 \quad (\hat{h}_i = \Delta_{a_1} h_i)$$

homogén megoldást kapunk az $a_2, a_3, \dots, a_k$ periódusokra, A feltevéseink értelmében ez egy triviális megoldás, így találhatók megfelelő $\hat{h}_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények ($2 \le i, j \le k$). Ezeknek a $\hat{h}_{i,j}$ függvényeknek van olyan a_1 szerinti primitív függvénye, amely ugyancsak a_i és a_j-periodikus. (Ugyanis ha a_i és a_j összemérhetők, akkor (a_i, a_j)-periodikusságról van szó, és a 2.11. Lemma (a) része mutatja a megfelelő primitív függvény létezését. Ha a_1, a_i és a_j lineárisan függetlenek, akkor pedig a 2.12. Lemma alkalmazható.) Jelölje ezt a primitív függvényt $h_{i,j}$ ($2 \le i, j \le k$). Persze $h_{i,j} = -h_{j,i}$ teljesülésére is tudunk ügyelni. Legyen továbbá

$$h_{i,1} := h_i - h_{i,2} - h_{i,3} - \ldots - h_{i,k}.$$

Azt állítjuk, hogy az így definiált $h_{i,1}$ a_1 és a_i-peirodikus. Valóban,

$$\Delta_{a_1} h_{i,1} = \hat{h}_i - \hat{h}_{i,2} - \ldots - \hat{h}_{i,k} = 0,$$

$$\Delta_{a_i} h_{i,1} = \Delta_{a_i} h_i - \Delta_{a_i} h_{i,2} - \ldots - \Delta_{a_i} h_{i,k} = 0 - 0 - \ldots - 0 = 0.$$

Végül pedig $h_{1,i}$ legyen az imént megadott $h_{i,1}$ ellentettje. Ekkor

$$h_1 = -h_2 - \ldots - h_k = -\sum_{i=2}^{k} \sum_{j=1}^{k} h_{i,j} = -\sum_{i=2}^{k} h_{i,1} = \sum_{i=2}^{k} h_{1,i},$$

azaz a $h_{1,i}$-k összege valóban h_1. ∎

4.9. Tétel. *Ha $a_1, a_2, \dots, a_k$ olyan periódusok, hogy közülük bármely három, melyek páronként nem összemérhetők, egyúttal lineárisan függetlenek is (vagyis az előforduló irányok közül bármely három lineárisan független), akkor minden homogén megoldás triviális.*

BIZONYÍTÁS. Indukcióval bizonyítunk, tegyük fel, hogy k-nál kevesebb periódus esetén a tétel állítása igaz. Feltehető, hogy az a_1-gyel összemérhető periódusok $a_1, \dots, a_l$.

<u>1. eset</u>: $l = 1$
Ebben az esetben nincs más a_1-gyel összemérhető periódus. Ha a_i és a_j nem összemérhetők valamilyen $i, j \geq 2$ indexpárra, akkor a feltételek szerint a_1, a_i, a_j lineárisan függetlenek. Így a 4.8. Lemma alkalmazható, készen vagyunk.

<u>2. eset</u>: $l \geq 2$
A $h_1 + \ldots + h_k = 0$ homogén megoldást a_1 szerint deriváljuk, egy

$$\hat{h}_2 + \hat{h}_3 + \ldots + \hat{h}_k = 0 \quad (\hat{h}_i = \Delta_{a_1} h_i)$$

homogén megoldást kapunk az $a_2, a_3, \ldots, a_k$ periódusokra. Az indukció miatt ez triviális megoldás, azaz léteznek a megfelelő $\hat{h}_{i,j}$ a_i és a_j-periodikus függvények ($2 \leq i, j \leq k$). Mit mondhatunk ezek a_1 szerinti primitív függvényeiről?

Ha $l+1 \leq i \leq k$; $l+1 \leq j \leq k$, akkor $a_1 \notin \langle a_i, a_j \rangle_{\mathbb{Q}}$ és ilyenkor létezik $h_{i,j}$ primitív függvény, ami a_i és a_j szerint is periodikus, ahogy azt a 4.8. Lemma bizonyításánál már meggondoltuk.

Ha $l+1 \leq i \leq k$; $2 \leq j \leq l$, akkor $\hat{h}_{i,j}$ a_i és a_j szerint periodikus, ahol a_1 összemérhető a_j-vel, de a_i-vel nem. A 4.3. Lemma miatt ekkor minden primitív függvény $h_{i,j} + L_{i,j}$ alakú, ahol $h_{i,j}$ a_i és a_j-periodikus és $L_{i,j}$ a_1-lineáris. A 4.7. Állítás bizonyításánál azt is láttuk, hogy $L_{i,j}$-ket választhatjuk úgy, hogy

$$h_i = \sum_{j=2}^{k} h_{i,j} + \sum_{j=2}^{l} L_{i,j} = \sum_{j=2}^{k} h_{i,j} + L_i \quad (l+1 \leq i \leq k),$$

ahol $L_i = \sum_{j=2}^{l} L_{i,j}$ a_1-lineáris és (a fenti egyenlőség miatt) a_i-periodikus függvény. Vagyis ez még nem jó felbontása h_i-nek: csak a_1-linearitást tudunk L_i-ről a_1-periodikusság helyett.

Mivel $h_{i,j} = -h_{j,i}$, így $\sum_{i=l+1}^{k} \sum_{j=l+1}^{k} h_{i,j} = 0$. Ezt a $*$-gal jelölt egyenlőségnél használva:

$$-\sum_{i=1}^{l} h_i = \sum_{i=l+1}^{k} h_i = \sum_{i=l+1}^{k} \sum_{j=2}^{k} h_{i,j} + \sum_{i=l+1}^{k} L_i \stackrel{*}{=} \sum_{i=l+1}^{k} \sum_{j=2}^{l} h_{i,j} + \sum_{i=l+1}^{k} L_i.$$

Az $L_1 = \sum_{i=1}^{l} h_i + \sum_{i=l+1}^{k} \sum_{j=2}^{l} h_{i,j}$ jelölés mellett:

$$L_1 + L_{l+1} + L_{l+2} + \ldots + L_k = 0.$$

Ekkor egyrészt L_1 m-periodikus, ahol $m = [a_1, \ldots, a_l]$, hiszen minden tagja a_j-periodikus valamilyen $1 \leq j \leq l$-re, másrészt L_1 a_1-lineáris, hiszen a többi L_i

($l+1 \leq i \leq k$) mind az. A 4.5. Lemma miatt ekkor L_1 valójában a_1-periodikus is. Ez azt jelenti, hogy az L_i-k homogén megoldást adnak az $a_1, a_{l+1}, a_{l+2}, \ldots, a_k$ periódusok mellett. Mivel $l \geq 2$, ezért ez legfeljebb $k-1$ periódus, az indukció alkalmazható, így kapunk $h'_{i,j}$ függvényeket ($i, j \in \{1, l+1, \ldots, k\}$), melyekre $h'_{i,j} = -h'_{j,i}$ a_i és a_j-periodikusak, valamint

$$L_i = h'_{i,1} + \sum_{j=l+1}^{k} h'_{i,j} \quad (i = 1, l+1, \ldots, k).$$

Vezessük be $l+1 \leq i \leq k$-ra az alábbi $h''_{i,j}$ függvényeket.

$$h''_{i,j} := \begin{cases} h'_{i,1} & (j=1) \\ h_{i,j} & (2 \leq j \leq l) \\ h_{i,j} + h'_{i,j} & (l+1 \leq j \leq k) \end{cases}$$

Legyen továbbá $h''_{i,j} := -h''_{j,i}$, ha $i \leq l$ és $j \geq l+1$.

