Az irányított összefüggőség növelése

Diplomamunka

Készítette: Végh László

Témavezető: Frank András egyetemi tanár

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2004

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Előszó

Dolgozatunkban az irányított gráf összefüggőség-növelésének kérdését fogjuk tárgyalni, elsősorban algoritmikus szempontból. A k-szoros összefüggőség az összefüggőség fogalmának természetes általánosítása: azt fejezi ki, hogy a gráffal modellezett hálózatunk mennyire biztonságos. k-szorosan összefüggő gráfból tetszőleges k-nál kevesebb csúcs (vagy él) kitörlése után is megmarad az összefüggőség. Azt, hogy egy gráf k-szorosan él- vagy pontösszefüggő-e, a Menger tétel segítségével egyszerűen el tudjuk dönteni.

Alapkérdésünk a következő lesz: adott egy irányított gráf és egy k szám. Tegyük e gráfot a lehető legkevesebb új él behúzásával k-szorosan él- vagy pontösszefüggővé.

Az élösszefüggőség növelésének kérdését az irányított esetben Frank András oldotta meg Mader leemelési tételének segítségével [4]. Ennél jóval bonyolultabbnak bizonyult a pontösszefüggőség növelése, sőt, már az ST-élösszefüggőség növelése is. Irányított pontösszefüggőséggel kapcsolatban az első eredmény $k = 1$ esetére született, Eswaran és Tarjan munkájaként [6]. E téren Frank András és Jordán Tibor 1995-ös minimax-formulája jelentett áttörést [1]. Ebben halmazpárokon értelmezett keresztezőn szupermoduláris függvények fedéseként fogalmazták meg mind az él-, mind a pontösszefüggőség növelésének feladatát, valamint ezek általánosabb, ST-összefüggőségi változatait is. Ez az általános keret magában foglalja Győri útrendszerek generálásáról szóló tételét is [7], mely addig semmilyen más minimax-tétellel nem mutatott rokonságot. E tételre a továbbiakban Szupermoduláris Fedési Tétel néven hivatkozunk. Az optimum megtalálására [1] csupán ellipszoid módszert használó algoritmust adott, ezért a következő kutatások fő célja kombinatorikus algoritmus keresése lett.

Az első egyszerű gráfalgoritmus Steffen Ennitől származik [13], amely azonban csak 1-ST-összefüggővé növelésre használható. Az általános problémához kötődő első eredmény Jordán Tibor approximációs algoritmusa, mely tetszőleges digráfra legfeljebb $k-1$-gyel több élt ad meg az optimálisnál [14]. A pontos optimum kiszámítását rögzített k esetén Frank András és Jordán Tibor oldja meg algoritmikusan [3], ennek hátránya, hogy futásideje k-ban exponenciális.

Frank András egyszerű algoritmust adott az útgenerálási probléma megoldására [8], melyet később sikerült kiterjesztenie a Szupermoduláris Fedési Tétel azon esetére, amikor szupermoduláris függvényünk csak 0 és 1 értéket vehet fel [11]. Ennek legfontosabb alkalmazása a $k-1$-összefüggő digráf k-összefüggővé növelése lehetne, azonban erre az algoritmus közvetlenül nem volt használható.

Más irányból közelítette meg a 0-1 értékű esetet ifj. Benczúr András [12], aki a tételt alkalmas posetekre fogalmazta át. Ezen átfogalmazásra adott egy meglehetősen bonyolult algoritmust, mely alkalmazható mind az összefüggőség, mind az ST-összefüggőség eggyel való növelésének problémájára.

A dolgozat egyik célja, hogy a fenti eredményeket egységes keretben tárgyalja. Másik célunk két új algoritmus bemutatása. Ezen polinomiális idejű algoritmusok egyben alternatív bizonyítást is adnak a szóbanforgó tételekre. Ezek közül az egyik a 4.4 részben szerepel: itt megadjuk a [11] algoritmusnak egy olyan javítását, ami közvetlenül alkalmas az összefüggőség és az ST-összefüggőség eggyel való növelésére. A másikat az 5. fejezetben mutatjuk be: ez egy általános kombinatorikus algoritmus a Szupermoduláris Fedési Tételben szereplő optimum megtalálására. Ez a [12] algoritmus általánosítása, és alkalmazható az irányított összefüggőség-növelés minden fentebb felsorolt esetének megoldására. Az előbbi saját, az utóbbi ifj. Benczúr Andrással közös eredmény.

Köszönetnyilvánítás

Köszönet illeti mindenekelőtt témavezetőmet, Frank Andrást, a téma legjelesebb szakértőjét, aki bevezetett az összefüggőség-növelés problémakörébe, és felbecsülhetetlen segítséget nyújtott munkámhoz. Szeretném megköszönni ifj. Benczúr Andrásnak, hogy kitartóan együttműködött velem közös algoritmusunk elkészítésében. Hálás vagyok Bernáth Attilának és Szabó Jácintnak, akik önzetlenül segítettek az új eredményeket tartalmazó részek alapos átnézésével.

2. fejezet

Bevezetés

2.1. Jelölések

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf. A gráf pontjait kisbetűkkel fogjuk jelölni. X, Y, Z általában halmazpárokat fog jelenteni, V részhalmazait más nagybetűk (pl. H, F) jelölik. Ha az e él kezdőpontja x, végpontja pedig y, akkor az $e = xy$ jelölést használjuk, x-et az él tövének, y-t pedig a fejének nevezzük. $H \subseteq V$ és $x \in V$ esetén $H \cup \{x\}$ helyett gyakran a $H + x$ írásmódot használjuk. n általában a gráf pontszámát, $|V|$-t fogja jelölni, m pedig az élek számát, $|A|$-t.

Adott $H, F \subseteq V$ halmazokra jelölje $\rho(H, F)$ a $H - F$-ből $F - H$-ba menő élek számát, $\delta(H, F)$ pedig az $F - H$-ból $H - F$-be menőkét. Legyen $\rho(H) = \rho(H, V - H)$ a H-ba belépő élek száma, $\delta(H) = \delta(H, V - H)$ a H-ból kilépő élek száma. Mind irányított, mind irányítatlan gráfban legyen $d(H, F)$ az $H - F$ és $H - F$ közti élek száma, $\bar{d}(H, F)$ pedig a $H \cap F$ és $V - H - F$ közti élek száma (irányított esetben mindegy, hogy melyik irányban). Nevezzük H-t $x\bar{y}$ halmaznak, ha $x \in V$ és $y \notin V$. Jelölje egy $H \subseteq V$ halmazra $\Gamma^+(H)$ azon $x \in V - H$ pontok halmazát, amelyekbe megy él H-beli pontból. $\Gamma^-(H)$ pedig legyen azon $V - H$-beli pontok halmaza, amelyekből megy él H-ba.

Valamely $x, y \in V$ pontokra legyen $\lambda(x, y, D)$ az x-ből y-ba menő páronként éldiszjunkt irányított utak maximális száma, $\kappa(x, y, D)$ pedig a páronként belsőleg pontdiszjunktaké. Nyilvánvaló, hogy $\lambda(x, y, D) \geq \kappa(x, y, D)$.

Ha $\lambda(x, y, D) \geq k$, akkor mondjuk azt, hogy D x és y között lokálisan k-élösszefüggő, $\kappa(x, y, D) \geq k$ esetén pedig azt, hogy D x és y között lokálisan k-pontösszefüggő.

Ha bármely $x, y \in V$ párra $\lambda(x, y, D) \geq k$ (illetve $\kappa(x, y, D) \geq k$), akkor mondjuk azt, hogy D k-él/pontösszefüggő. Világos, hogy az 1-él- és az 1-pontösszefüggőség is ekvivalens az erősen összefüggőséggel.

Hasonlóan, ha adott $\emptyset \neq S, T \subset V$ halmazokra minden $x \in S$, $y \in T$ esetén $\lambda(x, y, D) \geq k$ (illetve $\kappa(x, y, D) \geq k$), akkor e gráfot k-szorosan ST-él/pontösszefüggőnek nevezzük. Egy $D = (V, A)$ digráfot egy $\emptyset \neq U \subseteq V$ halmazra U-ban k-él/pontösszefüggőnek hívunk, ha k-szorosan UU-él/pontösszefüggő.

Irányítatlan gráfra ugyanígy definiálhatjuk az él- és pontösszefüggőséget.

Ha nem mondjuk, hogy milyen összefüggőségről van szó, az minden esetben pontösszefüggőség lesz. Feltételezzük a *Maximális Folyam-Minimális Vágás* tétel és a hozzá tartozó $O(n^3)$ idejű algoritmus (MFMC) ismeretét. Ez például [20]-ben található meg.

2.2. Menger-tételek

Mind az irányított, mind az irányítatlan esetben a Menger-tételek jó karakterizációját adják annak, hogy mikor lokálisan k-él/pontösszefüggő egy gráf két adott pont között. A tételt az MFMC tételre vezetjük vissza. A bizonyítás ezért hatékony algoritmust is fog adni mind az él-, mind a pontösszefüggőség kérdésének eldöntésére.

2.2.1. Tétel (Menger). *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, k pozitív egész, $x, y \in D$.*

(i) D akkor és csak akkor lokálisan k-élösszefüggő x és y között, ha tetszőleges k-nál kevesebb élt elhagyva még marad x és y közt irányított út.

(ii) D akkor és csak akkor lokálisan k-pontösszefüggő x és y között, ha $|V| \geq k+1$, és bármely k-nál kevesebb, x-től és y-tól különböző pontot kihagyva marad x és y közt irányított út.

(iii) Analóg állítások érvényesek az irányítatlan esetben is.

Az (i) és (ii) állítások alábbi közös általánosítását látjuk be. Az (i) állítás az $r = 1$, $l = k$ speciális esetben fog adódni, a (ii) állítás pedig az $r = k$, $l = 1$ esetből fog könnyen következni.

2.2.2. Tétel. *Legyen $D = (V, A)$ digráf és r, l pozitív egészek, $x, y \in D$. Akkor és csak akkor létezik x-ből y-ba rl élidegen út, hogy bármely csúcson legfeljebb l út megy át, ha bárhogy kihagyva egy $H \in V - \{x, y\}$ halmazt $(0 \leq |H| \leq r-1)$, a maradékban minden $x\bar{y}$ halmazból legalább $(r - |H|)l$ él kilép.*

Bizonyítás. A feltétel szükséges, hiszen ha létezik egy megfelelő útrendszer, akkor közülük egy adott H halmazból legfeljebb $l|H|$ használhat pontot. A maradék $(r - |H|)l$ út ezért $D - H$-ban halad, ami miatt $D - H$-ban minden $x\bar{y}$ halmazból valóban legalább $(r - |H|)l$ él lép ki.

Az elegendőség igazolásához először is elhagyhatjuk az x-be belépő és az y-ból kilépő éleket. Készítsük el azt a $D' = (V', A')$ gráfot, amiben minden $v \in V$ pontnak megfelel egy v' és egy v'' pont. Az éleket pedig húzzuk be úgy, hogy ha $uv \in A$, akkor legyen $u''v' \in A'$. Legyen továbbá minden $v \in V$-re $v'v'' \in A'$. Ebben a hálózatban legyen a g kapacitásfüggvény értéke l a $v'v''$ éleken, a többi élen pedig 1. A feltétel éppen azt mondja ki, hogy D'-ben minden $S' \subseteq V'$ $x''\bar{y}'$ halmazra $\delta'_g(S') \geq rl$. Az MFMC tétel szerint ekkor létezik x'' és y' közt rl értékű folyam. Ez felbomlik körfolyamokra és rl útfolyamra. Ezen rl útfolyamnak az eredeti gráfban kl élidegen út felel meg, úgy, hogy bármely csúcson legfeljebb l halad keresztül. □

2.2.1 (iii) Bizonyítása. Az irányítatlan esetet visszavezetjük az irányítottra. Legyen $G = (V, E)$ az irányítatlan gráfunk, és készítsük el azt a $D = (V, A)$ digráfot, amelyben minden $uv \in E$ élt egy $uv, vu \in A$ élpár helyettesít. Világos, hogy ha G-ben van k él/pontdiszjunkt út x és y között, akkor D-ben is lesz k él/pontdiszjunkt irányított út. Megfordítva, ha D-ben adott k darab belsőleg pontdiszjunkt út x és y közt, akkor az G-ben is k belsőleg pontdiszjunkt útnak felel meg. Tegyük most fel, hogy D-ben létezik k éldiszjunkt út x és y

között. Válasszuk ezeket úgy, hogy összesen minimális számú élt használjanak. Csak abból lehet baj, ha van olyan L_1 és L_2 út, valamint $uv, vu \in A$ élpár, hogy $uv \in L_1$, $vu \in L_2$. Ekkor viszont L_1 és L_2 könnyen helyettesíthetők olyan útpárral, hogy élhalmazaik uniója $L_1 \cup L_2 - \{uv, vu\}$. Ez azonban ellentmond az útrendszer minimális választásának.

Könnyen belátható továbbá, hogy az (i) és (ii) pontok feltételei a k-szoros irányított él/pontösszefüggőségre D-ben ekvivalensek az irányítatlan esetben kimondható analóg feltételekkel G-ben. □

A Menger tétel triviális következménye, hogy egy $D = (V, A)$ irányított gráf pontosan akkor k-élösszefüggő, ha bármely $\emptyset \neq H \subset V$ halmazra $\delta(H) \geq k$. Ugyanígy adható feltétel az ST-élösszefüggőségre. Nevezzünk egy H halmazt ST-halmaznak, ha $S \cap H \neq \emptyset$, $T - H \neq \emptyset$.

2.2.3. Lemma. *Egy $D = (V, A)$ irányított gráf pontosan akkor k-szorosan ST-élösszefüggő valamely $\emptyset \neq S, T \subseteq V$ halmazokra, ha minden H ST-halmazra $\delta(H) \geq k$.*

A k-pontösszefüggőség jellemzéséhez halmazpárokra lesz szükségünk. Tegyük fel, hogy $k + 1 \leq |V|$. V diszjunkt nemüres részhalmazaiból álló $X = (X^-, X^+)$ párra legyen $h(X^-, X^+) := |V - (X^- \cup X^+)|$. Azt mondjuk, hogy X egyirányú pár (D-re nézve), ha nem megy él X^--ból X^+-ba.

2.2.4. Lemma. *A $D = (V, A)$ irányított gráf pontosan akkor k-összefüggő, ha*

$$h(X^-, X^+) \geq k \tag{2.1}$$

minden X egyirányú párra.

Bizonyítás. A szükségességhez azt kell látni, hogy ha D k összefüggő, akkor egy $x \in X^-$ pontból létezik k darab belsőleg pontdiszjunkt út egy $y \in X^+$ pontba. Mivel X egyirányú, ezért ezek mindegyike tartalmaz pontot $V - (X^- \cup X^+)$-ban.

Tegyük fel, hogy fennáll a feltétel, mégis egy $x \in V$ pontból nincs k darab pontdiszjunkt út egy $y \in V$ pontba. Amennyiben nincsen xy él, úgy a Menger tétel szerint van egy $C \subseteq V - \{x, y\}$ halmaz, amire $|C| < k$, és C lefogja az összes x-ből y-ba menő irányított utat. Legyen X^- a $D - C$ gráfban az x-ből elérhető pontok halmaza, és $X^+ = V - C - X^-$. Ez az (X^-, X^+) pár megsérti a feltételt.

Ha pedig létezne α darab x-ből y-ba menő él ($\alpha \geq 1$), akkor ugyanez a gondolatmenet D helyett az x-ből y-ba menő élek elhagyásával keletkező D' gráfban megad egy olyan (X_0^-, X_0^+) párt, aki D'-ben egyirányú, és $h(X_0^-, X_0^+) \leq k - 1 - \alpha$. Ha $|X_0^+| > 1$, akkor $X^+ = X_0^+ - y$ nem üres, (X_0^-, X^+) egyirányú pár D-ben és $h(X_0^-, X^+) \leq k - \alpha$. Tehát $|X_0^+| = 1$, és hasonlóan $|X_0^-| = 1$. Ebből azonban $h(X_0^-, X_0^+) = |V| - 2 \geq k - 1$, ami ellentmondás. □

Az ST-pontösszefüggőség jellemzéséhez nem elég az egyirányú párokat vizsgálni. Nevezzünk egy diszjunkt nemüres részhalmazokból álló $X = (X^-, X^+)$ (nem feltétlenül egyirányú!) párt ST-párnak, ha $X^- \cap S \neq \emptyset$, $X^+ \cap T \neq \emptyset$. Az alábbi állítás a Menger-tétel 2.2.2 változatából következik egyszerűen.

2.2.5. Lemma. *A $D = (V, A)$ irányított gráf adott $\emptyset \neq S, T \subseteq V$ halmazok esetén pontosan akkor k-szorosan ST-összefüggő, ha*

$$\delta(X^-, X^+) + h(X^-, X^+) \geq k \tag{2.2}$$

minden X ST-párra.

Az k-él és pontösszefüggőség kérdését tehát egy folyamalgoritmus végrehajtásával el tudjuk dönteni.

2.3. Dilworth-tételek

Úgy a Szupermoduláris Fedési Tétel bizonyításában, mint több algoritmusban is szerepet fognak játszani a posetek láncaira és antiláncaira vonatkozó Dilworth tételek és algoritmusok. Legyen $(P, \preceq)$ poset. Láncnak nevezzük P egy páronként összehasonlítható, antiláncnak pedig egy páronként nem összehasonlítható elemekből álló részhalmazát. Legyen adott továbbá egy $w : P \to \mathbf{Z}^+$ súlyozás. Mondjuk azt, hogy egy láncfelbontás (antiláncfelbontás) fedi (P, w)-t, ha minden p_j elem legalább $w(p_j)$ láncban (antiláncban) szerepel.

2.3.1. Tétel (Súlyozott Poláris Dilworth). *A (P, w)-t fedő antiláncok minimális $c_w(P)$ száma egyenlő a legsúlyosabb lánc $m_w(P)$ súlyával.*

Bizonyítás. A max $\leq$ min irány nyilvánvaló, mivel egy antiláncnak és egy láncnak legfeljebb egy közös eleme lehet. A min $\leq$ max irányhoz $m_w(P)$ szerinti indukciót alkalmazunk. Ha $m_w(P) = 1$, akkor az állítás triviális. $m_w(P) > 1$ esetén legyen A_1 a P minimális elemeinek halmaza, mely nyilvánvalóan antilánc lesz. Legyen (P', w') az a súlyozott poset, melyben minden $p_i \in A_1$-re $w(p_i) > 1$ esetén $w(p_i)$-t eggyel csökkentjük, $w(p_i) = 1$ esetén pedig elhagyjuk a p_i elemet. $m_w(P') = m_w(P) - 1$, hiszen P' minden lánca P-ben eggyel nagyobb súlyú lesz, vagy kiegészíthető egy eggyel hosszabb lánccá. Az indukció szerint P' felbontható $m_w(P')$ antiláncra, amikhez A_1-t hozzávéve P egy $m_w(P)$ antiláncból álló felbontását kapjuk. $\square$

Ezen bizonyítás segítségével egyszerű algoritmus adható egy minimális antiláncfedés és leghosszabb súlyú lánc megtalálására, melyek tehát ugyanakkorák lesznek. Legyen A_1 a P minimális elemeinek halmaza, $\gamma_1 = \min\{w(p_j) : p_j \in A_1\}$. P-ben A_1 minden elemének súlyát csökkentsük γ_1-gyel, azon elemeket, akiknek így nullára csökken a súlya, hagyjuk el. Legyen A_2 a minimális elemek halmaza az így kapott posetben, γ_2 pedig A_2 minimális súlyú elemének súlya. Ezt folytatva kapjuk az $\gamma_1 A_1, \ldots, \gamma_l A_l$ antiláncfelbontást. ($\gamma_i A_i$ azt jelenti, hogy az A_i antilánc γ_i példányban szerepel). a_l legyen A_l tetszőleges eleme. a_l nem került bele A_{l-1}-be, kell legyen tehát $a_{l-1} \in A_{l-1}$, $a_{l-1} \prec a_l$ elem. Ő nem került bele A_{l-2}-be, ezért van egy $a_{l-2} \in A_{l-2}$, $a_{l-2} \prec a_{l-1}$. Folytassuk ezt az eljárást. Világos, hogy P-ben $w(a_i) \geq \gamma_i$, tehát egy legalább $\sum_i \gamma_i$ súlyú láncot fogunk kapni.

2.3.2. Tétel (Súlyozott Dilworth). *A (P, w)-t fedő láncok minimális $a_w(P)$ száma egyenlő a legsúlyosabb antilánc $d_w(P)$ súlyával.*

Bizonyítás. Legyen $|P| = n$. A nemtriviális min $\leq$ max irány bizonyítását az MFMC tételre vezetjük vissza. Készítsük el az alábbi $D = (V, A)$ digráfot és g kapacitásfüggvényt: minden p_i-nek feleljen meg egy a_i és egy b_i pont. Legyen ezeken kívül egy s és egy t pont. Minden i-re legyen egy sa_i és egy $b_i t$ él, $g(sa_i) = g(b_i t) = w(p_i)$ kapacitással, valamint ha $p_i < p_j$, akkor egy $a_j b_i$ él $g(a_j b_i) = \infty$ kapacitással. ($a_i b_i \notin A$!).

Az MFMC algoritmus ebben megad egy egészértékű x maximális megengedett folyamot, és egy olyan S $s\bar{t}$ halmazt, melyre $\delta_g(S)$ minimális. Az MFMC tétel szerint $\delta_x(s) = \delta_x(S) = \delta_g(S)$.

V-n megadunk egy másik, $D' = (V, A')$ digráfot is, melynek élei minden i-re sa_i, $b_i t$ és $a_i b_i$, valamint $p_i < p_j$ esetén $b_i a_j$. $x' : A' \to \mathbf{Z}_+$ legyen az alábbi: Minden i-re legyen $x'(sa_i) = w(p_i) - x(sa_i)$, $x'(b_i t) = w(p_i) - x(b_i t)$, $x'(a_i b_i) = w(p_i)$. $p_i < p_j$ esetén pedig legyen $x'(b_i a_j) = x(a_j b_i)$. Könnyen látható, hogy x' egy nemnegatív egészértékű folyam lesz, melynek értéke $\delta_{x'}(s) = w(P) - \delta_x(s)$.

Indukcióval látható, hogy egy n' csúcsú és m' élű aciklikus digráfban minden folyam felbomlik legfeljebb $m' - n' + 2$ útfolyam összegére. D' egy st útfolyama P-ben egy láncnak felel meg. D'-nek $2n+2$ csúcsa van, élszáma legfeljebb $3n + \binom{n}{2}$, azaz x' felbomlik legfeljebb n^2 útfolyamra. Ez tehát P-ben megad egy $\gamma_1 C_1, \ldots, \gamma_l C_l$ láncfedést (amit ismét úgy értünk, hogy a C_i lánc γ_i példányban szerepel.) Erre $\sum_i \gamma_i = \delta_{x'}(s) = w(P) - \delta_x(s) = w(P) - \delta_g(S)$ lesz.

Tekintsük most a D-ben meghatározott S minimális vágást.

2.3.3. Állítás. *Ha $b_i \in S$, akkor $a_i \in S$.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy $b_i \in S$, $a_i \notin S$. Kell legyen olyan k, melyre $b_k \notin S$ és $p_i > p_k$, hiszen egyébként $\delta_g(S + a_i) < \delta_g(S)$ lenne, ellentmondva s választásának. Ugyanígy kell legyen olyan j, hogy $a_j \in S$ és $p_i < p_j$, különben $\delta_g(S - b_i) < \delta_g(S)$ ellentmondást adna. Ekkor $p_k < p_j$, tehát a végtelen kapacitású $a_k b_j$ él kilép S-ből, azaz $\delta_g(S) = \infty$. □

Legyen most $A = \{p_i : a_i \in S, b_i \notin S\}$. Világos, hogy A antilánc, és az előbbi állítás miatt miatt $w(A) = w(P) - \delta_g(S) = \sum_i \gamma_i$, ami a láncfedésünk méretével volt egyenlő. □

A maximális súlyú antiláncot és minimális láncfelbontást találó algoritmus tehát triviálisan visszavezethető az MFMC algoritmusra.

Bonyolultság

A súlyozott poláris Dilworth algoritmus bonyolultsága nagyban függ a poset tulajdonságaitól és reprezentációjától. Tegyük fel, hogy L_w felső korlát a maximális láncsúlyra, és az összes minimális elem megtalálása M időben történik. Ekkor az algoritmus egy lépése M időt vesz igénybe, és minden lépésben csökken L_w is és $|P|$ is. Tehát a futásidő $O(\max(L_w, |P|)M)$.

A súlyozott Dilworth-algoritmusban egy $2|P| + 2$ pontú hálózaton kell MFMC algoritmust végrehajtani, majd egy folyamot felbontani legfeljebb $|P|^2$ útfolyamra. Ennek összideje tehát $O(|P|^3)$.

3. fejezet

A Szupermoduláris Fedési Tétel

3.1. A tétel és bizonyítása

Az ebben a fejezetben leírt összes eredmény Frank András és Jordán Tibor [1] cikkéből származik. Legyen S és T a V halmaz két nemüres részhalmaza. Jelölje $A^* = A(S,T)$ az S-ből T-be menő irányított élek halmazát, $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}(S,T)$ pedig az olyan $X = (X^-, X^+)$ párok halmazát, amikre $\emptyset \neq X^- \subseteq S$ és $\emptyset \neq X^+ \subseteq T$, $X^- \cap X^+ = \emptyset$. X^--t e pár tövének, X^+-t pedig a fejének fogjuk nevezni.

Mondjuk azt, hogy egy xy él *lefogja* vagy *lefedi* az X párt, ha $x \in X^-$ és $y \in X^+$. Egy $z : A^* \to \mathbf{R}$ vektorra használni fogjuk az alábbi jelöléseket: legyen $z(X) := \sum(z(e) : e \in A^*,\, e \text{ lefogja } X\text{-et})$. Ha $w : \mathcal{A}^* \to \mathbf{Z}_+$ függvény, $e \in A^*$ él, akkor legyen $c_w(e) := \sum(w(X) : X \in \mathcal{A}^*, e \text{ lefogja } X\text{-et})$.

Ha $X = (X^-, X^+)$ és $Y = (Y^-, Y^+)$ párok esetén $X^- \cap Y^- = \emptyset$, akkor őket *tődiszjunktnak*, $X^+ \cap Y^+ = \emptyset$ esetén pedig *fejdiszjunktnak* fogjuk nevezni. Ha X és Y tő- vagy fejdiszjunktak, akkor őket *függetlennek* nevezzük. Világos, hogy két pár pontosan akkor független, ha nem foghatók le egy éllel.

Vezessük be a párokon az alábbi rendezést: $X \preceq Y$ jelentse azt, hogy $X^- \subseteq Y^-$ és $X^+ \supseteq Y^+$. Ha $X \preceq Y$ vagy $Y \preceq X$, akkor nevezzük őket *összehasonlíthatónak*.

Ha két pár se nem független, se nem összehasonlítható, akkor *keresztezőnek* fogjuk őket hívni. Az összehasonlítható és keresztező párokat összefoglalóan *függőnek* nevezzük.

Egy $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^*$ családot *keresztezésmentesnek* vagy *váznak* nevezünk, ha nincsenek benne keresztező párok. *Keresztezőnek* pedig akkor hívjuk, ha bármely $X, Y \in \mathcal{F}$ keresztező párokra $X \wedge Y = (X^- \cap Y^-, X^+ \cup Y^+)$ és $X \vee Y = (X^- \cup Y^-, X^+ \cap Y^+)$ is $\mathcal{F}$-beliek. Világos, hogy $\mathcal{A}(S,T)$ keresztező rendszer lesz.

Párok egy $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^*$ rendszerét nevezzük h-függetlennek, ha tetszőleges él legfeljebb h elemét fogja le $\mathcal{F}$-nek. A $h = 1$ esetben a rendszert egyszerűen függetlennek hívjuk, ez azzal ekvivalens, hogy elemei páronként függetlenek (azaz bármely két elem fej- vagy tődiszjunkt). Általánosabban, legyen $w : \mathcal{A}^* \to \mathbf{Z}_+$ függvény. Nevezzük w-t h-függetlennek, ha minden $e \in A^*$ élre $c_w(e) \leq h$.

