Általános szummációs módszerek

Szakdolgozat

Készítette: Gulácsi Tamás
Témavezető: Czách László docens

2004. március 16.

Tartalomjegyzék

Kivonat

A szummációs módszerek lényege, hogy sor(ozat)hoz másik sor(ozato)t rendeljünk úgy, hogy a konvergenciát (ha volt) ne rontsuk el, de esetleg nem konvergens sor(ozat)okat is konvergensbe képezzünk. Ez utóbbiak a számunkra „érdekesek" – ízelítőül a módszerek sokféleségére álljon itt néhány nagyobb név: Abel, Cesàro $(C, 1)$, Riemann.

Ezen dolgozatban bemutatok egy $\sum a_n \varphi_n(t)$ alakú általános szummációs módszert: ami ezen régebbi és ismert szummációs módszereket magában foglalja, sőt az összes mátrixon alapuló módszer felírható ilyen alakban.

Igazolom a tétel egy általánosítását is, ami nem csak a cs sorozattéren lesz érvényes, hanem tetszőleges (bizonyos feltételeknek eleget tevő) sorozattéren is.

Természetesen ez nem a lehető legáltalánosabb módszer, a dolgozat végén megemlítek egy sokkal messzebbre mutató általánosítást, melyre azonban szükséges és elegendő feltételek nem, csupán példák állnak rendelkezésünkre.

1. Bevezetés, alapfogalmak

1.I. Bevezetés

A szummációs módszerek lényege, hogy sor(ozat)hoz másik sor(ozat)ot rendeljünk úgy, hogy a konvergenciát (ha volt) ne rontsuk el, de esetleg nem konvergens sor(ozat)okat is konvergensbe képezzünk.

Például Euler $\frac{1}{2}$-et rendelt a $\Sigma(-1)^{n-1}$ divergens sor összegének, mert

a) ha $x := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, akkor $1 - x = 1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = x$,

b) $|t|<1$ esetén $F(t) := \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n$ és $F(1)=\frac{1}{2}$.

A probléma magával az analízissel egyidős. Kezdetben nem tudták pontosan definiálni a sorösszeget, így Cauchy előtt gyakran hasonló ad hoc módszerekkel próbálták megfogni a határértéket.

1.1. Definíció. *[[Gyö71]] Adott A mátrix esetén ha egy Σx_n sorra nézve az $s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$ részletösszegek $t = A(s)$ transzformált sorozata ($t_n = \sum_{k=0}^{\infty} A(n,k) \cdot x_n$) létezik és Cauchy-konvergens, akkor a Σx_n sort az A (szummációs) eljárásra nézve szummábilis sornak (röviden A-szummábilisnak) nevezzük.*

Egy A eljárás permanens, ha $A(s) = \sum s$.

[Gam] Érdemes leszögezni, hogy a szummációs módszerek nagy többségét nem csupán azon absztrakt célból találták ki, hogy minden divergens sorhoz találjunk összeget, hanem hogy bizonyos, éppen felmerült konkrét problémát megoldjanak.

Íme két példa: az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ hatványsor konvergáljon a 0 egy környezetében. Az $f(z)$ sor *Mittag–Leffler* csillagja az a D_f tartomány, melynek pontjaiba a sor folytatható z=0-ból kiinduló töröttvonallal. D_f ekkor összefüggő tartomány, jelölje $F(z)$ az $f(z)$ függvény D_f-re való kiterjesztését. Ekkor

$$\lim_{\delta \longrightarrow +0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n z^n}{\Gamma(1+n\delta)}$$

létezik minden $z \in D_f$-re és megegyezik $F(z)$-vel.

A másik példa: *Fejér tétele* – bármely pontonként folytonos $\phi(x)$ függvény Fourier-sora összegezhető a következő aritmetikai középpel: $\frac{1}{2}\{\phi(x+0) + \phi(x-0)\}$.

Ezen dolgozatban nem foglalkozom velük, de a szummációs módszerek igen kiterjedt köre foglalkozik improprius integrálokkal. Például a Σu sorra alkalmazott aritmetikai közép módszerét

$$s = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) u_k$$

az $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ $(a>0)$ integrál összegzésére alkalmazva az

$$s = \lim_{t \longrightarrow \infty} \int_a^t \left(1 - \frac{x}{t}\right) f(x)\, dx$$

formulát kapjuk ([Mad80]).

1.II. ω, a sorozatok tere

1.2. Definíció. *[]Jelölje $\omega := \{x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}\}$ a számsorozatok vektorterét. Ezen a téren értelmezhetünk egy topológiát: legyen ez a leggyengébb olyan topológia, melyre a $P_n : \omega \longrightarrow \mathbb{K}$, $P_n(x) := x_n$ (koordináta) függvények folytonosak. Jelölje ezt a topológiát τ_ω.*

***Fréchet-tér**: olyan lokálisan konvex vektortér, mely teljesen metrizálható (pszeudonormálható), azaz létezik rajta olyan pszeudonorma, hogy az általa generált topológiával a tér teljes és a topológia megegyezik a tér eredeti topológiájával.*

*Legyen (H, τ_H) topologikus vektortér. Egy (X, τ_X) lokálisan konvex Fréchet-teret **FH-tér**nek mondnunk, ha X (algebrai) altere H-nak és $\tau_X \geq \tau_H\restriction_X$, azaz az $X \longrightarrow H$ természetes beágyazás folytonos.*

***FK-tér**: FH-tér $H{=}\omega$-val – azaz egy olyan sorozattér, mely lokálisan konvex Fréchet-tér, és a koordinátafüggvények folytonosak.*

Mivel a τ_ω topológia megegyezik a $\mathcal{P} := \{p_n : x \mapsto |x_n| {\in} \mathbb{R}_+\}$ félnormacsalád által generált lokálisan konvex vektortopológiával, ezért (ω, τ_ω) Fréchet-tér.

***1.1. Lemma.** [[Wil84, 4.2.2]] Legyen X egy Fréchet-tér, Y egy FH-tér és $f : X \longrightarrow Y$ lineáris leképezés. Ha $f : X \longrightarrow H$ folytonos, akkor $f : X \longrightarrow Y$ is folytonos.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy f gráfja zárt: $f : X \longrightarrow (H, \tau_H)$ folytonos, így gráfja zárt; az $f : X \longrightarrow (Y, \tau_H\restriction_Y)$ megszorítás gráfja is zárt. Tehát f zárt $(X, \tau_X){\times}(Y, \tau_H\restriction_Y)$-ban, így $(X, \tau_X){\times}(Y, \tau_Y)$-ban is, hiszen $\tau_Y \geq \tau_H\restriction_Y$ miatt ezen utóbbi szorzattérnek csak több zárt halmaza van.

A Fréchet-terekre vonatkozó ZÁRT GRÁF TÉTEL (Fréchet-terek közti zárt gráfú lineáris függvény folytonos [Wil78, 5-3-1]) szerint tehát $f : X \longrightarrow Y$ folytonos. QED

***1.2. Állítás.** [[Wil84, 4.2.4]] Legyenek (X, τ_X), (Y, τ_Y) FH-terek (ugyanazon H-ra), $X {\subset} Y$. Akkor $\tau_X \geq \tau_Y\restriction_X$ és pontosan akkor egyenlők, ha X zárt részhalmaza Y-nak.*

Bizonyítás. Az 1.1 lemmát alkalmazva az $X \longrightarrow Y$ beágyazásra kapjuk, hogy $\tau_X \geq \tau_Y\restriction_X$. Ha X zárt Y-ban, akkor a $\tau_Y\restriction_X$ topológiával FH tér lesz, ami az egyértelműség miatt τ_X.

Megfordítva, ha $\tau_Y\restriction_X = \tau_X$, X teljes, akkor zárt és részhalmaza Y-nak. QED

A dolgozatban előforduló sorozatterek ω-nak algebrai értelemben vett alterei, valamilyen (a teret teljessé tevő) normával. Az 1.2 állítás szerint az indukált normatopológia egyértelmű, ezek a sorozatterek (FK-terek is!) topológiai alterei ω-nak.

Jelölje

$$\phi := \{x {\in} \omega : x \text{ csak véges sok helyen nemnulla}\} = \mathrm{sp}\{\delta^n : n {\in} \mathbb{N}\} \subset \omega$$

a véges (finite) sorozatok vektorterét – ez altere lesz minden, a következőkben előforduló sorozattérnek.

1.III. Végtelen mátrixok

Végtelen mátrixon értsünk egy $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ függvényt. Vigyük át a mátrix szorzás szabályát végtelen mátrixok esetére is. Az A mátrixot az x sorozattal mint oszlopvektorral szorozzuk: Ax legyen az a sorozat, melynek m-edik tagja $\sum_{n=0}^{\infty} A(m,n)\cdot x_n$ ha értelmes.

Jelölje $D(A) := \{x\in\omega : Ax \text{ értelmes}\}$ – a mátrixszorzás szabályaiból könnyen belátható, hogy ez a halmaz vektortér. Jelöljük szintén A-val az $A : D(A) \longrightarrow s$, $x \mapsto Ax$ lineáris leképezést.

Könnyen belátható, hogy minden A végtelen mátrixra $\{0\} \cup \phi \subset D(A)$. Sejtés, hogy ez a legbővebb halmaz, mely minden mátrix „értelmezési tartományában” benne van.

A szummációs módszerekkel először Cesàro, Borel és mások foglalkoztak a századfordulón. O. Toeplitz (1881-1940), az ünnepelt német matematikus volt az, aki 1911-ben alkalmazta a lineáris terek elméletét a sorozatterek közti mátrix transzformációk kezelésére.

Toeplitz meghatározta mindazon $A = (a_{nk})$ $(n, k = 1, 2\ldots)$ végtelen mátrixokat, melyek a c sorozatteret önmagába képezik, a konvergens sorozatok határértékét megőrizve. Ezen „Toeplitz feltételek” könnyen adódnak a Banach–Steinhaus tételt alkalmazva. (Természetesen Toeplitz még nem ismerhette ezt az 1920-as évekbeli tételt, így a tétel nemtriviális részéhez klasszikus analízist használt, kifejlesztve egy némiképp komplikált *reductio ad absurdum* érvelést. Mindenesetre bizonyítása nagyon inspiráló és érdekes, az olvasó megtalálja [Har49]-ben.)

Silvermann kiegészítette Toeplitz tételét: karakterizálta azon mátrixokat, melyek a c sorozatteret önmagukba képezik, nem feltétlenül őrizve meg a konvergens sorozatok határértékét. Ezen Silvermann–Toeplitz tétel (4.6) tétel tehát éppen $[c, c]$-t írja le.

Látni fogjuk, hogy a Banach–Steinhaus tétel és hasonló eredmények különösen alkalmasak a mátrix transzformációk és a szummációs módszerek problémáinak kezelésére.

1.III.1. $c_0 \longrightarrow c_0$ mátrix-transzformáció, mint általános lineáris leképezés

Hogy miért érdekesek a mátrix transzformációk, miért nem nem általános lineáris transzformációkkal foglalkozunk? A válasz az, hogy sok esetben sorozattéren az általános lineáris transzformációk megadhatóak mátrixszal is. Példaként tekintsük c_0-t, a nullsorozatok terét és legyen $A = (a_{mn})$ $(m, n\in\mathbb{N})$.

1.3. Definíció. *[Jelölje $c_0 := \{x\in\omega : \exists \lim x = 0\}$ a konvergens nullsorozatok Banach-terét a $\|x\|_{c_0} := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ $(x\in c_0)$ supnormával.*

1.3. Állítás. *[Legyen $a_{mn} \xrightarrow{m\longrightarrow\infty} 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ és tegyük fel, hogy $M = \sup_m \sum |a_{mn}| < \infty$ (az összegzés n-re történik).*

Akkor A korlátos lineáris operátort definiált c_0-ról önmagába és $\|A\| = M$.

Bizonyítás. [Mad80] $x\in c_0$ esetén $Ax \in c_0$, ugyanis $A_m(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}x_n \xrightarrow{m\longrightarrow\infty} 0$ a feltevés szerint. Tehát az $\Sigma a_{mn}x_n$ sor abszolút konvergens minden m-re és $\forall N\geq 0$-ra

$$|A_m(x)| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_{mn}x_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_{mn}x_n| \leq \|x\|_{c_0} \cdot \sum_{n=0}^{N} |a_{mn}| + \max_{n\geq N+1} |x_n|\cdot M$$

$\varepsilon>0$-hoz létezik elég nagy N, mellyel $\max_{n\geq N+1} |x_n| < \varepsilon$ és $\sum_{n=0}^{N} |a_{mn}|$ is teljesüljön. Így megmutattuk, hogy $A : c_0 \longrightarrow c_0$.

A nyilván lineáris: $A(\lambda x) = (\sum a_{mn}\lambda x_n)_{m\in\mathbb{N}} = \lambda(\sum a_{mn}x_n)_{m\in\mathbb{N}} = \lambda A(x)$.

$$\|A(x)\| = \sup_m \left|\sum a_{mn}x_n\right| \le \|x\|_{c_0} \sup_m \sum |a_{mn}| = M\cdot \|x\|_{c_0} \qquad \forall x\in c_0$$

Tehát $\|A\| \le M$, A korlátos.