Már csak azon esetekben nincs definiálva $h''_{i,j}$, ha mindkét index legfeljebb l. Most rátérünk erre az esetre is. Korábbiakhoz hasonló számolással kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{l} h_i = -\sum_{i=l+1}^{k} h_i = -\sum_{i=l+1}^{k}\sum_{j=1}^{k} h''_{i,j} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=l+1}^{k} h''_{i,j} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=l+1}^{k} h''_{i,j}.$$

Vagyis $g_i := \left(h_i - \sum_{j=l+1}^{k} h''_{i,j}\right)$ a_i-periodikus függvények ($i = 1, \ldots, l$) homogén megoldást adnak az $a_1, \ldots, a_l$ periódusok mellett. Ezek összemérhető periódusok, így a 4.7. Állítás miatt a megoldás triviális, vagyis léteznek megfelelő $h''_{i,j}$ ($1 \leq i, j \leq l$) függvények. Ezekkel egészítsük ki a már meglévő $h''_{i,j}$-ket. Minden kívánt tulajdonság teljesül. ∎

4.2. Nem-triviális megoldások

4.2.1. Három periódus esete

A homogén egyenletnek lehetnek nem-triviális megoldásai is. A 4.9. Tétel szerint erre akkor van esély, ha az $a_1, \ldots, a_k$ periódusok között van három, melyek lineárisan összefüggnek, de páronként összemérhetetlenek. A legegyszerűbb ilyen eset az, amikor

$$k = 3\,;\ \frac{a_1}{a_2} \notin \mathbb{Q}\,;\ a_3 = r_1 a_1 + r_2 a_2 \ \ (r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}).$$

Ekkor $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle_{\mathbb{Z}}$ egy $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-vel izomorf additív részcsoportja $\mathbb{R}$-nek. Ezek eltoltjainak diszjunkt uniójaként előállítható $\mathbb{R}$. Világos, hogy ezeken külön-külön lehet megadni a homogén megoldást.

Legyenek tehát $a_i = (m_i, n_i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $(i = 1, 2, 3)$ periódusok, melyekre $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ és az a_i-k páronként összemérhetetlenek, azaz egyik vektor sem skalárszorosa a másiknak. Azért valamilyen lineáris összefüggésnek kell lennie köztük: megfelelő $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ együtthatókkal

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = (c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3, c_1 n_1 + c_2 n_2 + c_3 n_3) = (0, 0).$$

Ekkor tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén homogén megoldást adnak $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-n a

$$h_i(x, y) := c_i t(n_i x - m_i y) \quad (x, y \in \mathbb{Z}) \tag{4.4}$$

függvények. Az is világos, hogy ez $t \neq 0$ esetén egy nem-triviális megoldás. (Meggondolható ugyanis, hogy a triviális megoldások $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-n véges sok értéket vesznek fel.) Azt fogjuk bizonyítani, hogy minden homogén megoldás egy (4.4) alakú és egy triviális megoldás összegeként áll elő.

Azokat a $h_1, h_2, h_3 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ függvényeket keressük tehát, melyekre

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0 \quad (\Delta_{a_i} h_i = 0).$$

Először meghatározzuk azon h_1 függvényeket, melyek a_1-periodikusak, valamint előállnak egy a_2-periodikus és egy a_3-periodikus függvény összegeként. Utóbbi azzal ekvivalens, hogy $\Delta_{a_2} \Delta_{a_3} h_1 = 0$, hiszen a_2 és a_3 összemérhetetlenek. Tehát az alábbi egyenleteket kielégítő $h_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ függvényeket keressük:

$$\Delta_{a_1} h_1 = 0 \; ; \; \Delta_{a_2} \Delta_{a_3} h_1 = 0. \tag{4.5}$$

Első lépésként megadjuk a (4.5) egyenletet kielégítő **korlátos** h_1 függvényeket. Tekintsük a $\hat{h}_1 = \Delta_{a_3} h_1$ függvényt. Ez a_1 és a_2-periodikus is. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $h_1' : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre

$$\Delta_{a_3} h_1' = \hat{h}_1 = \Delta_{a_3} h_1 \text{ és } \Delta_{a_1} h_1' = \Delta_{a_2} h_1' = 0.$$

Vagyis azt akarjuk bizonyítani, hogy $\hat{h}_1$-et fel tudjuk úgy emelni a_3 szerint, hogy megőrizze az a_1 és a_2-periodikusságot. Válasszuk meg a $(0, 0)$ pontban h_1' értékét tetszőlegesen. Innen a $\Delta_{a_3} h_1' = 0$ feltétel mellett egyértelműen terjed ki a $\{d_3 a_3 : d_3 \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ halmazra. Ezután tetszőleges $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{Z}$ együtthatókra

$$h_1'(d_1 a_1 + d_2 a_2 + d_3 a_3) := h_1'(d_3 a_3).$$

Ezzel mindenhol megadtuk h_1'-t, hiszen $\langle a_1, a_2, a_3\rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Persze egy $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-beli pont nem egyértelműen áll elő $d_1a_1 + d_2a_2 + d_3a_3$ alakban, így h_1' jól definiáltságát még ellenőriznünk kell.

Tegyük fel, hogy $d_1a_1 + d_2a_2 + d_3a_3 = d_1'a_1 + d_2'a_2 + d_3'a_3$. Kéne, hogy ekkor $h_1'(d_3a_3) = h_1'(d_3'a_3)$. Persze csak $d_3 \neq d_3'$ esetén van mit bizonyítani. Feltehető, hogy $d_3' > d_3$. Ekkor

$$h_1'(d_3'a_3) - h_1'(d_3a_3) = \sum_{j=d_3}^{d_3'-1} \hat{h}_1(ja_3) = h_1(d_3'a_3) - h_1(d_3a_3).$$

Tegyük fel indirekt módon, hogy ez nem 0. Mivel $\hat{h}_1$ a_1 illetve a_2-periodikus, ezért $(d_1 - d_1')a_1 + (d_2 - d_2')a_2 = (d_3' - d_3)a_3$ szerint is periodikus. Így

$$\sum_{j=d_3+k(d_3'-d_3)}^{d_3+(k+1)(d_3'-d_3)-1} \hat{h}_1(ja_3) = \sum_{j=d_3}^{d_3'-1} \hat{h}_1(ja_3),$$

azaz

$$h_1(d_3 + (k+1)(d_3' - d_3)) - h_1(d_3 + k(d_3' - d_3)) = h_1(d_3'a_3) - h_1(d_3a_3) = c \neq 0,$$

ahol k tetszőleges pozitív egész, c pedig k-től nem függő nem 0 konstans. Azonban

$$h_1(d_3 + k(d_3' - d_3)) - h_1(d_3) = kc,$$

ami ellentmond h_1 korlátosságának. Vagyis h_1' valóban jól definiált, és így automatikusan a_1 és a_2-periodikus.

Ekkor

$$\Delta_{a_3}(h_1 - h_1') = \Delta_{a_3}h_1 - \Delta_{a_3}h_1' = \hat{h}_1 - \hat{h}_1 = 0,$$

továbbá $\Delta_{a_1}(h_1 - h_1') = 0$ is teljesül, így a $h_1 = h_1' + (h_1 - h_1')$ felbontás mutatja, hogy h_1 előáll egy a_1 és a_2-periodikus valamint egy a_1 és a_3-periodikus függvény összegeként. Tehát (4.5) egyenleteit kielégítő korlátos h_1 függvények mind $h_{1,2} + h_{1,3}$ alakúak.

Most rátérünk arra az esetre, amikor h_1 nem feltétlenül korlátos. Többször fogjuk alkalmazni, ezért Lemmaként kimondjuk az alábbi trivialitást.