Legyen p $\mathcal{A}^*$-on értelmezett nemnegatív egészértékű függvény. Nevezzük őt keresztezőn szupermodulárisnak, ha minden $X, Y \in \mathcal{A}^*$ függő párra amennyiben $p(X) > 0$, $p(Y) > 0$, akkor

$$p(X) + p(Y) \leq p(X \vee Y) + p(X \wedge Y)$$

Fordított irányú egyenlőtlenség esetén keresztezőn szubmoduláris függvénynek nevezzük. Azt mondjuk, hogy a z vektor fedi a p függvényt, ha bármely $X \in \mathcal{A}^*$ párra $z(X) \leq p(X)$. Legyen $\tau(p)$ a p-t fedő élek minimális száma, azaz

$$\tau(p) = \min\{z(\mathcal{A}^*) : z \geq 0 \text{ egészértékű fedése } p\text{-nek}\}$$

Legyen $\nu(p)$ a maximális p-súlyú páronként független elemekből álló rendszer súlya, azaz

$$\nu(p) = \max\{p(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ független}\}$$

Ezen előkészületek után kimondhatjuk az alaptételt:

3.1.1. Tétel (Frank András, Jordán Tibor). *Ha p nemnegatív egészértékű keresztezőn szupermoduláris függvény $\mathcal{A}^*$-on, akkor $\tau(p) = \nu(p)$.*

Ennek bizonyítása előtt szükségünk lesz pár jelölésre. Egy $e = st \in A^*$ élre legyen $b_e(X) = 1$, ha e fedi X-et és $b_e(X) = 0$ egyébként. Adott $z : A^* \to \mathbf{R}_+$ függvényre legyen $Y \in \mathcal{A}^*$ esetén $b_z(Y) = z(Y)$. Az alábbi állítás első fele triviális, a másik fele pedig az ő egyszerű következménye:

3.1.2. Állítás. *Mind b_e, mind b_z szubmoduláris függvény.*

Adott p keresztezőn szupermoduláris függvényre és $e \in A^*$ élre legyen $p^e := (p - b_e)^+$. Nevezzük e függvényt p e szerinti redukáltjának. Ez azt jelenti, hogy ha e lefogja az X párt és $p(X) > 0$, akkor $p^e(X) = p(X) - 1$, minden egyéb esetben $p^e(X) = p(X)$. Mivel b_e szubmoduláris, p keresztezőn szupermoduláris, így $p - b_e$ és könnyen láthatóan $(p - b_e)^+$ is keresztezőn szupermoduláris függvények lesznek.

Legyen $w : \mathcal{A}^* \to \mathbf{Z}_+$ függvény. Nevezzük w tartójának és jelöljük $\mathcal{S}_w$-vel azon $X \in \mathcal{A}^*$ párok családját, melyekre $w(X) > 0$. Azt mondjuk, hogy w vázfüggvény, ha a tartója váz (azaz keresztezésmentes).

3.1.3. Lemma. *Legyen $w : \mathcal{A}^* \to \mathbf{Z}_+$ függvény. Ekkor létezik olyan $\bar{w} : \mathcal{A}^* \to \mathbf{Z}^+$ vázfüggvény, melyre $p(\bar{w}) \geq p(w)$ és $c_{\bar{w}}(e) \leq c_w(e)$ minden $e \in A^*$ élre.*

Bizonyítás. Legyen $f : \mathcal{A}^* \to \mathbf{Z}_+$ az alábbi függvény: $f(X) = (|X^-| - |X^+|)^2$. Egyszerű számolásból adódik az alábbi állítás:

3.1.4. Állítás. *Ha X és Y keresztező párok, akkor*

$$f(X) + f(Y) > f(X \vee Y) + f(X \wedge Y)$$

Legyen most $\bar{w}$ az a függvény, mely kielégíti a $p(\bar{w}) \geq p(w)$, $c_{\bar{w}} \leq c_w$ feltételt, és erre nézve $s(\bar{w}) = \sum(\bar{w}(X)f(X) : X \in \mathcal{A}^*)$ maximális. Azt állítjuk, hogy $\bar{w}$ vázfüggvény. Tegyük fel indirekten, hogy $\mathcal{S}_{\bar{w}}$ tartalmaz X és Y keresztező párokat. Legyen $w'(X \vee Y) = \bar{w}(X \vee Y) + 1$, $w'(X \wedge Y) = \bar{w}(X \wedge Y) + 1$, $w'(X) = \bar{w}(X) - 1$, $w'(Y) = \bar{w}(Y) - 1$, minden más $Z \in \mathcal{A}^*$ párra pedig $w'(Z) = \bar{w}(Z)$. 3.1.2 miatt $c_{w'}(e) \leq c_{\bar{w}}(e)$ minden $e \in A^*$-ra, p szupermodularitása miatt pedig $p(w') \geq p(\bar{w})$. A 3.1.4 állítás értelmében viszont $s(w') > s(\bar{w})$, ami ellentmond $\bar{w}$ választásának. □

3.1.1 Bizonyítása. A $\nu(p) \le \tau(p)$ irány triviális: egy $\mathcal{F}$ független rendszernek egy él legfeljebb egy elemét foghatja le. Tehát tetszőleges z-re és $\mathcal{F}$-re

$$z(A^*) \ge \sum(z(X) : X \in \mathcal{F}) \ge \sum(p(X) : X \in \mathcal{F}) = p(\mathcal{F})$$

Nézzük most a $\tau(p) \le \nu(p)$ irányt. Tetszőleges $e \in A^*$ élre tekintsük p e szerinti redukáltját. $p^e \le p$, és - mivel e legfeljebb egy élt foghat le egy független rendszerből - $\nu(p) - 1 \le \nu(p_e) \le \nu(p)$. Nevezzük az e élt csökkentőnek, ha $\nu(p_e) < \nu(p)$. A bizonyítás lényege az alábbi lemma lesz:

3.1.5. Lemma. *Ha egy Z párra $p(Z) > 0$, akkor van Z-t fedő csökkentő él.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy minden Z-t fedő e élre van egy $\mathcal{F}_e$ független rendszer, amire $p(\mathcal{F}_e) = \nu(p)$ és e nem fedi $\mathcal{F}_e$ egyetlen elemét sem. Legyen $w_e : \mathcal{A}^* \to \{0,1\}$ olyan függvény, mely 1-et vesz fel $\mathcal{F}_e$ elemein, azon kívül pedig 0-t. w_0 pedig legyen olyan, ami egyedül Z-n vesz fel 1-et, mindenhol máshol 0-t. Legyen $w := w_0 + \sum(w_e : e \text{ fedi } Z\text{-t})$. Legyen $h = |Z^-||Z^+|$ a Z-t fedő élek száma. Ekkor $p(w) = \nu_p h + p(Z)$ és így igaz az alábbi két tulajdonság:

$$p(w) \ge \nu_p h + 1 \tag{3.1}$$

$$w \ h\text{-független} \tag{3.2}$$

A 3.1.3 lemma miatt van olyan $\bar{w}$ vázfüggvény, mely kielégíti e feltételeket. Legyen $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{\bar{w}}$. Ekkor $\mathcal{I}$ váz lesz. $\mathcal{I}$-t $\preceq$ szerint tekintve a váztulajdonság miatt a részbenrendezésben két elem pontosan összehasonlítható, ha mint párok függőek. Ebben egy lánc súlya (3.2) miatt legfeljebb h lehet. Alkalmazzuk a 2.3.1 súlyozott poláris Dilworth-tételt: A maximális láncméret súlya egyenlő a minimális antiláncfelbontás méretével. Van tehát legfeljebb h antiláncunk, akik összesen legalább $\nu(p)h + 1$ súlyú elemet fednek. Ebből következik egy $\nu(p)$-nél nagyobb súlyú antilánc létezése, ami ellentmondás. □

$\nu(p) \ge \tau(p)$ bizonyítása $\sum(p(X) : X \in \mathcal{A}^*)$ szerinti indukcióval fog történni: Ha az összeg 0, akkor $\nu(p) = \tau(p) = 0$. Legyen most Z olyan pár, akire $p(Z) > 0$. Az előző lemma szerint létezik egy Z-t fedő e csökkentő él. Ha z' p^e egy fedése, akkor $z' + e$ p-nek egy fedése lesz, vagyis $\tau(p) \le \tau(p^e) + 1$. Minthogy $\sum p^e(X) < \sum p(X)$, alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, amiből $\tau(p) - 1 \le \tau(p^e) = \nu(p^e) \le \nu(p^e) - 1$, ahonnan $\tau(p) \le \nu(p)$ adódik. □

Az alkalmazások során fontos lesz az alábbi definíció: legyenek $\emptyset \ne S' \subseteq S, \emptyset \ne T' \subseteq T$. p_0-t, p $\mathcal{A}(S',T')$-re való *vetítését* az alábbi módon definiáljuk: $X_0 \in \mathcal{A}(S',T')$ esetén legyen

$$p_0(X_0) := \max(p(X) : X \in \mathcal{A}(S,T), X^- \cap S = X_0^-,\ X^+ \cap T = X_0^+)$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy p_0 is keresztezőn szupermoduláris függvény lesz.

Kimondjuk továbbá e tételt külön abban a speciális esetben, amikor p csak 0-1 értéket vehet fel. Legyen $\mathcal{L}$ azon párok rendszere, melyekre $p(X) = 1$. p keresztező szupermodularitása miatt ha $X, Y \in \mathcal{L}$, akkor $2 \le p(X \vee Y) + p(X \wedge Y) \le p(X) + p(Y) = 2$, amiből az következik, hogy $X \vee Y, X \wedge Y \in \mathcal{L}$. Tehát $\mathcal{L}$ keresztező rendszer lesz. Megfordítva, tetszőleges $\mathcal{L}$ keresztező rendszerre az a p függvény, ami $\mathcal{L}$ elemein egyet, máshol nullát vesz fel, keresztezőn szupermoduláris. A 3.1.1 tétel ebben a speciális esetben így szól:

3.1.6. Tétel. *Ha $\mathcal{L}$ halmazpárok keresztező rendszere, akkor az $\mathcal{L}$-et lefogó élek minimális $\tau(\mathcal{L})$ száma egyenlő lesz az $\mathcal{L}$ páronként független elemeinek maximális $\nu(\mathcal{L})$ számával.*

3.2. Alkalmazások

3.2.1. Halmazfüggvények - Irányított élösszefüggőség növelése

A 3.1.1 tétel jelentősen egyszerűsödik abban a speciális esetben, amikor $V = S = T$ és p csak olyan (X^-, X^+) párokon lehet pozitív, ahol $X^- \cup^* X^+ = V$. Ekkor a független rendszerek nagyon speciális alakúak:

3.2.1. Lemma. *Legyen $\mathcal{I}$ V részhalmazainak olyan rendszere, amelynek bármely két tagja vagy diszjunkt, vagy ko-diszjunkt. Ekkor $\mathcal{I}$ tagjai vagy páronként diszjunktak, vagy páronként kodiszjunktak.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás. Ekkor vannak olyan $A, B, C \in \mathcal{I}$ halmazok, akikre A és B diszjunktak, de A és C ko-diszjunktak. Ekkor azonban $B \subseteq C$, és ez ellentmondás. □

A 3.1.1 tétel ebben az esetben így szól:

3.2.2. Tétel. *Legyen p pozitívan keresztező szupermoduláris függvény V részhalmazain. Ekkor a p-t lefogó élek minimális száma az alábbi maximummal lesz egyenlő:*

$$\max\{\sum_{i=1}^{t} p(V_i), \sum_{i=1}^{t} p(V - V_i) : V_1, \ldots, V_t \ V\text{-nek egy partíciója}\}$$

Tegyük fel, hogy adott egy $D = (V, A)$ gráfunk, és szeretnénk őt minimális számú új él hozzávételével k összefüggővé tenni. Legyen az új élek halmaza E. Menger tétele szerint $D = (V, A + E)$ pontosan akkor k-élösszefüggő, ha $\delta_{D+E}(H) \geq k$ minden $\emptyset \neq H \subset V$ halmazra. Ez éppen azt jelenti, hogy E-nek le kell fedni a $p(H, V - H) = (k - \delta(H))^+$ függvényt, mely $\delta(H)$ szubmodularitása miatt keresztezőn szupermoduláris lesz. Kimondva az előző tételt ezen esetre:

3.2.3. Tétel. *Adott $D = (V, A)$ gráf pontosan akkor tehető legfeljebb γ új él hozzávételével k-élösszefüggővé, ha V-nek minden $V_1, V_2, \ldots, V_t$ részparticiójára*

$$\sum_{i=1}^{t} (k - \delta(V_i))^+ \leq \gamma$$

$$\sum_{i=1}^{t} (k - \rho(V_i))^+ \leq \gamma$$

3.2.2. Irányított pontösszefüggőség növelése

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, akit minimális számú új él hozzávételével k-összefüggővé szeretnénk tenni ($|V| \geq k + 1$). Ha az új élek halmaza E, a 2.2.4 lemma alapján $h_{D+E}(X) \geq k$ kell fennálljon minden $D + E$-ben egyirányú párra.

Definiáljuk a $p_{def} : \mathcal{A}(V, V) \to \mathbf{Z}_+$ függvényt a következőképpen: $p_{def}(X) := (k - h(X))^+$ az egyirányú párokra és 0-nak a többi párra.

Ennek keresztezőn szupermoduláris volta a $p_{def} = (k - k\delta(X^-, X^+) - h(X^-, X^+))^+$ felírásból fog következni, mivel mind $\delta(X^-, X^+)$, mind $h(X^-, X^+)$ szubmoduláris függvények. Könnyen látható, hogy a k-összefüggővé növelés e p_{def} függvény fedésével ekvivalens. A 3.1.1 tétel e speciális esetre kimondva:

3.2.4. Tétel. *A $D = (V, A)$ irányított gráf akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ él hozzávételével k-összefüggővé, ha minden $\mathcal{F}$ független egyirányú párokból álló családra*

$$\sum(p_{def}(X) : X \in \mathcal{F}) \leq \gamma$$

3.2.3. Irányított ST-pontösszefüggőség növelése

Legyenek most a $D = (V, A)$ irányított gráfban adottak az $\emptyset \neq S, T \subseteq V$ halmazok, feladatunk pedig az, hogy minimális számú új él hozzávételével k-szorosan ST-összefüggővé tegyük.

Ha a hozzávett élek halmaza E, a 2.2.5 lemma alapján a $D + E$ gráfban $h(X^-, X^+) \geq k - \delta_{D+E}(X^-, X^+)$ kell hogy teljesüljön minden (nem feltétlenül egyirányú) ST-párra.

Legyen (X^-, X^+) egy diszjunkt halmazokból álló ST-pár, legyen $p_D(X^-, X^+) := (k - \delta(X^-, X^+) - h(X^-, X^+))^+$. Ennek keresztező szupermodularitása p_{def} esetéhez hasonló módon látható. Feladatunk most ezen függvény fedése.

Mondjuk azt, hogy az X és Y ST-párok ST-függetlenek, ha vagy $X^- \cap Y^- \cap S = \emptyset$, vagy $X^+ \cap Y^+ \cap T = \emptyset$. ST-párok egy családját nevezzük ST-függetlennek, ha elemei páronként ST-függetlenek. A 3.1.1 tétel alkalmazásaként az alábbit látjuk be:

3.2.5. Tétel. *A $D = (V, A)$ irányított gráf adott $\emptyset \neq S, T \subseteq V$ halmazokra akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ S-ből T-be menő él hozzávételével k-szorosan ST-összefüggővé, ha minden $\mathcal{F}$ ST-független családra*

$$\sum(p_D(X) : X \in \mathcal{F}) \leq \gamma \tag{3.3}$$

Bizonyítás. A szükségesség abból következik, hogy ha E az új élek halmaza, akkor minden ST-párra $\delta_D(X^-, X^+) + \delta_E(X^-, X^+) \geq k - h(X^-, X^+)$, azaz $\delta_E(X^-, X^+) \geq p_D(X^-, X^+)$ kell teljesüljön. Egy S-ből T-be menő él egy ST-független rendszernek legfeljebb egy elemét tudja lefogni, amiből következik, hogy

$$\gamma \geq |E| \geq \sum(\delta_E(X) : X \in \mathcal{F}) \geq \sum(p_D(X) : X \in \mathcal{F})$$

Az elegendőség igazolásához legyen p_0 a p_D vetítése $\mathcal{A}(V, V)$-ről $\mathcal{A}(S, T)$-re. A (3.3) feltételből következik, hogy minden $\mathcal{F}_0$ $\mathcal{A}(S, T)$-beli független családra $p_0(\mathcal{F}_0) \leq \gamma$. Innen a 3.1.1 tétel megadja p_0-nak egy $z : A(S, T) \to Z_+$ egészértékű fedését, amire $z(A(S, T)) \leq \gamma$. Álljon E az $x \in S$, $y \in T$ pontok közt $z(xy)$ élből. □

3.2.4. Irányított ST-élösszefüggőség növelése

Sajnos általában az ST-élösszefüggőség növelése lényegesen bonyolultabb a (VV-)élösszefüggőség-növelésnél. Itt sem lesz meg az a szerencsénk, hogy a 3.1.1 tétel alkalmazása során a független családok partícióként vagy kopartícióként álljanak elő: az ST-élösszefüggőség növelése nem lesz könnyebb az ST-pontösszefüggőség növelésénél.

Hívjuk a H és F ST-halmazokat ST-függetlennek, ha vagy $S \cap H \cap F = \emptyset$, vagy $H \cup F \supseteq T$. Ez azzal lesz ekvivalens, hogy nincs olyan $s \in S$, $t \in T$ pontpár, amelyet mindketten szétválasztanak.

3.2.6. Tétel. *A $D = (V, A)$ irányított gráf adott $\emptyset \neq S, T \subseteq V$ halmazokra akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ S-ből T-be menő él hozzávételével k-szorosan ST-élösszefüggővé, ha minden $\mathcal{F}$ $H_1, \ldots, H_t$ ST-független halmazrendszerre*

$$\sum_i (k - \delta(H_i))^+ \leq \gamma \tag{3.4}$$

Bizonyítás. A Menger-tétel szerint $D + E$ pontosan akkor k-szorosan ST-élösszefüggő, ha bármely H ST-halmazra $\delta_E(H) \geq k - \delta_D(H)$. A feltétel szükségessége abból adódik, hogy egy él egy ST-független rendszernek legfeljebb egy elemét képes lefogni.

Az elégségességhez legyen $p : \mathcal{A}(V, V) \to Z_+$ az a függvény, melyre $p(X) := (k - \delta(X^-))^+$ az olyan párokra, amikre $\emptyset \neq X^- \subset V$ és $X^+ = V - X^-$, a többi párra pedig $p(X) := 0$. E függvény keresztező szupermodularitása $\delta(H)$ szubmodularitásából adódik. Legyen p_0 a p_D vetítése $\mathcal{A}(V, V)$-ről $\mathcal{A}(S, T)$-re; ez szintén keresztezőn szupermoduláris lesz.

A 3.1.1. tétel alkalmazhatóságához azt kell belátni, hogy $\nu(p_0) \leq \gamma$. Tegyük fel, hogy ez nem így van: valamely $\mathcal{F}_0$ $A(S, T)$-ben független rendszerre $p_0(\mathcal{F}_0) > \gamma$. Azon $X \in \mathcal{F}_0$ párokhoz, melyekre $p_0(X) \neq 0$, legyen $v(X) \in \mathcal{A}(V, V)$ az a pár, melyre $v(X)^- \cap S = X^-$, $v(X)^+ \cap T = X^-$ és $p_0(X) = p(v(X))$. Minthogy $p(X) > 0$, ezért $v(X)^+ = V - v(X)^-$, $p_0(X) = p(v(X)) = (k - \delta(v(X)^-))^+$. Álljon $\mathcal{F}$ az ilyen $v(X)^-$ halmazokból. Könnyen látható, hogy $\mathcal{F}$ ST-függetlensége ekvivalens $\mathcal{F}_0$ függetlenségével, ezért $\mathcal{F}_0$ megsérti a (3.4) feltételt. Ezzel beláttuk, hogy $\nu(p_0) \leq \gamma$. Ismét tekintsük p_0-nak a 3.1.1. tétel által megadott $z : A(S, T) \to \mathbf{Z}_+$ fedését, és álljon E $x \in S$ és $y \in T$ közt z darab párhuzamos élből. $\square$

A fent leírt esetek mindegyikében a D irányított gráf k-szorosan ST-él/pont összefüggővé tételéhez szükséges élek minimális számát $M_k(D)$-val, a független családok maximális hiányösszegét pedig $N_k(D)$-val fogjuk jelölni. (Az összes esetben $M_k(D) = N_k(D)$). Ha egyértelmű, hogy milyen k-ról van szó, akkor az indexet is el fogjuk hagyni.

3.2.5. Győri tétele

Legyen $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ egy egyszerű irányított út, és legyen $e_i = v_{i-1}v_i$. Legyen adott $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_k\}$, P részútjainak egy rendszere. Azt mondjuk, hogy P részútjainak egy $\mathcal{B}$ rendszere generálja $\mathcal{U}$-t, ha minden $\mathcal{U}$-beli út előáll néhány $\mathcal{B}$-beli út egyesítéseként. Azt szeretnénk vizsgálni, hogy adott $\mathcal{U}$-hoz mennyi a minimális generátorrendszer mérete, $\gamma(\mathcal{U})$.

Nevezzük az (U, e) párt reprezentált útnak, ahol U egy út és e az ő egy éle. Jelölje $(U, e)^-$ az U-nak az e előtti, $(U, e)^+$ pedig az e utáni pontjainak halmazát. Jelölje $\mathcal{U}_r$ az $\mathcal{U}$-beli utakhoz tartozó reprezentált utak halmazát. Egy I út bal végpontját $b(I)$-vel, jobb végpontját pedig $j(I)$-vel fogjuk jelölni.

Legyen $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_t\}$ P részútjainak egy családja, és $\mathcal{R} = \{f_1, f_2, \ldots, f_t\}$ egy reprezentáló rendszer: minden i-re f_i az I_i egy éle. Akkor mondjuk azt, hogy $\mathcal{R}$ erős reprezentáló rendszer, ha bármely i, j-re $I_i \cap I_j$ f_i és f_j közül legfeljebb egyet tartalmaz. $\mathcal{I}$-t akkor nevezzük erősen reprezentálhatónak, ha létezik erős reprezentáló rendszere. Egy erősen reprezentálható rendszer generálásához legalább $|\mathcal{I}|$ élre van szükség, egy generátorrendszerben kell legyen ugyanis olyan $x_i y_i$ él, melynek kezdőpontja $(I_i, f_i)^-$-ban, végpontja $(I_i, f_i)^+$-ban van, és ezen éleknek páronként különbözniük kell.

A $\gamma(\mathcal{U})$-ra ezért alsó becslést fog adni $\sigma(\mathcal{U})$, az $\mathcal{U}$-beli legnagyobb erős reprezentálható rendszer mérete. Győri tétele viszont azt mondja ki, hogy ekkora generátorrendszer már létezik is, azaz

3.2.7. Tétel (Győri). *Bármely $\mathcal{U}$ részút-családra $\gamma(\mathcal{U}) = \sigma(\mathcal{U})$.*

Bizonyítás. A $\gamma \geq \sigma$ irányt az elöbb láttuk. A $\gamma \leq \sigma$ irányhoz először vezessünk be egy fogalmat: az $\mathcal{U}_r$ egy (U, f) tagját hívjuk *soványnak*, ha nincs olyan $U' \in \mathcal{U}$, melyre $f \in U' \subset U$. Legyen $\mathcal{L}_\mathcal{U}$ az $\mathcal{U}_r$-beli sovány reprezentált utak rendszere.

3.2.8. Lemma. *$\mathcal{L}_\mathcal{U}$ keresztező rendszer.*

Bizonyítás. Legyen (U, f) és (U', f') két keresztező sovány elem, azaz $(U, f)^- \cap (U', f')^- \neq \emptyset$, $(U, f)^+ \cap (U', f')^+ \neq \emptyset$. (Ez éppen azzal ekvivalens, hogy $f, f' \in U \cap U'$.)

Azt állítjuk, hogy $(U, f)^-$ és $(U', f')^-$ nem összehasonlíthatók. Ha például $(U, f)^- \subseteq (U', f')^-$ volna, akkor a soványság és az összefüggőség miatt $(U, f)^+ \supseteq (U', f')^+$ adódna. Ekkor azonban $(U, f) \preceq (U', f')$ lenne, ellentmondásban azzal, hogy keresztezők. Hasonlóan feltehető, hogy $(U, f)^+$ és $(U', f')^+$ sem összehasonlíthatók.

A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $\mathcal{P}$-n f megelőzi f'-t (vagy esetleg egybeesik vele). A soványság és az előző feltevés miatt ekkor miatt $b(U) < b(U')$, $j(U) < j(U')$.

Így az $(U, f) \wedge (U', f')$ az (U', f) reprezentált útnak felel meg, $(U, f) \vee (U', f')$ pedig az (U, f') reprezentált útnak. Azt kell még belátnunk, hogy (U, f') és (U', f) is soványak. A szimmetria miatt ezt elég (U, f')-re belátni. Ha létezne $\mathcal{U}$-ban olyan Z, akire $f' \in Z \subset U$, akkor (U, f) soványsága miatt $f \notin Z$. Ekkor azonban $f' \in Z \subset U'$, ami ellentmond (U', f) soványságának. $\square$

$\mathcal{L}_\mathcal{U}$ egy független rendszere $\mathcal{U}$ egy erősen reprezentálható részének felel meg. Legyen $H := \{x_1 y_1, \ldots, x_t y_t\}$ az $\mathcal{L}_\mathcal{U}$ egy minimális fedése. A 3.1.6 tétel szerint $|H| = \tau(\mathcal{L}_\mathcal{U}) = \nu(\mathcal{L}_\mathcal{U})$.

3.2.9. Lemma. *$\mathcal{L}_\mathcal{U}$ egy H fedése $\mathcal{U}_r$-nek is fedése lesz.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nem így van, és válasszunk egy olyan (U, f) fedetlen párt, akire $|U|$ minimális. $(U, f) \notin \mathcal{L}_\mathcal{U}$, mivel $\mathcal{L}_\mathcal{U}$ minden elemét lefogtuk. Ezért van olyan U', akire $f \in U' \subset U$. $|U|$ minimális választása miatt van olyan él, aki lefogja (U', f)-t. Ezen él azonban (U, f)-et is lefogja, ami ellentmondás. $\square$

Álljon $\mathcal{B}$ azon B_i részutakból, melyek első pontja x_i, utolsó pontja y_i. Az előző lemmából világos, hogy $\mathcal{B}$ generálni fogja $\mathcal{U}$-t. Az állítás pedig abból adódik, hogy $\sigma(\mathcal{U}) \geq \nu(\mathcal{L}_\mathcal{U}) \geq \tau(\mathcal{L}_\mathcal{U}) \geq \gamma(\mathcal{U})$ $\square$

Bemutatjuk e tétel egy érdekes kombinatorikus geometriai következményét. Legyen T egy derékszögű poligon, azaz a sík függőleges és vízszintes egyenesekkel határolt véges, összefüggő és zárt tartománya. Ez szeretnénk lefedni függőleges és vízszintes oldalú téglalapokkal. (Téglalap alatt a továbbiakban mindig ilyet értünk). Két T-beli pontot akkor nevezünk függetlennek, ha nem fedhetők le egy téglalappal (azaz a kettejük által meghatározott téglalap kilóg T-ből.) A szükséges téglalapok száma alulról becsülhető a páronként független pontok maximális számával. Itt általában nem áll fenn egyenlőség, azonban ha kikötjük T-ről, hogy függőlegesen konvex, azaz minden függőleges egyenest szakaszban metsz, akkor a Győri tételből levezethető az alábbi:

3.2.10. Tétel ([19]). *Legyen T függőleges derékszögű poligon. Ekkor a T-t fedő téglalapok minimális száma egyenlő a páronként független pontok maximális számával.*

A Győri tételt kimondhatjuk általánosan is: legyen adott P élein egy w nemnegatív egész értékű súlyfüggvény. Mondjuk azt, hogy $\mathcal{P}$ részútjainak egy $\mathcal{B}$ halmaza w-generálja $\mathcal{U}$-t, ha minden (U, f) reprezentált útra $\mathcal{B}$ legalább $w(f)$ darab f-et tartalmazó részútját tartalmazza U-nak. A minimális generátorrendszer méretét jelölje $\gamma_w(U)$. (A $w \equiv 1$ eset éppen az útfedési probléma.)

Az (U, f) pár súlya legyen f súlya, azaz $w(U, f) = w(f)$. Legyen a páronként független elemekből álló maximális súlyú rendszer súlya $\sigma_w(\mathcal{U})$. A 3.2.7. tételhez teljesen hasonlóan belátható az alábbi általánosabb alak:

3.2.11. Tétel. *Bármely $\mathcal{U}$ részút-családra és w nemnegatív egész értékű súlyfüggvényre $\gamma_w(\mathcal{U}) = \sigma_w(\mathcal{U})$.*

4. fejezet

Algoritmusok

4.1. k-élösszefüggővé növelés

Frank András [4] algoritmusa az optimális k-szorosan élösszefüggővé növelésre a Mader-féle leemelési tételen fog alapulni. Egy D digráfban az $e = zv$, $f = uz$ élpár leemelésén az e és f élek elhagyását és az uv él hozzávételét értjük. Az így kapott digráfot D^{ef}-fel fogjuk jelölni. Használni fogjuk az alábbi azonosságokat:

4.1.1. Állítás.

$$\rho(H) + \rho(F) = \rho(H \cup F) + \rho(H \cap F) + d(H, F) \tag{4.1}$$

$$\rho(H) + \rho(F) = \rho(H - F) + \rho(F - H) + \bar{d}(H, F) + \rho(H \cap F) - \delta(H \cap F) \tag{4.2}$$

4.1.2. Tétel (Mader). *Legyen a $D = (V + s, A)$ irányított gráf V-ben k-élösszefüggő ($k \geq 1$), és tegyük fel, hogy $\rho(s) = \delta(s)$. ekkor minden $e = st$ élre létezik olyan $f = us$ él, melyekre az $\{e, f\}$ leemelésével kapott D^{ef} digráf V-ben k-élösszefüggő.*

Bizonyítás. A 2.2.3. lemma szerint az, hogy D V-ben k-élösszefüggő, azzal ekvivalens, hogy

$$\forall\ \emptyset \neq H \subset V + s \text{ halmazra, ha } V \cap H \neq \emptyset,\ V - H \neq \emptyset, \text{ akkor } \rho(H) \geq k \tag{4.3}$$

Egy $\emptyset \neq H \subseteq V$ részhalmazt nevezzünk be-pontosnak, ha $\rho(H) = k$, és ki-pontosnak, ha $\delta(H) = k$. A ki- vagy be-pontos halmazokat összefoglalóan pontosnak nevezzük.