A másik irányhoz legyen $r{=}r(\varepsilon)$ olyan, hogy $\sum |a_{rn}| > M-\frac{\varepsilon}{2}$, így $\sum |a_{rn}| < \infty$ miatt $\exists p{=}p(\varepsilon)$ hogy $\sum_{n>p} |a_{rn}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen

$$x_n := \begin{cases} \operatorname{sgn} a_{rn}, & 0\le n\le p \\ 0, & n>p \end{cases}$$

Ekkor $x\in c_0$ és $\|x\|_{c_0} =1$, így

$$\frac{\|A(x)\|}{\|x\|_{c_0}} = \sup_m |A_m(x)| \ge |A_r(x)| > M-\varepsilon$$

Ebből következik, hogy $M = \sup\left\{\frac{\|A(x)\|}{\|x\|_{c_0}} : 0\ne x\in c_0\right\} = \|A\|$. QED

Igazolható a megfordítás is, tehát hogy minden $c_0 \longrightarrow c_0$ korlátos lineáris operátor előáll mátrix alakban:

1.4. Állítás. *[]Legyen $A\in B(c_0, c_0)$ (korlátos lineáris operátor c_0-ból c_0-ba). Akkor A meghatároz egy (a_{mn}) mátrixot, melyre*

$$(Ax)_m = \sum a_{mn}x_n \qquad \forall x\in c_0 \ \textit{és}$$

$$\|A\| = \sup_m \sum |a_{mn}| < \infty \quad \textit{valamint} \quad a_{mn} \xrightarrow{m\longrightarrow\infty} 0 \ (\forall n\in\mathbb{N})$$

Bizonyítás. Minden $x\in c_0$ sorozat előáll $x = \sum x_n e_n$ alakban, ahol (e_n) egy bázis c_0-ban (például $e_0 = (1, 0, \dots)$, $e_1 = (0, 1, 0\dots)\dots$).

A linearitása és folytonossága miatt $Ax = \sum x_n Ae_n$, így $|x_m| \le \|x\|_{c_0}$-t használva kapjuk, hogy $(Ax)_m = \sum x_n(Ae_n)_m$ $(m\in\mathbb{N})$ azaz

$$A_m(x) := \sum a_{mn}x_n, \quad \text{ahol} \quad a_{mn} = (Ae_n)_m$$

$x\in c_0$ esetén $Ax\in c_0$ miatt $Ae_n\in c_0$, így $a_{mn} \xrightarrow{m\longrightarrow\infty} 0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

Már csak $\|A\| = \sup_m \sum |a_{mn}|$-t kell megmutatni, amihez az előző állítás alapján elegendő, ha $\sum |a_{mn}| \le H$ $(\forall m\in\mathbb{N})$-t igazoljuk valamely H-ra.

Mivel $|A_m(x)| \le \|A(x)\| \le \|A\|\cdot\|x\|_{c_0}$, azért A_m korlátos (nyilván lineáris) funkcionál c_0-on. Kaptunk tehát egy $(A_m)\in c_0^*$ funkcionál-sorozatot, melyre $\lim_m A_m(x){=}0$ c_0-on. A Banach–Steinhaus tétel szerint a normák $(\|A_m\|)_{m\in\mathbb{N}}$ sorozata korlátos, azaz $\exists H{>}0 : \|A_m\| \le H \ \forall m\in\mathbb{N}$.

Ugyanakkor $\|A_m\| = \sum |a_{mn}|$, amivel a bizonyítást befejeztük. QED

Hasonló módszerekkel majdnem minden X, Y sorozattérre megmutatható, hogy minde $A \in B(X, Y)$ operátor megadható mátrixként. Néhány ilyen pár: (c_0, c_0), (c_0, c), (c_0, ℓ_1), (c, c_0), (c, c), (c, ℓ_1), (ℓ_p, c_0), (ℓ_p, c), (ℓ_p, ℓ_1), (ℓ_p, ℓ_s), ahol $1 \le p, s < \infty$.

Láthatóan ℓ_∞ kivételt képez – ez azért van, mert ℓ_∞^* nem minden eleme írható fel $\sum a_n x_n$ alakban. Látni fogjuk, hogy ℓ_∞ izomorf bfa($\mathbb{N}$)-val, ami nem sorozattér.

1.III.2. Mátrix-transzformációk „tetszőleges” sorozatterek között

Jó volna, ha a sorozatterek közti mátrix-transzformációk szépek (folytonosak) lennének. Nos, a következőkben igazoljuk, hogy FK-terek között ez teljesül.

1.4. Definíció. *[]Jelölje $R(A) := \{Ax : x \in D(A)\}$ az A leképezés képterét.*

Legyenek most (X, τ) és (Y, η) sorozatterek, és jelölje

$[X, Y] := \{A \text{ végtelen mátrix } : X \subset D(A), R(A) \subset Y\}$ *az X, Y terek közt képező mátrixok halmazát.*

Legyenek adva (X, τ_X), (Y, τ_Y) FK-terek. `Kérdés:` lehet-e jellemezni azokat az A mátrixokat, amelyekre $D(A) \supset X$, $R(A) \subset Y$ (azaz $[X, Y]$-t) ?

1.5. Lemma. *[[Wil84, 4.2.3]] Legyen X egy Fréchet-tér, Y pedig egy FK-tér és $f : X \longrightarrow Y$ lineáris leképezés. Ha $P_n \circ f : X \longrightarrow \mathbb{K}$; $x \mapsto (f(x))_n$ folytonos minden n-re, akkor $f : X \longrightarrow Y$ folytonos.*

Bizonyítás. Az FK-tér definíciójából következik, hogy a feltétel ekvivalens azzal, hogy az $f : X \longrightarrow \omega$ leképezés folytonos. Ebből 1.1 alapján következik az állítás. QED

1.6. Tétel. *[[Wil84, 4.2.8]] $A \in [X, Y] \implies A : X \longrightarrow Y$ folytonos, azaz FK-terek közt minden mátrix-leképezés folytonos.*

Bizonyítás. A lemma szerint elegendő azt belátni, hogy minden n-re az $x \mapsto (Ax)_n$ leképezés folytonos $X \longrightarrow \mathbb{K}$.

Most $(Ax)_m = \lim_{N \longrightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N} a_{mn} x_n$ és minden $x \mapsto \sum_{n=0}^{N} a_{mn} x_n$ leképezés folytonos, mivel koordináták véges lineáris kombinációja.

Az $(Ax)_m$ limeszfüggvény folytonosság következik a (lokálisan konvex Fréchet terekre vonatkozó [Wil78, 9-3-7]) Banach–Steinhaus tételből.

QED

1.IV. Tipikus szummációs problémák

1.IV.1. A sorozattereket érintő néhány tipikus probléma [Ruc81]

1. *Az azonosság problémája:* adott S sorozattérnek találjuk meg más karakterizációit.
2. *Abel-típusú tételek:* adott sorozatterek esetén mikor tartalmazza egyik tér a másikat?
3. *Tauber-típusú tételek:* adott S, T, U sorozatterekre igazoljunk $S \cap T \subset U$ jellegű tételt.
4. *Mátrix leképezés probléma:* adott S, T sorozatterek esetén mely végtelen mátrixok képezik S-et T-be? Speciális problémák is érdekesek lehetnek – például megtalálni az összes diagonális mátrixot, ami S-et T-be képezi.
5. *Topológia hozzárendelése:* mi módon lehetne vektortopológiát rendelni a sorozatterek egy gyűjteményéhez vagy egy meghatározott csoportjukhoz úgy, hogy egy kitűzött célt elérjünk?
6. *Struktúra probléma:* igazoljuk bizonyos struktúrák létezését és ennek következményeit topologikus sorozattereken. Például határozzuk meg a tér duálisát vagy éppen a véges sorozatok lezártját.
7. *Geometriai problémák:* például milyen feltételek mellett lesz a tér reflexív vagy tartalmaz egy zárt alteret mely izomorf egy adott térrel?

1.v. Érdekesség: $\ell_2 \longrightarrow \ell_2$ leképezés [Ruc81]

Ebben a fejezetben Crone eredményét ismertetem az $\ell_2 \longrightarrow \ell_2$ módszerek karakterizációjával kapcsolatban.

1.7. Lemma. *[] Egy A végtelen mátrix ℓ_2-t ℓ_2-re képezi pontosan akkor, ha*

$$\sup_n \|[A]_n\| < \infty, \qquad \textit{ahol } [A]_n(i,j) = \begin{cases} A(i,j), & i\le n, j\le n \\ 0, & \textit{különben} \end{cases}$$

Ez esetben $\|A\| = \sup_n \|[A]_n\|$ *és* $\lim_n [A]_n x = Ax$ *(*$x\in\ell_2$*).*

Bizonyítás. Az első és az utolsó állítás a Banach–Steinhaus tételből és abból a tényből következnek, hogy $\lim_n [A]_n e_k = Ae_k$ $(\forall k\in\mathbb{N})$ feltéve hogy $\sup_n \|[A]_n\| < \infty$.

A második állítás abból következik, hogy $\|[A]_n x\| = \left\|[A]_n x^{[n]}\right\| \le \left\|A(x^{[n]})\right\|$. QED

1.8. Állítás. *[Crone] Egy A végtelen mátrix pontosan akkor képezi ℓ_2-t ℓ_2-be, ha*

(i) $\exists (A^*A)^m$ $(\forall m\in\mathbb{N})$,

(ii) $C := \sup_m \sup_i \{(A^*A)^m(i,i)\}^{\frac{1}{2m}} < \infty$

és ekkor $C = \|A\|$.

Bizonyítás. **$\Rightarrow$:** Ha A ℓ_2-t ℓ_2-be képezi, akkor A^* is ugyanezt teszi, tehát $\forall m\in\mathbb{N}$-re $(A^*A)^m$ létezik és ℓ_2-t ℓ_2-be képezi. Ennek minden diagonális elemére

$$(A^*A)^m(i,i) = E_i((A^*A)^m e_i) \le \|A^*\|^m \cdot \|A\|^m = \|A\|^{2m}$$

ahol E_i az i dimenziós egységmátrix. Tehát $C \le \|A\|$.

$\Leftarrow$: Minden n-re $[(A^*A)^2]_n - ([A^*A]_n)^2$ pozitív és szemidefinit, hiszen Hermite és a diagonális nemnegatív. Tehát

$$\left\|[(A^*A)^2]_n\right\| \ge \left\|([A^*A]_n)^2\right\| = \|[A^*A]_n\|^2, \text{ iterálva} \quad \left\|\left[(A^*A)^{2^h}\right]_n\right\| \ge \|[A^*A]_n\|^{2^h}, \quad (h\in\mathbb{N}) \tag{1}$$

Egy $n\times n$-es mátrix nyoma megegyezik a mátrix sajátértékeinek összegével, azaz egy B $m\times m$-es hermitikus (és nemnegatív diagonálisú) mátrixra azt kapjuk, hogy

$$\|B\| = B \text{ legnagyobb sajátértéke} \le m\cdot \max_i B(i,i)$$

Ezen megfigyelés és (1) egyenlőtlenség alapján

$$\|[A^*A]_n\| \le \left\|\left[(A^*A)^{2^h}\right]_n\right\|^{2^{-h}} \le n^{2^{-h}} \cdot \left(\max_i \left\{\left[(A^*A)^{2^h}\right]_n (i,i)\right\}\right)^{2^{-h}} \le n^{2^{-h}} \cdot C^2$$

Mivel ez minden h-ra fennáll, kapjuk, hogy $\|[A^*A]_n\| \le C^2$ minden n-re, tehát az 1.7 lemma alapján A ℓ_2-t ℓ_2-be képezi. QED

2. Egyszerűbb sorozatterek és duálisaik [Wil78]

Ezen fejezetben a [Wil78] könyvben leírt néhány általános, sorozatterekre vonatkozó segédtétel szerepel, melyeknek fontos szerepe lesz tételem (3.5) általánosításában (5.3).

A most következő 2.2 tétel tekinthető az Abel-tétel általánosításának – melyre tételünk igazolásához szükségünk lesz – és jól rámutat arra, miért lesz szükségünk a sorozatterek topologikus duális tereire is.

2.1. Definíció. *[[Legyen most S egy sorozattér (altere ω-nak).*

$A, B \subset S$-re $(A \longrightarrow B) := M(A, B) = \bigcap_{a\in A} a^{-1}B = \{r : rs{\in}B\ \forall s{\in}A\}$.

Azt mondjuk, hogy S topologikus sorozattérben $s{\in}\omega$-nek AK-ja van, ha

$$s^{[n]} \in S \quad (\forall n{\in}\mathbb{N}) \qquad \text{és} \qquad \lim_n s^{[n]} = s$$

ahol $s^{[n]} := s\cdot \sum_{k=0}^{n} \delta^k$ az a sorozat, amely $i{\leq}n$-re megegyezik ω-el, utána viszont 0.

Egy S topologikus sorozattérnek AK-ja van, vagy S AK-tér, ha $\forall s{\in}\omega$-nek AK-ja van.

S térnek AD-je van, vagy AD-tér, ha ϕ sűrű S-ben.

A rövidítések eredete: Abschnitts-Konvergenz (kezdőszelet-konvergencia) illetve Abschnitts-Dicht (kezdőszelet-sűrű).