4.10. Lemma. *Ha az f függvény a-periodikus, akkor tetszőleges b periódusra és k egész számra $\Delta_b f = \Delta_{b+ka} f$.*

BIZONYÍTÁS. A Lemma állítását a

$$(\Delta_b f)(x) = f(x+b) - f(x) = f(x+b+ka) - f(x) = (\Delta_{b+ka} f)(x)$$

számolás bizonyítja. ■

A Lemma és (4.5) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\Delta_{a_2}\Delta_{a_3}h_1 = 0 \Rightarrow \Delta_{a_2}\Delta_{c_3a_3}h_1 = 0 \overset{4.10.}{\Longrightarrow} \Delta_{a_2}\Delta_{c_3a_3+c_1a_1}h_1 = 0,$$

amiből $\Delta_{a_2}\Delta_{c_2a_2}h_1 = 0$ következik. Ugyanígy adódik $\Delta_{a_3}\Delta_{c_3a_3}h_1 = 0$ is. Viszont a 4.10. Lemma újbóli felhasználásával kapjuk, hogy

$$\Delta_{c_2a_2}h_1 = \Delta_{c_2a_2+c_1a_1}h_1 = \Delta_{-c_3a_3}h_1.$$

A fentiek alapján a bal oldal a_2-periodikus, a jobb oldal a_3-periodikus, és persze mindkét oldal a_1-periodikus. Következésképp $\Delta_{c_2a_2}h_1$ mindhárom periódus szerint periodikus, vagyis konstans u a teljes $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-n valamilyen u valós számra.

Vegyük az alábbi L_1 függvényt:

$$L_1(x,y) := t_1(n_1x - m_1y) \ \ (x, y \in \mathbb{Z}), \text{ ahol } t_1 = \frac{u}{c_2(n_1m_2 - m_1n_2)}.$$

(Itt t_1 nevezője nem 0, ugyanis sem c_2, sem $n_1m_2 - m_1n_2$ nem 0, az utóbbi amiatt, mert a_1 és a_2 nem egymás skalárszorosai.) Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\Delta_{a_1}L_1 = 0; \Delta_{a_2}\Delta_{a_3}L_1 = 0; \Delta_{c_2a_2}L_1 \equiv u,$$

vagyis a $h_1' = h_1 - L_1$ függvényre

$$\Delta_{a_1}h_1' = 0; \Delta_{a_2}\Delta_{a_3}h_1' = 0; \Delta_{c_2a_2}h_1' = 0.$$

Tehát h_1' olyan megoldása a (4.5) egyenletnek, ami még (c_2a_2)-periodikus is. Azonban egy a_1 és (c_2a_2)-periodikus függvény $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-n csak véges sok féle értéket vehet fel, speciálisan korlátos. A korlátos eset vizsgálatánál láttuk, hogy

$$h_1' = h_{1,2} + h_{1,3} \quad (\Delta_{a_1}h_{1,2} = \Delta_{a_2}h_{1,2} = \Delta_{a_1}h_{1,3} = \Delta_{a_3}h_{1,3} = 0),$$

amiből

$$h_1(x,y) = t_1(n_1x - m_1y) + h_{1,2}(x,y) + h_{1,3}(x,y).$$

Most már meg tudjuk adni a $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ három tagú homogén egyenlet megoldásait. Ismételjük el a fentieket a homogén megoldás másik két függvényére is. Azt kapjuk, hogy

$$h_2(x, y) = t_2(n_2x - m_2y) + h_{2,1} + h_{2,3},$$
$$h_3(x, y) = t_3(n_3x - m_3y) + h_{3,1} + h_{3,2}$$

valamilyen t_2, t_3 valós számokra. Összeadva a három függvényt:

$$0 = (t_1n_1 + t_2n_2 + t_3n_3)x - (t_1m_1 + t_2m_2 + t_3m_3)y + \sum_{i \neq j} h_{i,j}.$$

Az utolsó tag korlátos, így a maradéknak is annak kell lennie, ami csak úgy lehet, ha x és y együtthatója is 0. Tehát $t_1a_1+t_2a_2+t_3a_3 = 0$, azaz valamilyen $t \in \mathbb{R}$-re:

$$t_1 = tc_1; t_2 = tc_2; t_3 = tc_3.$$

Vagyis $L_i(x, y) = tc_i(n_ix-m_iy)$ $(i = 1, 2, 3)$. Ezek a függvények már magukban megoldását adják a homogén egyenletnek. Ettől az L_i megoldástól h_i egy $h'_i = \sum_{j\neq i} h_{i,j}$ $(i = 1, 2, 3)$ megoldásban tér el. Azt akarjuk bizonyítani, hogy h'_i egy triviális homogén megoldás. Ehhez az kéne még, hogy $h_{i,j} = -h_{j,i}$, de ez nem feltétlenül teljesül. Azonban

$$h_{1,2} + h_{2,1} = -h_{1,3} - h_{3,1} - h_{2,3} - h_{3,2},$$

ahol a bal oldal a_1 és a_2-periodikus, a jobb oldal pedig a_3-periodikus. Következésképp $h_{1,2} + h_{2,1} \equiv c_3$ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-n. Ugyanígy $h_{1,3} + h_{3,1} \equiv c_2$ és $h_{2,3} + h_{3,2} \equiv c_1$. Persze $c_1 + c_2 + c_3 = 0$, így az alábbi $h'_{i,j}$ függvények könnyen ellenőrizhetően igazolják a h'_i megoldás triviális voltát:

$$h'_{1,2} = h_{1,2}\ ;\ h'_{2,1} = h_{2,1} - c_3;$$
$$h'_{1,3} = h_{1,3}\ ;\ h'_{3,1} = h_{3,1} - c_2;$$
$$h'_{2,3} = h_{2,3} + c_3\ ;\ h'_{3,2} = h_{3,2} - c_3 - c_1.$$

Ezzel beláttuk az alábbi tételt.

4.11. Tétel. *Három páronként összemérhetetlen, de lineárisan összefüggő periódus esetén a homogén egyenlet minden megoldása (a periódusok által generált) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-n egy* (4.4) *alakú és egy triviális megoldás összege. Ha a megoldásokat $\mathbb{R}$-en keressük, akkor egymástól függetlenül adhatjuk meg azt az $\langle a_1, a_2, a_3\rangle_{\mathbb{Z}} + x_0$ mellékosztályokon, azaz a* (4.4)*-ben szereplő t paraméter függhet x_0-tól.*

4.2.2. Több periódus

Legyenek most $a_1, a_2, \dots, a_k$ tetszőleges periódusok. Ezek közül válasszunk ki kettőt: a_{j_1}, a_{j_2}. Homogén megoldást kapunk, ha h_{j_1} a_{j_1} és a_{j_2}-periodikus függvény, h_{j_2} ennek ellentettje, a többi h_i pedig 0. Ilyen megoldások összege is homogén megoldás – ezeket neveztük triviálisnak. Ha három olyat veszünk ($a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}$), melyek lineárisan összefüggnek, de páronként összemérhetetlenek, akkor az előző részben megadott három tagú homogén megoldásokat minden $\langle a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}\rangle_{\mathbb{Z}} + x_0$ alakú halmazon elkészítve (t függhet x_0-tól), a többi periódushoz tartozó h_i függvényt pedig 0-nak választva, persze homogén megoldást kapunk. (Erről nem világos, hogy miért ne lenne triviális. A következő fejezetben fog kiderülni, hogy ezek között van nem-triviális megoldás.)

Felmerül a kérdés, hogy minden homogén megoldás előáll-e ilyenek összegeként. A válasz az, hogy nem. Vegyük az $(1,0); (0,1); (1,1); (1,-1) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ periódusokat. Megadunk $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-n egy homogén megoldást a fenti periódusokkal:

$$2y^2 + 2x^2 - (x-y)^2 - (x+y)^2 = 0.$$

Ez nem áll elő olyan megoldások összegeként, amelyekben az egyik periódushoz tartozó függvény azonosan 0, ugyanis az ilyenekről az előző részben láttuk, hogy x, y-ban lineárisak. (Hiszen a triviális megoldások jelen esetben konstans függvényekből állnak, mivel bármely két periódus generálja az egész $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-t.)