4.1.3. Lemma. *Legyen H és F két t-t tartalmazó pontos halmaz. Ekkor $H \cup F$ is pontos lesz.*

Bizonyítás. Ha $H \subseteq F$ vagy $F \subseteq H$, akkor készen vagyunk. Az nem lehet, hogy az egyik halmaz ki-pontos, a másik pedig be-pontos, mert ha mondjuk $\rho(H) = k$, $\delta(F) = k$, akkor $\bar{F} = V - F + s$-re $2k = \rho(H) + \rho(\bar{F}) = \rho(H \cup \bar{F}) + \rho(H \cap \bar{F}) + d(H, \bar{F}) \geq 2k + 1$, ugyanis $d(H, \bar{F}) \geq 1$ az st él miatt.

Tegyük fel, hogy H és F is ki-pontosak (a bizonyítás ugyanaz lesz a be-pontos esetre is). Ha $H \cup F \subset V$, akkor $\rho(H \cup F) \geq k$ teljesül, innen $2k = \rho(H) + \rho(F) \geq \rho(H \cup F) + \rho(H \cap F) \geq 2k$, vagyis készen vagyunk.

Tegyük most fel, hogy $H \cup F = V$. Ekkor $\bar{H} \cap \bar{F} = \{s\}$, s így a (4.2) egyenlőségben $\rho(\bar{H}) + \rho(\bar{F}) = \rho(\bar{H} - \bar{F}) + \rho(\bar{F} - \bar{H}) + \bar{d}(\bar{H}, \bar{F}) \geq 2k + 1$, ami ellentmondás. ($\bar{d}(\bar{H}, \bar{F}) \geq 1$ szintén az st él miatt van.) $\square$

Ha t nincsen benne egyetlen pontos halmazban sem, akkor $e = st$-vel bármely $f = us$ él leemelhető. Ha van t-t tartalmazó pontos halmaz, akkor az előző lemma szerint létezik köztük egy egyértelmű M maximális. Nem lehet, hogy minden s-be lépő él M-ből jöjjön: $\rho(M) = k$ esetén $\delta(V - M) = \rho(M + s) \leq \rho(M) - 1 = k - 1$ állna ellentétben (4.3)-mal, $\delta(M) = k$ esetén pedig $\rho(V - M) = \delta(M + s) \leq \delta(M) - \rho(s) + \delta(s) - 1 \leq k - 1$ lenne a probléma. Tehát van olyan $f = us$ él, melyre $u \in V - M$, és ezzel e leemelhető lesz. $\square$

A 3.2.3 tételre fogunk most egy új, algoritmikus bizonyítást adni:

4.1.4. Tétel. *Adott $D = (V, A)$ gráf pontosan akkor tehető legfeljebb γ új él hozzávételével k-élösszefüggővé, ha V-nek minden $V_1, V_2, \ldots, V_t$ részpartíciójára*

$$\sum_{i=1}^{t} (k - \delta(V_i))^+ \leq \gamma \tag{4.4}$$

$$\sum_{i=1}^{t} (k - \rho(V_i))^+ \leq \gamma \tag{4.5}$$

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló. Az elégségesség bizonyításához képezzük először a D^o gráfot D-ből egy új s pont, és V-ből s-be mutató új élek hozzávételével. Az új élek E^o halmaza legyen olyan, hogy $D^o = (V + s, A + E^o)$ teljesítse az alábbi követelményt:

$$\text{minden } \emptyset \neq H \subset V \text{ halmazra } \delta_{D^o}(H) \geq k \tag{4.6}$$

4.1.5. Lemma. *Ha $D^o = (V + s, A + E^o)$ olyan, hogy E^o tartalmazásra nézve minimális, ami eleget tesz a (4.6) feltételnek, akkor $|E^o| \leq \gamma$.*

Bizonyítás. Jelentse a ki-pontos halmaz itt is az olyan $\emptyset \neq H \subset V$ halmazt, melyre $\delta_{D^o}(H) = k$. Ez azzal ekvivalens, hogy $k - \delta_D(H) = \delta(H, s)$. Legyen $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_t\}$ maximális ki-pontos halmazok egy családja. Legyen $T_{E^o} := \{v \in V : \delta(v, s) \geq 1\}$ az E^o-beli élek töveinek halmaza. E^o minimalitása miatt $\cup_i H_i$ le fogja fedni T_{E^o}-t.

Tegyük fel, hogy valamely H_i és H_j-re $H_i \cup H_j = V$. Ekkor a $(V - H_i, V - H_j)$ részpartícióra (4.5)-t alkalmazva $\gamma \geq (k - \rho_D(V - H_i)) + (k - \rho_D(V - H_j)) = (k - \delta_D(H_i)) + (k - \delta_D(H_i)) = \delta(H_i, s) + \delta(H_j, s) \geq \delta(V, s) = |E^o|$, tehát az állítást beláttuk. Az alábbiakban feltesszük, hogy $H_i \cup H_j \subset V$ minden i, j-re.

Ha $H_i \cap H_j \neq \emptyset$, akkor e feltevés miatt $2k = \delta_{D^o}(H_i) + \delta_{D^o}(H_j) \geq \delta_{D^o}(H_i \cup H_j) + \delta_{D^o}(H_i \cap H_j) \geq 2k$, tehát $H_i \cup H_j$ is ki-pontos, ellentmondva H_i és H_j maximalitásának. Ezért $\mathcal{H}$ egy részpartíció. Felírva rá (4.4)-et: $\gamma \geq \sum_i (k - \delta_D(H_i)) = \sum_i \delta(H, s) \geq \delta(T_{E^o}, s) = \delta(V, s) = |E^o|$, amiből adódik az állítás. $\square$

Ugyanígy konstruáljuk a $D^i = (V + s, A \cup E^i)$ gráfot egy új s pont és s-ből V-be mutató új élek hozzávételével, úgy, hogy az alábbi tulajdonság igaz legyen:

$$\text{minden } \emptyset \neq H \subset V \text{ halmazra } \rho_{D^i}(H) \geq k \tag{4.7}$$

Az előzőhöz teljesen hasonlóan látható, hogy ha E^i tartalmazásra nézve minimális, akkor $|E^i| \leq \gamma$.

Vegyünk most hozzá D-hez egy új s pontot és tartalmazásra nézve minimális E^o és E^i élhalmazokat. Világos, hogy a $D' = (V + s, A + E^o + E^i)$ gráf V-ben k-élösszefüggő lesz. s-re illeszkedő új élek esetleges hozzávételével érjük el, hogy $\rho(s) = \delta(s)$ legyen. Az előbbi lemma szerint ez tehető úgy, hogy $\rho(s) = \delta(s) \leq \gamma$ legyen. A Mader-tétel szerint az s-re illeszkedő éleket párokban leemelhetjük úgy, hogy a gráf V-ben végig k-élösszefüggő maradjon. Ezzel az állítást beláttuk. □

4.1.1. Az algoritmus leírása

Az itt leírt bizonyítás könnyen algoritmussá alakítható.

1. Fázis Vegyünk fel egy új s pontot, és konstruáljunk olyan E^o élhalmazt, melyre $D^o = (V+s, A+E^o)$ kielégíti (4.6)-t és E^o tartalmazásra nézve minimális. Ez végrehajtható úgy, hogy minden pontból s-be felveszünk k párhuzamos élt, és közülük mohón addig hagyunk el, csupán (4.6) teljesülésére ügyelve. Azt, hogy egy él elhagyható-e, úgy tudjuk eldönteni, hogy minden $x \in V$ pont és s között az MFMC algoritmussal kiszámítjuk a minimális vágás értékét. Hasonlóan konstruáljuk meg E^i-t is. Vegyük hozzá D-hez s-et az E^o és E^i élhalmazokkal. Ha $|E^i| > |E^o|$ akkor vegyünk fel tetszőleges $|E^i| - |E^o|$ új s-be menő élt, ha pedig $|E^o| > |E^i|$, akkor $|E^o| - |E^i|$ új s-ből induló élt.

2. Fázis Válasszunk egy $e = st$ élt, és minden $u \in V$-re ellenőrízzük, hogy e és f leemelhetők-e, ahol f az (egyik) u-ból s-be menő él. Ezt szintén MFMC számításokkal láthatjuk. A Mader-tétel szerint kell legyen ilyen f. Emeljük őket le, és az új gráffal kezdjük újra a 2. fázist, egész addig, amíg $\rho(s) = \delta(s) = 0$ nem lesz.

Bonyolultság

Az 1. fázisban E^o meghatározása kn él hozzávételével kezdődik, akiket egyenként megvizsgálunk, hogy elhagyjunk-e. Egy él megvizsgálása $n - 1$ MFMC algoritmussal történik, tehát ennek összbonyolultsága $O(kn^2MC)$. Ennyi időbe telik E^i meghatározása is. A 2. fázist $\rho(s) \leq kn$ alkalommal kell megismételni. Egy ismétléskor $n-1$ u-t kell megvizsgálni, s mindegyikre e és f leemelhetőségének eldöntése $2(n-2)$ MFMC algoritmussal ellenőrízhető: minden $x \in V - t - u$-ra meg kell vizsgálnunk, hogy ha H egy $u\bar{x}$ vagy egy $x\bar{t}$ halmaz, akkor a $\delta(H) \geq k$ feltétel megmarad-e. Tehát a 2. fázis futási ideje $O(n^2MC)$. Ezzel az algoritmus futási ideje $O(kn^2MC)$.

4.2. 1-ST-élösszefüggővé növelés

Ebben a részben Steffen Enni [13] algoritmusát mutatjuk be az 1-ST-élösszefüggőség növelésére. Ezen algoritmus erősen kihasználja a $k = 1$ eset tulajdonságait, ezért további esetekre még nem sikerült általánosítani.

Először kimondjuk az 3.2.6 tételt a $k = 1$ speciális esetre. Egy H ST-halmazt akkor nevezünk pontosnak, ha $\delta(H) = 0$.

4.2.1. Tétel. *A $D = (V, A)$ irányított gráf adott $\emptyset \neq S, T \subseteq V$ halmazokra akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ S-ből T-be menő él hozzávételével 1-szeresen ST-élösszefüggővé, ha a páronként ST-független pontos ST-halmazok maximális száma legfeljebb γ.*

Nevezzük G-t *elemi gráf*nak, ha G egyszerű irányított páros gráf, melynek osztályai S és T, és G-nek az izolált pontokon kívül háromféle komponense lehet: (1) A komponens ponthalmaza egy $s \in S$ és egy $t \in T$ pont, melyekre $st, ts \in A(G)$ (2) a komponensben minden él S-ből T-be van irányítva (3) a komponensben minden él T-ből S-be van irányítva.

Ha két pont közt mindkét irányba megy él, akkor azt *dupla élpár*nak hívjuk, ha csak S-ből T-be (vagy T-ből S-be), azt *előre (hátra) él*nek.

Először elemi gráfokkal fogunk foglalkozni, majd megmutatjuk, hogy miként lehet tetszőleges gráf 1-ST-élösszefüggővé növelését visszavezetni egy elemi gráf 1-ST-élösszefüggővé növelésére.

4.2.2. Lemma. *Legyen $G = (S \cup T, A)$ elemi gráf, és τ azon S-ből T-be menő élek minimális száma, melyek hozzávételével G 1-ST-összefüggővé tehető. Ekkor*

1. *Ha minden él S-ből T-be mutat, akkor $\tau = |S||T| - |A|$.*
2. *Ha egyetlen dupla él van és nincsenek hátra élek, akkor $\tau = |S| + |T| - 2$*
3. *Minden más esetben $\tau = |S| + |T| - \min(|S_B|, |T_B|)$, ahol $|S_B|$ (illetve $|T_B|$) azon pontok száma S-ben (illetve T-ben), melyekre hátra él illeszkedik.*

Bizonyítás. (1): triviális.

(2): Legyen $s \in S$, $t \in T$ az a pár, melyek a dupla éllel van összekötve. Minden $s \neq u \in S$-re legyen $C_u = u + T - t$, és minden $t \neq v \in T$-re legyen $C_v = s + T - v$. Legyen $\mathcal{F} = \{C_u : u \in S - s\} \cup \{C_v : v \in T - t\}$. Ez páronként ST-független szoros ST-halmazokból áll, vagyis $\tau \geq |F| = |S| + |T| - 2$.

Másrészt, hozzávéve az $\{sv : v \in T - t\} \cup \{ut : u \in S - s\}$ éleket, 1-ST-összefüggő gráfot fogunk kapni.

(3): Először $h := |S| + |T|$ szerinti indukcióval megadunk egy $|S| + |T| - \min(|S_B|, |T_B|)$ elemű élhalmazt, melyet G-hez véve 1-ST-összefüggő gráfot kapunk. $h = 2$ esetén G csak egyetlen hátra élből áll, (különben az 1. vagy 2. eset feltétele teljesülne). Ez esetben az él megfordítottjának hozzávétele éppen a szükséges egy elemű növelő halmaz lesz. Ha $h > 2$, két esetet vizsgálunk:

A. eset Nincsenek sem előre élek, sem dupla élek, és nincsenek izolált pontok: minden pont hátra élekre illeszkedik.

Legyen $M = \{t_1 s_1, \ldots, t_n s_n\}$ egy nem bővíthető párosítás (azaz $s \in S - V(M)$, $t \in T - V(M)$ esetén nincs ts él), és legyenek a kimaradt pontok $s_{n+1}, \ldots, s_{n+k}$, illetve $t_{n+1}, \ldots, t_{n+l}$.

Az alábbi éleket vesszük hozzá a gráfhoz: minden $1 \leq i \leq n-1$-re vegyük be az $s_i t_{i+1}$ élt, valamint az $s_n t_1$ élt. A fedetlen csúcsokra vegyük be $1 \leq i \leq \min(k,l)$-re az $s_{n+i} t_{n+i}$ éleket. Továbbá ha $k > l$, akkor minden $i > l$-re vegyük be az $s_{n+i} t_{n+l}$ élt, ha pedig $l > k$, akkor minden $i > k$-ra az $s_{n+k} t_{n+i}$ élt.

Ez összesen $n + \max(k,l) = \max(|S|, |T|) = |S| + |T| - \min(|S_B|, |T_B|)$ él, mivel $S_B = S$, $T_B = T$. Hozzávételük után minden S-beli pontból minden T-beli pont elérhető lesz. Ez abból következik, hogy az új élek behúzása után az $V(M)$-beli pontok egy körön helyezkednek el, és - kihasználva azt, hogy az eredeti gráfban nem volt izolált pont és hogy az M nem bővíthető párosítás - minden $S - V(M)$-beli pontból elérhető M és M-ből elérhető bármely $T - V(M)$-beli pont. (Enni M-et maximális párosításnak választja, ehelyett azonban elég annyit feltételezni, hogy nem bővíthető.)

B. eset Ha van vagy izolált pont, vagy előre élek által feszített vagy dupla élhez tartozó komponens.

Legyen $C = \{s_1, \ldots, s_l, t_1, \ldots, t_k\}$ ezen komponensek valamelyike. Ha kitöröljük e komponenst, akkor $G' = G - C$ még mindig kielégíti a 3. eset feltételét, azaz az indukció szerint G'-nek van egy olyan F' növelése, melyre $|F'| = |S'| + |T'| - \min(|S'_B|, |T'_B|)$ (itt a vesszős mennyiségek G'-ben a megfelelő fogalmak). Világos, hogy $S_B = S'_B$ és $T_B = T'_B$. Legyen ts G'-ben egy él ($t \in T$, $s \in S$). Vegyük hozzá F'-höz az $\{s_i t\}_{i=1}^{l} \cup \{s t_j\}_{j=1}^{k}$ élhalmazt. Ezzel az új élek száma $|S'| + |T'| - \min(|S'_B|, |T'_B|) + l + k = |S| + |T| - \min(|S_B|, |T_B|)$ lesz.

A 3. eset bizonyításához kell még egy $|S| + |T| - \min(|S_B|, |T_B|)$ elemű ST-független pontos ST-halmazt. Csak a $|T_B| \geq |S_B|$ esetet vizsgáljuk, a másik esetben hasonló lesz a konstrukció. Legyen $S = S_D \cup S_F \cup S_B$, $T = T_D \cup T_F \cup T_B$, ahol S_D (T_D) a dupla élekre illeszkedő pontok, S_F (T_F) pedig az előre élekre illeszkedő vagy izolált pontok. Az alábbiak páronként ST-független pontos ST-halmazok lesznek, éppen a megfelelő számban:

- Minden $t_d \in T_D$-re legyen $s_d \in S_D$ t_d párja, és legyen $X = S_D - s_d + T - t_d$.
- Minden $s_d \in S_D$-re legyen $t_d \in T_D$ az s_d párja, és legyen $X = s_d + t_d + T_F + T_B$.
- Minden $t_f \in T_F$-re legyen $X = S_D + S_B + T - t_f$.
- Minden $s_f \in S_F$-re legyen $X = s_f + T_D + T_B$.
- Minden $t_b \in T_B$-re legyen $X = S_B + T - t_b$.

□

Az itt leírt bizonyítás egyben egyszerű algoritmust is ad elemi gráfban a minimális növelő élhalmaz megtalálására. Legyen most adott egy tetszőleges gráf. A következőkben megmutatjuk, hogy minden D digráf elemi gráffá alakítható úgy, hogy a maximális független rendszer mérete, $N(D)$ ne változzék.

0. lépés Úgy módosítjuk a gráfot, hogy $S \cap T = \emptyset$ legyen. Tekintsünk ehhez egy $v \in S \cap T$ pontot. Vegyünk fel egy új v' pontot, és kössük őt össze dupla éllel v'-vel. T-ből hagyjuk el v-t és vegyük be a helyére v'-t. $N(D)$ ezáltal nem változik, mivel az eredeti gráfban a v-t tartalmazó és az új gráfban a v'-t tartalmazó pontos ST-halmazok kölcsönösen megfeleltethetők egymásnak.

1. lépés Legyen D_{tr} a D tranzitív lezártja. Erre $N(D_{tr}) = N(D)$ nyilvánvaló.

2. lépés Legyen $D_{ST} = D_{tr}[S \cup T]$, azaz D_{tr} $S \cup T$ által feszített részgráfja. $N(D_{ST}) \geq N(D_{tr})$ abból következik, hogy ha $\mathcal{F}$ ST-független D_{tr}-ben, akkor $\mathcal{D}' := \{X \cap (S \cup T) : X \in \mathcal{F}\}$ ST-független rendszer lesz D_{ST}-ben.

A másik irányú egyenlőtlenséghez legyen $\mathcal{F}'$ D_{ST}-beli ST-független rendszer. Minden $X' \in \mathcal{F}'$-höz legyen $X := X' \cup \{v \in V - (S \cup T) : \exists vx \in A(D_{tr}), x \in X'\}$. Kihasználva G_{tr} tranzitív zártságát azt kapjuk, hogy X is pontos ST-halmaz, és az ilyen X-ek páronként ST-függetlenek.

3. lépés Tekintsük D_{ST} olyan erősen összefüggő komponenseit, melyek teljesen S-ben vagy teljesen T-ben helyezkednek el. Húzzuk össze ezeket egy-egy ponttá; legyen az így kapott gráf D'. $N(D') = N(D_{ST})$ abból következik, hogy egy 0-kifokú halmaz nem metszhet egy erősen összefüggő komponenst. D' S illetve T által feszített részgráfjai aciklikusak lesznek; az egyedüli körök egy S-beli és egy T-beli pont közti dupla élek.

4. lépés Képezzük D'-ből H-t úgy, hogy elhagyjuk az olyan $s \in S$ csúcsokat, amelyekre van $ss' \in A(D')$ él, $s' \in S$, illetve az olyan $t \in T$ csúcsokat, melyekre van $t't \in A(D')$ él, $t' \in T$. Legyen $S_H = S \cap V(H)$, $T_H = T \cap V(H)$.

$N(H) \leq N(D')$ belátásához legyen $\mathcal{F}$ egy ST-független rendszer D'-ben, és legyen $X \in \mathcal{F}$. Azt állítjuk, hogy $X \cap V(H)$ $S_H T_H$-pontos halmaz lesz H-ban. Ha ezt belátjuk, készen vagyunk, mivel ha $X, Y \in \mathcal{F}$ ST-függetlenek, akkor $X \cap V(H)$ és $Y \cap V(H)$ $S_H T_H$-függetlenek lesznek.

$X \cap V(H)$ természetesen pontos marad, azt kell csak látni, hogy $X \cap S_H \neq \emptyset, T_H - X \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy $X \cap S_H = \emptyset$. Legyen $s \in X \cap S$. Ekkor $s \notin V(H)$, tehát amiatt, hogy D' S-re megszorítva tranzitív és aciklikus, ezért kell legyen olyan $s' \in S_H$, melyre $ss' \in A(D')$. Feltételezésünk szerint $s' \notin X$, vagyis $\delta(X) \geq 1$, ami ellentmond annak, hogy pontos volt. $T_H - X \neq \emptyset$ ugyanígy látható be.

Az $N(D') \leq N(H)$ irányhoz legyen $\mathcal{F}'$ egy $S_H T_H$-független család H-ban. Minden $X' \in \mathcal{F}'$-höz legyen $X := X' \cup \{t \in T : \exists t' \in T_H - X' : t't \in A(D')\}$. Álljon $\mathcal{F}$ az ilyen X halmazokból. Szintén abból, hogy D' T-re megszorítva tranzitív és aciklikus, adódik hogy $\delta(X) = 0$, tehát X pontos ST-halmaz. Azt kell belátni, hogy ha $X, Y \in \mathcal{F}$, akkor ők ST-függetlenek. Tegyük fel, hogy nem ST-függetlenek, vagyis van $s \in S \cap X \cap Y$ és $t \in T - X - Y$ pontpár.

$s \in S_H$ következik abból, hogy a definíció szerint $X \cap S, Y \cap S \subseteq S_H$. Ha $t \notin S_H$, akkor kell legyen egy $t' \in T_H$ pont, melyre $t't \in A(D')$. Azt állítjuk, hogy $t' \in T_H - X' - Y'$. Ellenkező esetben, azaz $t' \in X' \cup Y'$ esetén ugyanis $t \in X \cup Y$ lenne.

Tehát $s \in S_H \cap X' \cap Y'$, $t' \in T_H - X' - Y'$ ellentmondásban X' és Y' $S_H T_H$-függetlenségével.

4.2.3. Lemma. *Tetszőleges D kiindulási digráf esetén a végül kapott H elemi gráf lesz.*

Bizonyítás. H mindenesetre páros gráf. Tegyük fel, hogy nem elemi. Ez azzal ekvivalens, hogy van egy $t_1 s t_2$ út, $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, $s \in S$, vagy pedig van egy $s_1 t s_2$ út, $s_1, s_2 \in S$, $s_1 \neq s_2$, $t \in T$. A szimmetria miatt elég az előbbit vizsgálni. Az 1. lépésben a gráfot tranzitívan lezártuk, tehát behúztuk a $t_1 t_2$ élt. A 3. lépésben t_1-et és t_2-t nem húzhattuk össze. Ekkor azonban a 4. lépés során t_2-t törölnünk kellett volna. $\square$

Bonyolultság

A 0-5. lépések megadják az algoritmust, amivel tetszőleges $D = (V, A)$ digráfot $H = (S \cup T, A')$ elemi gráffá alakíthatunk. A tranzitív lezárt $O(nm)$ időben megtalálható, az erősen összefüggő komponensek pedig mélységi kereséssel $O(n+m)$ idő alatt. Összesen ez a redukció $O(nm)$ időben elvégezhető. H-ban a növelő élek optimális E_0 halmaza a 4.2.2. lemma 1. esetében $O(|S||T|) = O(n^2)$ időben megtalálható. A 2. esetben $O(|S| + |T|) = O(n)$ idő szükségeltetik, a 3. esetben a tartalmazásra nézve maximális párosítást megtalálni $O(m)$ idő, és a többi lépés $O(n)$ időben végezhető. Összesen tehát az E_0 megtalálása $O(n^2)$ időt vesz igénybe. Ebből egyszerűen előállíthatjuk D egy optimális növelő E élhalmazát: Minden $x \in V(H)$-ra a redukció során jegyezzük meg az x egyik ősét D-ben, legyen ez $a(x) \in V(D)$. Egy $xy \in E_0$ élre legyen $a(x)a(y)$ E-ben egy él. Vagyis az algoritmus futási ideje $O(\max(n^2, nm))$.

4.3. Útgenerálási algoritmus

Ebben a fejezetben Győri tételére ismertetjük Frank András algoritmusát, először a súlyozatlan problémára (3.2.7. tétel, [8]), majd a súlyozott esetre (3.2.11. tétel, [9]).

A 3.2.9. lemma és a 3.2.7. bizonyításában leírtaknak megfelelően a sovány reprezentált utak $\mathcal{L}_\mathcal{U}$ rendszerének egy minimális lefogása $\mathcal{U}$ egy minimális generátorrendszerének fog megfelelni. Emiatt elég a sovány elemekkel foglalkoznunk. Megadjuk $\mathcal{L}_\mathcal{U}$ egy $\tau(\mathcal{L}_\mathcal{U})$ elemű minimális lefogását és egy ugyanannyi, $\nu(\mathcal{L}_\mathcal{U})$ elemű maximális független részét.

Az algoritmus három fázisban megy végbe. Az első fázisban kiválasztunk $\mathcal{L}_\mathcal{U}$-ból egy $\mathcal{I}$ maximális vázat. A második fázisban a Dilworth-tételt alkalmazzuk: az ismert algoritmussal meghatározzuk $\mathcal{I}$-nak egy $\mathcal{K}$ maximális méretű páronként nem összehasonlítható elemekből álló részét és egy minimális láncfelbontását. A váztulajdonság miatt $\mathcal{K}$ elemei páronként függetlenek lesznek: ő lesz a duális optimális megoldás. A láncfelbontás $\mathcal{I}$ elemeit lefogó F élrendszernek felel meg. A harmadik fázis során F-et alakítjuk úgy át, hogy a mérete nem nő, és végül lefogja $\mathcal{L}_\mathcal{U}$ összes tagját.

1. Fázis A P élein az $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sorrendben fogunk végigmenni, úgy, hogy közben $\mathcal{L}_\mathcal{U}$ tagjait két csoportba osztjuk. $\mathcal{I}$ lesz a váz, $\mathcal{T}$ pedig a tiltott párok csoportja. Kezdetben mindkét csoport üres.

Az i. lépésben tekintsük az összes $(I_1, e_i), (I_2, e_i), \ldots, (I_k, e_i)$ szoros párt. Mivel e párok soványok, így az I_j utak élhalmazai nem tartalmazhatják egymást, ezért feltehetjük, hogy $b(I_1) < \cdots < b(I_k)$, és $j(I_1) < \cdots < j(I_k)$. Mindegyik nem tiltott (I_j, e_i) szoros párt bevesszük $\mathcal{I}$-be, és letiltjuk az olyan szoros párokat, akiket még nem vizsgáltunk és akik keresztezik őt: azaz az összes olyan (I_h, e_l) párt, akikre $j < h \leq k$, $l > i$, $e_l \in I_j$.

Világos, hogy a végül kapott $\mathcal{I}$ tartalmazásra nézve maximális váz lesz: minden $(I, i) \notin \mathcal{I}$ párra lesz $\mathcal{I}$-nek egy (I, i)-t keresztező eleme.

2. Fázis A Dilworth algoritmussal meghatározzuk $\mathcal{I}$-nek egy $\mathcal{K}$ maximális méretű, páronként független elemekből álló részét és egy minimális láncfelbontásnak megfelelő $\mathcal{I}$-t lefogó F élrendszert. Ezekre $|\mathcal{K}| = |F|$ fog teljesülni.

3. Fázis Ha F lefogja $\mathcal{L}_\mathcal{U}$ valamennyi tagját, akkor készen vagyunk. Ha nem ez a helyzet, válasszunk egy olyan (I, i) még nem lefogott párt, melyre $|(I, i)^-|$ minimális. $(I, i) \notin \mathcal{I}$, kell legyen tehát olyan $(K, k) \in \mathcal{I}$, melyre $k, i \in I \cap J$, $b(K) < b(I)$, és k megelőzi i-t. Válasszuk (K, k)-t úgy, hogy $(K, k)^+$ minimális legyen.

$(I, i)^-$ minimalitása miatt F lefogja (I, k)-t.