2.2. Definíció. *[Zeller és Wilansky] **K-tér**nek nevezünk egy (S, τ) párt, ahol S egy sorozattér, τ pedig egy S-en értelmezett lineáris topológia, melyre nézve $s \mapsto s_n$ folytonos $\forall n{\in}\mathbb{N}$. Ha ez a topológia teljes metrikus (nem feltétlenül lokálisan konvex), akkor a párt **FK-tér**nek nevezzük. Ha τ Banach-tér topológia, akkor a párt **BK-tér**nek nevezzük.*

2.1. Állítás. *[[Egy K-tér pontosan akkor AK, ha az $\delta^n : n{\in}\mathbb{N}$ koordináta-vektorok S-nek Schauder-bázisát alkotják, azaz $\forall s{\in}\omega$ előáll*

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \delta^n \tag{2}$$

alakban.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy S AK-tér. Ekkor a sor konvergens S-en, ugyanis $s^{[k]} = \sum_{n=0}^{k} s_n\delta^n$ $(\forall k{\in}\mathbb{N})$.

Megfordítva, alkossák a $\delta^n : n{\in}\mathbb{N}$ koordináta-vektorok az S sorozattér Schauder-bázisát. Ekkor egy $s{\in}\omega$ sorozatra a feltevés szerint $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\delta^n = \lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n\delta^n = \lim_{N\longrightarrow\infty} s^{[N]}$ ami épp az igazolandó állítás. QED

2.2. Tétel. *[[Ruc81]] Ha X egy FK-tér AK-val, akkor $\forall f{\in}X^*$ (folytonos lineáris funkcionálra X-en)*

$(f(\delta^n)) \in (X \longrightarrow \mathrm{cs})$, és ez az összefüggés izomorfizmus X^*-ról $(X \longrightarrow \mathrm{cs})$-be, azaz

$$X^* \cong (X \longrightarrow \mathrm{cs})$$

Bizonyítás. $f \in X^*$ folytonossága miatt $x \in X$-re

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n f(\delta^n)$$

(2) alapján. Tehát $(f(\delta^n)) \in (X \longrightarrow \mathrm{cs})$ definíció szerint, és a hozzárendelés nyilván izomorf.

A szürjektivitás ellenőrzéséhez legyen $u \in (X \longrightarrow \mathrm{cs})$, $\forall n \in \mathbb{N}$-re $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} s_k u_k$, így $f_n \in X^*$ és $f_n \longrightarrow f$ pontonként X-en, tehát a (teljes metrikus terekre vonatkozó) Banach–Steinhaus tétel szerint f folytonos. QED

Igaz az Abel-tétel általánosítása:

2.3. ∘Köv.. *[[Legyen az X egy FK-tér, akkor adott y sorozat esetén a $\Sigma x_n y_n$ sor pontosan akkor konvergens $\forall x \in X$ mellett, ha $y \in X^*$.*

A következő állítást az előzőek alapján igazolom, és szintén a tételem általánosításához szükséges.

2.4. Állítás. *[[Legyen X sorozattér AK-val és legyen Y egy másik sorozattér, melyre létezik $j : X^* \longrightarrow Y$ izometrikus izomorfia ($X^* \overset{\mathrm{j}}{\cong} Y$).*

Ekkor $f \in X^*$-ra $\|xy\| = \|f\|_{X^*}$, ahol $y = j(f)$.

Bizonyítás. X sorozattér AK-val, így (2) érvényes, következésképpen $y = j(f) = (f(\delta^n))_{n \in \mathbb{N}}$-re

$$\|xy\| = \sup\left\{\left|\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n\right| : x \in X, \|x\|_X \leq 1\right\} = \sup\left\{\left|\sum_{n=0}^{\infty} x_n f(\delta^n)\right| : x \in X, \|x\|_X \leq 1\right\} =$$

$$= \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\|_X \leq 1\} = \|f\|_{X^*} \quad (3)$$

QED

Most pedig lássunk néhány sorozatteret és duálisát – ezekre azért van szükség, hogy ne csak $\mathrm{cs} \longrightarrow \mathrm{cs}$ szummációs módszereket tudjunk felírni (6) alakban.

2.1. ℓ_p, ℓ_p^* $(p \geq 1)$

$\ell_p = \{x : \|x\|_p < \infty\}$, ahol $\|x\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

2.5. Állítás. *[[Wil78, 2-3-5]] $\ell_1^* \cong \ell^\infty$*

Bizonyítás. $x = \sum x_k \delta^k \in \ell_1$ (azaz ℓ_1 AK) és ha $f \in \ell_\infty$ $f(x) = \sum y_k x_k$ alakú, akkor $y \in \ell_\infty$ $\left(|y_k| = |f(\delta^k)| \leq \|f\| \cdot \|\delta^k\|_1 = \|f\|\right)$. Ugyanakkor $|f(x)| \leq \|y\|_\infty \cdot \sum |x_k|$, így $\|f\| \leq \|y\|_\infty$, tehát $\|f\| = \|y\|_\infty$. Megmutattuk, hogy az $\ell_1^* \ni f \mapsto \{f(\delta^k)\} \in \ell$ leképezés *izometria.*

Belátjuk, hogy *szürjektív*: Legyen $y \in \ell_\infty$, $f(x) = \sum y_n x_n$, ekkor $f \in \ell_1^*$, hiszen $|f(x)| \leq \|x\|_1 \cdot \sum |y_n|$, $\{f(\delta^n)\} = y$. QED

2.6. Állítás. *[[Wil78, 2-3-6]] $p > 1$-re $\ell_p^* \cong \ell_q$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.*

Bizonyítás. Legyen $f(x)=\sum y_k x_k$, $y_k=f(\delta^k) \implies y\in\ell_q$, ugyanis $y\neq 0$ esetén rögzített m-re $\exists i<m : y_i\neq 0$;

$$u:=\left(\sum_{k=0}^{m}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{p}} \quad x_k:=\begin{cases}\frac{|y_k|^q}{u\cdot y_k}, & k\leq m\\ 0, & x>m\end{cases} \quad \text{így } f(x)=\left(\sum_{k=0}^{m}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq\|f\|$$

hiszen $\|x\|=1$. Tehát $\|f\|\geq\|y\|_q$. A Hölder-egyenlőtlenség $|f(x)|\leq\|y\|_q\cdot\|x\|_p$-t ad, azaz $\|f\|\leq\|y\|_q$, így az $\ell_p^*\ni f\mapsto f(\delta^k)\in\ell_q$ leképezés *izometria.*

Szürjektív is: $y\in\ell_q$-ra legyen $f(x)=\sum y_n x_n$, ekkor $|f(x)|\leq\|x\|_p\cdot\sum|y_n|$, $\{f(\delta^n)\}=y$. ∎

2.II. $\ell_\infty, \ell_\infty^*$

a korlátos sorozatok tere a supnormával. Jelölje bfa($\mathbb{N}$) a korlátos, végesen additív $\big(\mu(\emptyset)=0$, $\mu(S\cup T)=\mu(S)+\mu(T)$, $S\cap T=\emptyset\big)$ komplex értékű, $\mathbb{N}$-en értelmezett halmazfüggvények terét; a norma:

$$\|\mu\|:=\sup\left\{\sum_{i=0}^{n}|\mu(E_i)| : \mathbb{N}=\bigcup_{i=0}^{n}E_i,\ E_k\cap E_l=\emptyset\ (k\neq l)\right\}$$

2.7. Állítás. *[[Wil78, 2-3-15]]* $\ell_\infty^*\cong\mathrm{bfa}(\mathbb{N})$

Bizonyítás. $f\in\ell_\infty^*$-ra legyen $\mu(S):=f(\chi_S)$ $\big(\chi_S$ az S karakterisztikus függvénye$\big)$ — ekkor μ végesen additív $\big(\chi_S+\chi_T=\chi_{S\cup T}$ ha $T\cap S=\emptyset\big)$ és korlátos.

Sőt $\|\mu\|\leq\|f\|$, ugyanis tekintsük az $\mathbb{N}$ egy partícióját $\big(\mathbb{N}=\cup^* E_i\big)$ és legyen $x_n:=\operatorname{sgn}\mu(E_k)$ ahol $n\in E_k$. Ekkor $\|x\|_\infty=1$ és

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\mu(E_i)|=\sum_{i=0}^{\infty}x_{n_i}\mu(E_i)=f\left(\sum_{i=0}^{\infty}x_{n_i}\chi_{E_i}\right)\leq\|f\|\cdot\|y\|\overset{\mathbf{1}}{\leq}\|f\|$$

ahol $y:=\sum_{i=0}^{\infty}x_{n_i}\chi_{E_i}$, 1: $\|y\|\leq 1$.

Belátjuk, hogy a $\varphi: f\longrightarrow\mu$ leképezés *szürjektív:* legyen m_0 a 0-1 sorozatok által feszített altér ℓ_∞-ben (az egyszerű sorozatok tere — csak véges sok különböző értéket vesznek fel).

$\mu\in\mathrm{bfa}(\mathbb{N})$-re legyen $f(x):=\sum_{i=0}^{\infty}x_i\mu(E_i)$ ahol $x_i\in E_i$ — ekkor $f\in m_0^*$ és $\|f\|\leq\|\mu\|$, hiszen $\|x\|_\infty\leq 1 \implies |f(x)|\leq\sum|x_i|\cdot|\mu(E_i)|\leq\|\mu\|$.

Mivel $\overline{m_0}=\ell_\infty$, ezért f-et kiterjeszthetjük ℓ_∞-re és írhatunk $f\in\ell_\infty^*$-t — a μ-nek megfelelő f-et akár $\int_{\mathbb{N}}x\,d\mu$ alakban is írhatjuk. Nyilván $f(\chi_S)=\mu(S)$, azaz $\varphi(f)=\mu$. Láttuk, hogy $\|\mu\|=\|f\|$, tehát az $\ell_\infty^*\longrightarrow\mathrm{bfa}(\mathbb{N})$ leképezés ekvivalencia. ∎

2.III. c, c^*

c a konvergens sorozatok tere a supnormával $(c\subset\ell_\infty)$.

2.8. Állítás. *[]* $c^*\cong\ell_1$

Bizonyítás. $x=(\lim x)\mathbf{1}+\sum(x_k-\lim x)\delta^k$, így a leképezés:

$$\begin{aligned}&\ell_1\ni y\mapsto f\in c^*, && f(x):=y_1\lim x+\sum y_{k+1}x_k\\ T:\ &c^*\ni f\mapsto y\in\ell_1, && y_{k+1}:=f(\delta^k),\ y_1:=f(1)-\sum f(\delta^k)\end{aligned}$$

`Kell:` Ezen $T : c^* \longrightarrow \ell_1$ lineáris leképezés szürjektív és izometrikus. Szürjektivitást adja az inverz leképezés; $\|T(f)\|_1 = |f(1) - \sum f(\delta^k)| + \sum |f(\delta^k)| \leq \|f\| = \sup\{|f(x)| : x{\in}c, \|x\| = \sup|x_n| \leq 1\}$ triviális módon. A megfordítás:

Előállítás szerint a linearitás miatt $f(x) = (\lim x)f(1) + \sum(x_k - \lim x)f(\delta^k) \implies$ speciálisan egy

$\lim x = (1 - \sum f(\delta^k))\ |x_k - \lim x| = 1$ sorozattal $\left(\|x\|_c = 1\right)$ $|f(x)| \leq \|T(f)\|_1$-et kapunk. Ilyen sorozat például $x_n := (1 - \sum f(\delta^k)) + \varepsilon_n$, ahol $\varepsilon{\in}c_0$, $\|\varepsilon\|_\infty = 1$. QED

2.IV. c_0, c_0^*

a konvergens nullsorozatok tere a supnormával $\left(c_0{\subset}c{\subset}\ell_\infty\right)$.

2.9. Állítás. *[[Wil78, 2-3-4]]* $c_0^* \cong \ell_1$

Bizonyítás. [Wil78] Legyen $x{\in}c_0$, ekkor $x = \sum x_k\delta^k$ (azaz c_0 AK-tér), hiszen $\left\|x - \sum_{k=0}^m x_k\delta^k\right\|_\infty = \sup\{|x_n| : n{>}m\} \xrightarrow{m\longrightarrow\infty} 0$.

Tehát $f{\in}c_0^*$-re $f(x) = \sum y_k x_k$, ahol $y_k{=}f(\delta^k)$ — megmutatjuk, hogy $y{\in}\ell_1$: legyen m rögzített,

$$x_n := \begin{cases} \operatorname{sgn} y_n, & n{\leq}m \\ 0, & n{>}m \end{cases} \qquad \text{így} \quad \sum_{n=0}^m |y_n| = \sum_{n=0}^m y_n x_n = f(x) \leq \|f\|$$

hiszen $\|x\|_\infty = 1$. Tehát $\|f\| \geq \|y\|_1$. Ugyanakkor $\|x\|_\infty \leq 1 \implies |f(x)| = |\sum y_n x_n| \leq \sum |y_n|$, azaz $\|f\| = \|y\|_1$. Megmutattuk, hogy a $c_0^*{\ni}f \mapsto f(\delta^k){\in}\ell_1$ leképezés *izometria* — emellett *ráképezés* is: $y{\in}\ell_1$ esetén $f(x) = \sum y_n x_n \implies f{\in}c_0^*$, hiszen $|f(x)| \leq \|x\|_\infty \cdot \sum |y_n|$ és $(f(\delta^k))_{k\in\mathbb{N}}{=}y$. QED

A sorok és sorozatok megfeleltethetők egymásnak, a következő módon: jelölje $\sigma : \omega \longrightarrow \omega$; $(\sigma x)_n := \sum_{k=0}^n x_k$ $(n{\in}\mathbb{N})$ – ez lineáris bijekció a $(\sigma^{-1}y)_n := y_n{-}y_{n-1}$ $(n{\in}\mathbb{N},\ y_0 := 0)$ inverzzel.