A fenti példa általánosításaként tekintsük a következőt. Legyen $k \geq 2$, $a_i = (m_i, n_i) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ($1 \leq i \leq k$) tetszőlegesek. Homogén megoldást keresünk az

$$f_i(x,y) = \lambda_i(n_i x - m_i y)^{k-2} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

alakban. A $\sum_{i=1}^{k} f_i(x,y) = 0$ egyenletben a bal oldalt kifejtve egy $(k-2)$ fokú homogén kétváltozós polinomot kapunk. Egy ilyen polinomnak $(k-1)$ monomja van: $x^j y^{k-2-j}$ ($j = 0, 1, \dots, k-2$). Ezen monomok együtthatóit 0-nak előírva a $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ együtthatókra egy $(k-1)$ egyenletből álló k-változós homogén lineáris egyenletrendszert kapunk. Ennek van olyan megoldása, amelyben nem minden λ_i egyenlő 0. Belátható, hogy ha az a_i-k páronként összemérhetetlenek, akkor az egyenletrendszer minden nem triviális megoldására $\lambda_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

4.12. Kérdés. *Igaz-e, hogy minden homogén megoldást megkaphatunk olyan homogén megoldások összegeként, melyeknél a nem azonosan 0 függvényekhez tartozó periódusok egy síkban vannak.*

4.13. Kérdés. *Mik a megoldásai a homogén egyenletnek $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-n tetszőleges periódusok esetén?*

5. fejezet

Korlátosan felbontható függvények

Ebben a fejezetben a következő két fogalom kapcsolatát vizsgáljuk. Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges Abel csoport.

5.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ függvény* ***korlátosan valós felbontható*** *$a_1, a_2, \ldots, a_k$ periódusokkal, ha*

$$\exists f_1, f_2, \ldots, f_k : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \;\; f = f_1 + f_2 + \ldots + f_k \; ; \; \Delta_{a_i} f_i = 0 \; ; \; f_i \textit{ korl. } (1 \leq i \leq k).$$

Jelben: $KVF_{a_1,\ldots,a_k}(f)$ vagy röviden $KVF(f)$, ha világos, hogy mik a periódusok.

5.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ függvény* ***korlátosan egész felbontható*** *$a_1, a_2, \ldots, a_k$ periódusokkal, ha*

$$\exists g_1, g_2, \ldots, g_k : \mathcal{A} \to \mathbb{Z} \;\; f = g_1 + g_2 + \ldots + g_k \; ; \; \Delta_{a_i} g_i = 0 \; ; \; g_i \textit{ korl. } (1 \leq i \leq k).$$

Jelben: $KEF_{a_1,\ldots,a_k}(f)$ vagy röviden $KEF(f)$, ha világos, hogy mik a periódusok.

Legyen most $\mathcal{A} = \mathbb{R}$. Az alábbi impliációk közül az első triviális, a második pedig a 2.15. Tétel állítása.

$$KVF_{a_1,\ldots,a_k}(f) \Longrightarrow VF_{a_1,\ldots,a_k}(f) \Longrightarrow EF_{a_1,\ldots,a_k}(f)$$

De vajon van-e egész értékű korlátos felbontás is? Általában nincs. *Károlyi*, *Keleti*, *Kós* és *Ruzsa* adott példát [7]-ben olyan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ függvényre, amely korlátosan valós felbontható, de nem korlátosan egész felbontható (lásd

5.4. Állítás). Másrészt egyszerű gondolatmenet mutatja, hogy összemérhető illetve lineárisan független esetben van korlátos egész felbontás is.

Ebben a fejezetben meghatározzuk azon $a_1, a_2, \ldots, a_k$ periódusokat, amikre fennáll ez a $KVF \Rightarrow KEF$ implikáció, valamint rámutatunk a kérdésnek a homogén megoldásokkal való kapcsolatára.

Már többször említettük, hogy a korlátos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények $B(\mathbb{R})$ osztálya rendelkezik a felbontási tulajdonsággal [12]. Emiatt $a_1, a_2, \ldots, a_k$ periódusokra és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvényre

$$KVF_{a_1,\ldots,a_k}(f) \iff f \text{ korl. és } VF_{a_1,\ldots,a_k}(f) \iff f \text{ korl. és } \Delta_{a_1} \ldots \Delta_{a_k} f = 0.$$

5.1. Kapcsolat a homogén megoldásokkal

5.3. Tétel. *Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ periódusokra a* (4.1) *homogén egyenlet minden megoldása triviális, akkor $KVF \Rightarrow KEF$ fennáll.*

BIZONYÍTÁS. Vegyünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvényt, tegyük fel, hogy létezik korlátos valós felbontása. Ekkor 2.15. Tétel miatt van egész felbontása is.

$$f = f_1 + f_2 + \ldots + f_k = g_1 + g_2 + \ldots + g_k,$$

ahol $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos, $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ nem feltétlenül korlátos függvények, melyekre $\Delta_{a_i} f_i = \Delta_{a_i} g_i = 0$. Ekkor persze $h_i := f_i - g_i$ egy homogén megoldás. A feltételek szerint ez egy triviális megoldás, vegyük a megfelelő $h_{i,j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket. Ezekhez közel választunk egész értékű $\tilde{h}_{i,j}$ függvényeket, melyek továbbra is teljesítik a $\Delta_{a_i} \tilde{h}_{i,j} = \Delta_{a_j} \tilde{h}_{i,j} = 0$ és $\tilde{h}_{i,j} = -\tilde{h}_{j,i}$ feltételeket. Ez nyilván megtehető úgy, hogy $|\tilde{h}_{i,j}(x) - h_{i,j}(x)| < 1$ minden i, j, x-re. Ezekből legyártva a

$$\tilde{h}_i := \sum_{j=1}^{k} \tilde{h}_{i,j}$$

egész értékű a_i-periodikus függvényeket, azok továbbra is megoldásai lesznek a homogén egyenletnek ($\tilde{h}_1 + \ldots + \tilde{h}_k = 0$), és közel vannak a h_i függvényekhez:

$$|\tilde{h}_i(x) - h_i(x)| \leq \sum_{1 \leq j \leq k \ ; \ j \neq i} |\tilde{h}_{i,j}(x) - h_{i,j}(x)| < k - 1.$$

Azt állítjuk, hogy a $\tilde{f}_i := g_i + \tilde{h}_i$ függvények egy korlátos egész felbontását adják f-nek. Az világos, hogy ez egész felbontás, hiszen úgy kaptuk, hogy egy egész felbontáshoz hozzáadtunk egy egész értékű homogén megoldást. A korlátossághoz elég belátni, hogy $\tilde{f}_i - f_i$ korlátos. Valóban,

$$|\tilde{f}_i(x) - f_i(x)| = |(g_i(x) + \tilde{h}_i(x)) - (g_i(x) + h_i(x))| = |\tilde{h}_i(x) - h_i(x)| < k - 1.$$

Ezzel az $\tilde{f}_i$ felbontásnak minden kívánt tulajdonságát beláttuk. ■

Mivel a 4.9. Tétel szerint minden homogén megoldás triviális feltéve, hogy a periódusok között előforduló irányok közül bármely három lineárisan független, ezért azt kaptuk, hogy ebben az esetben fennáll $KVF \Rightarrow KEF$. Látni fogjuk, hogy más esetekben az implikáció nem áll fenn.

5.2. Negatív eredmények

Az alábbi példát [7]-ben adták. Mi másképp bizonyítjuk, hogy a konstruált függvény nem korlátosan egész felbontható. Ezzel a módszerrel ugyanis valamivel több is kijön majd (lásd 5.6. Állítás).