4.3.1. Lemma. $(K, i) \in \mathcal{I}$.

Bizonyítás. Ha (K, i)-t letiltottuk, úgy kellett legyen olyan $(J, e) \in \mathcal{I}$, akire $e, i \in K \cap J$, $b(J) < b(K)$, és e megelőzi i-t. Ha e megelőzné k-t, akkor (K, k) és (J, e) keresztezők lennének, hiszen $k, e \in K \cap J$. Tehát e vagy egyenlő k-val, vagy követi. Ekkor $(J, e) \in \mathcal{I}$, $e, i \in I \cap J$, $b(J) < b(I)$ és e megelőzi i-t. Teljesül továbbá $(J, e)^+ \subset (K, k)^+$, ami pedig $(K, k)^+$ minimális választásának mond ellent. □

Eszerint F egy $f_1 = x_1 y_1$ éle lefogja (I, k)-t, egy $f_2 = x_2 y_2$ éle pedig lefogja (K, i)-t. Legyen $f_1' = x_1 y_2$ és $f_2' = x_2 y_1$. Módosítsuk F-et F'-re úgy, hogy az f_1 és f_2 éleket kicseréljük f_1'-re és f_2'-re. Mivel f_1 és f_2 nem fogják le (I, i)-t, a szóban forgó pontokról az alábbit tudjuk:

$$b(K) \leq x_2 < b(I) \leq x_1 \leq b(k) < y_1 \leq b(i) < y_2 \leq j(K) < j(I)$$

Azt akarjuk, hogy F' szigorúan több sovány párt fogjon le, mint F. E felírásoból látszik, hogy f_1' lefogja (I, i)-et, akit F nem fogott le. Az alábbi lemmát kell tehát még belátni:

4.3.2. Lemma. *Ha F lefogott egy (I', i') sovány párt, akkor ezt F' is lefogja.*

Bizonyítás. Baj csak akkor lehet, ha (I', i')-t F-nek csak egyetlen éle fogta le, és ez f_1 volt vagy f_2. Minden más esetben F' triviálisan le fogja őt fogni.

Ha ez az egyetlen él f_2, akkor a fenti felírásból következik, hogy vagy f_1', vagy f_2' fedni fogja őt. Ha pedig f_1 az egyetlen (I', i')-t lefogó él, akkor tegyük fel indirekten, hogy sem f_1', sem f_2' nem fogja le őt. Abból, hogy f_1' nem fogja le, következik, hogy $j(I') < y_2$, abból pedig, hogy f_2 nem fogja ke, azt kapjuk, hogy $b(I') > x_2$. Ekkor azonban $k \in I' \subset K$ ellentmondásban azzal, hogy (K, k) sovány pár volt. □

4.3.1. A súlyozott eset

Az előbbi algoritmust Frank András a 3.2.11. tételre is általánosította ([9]). Legyen adott egy w nemnegatív egész értékű súlyozás az éleken. Az algoritmus megadja $\mathcal{U}$-nak egy minimális w-generátorát, és reprezentált utaknak egy ugyanakkora súlyú független rendszerét. (Ezen fogalmak definíciói a 3.2.5 fejezet végén találhatóak.) Legyen E^* az összes $v_i v_j$ $(i < j)$ élek halmaza. Legyen F egy (esetleg többszörös éleket is tartalmazó) élrendszer. Ezt egy $z : E^* \to Z_+$ vektorban fogjuk tárolni, ahol $z(e)$ azt fejezi ki, hogy az e él hányszor szerepel F-ben. Legyen $|z| := \sum_{e \in E^*} z(e)$.

Jelöjük $\rho_z(I, f)$-fel az $(I, f)^-$-ból $(I, f)^+$-ba menő F-beli élek számát. Legyen az (I, f) pár súlya $w(I, f) = w(f)$. Mondjuk azt, hogy z w-fedi az (I, f) párt, ha $\rho_z(I, f) \geq w(I, f)$. Legyen az (I, f) pár z-hiánya $def(I, f) = (w(I, f) - \rho_F(I, f))^+$. $def(I, f) > 0$ esetén nevezzük (I, f)-et hiányos párnak.

Az algoritmus a sovány reprezentált utak $\mathcal{L}_\mathcal{U}$ rendszerének egy z minimális w-fedését fogja megadni (azaz ami minden elemet w-fedni fog). A 3.2.9 lemma könnyen láthatóan érvényben marad erre az esetre is, tehát z $\mathcal{U}_r$-t is w-fedni fogja. Innen a szokásos módon kaphatjuk $\mathcal{U}$-nak egy w-generátorát: minden $xy \in E^*$ élhez $z(xy)$ példányban vegyünk egy olyan utat, aminek a kezdőpontja x, a végpontja y. Szükségünk lesz az alábbi lemmára:

4.3.3. Lemma. *Legyenek (X, i) és (Y, j) keresztező sovány párok. Ha a (K, k) sovány pár egyiküket sem keresztezi, akkor nem keresztezi sem $(X, i) \vee (Y, j)$-t, sem $(X, i) \wedge (Y, j)$-t.*

Ezt rögtön egy kicsit általánosabb esetben látjuk be:

4.3.4. Lemma. *Legyenek $X = (X^-, X^+)$, $Y = (Y^-, Y^+)$ keresztező párok, $K = (K^-, K^+)$ egy további pár. Tegyük fel, hogy K nem keresztezi sem X-et, sem Y-t. Ekkor nem fogja keresztezni $X \vee Y$-t és $X \wedge Y$-t sem.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy K összehasonlítható mind X-szel, mind Y-nal. $K \preceq X$ és $Y \preceq K$ nem lehet, mivel ebből $Y \preceq X$ adódna, ellentmondásban azzal, hogy keresztező párok. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $K \preceq X, Y$. Ekkor azonban $K \preceq X \vee Y$, $K \preceq X \wedge Y$, amiből az állítás következik.

Másodszor vizsgáljuk azt az esetet, amikor K mind X-től, mind Y-tól független. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $X^- \cap K^- = \emptyset$. Ekkor $K^- \cap (X^- \cap Y^-) = \emptyset$, vagyis $X \wedge Y$ mindenesetre független K-tól. Ha $Y^- \cap K^- = \emptyset$, akkor $K^- \cap (X^- \cup Y^-) = \emptyset$ biztosítja $X \vee Y$ és K függetlenségét; ha pedig $Y^+ \cap K^+ = \emptyset$, akkor ugyanez $K^+ \cap (X^+ \cap Y^+) = \emptyset$ miatt lesz igaz.

Tegyük most fel, hogy K pontosan az egyiküktől független. Legyen mondjuk független X-től, és legyen Y-nal összehasonlítható. A szimmetria miatt föltehetjük, hogy $X^- \cap K^- = \emptyset$, amiből ismét az fog következni, hogy $X \wedge Y$ független K-tól. Mivel K és Y összehasonlíthatók, X és Y pedig keresztezők, ezért $X^- \cap K^- = \emptyset$ csak úgy lehet, ha $K \preceq Y$. Viszont $Y \preceq X \vee Y$, tehát $K \preceq X \vee Y$, ismét készen vagyunk. □

A minimális w-fedéssel együtt az algoritmus meg fog adni egy ugyanakkora összsúlyú független elemekből álló rendszert is. A három fázis az előző algoritmus fázisainak fog megfelelni:

1. fázis Egy $\mathcal{I}$ váz meghatározása. Most az e_i élek w-súlya szerinti csökkenő sorrendben megyünk végig. Azaz egy olyan teljes rendezését tekintjük $\mathcal{L}_\mathcal{U}$-nak, melyben (K, k) megelőzi (J, e)-t, amennyiben $w(k) = w(K, k) > w(J, e) = w(e)$.

Ebben a sorrendben mohón építjük fel az $\mathcal{I}$ vázat: a soron következő elemet akkor vesszük be, ha nem keresztez egyetlen addig beválasztott elemet sem.

Legyenek a végső $\mathcal{I}$ elemei $(K_1, k_1), (K_2, k_2), \ldots, (K_N, k_N)$, a beválasztás sorrendjében. Minden $(J, j) \in \mathcal{L}_\mathcal{U} - \mathcal{I}$-re van $\mathcal{I}$-nak egy (J, e)-t keresztező eleme. Legyen $l = t(J, j)$ a legkisebb olyan index, amelyre (K_l, k_l) keresztezi (J, e)-t.

2. fázis A 2.3.2. súlyozott Dilworth-algoritmussal meghatározzuk $\mathcal{I}$-nak egy $\mathcal{K}$ maximális súlyú páronként nem összehasonlítható elemekből álló részét és egy minimális súlyozott láncfelbontásnak megfelelő z fedést úgy, hogy $w(\mathcal{I}) = |z|$.

3. fázis Ha F w-fedi $\mathcal{L}_\mathcal{U}$-t is, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor z-t úgy fogjuk változtatni, hogy a $|z|$ ne nőjön, és $\mathcal{L}_\mathcal{U}$ elemeinek z-hiány összege csökkenjen.

Ehhez tekintsük az a (I, i) hiányos sovány párt, melyre $t(I, i)$ a legnagyobb. Legyen $(K, k) := (K_{t(I,i)}, k_{t(I,i)})$. (I, i) és (K, k) tehát keresztezni fognak.

Feltehetjük, hogy k megelőzi i-t. (Ha nem így volna, fordítsuk meg a P út irányítását és vele az összes élt és minden (X, x)-re cseréljük fel $(X, x)^-$-t és $(X, x)^+$-t.)

E feltételezés mellett $(K, i) = (I, i) \vee (K, k)$ és $(I, k) = (I, i) \wedge (K, k)$ A 3.2.8 lemma szerint $\mathcal{L}_\mathcal{U}$ keresztező rendszer. Ígyhát (K, i) és (I, k) is sovány párok lesznek.

4.3.5. Állítás. *F w-fedi mind (K, i)-t, mind (I, k)-t.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $def(I, k) > 0$ (a bizonyítás ugyanígy fog menni (K, i)-re). $\mathcal{I}$ minden elemét lefogtuk, ezért $(I, k) \notin \mathcal{I}$. (I, i) választása miatt $l' = t(I, k) \leq t(I, f)$. Minthogy $(I, k) \preceq (K, k)$, ezért itt nem állhat fenn egyenlőség. Tehát $(K_{l'}, k_{l'})$ nem keresztezi sem (K, k)-t (mindketten $\mathcal{I}$ elemei), és $t(I, i)$ definíciója szerint $t(I, i)$-t sem. Ez azonban ellentmond a 4.3.3 lemmának. □

4.3.6. Állítás. *Van olyan $f_1 = x_1 y_1 \in E^*$ él, melyre $x_1 \in (I, i)^- \cap (K, k)^-$, $y_1 \in (I, i)^- \cap (K, k)^+$, és $z(f_1) > 0$. Van továbbá egy olyan $f_2 = x_2 y_2 \in E^*$ él, melyre $x_2 \in (K, k)^- - (I, i)^-$, $y_2 \in (I, i)^+ \cap (K, k)^+$ és $z(f_2) > 0$.*

Bizonyítás. Az 1. fázis során (I,i)-t (K,k) miatt nem választottuk be. Így a sorrendben (K,k) megelőzte (I,i)-t, azaz $w(I,k) = w(k) \geq w(i) = w(I,i)$. Tudjuk, hogy z nem w-fedi (I,i)-t, fedi azonban (I,k)-t. Kihasználva azt a feltevést, hogy k megelőzi i-t, következik a kívánt f_1 létezése. Hasonlóan, mivel z w-fedi (K,i)-t és $w(I,i) = w(i) = w(K,i)$, kapjuk a kívánt f_2 létezését. □

A **3. fázis**ban tehát a következőt fogjuk csinálni. Kiválasztjuk azt az (I,i)-t, amelyre $t(I,i)$ maximális, és z-t z'-re változtatjuk az alábbi módon. Legyen $\delta := \min(z(f_1), z(f_2))$, $f_1' = x_1y_2$, $f_2' = x_2y_1$. Legyen $z'(f_1) = z(f_1) - \delta$, $z'(f_2) = z(f_2) - \delta$, $z'(f_1') = z(f_1') + \delta$, $z'(f_2') = z(f_2') + \delta$, egyébként pedig legyen $z'(f) = z(f)$. Nevezzük ezt a lépést (I,i) átkeresztezésének.

f_1 és f_2 nem fedte, azonban f_1' fedni fogja (I,i)-t, ezért világos, hogy $def(I,i)$ csökken. Azt kell hát még megmutatnunk, hogy

4.3.7. Lemma. *Minden (I',i') sovány párra $\rho_{z'}(I',i') \geq \rho_z(I',i')$.*

Ennek bizonyítása szó szerint megegyezik a 4.3.2 lemma. bizonyításával.

Tehát egy ilyen lépés során az elemek z-hiányösszege szigorúan csökken, azaz véges sok lépésen belül az algoritmus véget ér.

Bonyolultság

Itt most f_1-et és f_2-t a megadott feltételek mellett tetszőlegesen választhattuk. Ahhoz azonban, hogy erősen polinomiális algoritmust kapjunk, még az alábbi kikötést tesszük: Legyen f_1 minimális abban az értelemben, hogy az x_1y_1 út a lehető legrövidebb, f_2 pedig maximális, azaz az x_2y_2 út a lehető leghosszabb.

4.3.8. Állítás. *Egy adott (I,i)-t legfeljebb $\binom{n}{2}$ alkalommal keresztezünk át.*

Bizonyítás. Egy átkeresztezés során vagy $z(f_1)$, vagy $z(f_2)$ nullára csökken. f_1 és f_2 minimális illetve maximális választása okán (I,i) további átkeresztezései során $z(f_1)$ és $z(f_2)$ értéke nem nőhet. Ezért legfeljebb $|E^*| = \binom{n}{2}$ átkeresztezés után (I,i) z-hiánya 0-ra csökken, azaz fedve lesz. □

4.3.9. Állítás. $\mathcal{L}_\mathcal{U} \leq n^2$.

Bizonyítás. Minden $e \in P$ élre és $v_i \in P$ csúcsra legfeljebb egy olyan sovány (J,e) pár lehet, melyre $b(J) = v_i$. Ebből az következik az állítás. □

Ezen állításokból következik, hogy legfeljebb n^4 átkeresztezési lépés lehet.

$\mathcal{L}_\mathcal{U} \leq n^2$ miatt ez az első és a második fázis bonyolultságára is felső becslés, azonban a második fázis bonyolultsága $O(n^6)$ is lehet.

Benczúr A. András, Jörg Förster és Király Zoltán [10] belátták, hogy egy váznak legfeljebb $O(n\log n)$ eleme lehet. Ennek alapján $O(nm + n^2\sqrt{n\log n})$ becslés adódik a 2. fázis bonyolultságára. A legjobb becslésük a súlyozatlan esetre $O(n^{2.5}log^{3/2}n)$.

További általánosítások

Az algoritmus elmondható szinte szó szerint ugyanígy arra az esetre, amikor P nem út, hanem kör. Frank András további általánosítása az, hogy ha a w élsúlyozás mellett adott a pontokon egy d_b és d_j súlyozás. Egy $e = (u, v)$ él behúzásának költsége $d_b(u) + d_j(v)$, és feladatunk az $\mathcal{U}$ legolcsóbb w-fedésének megtalálása. Ehhez mindössze a 2. fázist kell megváltozatni, ahol a minimális költségű súlyozott Dilworth algoritmust kell használni. A 3. fázisban az átkeresztezések során az összköltség nem változik.

4.4. 0-1 értékű szupermoduláris függvény fedése

A 4.3. részben leírt (súlyozatlan) útfedési algoritmus gondolatmenete általánosítható a Szupermoduláris Fedési Tétel azon 3.1.6 esetére, amikor p 0-1 értékű:

4.4.1. Tétel. *Ha $\mathcal{P}$ halmazpárok keresztező rendszere, akkor a $\mathcal{P}$-t lefogó élek minimális $\tau(\mathcal{P})$ száma egyenlő lesz a $\mathcal{P}$ páronként független elemeinek maximális $\nu(\mathcal{P})$ számával.*

Ennek legfontosabb alkalmazása az, amikor adott egy $D = (V, A)$ $k-1$-szeresen ST-összefüggő digráf, akit minimális számú él hozzávételével k-szorosan ST-összefüggővé szeretnénk tenni. Ekkor az egyirányú párok $\mathcal{P}$ családja keresztező rendszer lesz. Az itt leírt algoritmus Frank András [11] cikkének továbbgondolásából származik. Először leírjuk az algoritmust arra a speciális esetre, amikor $k-1$-összefüggő gráfot növelünk k-összefüggőre, ezt követi majd az általános eset leírása.

Legyen $\mathcal{F}$ keresztező rendszer, és egy $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ halmazra legyen

$$\mathcal{F} \div K := \{X \in \mathcal{F} : \ X \text{ nem keresztezi } K\text{-t}\}$$

$$\mathcal{F} \div \mathcal{K} := \{X \in \mathcal{F} : \ X \text{ nem keresztezi } \mathcal{K} \text{ egy elemét sem}\}$$

Az alábbi két lemma közül az első a 4.3.4. lemma közvetlen következménye, a második pedig egyszerűen belátható.

4.4.2. Lemma. *$\mathcal{F} \div \mathcal{K}$ is keresztező rendszer*

4.4.3. Lemma. *Ha az f él lefogja $X \vee Y$-t vagy $X \wedge Y$-t, akkor f lefogja X-et vagy Y-t is.*

Nevezzünk egy X párt *kövérnek*, ha létezik olyan tőle különböző Y pár, hogy $Y^- \subseteq X^-$ és $Y^+ \subseteq X^+$. A nem kövér párokat hívjuk soványnak. Legyen $K \in \mathcal{F}$ egy sovány elem, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \div K$, és F' $\mathcal{F}'$ egy fedése. $f_1' = x_1y_1$, $f_2' = x_2y_2$ legyenek F' elemei, és legyen

$$f_1 := x_1y_2 \text{ és } f_2 := x_2y_1$$

$$F'' := F' - \{f_1', f_2'\} + \{f_1, f_2\}$$

Mondjuk azt, hogy F'' F'-ből f_1' és f_2' átkeresztezésével keletkezik. Nevezzük ezt *javító átkeresztezés*nek, ha F'' szigorúan több elemét fedi le $\mathcal{F}$-nek, mint F' tette. Az algoritmus lényege az alábbi lemma lesz:

4.4.4. Lemma. *Legyen $\mathcal{F}$ keresztező rendszer, K egy sovány eleme, és F' $\mathcal{F} \div K$ egy fedése. Ha F' nem fedi le $\mathcal{F}$ minden elemét, akkor van javító átkeresztezés.*

Bizonyítás. Válasszuk az F' által nem fedett $X, Y \in \mathcal{F}$-et úgy, hogy $X \preceq Y$, továbbá X minimális abban az értelemben, hogy $X' \prec X$, $X' \in \mathcal{F}$ esetén F' fedi X'-t, és Y ugyanilyen értelemben maximális.

Mivel F' nem fedi X-et és Y-t, ezért $X, Y \in \mathcal{F} - \mathcal{F}'$, azaz mindketten keresztezik K-t. Ezért $X \cap K \prec X$ és $Y \cup K \succ Y$. X minimalitása miatt $X \cap K$-t fedni fogja F' egy $f_1' = x_1y_1$ éle. Minthogy F' nem fedi X-et, ezért $x_1 \in X^- \cap K^-$, $y_1 \in K^+ - X^+$. Hasonlóan, $Y \cup K$-t egy olyan $f_2' = x_2y_2$ él fogja fedni, amire $x_2 \in K^- - Y^-$ és $y_2 \in K^+ \cap Y^+$. Legyen f_1, f_2, F'' az, amit fentebb definiáltunk.

Megmutatjuk, hogy $\{f_1', f_2'\}$ átkeresztezése javító átkeresztezés lesz. Minthogy F'' fedi X-et, F' pedig nem, ezért csak azt kell megmutatni, hogy minden olyan elemet, amit F' fedett, azt F'' is fedni fog.

Tegyük fel indirekten, hogy van egy F' által fedett, de F'' által nem fedett L elem. Egy $F' - \{f_1', f_2'\}$-beli él nem fedheti őt, és az sem lehet, hogy mind f_1', mind f_2' fedje. Tehát L-et F'-ben pontosan egy él fedi, méghozzá vagy f_1', vagy f_2'. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy f_1' fedi L-et. (Ezután a feltevés után már csak Y-nal dolgozunk, X-re nem lesz szükségünk.)

4.4.5. Állítás. $Y^+ \cap L^+ \neq \emptyset$

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy $Y^+ \cap L^+ = \emptyset$. Tekintsük a $Z := [(L \wedge K) \vee Y] \wedge K$ elemet. Mivel $Y^+ \cap L^+ = \emptyset$, ezért $Z^+ = K^+$ és $Z^- \subseteq K^- - x_2 \subset K^-$, ellentmondva annak, hogy K sovány. □

Eszerint Y és L nem függetlenek. Nem is összehasonlíthatók, mivel $y_2 \in Y^+ - L^+$ és $y_1 \in L^+ - Y^+$. Ezért $Y \vee L \succ Y$. Y maximalitása miatt $Y \vee L$ fedve van F' egy f elemével. Ez mind f_1'-től, mind f_2'-től különbözik, mivel y_1 és y_2 nincsenek benne $L^+ \cap Y^+$-ban. Tehát $f \in F'' \cap F'$, ami miatt f sem Y-t, sem L-et nem fedheti. Ez azonban ellentmond a 4.4.3 lemmának □

Tegyük fel, hogy adott egy sovány elemekből álló $\mathcal{I}$ váz. Ebben a Dilworth algoritmus egy minimális F_0 fedést és egy ugyanennyi elemű maximális független rendszert ad. Ha F_0 fedi $\mathcal{P} \div \mathcal{I}$-t, akkor a 4.4.4. lemma alapján elő tudjuk állítani a teljes $\mathcal{P}$ poset ugyanannyi elemű fedését. Egy nem bővíthető vázat hívjunk *teljes váznak*. Ha $\mathcal{I}$ teljes váz, akkor a feltétel teljesülni fog. Általában sajnos nem lesz igaz, hogy létezik sovány elemekből álló teljes váz. Az alábbi speciális esetben azonban igen, mivel minden elem sovány lesz.

4.4.1. Összefüggőség növelése eggyel

Legyen $D = (V, A)$ $(k-1)$-összefüggő irányított gráf. Álljon most $\mathcal{P}$ a D azon X egyirányú párjaiból, melyekre $p_{def}(X) = 1$. Könnyen látható, hogy $\mathcal{P}$ keresztező rendszer. Mivel minden ilyen $X \in \mathcal{P}$-re $|V - (X^- \cup X^+)| = k - 1$, ezért $\mathcal{P}$ minden eleme sovány.

Teljes váz építése

Egy $\mathcal{I}$ vázat nevezzünk *alváz*nak, ha $\forall\ K \in \mathcal{I}$, $Z \prec K$, $Z \notin \mathcal{I}$ esetén $\mathcal{I} + Z$ nem váz.

4.4.6. Állítás. *Az összes $\preceq$-ra nézve legnagyobb és legkisebb pár benne van minden teljes vázban.*

Bizonyítás. X és Y keresztező párokra $X \vee Y$ illetve $X \wedge Y$ $\preceq$-re nézve szigorúan kisebbek ill. nagyobbak X-nél és Y-nál is. Tehát egy legnagyobb vagy legkisebb pár nem keresztezhet senkit. □

Ennek következményeként egy alváz pontosan akkor teljes, hogyha tartalmazza az összes legnagyobb párt. Egyrészt az előző állítás szerint az összes ilyet tartalmaznia kell. Másrészt, ha az összeset tartalmazza és bővíthető, akkor nem lehet alváz, mert tetszőleges párnál van nagyobb a legnagyobb párok közt.

Legyen $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}$ alváz és $M \in \mathcal{P} - \mathcal{I}$ egy legnagyobb pár. Legyen

$$\mathcal{I}' = \{L \in \mathcal{I} | L \preceq M\};\ \mathcal{I}'' = \mathcal{I} - \mathcal{I}'$$

Azt mondjuk, hogy $K \in \mathcal{P} - \mathcal{I}$, $K \preceq M$ *M-illik* $\mathcal{I}$-hez, ha független $\mathcal{I}''$ minden elemétől és $\mathcal{I}'$ minden elemét vagy tartalmazza, vagy független tőle. Ha egyértelmű, hogy mi az M, akkor röviden azt mondjuk, hogy K illik $\mathcal{I}$-hez.

Megjegyzés Maga M például egy $\mathcal{I}$-hez illő pár lesz.

4.4.7. Lemma. *Ha $\mathcal{I}$ alváz, $K \in \mathcal{P} - \mathcal{I}$, $K \preceq M$, akkor ekvivalens az alábbi két állítás: (i) K illik $\mathcal{I}$-hez, (ii) $\mathcal{I} + K$ váz.*

Bizonyítás. $(i) \Rightarrow (ii)$ következik a definícióból. A másik irányban az alváz definíciója miatt világos, hogy semmilyen $L \in \mathcal{I}$-re nem lehet $K \prec L$. Azt kell még látni, hogy semmilyen $L \in \mathcal{I}''$-re nem lehet $L \prec K$. Ez pedig azért igaz, mert belőle $L \prec K \preceq M$ miatt ellentmondásra jutnánk $\mathcal{I}''$ definíciójával. $\square$

4.4.8. Következmény. *Ha $K \preceq M$ egy legkisebb $\mathcal{I}$-hez illő pár, akkor $\mathcal{I} + K$ is alváz.*

Bizonyítás. $\mathcal{I} + K$ mindenesetre váz. Ha nem lenne alváz, az úgy lenne lehetséges, ha volna egy $J \prec K \preceq M$, akire $\mathcal{I} + J$ váz. $J \preceq M$ és így használhatjuk az előző lemmát: eszerint J is illik $\mathcal{I}$-hez. Ez azonban ellentmondás. $\square$

Megvalósítás

Teljes alváz építését tehát úgy tudjuk kivitelezni, hogy kiindulunk az üres halmazból. Ha egy lépésben $\mathcal{I}$ tartalmazza az összes legnagyobb elemet, akkor készen vagyunk. Ha viszont létezik $M \in \mathcal{P} - \mathcal{I}$, akkor az előző lemma alapján $\mathcal{I}$ bővíthető úgy, hogy alváz maradjon. Ehhez először is meg kell találnunk a legnagyobb elemeket.

Tartalmazásra nézve legszűkebb és legbővebb minimális $s\bar{t}$ vágások keresése hálózatban

Legyen a $H = (U, E)$ hálózat élein adva egy $g \geq 0$ kapacitásfüggvény.

4.4.9. Lemma. *Ha adott egy x maximális méretű st folyam, akkor egy halmaz pontosan akkor minimális vágás, ha minden kilépő e élre $x(e) = g(e)$ és minden belépő e élre $x(e) = 0$*

Ebből világos, hogy két minimális $s\bar{t}$ vágás metszete és uniója is minimális $s\bar{t}$ vágás, tehát létezik egyértelmű m tartalmazásra nézve legszűkebb és M legbővebb minimális $s\bar{t}$ vágás, amik az összes minimális $s\bar{t}$ vágás metszeteként ill. uniójaként állnak elő. Az MFMC algoritmus futásának végén adódó minimális vágás éppen m lesz. M-et pl. a fordított gráfon a minimális ts folyamhoz tartozó minimális vágásként kaphatjuk.

Ennek alkalmazása gráfokra

Építsünk a $D = (V, A)$ $(k-1)$-összefüggő, de nem k-összefüggő gráfhoz egy $H = (U, E)$ hálózatot. Ebben minden $x \in V$ pontnak egy x' kezdő- és egy x'' végpont feleljen meg. Vegyünk a hálózatba minden x-re egy $x'x''$ élt 1 kapacitással és egy $x''x'$ élt ∞ kapacitással. Ha $xy \in A$, akkor húzzunk be a hálózatba egy ∞ kapacitású $x''y'$ élt. Nevezzünk egy Z vágást valódinak, ha van olyan $x, y \in V$, amire $x'' \in Z$ és $y' \notin Z$. Egy valódi vágás értéke legalább $k-1$, hiszen D-ben van eme x és y pontok közt $k-1$ pontdiszjunkt út, amiknek a hálózatban értelemszerűen egy $k-1$ értékű $x''y'$ folyam felel meg.

Egy Z minimális értékű valódi vágáshoz tekintsük az $X_Z = \{x \in D | x', x'' \in Z\}$ és $Y_Z = \{y \in D | y', y'' \notin Z\}$ csúcshalmazokat V-ben. Ekkor $(X_Z, Y_Z) \in \mathcal{P}$. Ugyanis ha valamely $x \in X_Z$-ből menne él egy $y \in Y_Z$-be, akkor a hálózatban az $x''y'$ végtelen kapacitású él kilépne Z-ből. Továbbá $|V - (X_Z \cup Y_Z)| = k-1$, hiszen e halmazban azok a pontok vannak, akiknek hálózatbeli kezdőpontja Z-ben, a végpontja $U - Z$-ben van. Az ő számuk $k-1$, mivel a vágás értéke is ennyi.

Megfordítva, tetszőleges $(X^-, X^+) \in \mathcal{P}$-nek H-ban megfelel egy Z minimális értékű valódi vágás: $Z = \{x', x'' | x \in X^-\} \cup \{x' | x \in V - (X^- \cup X^+)\}$

Mondjuk azt, hogy $X \in \mathcal{P}$ egy $x\bar{y}$ pár, ha $x \in X^-$, $y \in X^+$. Egy $\preceq$-ra nézve legkisebb (legnagyobb) $X \in \mathcal{P}$ $x\bar{y}$ párnak H-ban egy tartalmazásra nézve legszűkebb (legbővebb) $x''\bar{y}'$ minimális értékű valódi vágás felel meg. Minthogy az ilyen vágások mind valódiak, e feladat az előző pontban tárgyalt módon elvégezhető.

Az összes legnagyobb $\mathcal{P}$-beli elem megkereséséhez tetszőleges $x, y \in V$ párra keresünk $\preceq$-ra nézve legnagyobb olyan $(X^-, X^+) \in \mathcal{P}$ párt, amire $x \in X^-$ és $y \in X^+$, és ezek halmazából tekintjük a legnagyobbakat.