2.V. bv, bv*

$\mathrm{bv} \overset{\text{def}}{=} \{(x_n){\in}\omega : \sum_{n=0}^\infty |x_{n+1}{-}x_n| \text{ konvergens}\}$ a korlátos változású sorozatok tere. Ezen a téren $\sum_{n=0}^\infty |x_{n+1} - x_n|$ félnorma, $\|x\| := |x_0| + \sum_{n=0}^\infty |x_{n+1}{-}x_n|$ norma: háromszög-egyenlőtlenség, homogenitás következik az abszolutérték tulajdonságaiból; $\|x\| = 0 \iff x{=}0$ is triviális.

bv Banach-tér, ugyanis $x{\in}\omega$ korlátos változású $\iff \sigma^{-1}x{\in}\ell_1$ és (az $x_0 := 0$ megállapodás mellett) nyilván $\|x\|_{\mathrm{bv}} = \left\|\sigma^{-1}x\right\|_1$, azaz $\sigma^{-1}(\mathrm{bv}) = \ell_1$, másképpen $\mathrm{bv} = \sigma(\ell_1)$. Itt bv vektortér izomorf az ℓ_1 vektortérre, σ izomorfizmus közöttük, így az $\|x\| := \|\sigma x\|$ $(x{\in}\mathrm{bv})$ egyenlőséggel definiált $\|\cdot\| : \mathrm{bv} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ függvény norma bv-n, amellyel $(\mathrm{bv}, \|\cdot\|)$ Banach-tér.

2.10. Lemma. *[]* $x{\in}\mathrm{bv} \implies \exists \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n$, *azaz* $\mathrm{bv} \subset c$.

A $\lim : \omega \longrightarrow \mathbb{K}$ *lineáris funkcionált* bv*-re megszorítva folytonos lineáris funkcionált kapunk.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy *Cauchy:*

$$|x_m - x_n| = \left|\left(\sum_{k=0}^{m-1} x_{k+1}{-}x_k\right) - \left(\sum_{l=0}^{n-1} x_{l+1}{-}x_l\right)\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{m-1} |x_{k+1}{-}x_k| - \sum_{l=0}^{n-1} |x_{l+1}{-}x_l|\right|$$
$$= |s_{m-1} - s_{n-1}| < \varepsilon$$

Hiszen $s_n := \sum_{k=0}^{n} |x_{k+1} - x_k|$ Cauchy-sorozatot alkot.

Az állítás második fele következik abból, hogy $|\lim(x)| \leq |x_0| + \sum_{k=0}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| = \|x\|_{\mathrm{bv}}$ $\big(\lim(x) := \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n\big)$. QED

2.11. Állítás. *[/* $|||x||| := |\lim x| + \sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|$ *norma, mely ekvivalens* $\|\cdot\|_{\mathrm{bv}}$*-vel* $(\|\cdot\| \sim |||\cdot|||)$*.*

Bizonyítás. Az abszolutérték tulajdonságaiból következik a homogenitás és a háromszög-egyenlőtlenség; $|||x|||=0 \implies x\in c_0$ és $\sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|=0 \iff x$ konstans sorozat, aminek limesze $|\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n|=0$.

$$\|x\| \sim |||x||| \overset{\mathrm{def}}{\iff} \exists c_1, c_2>0 : \ c_1\cdot \|x\| \overset{\mathbf{1}}{\leq} |||x||| \overset{\mathbf{2}}{\leq} c_2\cdot \|x\|$$

1: $\lim(x) = x_0 + \sum_{k=0}^{\infty}(x_{k+1} - x_k) \implies x_0 = \lim(x) - \sum_{k=0}^{\infty}(x_{k+1} - x_k)$, így $\|x\|_{\mathrm{bv}} = |x_0| + \sum_{k=0}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| \leq \|x\|_{\mathrm{bv}} + \sum_{k=0}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| \leq 2\ |||x|||$, azaz $c_1=\frac{1}{2}$

2: $|\lim(x)| \leq \|x\|_{\mathrm{bv}}$ figyelembevételével $|||x||| \leq \|x\|_{\mathrm{bv}} + \sum_{k=0}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| \leq 2\,\|x\|_{\mathrm{bv}}$, azaz $c_2=2$ jó. QED

2.12. Állítás. *[/*$\mathrm{bv}^* \cong \mathrm{bs}$*, ahol* $\mathrm{bs} = \{(a_k)\in\omega : \sup_n |\sum_{k=0}^{n} a_k|<\infty\}$ *a korlátos részletösszegű sorok tere.*

Bizonyítás. Dirichlet tétele: ha (b_n) korlátos változású nullsorozat és a Σa_n sor szeletei korlátos sorozatot alkotnak, akkor a $\Sigma a_n b_n$ sor is konvergens.

$T^{-1} : \mathrm{bs}\ni y \mapsto f\in\mathrm{bv}^*$, $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x_n - \lim x)$ — a Dirichlet-tétel szerint konvergens, mert x_n korlátos változású, y_n pedig korlátos szeletű sort alkot. Tehát a függvény jóldefiniált.

Innen $T : \mathrm{bv}^*\ni f \mapsto y\in\mathrm{bs}$, $y_k := f(\delta^k)$ lineáris, szürjektív, hiszen tetszőleges $y\in$bs-hez $f := T^{-1}(y)$, erre $T(f) = T(T^{-1}(y)) = f(\delta^k) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(\delta_n^k - \lim \delta^k) = y_k$. QED

Jelölje bv_0 a korlátos változású nullsorozatokat — $\mathrm{bv}_0\subset\mathrm{bv}$ altér, sőt

2.13. Állítás. *[/*$\mathrm{bv}_0 = \ell_1$

Bizonyítás. Az eddigiek fényében triviális: tekintjsük a $\mathrm{bv}\ni y \mapsto x\in\ell_1$, $x_n := y_{n+1} - y_n$, $x_0 := 0$ leképezést.

A másik irány: az $y_{n+1} := \sum_{k=0}^{n} x_n$ $(y_0 := 0)$ képlet adja az inverz leképezést. Az izometria $\big(\|y\|_{\mathrm{bv}} = \|x\|_1\big)$ a definÍciókból következik az $x_0 := 0$ konvencióval. QED

2.14. $\circ$**Köv..** *[/*$\mathrm{bv} = \ell_1\oplus 1$ *hiszen* bv_0 *1 kodimenziós altere* bv*-nek.*

2.vi. $\mathrm{cs}, \mathrm{cs}^*$

Jelölje $\mathrm{cs} := \{a\in\omega : (\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}} \in c\}$ a konvergens sorok terét – ez Banach-tér a supnormával: $\mathrm{cs} = \sigma^{-1}(c) = \{a\in\omega : \Sigma a\in c\}$, így cs Banach-tér a $\|x\|_{\mathrm{cs}} := \|\Sigma x\|_c = \sup_n |\sum_{k=0}^{n} x_k|$ normával, és $\mathrm{cs} \cong c$.

2.15. Állítás. *[/* $\mathrm{cs}^* \cong \mathrm{bv}$.

Bizonyítás. Legyen $T : \mathrm{bv} \longrightarrow \mathrm{cs}^*;\ y \mapsto (f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n)$, itt f lineáris funkcionál, a 3.2 lemma biztosítja az f folytonosságát és a T lineáris leképezés normatartását. QED

2.16. Állítás. *[]ℓ_1, cs terek AK-terek.*

Bizonyítás. [Wil84, 59. oldal] $x \in \mathrm{cs}$-re $\left\|x - x^{[n]}\right\|_{\mathrm{cs}} = \sup_m \left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right| \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} 0$, tehát cs AK-tér.

$y \in \ell_1$ esetén $\left\|y - y^{[n]}\right\|_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k| \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} 0$, tehát ℓ_1 AK-tér. QED

3. Az általam kidolgozott módszer

Ebben a fejezetben igazolom tételem $\mathrm{cs} \longrightarrow \mathrm{cs}$ alakját.

3.I. Előkészületek

Az elkövetkezőkben X, Y legyenek sorozatterek.

3.1. Definíció. *[]Egy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : X \longrightarrow Y$ függvénysorozat* ***egyenletesen korlátos változású,*** *ha $(\exists C{>}0)(\forall x{\in}X)\ \|f_n(x)\|_{\mathrm{bv}} < C$.*

3.1. Lemma. *[] Legyen $a \in \mathrm{cs}$, $b \in \mathrm{bv}$, ekkor $ab \in \mathrm{cs}$ (a sorozatot mint $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K};\ n \mapsto a_n$ függvényt kezelve), azaz $\Sigma a_n b_n$ konvergens. Emellett az $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ $(n \in \mathbb{N})$ jelöléssel*

$$\lim(ab) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (b_{k+1} - b_k) + \lim(\Sigma a) \cdot \lim(b) \tag{4}$$

Bizonyítás. Az *Abel-átrendezés* szerint

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k) + A_n b_{n+1} \tag{5}$$

a összegezhető sorozat, részletösszegeinek (A_n) sorozata korlátos, tehát $b \in \mathrm{bv}$ miatt a $\Sigma A_k (b_{k+1} - b_k)$ sor (abszolút) konvergens is. (4) következik $\mathrm{bv} \subset c$ felhasználásával (5)-ből. QED

3.2. Lemma. *[] Legyen $b \in \mathrm{bv}$ rögzített és tekintsük a*

$$\psi : \mathrm{cs} \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad \psi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_n$$

lineáris funkcionált.

Ez folytonos ($\psi \in \mathrm{cs}^*$) és $\|\psi\| = \|b\|_{\mathrm{bv}}$.

Bizonyítás. Jelölje $s_n := \sum_{k=0}^{n} x_k$, ekkor

$$\|\psi\| = \sup\left\{\left|\sum_{n=0}^{\infty} x_n b_n\right| : \|x\|_{\mathrm{cs}} \le 1\right\} = \sup\left\{\left|\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n} x_k b_k\right| : \|x\|_{\mathrm{cs}} \le 1\right\}$$

Az *Abel-átrendezés* szerint $\sum_{k=0}^{n} x_k b_k = s_n \cdot b_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1})$, tehát $|s_k| \le 1$-et felhasználva kapjuk, hogy $\|\psi\| \le \|b\|_{\mathrm{bv}}$.

A másik irány: $b_{k+1}-b_k\in\mathbb{K}$-hez $\exists\varepsilon_k\in\mathbb{C} : b_{k+1}-b_k = |b_{k+1}-b_k|\cdot\overline{\varepsilon_k}$, továbbá legyen $\lim(b) = |\lim(b)|\cdot\overline{\varepsilon_0}$. $x^{(n)} := (\varepsilon_1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_n, \varepsilon_0, \varepsilon_0, \dots) \in c$, $\left\|x^{(n)}\right\|_c = 1$, így $y^{(n)} := \sigma^{-1}x^{(n)}$-re $\left\|y^{(n)}\right\|_{\mathrm{cs}} = 1$. Erre a sorozatra

$$\psi(y^{(n)}) = \sum_{k=0}^{n} |b_{k+1}-b_k| + \varepsilon_0\cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} (b_{k+1}-b_k) + \lim(x^{(n)})\cdot \lim(b), \quad \text{következésképpen}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \psi(y^{(n)}) = \sum_{k=0}^{\infty} |b_{k+1}-b_k| + 0 + \varepsilon_0\cdot \lim(b) = \| b \|_{\mathrm{bv}}$$

QED

3.2. Definíció. *[/Egy $\zeta : X \longrightarrow \mathbb{K}$ lineáris funkcionált **szummációs funkcionál**nak nevezünk, ha $\mathrm{cs} \subset \mathrm{Dom}\,\zeta \subset \omega$.*

*ζ szummációs funkcionál **reguláris**, ha $\zeta\restriction_{\mathrm{cs}} = \Sigma_{\mathrm{cs}}$. $x \in \mathrm{Dom}\,\zeta\backslash\mathrm{cs}$-re jelölje $\sum_{n=0}^{\infty}{}_{\zeta}\, x_n := \zeta(x)$.*

Legyen T topologikus tér, $t_0\in T$ rögzített, $\dot{T} := T\backslash\{t_0\}$, $\varphi_n : \dot{T} \longrightarrow \mathbb{K}$ függvények egy sorozata $(n\in\mathbb{N})$ és jelölje $\varphi(t) := \{\varphi_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$

3.3. Állítás. *[/ Az*

$$A_t(a) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(t) \qquad (a\in\mathrm{cs},\ t\in\dot{T}) \tag{6}$$

egyenlőséggel definiált funkcionál pontosan akkor létezik (a szumma véges) adott $t\in\dot{T}$ mellett minden $a\in\mathrm{cs}$ sorozatra, ha $\varphi(t) \in \mathrm{bv}$.