5.4. Állítás. *Létezik egy $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ függvény, amit fel lehet írni egy $(1, 0)$-periodikus, egy $(0, 1)$-periodikus és egy $(1, 1)$-periodikus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to [-1, 1]$ függvény összegeként, de nem lehet felírni három periodikus, korlátos $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvény összegeként ugyanazokkal a periódusokkal.*

BIZONYÍTÁS. Legyenek $a_1 = (1, 0); a_2 = (0, 1); a_3 = (1, 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ periódusok. Rögzítsünk egy t irracionális számot. Tekintsük az alábbi $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ függvényeket.

$$f_1(x, y) := -\{ty\} \; ; \; f_2(x, y) := \{tx\} \; ; \; f_3(x, y) := \{t(-x + y)\} \quad (x, y \in \mathbb{Z}),$$

ahol $\{a\}$ jelöli az a valós szám tört részét. Világos, hogy $\Delta_{a_i} f_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Továbbá $-1 < f_1 \leq 0$; $0 \leq f_2 < 1$; $0 \leq f_3 < 1$, vagyis az f_i függvények korlátosak is. Következésképp az

$$f(x, y) := f_1(x, y) + f_2(x, y) + f_3(x, y) = -\{ty\} + \{tx\} + \{t(-x + y)\} \; (x, y \in \mathbb{Z})$$

függvény korlátosan valós felbontható a_1, a_2, a_3 periódusokkal. Továbbá az előbbi egyenlőtlenségek miatt $-1 < f < 2$ is fennáll.

Felhasználva a $(-ty) + tx + t(-x + y) = 0$ egyenlőséget, f így is írható:

$$f(x, y) = g_1(x, y) + g_2(x, y) + g_3(x, y) := [ty] - [tx] - [t(-x + y)] \quad (x, y \in \mathbb{Z}),$$

ahol $[a] = a - \{a\}$ az a valós szám egész részét jelöli. Ez az alak mutatja, hogy f valójában egész értékű, sőt, $-1 < f < 2$ miatt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ függvény.

Azt kell még belátnunk, hogy f nem korlátosan egész felbontható a_1, a_2, a_3-mal. Tegyük fel indirekt, hogy létezik

$$f = g_1' + g_2' + g_3' \quad (g_i' : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ korlátos és } a_i\text{-periodikus})$$

felbontás. A két egész felbontást kivonva egymásból a $h_i := g_i - g_i'$ $(i = 1, 2, 3)$ egész értékű homogén megoldáshoz jutunk. Alkalmazzuk a homogén felbontásra a $\Delta_{a_2}\Delta_{a_3}$ operátort, ami az a_2 illetve a_3-periodikus függvényeket 0-ba viszi:

$$0 = \Delta_{(0,1)}\Delta_{(1,1)}h_1 \stackrel{*}{=} \Delta_{(0,1)}\Delta_{(0,1)}h_1,$$

ahol a (*)-gal jelölt egyenlőség a 4.10. Lemma következménye. (A szereposztás: $f = h_1$; $a = a_1 = (1, 0)$; $b = a_3 = (1, 1)$; $k = -1$.) Ebből következik, hogy h_1-et megszorítva $(\{0\} \times \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$-re egy 1-lineáris $L : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényt kapunk. Másrészt $h_1 - g_1 = -g_1'$ korlátossága miatt $L(y) - [ty]$ is korlátos. Legyen

$$L'(y) := L(y) - ty = L(y) - [ty] - \{ty\},$$

ami az első alakja miatt 1-lineáris, a második alakja miatt korlátos, így szükségképpen konstans függvény (4.5. Lemma). Azonban $L(y) = ty + c$ semmilyen c konstansra nem lesz mindenhol egész, ellentmondás. ∎

5.5. Megjegyzés. *Könnyen meggondolható, hogy*

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \textit{ha } \{tx\} > \{ty\} \\ 0 & \textit{ha } \{tx\} \leq \{ty\}. \end{cases}$$

Valójában a fenti f függvényt még úgy sem lehet felbontani korlátos egész értékű periodikus függvények összegére, ha tetszőleges más „síkbeli” periódusokat is használhatunk. Ez könnyen kiolvasható a most következő Állítás bizonyításából.

5.6. Állítás. *Tegyük fel, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ periódusok között található három páronként nem összemérhető. Ekkor megadható $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ függvény, amely korlátosan valós felbontható, de nem korlátosan egész felbontható az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ periódusokkal.*

BIZONYÍTÁS. A három páronként nem összemérhető periódus legyen a_1, a_2, a_3. Ekkor közülük kettő bázisát adja $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$-nak, így feltehető, hogy $a_1 = (1, 0)$ és $a_2 = (0, 1)$. Jelöljék továbbá az a_i koordinátáit a p_i illetve q_i racionális számok. Mivel a_3 nem összemérhető a_1, a_2-vel, így $p_3, q_3 \neq 0$.

Vegyük észre, hogy minden racionális r-re az $(x, y) \mapsto f(y)$ alakú leképezések $(r, 0)$-periodikusak, az $(x, y) \mapsto f(x)$ alakúak $(0, r)$-periodusak, míg az $(x, y) \mapsto f(-q_3x + p_3y)$ alakúak $(r \cdot p_3, r \cdot q_3)$-periodikusak.

Rögzítsünk egy t irracionális számot, és tekintsük az alábbi függvényeket.

$$f_1(x, y) := -\{tp_3y\}\ ;\ g_1(x, y) := [tp_3y]$$
$$f_2(x, y) := \{tq_3x\}\ ;\ g_2(x, y) := -[tq_3x]$$
$$f_3(x, y) := \{t(-q_3x + p_3y)\}\ ;\ g_3(x, y) := -[t(-q_3x + p_3y)]$$

A megjegyzéseink alapján $\Delta_{a_i} f_i = \Delta_{a_i} g_i = 0$, ha $i \leq 3$. Másrészt $(-tp_3y) + tq_3x + t(-q_3x + p_3y) = 0$ miatt $f_1 + f_2 + f_3 = g_1 + g_2 + g_3$. Jelölje ezt az összeget f. Világos, hogy $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ korlátosan valós felbontható a_1, a_2, a_3-mal. Ekkor persze $KVF_{a_1,\ldots,a_k}(f)$ is teljesül, hiszen a felbontásban szereplő többi függvényt (f_i, $i \geq 4$) választhatjuk 0-nak.

Belátjuk, hogy nem létezik korlátos egész felbontása. Tegyük fel indirekt, hogy

$$f = g'_1 + g'_2 + \ldots + g'_k \quad (g'_i : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \text{ korlátos és } a_i\text{-periodikus}).$$

Először nézzük azt az esetet, amikor a_1 irányában már nincs több periódus, azaz $q_i \neq 0$, ha $i \neq 1$.

Jelölje $[q_2 = 1, q_3, \ldots, q_k]$ legkisebb közös többszöröst M. Ekkor $\frac{M}{q_i}$ egész számok. N-et válasszuk úgy, hogy $Np_i \in \mathbb{Z}$ teljesüljön minden $i \geq 2$-re. Tekintsük az $n_i := \frac{MN}{q_i}$ egész számokat. A fentiek alapján világos, hogy

$$n_ia_i = (n_ip_i, n_iq_i) = \left(\frac{M}{q_i}(Np_i), MN\right) \in \mathbb{Z} \times \{MN\} \quad (i = 2, 3, \ldots, k).$$

Alkalmazzuk f-re az $S = \Delta_{n_2a_2} \ldots \Delta_{n_ka_k}$ operátort.

$$Sf = Sg_1 = Sg'_1$$

(Ugyanis $i \geq 2$-re az a_i-periodikus függvényeket 0-ba viszi S.) Tehát a $h_1 := g_1 - g'_1$ függvényekre $Sh_1 = 0$. Azt állítjuk, hogy

$$Sh_1 = \Delta_{n_2a_2} \dots \Delta_{n_{k-1}a_{k-1}} \Delta_{n_ka_k} h_1 = \Delta_{n_2a_2} \dots \Delta_{n_{k-1}a_{k-1}} \Delta_{(MN\frac{p_k}{q_k}, MN)} h_1 =$$
$$= \Delta_{n_2a_2} \dots \Delta_{n_{k-1}a_{k-1}} \Delta_{(0,MN)} h_1 = \dots = \Delta_{(0,MN)} \dots \Delta_{(0,MN)} \Delta_{(0,MN)} h_1.$$