Alvázbővítés

Ezek után leírjuk az alváz bővítésének egy lépését.

4.4.10. Állítás. *Egy $\mathcal{I}$ vázban tetszőleges N párnál kisebb párok tövei lamináris rendszert alkotnak.*

Bizonyítás. Legyen $L, J \preceq K$. Vagy $L \preceq J$, vagy $J \preceq L$, vagy pedig függetlenek. Ez utóbbi esetben a töveik diszjunktak, hiszen $L^+ \cap J^+ \supseteq N^+ \neq \emptyset$ □

Használjuk az alábbiakban a 4.4.1. szakasz jelöléseit! Legyenek $L_1, ..., L_r$ az $\mathcal{I}'$-beli legnagyobb elemek, az ő töveik az előző állítás szerint M^- páronként diszjunkt részhalmazai. Húzzuk be a $D = (V, A)$ gráfba az összes olyan élt, ami valamely $\mathcal{I}''$-beli pár tövéből a fejébe megy. Legyen az így kapott gráf $D' = (V, A')$.

4.4.11. Állítás. *Legyen J D-ben egyirányú pár. Pontosan akkor lesz D'-ben is az, ha $\mathcal{I}''$ valamennyi elemétől független.*

Bizonyítás. Két egyirányú pár pontosan akkor fogható le egy éllel, ha nem függetlenek. Abból, hogy hozzávett élek mindegyike lefogja $\mathcal{I}''$ egy elemét, következik az állítás. □

Tehát $K \in \mathcal{P} - \mathcal{I}$, $K \preceq M$ pontosan akkor illik $\mathcal{I}$-hez, ha D'-ben is egyirányú pár, és tetszőleges $i = 1, ..., r$-re L_i-re $L_i \prec K$ vagy L_i és K függetlenek. A 4.4.8. következmény szerint $\mathcal{I}$ bővíthető egy olyan K párral, amely ezeket a feltételeket kielégíti és tartalmazásra nézve minimális.

Készítsük most el a fentebb leírt módon a H' hálózatot a D' gráfhoz! A H'' ettől még annyiban különbözzön, hogy minden $i = 1, ..., r$-re tetszőleges $x, y \in L_i^-$-hoz húzzuk be az $x''y''$ élt ∞ kapacitással. Az így kapott hálózat valódi minimális vágásai éppen az L_i pároknak és $\mathcal{I}$-hez illő pároknak felelnek meg. Ez utóbbiak közül kell tartalmazásra nézve minimálisat keresnünk.

Legyen $C_1 = M^- \setminus \cup_{i=1}^r L_i^-$. Ha $C_1 = \emptyset$, akkor legyen $R_1 = M$, egyébként válasszunk tetszőleges $x_1 \in C_1$-t. Legyen R_1 H''-ben tartalmazásra nézve legszűkebb $x_1''\bar{y_1'}$ vágáshoz tartozó egyirányú pár.

Ezután minden lépésben legyen $C_{i+1} = R_i^- \setminus (\cup_{i=1}^r L_i^- \cup \{x_1, x_2, ..., x_i\})$. Ha $C_{i+1} \neq \emptyset$, akkor legyen $x_{i+1} \in C_{i+1}$. Legyen R_{i+1} H''-ben a tartalmazásra nézve legszűkebb $x_{i+1}''\bar{y}'$ vágásnak megfelelő egyirányú pár.

Tegyük fel, hogy $C_{i+1} = \emptyset$. $K \prec R_i$ akkor lehet $\mathcal{I}$-hez illő, ha K töve legalább két $L_j \subset R_i$ halmaz uniójaként áll elő.

Ezért a következő fázisban válasszunk minden $L_j \subset R_i$-ra egy $z_j \in L_j$ pontot, és minden $j < l$ párra készítsük el H''-ből a $z_j''z_l'$ ∞ kapacitású él hozzávételével a H_{jl} hálózatot, és tekintsük ebben a tartalmazásra nézve legszűkebb $z_j''\bar{y}'$ vágásnak megfelelő egyirányú párt. Ezek közül egy tartalmazásra nézve minimálisat választva egy megfelelő K halmazt kapunk.

Vázbontás

Az előző pontban meghatároztunk egy $\mathcal{I}$ teljes alvázat. Legyenek ennek elemei a hozzávétel sorrendjében K_1, K_2,..., K_m, és legyen $\mathcal{I}_j = \{K_1, ..., K_{j-1}\}$, valamint $\mathcal{F}_j = \mathcal{P} \div \mathcal{I}_j$.

A Dilworth-algoritmussal ebben meg tudunk határozni egy minimális F' fedést és egy maximális antiláncot, ami a váztulajdonság alapján éppen egy maximális független rendszer lesz.

Ezután az alábbi FULL-FLIP [11] szubrutint fogjuk használni:

Bemenet: $\mathcal{F}_{j+1} = \mathcal{F}_j \div K_j$ egy F' fedése.

Kimenet: $\mathcal{F}_j$-nek egy $|F'|$ elemű fedése.

Amíg F' nem fedi $\mathcal{F}_j$-t, válasszunk $X, Y \in \mathcal{F}_j$ fedetlen elemeket úgy, hogy $X \preceq Y$, és X minimális, Y pedig maximális ilyen tulajdonságú elem (az 4.4.2. lemmában leírt értelemben.) Válasszunk egy $X \wedge K_j$-t fedő $f_1' \in F'$ és egy $Y \vee K_j$-t fedő $f_2' \in F'$ élt. F'-ben keresztezzük át $\{f_1', f_2'\}$-t.

E szubrutin az 4.4.2. lemma értelmében helyesen működik. Induljunk ki $j = m$-ből! Mivel $\mathcal{I}$ teljes alváz, ezért nincs olyan pár, aki minden elemétől független lenne, így $\mathcal{F}_m = \emptyset$. Ezután a fenti szubrutin használatával minden lépésben megadjuk $\mathcal{F}_j$ egy fedését, $j = m - 1, ..., 0$. $\mathcal{F}_0 = \mathcal{P}$, tehát végül egy jó fedést fogunk kapni.

A kivitelezés során X és Y találása az egyetlen nem triviális lépés. Válasszunk egy $K_j \preceq M$ legnagyobb párt és egy $x \in M^-$ pontot. Olyan $\preceq$-ra nézve legkisebb és legnagyobb, F' által nem fedett $X(x, M), Y(x, M) \in \mathcal{F}_j$-t fogunk keresni, amik kisebbek M-nél és töveik tartalmazzák x-et. Legyen $D_1 = (V, A + F')$. Az alábbi állítás a 4.4.7. lemma triviális következménye.

4.4.12. Állítás. *Ha $Z \preceq M$ olyan egyirányú pár D-ben, amit F' nem fed le, és $\mathcal{I}_j + Z$ váz, akkor Z D_1-ben M-illik $\mathcal{I}_j$-hez.*

Keressünk tehát - amennyiben léteznek - $X(x, M)$ legkisebb és $Y(x, M)$ legnagyobb $\mathcal{I}_j$-hez M-illőt, aminek töve tartalmazza x-et. Ennek megvalósításához készítsük el a Vázépítés részben leírt módon a H'' segédgráfot D_1-hez. Legyen $y_0 \in M$, és keressünk legszűkebb és legbővebb $x\bar{y}_0$ vágást. $X(x, M)$ és $Y(x, M)$ legyenek az ezeknek megfelelő párok.

Végezzük el ezt az összes (x, M) párra. Ha egyikre sem létezik $X(x, M)$ és $Y(x, M)$, akkor F' fedi $\mathcal{F}_j$-t. Ha néhány (x, M) párra léteznek, akkor legyen (x_0, M_0) olyan, amire $Y(x_0, M_0)$ ezek közül $\preceq$-ra legnagyobb, és ezen belül $X(x, M_0)$ legkisebb.

4.4.13. Állítás. *$X' \preceq X(x, M_0)$, $X' \in \mathcal{F}_j$ esetén F' fedi X'-t.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik a feltételt kielégítő X', amit F' nem fed. Ekkor valamely (x', M') párra $X(x', M') \preceq X' \prec X(x_0, M_0)$. Ekkor $x' \in Y(x_0, M_0)^-$ s emiatt $Y(x', M_0) \succeq Y(x_0, M_0)$. $X(x', M') \prec X(x_0, M_0) \preceq M_0$ miatt $X(x', M_0) \preceq X(x', M') \prec X(x_0, M_0)$ következne, vagyis (x', M_0) ellentmond (x_0, M_0) választásának. □

Tehát $X(x_0, M_0)$, $Y(x_0, M_0)$ ki fogja elégíteni a FULL-FLIP algoritmus feltételét.

Bonyolultság

Az összes legnagyobb vágás megtalálása tehát $O(n^2MC)$. [1] 4.7 következményéből tudjuk, hogy van diszjunkt utakból és körökből álló minimális növelő halmaz, tehát az 4.4.2 tétel szerint egy maximális független rendszer mérete legfeljebb n. Egy lánc mérete legfeljebb n, így a Dilworth-tétel polárisa szerint $|\mathcal{I}| \preceq n^2$. Így n^2 növelési lépés van. Minden lépésnél legfeljebb $n + \binom{n}{2}$-szer keresünk minimális vágást, azaz összesen $O(n^7)$ lépést teszünk $\mathcal{I}$ felépítéséhez.

Könnyen látható, hogy átkeresztezésből legfeljebb $O(n^3)$ lehet, és egy átkeresztezés során $O(n^2)$ (x, M) párt választunk, és mindegyikre X, Y keresése 2 MFMC végrehajtásával történik, azaz FULL-FLIP lépésszáma $O(n^5MC)$. Így az összbonyolultság $O(n^5MC) = O(n^8)$.

4.4.2. Az általános eset

Könnyen mutatható ellenpélda arra, hogy az általános esetre a fenti algoritmus nem működik helyesen. Általában a legnagyobb és legkisebb elemek sem feltétlenül soványak, tehát nem lesz csupa sovány elemből álló teljes váz. Ezért bevezetünk egy, a soványságnál gyengébb fogalmat. Nevezzük $K \in \mathcal{P}$-t *soványfejűnek*, ha nincs olyan $Z \in \mathcal{P}$, amire $Z^- = K^-$, $Z^+ \subset K^+$. A nem soványfejű párokat nevezzük kövérfejűnek.

Megjegyzés: Egy soványfejű pár nem feltétlenül sovány. Igaz azonban, hogy az összes legnagyobb pár soványfejű, hiszen ha van ilyen Z, akkor $K \prec Z$.

Világos, hogy tetszőleges K elemre létezik soványfejű L, amire $L^- = K^-$, $L^+ \subseteq K^+$. Nevezzük az ilyen L-eket K *fejredukáltjainak.* K fejredukáltjai páronként fejdiszjunkt párok lesznek.

Egy soványfejű elemekből álló $\mathcal{I}$ vázat nevezzünk *soványfejű alváz*nak, ha $\forall\ K \in \mathcal{I}$, $Z \prec K$, $Z \in \mathcal{P} \div \mathcal{I} - \mathcal{I}$ esetén Z kövérfejű. Egy nem bővíthető soványfejű alvázat nevezzünk teljes soványfejű alváznak.

4.4.14. Lemma. *Legyen $\mathcal{I}$ teljes soványfejű váz, és F' $\mathcal{I}$ egy fedése. Ekkor F' fedi $\mathcal{P} \div \mathcal{I}$-t.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $Z \in \mathcal{P} \div \mathcal{I}$, és F' nem fedi Z-t. Legyen J Z egy fejredukáltja. Ha $J \in \mathcal{I}$, akkor F' lefogja J-t, és így lefogja Z-t is.

Ha viszont $J \notin \mathcal{I}$, akkor J keresztez egy $L \in \mathcal{I}$ elemet. Ekkor Z és L is összefüggők. Megmutatjuk, hogy nem lehet $Z \prec L$, sem $L \prec Z$, azaz L és Z keresztezők, ami miatt $Z \notin \mathcal{P} \div \mathcal{I}$. $L \prec Z$ esetén $L \prec Z \preceq J$ ellentmond annak, hogy J keresztezi L-et. Tegyük most fel, hogy $Z \prec L$. Ekkor $J^- = Z^- \subseteq L^-$. L és J keresztezése miatt $L^+ \cap J^+ \neq \emptyset$, $L^+ - J^+ \neq \emptyset$. Ezért $(L \vee J)^- = L^-$, $(L \vee J)^+ \subset L^+$, ellentmondva L soványfejűségének. □

Ha sikerül találni egy teljes soványfejű alvázat, akkor onnantól el tudjuk végezni a vázbontást. Az előző lemma szerint kiinduláskor F' fedi $\mathcal{P} \div \mathcal{I}$-t, és azt állítjuk, hogy utána minden lépésben használni fogjuk tudni a 4.4.4. lemmát.

Vizsgáljuk meg ugyanis e lemma alkalmazását $\mathcal{F} = \mathcal{F}_j = \mathcal{P} \div \mathcal{I}_j$, $K = K_j$ esetén! Abban az esetben, ha L-et f_1' fedi, akkor $Z = [(L \wedge K_j) \vee Y] \wedge K_j$ létezéséből jutunk ellentmondásra, ugyanis $Z^+ = K_j^+$ és $Z^- \subset K_j^-$. Ha pedig L-et f_2' fedi, akkor $Z' = [(L \vee K_j) \wedge Y] \vee K_j$ adja az ellentmondást $Z'^- = K_{j^-}$ és $Z'^+ \subset K_j^+$ révén. K_j-ről tehát a soványsága helyett elég annyit feltételezni, hogy nincs olyan $Z \in \mathcal{F}_j$, akire vagy $Z^- = K_j^-$, $Z^+ \subset K_j^+$, vagy $Z^- \subset K_j^-$, $Z^+ = K_j^+$. Az előbbi eset ellentmondana K soványfejűségének. Azt utóbbi esetben ha Z soványfejű, ez $Z \prec K$ miatt ellentmond a soványfejű alváz tulajdonságnak. Ha Z kövérfejű, akkor legyen Z' Z egy fejredukáltja. Ekkor $(Z' \vee K_j)^- = K_j^-$, $(Z' \vee K_j)^+ \subset K_j^+$, ellentmondva K_j soványfejűségének.

Soványfejű alváz építése

Feladatunk tehát egy teljes soványfejű alváz találása. A 2.1 részhez hasonlóan látható, hogy egy soványfejű alváz pontosan akkor teljes, ha tartalmazza az összes legnagyobb párt. Hiszen - mint megjegyeztük - minden legnagyobb pár soványfejű, tehát benne vannak minden soványfejű vázban.

Határozzuk meg először az összes legnagyobb elemet. Kezdetben legyen $\mathcal{I} = \emptyset$. Ha egy lépésben $\mathcal{I}$ tartalmazza az összes legnagyobb elemet, akkor készen vagyunk. Egyébként minden $M \in \mathcal{P} - \mathcal{I}$ legnagyobb párra keressünk egy $K'(M)$ legkisebb $\mathcal{I}$-hez M-illő párt. Legyen közülük K' olyan, akire K'^- minimális. Legyen $\mathcal{K}$ K' fejredukáltjainak halmaza.

4.4.15. Lemma. *$\mathcal{I} + \mathcal{K}$ soványfejű alváz.*

Bizonyítás. $\mathcal{I} + \mathcal{K}$ mindenesetre soványfejű váz. Tudjuk egyrészt, hogy elemei soványfejűek. Másrészt tetszőleges $L \in \mathcal{I}$-re vagy $L \prec K'$, vagy L és K' függetlenek. Ha tehát $K \in \mathcal{K}$, akkor az előbbi esetben $L \prec K' \preceq K$, az utóbbiban L és K' függetlenek. Továbbá K független $\mathcal{K}$ összes többi elemétől is.

Azt kell még belátni, hogy $K \in \mathcal{K}$ esetén nincs olyan $J \prec K$ soványfejű elem, akire $J \in \mathcal{P} \div \mathcal{I} - \mathcal{I}$. Tegyük fel, hogy J ilyen. Legyen $M' \succeq J$ legnagyobb pár, ekkor J $\mathcal{I}$-hez M'-illő pár lesz. K' választása miatt nem lehet $J^- \subset K'^-$, ezért $J^- = K'^-$. Ekkor azonban $J^- = K'^- = K^-$ és $J^+ \supset K^+$, ellentmondva J soványfejűségének. □

ST-összefüggőség

A legfontosabb példa az ST-összefüggőség. Legyenek a $D = (V, A)$ gráfban adottak az S és T nemüres halmazok, és tegyük fel, hogy D bármely $x \in S$ és bármely $y \in T$ pontja közt lokálisan $k-1$ összefüggő. Feladatunk az, hogy minimális számú ST él hozzávételével S és T közt k-összefüggővé tegyük.

A 3.2.3. részben leírtakat fogjuk felhasználni: egy $X \in \mathcal{A}(V, V)$ ST-párra $p_D(X^-, X^+) := (k - \delta(X^-, X^+) - h(X^-, X^+))^+$. Feltételezésünk szerint $p_D(X) \leq 1$. Álljon $\hat{\mathcal{P}}$ azon X ST-párokból, melyekre $p_D(X) = 1$, nevezzük ezeket hiányos párnak. Legyen $\mathcal{P}$ a $\hat{\mathcal{P}}$ vetítése $\mathcal{A}(S, T)$-re, vagyis álljon $\mathcal{P}$ azon $X \in \mathcal{A}(S, T)$ párokból, melyekhez létezik olyan $\hat{X} \in \hat{\mathcal{P}}$, hogy $X^- = \hat{X}^- \cap S$, $X^+ = \hat{X}^+ \cap T$. Nevezzük $\hat{X}$-et X ősének (ez nem feltétlenül egyértelmű). Világos, hogy mind $\hat{\mathcal{P}}$, mind $\mathcal{P}$ keresztező rendszerek. Feladatunk most $\hat{\mathcal{P}}$ fedése.

X pontosan akkor lesz $\preceq$-ra legkisebb (legnagyobb) $\mathcal{P}$-beli pár, ha van olyan $\hat{X}$ őse, aki $\hat{\mathcal{P}}$-ben $\preceq$-ra legkisebb vagy legnagyobb. Ezért a legkisebb (legnagyobb) $\mathcal{P}$-beli párok megtalálásához elegendő megkeresni a legkisebb (legnagyobb) párokat $\hat{\mathcal{P}}$-ben. Ehhez a 4.4.1. részben leírt H hálózat helyett azt a hálózatot kell vennünk, ami a 2.2.2. tétel bizonyításában szerepel: legyen a kapacitásfüggvény olyan, hogy $g(x'x'') = 1$, $g(x''y') = 1$ minden $xy \in A$-ra. Könnyen látható, hogy ezen hálózat legszűkebb/legbővebb minimális $s''t'$ vágásai $s \in S$ és $t \in T$ esetén éppen a legkisebb/legnagyobb $\hat{\mathcal{P}}$-beli $s\bar{t}$ pároknak felelnek meg.

A vázépítés tehát a 0-1 esethez hasonlóan végezhető, egészen K' megtalálásáig. Feladatunk még K' összes fejredukáltjának meglelése. Adott $y \in K'^+$-ra nyilván létezik egyértelmű legszűkebb K_y, amire $K_y^- = K'^-$, $K_y^+ \subseteq K'^+$ és $y \in K_y^+$. Minden $y \in K'^+$-ra határozzuk meg K_y-t; ezek halmazából a tartalmazásra nézve legkisebb fejű elemek éppen K' fejredukáltjai lesznek. K_y meghatározásához legyen $x_0 \in K'^-$, és legyen D_y az a gráf, amit D-ből kapunk minden $z \in S - K'^-$-ra k darab zy él hozzávételével.

4.4.16. Állítás. *Ha D_y-ban Y a legnagyobb $x_0\bar{y}$ hiányos pár, akkor Y a K_y egyik őse.*

Ezzel a vázépítést el tudjuk végezni. A vázbontás során ugyanazt kell csinálni, mint a 0-1 esetben, eltekintve attól, hogy e másik típusú hálózatot kell használni. Az összbonyolultság tehát ez esetben is $O(n^6 MC)$ lesz.

4.5. k-összefüggővé növelés fix k esetén

Az alábbi algoritmus Frank András és Jordán Tibor munkája ([3]). Legyen $k \geq 2$ rögzített érték. Egy $D = (V, A)$ irányított gráfot szeretnénk minimális számú új él hozzávételével k-összefüggővé tenni. Idézzük fel a 3.2.4 tételt:

4.5.1. Tétel. *A $D = (V, A)$ irányított gráf akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ él hozzávételével k-összefüggővé, ha minden egyirányú párokból álló $\mathcal{F}$ független családra*

$$\sum (p_{def}(X) : X \in \mathcal{F}) \leq \gamma$$

Az irányított élösszefüggőség növelésével ellentétben (3.2.1 szakasz) itt sem lesz mindig igaz, hogy az optimális duális megoldás vagy páronként fejdiszjunkt, vagy páronként tődiszjunkt párokból áll. Be fogjuk látni azonban, hogy amennyiben az optimum értéke k-tól függően elég nagy, akkor van ilyen szerkezetű duális optimum. Az algoritmus ezt fogja kihasználni.

4.5.1. Az optimális megoldások szerkezete

Nevezzük az $X = (X^-, X^+)$ párt kisfejűnek, ha $|X^+| \leq |X^-|$. Hasonlóképpen legyen X kistővű, ha $|X^+| \leq |X^-|$. Az alábbi lemmát nem bizonyítjuk.

4.5.2. Lemma ([3], 7. lemma). *Van olyan $\mathcal{F}$ egyirányú párokból optimális duális megoldás, amelyben a kisfejű párok páronként fejdiszjunktak, a kistövűek pedig páronként tődiszjunktak.*

Mi most csak arra a speciális esetre bizonyítunk, amikor a D gráfról feltesszük, hogy eleve $(k-1)$-összefüggő. Minden X egyirányú párra $p(X) \leq 1$, azaz $h(X) \geq k-1$. Ha $p(X) = 1$, $h(X) = k-1$, akkor nevezzük X-et szorosnak. A szoros párok családjáról könnyen látható, hogy keresztező lesz, sőt, fennállnak az alábbi tulajdonságok is:

4.5.3. Állítás. *Legyen X és Y két (nem feltétlenül keresztező) szoros egyirányú pár. Ekkor*
(i) $|X^+ \cup Y^+| + |X^- \cap Y^-| \leq n - (k-1)$
(ii) $|X^+ \cap Y^+| + |X^- \cup Y^-| \leq n - (k-1)$

A 4.5.2 lemmánál egy kicsit erősebb állítás is igaz lesz:

4.5.4. Lemma. *Ha D $(k-1)$-összefüggő, X és Y független szoros párok, és $|X^+| \geq |Y^-|$, akkor X és Y tődiszjunktak. Ha pedig $|X^-| \geq |Y^+|$, akkor X és Y fejdiszjunktak.*

Bizonyítás. A szimmetria miatt elég az első állítást igazolni. Tegyük fel, hogy $|X^+| \geq |Y^-|$, ám mégis $X^- \cap Y^- \neq \emptyset$. Mivel X és Y függetlenek, ekkor $X^+ \cap Y^+ = \emptyset$. Legyen $C_1 = V - X^+ - X^-$, $C_2 = V - Y^+ - Y^-$. Az, hogy X és Y pontosak, azt jelenti, hogy $|C_1| = |C_2| = k-1$.

Mivel $|X^- \cup X^+| = |Y^- \cup Y^+| = n - k + 1$, ezért a feltételből $|X^-| \leq |Y^+|$ következik. C_2-t felbontva részekre: $k - 1 = |C_2| = |X^- \cap C_2| + |C_2 \cap C_1| + |X^+ \cap C_2|$, és a 4.5.3. állítás (i). pontja következtében $k - 1 \leq |Y^- \cap C_1| + |C_2 \cap C_1| + |X^- \cap C_2|$. Ezekből tudjuk, hogy $|C_1 \cap Y^-| \geq |C_2 \cap X^+|$. Az $|Y^-| = |X^- \cap Y^-| + |C_1 \cap Y^-| + |X^+ \cap Y^-|$ és $|X^+| = |X^+ \cap Y^-| + |C_2 \cap X^+|$ felírásból $|X^- \cap Y^-| > 0$ miatt $|Y^-| > |X^+|$ adódik, ami ellentmondás. $\square$

Abban az esetben, amikor D $(k-1)$-összefüggő, e lemma implikálja a 4.5.2 lemmát, méghozzá tetszőleges $\mathcal{F}$-re. Nem bizonyítjuk az alábbi állításokat, melyek közül az utóbbi az approximációs algoritmusban fog szerepet játszani:

4.5.5. Lemma ([3], 3. tétel). *Ha D $(k-1)$-összefüggő, és az optimum értéke legalább $2k-1$, akkor minden optimális megoldás vagy páronként fejdiszjunkt, vagy páronként tődiszjunkt párokból áll.*

4.5.6. Lemma ([3], 4. tétel). *Ha D $(k-1)$-összefüggő, akkor az optimum értéke legfeljebb $k-1$-gyel több a páronként fejdiszjunkt párok maximuma és a páronként tődiszjunkt párok maximuma közül a nagyobbiknál.*

Ennek párjaként az általános esetben egy kicsit gyengébb állítás lesz igaz:

4.5.7. Lemma ([3], 9. lemma). *Ha az optimum értéke legalább $2k^2-1$, akkor van páronként tődiszjunkt, vagy páronként fejdiszjunkt párokból álló optimális duális megoldás.*

4.5.2. Ki- és be-hiányok

Vezessük be először a ki-hiány $(p_k^o(H))$ illetve be-hiány $(p_k^i(H))$ fogalmát. Egy $D=(V,A)$ irányított gráfban egy $\emptyset \neq H \subset V$ halmazra legyen

$$p_k^o(H) = \begin{cases} (k-|\Gamma^+(H)|)^+ & \text{ha } H \cup \Gamma^+(H) \neq V \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$p_k^i(H) = \begin{cases} (k-|\Gamma^-(H)|)^+ & \text{ha } H \cup \Gamma^-(H) \neq V \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Világos, hogy $p_k^o(H) = p_{def}(H, V-(H\cup\Gamma^+(H)))$ és $p_k^i(H) = p_{def}(V-(H\cup\Gamma^-(H)), H)$ amennyiben a pár második (illetve első) tagja nemüres halmaz.

Egy részpartíció ki-hiányán illetve be-hiányán elemei hiányainak összegét értjük. Legyen $m_k^o(D)$ illetve $m_k^i(D)$ a részpartíciók ki- illetve be-hiányainak maximuma. Természetesen $\max(m_k^o(D), m_k^i(D)) \leq N_k(D)$. ($N_k(D)$ a független családokon vett p_{def} összegek maximuma.) A 4.5.7 lemma azt mondja ki, hogy ha $N_k(D) \geq 2k^2-1$, akkor itt egyenlőség áll. Az alábbiakban belátunk két lemmát, ami ezen eset kezelését teszi lehetővé. Ehhez szükségünk lesz az alábbi egyszerű állításra:

4.5.8. Állítás. *A Γ^+ és Γ^- függvények szubmodulárisak, azaz bármely $H, F \subseteq V$-re*

$$|\Gamma^+(H)| + |\Gamma^+(F)| \geq |\Gamma^+(H\cap F)| + |\Gamma^+(H\cup F)|$$

$$|\Gamma^-(H)| + |\Gamma^-(F)| \geq |\Gamma^-(H\cap F)| + |\Gamma^-(H\cup F)|$$

Képezzük most a D^o gráfot D-ből egy új s pont, és V-ből s-be mutató új élek hozzávételével. Az új élek E^o halmazában minden $v \in V$-ből s-be legfeljebb k párhuzamos él menjen, úgy, hogy a $D^o = (V+s, A+E^o)$ teljesítse az alábbi követelményt:

$$\text{minden } \emptyset \neq H \subset V,\ V-(H\cup\Gamma_D^+(H)) \neq \emptyset \text{ esetén } g^o(H) \geq k \tag{4.8}$$

ahol $g^o(H) := |\Gamma_D^+(H)| + \delta(H,s)$. ($\delta(H,s)$ a H-ból s-be menő E^o-beli élek számát jelöli). Az előbbi állítás és δ szubmodularitása miatt g^o is szubmoduláris lesz. Világos továbbá, hogy egy ilyen E^o-ra $m_k^o(D) \leq |E^o|$. Legyen $T_{E^o} := \{v \in V : \delta(v,s) \geq 1\}$ az E^o-beli élek töveinek halmaza.