Bizonyítás. **$\Rightarrow$:** Legyen $t\in\dot{T}$ rögzített, a feltevés szerint minden $a\in$cs-re létezik $A_t(a)<\infty$, így speciálisan az $a^{[n]} := a\cdot\sum_{k=0}^{n}\delta^k$ sorozatra is. Jelölje $f_n := \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(t)$ (azaz $f = a^{[n]}\cdot\varphi(t)$). Ekkor nyilván az $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathrm{cs}^*$ rendszer pontonként korlátos (cs felett), így az EGYENLETES KORLÁTOSSÁG TÉTELE szerint egyenletesen is korlátos:

$$\infty > \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\|a\|_{\mathrm{cs}}\le 1} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(t)\right| = \sup_{\|a\|_{\mathrm{cs}}\le 1} \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(t)\right| = \|A_t(a)\| =$$

$$\stackrel{3.2}{=} \|\varphi(t)\|_{\mathrm{bv}} \iff \varphi(t)\in\mathrm{bv}$$

$\Leftarrow$: A 2.15 állítás szerint $\mathrm{cs}^* \cong \mathrm{bv}$, így $\varphi(t)\in\mathrm{bv}$, tehát a 3.1 lemma alapján $A_t(a) < \infty$. QED

3.4. ∘Megjegyzés. *[/Bár úgy tűnhet, a fenti bizonyítás mégsem használta ki a* cs, bv *terek speciális tulajdonságait – mint azt az általánosítás (5.3) is mutatja, az állítás következik az általánosabb 2.2 tételből.*

3.II. A módszer helyességének igazolása

3.3. Definíció. *[/A φ függvénysorozatot **szummációs sorozat**nak nevezzük egy $a\in\omega$ sorozatra nézve, ha $\exists A_t(a) < \infty$ és $\exists \lim_{t\longrightarrow t_0} A_t(a) \in \mathbb{K}$. Ezt a határértéket $\sum_{n=0}^{\infty}{}_{A_\varphi} a_n$-vel jelöljük (azaz kapunk egy $\zeta : \omega \longrightarrow \mathbb{K}$ lineáris funkcionált).*

*φ szummációs sorozat **reguláris** ha $\lim_{t\longrightarrow t_0} A_t(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (azaz $\lim_{t_0} A_t = \Sigma$ cs-n).*

3.5. Tétel. *[/ Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az (6) egyenlettel definiált $\{A_t\}_{t\longrightarrow t_0}$ (általánosított) funkcionál-sorozat A limesze folytonos és lineáris funkcionál legyen a következő:*

(i) $\sup_{t\in\dot{T}} \|\varphi(t)\|_{\mathrm{bv}} < \infty$*, azaz φ egyenletesen korlátos változású $\dot{T}$-n,*

(ii) φ_n-ek folytonosak t_0-ban $\forall n\in\mathbb{N}$-re.

Ha azt szeretnénk, hogy $A(a)=\Sigma a$ ($a\in$cs) teljesüljön, akkor (ii) a következőképp módosul:

(ii') $(\forall n\in\mathbb{N})(\lim_{t\longrightarrow t_0} \varphi_n(t) = 1)$.

Bizonyítás. A Banach-Steinhaus tétel szerint a limesz létezéséhez szükséges és elegendő, hogy

(a) $\sup_{\dot{T}} \|A_t\| < \infty$,

(b) $\exists M\subset$cs totális rendszer ($\overline{\langle M\rangle}$=cs), melyre $A_t \longrightarrow A$ pontonként az M-en.

Azaz $(i) \iff (a)$ a 3.2 lemma alapján;

Belátjuk, hogy az $M := \{a^{[n]} : a\in\mathrm{cs}\}$ finite sorozatok halmazán $A_t \xrightarrow{t\longrightarrow t_0} A$ pontonként – ez elég, mert $\langle M\rangle$ (supnormában) sűrű cs-ben. Tehát rögzített $a\in M$-re

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists U\in\tau(t_0))(\forall t\in\dot{U}) : \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(t_0)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k(\varphi_k(t)-\varphi_k(t_0))\right| < \varepsilon$$

azaz a (b) pontosan akkor teljesül, ha $\forall n\in\mathbb{N}$-re φ_n folytonos t_0-ban.

Ha most $A\restriction_{\mathrm{cs}}= \Sigma$-t szeretnénk (permanencia), akkor $(\forall n\in\mathbb{N})(\lim_{t\longrightarrow t_0} \varphi_n(t) = 1)$ a megfelelő feltétel. QED

Az alkalmazásokhoz fogalmazzuk át a tételt $c \longrightarrow c$ leképezésekre: $b\in c$-re

$$A_t(\sigma^{-1}b) = \sum_{n=0}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)\varphi_n(t) = \lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{n=1}^{N} [b_n(\varphi_{n-1}(t)-\varphi_n(t))] - b_0\varphi_0(t) + b_{N+1}\varphi_N(t) =$$

$$= \lim(b)\lim(\varphi(t)) - b_0\varphi_0(t) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n{\cdot}(\sigma^{-1}\varphi(t))_n$$

Tehát

$$B_t(b) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n\psi_n(t) = \lim(b)\sum_{n}\psi_n(t) - A_t(\sigma^{-1}b) \tag{7}$$

alakú limesz-kiterjesztéseknél ($\varphi(t) := \sigma\psi(t)$-t használva, így $\varphi_0\equiv 0$) ψ-re a szükséges feltételek:

3.6. Tétel. *[/ Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a*

$$B_t(b) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n\psi_n(t)$$

egyenlőséggel definiált $\{B_t\}_{t\longrightarrow t_0}$ (általánosított) funkcionál-sorozat B limesze folytonos és lineáris funkcionál legyen a következők:

(i) $\sup_{t\in\dot{T}} \|\psi(t)\|_1 < \infty$*, azaz a* $(\psi(t))_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat* egyenletesen ℓ_1-beli $\dot{T}$*-n,*

(ii) $\sum_{k=0}^{n}\psi_k$*-nak folytonosnak kell lennie* t_0*-ban* $\forall n\in\mathbb{N}$*-re – ez teljesül például, ha* ψ_n *folytonos* t_0*-ban* $\forall n\in\mathbb{N}$*-re.*

Ha azt szertnénk, hogy $B(b)=\lim b$ $(b\in c)$ *teljesüljön, akkor (ii) a következőképp módosul:*

(ii') $(\forall n\in\mathbb{N})\big(\lim_{t\longrightarrow t_0}\sum_{k=0}^{n}\psi_k(t)=1\big)$ *és*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.5 tételt $\sigma^{-1}b$-re: az (7) átrendezést használva látható, hogy $\|\sigma\psi\|_{\mathrm{bv}} = \|\psi\|_1$, továbbá hogy $\sum_{k=0}^{n}\psi_n(t)$-t kell $\varphi_n(t)$ helyére helyettesítenünk.

Az átrendezésből az is látható, hogy a permanencia feltétele:

$$\lim_{t\longrightarrow t_0} A_t(\sigma^{-1}b) = \lim_{t\longrightarrow t_0}\sum_{n=0}^{\infty}(\sigma^{-1}b)_n(\sigma\psi(t))_n = 0$$

QED

4. A módszer alkalmazásai

A következőkben bemutatok néhány ismertebb szummációs módszert. Mivel majdnem minden ilyen eljárást valamilyen probléma megoldása hívott életre, ezért nagyon sok, lényegesen különböző módszer létezik (a kisebb eltérésűekről nem is beszélve). Igen részletekbe menő összefoglalást írt Hardy (lásd [Har49]) *Divergent Series* címmel. A későbbi eredményekről jó összefoglalás olvasható [Mad70]-ban.

Többek között az egyes módszerek ekvivalenciáját, erősségét, a módszercsalád a paramétertől való függését is lemezte ebben a könyvben.

4.1. Abel-szummáció

Legyen T a komplex sík egységkörén belül olyan tartomány, melyet a $t_0 := (1,0)$ pontból szögtér határol (lásd 1. ábra) és jelölje $\dot{T} := T\backslash t_0$.

1. ábra. Az Abel-szummáció tartománya

4.1. Tétel. *[Abel] Ha* Σa_n *konvergens, akkor*

$$\lim_{\substack{z\longrightarrow t_0\\ z\in\dot{T}}}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

Bizonyítás. $\varphi_n(z) := z^n$ $(z\in T)$, ekkor $\|\varphi(z)\|_{\mathrm{bv}} = 1+\sum_{n=0}^{\infty}|z^{n+1}-z^n| = 1+|z-1|\cdot\sum_{n=0}^{\infty}|z^n| = \frac{|1-z|}{1-|z|}$, így a T-t jellemző $\alpha,\delta>0$-hoz $\exists K(\alpha,\delta)\in\mathbb{R}_+ : \sup_{z\in\dot{T}}\|\varphi(z)\|_{\mathrm{bv}} = K(\alpha,\delta)<\infty$, azaz a 3.5 tétel alapján φ reguláris szummációs sorozat (φ_n nyilván folytonos a t_0-ban). QED

Két speciális eset:

(λ_n) nemnegatív monoton növő divergens sorozatra jelölje $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$. Azt mondjuk, hogy az Σa_n sor (A, λ)-szummábilis, ha $\exists \lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$ – és ezt a számot az Σa_n sor (A, λ)-összegének nevezzük.

Komplex síkon legyen (a_n) olyan sorozat, melyre $\Sigma a_n e^{-\lambda_n z}$ konvergens a $\{z : \Re z > 0\}$ félsíkban. Jelölje $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$. Ha $\exists \lim\{f(z) : z \longrightarrow 0, |\Im z| \leq \Re z \cdot \tan \alpha \text{ szögtérben}\}$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, akkor ezt a számot az Σa_n sor (A, λ, α)-összegének nevezzük

[Har49] Az Abel-összeget (valós eset) gyakran Poisson-szummációnak is nevezik, ugyanis Poisson használta Fourier sorok összegzésére. Ráadásul Euleren keresztül egészen Leibnizig visszakövethető ez a módszert.

4.II. Riemann-szummáció

Legyen az $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezve az x pont egy környezetében, és $t \in \mathbb{R}$ szám. Jelölje

$$\Delta_t f(x) := \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2t}$$

az f függvény **szimmetrikus differenciáját** az x pontban. Az $\dot{f}(x) := \lim_{t \longrightarrow 0} \Delta_t f(x)$ határértéket **szimmetrikus deriváltnak** nevezzük. A következő állítás szerint az elnevezés jogos:

4.2. Állítás. *[]Ha az f függvény differenciálható az x pontban, akkor létezik a szimmetrikus deriváltja, és $f'(x) = \check{f}(x)$.*

Bizonyítás. Jelölje $D_h f(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{t}$ az f függvény differenciáját az x pontban. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenciálható x-ben $\iff \exists \lim_{y \longrightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} =: f'(x) \iff \exists \lim_{h \longrightarrow 0} D_h f(x)$.

Ha tehát $\exists f'(x)$, úgy $\Delta_t f(x) = \frac{1}{2} \cdot (D_t f(x) + D_{-t} f(x))$ miatt $\exists \dot{f}(x) = f'(x)$. QED

4.3. Állítás. *[] Tetszőleges $G(x)$ 2-szer szimmetrikusan differenciálható (folytonos) függvényre*

$$\ddot{G}(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{G(x+h) - 2G(x) + G(x-h)}{h^2}$$

Bizonyítás. $\Delta_h \Delta_h G(x) = \dfrac{\frac{G(x+2h) - G(x)}{2h} - \frac{G(x) - G(x+2h)}{-2h}}{2h} = \frac{1}{4h^2} \cdot (G(x+2h) - 2G(x) + G(x-2h))$ QED

Jelölje $\Delta_h^2 G(x) := \frac{G(x+h) - 2G(x) + G(x-h)}{h^2}$ a G függvény **Riemann-differenciáját**.

Legyen $c(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)$ egy (nem feltétlenül konvergens) trigonometrikus sor, melynek együtthatói korlátosak. Jelölje $c_n(x) := a_n \cos x + b_n \sin x = c_n e^{inx}$. Integráljuk kétszer a sort *formálisan* x szerint – kapunk egy mindenütt konvergens, folytonos

$$F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{a_n}{n^2} \cos nx + \frac{b_n}{n^2} \sin nx \right) = c_0 \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(in)^2} e^{inx}$$

Fourier-sort. Ez biztosan kétszeresen szimmetrikusan differenciálható, a következő tétel szerint jogosan nevezzük az így kapott $\ddot{F}(x_0)$ sort az eredeti sor **Riemann-összegének**.

A 4.3 állítás alapján

$$\Delta_h^2 e^{ix} = \frac{e^{i(x+h)} - 2e^{ix} + e^{i(x-h)}}{h^2} = e^{ix} \cdot \frac{4 \sin \frac{h}{2}}{h^2} = e^{ix} \cdot \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right)^2, \quad \text{így}$$

$$\Delta_{2h}^2 F(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} \cdot \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 \implies \ddot{F}(x) = \lim_{t \longrightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \cdot \left(\frac{\sin nt}{nt} \right)^2$$

Legyen $T := [-1,1]$, $t_0 := 0$, $\dot{T} := T\backslash t_0$. A következő tétel szerint a fent leírt eljárás kiterjesztése Σ-nak.