Ugyanis h_1 $a_1 = (1,0)$-periodikusságát és $(MN\frac{p_k}{q_k}) \in \mathbb{Z}$-t felhasználva a 4.10. Lemma adja, hogy

$$\Delta_{n_ka_k} h_1 = \Delta_{(MN\frac{p_k}{q_k}, MN)} h_1 = \Delta_{(0,MN)} h_1.$$

Vagyis $\Delta_{n_ka_k}$ lecserélhető $\Delta_{(0,MN)}$-re. Azonban a $\Delta_{(0,MN)} h_1$ függvény ugyancsak $(1,0)$-periodikus, így ugyanez a gondolatmenet mutatja, hogy $\Delta_{n_{k-1}a_{k-1}}$ is lecserélhető $\Delta_{(0,MN)}$-re, és így tovább.

A fenti okoskodásból az jött tehát ki, hogy

$$\Delta^{k-1}_{(0,MN)} h_1 = 0.$$

Tekintsük az

$$L_1(x,y) = h_1(x,y) - tp_3 y$$

függvényt, ami egyrészt korlátos, hiszen

$$L_1(x,y) = (h_1(x,y) - [tp_3y]) - \{tp_3y\} = -g_1'(x,y) - \{tp_3y\},$$

másrészt $\Delta^{k-1}_{(0,MN)} L_1 = 0$, mert ez h_1-re igaz, $(x,y) \mapsto tp_3y$ pedig $(0,1)$-lineáris és $k-1 \geq 2$. A 4.6. Következmény szerint ekkor L_1 $(0,MN)$-periodikus. Vagyis

$$h_1(0,MN) - h_1(0,0) = L_1(0,MN) - L_1(0,0) + tp_3MN = tp_3MN \notin \mathbb{Q},$$

holott h_1 egész értékű, ellentmondás.

Ha $a_4, \dots, a_k$ között vannak a_1-gyel összemérhetők, akkor a következőképp járunk el. Először kicsit megváltoztatjuk a jelöléseinket. Az a_1-gyel nem összemérhetőket továbbra is jelöljük $a_2, \dots, a_k$-val; az a_1-gyel összemérhetők legyenek $a_1 = (r_1, 0) = (1,0); (r_2, 0); \dots; (r_l, 0)$. (Ezzel persze k értéke is változik.) Ezután jelölje m az $[r_1 = 1, r_2, \dots, r_l]$ legkisebb közös többszöröst. A fenti gondolatmeneten annyit változatunk, hogy miután feltesszük indirekt, hogy f-nek van korlátos egész felbontása, összeadjuk az $a_1 = (r_1, 0) = (1,0); (r_2, 0); \dots; (r_l, 0)$ periódusokhoz tartozó függvényeket. Ezzel kapunk egy G_1' $(m,0)$-periodikus függvényt. Az a_i-periodikusokat továbbra is jelölje g_i', ha $i \geq 2$. Ekkor mindent ugyanúgy csinálunk leszámítva azt, hogy N megválasztásánál $Np_i \in m\mathbb{Z}$-re ügyelünk. Mivel $H_1 := g_1 - G_1'$ m-periodikus, ezért innen már minden ugyanúgy megy. ∎

A következő lemma mutatja, hogy ha a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$-beli periódusokhoz hozzávesszünk olyanokat, amik nem fekszenek ebben a síkban, akkor továbbra is fennáll, hogy $KVF \not\Rightarrow KEF$.

5.7. Lemma. *Legyenek $d < d'$ pozitív egészek; $a_1, a_2, \ldots, a_l \in \mathbb{Q}^d \subset \mathbb{Q}^{d'}$ és $a_{l+1}, a_{l+2}, \ldots, a_k \in \mathbb{Q}^{d'} \setminus \mathbb{Q}^d$. Ha létezik olyan $f : \mathbb{Q}^d \to \mathbb{Z}$ függvény, melyre $KVF_{a_1,\ldots,a_l}(f)$, de **nem** $KEF_{a_1,\ldots,a_l}(f)$, akkor van olyan $f' : \mathbb{Q}^{d'} \to \mathbb{Z}$ függvény is, melyre $KVF_{a_1,\ldots,a_k}(f')$, de **nem** $KEF_{a_1,\ldots,a_k}(f')$.*

BIZONYÍTÁS. Terjesszük ki f-et $\mathbb{Q}^{d'}$-re úgy, hogy $\mathbb{Q}^d$-n kívül 0 legyen. Válasszuk ezt a függvényt f'-nek. Ekkor $KVF_{a_1,\ldots,a_k}(f')$, sőt $KVF_{a_1,\ldots,a_l}(f')$, hiszen $f = f_1 + \ldots + f_l$ korlátos valós felbontásában szereplő f_i függvényeket is ugyanúgy 0-kal kiterjeszthetjük $\mathbb{Q}^{d'}$-re, mint ahogy f-fel tettük. Ettől a periodikusságuk megmarad, hiszen $1 \le i \le l$ esetén $a_i \in \mathbb{Q}^d$.

Be kell még látnunk, hogy f' nem korlátosan egész felbontható az $a_1, \ldots, a_k$ periódusokkal. Tegyük fel indirekt, hogy

$$f' = g'_1 + g'_2 + \ldots + g'_k \quad (g'_i : \mathbb{Q}^{d'} \to \mathbb{Z} \text{ korlátos, } a_i\text{-periodikus függvény}).$$

Vegyünk $n_{l+1}, n_{l+2}, \ldots, n_k$ pozitív egészeket, és tekintsük a

$$S := \Delta_{n_{l+1}a_{l+1}} \Delta_{n_{l+2}a_{l+2}} \ldots \Delta_{n_k a_k}$$

operátort. Az S operátor persze $l+1 \le i \le k$-ra a_i-periodikus függvényt 0-ba visz, így

$$Sf' = Sg'_1 + Sg'_2 + \ldots + Sg'_l,$$

ahol $Sg'_i : \mathbb{Q}^{d'} \to \mathbb{Z}$ korlátos a_i-periodikus függvény ($1 \le i \le l$). Emiatt $KEF_{a_1,\ldots,a_l}(Sf')$. Az $n_{l+1}, n_{l+2}, \ldots, n_k$ pozitív egészeket úgy fogjuk megválasztani, hogy Sf'-t megszorítva $\mathbb{Q}^d$-re a $(-1)^{k-l} f$ függvényt kapjuk. Ekkor kész lennénk, hiszen ebből $KEF_{a_1,\ldots,a_l}(f)$ következne.