4.5.9. Lemma. *Legyen $D^o = (V+s, A \cup E^o)$ a $D = (V,A)$-hoz a fenti módon definiált gráf, melyre E^o tartalmazásra nézve minimális olyan, hogy eleget tesz a (4.8) feltételnek. Ha $|E^o| \geq k^2 - k + 2$, akkor $m_k^o(D) = |E^o|$.*

Bizonyítás. Nevezzünk egy $\emptyset \neq H \subset V$ halmazt $V - (H \cup \Gamma_D^+(H)) \neq \emptyset$ és $g^o(H) = k$ esetén ki-pontosnak. E^o minimalitása miatt minden $xs \in E^o$ élre létezik x-et tartalmazó ki-pontos halmaz. Így a ki-pontos halmazok uniója lefedi T_{E^o}-t. Legyen $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_t\}$ ki-pontos halmazok egy olyan T_{E^o}-t fedő rendszere, melyre t minimális. Ha $\mathcal{H}$ páronként diszjunkt halmazokból áll, akkor $kt = \sum_i g^o(H_i) = \sum_i |\Gamma_D^+(H_i)| + \delta(H_i,s)$, ahonnan $|E^o| = \sum_i \delta(H_i,s) = \sum_i (k - |\Gamma_D^+(H_i)|) \leq m_k^o(D)$, azaz készen vagyunk.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$-nak van két keresztező eleme, H_i és H_j. Legyen $l = |\Gamma_D^+(H_i \cup H_j)|$. g^o szubmodularitását és (4.8)-at használva az adódik, hogy

$$k + k = g^o(H_i) + g^o(H_j) \geq g^o(H_i \cap H_j) + g^o(H_i \cup H_j) \geq k + g^o(H_i \cup H_j) \tag{4.9}$$

Innen $\delta(H_i \cup H_j, s) \leq k - l$ adódik, t minimalitása miatt pedig $1 \leq \delta(H_i \cup H_j, s)$. Ezeket összevetve $l \leq k-1$. Mivel V minden pontjába legfeljebb k új élt húztunk be, azt kapjuk, hogy

$$\delta(H_i \cup H_j \cup \Gamma_D^+(H_i \cup H_j), s) \leq kl + (k-l) \leq k^2 - k + 1 \tag{4.10}$$

Ebből $|E^o| \geq k^2 - k + 2$ miatt az következik, hogy $V - (H_i \cup H_j \cup \Gamma_D^+(H_i \cup H_j)) \neq \emptyset$, ahonnan (4.8) miatt $g^o(H_i \cup H_j) \geq k$. Ezt (4.9)-be beírva azt kapjuk, hogy $H_i \cup H_j$ is ki-pontos halmaz. Ellentmondásra jutottunk t minimális választásával, hiszen $\mathcal{H}$-ból H_i-t és H_j-t elhagyva és $H_i \cup H_j$-t bevéve T_{E^o} kisebb fedését kapnánk. $\square$

Ugyanígy konstruáljuk a $D^i = (V+s, A \cup E^i)$ gráfot egy új s pont és és s-ből V-be mutató új élek hozzávételével, úgy, hogy az alábbi tulajdonság teljesüljön:

$$\text{minden } \emptyset \neq H \subset V,\ V - (H \cup \Gamma_D^-(H)) \neq \emptyset \text{ esetén } g^i(H) \geq k \tag{4.11}$$

ahol $g^i(H) := |\Gamma_D^+(H)| + \rho(H,s)$. Jelölje F_{E^i} az E^i-beli élek fejeinek halmazát. Az előzőhöz teljesen hasonlóan látható, hogy ha E^i tartalmazásra nézve minimális és $|E^i| \geq k^2 - k + 2$, akkor $m_k^i(D) = |E^i|$.

4.5.10. Lemma. *Van D-hez olyan optimálisan k-összefüggővé növelő élhalmaz, melynek élei T_{E^o}-ból H_{E^i}-be mennek.*

Bizonyítás. Legyen J olyan optimális növelő élhalmaz, melyre minimális a nem T_{E^o}-ból F_{E^i}-be menő élek száma. Tegyük fel indirekten, hogy ezek száma pozitív. legyen $e = xy \in J$ olyan él, melyre mondjuk $x \notin T_{F^o}$. A $D' = (V, E \cup J - e)$ gráf $k-1$-összefüggő lesz és $M_k(D') = 1$.

A 3.1.6. tétel szerint ekkor létezik egyértelmű $\preceq$-ra nézve legkisebb és legnagyobb egyirányú szoros pár, X és Y. Ekkor minden $e' = x'y'$, $x' \in X^-$, $y' \in Y^+$ élre $D' + e'$ is k-összefüggő lesz. (4.8) és (4.11) miatt kell hogy létezzen $x' \in X^- \cap T_{E^o}$, $y' \in Y^+ \cap F_{E^i}$, tekintettel arra, hogy $V - (X^- \cup \Gamma_D^+(X^-)) \neq \emptyset$, $V - (Y^+ \cup \Gamma_D^-(Y^+)) \neq \emptyset$. Ekkor $J - xy + x'y'$ is optimális növelő élhalmaz, ami ellentmond J választásának. $\square$

4.5.3. Az algoritmus leírása

1. Fázis Konstruáljunk olyan $D^o = (V+s, A+E^o)$ segédgráfot, mely kielégíti (4.8)-t és E^o tartalmazásra nézve minimális. Ezt úgy tehetjük meg, hogy minden pontból s-be felveszünk k párhuzamos élt, és közülük mohón addig hagyunk el, amíg (4.8) fennáll. Azt, hogy egy él elhagyható-e, úgy tudjuk eldönteni, hogy minden $x \in V$ pont és s között az MFMC algoritmussal kiszámítjuk a minimális vágás értékét. Legyen $\gamma_o = |E^o|$. Hasonlóan konstruáljuk meg D^i-t is, és legyen $\gamma_i = |E^i|$.

2. Fázis Ha $\max(\gamma_o, \gamma_i) = 2k^2-2$, akkor minden lehetséges $2k^2-2$ méretű T_{E^o}-ból F_{E^i}-be menő élekből álló J élhalmazra ellenőrizzük, hogy $(V, A \cup J)$ k-összefüggő-e. Ha valamely J-re igen, akkor megállunk: ez a J egy optimális növelő élhalmaz lesz. $\max(\gamma_o, \gamma_i) < 2k^2-2$ esetén csináljuk ugyanezt, a legfeljebb $2k^2-2$ elemű részhalmazokkal, úgy, hogy először megnézzük az összes 1 eleműt, aztán az összes 2 eleműt, s így tovább. A 4.5.10 lemma szerint J mindkét esetben létezni fog.

3. Fázis Ha $\max(\gamma_o, \gamma_i) \geq 2k^2-1$, akkor minden $e = xy$ T_{E^o}-ból F_{E^i}-be menő élre ellenőrízzük, hogy $N_k(D+e) = N_k(D)-1$ teljesül-e. Ha igen, akkor vegyük hozzá D-hez, és kezdjük elölről az algoritmust. (Ezt úgy ellenőrízhetjük, hogy $D+e$-re is meghatározzuk a γ_o, γ_i értékeket. $k \geq 2$ esetén $2k^2-1 \geq k^2-k+2$, ezért a 4.5.7 és a 4.5.9 lemmákat alkalmazva azt kapjuk, hogy $N_k(D+e) = N_k(D)-1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\max_{(D+e)}(\gamma_o, \gamma_i) = \max_D(\gamma_o, \gamma_i) - 1$.

Bonyolultság

D^o és D^i meghatározásakor minden élre meg kell vizsgálnunk, hogy kitörölhető-e. Ez egy adott élre $n-1$ folyamalgoritmussal végezhető el, tehát az 1. fázis bonyolultsága $O(kn^2MC)$.

A 2. fázisban csak k-tól függ a lehetséges J-k száma, $f(k)$ (ez k-nak exponenciális függvénye lesz). Minden J esetén ellenőrízni kell, hogy a kapott gráf k-összefüggő-e, ami n^2MC időben tehető, vagy a [18]-ben leírt algoritmus használatával kn^3 időben. Tehát a 2. fázis futásideje $O(f(k)kn^3)$.

A 3. fázisban az xy él vizsgálatakor először meg kell határozni az egyértelmű maximális x-et tartalmazó H_x ki-pontos halmazt D^o-ban és az y-t tartalmazó maximális H_y be-pontos halmazt D^i-ben. Ez $2n$ folyamszámítással végezhető el. Tegyük fel, hogy $\gamma^0 \geq \gamma^i$. Figyeljük meg, hogy xy akkor és csak akkor nem lesz jó, ha minden $x' \in H_x$-re a $G^o + xy - x's$ gráf megsérti a (4.8) feltételt. Mivel $\delta(X_m, k) \leq k$, ezért ezt kn MFMC algoritmussal meg tudjuk állapítani. A 4.5.10. lemmából könnyen látható, hogy elég kn élt megvizsgálni, így a 3. fázis bonyolultsága $O(k^2n^2MC)$.

[1] 4.6. lemmája szerint egy maximális független rendszernek legfeljebb n eleme van. Ennek következtében $M_k(D) \leq kn$, ezért a 2. és 3. fázist összesen legfeljebb kn alkalmommal kell végrehajtani, ígyhát az összbonyolultság $O(f'(k)n^3MC) = O(f'(k)n^6)$, ahol f' k-ban exponenciális függvény.

4.6. Approximációs algoritmusok

A 4.5 részben leírt algoritmus kis módosításával polinomiális approximációs algoritmust kaphatunk, mely tetszőleges gráfra legfeljebb $4k^4$-nel több élt ad meg az optimálisnál. Módosítani mindössze az algoritmus második fázisát kell: itt egyszerűen húzzuk be az összes T_{E^o}-ból F_{E^i}-be menő élt. A 4.5.10. lemma szerint ez tartalmazni fog optimális növelő élhalmazt, és $\max(\gamma_o, \gamma_i) \leq 2k^2 - 2$ miatt az összes behúzott él száma $4k^4$-nél kevesebb.

Abban az esetben, amikor a kiindulási gráf $k-1$ összefüggő, Jordán Tibor lényegesen jobb approximációs algoritmust mutat ([14]), amely az optimális méretű növelő élhalmaznál legfeljebb $k-1$-gyel több élt ad meg. Jordán Tibor eredeti algoritmusa az használja ki, hogy ha egy pontnak elég nagy a ki- és befoka is, akkor van leemelhető élpár. Mi leemelések helyett a 4.5 részben belátottakat fogjuk használni. Algoritmusunk szintén legfeljebb $k-1$-gyel több élt fog adni az optimálisnál. ($k \geq 2$) A 4.5 rész jelöléseit használva a 4.5.9 lemma helyett az alábbit látjuk be:

4.6.1. Lemma. *Legyen $D = (V + A)$ $k-1$ összefüggő gráf. $D^o = (V + s, A \cup E^o)$ legyen az (4.8) feltételt kielégítő olyan gráf, amelyre E^o tartalmazásra nézve minimális. Ha $|E^o| \geq k+1$, akkor $m_k^o(D) = |E^o|$.*

Bizonyítás. A bizonyítás teljesen ugyanúgy megy, mint a 4.5.9 lemma esetén. Különbség csupán a (4.10) egyenlőtlenségben lesz. Ott azt használtuk ki, hogy ha E^o tartalmazásra nézve minimális, akkor minden $x \in V$-re $\delta(x,s) \leq k$. Esetünkben azonban $\delta(x,s) \leq 1$ is igaz lesz. Tehát (4.10) így módosul:

$$\rho(H_i \cup H_j \cup \Gamma_D^+(H_i \cup H_j), s) \leq l + (k - l) \leq k \qquad (4.12)$$

Innen $|E^o| \geq k+1$ miatt következik, hogy $V - (H_i \cup H_j \cup \Gamma_D^+(H_i \cup H_j)) \neq \emptyset$. □

Bizonyítás nélkül használni fogjuk Mader alábbi eredményét. Egy k-összefüggő gráfban egy élt kritikusnak nevezünk, ha az ő elhagyásával megszünik a k-összefüggőség. Alternáló körnek pedig olyan (irányítatlan értelemben vett) kört nevezünk, mely nem tartalmaz 2 hosszú irányított utat.

4.6.2. Lemma (Mader [17]). *Tegyük fel, hogy a $D = (V, A)$ digráf k-összefüggő. Legyen J olyan kritikus élek halmaza, melyek tövének ki-foka és fejének be-foka is legalább $k+1$. Ekkor J nem tartalmaz alternáló kört.*

4.6.3. Következmény. *Legyen $D = (V, A)$ k-összefüggő, és J olyan élhalmaz, hogy $D' = (V, A \cup J)$ $k+1$-szeresen összefüggő, és J tartalmazásra nézve minimális ilyen. Ekkor J nem tartalmaz alternáló kört.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy J tartalmat egy C alternáló kört. C mindenesetre kritikus élekből áll, hiszen J tartalmazásra nézve minimális. Legyen $xy \in C$ tetszőleges él. Mivel d k-összefüggő volt, ezért $\delta(x) \geq k+1$, $\rho(y) \geq k+1$. Tehát C-re teljesül a lemma feltétele, ami ellentmondás. □

4.6.4. Következmény. *Ha a 4.6.3 következmény feltételei mellett ráadásul J minden éle T_{E^o}-ből F_{E^i}-be megy, akkor $|J| \leq |T_{E^o}| + |F_{E^i}| - 1$.*

Bizonyítás. Készítsük el azt a páros gráfot, melyre minden $x \in T_{E^o} \cup F_{E^i}$ pontnak egy x és egy x'' felel meg, és az $x'y''$ él pontosan akkor van behúzva, ha $x \in T_{E^o}$, $y \in F_{E^i}$, és xy él volt az eredeti gráfban. A 4.6.3. következmény szerint J nem tartalmazott alternáló kört, ezért a páros gráfban neki megfelelő élhalmaz körmentes lesz. Ebből következik, hogy $|J| \leq |T_{E^o}| + |F_{E^i}| - 1$. □

4.6.1. Az algoritmus leírása

1. Fázis Csináljuk ugyanazt, mint a 4.5 részben, azzal a különbséggel, hogy elég minden pontból 1 élt húzni s-be.

2. Fázis Ha $\max(\gamma_o, \gamma_i) \leq 2k-1$, akkor húzzuk be az összes T_{E^o}-ből F_{E^i}-be menő élt. A 4.5.10. lemma miatt az így kapott gráf k-összefüggő lesz. Hagyjunk el ebből mohón éleket mindössze arra ügyelve, hogy a k-összefüggőség megmaradjon. (Ezt folyamszámításokkal tudjuk eldönteni). A 4.6.4. következmény miatt ezáltal egy legfeljebb $\gamma_o + \gamma_i - 1$ elemű növelő élhalmazt kapunk. Az optimum értéke a 4.5.5. lemma miatt legfeljebb $\max(\gamma_o, \gamma_i) + k - 1$, tehát az optimálisnál legfeljebb $k-1$-gyel több élt húztunk be.

3. Fázis Ha $\max(\gamma_o, \gamma_i) \geq 2k-1$, akkor szintén ugyanazt csináljuk, mint a 4.5 részben, a 4.5.7 és 4.6.1. lemmák helyett a 4.5.5 és 4.5.9 lemmákat használva, tekintettel arra, hogy $k \geq 2$ esetén $2k-1 \geq k+1$.

Bonyolultság

Az első fázis futásideje $O(n^2MC)$, mivel minden pontból csak 1 élt húztunk be s-be. A második fázisban $(2k-1)^2$ élt húzunk be. Mindegyikre egy MFMC végrehajtásával tudjuk ellenőrízni, hogy elhagyható-e, tehát a futásidő $O(k^2MC)$. A 3. fázisban a 4.5 rész becslését azáltal javíthatjuk, hogy $d(H_x, s) \leq 1$, így e fázis futási ideje $O(kn^2MC)$ lesz. A már hivatkozott [1] 4.6. következmény miatt $M_k(D) \leq n$. Tehát összesen a 2. és 3. fázist legfeljebb n-szer hajtjuk végre, ezért az összbonyolultság $O(kn^3MC) = O(kn^6)$ lesz.

5. fejezet

Keresztezőn szupermoduláris függvények fedési algoritmusa

Benczúr András [12] cikkében szerepel a 0-1 értékű szupermoduláris függvény fedési algoritmusa. Az itt leírtak e cikk továbbgondolásából származnak. Ennek nyomán először definiálni fogjuk az erős posetek fogalmát, és kimondunk egy, a Szupermoduláris Fedési Tétellel ekvivalens tételt erős poseteken. Ezután olyan algoritmust adunk meg, amely tetszőleges fedés helyett vagy megad egy eggyel kevesebb elemű fedést, vagy egy optimális duális megoldást. Ez az eredeti probléma megoldására úgy alkalmazható, hogy kiindulunk tetszőleges (pl. mohó) fedésből, és addig ismételjük az algoritmust az egyre kisebb fedésekre, amíg végül minimálisat nem kapnuk. Ezt először a 0-1 értékű szupermoduláris függvény fedésére mondjuk el, a [12]-ben leírtnál sokkal egyszerűbb változatban. Ez talán segíti az általános algoritmus jobb megértését.

5.1. Alapfogalmak

5.1.1. Erős posetek

Legyen $(\mathcal{P}, \preceq)$ véges poset. Nevezzük őt *erős posetnek* az alább felsorolt tulajdonságok fennállása esetén.

$u, v \in \mathcal{P}$-t nevezzük *összefüggőnek*, ha léteznek m, M, amire $m \preceq u \preceq M$ és $m \preceq v \preceq M$, egyéb esetben hívjuk őket *függetlennek*. Tegyük fel, hogy minden $u, v \in \mathcal{P}$ összefüggő párra az alábbi két művelet egyértelműen van definiálva:

$$u \vee v = \min\{x : x \succeq u, x \succeq v\}; u \wedge v = \max\{x : x \preceq u, x \preceq v\}$$

Ha m minimális és M maximális elem, akkor az $\{x : m \preceq x \preceq M\}$ halmazt nevezzük $[m, M]$ *intervallumnak*. Legyen igaz az *erős intervallum tulajdonság*: minden $[m, M]$ intervallumra

$$\text{ha } u \vee v \in [m, M] \textbf{ vagy } u \wedge v \in [m, M], \text{ akkor } u \in [m, M] \textbf{ vagy } v \in [m, M]$$

Megmutatjuk, hogy a keresztező halmazpár-rendszerek erős posetet alkotnak a rajtuk definiált rendezésre.

5.1.1. Lemma. *Egy $\mathcal{Q}$ keresztező rendszer párjai erős posetet alkotnak az alábbi rendezésre: $(X^-, X^+) \preceq (Y^-, Y^+) \iff X^- \subseteq Y^-$ és $X^+ \supseteq Y^+$. Két pár pontosan akkor összefüggő a párokon definiált értelemben, ha a posetben összefüggő. A posetben egy intervallumban levő összes elem lefogható egy éllel.*

Bizonyítás. Az összefüggőségre vonatkozó állítás nyilvánvaló. Könnyen ellenőrízhető továbbá, hogy $X^- \cap Y^- \neq \emptyset$, $X^+ \cap Y^+ \neq \emptyset$ esetén

$$(X^-, X^+) \wedge (Y^-, Y^+) = (X^- \cap Y^-, X^+ \cup Y^+)$$

$$(X^-, X^+) \vee (Y^-, Y^+) = (X^- \cup Y^-, X^+ \cap Y^+)$$

Tegyük fel, hogy $m = (m^-, m^+)$ minimális és $M = (M^-, M^+)$ maximális elemek,

$$(m^-, m^+) \preceq (X^- \cap Y^-, X^+ \cup X^+) \preceq (M^-, M^+)$$

Az utóbbiból $M^+ \subseteq X^+ \cup Y^+$, ezért vagy $M^+ \cap X^+ \neq \emptyset$, vagy $M^+ \cap Y^+ \neq \emptyset$. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $M^+ \cap X^+ \neq \emptyset$. $M^- \supseteq X^- \cap Y^-$ miatt ráadásul $M^- \cap X^- \neq \emptyset$, azaz M és X összefüggők. Innen M maximalitása alapján $X \preceq M$. A feltétel első feléből viszont $m \preceq X$ adódott, tehát $X \in [m, M]$. Ugyanígy látható be, hogy ha $m \preceq (X^- \cap Y^-, X^+ \cup X^+) \preceq M$ akkor $X \in [m, M]$ vagy $Y \in [m, M]$. Ezzel igazoltuk az erős intervallum tulajdonság teljesülését.

Az $[m, M]$ intervallumban levő elemeket minden olyan xy él le fogja fogni, melyre $x \in m^-$, $y \in M^+$. □

Legyen most adott a $\mathcal{P}$ erős poseten egy p szupermoduláris függvény, azaz ha x és y összefüggő elemek, melyekre $p(x) > 0$, $p(y) > 0$, akkor

$$p(x \vee y) + p(x \wedge y) \geq p(x) + p(y)$$

Legyen $\mathcal{I} = \{I_i : I_i = [m_i, M_i] : 1 \leq i \leq k\}$ intervallumrendszer (amiben egy adott intervallum többször is szerepelhet). Legyen $f(x) = |i : x \in I_i, 1 \leq i \leq k|$, azaz az x-et fedő intervallumok száma. Mondjuk azt, hogy $\mathcal{I}$ *fedi* p-t, ha $\forall x : f(x) \geq p(x)$. Legyen egy adott p-re

$$\nu(p) = \max\{\sum_i p(x_i) : \text{az } x_i \text{ elemek páronként függetlenek.}\}$$

A 5.1.1 lemma szerint a Szupermoduláris Fedési Tétel következni fog az alábbi tételből:

5.1.2. Tétel. *Egy $\mathcal{P}$ erős poseten adott p keresztezőn szupermoduláris függvényre a p-t fedő intervallumok minimális $\tau(p)$ száma $\nu(p)$-vel egyenlő.*

Megmutatjuk, hogy ez a tétel pedig következik a Szupermoduláris fedési tételből, tehát valójában ekvivalensek.

Álljon S^- a poset minimális, S^+ pedig a maximális elemeinek megfelelő reprezentánsokból. Egy x minimális vagy maximális elemhez legyen ez a reprezentáns $\varphi(x)$. Egy a elemhez rendeljük hozzá azt az (a^-, a^+) párt, amire

$$a^- = \{\varphi(m) : m \preceq a\}; a^+ = \{\varphi(M) : M \succeq a\}$$

Legyen az így kapott halmazpárokból álló rendszer $\mathcal{Q}$.

5.1.3. Állítás. *E leképezés homeomorfizmus, azaz*

$$(a^- \cap b^-, a^+ \cup b^+) = ((a \wedge b)^-, (a \wedge b)^+)$$

$$(a^- \cup b^-, a^+ \cap b^+) = ((a \vee b)^-, (a \vee b)^+)$$

Bizonyítás. $a^- \cap b^- = (a \wedge b)^-$ triviális, hiszen $m \preceq a$ és $m \preceq b$ ekvivalens azzal, hogy $m \preceq a \wedge b$. $a^+ \cup b^+ = (a \wedge b)^+$ belátásához legyen először $\varphi(M) \in a^+ \cup b^+$, azaz $M \succeq a$ vagy $M \succeq b$. Mivel $a \wedge b \preceq a, b$, így $a \wedge b \preceq M$, azaz $\varphi(M) \in (a \wedge b)^+$.

Megfordítva, legyen $a \wedge b \preceq M$; m pedig legyen tetszőleges olyan minimális elem, amelyre $m \preceq a \wedge b$. Ekkor $m \preceq a \wedge b \preceq M$, azaz az erős intervallum tulajdonság szerint pl. $m \preceq a \preceq M$. Ekkor $\varphi(M) \in a^+ \subseteq a^+ \cup b^+$.

Teljesen ugyanígy látható be a $\vee$-re vonatkozó azonosság is. □

Az állításból következik, hogy $\mathcal{Q}$ keresztező rendszer. Legyen $p' : \mathcal{Q} \to \mathbf{R}$ a következő módon definiálva: $p'(X) := \max\{p(a) : (a^-, a^+) = X\}$. Könnyen belátható, hogy p' keresztezőn szupermoduláris, továbbá hogy a Szupermoduláris Fedési Tételt a $\mathcal{Q}$ keresztező rendszeren a p' függvényre alkalmazva az 5.1.2. tétel adódik.

5.1.2. Szoros elemek

Legyen $\mathcal{I}$ fedés. Ekkor $f(x) \geq p(x)$ minden x-re. Nevezzük az x elemet *szorosnak*, ha $f(x) = p(x)$. (Azaz $f(x) = p(x) = 0$ is lehet.)

5.1.4. Lemma. *Ha $\mathcal{I}$ fedés, x és y összefüggő szoros elemek, melyekre $p(x) > 0$, $p(y) > 0$, akkor $x \vee y$ és $x \wedge y$ is szorosak.*

Bizonyítás. $f(x)$ szubmoduláris függvény. Ha ugyanis egy I_i intervallum $x \vee y$ és $x \wedge y$ mindkettejét fedi, akkor fedi x-et és y-t is. Ha pedig pont az egyiket fedi közülük, akkor az erős intervallum tulajdonság miatt fedni fogja vagy x-et, vagy y-t. Ezt felhasználva

$$f(x) + f(y) = p(x) + p(y) \leq p(x \vee y) + p(x \wedge y) \leq f(x \vee y) + f(x \wedge y) \leq f(x) + f(y) \tag{5.1}$$

azaz végig egyenlőség áll. □

5.1.5. Következmény. *Ha a fedés egy I_i intervalluma tartalmaz szoros elemet, akkor létezik benne q_i minimális és Q_i maximális szoros elem.*

Kihasználva, hogy (5.1)-ben $f(x) + f(y) = f(x \vee y) + f(x \wedge y)$ is teljesül, könnyen látható az alábbi:

5.1.6. Lemma (Szoros fedési tulajdonság). *Legyenek x és y összefüggő szoros elemek, melyekre $p(x) > 0$, $p(y) > 0$. Ha egy fedésbeli I_i intervallum fedi x-et vagy y-t, akkor fedi $x \vee y$-t vagy $x \wedge y$-t is.*

5.2. 0-1 értékű p fedése

Először abban a speciális esetben írjuk le az algoritmust, amikor p csak 0 és 1 értéket vehet fel. Ez annak felel meg, hogy egy $k-1$ összefüggő gráfot akarunk minimális számú él hozzávételével k összefüggővé tenni.

Világos, hogy elég az olyan fedésekkel foglalkoznunk, amikben minden intervallum legfeljebb egyszer szerepel, azaz $i \neq j$ esetén $I_i \neq I_j$.

Ha u szoros elem, és $p(u) > 0$, akkor $p(u) = f(u) = 1$. Ha u, v összefüggő szoros elemek, melyekre $p(u) > 0$, $p(v) > 0$, akkor p szupermodularitását és 0-1 értékűségét kihasználva $p(x \vee y) = p(x \wedge y) = 1$ adódik. Ha most $u \in I_i$, $v \in I_j$, szoros elemek, $i \neq j$, akkor a szoros fedési tulajdonság szerint mind I_i, mind I_j fedi $x \vee y$ és $x \wedge y$ valamelyikét. A $p(x \vee y) = p(x \wedge y) = 1$ feltételt kihasználva azt kapjuk, hogy közülük pontosan egyet fog I_i fedni, a másikat pedig I_j. Ezt az alábbi lemmában foglalhatjuk össze:

5.2.1. Lemma. *Legyenek $u \in I_i$, $v \in I_j$ összefüggő szoros elemek, $i \neq j$. Ekkor két eset lehetséges:*

- *$u \vee v \in I_i - I_j$, $u \wedge v \in I_j - I_i$, ekkor azt mondjuk, hogy v alulról függ u-tól*
- *$u \vee v \in I_j - I_i$, $u \wedge v \in I_i - I_j$, ekkor pedig mondjuk azt, hogy v felülről függ u-tól.*

Tehát $u \in I_i$, $v \in I_j$ esetén az, hogy v alulról függ u-tól, azt jelenti, hogy $m_j \preceq u, v \preceq M_i$. Ebből adódik az alábbi egyszerű megfigyelés:

5.2.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy $u, u' \in I_i$, $v', v \in I_j$, $i \neq j$, és $u \preceq u'$, $v' \preceq v$ mindannyian szoros elemek. Ekkor ha v alulról függ u-tól, akkor v' is alulról fog függeni u'-től.*

A PUSHDOWN-REDUCE algoritmus egy $\mathcal{I}$ fedésből kiindulva vagy megad egy ugyanannyi elemű független rendszert, vagy pedig egy eggyel kevesebb elemű fedést. Ha valamelyik I_j intervallum nem tartalmaz szoros elemet, akkor őt elhagyhatjuk, és készen vagyunk. Egyébként pedig t jelöli azt, hogy hanyadik fázisban járunk. Minden fázisban minden I_j intervallumban adott egy $u_j^{(t)}$ szoros elem. Induláskor ez Q_j-vel, I_j maximális szoros elemével lesz egyenlő. Ha egy lépésben az $u_j^{(t)}$ elemek páronként függetlenek ($j = 1, \ldots, k$), akkor készen vagyunk: kaptunk egy optimális duális megoldást. Tegyük most fel, hogy valamely $u_j^{(t)}$-hez vannak olyan $u_i^{(t)}$-k ($i \neq j$), akik alulról függnek $u_j^{(t)}$-től. Ekkor $u_j^{(t+1)}$-et a legnagyobb olyan $u_j^{(t)}$-nél kisebb I_j-beli szoros elemnek választjuk, aki mindezen $u_i^{(t)}$-ktől független. Ha valamely $t = t^*$-ra és j-re nem tudunk $u_j^{(t+1)}$-et választani, akkor a REDUCE$(j, t^*, \mathcal{I})$ meghívásával eggyel csökkentjük a fedés méretét.