4.4. Tétel. *[Riemann] Ha Σa_n konvergens, akkor*

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Bizonyítás. $\varphi_n(t) := \left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^2$ (most $n{=}1,2\dots$), ekkor

$$\|\varphi(t)\|_{\mathrm{bv}}=\left|\frac{\sin t}{t}\right|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{\sin((n{+}1)t)}{(n{+}1)t}\right)^2-\left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^2\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{\sin t}{t}\right|^2+\frac{1}{t^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n{+}1)^2}+\frac{1}{n^2}\right)\xrightarrow{t\longrightarrow 0} C<\infty$$

φ_n nyilván folytonos t_0-ban. QED

Sőt ezen állításnak egy kis általánosítása is igaz:

4.5. Állítás. *[]Ha Σa_n konvergens, akkor*

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^k=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

bármely $k{>}1$ számra.

Bizonyítás. Ugyanúgy $\varphi_n(t) := \left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^k$ $(n = 1, 2, \dots)$, ekkor

$$\|\varphi(t)\|_{\mathrm{bv}}=\left|\frac{\sin t}{t}\right|^k+\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{\sin{(n{+}1)t}}{(n+1)t}\right)^k-\left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^k\right|\leq$$

$$\leq\left|\frac{\sin t}{t}\right|^k+\frac{1}{t^k}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^k}+\frac{1}{n^k}\right)\xrightarrow{t\longrightarrow 0} C<\infty$$

QED

Ezen állítás alapján bevezethetjük az (R,k) k**-adrendű Riemann-szummáció**t: egy Σa_n sort (R,k)-szummábilisnek mondunk, ha $\exists \lim_{t\longrightarrow 0}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{\sin nt}{nt}\right)^k =: s$. Ebben az esetben $\sum_{(R,k)} a_n := s$ a Σa_n sor (R,k)-összege.

4.III. Toeplitz eredménye $c \longrightarrow c$ mátrixokra

Egy A mátrix összegző, ha $\forall x{\in}c$-re $Ax{\in}c$; **permanens**, ha $\forall x{\in}c$ sorozatra $Ax = \lim x$. Mi a feltétele, hogy egy mátrix összegző, ill. permanens legyen?

Toeplitz 1911-ben szügséges és elegendő feltételt adott arra, hogy egy A-eljárás permanens legyen, azaz megválaszolta a kérdést $A : c \longrightarrow c$ leképezésekre:

4.6. Tétel. *[Silverman–Toeplitz, [Har49], [DS88]] Egy $A = [a_{m,n}]_{m,n\in\mathbb{N}}$ mátrixszal adott operátor c-ből c-be képez ($x{\in}c$-re $Ax := (\sum_n a_{m,n}x_n)_{m\in\mathbb{N}} \in c$) pontosan akkor, ha teljesülnek a következők:*

(i) $\sup_m \sum_n |a_{m,n}| < \infty$, *azaz a mátrix sorai egyenletesen ℓ_1-beliek,*

(ii) $\exists \lim_{m\longrightarrow\infty} a_{m,n} =: \gamma_n$ *($\forall n{\in}\mathbb{N}$), azaz a mátrix oszlopai c-beliek,*

(iii) $\exists \lim_{m\longrightarrow\infty} \sum_n a_{m,n} =: \gamma$

Ekkor $\sum \gamma_n$ *abszolút konvergens és* $y := Ax$*-re*

$$\lim y_n = \gamma{\cdot}(\lim x_n) + \sum \gamma_n(x_n - \lim x_n) = (\lim x){\cdot}(\gamma - \sum_n \gamma_n) + \sum_n \gamma_n x_n$$

T permanens $\iff$ $\gamma_n{=}0$ *($\forall n{\in}\mathbb{N}$) és* $\gamma{=}1$.

Fogalmazzuk át a tételt cs $\longrightarrow$ cs leképezésre (a σ leképezést használva ekvivalens állítást kapunk)!

4.7. Állítás. *[[Egy* $B = [b_{m,n}]_{m,n\in\mathbb{N}}$ *mátrixszal adott operátor* cs*-ből* cs*-be képez (*$y{\in}$cs*-re* $By := (\sum_n b_{m,n}y_n)_{m\in\mathbb{N}} \in$ cs*) pontosan akkor, ha teljesülnek a következők:*

(i') $\sup_m \sum_n |b_{m,n} - b_{m,n+1}| < \infty$*, azaz a mátrix sorai* bv*-beliek,*

(ii') $\exists \lim_{m\longrightarrow\infty}(b_{m,n} - b_{m,n+1}) =: \gamma_n$ *($\forall n{\in}\mathbb{N}$), azaz a mátrix oszlopai c-beliek*

(iii') $\exists \lim_{m\longrightarrow\infty}(b_{m,0} - \lim_{n\longrightarrow\infty} b_{m,n}) =: \gamma$

Ekkor $\sum \gamma_n$ *abszolút konvergens és* $z := Ay$*-ra*

$$\lim z_n = \gamma{\cdot}s + \sum \gamma_n(s_n - s) = s{\cdot}(\gamma - \sum_n \gamma_n) + \sum_n \gamma_n s_n$$

ahol $s_n := \sum_{k=0}^n y_n$*,* $s := \lim s_n$*.*

Bizonyítás. $y_n = x_{n+1} - x_n$, $x_n = \sum_{k=0}^n y_k$ alapján $\sum_{n=0}^N a_{m,n} \sum_{k=0}^n y_k = \sum_{k=0}^N y_k \sum_{n=k}^N a_{m,n}$, azaz $b_{m,n} = \sum_{k=n}^\infty a_{m,k}$ és így $a_{m,n} = b_{m,n} - b_{m,n+1}$. QED

4.8. ○Megjegyzés. *[[Az előző állítást átírhatjuk a 3.5 állításnak jobban megfelelő alakba is:*

$T := \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $t_0 := \infty$, $\varphi_n(m) := b_{n,m}$*, így* $B = [\varphi_n(m)]_{m,n\in\mathbb{N}}$ *mátrixszal adott operátor* cs*-ből* cs*-be képez (*$y{\in}$cs*-re* $By := (\sum_n y_n\varphi_n(m)))_{m\in\mathbb{N}} \in$ cs*) pontosan akkor, ha teljesülnek a következők:*

(i') $\sup_m \sum_n |\varphi_n(m) - \varphi_{n+1}(m)| < \infty$ *(* $\iff \sup_m \|\varphi(m)\|_{\mathrm{bv}} < \infty$*)*

(ii') $\exists \lim_{m\longrightarrow\infty}(\varphi_n(m) - \varphi_{n+1}(m)) =: \gamma_n$ *($\forall n{\in}\mathbb{N}$) ($\Leftarrow \exists \lim_{m\longrightarrow\infty} \varphi_n(m)$ ($\forall n{\in}\mathbb{N}$)),*

(iii') $\exists \lim_{m\longrightarrow\infty} \sum_n(\varphi_n(m) - \varphi_{n+1}(m)) = \lim_{m\longrightarrow\infty}(\varphi_0(m) - \lim_n \varphi_n(m)) =: \gamma$
($\Leftarrow \varphi(m){\in}$bv *miatt* $(\forall m{\in}\mathbb{N})(\exists \lim_{n\longrightarrow\infty} \varphi_n(m))$*)*

Ez már következik a 3.5 tételből.

A következő néhány szummációs módszer mindegyike felírható alsó háromszögmátrix alakban, így $t_0 := \infty$, $T := \mathbb{N}\cup\{\infty\}$.

4.IV. Poisson-szummáció

$$\sum\nolimits_{\text{Poisson}} a_n := \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k \quad \text{ha létezik}$$

A 3.5 tétel segítségével belátjuk, hogy ez egy reguláris szummációs funkcionál: $\varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n{\le}t \\ 0, & n{>}t \end{cases}$ (most $n = 1, 2, \ldots$) korlátos változású, $\|\varphi(t)\|_{\mathrm{bv}} = 1 + \sum_{n=1}^t \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right| \le 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$.

Ez megegyezik a $(C,1)$-szummával.

$$A_{\text{Poisson}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

4.v. Egyszerű, de általános szummáció [DS88]

Legyen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ nemnegatív sorozat és jelölje $P_n := \sum_{k=0}^{n} p_k$. Adott x sorozatra mikor lesz az

$$y_n := \frac{1}{P_n} \cdot \sum_{k=0}^{n} p_k x_k$$

egyenlőséggel definiált leképezés kiterjesztése Σ-nak?

Alkalmazzuk a 3.5 tételt $T := \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $t_0 := \infty$, $\varphi_k(t) := \begin{cases} \frac{p_k}{P_t}, & k \le t \\ 0, & k > t \end{cases}$ szereposztással. Ekkor

$$\sup_{t\in\dot{T}} \|\varphi(t)\|_{\text{bv}} = \sup_{t\in\dot{T}} \left\{ \frac{1}{P_t} \cdot \left(|p_0| + \sum_{k=0}^{t} |p_{k+1} - p_k| \right) \right\} < \infty \iff \lim_{t\longrightarrow\infty} P_t = \infty$$

A másik feltétel $\big((\forall k\in\mathbb{N})\ \exists \lim_{t\longrightarrow t_0} \varphi_k(t)\big)$ is nyilván teljesül, hiszen a p sorozat nemnegativitása miatt $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozatot alkot, így $\lim_{t\longrightarrow t_0} \varphi_k(t) = \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{p_k}{P_t} = 0$.

Ha $p_n{=}1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$, akkor épp a Cesàro $(C,1)$-szummációt kapjuk.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{p_0}{P_0} & 0 & & & & \\ \frac{p_0}{P_1} & \frac{p_1}{P_1} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \frac{p_0}{P_m} & \frac{p_1}{P_m} & \dots & \frac{p_m}{P_m} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

4.vi. Cesàro (C,α)

Jelölje $C_0^\beta := 1$, $C_m^\beta := \binom{m+\beta-1}{m} = \frac{1}{m!} \cdot \beta(\beta{+}1)\cdots(\beta{+}m{-}1)$ $(m{>}0\text{-ra})$. Ekkor

4.9. Állítás. *[]Adott $x\in\text{cs}$ sorozatra az*

$$y_n := \frac{1}{C_n^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^{\infty} C_{n-k}^{\alpha} s_k$$

egyenlőség ($s_k := \sum_{i=0}^{k} x_i$) permanens összegzést definiál minden $\alpha{>}0$-ra.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.5 tételt $T := \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $t_0 := \infty$,

$$\varphi_k(t) := \begin{cases} \frac{C_{t-k}^{\alpha}}{C_t^{\alpha+1}}, & k \le t \\ 0, & t > k \end{cases}$$

szereposztással. Ekkor $\|\varphi(t)\|_{\mathrm{bv}} = \left|\frac{C_t^\alpha}{C_t^{\alpha+1}}\right| + \sum_{k=0}^t \left|\frac{C_{t-k-1}^\alpha - C_{t-k}^\alpha}{C_t^{\alpha+1}}\right|$, itt $\sum_{k=0}^t C_{t-k-1}^\alpha - C_{t-k}^\alpha = \sum_{k=0}^t \frac{1}{(t-k)!}\cdot\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+t-k-2)\cdot(\alpha+t-k-1-(t-k)) = \sum_{k=0}^t C_{t-k}^{\alpha-1} = C_t^\alpha$

Tehát $\sup_{t\in\dot{T}} \|\varphi(t)\|_{\mathrm{bv}} = \sup_{t\in\dot{T}} \left\{\left|\frac{2C_t^\alpha}{C_t^{\alpha+1}}\right|\right\} = \sup_{t\in\dot{T}} \left|2\frac{t+1}{\alpha+t}\right| = 2$ QED

$\lim_{t\longrightarrow t_0} \varphi_n(t) = \lim_{m\longrightarrow\infty} \frac{C_{m-n}^\alpha}{C_m^{\alpha+1}} = \lim_{m\longrightarrow\infty} \frac{m!}{(m-n)!}\cdot\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-n-1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1)} = 1$, tehát a módszer reguláris (permanens).

A $(C,1)$-szummációt először D. Bernoulli használta 1771-ben periodikusan oszcilláló sorozatokra (Leibniz speciális sorozatokra már 1713-ban használta). 1880, 1882-ben Frobeniusnál és Höldernél is felfedezhetjük, 1890-ben Cesàro publikált ezen eljárás általánosításáról. [Har49]

$$A_{(C,\alpha)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ \frac{C_1^\alpha}{C_1^{\alpha+1}} & \frac{1}{C_1^{\alpha+1}} & 0 & & & \\ \frac{C_2^\alpha}{C_2^{\alpha+1}} & \frac{C_1^\alpha}{C_2^{\alpha+1}} & \frac{1}{C_2^{\alpha+1}} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \frac{C_m^\alpha}{C_m^{\alpha+1}} & \frac{C_{m-1}^\alpha}{C_m^{\alpha+1}} & \cdots & \frac{1}{C_m^{\alpha+1}} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Könnyen belátható, hogy $\sum_{n=0}^m C_{m-n}^s C_n^r = C_m^{s+r+1}$, amiből következik, hogy $\sum_n |a_{mn}| = \sum_n a_{mn} = 1\ \forall m$. Innen $\frac{C_m^r}{m^2} \xrightarrow{m\longrightarrow\infty} \frac{1}{\Gamma(r+1)}$-t felhasználva következik, hogy rögzített n-re $a_{mn} \xrightarrow{m\longrightarrow\infty} 0$. Tehát (C,r) mátrixa Toeplitz tulajdonságú, ha $r\geq 0$.