Egymás után választjuk meg az $n_k, n_{k-1}, \ldots, n_{l+1}$ pozitív egészeket, először n_k-t tetszőlegesen. Tekintsük a $(\Delta_{n_k a_k} f')(x) = f'(x + n_k a_k) - f'(x)$ függvényt. Ez a függvény $x \in \mathbb{Q}^d$ esetén $-f(x)$, hiszen $a_k \notin \mathbb{Q}^d$. Továbbá van egy $\mathbb{Q}^d$-nel párhuzamos „sáv”, amin kívül 0, ahol sávon

$$\mathbb{Q}^d \times ([-K_{d+1}, K_{d+1}] \cap \mathbb{Q}) \times \ldots \times ([-K_{d'}, K_{d'}] \cap \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}^{d'}$$

alakú halmazokat értünk, ahol $K_{d+1}, \ldots, K_{d'} \ge 0$ racionális számok. (Esetünkben K_j választható az $n_k a_k$ pont j-edik koordinátája abszolút értékének.) Ezután

n_{k-1}-t úgy választjuk meg, hogy $n_{k-1}a_{k-1}$ ezen a sávon kívül legyen. (Ez megtehető, mert $a_{k-1} \notin \mathbb{Q}^d$, így valamilyen $j > d$-re a_{k-1} j-edik koordinátája nem 0, így $(n_{k-1}a_{k-1})_j > K_j$ elég nagy n_{k-1}-re.) Ekkor $(\Delta_{n_{k-1}a_{k-1}}\Delta_{n_k a_k} f')(x)$ függvény $\mathbb{Q}^d$-n éppen f-fel egyenlő, és most is lesz egy sáv, amin kívül már mindenhol 0 a függvény. (Az új K_j választható a régi K_j és $\left|(n_{k-1}a_{k-1})_j\right|$ összegének.) Ezt az eljárást folytatva, végül olyan S-et kapunk, melyre $Sf' |_{\mathbb{Q}^d}$ valóban $(-1)^{k-l} f$. ∎

5.8. Tétel. *Ha az* $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *periódusok között található három, melyek lineárisan összefüggőek, de páronként összemérhetetlenek, akkor*

$$KVF_{a_1,\ldots,a_k} \not\Rightarrow KEF_{a_1,\ldots,a_k}.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen ez a három periódus a_1, a_2, a_3. Ezek egy két dimenziós $\mathbb{Q}$-lineáris alteret feszítenek ki. Feltehető, hogy azon periódusok, melyek beleesnek ebbe az $\langle a_1, a_2, a_3\rangle_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ altérbe $a_1, \ldots, a_l$ valamilyen $3 \leq l \leq k$ egészre. Továbbá $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^{d'}$ valamilyen $d' \geq 2$ pozitív egészre.

Az 5.6. Állítás miatt ezen a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$-n az $a_1, \ldots, a_l$ periódusokra megadható korlátosan valós felbontható egész értékű függvény, amelynek nincs korlátos egész felbontása.

Ha $l = k$, azaz $d' = 2$, akkor ezt a függvényt terjesszük ki 0-kal $\mathbb{R}$-re. A valós felbontást is terjesszük ki 0-kal $\mathbb{R}$-re. Mivel minden periódus $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$-beli, ezért a megfelelő periodikusságok továbbra is teljesülnek, így ezzel egy korlátos valós felbontást kapunk. A korlátos egész felbonthatóság persze a kiterjesztett függvényre sem állhat fenn.

Ha $l < k$, azaz $d' > 2$, akkor az 5.7. Lemma miatt $\mathbb{Q}^{d'}$-n az $a_1, \ldots, a_k$ periódusokra megadható korlátosan valós felbontható egész értékű függvény, amelynek nincs korlátos egész felbontása. Ebben az esetben ezt terjesztjük ki 0-kal $\mathbb{R}$-re. Az előző esetnél látott gondolatmenet mutatja, hogy ez jó. ∎

5.3. Karakterizáció

5.9. Tétel. *Az $a_1, a_2, \dots, a_k$ periódusokra az alábbiak ekvivalensek.*

(i) *Az $a_1, a_2, \dots, a_k$ periódusokra teljesül, hogy bármely három, melyek páronként összemérhetetlenek, lineárisan függetlenek. (Vagyis az előforduló irányok közül bármely három lineárisan független.)*

(ii) *A homogén egyenlet minden megoldása triviális.*

(iii) *Minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvényre fennáll az alábbi implikáció:*

$$KVF_{a_1,\dots,a_k}(f) \Longrightarrow KEF_{a_1,\dots,a_k}(f),$$

azaz ha f felbontható korlátos, a_i-periodikus, valós értékű függvények összegére, akkor felbomlik korlátos, a_i-periodikus, egész értékű függvények összegeként is.

(iv) *Minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvényre fennáll az alábbi implikáció:*

$$f \text{ korlátos és } \Delta_{a_1} \dots \Delta_{a_k} f = 0 \Longrightarrow KEF_{a_1,\dots,a_k}(f).$$

BIZONYÍTÁS. A 4.9. Tétel (i) $\Rightarrow$ (ii)-t, az 5.3. Tétel (ii) $\Rightarrow$ (iii)-at, az 5.8. Tétel pedig (iii) $\Rightarrow$ (i)-et mondja ki.

A (iv) $\Rightarrow$ (iii) irány triviális, a (iii) $\Rightarrow$ (iv) implikáció pedig azért teljesül, mert a korlátos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények $B(\mathbb{R})$ osztálya rendelkezik a felbontási tulajdonsággal ([12]), így f korlátosságából és $\Delta_{a_1} \dots \Delta_{a_k} f = 0$-ból következik $KVF_{a_1,\dots,a_k}(f)$. ∎

6. fejezet

Mérhető függvények felbontásai

Keleti Tamás [10]-ben igazolta az alábbi tételt.

6.1. Tétel. *Az $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ periódusokra az alábbi hét állítás ekvivalens.*

(i)/(i') *Ha egy mindenütt/majdnem mindenütt egész értékű mérhető f függvény $\mathbb{R}$-en felírható $f = f_1 + \ldots + f_k$ alakban, ahol f_j a_j-periodikus mérhető $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, akkor f felírható $f = g_1 + \ldots + g_k$ alakban is, ahol g_j a_j-periodikus majdnem mindenütt egész értékű mérhető függvény.*

(ii)/(ii') *Ha egy mindenütt/majdnem mindenütt egész értékű korlátos mérhető f függvény $\mathbb{R}$-en felírható $f = f_1 + \ldots + f_k$ alakban, ahol f_j a_j-periodikus korlátos mérhető $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, akkor f felírható $f = g_1 + \ldots + g_k$ alakban is, ahol g_j a_j-periodikus majdnem mindenütt egész értékű korlátos mérhető függvény.*

(iii)/(iii') *Egy mindenütt/majdnem mindenütt egész értékű korlátos mérhető f függvény $\mathbb{R}$-en pontosan akkor írható fel $f = g_1 + \ldots + g_k$ alakban, ahol g_j a_j-periodikus majdnem mindenütt egész értékű korlátos mérhető függvény, ha $\Delta_{a_1} \ldots \Delta_{a_k} f = 0$.*

(iv) *Az $a_1, \ldots, a_k$ periódusok között előforduló irányok reciprokai lineárisan függetlenek $\mathbb{Q}$ felett.*

Az (i) illetve (ii) pontokban mindenütt egész értékű mérhető f függvényünk van, a g_i felbontás tagjairól mégis csupán majdnem mindenütt egész értékűséget követelünk meg. Mi a helyzet, ha mindenütt egész értékű g_i felbontás létezésére szeretnénk következtetni? Mint arra már [10] is rámutatott, ehhez éppen az analóg problémára van szükségünk a mérhetőség nélküli esetből. (Azaz arra, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvény esetén milyen periódusokra következik a valós felbonthatóságból az egész felbonthatóság, illetve a korlátosan valós felbonthatóságból a korlátosan egész felbonthatóság.) Ezekre az analóg problémákra választ adtunk a korábbi fejezetekben (2.15. és 5.9. Tétel), így válaszolhatunk a most felvetett problémákra is.

[10]-ben bizonyítást nyert, hogy az alábbi (i'') állítás pontosan akkor ekvivalens az előző Tételben szereplő hét állítással, ha tetszőleges periódusokra következik $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ valós felbonthatóságából az egész felbonthatósága. A teljesség kedvéért idemásoljuk az esetünkben releváns irány bizonyítását.