REDUCE$(j, t^*, \mathcal{I})$-ben visszafelé haladunk a fázisok során: $t = t^*, ..., 1$. A t. lépésben az $s = t^* + 1 - t$ jelölést használva az $[m_{j_s}, M_{j_s}]$ intervallumot fogjuk $[m_{j_{s+1}}, M_{j_s}]$-re lecserélni úgy, hogy $[m_{j_{s+1}}, M_{j_s}]$ tartalmazza az $u_{j_{s+1}}^{(t)}$ elemet. Végül tehát $[m_{j_{t^*+1}}, M_{j_{t^*}}]$ tartalmazni fogja $u_{j_{t^*+1}}^{(1)}$-t. Belátjuk, hogy $[m_{j_{t^*+1}}, M_{j_{t^*}}]$-ban benne lesz $[m_{j_{t^*+1}}, M_{j_{t^*+1}}]$ összes szoros eleme, s így ez utóbbi intervallum elhagyható lesz. Ezáltal egy eggyel kisebb fedéshez jutunk.

Algorithm PUSHDOWN-REDUCE($\mathcal{I}$)
for $j = 1, ..., k$ do
  Ha I_j nem tartalmaz szoros elemet, akkor
    megállunk a kisebb $\{I_i : i = 1, ..., j-1, j+1, ..., k\}$ fedéssel
  $u_j^{(1)} \leftarrow Q_j$
for $t = 1, 2, ...$ do
  Ha az $u_i^{(t)}$ elemek páronként függetlenek akkor
    megállunk e maximális független rendszerrel
  for $j = 1, ..., k$ do
    $u_j^{(t+1)} \leftarrow$ PUSHDOWN($j, t, \mathcal{I}$)

Procedure PUSHDOWN($j, t, \mathcal{I}$)
  $V \leftarrow \{x : m_j \preceq x \preceq u_j^{(t)}$, x szoros, és semmilyen i-re x nem függ alulról $u_i^{(t)}$-től$\}$
  Ha $V = \emptyset$ akkor
    $t^* \leftarrow t$;
    REDUCE($j, t^*, \mathcal{I}$)
  kimenet: a maximális $x \in V$

Procedure REDUCE($j, t^*, \mathcal{I}$)
  $j_1 \leftarrow j$;
  for $t = t^*, ..., 1$ do
    $s \leftarrow t^* + 1 - t$
    $q_{j_s} \leftarrow [m_{j_s}, M_{j_s}]$ minimális szoros eleme
    $j_{s+1} \leftarrow$ olyan $l \neq j_s$ amire $m_l \preceq q_{j_s}$ és $u_l^{(t)} \preceq M_{j_s}$
    $m_{j_s} \leftarrow m_{j_{s+1}}$
  megállunk a kisebb $\{[m_i, M_i] : 1 \leq i \leq k, i \neq j_{t^*+1}\}$ fedéssel.

5.2.1. A helyesség bizonyítása

A helyesség az alábbi lemmákból következik.

5.2.3. Lemma. *Ha a* PUSHDOWN*($j, t, \mathcal{I}$) lépésben V nemüres, akkor van maximális eleme.*

5.2.4. Lemma. *A* REDUCE*($j, t^*, \mathcal{I}$) lépésben*

(i). j_2 létezni fog.

(ii). $t^* = 1$ esetén a kapott intervallumok valóban fedést adnak.

(iii). $\mathcal{I}' = \mathcal{I} - [m_{j_1}, M_{j_1}] + [m_{j_2}, M_{j_1}]$ szintén fedés.

5.2.5. Lemma. *$t^* > 1$ esetén* PUSHDOWN-REDUCE*($\mathcal{I}'$) $t = 1, ..., t^* - 1$-re ugyanazt a kimenetet adja, mint* PUSHDOWN-REDUCE*($\mathcal{I}$), és a $t = t^* - 1$ lépésnél hívja meg* REDUCE*($j_2, t^* - 1, \mathcal{I}'$)-t.*

Ezekből következni fog az algoritmus helyessége. Tekintsük minden j-re az alábbi csökkenő sorozatot:

$$u_j^{(1)} \succeq u_j^{(2)} \succeq ... \succeq u_j^{(t)} \succeq ... \succeq q_j$$

Ha $u_j^{(t)}$ és $u_{j'}^{(t)}$ összefüggők, akkor függjön pl. $u_{j'}^{(t)}$ alulról $u_j^{(t)}$-től. Ekkor a $\textsc{Pushdown}(j,t,\mathcal{I})$ lépésben $u_j^{(t)} \notin V$, tehát ha létezik, akkor $u_j^{(t+1)} \prec u_j^{(t)}$. Ebből következik, hogy az algoritmus egy idő után vagy megtalál egy független rendszert, vagy meghívja $\textsc{Reduce}(j,t^*,\mathcal{I})$-t.

t^* szerinti indukcióval bizonyítjuk, hogy minden t-re *(i)* j_{s+1} létezik; *(ii)* a módosított intervallumrendszer is fedés lesz; *(iii)* az $s = t^*$ lépésben $[m_{j_{t^*+1}}, M_{j_{t^*+1}}]$ elhagyható lesz. $t^* = 1$-re mindez a 5.2.4 lemmából következik, az indukiós lépést pedig a 5.2.5 lemma adja meg.

5.2.3 Bizonyítása. Legyenek $x, x' \in V$ elemek. Ekkor x és x' összefüggőek, és belátjuk, hogy $x \vee x' \in V$. Ebből az állítás következni fog. Tegyük fel, hogy $x \vee x' \notin V$. A 5.1.4. lemma szerint $x \vee x'$ is szoros, és $m_j \preceq x \vee x' \preceq u_j^{(t)}$. Az lehet tehát csak a baj, hogy valamely i-re $u_i^{(t)}$ alulról függ $x \vee x'$-től. Ekkor $m_i \preceq x \vee x'$ és $u_i^{(t)} \preceq M_j$. Az erős intervallum tulajdonság miatt $m_i \preceq x$ vagy $m_i \preceq x'$. A szimmetria miatt feltehetjük az előbbit; ekkor $u_i^{(t)}$ alulról függ x-től is, ellentmondva annak, hogy $x \in V$. □

5.2.4 Bizonyítása. (i) Ha $\textsc{Reduce}(j,t^*,\mathcal{I})$ első lépésében nincs a feltételt kielégítő l, akkor minden olyan i-re, amire $u_i^{(1)} \preceq M_j$, az lesz igaz, hogy $m_i \not\preceq q_j$. Tekintettel arra, hogy $m_j \preceq q_j \preceq u_j^{(t)}$ és q_j szoros, adódik, hogy $q_j \in V$, azaz $V \neq \emptyset$.

(ii) A $t^* = 1$ feltételből $u_{j_2}^{(t^*)} = Q_{j_2}$. j_2 definíciójából $m_{j_2} \preceq q_{j_1} \preceq Q_{j_1} \preceq M_{j_1}$ és $m_{j_2} \preceq q_{j_2} \preceq Q_{j_2} = u_{j_2}^{(t^*)} \preceq M_{j_1}$, azaz $[m_{j_2}, M_{j_1}]$ fedni fogja $[m_{j_2}, M_{j_2}]$ és $[m_{j_1}, M_{j_1}]$ összes szoros elemét.

Egy nem szoros x elemmel akkor lehetne baj, ha $f(x)$ kettővel csökkene. Ez $x \in [m_{j_2}, M_{j_2}] \cap [m_{j_1}, M_{j_1}]$ lenne elképzelhető, ekkor viszont $m_{j_2} \preceq x \preceq M_{j_1}$.

(iii) Be kell látnunk, hogy $\mathcal{I}'$ fed minden $m_{j_1} \preceq x \preceq M_{j_1}$ elemet. Ha x nem volt szoros, akkor ez világos, mivel egy híján az összes eddig őt fedő intervallum megmaradt. j_2 választása miatt viszont $m_{j_2} \preceq q_{j_1} \preceq Q_{j_1} \preceq M_{j_1}$, azaz $[m_{j_2}, M_{j_1}]$ fedi az összes szoros $x \in [m_{j_1}, M_{j_1}]$-et. □

5.2.5 Bizonyítása.

Legyen $I'_{j_1} = [m_{j_2}, M_{j_1}]$. Legyen Z_1 azon $\mathcal{I}$-beli szoros elemek halmaza, amik $\mathcal{I}'$-ben nem szorosak, Z_2 pedig legyen az $\mathcal{I}'$-beli új szoros elemek halmaza. Könnyen belátható az alábbi:

5.2.6. Állítás.

$$Z_1 \subseteq \{x : x \in [m_{j_2}, M_{j_1}], x \not\succeq m_{j_1}\} \tag{5.2}$$

$$Z_2 \subseteq \{x : x \in [m_{j_1}, M_{j_1}], x \not\succeq m_{j_2}\} \tag{5.3}$$

5.2.7. Következmény. *A $\mathcal{I}$ fedésben I_{j_1} szoros elemei éppen ugyanazok lesznek, mint az $\mathcal{I}'$ fedésben I'_{j_1} szoros elemei.*

Ezt a következményt használjuk ki az alábbi állításban:

5.2.8. Állítás. *Tegyük fel, hogy x és y mind $\mathcal{I}$-ben, mind $\mathcal{I}'$-ben különböző intervallumok által fedett szoros elemek. Ekkor ha x alulról függött $\mathcal{I}$-ben y-tól, akkor $\mathcal{I}'$-ben is alulról fog tőle függni; ha x felülről függött $\mathcal{I}$-ben y-tól, akkor $\mathcal{I}'$-ben is felülről fog tőle függni.*

Bizonyítás. Legyenek $x \in I_l$, $y \in I_h$. Ha $h \neq j_1$, $l \neq j_1$, akkor az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy pl. $h = j_1$. Mivel x és y mindkét fedésben szoros elemek, ezért mind $x \vee y$, mind $x \wedge y$ is mindkét fedésben szorosak lesznek. I_l ugyanaz a két fedésben, tehát mindkettőben vagy $x \vee y$-t, vagy $x \wedge y$-t fedi. A 5.2.7 következmény értelmében I_{j_1} is ugyanazt fogja fedni $x \vee y$ és $x \wedge y$ közül, amelyiket I'_{j_1}. □

Jelöljük a PUSHDOWN-REDUCE($\mathcal{I}'$) futásából kapott értékeket $u'^{(t)}_i$-vel ($u'^{(t)}_{j_1}$ az I'_{j_1}-beli szoros elemeket fogja jelölni).

5.2.9. Állítás. *Ha $t < t^*$, akkor $u^{(t)}_h$ nem függhet $\mathcal{I}$-ben alulról q_j-től.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy $u^{(t)}_h$ alulról függ q_j-től. A 5.2.2 állítás miatt ekkor $u^{(t)}_h$ alulról függ $u^{(t)}_j$-től is. Így a PUSHDOWN($j, t, \mathcal{I}$) lépésben V üres lesz, azaz az algoritmus meghívja REDUCE($j, t, \mathcal{I}$)-t, noha $t < t^*$. □

5.2.10. Állítás. $t = 1, ..., t^* - 1$*-re* $u'^{(t)}_i = u^{(t)}_i$, $i = 1, 2, ..., k$.

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk. $t = 1$-re belátjuk, hogy minden h-ra Q_h szoros lesz $\mathcal{I}'$-ben és Q'_h is szoros lesz $\mathcal{I}$-ben. Ebből $Q_h = Q'_h$ következni fog. $h = j_1$-re ez a 5.2.7. következményből adódik. $h \neq j_1$-re tegyük fel először indirekten, hogy Q_h nem lesz szoros $\mathcal{I}'$-ben. Ekkor $Q_h \in Z_1$, azaz (5.2) szerint $u^{(1)}_h = Q_h \in [m_{j_2}, M_{j_1}]$. Mivel $q_{j_1} \in [m_{j_2}, M_{j_1}]$ is teljesül, ezért $u^{(1)}_h$ alulról függ $\mathcal{I}$-ben q_{j_1}-től, ellentmondásban a 5.2.9 állítással $j = j_1$-re. Ezzel beláttuk, hogy Q_h szoros $\mathcal{I}'$-ben is, azaz $Q_h \preceq Q'_h$.

Tegyük most fel, hogy Q'_h nem szoros $\mathcal{I}$-ben, vagyis $Q'_h \in Z_2$, azaz (5.3) alapján $Q'_h \in [m_{j_1}, M_{j_1}]$. A 5.2.7. következmény miatt $q_{j_1} = q'_{j_1}$. Ezért $u'^{(1)}_h = Q'_h$ és q'_{j_1} $\mathcal{I}'$-ben összefüggő szoros elemek, és $u'^{(1)}_h \preceq M_{j_1}$. Ebből az következik, hogy $\mathcal{I}'$-ben $u'^{(1)}_h$ alulról függ q'_{j_1}-től. Tudjuk, hogy $Q_h \preceq Q'_h$-t és hogy $u^{(1)}_h = Q_h \in I_h = I'_h$ szoros elem $\mathcal{I}'$-ben. Az 5.2.2. állítás szerint $u^{(1)}_h$ is alulról függ q'_{j_1}-től $\mathcal{I}'$-ben. Mivel mindketten mindkét fedésben szoros elemek, az 5.2.8. állításból azt kapjuk, hogy $u^{(1)}_h$ $\mathcal{I}$-ben is alulról fog függni $q'_{j_1} = q_{j_1}$-től, ami ellentmondás. Ezzel a $t = 1$ esetre beláttuk az állítást.

Tegyük fel, hogy $t > 1$, és a t-nél kisebb értékekre beláttuk; most belátjuk t-re is ($t \leq t^* - 1$). Legyen V PUSHDOWN($h, t-1, \mathcal{I}$) futásában meghatározott halmaz; legyen V' e halmaz PUSHDOWN($h, t-1, \mathcal{I}'$)-re. Belátjuk, hogy $u'^{(t)}_h$ létezik, és $u^{(t)}_h \in V'$, $u'^{(t)}_h \in V$. Ebből az állítás adódik.

(I.) Tegyük fel indirekten, hogy $u^{(t)}_h \notin V'$

(A) eset: $h \neq j_1$. Az indukció miatt $u^{(t-1)}_i = u'^{(t-1)}_i$, mind $\mathcal{I}$-ben, mind $\mathcal{I}'$-ben szoros elemek ($i = 1, \ldots, k$). Az 5.2.8. állítás alapján $u^{(t-1)}_i$ pontosan akkor függ alulról $u^{(t-1)}_h$-től $\mathcal{I}$-ben, amikor $\mathcal{I}'$-ben. Ezért V és V' definíciójában minden ugyanaz, kivéve a szorosságot: $u^{(t)}_h \notin V'$ csak abban az esetben lehetséges, ha $u^{(t)}_h \in Z_1$. Így (5.2) alapján $u^{(t)}_h \in [m_{j_2}, M_{j_1}]$. Ezért $\mathcal{I}$-ben $u^{(t)}_h$ alulról függ q_{j_1}-től, ellentmondásban a 5.2.9. állítással.

(B) eset: $h = j_1$. $u_{j_1}^{(t)} \notin V'$ az indukció és a 5.2.8 állítás miatt akkor lehetne, ha vagy $u_{j_1}^{(t)} \notin I'_{j_1}$, vagy $u_{j_1}^{(t)}$ nem szoros $\mathcal{I}'$-ben, azaz $u_{j_1}^{(t)} \in Z_1$. Mindkettőnek az az akadálya, hogy $u_{j_1}^{(t)} \succeq q_{j_1} \succeq m_{j_2}, m_{j_1}$.

Tehát beláttuk, hogy minden h-ra $u_h^{(t)} \in V'$, azaz szoros elem $\mathcal{I}'$-ben. $V' \neq \emptyset$ miatt következik, hogy $u'^{(t)}_h$ létezik és $u_h^{(t)} \preceq u'^{(t)}_h$.

(II.) Tegyük fel most, hogy $u'^{(t)}_h \notin V$.

(A) eset: $h \neq j_1$. Az (IA) esethez hasonlóan az lehet a baj, ha $u'^{(t)}_h \in Z_2$, azaz (5.3) miatt $u'^{(t)}_h \in [m_{j_1}, M_{j_1}]$. Innen a $t = 1$ eset bizonyításához hasonlóan adódik az ellentmondás kihasználva azt, hogy $u_h^{(t)} \preceq u'^{(t)}_h$ és $u_h^{(t)} \in I_h = I'_h$ szoros elem.

(B) eset: $h = j_1$. Az (IB) esethez hasonlóan vagy $u'^{(t)}_{j_1} \notin I_{j_1}$, vagy $u'^{(t)}_{j_1} \in Z_2$. Az (I). ben belátottak miatt $m_{j_1}, m_{j_2} \preceq q_{j_1} \preceq u_{j_1}^{(t)} \preceq u'^{(t)}_{j_1}$, ami szintén gátja mindkét lehetőségnek. □

Ezek után a lemma állításának második fele már egyszerűen következik. Az alábbiakban V a PUSHDOWN$(j_2, t^* - 1, \mathcal{I})$-ben definiált halmaz, V' pedig PUSHDOWN$(j_2, t^* - 1, \mathcal{I}')$-ben ugyanez. Azt állítjuk, hogy $V' = \emptyset$.

Tegyük fel ezzel szemben, hogy $V' \neq \emptyset$, azaz $u'^{(t^*)}_{j_2}$ létezik. Láttuk, hogy $u'^{(t^*)}_{j_2} \notin V$ csupán akkor lehetne, ha $u'^{(t^*)}_{j_2} \in Z_2$. Ez $u'^{(t^*)}_{j_2} \succeq m_{j_2}$ miatt lehetetlen. Tehát $u'^{(t^*)}_{j_2} \in V$, ezért $u'^{(t^*)}_{j_2} \preceq u_{j_2}^{(t^*)} \preceq M_{j_1}$, azaz $u'^{(t^*)}_{j_2} \in [m_{j_2}, M_{j_2}] \cap [m_{j_2}, M_{j_1}]$, de ez ellentmond annak a feltevésnek, hogy $\mathcal{I}'$-ben szoros volt. □

5.3. Az általános eset

A $0 - 1$ értékű esethez hasonlóan az algoritmus kiindul egy $\mathcal{I} = \{I_i : I_i = [m_i, M_i] : 1 \leq i \leq k\}$ fedésből, és vagy megad egy kisebb fedést, vagy ad egy tanút $\mathcal{I}$ minimalitására. ($\mathcal{I}$ ugyanazt az intervallumot többször is tartalmazhatja.) Legyen minden $i = 1, \ldots, k$-ra adott egy $u_i \in I_i$ szoros elem.

5.3.1. Állítás. *Ha minden i, j-re u_i és u_j vagy függetlenek, vagy $u_i = u_j$, akkor ezen $\{u_i\}$ elemek optimális duális megoldást adnak.*

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy ha valamely y-ra létezik olyan i, amire $y = u_i$, akkor pontosan $p(y)$ darab ilyen i létezik. Mivel $y = u_i$ szoros, így pontosan $p(y)$ darab j-re lesz $y \in I_j$. A feltétel szerint egy ilyen j-re u_i és u_j vagy független, vagy $u_i = u_j$. Ám függetlenek nem lehetnek, hiszen az I_j intervallum mindkettejüket fedi. □

Lényeges különbség a 0-1 esethez képest abban lesz, hogy az I_i és I_j intervallumoknak lehet közös szoros elemük, sőt, egy u_i I_i-n kívül más intervallumokban is szerepelhet. Legyenek $x \in I_i$, $y \in I_j$ összefüggő szoros elemek. Értsük x és y (i, j)-szerinti viszonya alatt azt, hogy az $x \vee y$ és $x \wedge y$ elemek közül melyeket tartalmazza I_i és melyeket I_j. A 5.2.1 lemmában leírt esetekben mondjuk azt, hogy x és y regulárisan függő pár (i, j)-szerint. Egyébként egy összefüggő párra mondjuk azt, hogy nemregulárisan függenek. A 0-1 esetben ilyen nem volt: abból, hogy $x \vee y \in I_i$, következett, hogy $x \vee y \notin I_j$. Ez általában már nem lesz igaz, a szoros fedési tulajdonság alapján összesen annyit mondhatunk, hogy mind I_i, mind I_j az $x \vee y$ és $x \wedge y$ elemek közül legalább egyet tartalmaz.

A nemreguláris függési viszonyok közül egyet szükséges még megneveznünk: ha $x \wedge y \in I_i \cap I_j$, akkor mondjuk azt, hogy x és y (i, j)-szerint *lent kapcsolt* pár. Ha az (i, j) szerinti viszonyban egyértelmű, hogy mi az i és a j (pl. u_i és u_j esetén), akkor ezt nem fogjuk külön mondani. Megjegyezzük, hogy az 5.2.2. állítás az általános esetben is igaz marad.

Az algoritmus lényegét a 0-1 eset kis módosításával kapott PUSHDOWN-REDUCE adja. Ezt addig tudjuk alkalmazni, amíg vannak regulárisan függő $u_i^{(t)}$, $u_j^{(t)}$ párok. Elképzelhető azonban, hogy a PUSHDOWN-REDUCE végén még marad olyan $u_i^{(t)}$ és $u_j^{(t)}$, akik nem regulárisan függenek.

Szerencsére azonban ez esetben már igaz lesz az, hogy a fedés minimális. A kapott $u_i^{(t)}$-kből kiindulva az egyszerű, mohó PUSHTOMIN szubrutinnal meg fogunk találni egy tanút.

5.3.1. PUSHDOWN-REDUCE az általános esetben

Algorithm PUSHDOWN-REDUCE($\mathcal{I}$)
for $j = 1, ..., k$ do
  Ha I_j nem tartalmaz szoros elemet, akkor
    megállunk a kisebb $\{I_i : i = 1, ..., j-1, j+1, ..., k\}$ fedéssel
  $u_j^{(1)} \leftarrow Q_j$
for $t = 1, 2, ...$ do
  Ha az $u_i^{(t)}$ elemek páronként vagy függetlenek vagy nem regulárisan függnek, akkor
    PUSHTOMIN($\{u_i^{(t)}\}$)
  for $j = 1, ..., k$ do
    $u_j^{(t+1)} \leftarrow$ PUSHDOWN($j, t, \mathcal{I}$)

Az algoritmusban PUSHDOWN($j, t, \mathcal{I}$) és REDUCE($j, t^*, \mathcal{I}$) szó szerint ugyanaz lesz, mint a 0-1 esetben. A helyesség igazolásához is ugyanazokat a lemmákat látjuk be, mint a 0-1 esetben, bizonyításaik természetesen módosulni fognak.

5.3.2. Lemma. *Ha a* PUSHDOWN*($j, t, \mathcal{I}$) lépésben V nemüres, akkor van maximális eleme.*

5.3.3. Lemma. *A* REDUCE*($j, t^*, \mathcal{I}$) lépésben*

(i). j_2 létezni fog.

(ii). $t^* = 1$ esetén a kapott intervallumok valóban fedést adnak.

(iii). $\mathcal{I}' = \mathcal{I} - [m_{j_1}, M_{j_1}] + [m_{j_2}, M_{j_1}]$ szintén fedés.

5.3.4. Lemma. *$t^* > 1$ esetén* PUSHDOWN-REDUCE*($\mathcal{I}'$) $t = 1, ..., t^* - 1$-re ugyanazt a kimenetet adja, mint* PUSHDOWN-REDUCE*($\mathcal{I}$), és a $t = t^* - 1$ lépésnél hívja meg* REDUCE*($j_2, t^* - 1, \mathcal{I}'$)-t.*

5.3.2 Bizonyítása. A 0-1 esetnél most kissé bonyolultabb feltételünk lesz arra, hogy mikor függ $u_i^{(t)}$ alulról x-től $m_j \preceq x \preceq u_j^{(t)}$ esetén.

5.3.5. Állítás. *Tegyük fel, hogy $u_i^{(t)}$ alulról függ $u_j^{(t)}$-től, és x szoros elem, $m_j \preceq x \preceq u_j^{(t)}$. (i) $u_i^{(t)}$ pontosan akkor függ alulról x-től, ha $m_i \preceq x \not\preceq M_i$. (ii) $u_i^{(t)}$ pontosan akkor nem függ alulról x-től, ha vagy $m_i \not\preceq x$, vagy $m_i \preceq x \preceq M_i$.*

V maximális elemének létezéséhez ismét azt kell belátni, hogy ha $x, x' \in V$, akkor $x \vee x' \in V$. Tegyük fel, hogy $x \vee x' \notin V$. Az 5.1.4. lemma szerint $x \vee x'$ is szoros, és $m_j \preceq x \vee x' \preceq u_j^{(t)}$. Az lehet tehát csak a baj, hogy valamely i-re $u_i^{(t)}$ alulról függ $u_j^{(t)}$-től és $x \vee x'$-től is. Az 5.3.5. állítás szerint ekkor $m_i \preceq x \vee x' \not\preceq M_i$. Az erős intervallum tulajdonság miatt $m_i \preceq x$ vagy $m_i \preceq x'$. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $m_i \preceq x$. Ekkor $u_i^{(t)}$ nem függhet alulról x-től, tehát a 5.3.5 állítás miatt $m_i \preceq x \preceq M_i$, vagyis $x \in I_i$. A szoros fedési tulajdonság miatt vagy $x \vee x' \in I_i$, vagy $x \wedge x' \in I_i$. Az előbbit kizártuk, tehát $m_i \preceq x \wedge x' \preceq x'$. Ekkor x-hez hasonlóan $x' \in I_i$ lesz. Ha azonban $x, x' \in I_i$, akkor $x \vee x' \in I_i$, ami ellentmondás. □

5.3.3 Bizonyítása. (i) A PUSHDOWN($j_1, t^*, \mathcal{I}$) lépésben $q_{j_1} \notin V$. Mivel $m_{j_1} \preceq q_{j_1} \preceq u_{j_1}^{(t)}$ szoros elem, ezért kell legyen olyan l, akire $u_l^{(t^*)}$ alulról függ $u_{j_1}^{(t^*)}$-tól. Ez az l megfelelő lesz. *(ii)* és *(iii)* bizonyítása ugyanaz, mint a 0-1 esetben. □

5.3.4 Bizonyítása. Világos, hogy azon $\mathcal{I}$-beli szoros elemek halmaza, amik $\mathcal{I}'$-ben nem szorosak, és az $\mathcal{I}'$-beli új szoros elemek halmaza ugyanaz a Z_1 és Z_2, ami a 0-1 esetben volt (ld. (5.2),(5.3)). Igaz lesz a 5.2.7. következmény is. A 5.2.8. állításnak megfelelően igaz lesz az alábbi, szó szerint ugyanazzal a bizonyítással.

5.3.6. Állítás. *Ha $x \in I_h$ és $y \in I_l$ $\mathcal{I}$-ben és $\mathcal{I}'$-ben is szoros elemek, akkor x és y viszonya (h, l) szerint ugyanaz $\mathcal{I}$-ben és $\mathcal{I}'$-ben.*

A 0-1 esethez hasonlóan jelöljük a PUSHDOWN-REDUCE($\mathcal{I}'$) futásából kapott értékeket $u'^{(t)}_i$-vel ($u'^{(t)}_{j_1}$ az I'_{j_1}-beli szoros elemeket fogja jelölni).

Legyen most j és $t \leq t^*$ tetszőleges, és $x \in I_j$ szoros elem, melyre $x \not\preceq u_j^{(t)}$. Legyen t_0 a legnagyobb olyan index, amelyre $x \preceq u_j^{(t_0)}$. Ez létezni fog, mivel $x \preceq Q_j = u_j^{(1)}$, hiszen x szoros. A PUSHDOWN($j_1, t_0, \mathcal{I}$) lépésben $x \notin V$, kell legyen tehát olyan d, hogy e lépésben $u_d^{(t)}$ alulról függött x-től. Ekkor mondjuk azt, hogy $u_j^{(t)}$ esetén x átugrásának $u_d^{(t_0)}$ az oka. (Egy átugrásnak persze több oka is lehet.)

5.3.7. Állítás. *$u_j^{(t)}$ esetén legyen $x \in I_j$ átugrásának $u_d^{(t_0)}$ az oka.*

(i) $m_d \preceq x \not\preceq M_d$, $u_d^{(t_0)} \preceq M_j$.

(ii) Ha $m_d \preceq u_j^{(t)}$, akkor $u_j^{(t)} \preceq M_d$

(iii) Ha $x = u_j^{(t)} \vee z$, akkor $m_d \preceq z$.

Bizonyítás. (i) Az első fele az 5.3.5. állításból következik, az utóbbi pedig abból, hogy $u_d^{(t_0)}$ alulról függött $u_j^{(t_0)}$-tól.

(ii) Ekkor $m_d \preceq u_j^{(t)} \preceq u_j^{(t_0)}$, és innen $u_j^{(t_0)} \preceq M_d$ az 5.3.5. állítás szerint.

(iii) $m_d \preceq x$, tehát az erős intervallum tulajdonság szerint vagy $m_d \preceq u_j^{(t)}$, vagy $m_d \preceq z$. Az utóbbi esetben készen vagyunk. Tegyük fel, hogy $m_d \preceq u_j^{(t)}$. A (ii) pont szerint ekkor $u_j^{(t)} \in I_d$. A szoros fedési tulajdonságot használva $x = u_j^{(t)} \vee z \in I_d$ vagy $u_j^{(t)} \wedge z \in I_d$. Az első alternatívát kizártuk az (i) pontban, tehát $u_j^{(t)} \wedge z \in I_d$, azaz $m_d \preceq u_j^{(t)} \wedge z \preceq z$. $\square$

Az 5.2.9. állítás helyett az alábbi lesz igaz:

5.3.8. Lemma. *Ha $t \leq t^*$-ra q_j és $u_h^{(t)}$ összefüggőek, akkor $q_j \preceq u_h^{(t)}$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $u = u_h^{(t)}$ és $q = q_j$ összefüggőek, ám $q \npreceq u$. Legyen $u_h^{(t)}$ az az ellenpélda, amire t minimális. Legyen $s = u \vee q$, $w = u \wedge q$. A szoros fedési tulajdonság miatt vagy $s \in I_j$, vagy $w \in I_j$. Az utóbbi esetben - mivel $w \in I_j$ pontos és I_j minimális pontos eleme q - azt kapjuk, hogy $q \preceq w \preceq u$, noha ennek feltettük az ellenkezőjét. Tehát $s \in I_j$, azaz $s \preceq M_j$.