Mivel $s>r$ esetén

$$C_n^r = \sum_{k=0}^{s-r} (-1)^k \binom{s-r}{k} C_{n-k}^s$$

így definiálhatjuk C_n^r-et negatív r-re is: $r=-p$, $s=0$ szereposztással $C_n^{-p} = A_n - \binom{p}{1}A_{n-1} + \binom{p}{2}A_{n-2} - \cdots$, ahol $A_n := \sum_{k=0}^n a_k$ – azaz $C_n^{-1} = A_n - A_{n-1} = a_n$.

4.VII. Nörlund–szummáció

[Wil84, 32. oldal] Legyen $p\in\omega(\mathbb{C})$, $p_1 := 0$ és jelölje $P_n := \sum_{k=0}^n p_k$. Feltehető, hogy $P_n\neq 0$. Mikor lesz az

$$y_n := \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^n p_{n-k}x_k$$

egyenlőséggel definiált leképezés kiterjesztése Σ-nak?

$$A_{\text{Nörlund}} = \begin{bmatrix} \frac{p_0}{P_0} & 0 & & & & \\ \frac{p_1}{P_1} & \frac{p_0}{P_1} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \frac{p_m}{P_m} & \frac{p_{m-1}}{P_m} & \cdots & \frac{p_0}{P_m} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

4.10. Állítás. *[]Az $A_{Nörlund} = (N,p)$ Nörlund-mátrix pontosan akkor konzervatív (kiterjesztése Σ-nak), ha teljesülnek a következők:*

(i) $(\exists M>0)(\forall n\in\mathbb{N})\ \sum_{k=0}^n |p_{n-k} - p_{n-k+1}| \leq M|P_n|$,

(ii) $\exists \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{p_n}{P_n} =: \lambda$.

A módszer pontosan akkor reguláris (permanens), ha (i),(ii) mellett λ=0 is teljesül.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.5 tételt $T := \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, $t_0 := \infty$,

$$\varphi_k(t) := \begin{cases} \frac{p_{t-k}}{P_t}, & k\le t \\ 0, & k>t \end{cases}$$

szereposztással. Ekkor

$$\sup_{t\in\dot{T}} \|\varphi(t)\|_{\mathrm{bv}} = \sup_{t\in\dot{T}} \left\{ \frac{1}{P_t} \cdot \left(|p_t| + \sum_{k=0}^{t} |p_{t-k} - p_{t-k+1}| \right) \right\} < \infty \iff (i)$$

φ_n folytonos t_0-ban $\iff \exists \lim_{t\longrightarrow t_0} \frac{p_{t-n}}{P_t}$. Ugyanakkor

$$\varphi_{n+1}(t) = \frac{p_{t-n-1}}{P_t} = \frac{p_{t-n-1}}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_t} = \varphi_n(t-1)\cdot\left(1 - \frac{p_t}{P_t}\right) \xrightarrow{t\longrightarrow t_0} \varphi_n(t_0)\cdot(1-\lambda)$$

Azaz $\varphi_0(t) = \frac{p_t}{P_t} = 1 - \frac{P_{t-1}}{P_t}$ alapján

$$\varphi_{n+1}(t_0) = \varphi_n(t_0)\cdot(1-\lambda) = \varphi_0(t_0)\cdot(1-\lambda)^{k+1} = \lambda(1-\lambda)^{k+1}$$

Következésképpen $\exists \lim_{t\longrightarrow t_0} \varphi_n(t) \iff \exists \lim_{t\longrightarrow t_0} \varphi_0(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{p_n}{P_n} = \lambda$.

Tehát az (N,p) Nörlund-szummáció pontosan akkor reguláris (permanens), ha $\lambda = 0$. QED

A Nörlund mátrixok könnyen manipulálhatóak a $p(z) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = (1-z)P(z)$ formális hatványsor segítségével, ahol $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n$.

Legyen például $p(z) = (1-z)^{-1}$, ekkor p=1, $(N,p) = (C,1)$. Ha $\alpha\in\mathbb{N}$, akkor $p(z) := (1-z)^{-\alpha} = \sum \binom{n+\alpha-1}{n} z^n$ mellett $P(z) = \frac{p(z)}{1-z} = (1-z)^{-\alpha-1} = \sum \binom{n+\alpha}{n} z^n$, tehát $(N,p) = (C,\alpha)$.

Ha $\alpha\in\mathbb{R}$, úgy kihasználva, hogy $\sum_{k=1}^{t} C_{t-k}^{\alpha} = C_t^{\alpha+1}$ látható, hogy $p_k := C_k^{\alpha}$ esetén éppen egy Nörlund-szummációt kapunk.

4.VIII. Hölder-szummáció

Σa_n sorra $H_n^0 := \sum_{k=0}^{n} a_k$, $H_n^{r+1} := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} H_k^r$ és azt mondjuk, hogy ha $\exists \lim_{n\longrightarrow\infty} H_n^k =: A$, akkor a Σa_n sor (H,k)-szummábilis és $\sum_{(H,k)} a_n := A$.

Szokás $(H,0)$-t a Cauchy-féle konvergenciának tekinteni. Nyilván $(H,1) = (C,1)$.

$H_n^{r+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} H_m^r$, ez a rekurziós lépés azon H alsó háromszög-mátrix alkalmazását jelenti, amelyre

$$H(i,j) := \begin{cases} \frac{1}{i}, & j\le i \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \qquad (1\le i,j) \qquad \text{azaz} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \cdots & \frac{1}{m} & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Mivel $H_n^0 = \sum_{k=0}^{n} a_k$, ezért ez másik mátrixot jelent: A a csupa 1-esekből álló alsó háromszög-mátrix.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Tehát $(H,0)$ megfelel az A mátrix által megadott szummációs módszernek, (H,k) pedig a H^kA mátrix indukálta módszernek. Mivel mind az A-szummáció, mind a H-szummáció reguláris, ezért a (H,k)-szummáció is az.

4.IX. Euler-szummáció

Σa_n sor $(E,1)$-szummábilis, ha $\exists s := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2^{n+1}} < \infty$, ahol $b_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$. Ekkor $\sum_{(E,1)} a_n := s$.

$p_k := \binom{n}{k}$-val épp egy Nörlund-szummációt kapunk, tehát $(E,1)$ is reguláris (permanens) szummáció.

$$A_{\text{Euler}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & & & & & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & & & & & & \\ \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & & \\ \frac{1}{2^{m+1}} & \frac{m}{2^{m+1}} & \frac{\binom{m}{2}}{2^{m+1}} & \cdots & \frac{\binom{m}{m-2}}{2^{m+1}} & \frac{m}{2^{m+1}} & \frac{1}{2^{m+1}} & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

4.X. Borel mátrix

Tekintsük a következő Toeplitz-mátrixot: $a_k(t) = e^{-t} \cdot \frac{t^k}{k!}$ $(k \in \mathbb{N},\ t > 0)$. Ez megegyezik a $\varphi_k(t) := e^{-t} \cdot \frac{t^k}{k!}$ által (6) formában megadott szummációval.

Alkalmazzuk most Toeplitz tételét (4.6) az A_{Borel} $\mathbb{R}_+$ sorú és $\mathbb{N}$ oszlopú mátrixra (megtehetjük – akár az eredeti bizonyítás szerint, akár az itt leírt a 3.5 tételre való visszavezetés szerint), ekkor $a_k(t) \geq 0$, $a_k(t) \xrightarrow{t \longrightarrow \infty} 0$, $\sum |a_k(t)| = \sum a_k(t) = 1$, azaz minden feltétel teljesül, a Borel-mátrix reguláris.

4.XI. Fourier-sorok által inspirált eljárások [Har49]

$s_n(\theta) := \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} = D_n(\theta)$ alapján

$$t_m(\theta) := \sum c_{m,n} D_n(\theta) \quad (C,1)\text{-összege} \qquad \sum_{(C,1)} t_m(\theta) = \frac{1}{2(m+1)} \cdot \left(\frac{\sin\frac{1}{2}(m+1)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \right)^2$$

$$t_m(x,\theta) := \sum c_n(x) D_n(\theta) \quad \text{Abel-összege} \qquad \sum_{\text{Abel}} t_m(r,\theta) = \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos\theta + r^2)}$$

Mindkét sorösszeg nemnegatív, $m \longrightarrow \infty$ esetén 0-hoz tart egyenletesen $(-\pi,\pi)$ minden 0-t nem tartalmazó zárt részintervallumán.

Hasonló tulajdonságokkal bír $t_m(\theta) := \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \frac{\Gamma(m+1)\cdot\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+\frac{1}{2})} \cdot (1+\cos\theta)^m$, itt $(1+\cos\theta)^m = 2^{1-m} \cdot \frac{2m!}{(n!)^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{m}{m+1}\cos\theta + \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)}\cos 2\theta + \cdots \right)$. Innen kapjuk de la Vallée–Poussin definícióját: $\sum a_n = \lim_{m \longrightarrow \infty} \left(a_0 + \frac{m}{m+1} a_1 + \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)} a_2 + \cdots \right)$, így $t_m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m!)^2}{(m-k)! \cdot (m+k)!} \cdot s_k$.

Azaz $\varphi_n(m) := \frac{(m!)^2}{(m-n)!\cdot(m+n)!}$ definícióval (6) alakú felírását kaptuk a de la Vallée–Poussin-szummációnak, ez reguláris a 3.5 tétel alapján: $\dot{T} := \mathbb{N}$, $t_0 := \{\infty\}$,

$$\sup_{t\in\dot{T}} \|\varphi(t)\| = \sup_{m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \left\{ \frac{(m!)^2}{m!\cdot m!} + \sum_{n=0}^{m-1} \left| \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(m+1)\cdots(m+n)} - \frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(m+1)\cdots(m+n+1)} \right| \right\}$$

$$\overset{\mathbf{1,2}}{\leq} \sup_{m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \left\{ 1 + \frac{m}{m+1} \right\} = 2$$

ahol 1: $\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(m+1)\cdots(m+n)} - \frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{(m+1)\cdots(m+n+1)} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)\cdot(2n+1)}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n+1)} \leq (2n+1)\cdot\frac{m^n}{(m+1)^n}$;
2: $\sum_{n=0}^{m-1} \frac{2n+1}{m+1}\cdot\left(\frac{m}{m+1}\right)^n \leq \frac{1}{m+1}$

Ugyanakkor $\exists \lim_{m\longrightarrow\infty} \varphi_n(m) = \lim_{m\longrightarrow\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(m+1)\cdots(m+n)} = 1$

$$A_{\text{de la Vallée–Poussin}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & & & & \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{12} & 0 & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \\ 1 & \frac{m}{m+1} & \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)} & \cdots & \frac{m(m-1)\cdots(m-m+1)}{(m+1)(m+2)\cdots(m+m)} & 0 & \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

5. Általánosítások

5.1. A módszerem általánosítása

A következőkben belátjuk, hogy a 3.5 tételben nem sok szerepe van a konkrét sorozattérnek (cs-nek), bizonyos feltételek mellett általánosíthatunk.

S^* természetesen továbbra is az S tér topologikus duálisát jelöli, de ha ez izometrikusan izomorf egy T sorozattérrel, akkor ezt a T sorozatteret is S^*-al jelöljük. Tehát S^* elemeit folytonos lineáris funkcionálként és sorozatként is tekinthetjük.

5.1. Állítás. *[] Legyen S sorozattér AK-tér, T topologikus tér, $t_0\in T$ rögzített, $\dot{T} := T\setminus\{t_0\}$. Az*

$$A_t(a) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(t) \qquad (a\in\omega,\ t\in\dot{T}) \tag{8}$$

egyenlőséggel definiált funkcionál pontosan akkor létezik (a szumma véges) adott $t\in\dot{T}$ mellett minden $a\in\omega$ sorozatra, ha $\varphi(t) \in S^*$ – azaz a $\varphi(t)$ sorozat eleme az S^* térrel izometrikusan izomorf sorozattérnek.

Bizonyítás. Az állítás következik a 2.2 tételből. QED

5.2. Lemma. *[] $\exists c, C > 0 : \forall t\in\dot{T}\ c\cdot\|\varphi(t)\|_{S^*} \leq \|A_t\| \leq C\cdot\|\varphi(t)\|_{S^*}$.*

Bizonyítás. A 2.4 állítás alapján $\|A_t\| = \sup\{|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(t)| : a\in\omega, \|a\|_S \leq 1\} = \|\varphi(t)\|_{S^*}$ QED

5.3. Tétel. *[] Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az (8) egyenlettel definiált $\{A_t\}_{t\longrightarrow t_0}$ (általánosított) funkcionál-sorozat A limesze folytonos és lineáris funkcionál legyen a következők:*

(i) $\sup_{t\in\dot{T}} \|\varphi(t)\|_{S^*} < \infty$, *azaz* φ *egyenletesen* S^**-korlátos* $\dot{T}$*-n,*

(ii) φ_n*-ek folytonosak* t_0*-ban* $\forall n\in\mathbb{N}$*-re.*

Ha azt szeretnénk, hogy $A(a)=\Sigma a$ $(a\in\omega)$ *teljesüljön, akkor (ii) a következőképp módosul:*

(ii') $(\forall n\in\mathbb{N})(\lim_{t\longrightarrow t_0} \varphi_n(t) = 1)$.