6.2. Tétel. *Az alábbi állítás ekvivalens a 6.1. Tételben szereplő hét másik állítással.*

(i'') *Ha egy mérhető $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvény felírható $f = f_1 + \ldots + f_k$ alakban, ahol f_j a_j-periodikus mérhető $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, akkor f felírható $f = g_1 + \ldots + g_k$ alakban is, ahol g_j a_j-periodikus mindenütt egész értékű mérhető függvény.*

BIZONYÍTÁS. Az $(i'') \Rightarrow (i)$ irány triviális. Az $(i) \Rightarrow (i'')$ irány bizonyításához vegyünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ mérhető függvényt, melynek létezik $f = f_1 + \ldots + f_k$ mérhető valós felbontása. Ekkor (i) szerint f felírható $g_1 + \ldots + g_k$ alakban is, ahol g_j a_j-periodikus majdnem mindenütt egész értékű mérhető függvény. Az a feladatunk, hogy lecseréljük g_j-ket mindenütt egész értékű mérhető függvényekre.

Legyen
$$E_j = \{x \in \mathbb{R} : g_j(x) \notin \mathbb{Z}\},$$
illetve
$$E = \left(\bigcup_{j=1}^{k} E_j\right) + a_1\mathbb{Z} + \ldots + a_k\mathbb{Z}.$$
A feltételek szerint E_j nullmértékű minden j-re, így $\cup_{j=1}^{k} E_j$ is az. Ezen halmaz megszámlálható sok eltoltjának uniójaként kapjuk E-t, így E is nullmértékű. Továbbá E a_j-periodikus minden j-re, vagyis a $g_j\chi_E$ illetve a $g_j\chi_{\mathbb{R}\setminus E}$ függvények a_j-periodikusak.

Tekintsük az $F = f\chi_E$ függvényt. Ez valós felbontható $a_1, \ldots, a_k$ periódusokkal, amit a
$$F = f\chi_E = g_1\chi_E + \ldots + g_k\chi_E$$

felbontás mutat. A 2.15. Tétel szerint ekkor egész felbontható is ugyanazokkal a periódusokkal:

$$F = G_1 + \ldots + G_k \quad (G_j : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}; \Delta_{a_j} G_j = 0).$$

Legyen

$$g_j'(x) = g_j \chi_{\mathbb{R}\setminus E} + G_j \chi_E.$$

Világos, hogy g_j' egész értékű és a_j-periodikus. Mérhető is, mert nullmértékű részen (E) tér el a mérhető g_j függvénytől. Végül,

$$g_1'(x) + \ldots + g_k'(x) = \begin{cases} g_1(x) + \ldots + g_k(x) = f(x) & (x \in \mathbb{R} \setminus E) \\ G_1(x) + \ldots + G_k(x) = F(x) = f(x) & (x \in E) \end{cases}$$

mutatja, hogy a g_j' függvények felbontását adják f-nek. ∎

6.3. Tétel. *Az alábbi (ii'') állítás azzal ekvivalens, hogy a periódusok között előforduló irányok reciprokai lineárisan függetlenek és az irányok közül bármely három lineárisan független.*

(ii'') *Ha egy korlátos mérhető $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvény felírható $f = f_1 + \ldots + f_k$ alakban, ahol f_j a_j-periodikus korlátos mérhető $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, akkor f felírható $f = g_1 + \ldots + g_k$ alakban is, ahol g_j a_j-periodikus mindenütt egész értékű korlátos mérhető függvény.*

BIZONYÍTÁS. Először tegyük fel, hogy a periódusokra kikötött két feltétel közül valamelyik nem teljesül. Ha az irányok reciprokai nem lineárisan függetlenek, akkor a 6.1. Tétel szerint már (ii) sem teljesül, így nyilván (ii'') sem. Ha pedig az irányok között van három, melyek lineárisan összefüggnek, akkor az 5.8. Tétel szerint ezen periódusokra létezik korlátosan valós felbontható $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvény, amelynek nincs korlátos egész felbontása. Sőt, a bizonyításában olyan példát adtunk, amelynél f valamint a korlátos valós felbontásban szereplő f_i függvények $\mathbb{R}$-nek egy $\mathbb{Q}^{d'}$-vel izomorf additív részcsoportjára vannak koncentrálva. Ezek a függvények tehát csak megszámlálható sok pontban vesznek fel nem 0 értéket, így mérhetők. Vagyis f-nek van korlátos mérhető felbontása, de még korlátos egész felbontása sincs.

Most tegyük fel, hogy mindkét feltétel teljesül a periódusokra. Ekkor (ii) és $KVF \Rightarrow KEF$ teljesülnek. Ugyanúgy járunk el, mint az előző bizonyításnál. Vegyünk egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvényt, melynek létezik $f = f_1 + \ldots + f_k$ korlátos mérhető valós felbontása. Ekkor (ii) szerint f felírható $g_1 + \ldots + g_k$ alakban is, ahol g_j a_j-periodikus majdnem mindenütt egész értékű korlátos mérhető függvény.

Legyen ismét

$$E_j = \{x \in \mathbb{R} : g_j(x) \notin \mathbb{Z}\}\,; E = \left(\bigcup_{j=1}^{k} E_j\right) + a_1\mathbb{Z} + \ldots + a_k\mathbb{Z}.$$

Vegyük megint az $F = f\chi_E = g_1\chi_E + \ldots + g_k\chi_E$ korlátosan valós felbontható függvényt, aminek így van

$$F = G_1 + \ldots + G_k \quad (G_j : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \text{ korl.}; \Delta_{a_j} G_j = 0)$$

korlátos egész felbontása is. Ekkor

$$g_j'(x) = g_j\chi_{\mathbb{R}\setminus E} + G_j\chi_E$$

megadja a kívánt korlátos, mérhető, mindenütt egész értékű felbontást. ∎

Irodalomjegyzék

[1] B. Farkas, V. Harangi, T. Keleti, Sz.Gy. Révész, *Invariant decomposition of functions with respect to commuting invertible transformations*, Proceedings of American Mathematical Society, közlésre benyújtva.

[2] B. Farkas, Sz.Gy. Révész, *Decomposition as the sum of invariant functions with respect to commuting transformations*, Aequationes Math., megjelenés alatt.

[3] L. Fuchs, *Abelian groups*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1958.

[4] Z. Gajda, *Note on decomposition of bounded functions into the sum of periodic terms*, Acta Math Hungar. 59 (1-2) (1992) 103-106.

[5] V.M. Kadets, S.B. Shumyatskiy, *Averaging Technique in the Periodic Decomposition problem*, Mat. Fiz. Anal. Geom. 7(2000), no. 2, 184-195.

[6] V.M. Kadets, S.B. Shumyatskiy, *Additions to the Periodic decomposition theorem*, Acta Math. Hungar. 90(2001), no. 4, 293-305.

[7] Gy. Károlyi, T. Keleti, G. Kós, I.Z.Ruzsa, *Periodic decomposition of integer valued functions*, Acta Math. Hungar., megjelenés alatt.

[8] T. Keleti, *On the differences and sums of periodic measurable functions*, Acta Math. Hungar., 75(4) (1997), 279-286.

[9] T. Keleti, *Difference functions of periodic measurable functions*, Fund. Math., 157 (1998), 15-32.

[10] T. Keleti, *Periodic decomposition of measurable integer valued functions*, J. Math. Anal. Appl. (2007), megjelenés alatt.

[11] M. Laczkovich, Sz.Gy. Révész, *Periodic decomposition of continuous functions*, Acta Math. Hungar. 54(3-4) (1989), 329-341.

[12] M. Laczkovich, Sz.Gy. Révész, *Decompositions into periodic functions belonging to a given Banach space*, Acta Math. Hungar. 55(3-4) (1990), 353-363.

[13] S. Mortola, R. Peirone, *The sum of periodic functions*, Boll. Un. Mat. Ital.8 2-B (1999), 393-396.

[14] T. Natkaniec, W. Wilczyński, *Sums of periodic Darboux functions and measurability*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 51 (2003), 369-376.

[15] M. Wierdl, *Continuous functions that can be represented as the sum of finitely many periodic functions*, Mat. Lapok 32 (1984), 107-113.