Bizonyítás. A Banach-Steinhaus tétel szerint szükséges és elegendő, hogy

(a) $\sup_{\dot{T}} \|A_t\| < \infty$,

(b) $\exists M\subset S$ totális rendszer $(\overline{\langle M\rangle}=S)$, melyre $A_t \longrightarrow A$ pontonként az M-en.

Azaz $(i) \iff (a)$ az 5.2 lemma alapján;

Belátjuk, hogy az $M := \{a^{[n]} : a\in\omega\}$ finite sorozatok halmazán $A_t \xrightarrow{t\longrightarrow t_0} A$ pontonként – ez elég, mert $\langle M\rangle$ $\|\cdot\|_S$-ban sűrű S-ben (feltettük, hogy S AK-tér). Tehát rögzített $a\in M$-re

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists U\in\tau(t_0))(\forall t\in\dot{U}) : \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(t_0)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k(\varphi_k(t)-\varphi_k(t_0))\right| < \varepsilon$$

azaz (b) pontosan akkor teljesül, ha $\forall n\in\mathbb{N}$-re φ_n folytonos t_0-ban.

Ha most $A\restriction_S = \Sigma$-t szeretnénk (permanencia), akkor $(\forall n\in\mathbb{N})(\lim_{t\longrightarrow t_0} \varphi_n(t) = 1)$ a megfelelő feltétel. QED

5.1.1. A 4.12 lemma néhány realizációja

Lássuk tehát néhány realizációját az 5.2 lemmának: mivel

$$\|A_t\| = \sup_{t\in\dot{T}} \left\{ \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(t)\right| : a\in\omega, \|a\|_S \leq 1 \right\}$$

ezért elegendő $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(t)| = \lim_{N\longrightarrow\infty} \left|\sum_{n=0}^{N} a_n\varphi_n(t)\right|$-t becsülni $\|\varphi(t)\|_{S^*}$-al.

5.4. Állítás. *[5.2 lemma* ℓ_1*-re]* $\|A_t\| = \|\varphi(t)\|_{\ell_\infty}$ $(A_t : \ell_1 \longrightarrow \mathbb{K})$

Bizonyítás. A felső becslés:
$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\varphi_n(t)\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |a_n|\cdot|\varphi_n(t)| \leq (\sup_n |\varphi_n(t)|)\cdot \sum_{n=0}^{N} |a_n| \xrightarrow{N\longrightarrow\infty} \|\varphi(t)\|_\infty \cdot \|a\|_1$.

Másik irányhoz legyen $\varepsilon>0$, $H_\varepsilon := \{n\in\mathbb{N} : |\varphi_n(t) - \|\varphi(t)\||_\infty < \varepsilon\}$, $H_\varepsilon[m]$ a H_ε egy m elemű részhalmaza és legyen $a_n^{(\varepsilon,m)} := \begin{cases} \frac{1}{m}, & n\in H_\varepsilon[m] \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$

Ekkor $(a_n^{(\varepsilon,m)})\in\ell_1$, $\left\|a^{(\varepsilon,m)}\right\|_1 = 1$ és $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\varepsilon,m)}\varphi_n(t) - \|\varphi(t)\|_\infty\right| < \varepsilon$, ha m elég nagy.

$\varepsilon \longrightarrow 0$, $m \longrightarrow \infty$. QED

5.5. Állítás. *[5.2 lemma* bv*-re]* $\|A_t\| = \|\varphi(t)\|_{\mathrm{bs}}$ $(A_t : \mathrm{bv} \longrightarrow \mathbb{K})$

Bizonyítás. $\sum_{n=0}^{N} a_n\varphi_n(t) = \sum_{n=0}^{N} a_0\varphi_n(t) + \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})\cdot b_n$ így

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(t)\right| \leq \lim_{N\longrightarrow\infty} |a_0|\cdot\left|\sum_{n=0}^{N} \varphi_n(t)\right| + \sum_{n=0}^{N} |\varphi_n(t)| \cdot \sum_{k=1}^{n} |a_k-a_{k-1}| \leq$$

$$\leq |a_0|\cdot \|\varphi(t)\|_{\mathrm{bs}} + \|a\|_{\mathrm{bv}} \cdot \|\varphi(t)\|_{\mathrm{bs}}$$

Másik irányhoz legyen $\varepsilon>0$, $H_\varepsilon := \{n\in\mathbb{N} : |\varphi_n(t) - \|\sigma(\varphi(t))\|_\infty| < \varepsilon\}$, $H_\varepsilon[m]$ a H_ε egy m elemű részhalmaza és legyen $a_n^{(\varepsilon,m)} := \begin{cases} \frac{1}{m}, & n\in H_\varepsilon[m] \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$ és legyen $a_{m+1}^{(\varepsilon,m)} - a_{m+2}^{(\varepsilon,m)} := 1 - \left\|\left(a^{(\varepsilon,m)}\right)^{[m]}\right\|_{\mathrm{bv}}$.

Ekkor $(a_n^{(\varepsilon,m)})\in\mathrm{bv}$, $\left\|a^{(\varepsilon,m)}\right\|_{\mathrm{bv}} = 1$ és $\left|\sum_{n=0}^\infty a_n^{(\varepsilon,m)}\varphi_n(t) - \|\varphi(t)\|_{\mathrm{bs}}\right| < \varepsilon$, ha m elég nagy.

$\varepsilon \longrightarrow 0$, $m \longrightarrow \infty$. QED

5.6. Állítás. *[5.2 lemma ℓ_2-re]* $\|A_t\| = \|\varphi(t)\|_{\ell_2}$ $(A_t : \ell_2 \longrightarrow \mathbb{K})$

Bizonyítás. $|\sum_{n=0}^\infty a_n\varphi_n(t)| \le \|a\|_{\ell_2} \cdot \left\|\overline{\varphi(t)}\right\|_{\ell_2}$ a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwartz egyenlőtlenség szerint.

A másik irányhoz legyen $a_n := \overline{\varphi_n(t)}$, ekkor $(a_n)\in\ell_2$, $\|a\|_{\ell_2} = \|\varphi(t)\|_{\ell_2}$ és $|\sum_{n=0}^\infty a_n\varphi_n(t)| = \|\varphi(t)\|_{\ell_2}^2 = \|a\|_{\ell_2} \cdot \|\varphi(t)\|_{\ell_2}$. QED

5.7. Állítás. *[5.2 lemma ℓ_p-re]* $\|A_t\| = \|\varphi(t)\|_{\ell_q}$ $(A_t : \ell_p \longrightarrow \mathbb{K},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1,\ 1<p<\infty)$

Bizonyítás. A Hölder-egyenlőtlenség szerint $|\sum_{n=0}^\infty a_n\varphi_n(t)| \le \|a\|_{\ell_p} \cdot \|\varphi(t)\|_{\ell_q}$.

A másik irányhoz legyen $a_n := \begin{cases} \frac{|\varphi_n(t)|^q}{u}, & k\le m \\ 0, & k>m \end{cases}$ ahol $u := (\sum_{k=0}^m |\varphi_k(t)|^q)^{\frac{1}{p}}$.

Ekkor $\|a\|_{\ell_p} = 1$ és $|\sum_{n=0}^\infty a_n\varphi_n(t)| \ge \|\varphi(t)\|_{\ell_q}$. QED

5.8. Állítás. *[5.2 lemma c-re]* $\|A_t\| = \|\varphi(t)\|_1$ $(A_t : c \longrightarrow \mathbb{K})$

Bizonyítás. $|\sum_{n=0}^\infty a_n\varphi_n(t)| \le (\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|)\cdot \sum_{n=0}^\infty |\varphi_n(t)| = \|a\|_c \cdot \|\varphi(t)\|_1$.

A másik irányhoz legyen $a_n := \operatorname{sgn}\varphi_n(t)$ $(\mathbb{K}=\mathbb{R})$ vagy $a_n := \sqrt{\frac{\overline{\varphi_n(t)}}{\varphi_n(t)}}$ $(\mathbb{K}=\mathbb{C})$, ekkor $\|a\|_c = 1$, $\sum_{n=0}^\infty a_n\varphi_n(t) = \sum_{n=0}^\infty |\varphi_n(t)| = \|\varphi\|_1$. QED

5.II. Egy messzemenő általánosítás

Legyen X egy tér, μ egy ezen értelmezett mérték és tekintsük a következő $A : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ operátort:

$$A_f(x) := \int_X \mathcal{A}(x,y)\cdot f(y)\ d\mu(y)$$

Ezen operátort **szummációs eljárás**nak mondjuk, ha van az értelmezési tartománynak olyan altere, melyet A helyben hagy. Természetes kérdés, hogy ha adott egy ilyen szummációs eljárás, akkor azt meddig lehet kiterjeszteni?

$\mathcal{F} : L_2 \longrightarrow L_2$ Fourier-operátor,

$$A_f(x) := \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x-y}\cdot f(x)\ dy \qquad \text{Hilbert-transzformáció}$$

ahol az integrált *Cauchy-főértékben* értjük. Igazolható, hogy ha $f\in\operatorname{Lip}(\alpha)$ $(0<\alpha<1)$, akkor ezen integrál Cauchy-főértékben létezik, sőt $A_f = f$.

Hivatkozások

[DS88] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz, *Linear Operators*, Wiley Classics Library Edition, vol. 1, John Wiley & Sons, 1988.

[Gam] R. V. Gamkrelidze (ed.), *Analysis i.*, EMS, vol. 13.

[Gyö71] Pál László György, *Ortogonális függvénysorok*, ELTE Tankönyvkiadó Budapest, 1971.

[Har49] G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford University Press, 1949.

[Mad70] Ivor J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, 1970.

[Mad80] ———, *Infinite Matrices of Operators*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 786, Springer-Verlag, 1980.

[Ruc81] William H. Ruckle, *Sequence spaces*, Research notes in Mathematics, vol. 41, Pitman Publishing Limited, London, 1981, C16411.

[Wil78] Albert Wilansky, *Modern Methods in Topological Vector Spaces*, McGraw-Hill, 1978, C16204.

[Wil84] ———, *Summability through functional analysis*, North-Holland mathematics studies, vol. 85, North-Holland – Amsterdam, 1984, C16683.

A. Alapfogalmak, jelölések:

$\mathbb{K} := \mathbb{R}$ v. $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}_+ = \{x{\in}\mathbb{R} : x{\geq}0\}$, $\mathbb{R}^+ := \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

X $\mathbb{K}$ feletti vektortér (vektortér) az alaptér

$\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza, 0 számmal kezdődően;

Az összegzések 0-al kezdődnek és az indexbeli változóra történnek – kivéve ha ki van írva.

$\omega(X) := \mathcal{F}(\mathbb{N}, X)$ az X vektortér feletti sorozatok vektortere – a dolgozatban számsorozatokkal foglalkozunk, így $X{=}\mathbb{K}$, $\omega := \omega(\mathbb{K})$.

a, b, x, y általában sorozatot jelöl, mint függvény – de $x(n)$ helyett x_n-et írunk

$\sup_n := \sup_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim x := \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

$\ell_p := \left\{x{\in}\omega : \|x\|_p := (\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}$ Banach-tér

$\ell_\infty := \{x{\in}\omega : \|x\|_\infty := \sup_n |x_n| < \infty\}$ a korlátos sorozatok Banach-tere

$c := \{x{\in}\omega : \exists \lim x\}$ a konvergens sorozatok Banach-tere (a supnormával)

$c_0 := \{x{\in}c : \lim x = 0\}$ a konvergens nullsorozatok Banach-tere a supnormával

$\mathrm{cs} := \{x{\in}c : (\sum_{k=0}^{n} x_k)_{n\in\mathbb{N}} \in c\}$ a konvergens sorok tere a $\|x\|_{\mathrm{cs}} := \sup_n |\sum_{k=0}^{n} x_k|$ normával

$\mathrm{bv} := \{(x_n){\in}\omega(X) : \sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1}{-}x_n|$ konvergens$\}$ a korlátos változású sorozatok tere az $\|x\|_{\mathrm{bv}} = |x_0| + \sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1}{-}x_n|$-normával

$\mathrm{bv}_0 := \mathrm{bv} \cap c_0$ a korlátos változású nullsorozatok tere a $\|\cdot\|_{\mathrm{bv}}$-normával

$\mathrm{bs} := \{a{\in}\omega : \sup_n |\sum_{k=0}^{n} a_k| {<} \infty\}$ a korlátos részletösszegű sorok tere

$\mathrm{bfa}(\mathbb{N})(X)$ legyen a korlátos, végesen additív, komplex értékű, X-en értelmezett halmazfüggvények tere a $\|\mu\| := \sup\{\sum_{i=0}^{n} |\mu(E_i)| : X = \cup^{*}{}_{i=0}^{n} E_i\}$ normával.

δ^n az a sorozat, mely mindenütt 0, kivéve az n helyen, ahol 1 ($\delta_k^n = \delta_{nk}$ Kronecker-szimbólum). Általában a sorozatot kis latin betű jelöli, alul indexelve a sorozat elemei.

A mátrix elemei általában a_{ik}-k, de ugyanezt jelöli $A(i,k)$ is.