Szintén a szoros fedési tulajdonság miatt $s \in I_h$ vagy $w \in I_h$. Tegyük fel, hogy $s \notin I_h$. Ekkor $w \in I_h$, ahonnan $s \in I_j$ és $w \notin I_j$ miatt u alulról függ q-tól. Így $\textsc{Pushdown}(j, t, \mathcal{I})$ futásakor V üres lesz, azaz az algoritmus meghívja $\textsc{Reduce}(j, t^*, \mathcal{I})$-t, noha $t < t^*$, s ez ellentmondás.

Az a lehetőség maradt hát, hogy $s \in I_j \cap I_h$. Mivel feltettük, hogy $q \npreceq u$, ezért $s = q \vee u \npreceq u$. Legyen $u_d^{(t_0)}$ annak az oka, hogy u átugrotta s-et. A 5.3.7 állítás (iii) pontja alapján ($x = s$, $z = q$, $j = h$ szereposztással) $m_d \preceq q$. Mivel $m_d \preceq u_d^{(t_0)} \preceq M_h$ és $m_d \preceq q \preceq M_h$, ezért $u_d^{(t_0)}$ és q összefüggőek. t minimális választása és $t_0 < t$ miatt $q \preceq u_d^{(t_0)} \preceq M_d$. Innen azt kapjuk, hogy $q \in I_d$.

A szoros fedési tulajdonság miatt tehát vagy $s \in I_d$, vagy $w \in I_d$. A 5.3.7 állítás (i) pontja miatt $s \notin I_d$, tehát $w \in I_d$, azaz $m_d \preceq w \preceq u$. Ekkor a 5.3.7 állítás (ii) pontja szerint $u \in I_d$. Ha viszont $q, u \in I_d$, akkor $s = u \vee q \in I_d$, ismét csak ellentmondás. $\square$

Ennek párjaként $\mathcal{I}'$-re az alábbi fog teljesülni:

5.3.9. Lemma. *Tegyük fel, hogy $t \leq t^*$-ra és $h \neq j$-re $u'^{(t)}_h$ létezik, q'_j és $u'^{(t)}_h$ összefüggő elemek, és $q'_j \npreceq u'^{(t)}_h$. Ekkor $u'^{(t)}_h$ alulról függ q'_j-től.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $u = u'^{(t)}_h$ és $q = q'_j$ összefüggőek. Legyen $u'^{(t)}_h$ az az ellenpélda, amire t minimális.

5.3.10. Állítás. *Ha $t_0 < t$, és valamely d-re $u'^{(t_0)}_d$ és q'_j összefüggőek, akkor $q'_j \preceq u'^{(t_0)}_d$*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $u'^{(t_0)}_d$ és q'_j összefüggőek, ám $q'_j \npreceq u'^{(t_0)}_d$. Ekkor t minimalitása miatt $u'^{(t_0)}_d$ alulról függ q'_j-től. Emiatt $\textsc{Pushdown}(j, t_0, \mathcal{I}')$ futásakor V' üres lesz, azaz az algoritmus meghívja $\textsc{Reduce}(j, t_0, \mathcal{I}')$-t, noha $t_0 < t$ és $u'^{(t)}_h$ létezett, tehát $\textsc{Pushdown-Reduce}(\mathcal{I}')$ nem érhet véget a t_0. lépésben. $\square$

A 5.3.8 lemma bizonyításának nyomán azt kapjuk, hogy vagy u alulról függ q-tól - ez esetben készen vagyunk - vagy $s \in I_j \cap I_h$. Innentől a bizonyítás szó szerint ugyanaz lesz, mint a 5.3.8. lemma esetében, azzal az egy különbséggel, hogy $q \preceq u'^{(t_0)}_d \preceq M_d$ a 5.3.10. állításnak lesz a következménye. $\square$

5.3.4 bizonyításában a lényegi állítás is ugyanaz lesz, mint a 0-1 esetben:

5.3.11. Állítás. *$t = 1, \ldots, t^* - 1$-re $u'^{(t)}_i = u^{(t)}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk. $t = 1$-re belátjuk, hogy minden h-ra Q_h szoros lesz $\mathcal{I}'$-ben és Q'_h is szoros lesz $\mathcal{I}$-ben. Ebből $Q_h = Q'_h$ következni fog. $h = j_1$-re az 5.2.7. állításból adódik. $h \neq j_1$-re tegyük fel először indirekten, hogy Q_h nem lesz szoros $\mathcal{I}'$-ben. Ekkor $Q_h \in Z_1$, azaz (5.2) szerint $u^{(1)}_h = Q_h \in [m_{j_2}, M_{j_1}]$. Teljesül továbbá $q_{j_1} \in [m_{j_2}, M_{j_1}]$ is, tehát q_{j_1} és $u^{(1)}_h$ összefüggőek. (5.2) miatt $m_{j_1} \not\preceq u^{(1)}_h$, és $m_{j_1} \preceq q_{j_1}$ ahonnan $q_{j_1} \not\preceq u^{(1)}_h$ adódik. Ekkor a 5.3.8. lemmát $j = j_1$-re alkalmazva $\mathcal{I}$-ben $u^{(1)}_h$ független q_{j_1}-től, ami ellentmondás. Beláttuk, hogy Q_h szoros $\mathcal{I}'$-ben, tehát Q'_h létezik és $Q_h \preceq Q'_h$.

Tegyük most fel, hogy Q'_h nem szoros $\mathcal{I}$-ben. Ekkor $Q'_h \in Z_2$, azaz (5.3) alapján $Q'_h \in [m_{j_1}, M_{j_1}]$. Másrészt az 5.2.7. állítás miatt $q_{j_1} = q'_{j_1}$. $Q'_h, q'_{j_1} \in I_{j_1}$, tehát $u'^{(1)}_h = Q'_h$ és q'_{j_1} $\mathcal{I}'$-ben összefüggő szoros elemek. Azonban $m_{j_2} \preceq q'_{j_1}$ és $m_{j_2} \not\preceq Q'_h = u'^{(1)}_h$ miatt $q'_{j_1} \not\preceq u'^{(1)}_h$. Ebből 5.3.9 lemmát alkalmazva azt kapjuk, hogy $\mathcal{I}'$-ben $u'^{(1)}_h$ alulról q'_{j_1}-től. Kihasználva a már belátott $u^{(1)}_h \preceq u'^{(1)}_h$-et és azt, hogy $u^{(1)}_h \in I_h = I'_h$ szoros elem, a 5.2.2. állításból adódik, hogy $u^{(1)}_h$ is alulról függ q'_{j_1}-től $\mathcal{I}'$-ben. A 5.3.6 állításból ekkor $u^{(1)}_h$ $\mathcal{I}$-ben is alulról fog függni $q'_{j_1} = q_{j_1}$-től, ami ellentmondás. Ezzel a $t = 1$ esetet beláttuk.

$t > 1$-re legyen V a PUSHDOWN$(h, t-1, \mathcal{I})$ futásában meghatározott halmaz; legyen V' e halmaz PUSHDOWN$(h, t-1, \mathcal{I}')$-re. Belátjuk, hogy $u'^{(t)}_h$ létezik, és $u^{(t)}_h \in V'$, $u'^{(t)}_h \in V$.

(I) Tegyük fel elsőként, hogy $u^{(t)}_h \notin V'$

(A) eset: $h \neq j_1$. Az 5.3.6. állítás miatt csak abból lehet a baj, ha $u^{(t)}_h \in Z_1$. Ekkor azonban (5.2) miatt $m_{j_1} \not\preceq u^{(t)}_h$, azaz $q_{j_1} \not\preceq u^{(t)}_h$. q_{j_1} és $u^{(t)}_h$ összefüggőek, mivel m_{j_2} mindkettejüknél kisebb, M_{j_1} pedig mindkettejüknél nagyobb. Azonban az 5.3.8 lemma miatt $u^{(t)}_h$ és q_{j_1} függetlenek, s ez ellentmondás.

(B) eset: $h = j_1$. A bizonyítás ugyanaz, mint a 0-1 esetben.

Innen már azt is tudjuk, hogy $u'^{(t)}_h$ létezik, sőt, $u^{(t)}_h \preceq u'^{(t)}_h$.

(II) Tegyük most fel, hogy $u'^{(t)}_h \notin V$.

(A) eset: $h \neq j_1$. Az (IA) esethez hasonlóan ekkor az lehet a baj, ha $u'^{(t)}_h \in Z_2$, azaz (5.3) miatt $u'^{(t)}_h, q_{j_1} \in I_{j_1}$. Innen ugyanúgy juthatunk ellentmondásra, mint a $t = 1$ esetben, felhasználva hogy $u^{(t)}_h \preceq u'^{(t)}_h$, és $u^{(t)}_h \in I_h = I'_h$ mindkét fedésben szoros elem.

(B) eset: $h = j_1$. Szintén megegyezik a 0-1 esettel. □

Annak bizonyítására, hogy PUSHDOWN-REDUCE$(\mathcal{I}')$ a $t = t^* - 1$ lépésnél hívja meg REDUCE(j_2)-t, szintén szó szerint elismételhető, amit a 0-1 esetben leírtunk. □

5.3.2. A PUSHTOMIN szubrutin

A PUSHTOMIN algoritmus a t^* időpontban kerül meghívásra, bemenete minden i-re egy $u_i = u^{(t^*)}_i \in I_i$ szoros elem, méghozzá úgy, hogy u_i és u_j vagy függetlenek, vagy (i, j) szerint nem regulárisan függőek.

Legyenek $u_{i_1}, \ldots, u_{i_l}$ tetszőleges elemek. Vegyük őket valamilyen sorrendben és zárójelezéssel, és írjunk közéjük $\wedge$ jeleket. Nevezzük ezt legális zárójelezésnek, ha egy értelmes műveletsort definiál, azaz ebben a sorrendben és zárójelezéssel sorra végre tudjuk hajtani a $\wedge$ műveleteket. (Minden $\wedge$ végrehajtásakor a két tag összefüggő.) Egy legális zárójelezés esetén a végeredményt jelöljük $\wedge\{u_{i_1}, \dots, u_{i_l}\}$-lel és és nevezzük $u_{i_1}, \dots, u_{i_l}$ sormetszetének. Ha nincs legális zárójelezés, akkor a sormetszet nem létezik. Az alábbi lemma szerint viszont ha a van legális zárójelezés, akkor a sormetszet jóldefiniált lesz.

5.3.12. Lemma. *Az $u_{i_1}, \dots, u_{i_l}$ elemek minden legális zárójelezésére ugyanaz lesz az eredmény.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy két különböző legális zárójelezéssel két különböző végeredmény adódott, z és z'. Mindenesetre $z' \preceq u_{i_1}, \dots, u_{i_l}$. Ezért indukcióval látható, hogy a z kiszámítása során minden zárójelben a kiszámított érték legalább z'. (Ha ugyanis valamely y, y' összefüggő elemekre $z' \preceq y$, $z' \preceq y'$, akkor $z' \preceq y \wedge y'$.) Azt kaptuk tehát, hogy $z' \preceq z$, és hasonlóan $z \preceq z'$, vagyis $z = z'$. □

Egy $\wedge H$ sormetszetet nevezzünk *jónak*, ha minden $u_i \in H$-ra $\wedge H \in I_i$. Mondjuk azt, hogy egy $\wedge H$ jó sormetszet *legjobb*, ha H tartalmazásra nézve maximális a jó sormetszetek között.

Megjegyzés Minden i-re az egyelemű $\wedge\{u_i\} = u_i$ sormetszet jó lesz.

A PushToMin algoritmus az alábbi tételen fog alapulni:

5.3.13. Tétel. *(a) Bármely két különböző legjobb sormetszet független. (b) Ha $\wedge H$ és $\wedge L$ sormetszetek, $L \subset H$, akkor létezik olyan $u_i \in H - L$, hogy $\wedge(L + u_i)$ is sormetszet.*

Ebből következik, hogy azok a halmazok, melyek a legjobb sormetszeteket adják, az $\{u_1, \dots, u_k\}$ halmaz egy partícióját alkotják. A (b) rész szerint a legjobb sormetszetek mohón megtalálhatóak, elemek egyenkénti hozzávételével. Az alábbi PushToMin algoritmus tehát optimális duális megoldást ad: minden i-re u_i-t cseréljük le arra az egyértelmű legjobb $\wedge H$ sormetszetre, melyre $u_i \in H$. A tétel belátásához némi előkészületre lesz szükségünk.

5.3.14. Állítás. *Ha M maximális elem, a $\wedge Z$ sormetszet létezik és $\wedge Z \preceq M$, akkor van olyan $u_i \in Z$, amelyre $u_i \preceq M$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\wedge Z$ olyan ellenpélda, melyre $|Z|$ minimális. $|Z| = 1$ nem lehet, tehát $\wedge Z = (\wedge K) \wedge (\wedge K')$ alakban áll elő. Az erős intervallum tulajdonság miatt vagy $\wedge K \preceq M$, vagy $\wedge K' \preceq M$. Tegyük fel, hogy $\wedge K \preceq M$. $|Z|$ minimalitása miatt van olyan $u_i \in K \subseteq Z$, melyre $u_i \preceq M$. □

5.3.15. Lemma. *Legyen $\wedge Z$ sormetszet, $Z = X \cup Y$, $X, Y \neq \emptyset$, $X \cap Y = \emptyset$. Ekkor van olyan $u_i \in X$ és olyan $u_j \in Y$, amelyek összefüggőek.*

Bizonyítás. Legyen $T \subset Z$ olyan, hogy $\wedge T$ létezik, és $|T|$ minimális arra a tulajdonságra nézve, hogy $T \cap X \neq \emptyset$ és $T \cap Y \neq \emptyset$. Ekkor világos, hogy $\wedge T = (\wedge K) \wedge (\wedge K')$ formában áll elő, ahol $K \subseteq X$, $K' \subseteq Y$.

Legyen M olyan maximális elem, melyre $(\wedge K) \vee (\wedge K') \preceq M$. Az előző állítás szerint létezik $u_i \in K \subseteq X$ és $u_j \in K' \subseteq Y$, melyekre $u_i \preceq M$ és $u_j \preceq M$. Mivel $\wedge T$ közös alsó korlátjuk volt, ezért u_i és u_j összefüggőek lesznek. □

5.3.16. Lemma. *Egy $\wedge Z$ sormetszetre ekvivalens az alábbi két állítás: (i) $\wedge Z$ jó sormetszet (ii) bármely $u_i, u_j \in Z$-re u_i és u_j vagy függetlenek, vagy lent kapcsoltak, azaz $u_i \wedge u_j \in I_i \cap I_j$.*

Bizonyítás. Az (i)$\Rightarrow$(ii) irány abból következik, hogy $\wedge Z$ jó sormetszet, tehát $\wedge Z \in I_i \cap I_j$. Innen $u_i \wedge u_j \succeq \wedge Z \succeq m_i, m_j$. A (ii)$\Rightarrow$(i) irány az alábbi állításból fog következni a $Z = T$ esetben.

5.3.17. Állítás. *Tegyük fel, hogy teljesül a (ii) feltétel, létezik a $\wedge T$ sormetszet, $\wedge T \preceq M_i$, továbbá létezik m, amelyre $m \preceq \wedge T$, $m \preceq u_i$. Ekkor $\wedge T \in I_i$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás, és legyen T olyan ellenpélda, akire $|T|$ minimális. Ha $|T| = 1$, akkor $T = \{u_i\}$ nem lehet. Egyébként $m \preceq \wedge T \preceq M_i$, $m \preceq u_i \preceq M_i$ miatt $\wedge T$ és u_i összefüggőek. A lemma feltétele szerint ezért lent kapcsoltak, azaz $(\wedge T) \wedge u_i \in I_i$. Ekkor azonban $m_i \preceq \wedge T \preceq M_i$.

Feltehetjük tehát, hogy $|T| \geq 2$. Legyen $\wedge T = (\wedge K) \wedge (\wedge K')$. Az erős intervallum tulajdonság miatt vagy $\wedge K \preceq M_i$, vagy $\wedge K' \preceq M_i$. A szimmetria révén feltehetjük, hogy $\wedge K \preceq M_i$. $|T|$ minimális választása miatt $\wedge K \in I_i$.

A szoros fedési tulajdonság szerint vagy $\wedge T = (\wedge K) \wedge (\wedge K') \in I_i$, vagy $(\wedge K) \vee (\wedge K') \in I_i$. Az előbbi eset ellentmond T választásának. Az utóbbi esetben $\wedge K' \preceq M_i$. Ismét $|T|$ minimális választása miatt $\wedge K' \in I_i$. Azonban ha $\wedge K, \wedge K' \in I_i$, akkor $\wedge T = (\wedge K) \wedge (\wedge K') \in I_i$ ismét ellentétben T választásával. □

□

5.3.18. Lemma. *Tegyük fel, hogy az s szoros elem az alábbi tulajdonsággal rendelkezik:*

$$\text{minden } l\text{-re, amennyiben } m_l \preceq s, \text{ továbbá } u_l \text{ és } s \text{ összefüggőek, akkor } s \in I_l \tag{5.4}$$

Ekkor minden olyan i-re, amelyre $s \in I_i$, teljesülni fog $s \preceq u_i$.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy létezik olyan u_i, melyre $s \in I_i$, ám $s \not\preceq u_i$. Legyen $u_d^{(t)}$ az u_i s alá nyomásának az oka. Ekkor a 5.3.7. állítás (i) pontja szerint $m_d \preceq s \not\preceq M_d$, és $m_d \preceq s, u_d \preceq M_i$ miatt u_d és s összefüggőek. Ekkor $l = d$ megsérti az (5.4) tulajdonságot. □

5.3.19. Lemma. *Tegyük fel, hogy $\wedge Z$ legjobb sormetszet, $u_l \notin Z$, és $m_l \preceq \wedge Z$. Ekkor $\wedge Z$ és u_l függetlenek.*

Bizonyítás. Azt fogjuk belátni, hogy $s = \wedge Z$ kielégíti az (5.4) feltételt. Ha $u_l \in Z$, akkor $\wedge Z \in I_l$, mivel $\wedge Z$ jó sormetszet. Azt az esetet kell vizsgálnunk, amikor $u_l \notin Z$, u_l és $\wedge Z$ összefüggőek, valamint $m_l \preceq \wedge Z$.

Legyen $Z' = Z + u_l$. $\wedge Z'$ létezni fog: vegyük $\wedge Z$ egy legális zárójelezését, és ennek írjuk a végére u_l-et. Ez Z' egy legális zárójelezése lesz, mivel $\wedge Z$ és u_l összefüggőek. Ha minden $u_i, u_j \in Z'$-re teljesülne, hogy u_i és u_j vagy lent kapcsoltak, vagy függetlenek, akkor a 5.3.16 lemma szerint $\wedge Z'$ egy $\wedge Z$-nél bővebb jó sormetszet lenne.

Bármely $u_i, u_j \in Z$-re $\wedge Z$ jó volta miatt u_i és u_j lent kapcsoltak vagy függetlenek. Tehát kell legyen olyan $u_i \in Z$, hogy u_i és u_l összefüggőek, ám nem lent kapcsoltak. A PUSHTOMIN szubrutin kezdeti feltétele miatt u_i és u_l nem regulárisan összefüggők, tehát vagy $u_i \vee u_l \in I_i \cap I_l$, vagy $u_i \wedge u_l \in I_i \cap I_l$. Az utóbbi esetben lent kapcsoltak lennének, tehát az előbbi teljesül. Ezért $u_i \preceq u_i \vee u_l \preceq M_l$. Azt kaptuk tehát, hogy $m_l \preceq \wedge Z \preceq u_i \preceq M_l$, vagyis $\wedge Z \in I_l$.

Beláttuk hát, hogy $\wedge Z$ teljesíti a (5.4) tulajdonságot. Az 5.3.18 lemma szerint $\wedge Z \in I_l$ következtében $\wedge Z \preceq u_l$. Ekkor $\wedge Z' = \wedge Z$ és $\wedge Z'$ egy $\wedge Z$-nél bővebb jó sormetszet, ellentétben azzal, hogy Z legjobb volt. Ebből az következik, hogy nincs olyan l, melyre $u_l \notin Z$, $\wedge Z$ és u_l összefüggőek, valamint $m_l \preceq \wedge Z$. Ez pedig éppen a lemma állítása volt. □

5.3.13 Bizonyítása. A (b) rész a 5.3.15. lemma következménye az $X = L$, $Y = H - L$ partícióra. Eszerint léteznek $u_j \in L$, $u_i \in H - L$ összefüggő elemek. $\wedge L$-nek és u_i-nek tehát $\wedge H$ közös alsó, $u_i \vee u_j$ közös felső korlátja. Ezért $\wedge(L + u_i)$ sormetszet létezni fog.

Az (a) részhez először tegyük fel, hogy $\wedge K$ és $\wedge K'$ összefüggő legjobb sormetszetek, $K \neq K'$. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor rendezve vannak, pl. $\wedge K \preceq \wedge K'$. Tekintsük a $\wedge(K \cup K') = \wedge K$ sormetszetet az $X = K - K'$, $Y = K'$ partícióval. $X \neq \emptyset$, mivel $K \nsubseteq K'$. Alkalmazhatjuk hát az 5.3.15 lemmát, ami szerint van olyan $u_i \in X$, $u_j \in Y$, melyre u_i és u_j összefüggőek. Ekkor $u_i \notin K'$, $m_i \preceq \wedge K \preceq \wedge K'$ és $\wedge K' \preceq u_i \vee u_j$, tehát u_i és $\wedge K'$ összefüggőek. Ez azonban ellentmond az 5.3.19 lemmának. A továbbiakban feltesszük tehát, hogy $\wedge K$ és $\wedge K'$ nincsenek rendezve.

A szoros fedési tulajdonság szerint minden $u_i \in K \cup K'$-re vagy $(\wedge K) \wedge (\wedge K') \in I_i$, vagy $s = (\wedge K) \vee (\wedge K') \in I_i$.

Legyen B azon u_i-k halmaza, melyekre $s \in I_i$. $B \neq \emptyset$, mivel ha üres halmaz volna, akkor $(\wedge K) \wedge (\wedge K')$ is jó sormetszet lenne, ami ellentmond K és K' legjobb voltának.

Legyen $B_0 = K \cap K'$. Nyilvánvaló, hogy $B_0 \subseteq B$. Legyen $B_1 = K \cap B$, $B_2 = K' \cap B$, $C_1 = K - B$, $C_2 = K' - B$.

5.3.20. Állítás. *Ha $u_i \in C_1$, akkor tetszőleges x-re $\wedge K' \preceq x$ esetén x és u_i függetlenek. Hasonlóan, ha $u_i \in C_2$, akkor $\wedge K \preceq x$ esetén x és u_i függetlenek.*

Bizonyítás. A szimmetria miatt elég a C_1-re vonatkozó állítást belátni. $\wedge K'$-nek és u_i-nek van közös alsó korlátja: $(\wedge K) \wedge (\wedge K')$. Ha $(\wedge K') \preceq x$ és u_i összefüggők volnának, akkor $x \vee u_i$ közös felső korlát lenne. Tehát $\wedge K'$ és u_i összefüggőek, noha $u_i \in C_1$ miatt $m_i \preceq (\wedge K) \wedge (\wedge K') \preceq \wedge K'$, $u_i \notin K'$, vagyis a 5.3.19 lemma miatt függetlennek kellene lenniük. □

5.3.21. Lemma. *Ha $u_i \in B$, akkor $s \preceq u_i$.*

Bizonyítás. Azt kell belátni, hogy s-re teljesül az (5.4) feltétel. Ekkor az állítás az 5.3.18 lemmából adódik. Legyen tehát l olyan, hogy $m_l \preceq s$, valamint s és u_l összefüggőek. Azt kell belátni, hogy $s \in I_l$.

$s = (\wedge K) \vee (\wedge K')$, tehát az erős intervallum tulajdonság miatt $m_l \preceq \wedge K$ vagy $m_l \preceq \wedge K'$. A szimmetria miatt feltehetjük az előbbit. Ekkor $\wedge K$ legjobb sormetszet, $m_l \preceq \wedge K$, valamint $\wedge K$ és u_l összefüggőek, mivel m_l közös alsó, $s \vee u_l$ pedig közös felső korlát. Az

5.3.19. lemma szerint ez csak úgy lehet, ha $u_l \in K$. $K = B_1 \cup C_1$, tehát u_l e két halmaz valamelyikébe esik. Ha $u_l \in B_1$, akkor B definíciója szerint $s \in I_l$. $u_l \in C_1$ pedig lehetetlen, mivel az 5.3.20. állítás szerint u_l és s függetlenek, hiszen $\wedge K' \preceq s$. □

5.3.22. Állítás. *$C_1 = \emptyset$ vagy $C_1 = K$, illetve $C_2 = \emptyset$ vagy $C_2 = K'$.*

Bizonyítás. A szimmetria miatt elég a C_1-re vonatkozó állítást belátni. Tegyük fel indirekten, hogy az $X = C_1$, $Y = B_1$ halmazok egyike sem üres. Alkalmazzuk erre partícióra az 5.3.15. állítást. Ekkor van olyan $u_i \in C_1$, $u_j \in B_1$, hogy u_i és u_j összefüggőek. Az előző állítás szerint $\wedge K' \preceq s \preceq u_j$, ellentmondásban az 5.3.20. állítással. □

$C_1 = \emptyset$ lehetetlen, mivel ekkor minden $u_i \in K = B_1$-re $s \preceq u_i$ volna, ahonnan $\wedge K' \preceq s \preceq \wedge K$ következne, ellentmondásban azzal a feltevéssel, hogy $\wedge K$ és $\wedge K'$ nem voltak rendezve. Tehát $C_1 = K$, s ugyanígy $C_2 = K'$. Ekkor azonban $B = \emptyset$ ellentmondást ad. □

5.4. Megvalósítás gráfokon

Megmutatjuk az algoritmus alkalmazását arra a speciális esetre, amikor egy adott $D = (V, A)$ digráfot szeretnénk adott $\emptyset \neq S, T \subseteq V$ halmazokra k-szorosan ST-összefüggővé növelni. Legyen $\mathcal{P} = \mathcal{A}(S,T)$. A 3.2.3. rész jelöléseivel egy $X \in \mathcal{A}(V,V)$ ST-párra legyen $p_D(X^-, X^+) := (k - \delta(X^-, X^+) - h(X^-, X^+))^+$. Legyen p a p_D vetítése $\mathcal{A}(S,T)$-re; feladatunk most ezen p függvény fedése.

A $\preceq$-ra legkisebb $\mathcal{P}$-beli párok $(s, T - s)$ lesznek minden $s \in S$-re, a legnagyobbak pedig $(S - t, t)$ minden $t \in T$-re.

A $\vee$ és $\wedge$ műveletek metszet- és unióképzéssel végezhetőek. Egy $I_i = [m_i, M_i]$ intervallumban levő összes elemet le tudjuk fedni azzal a $s_i t_i$ éllel, amire $s_i = m_i^-$, $t_i = M_i^+$. Egy $\mathcal{I}$ intervallumrendszerre legyen $E = \{s_i t_i : i = 1, \ldots, k\}$.

Készítsük el a 2.2.2. tétel bizonyításában szereplő gráfot, ahol a kapacitásfüggvény: $g(x'x'') = 1$, $g(x''y') = 1$ minden $xy \in A$-ra. Ezen H hálózat legszűkebb illetve legbővebb minimális $s''t'$ vágásai $s \in S$ és $t \in T$ esetén éppen a legkisebb illetve legnagyobb $\mathcal{P}$-beli $s\bar{t}$ pároknak felelnek meg.

Úgy tudjuk eldönteni, hogy $\mathcal{I}$ fedés-e, hogy a $D' = (V, A + E)$ gráfban tetszőleges pontpárra ellenőrízzük, hogy köztük k-szorosan összefüggő-e a gráf. Azt, hogy az I_j intervallum tartalmaz-e szoros elemet, attól függ, hogy $D'' = (V, A + E - s_j t_j)$ s_j és t_j közt k-szorosan összefüggő-e. Ha nem, akkor Q_j, azaz I_j maximális szoros eleme a legnagyobb $s_j \bar{t_j}$ pár lesz, amit MFMC-vel tudunk meghatározni a H hálózaton.

A PUSHDOWN(j) lépésben $u_j^{(t+1)}$ meghatározásához először megkeressük azokat az i-ket, melyekre $u_i^{(t)}$ alulról függ $u_j^{(t)}$-től. Legyen ezen i-k halmaza J. Tekintsük az alábbi intervallumrendszert (mely általában nem lesz fedés): $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I} - I_j - \{I_i : i \in J\} + \{[m_i, M_j] : i \in J\}$. Könnyen látható az alábbi:

5.4.1. Állítás. *Minden $z \in I_j$ $\mathcal{I}_0$-ban legalább $p(z) - 1$-szer lesz fedve. Legyen $y \in I_j$ a legnagyobb olyan szoros elem $\mathcal{I}$-ben, ami semmilyen $i \in J$-re nem függ alulról $u_i^{(t)}$-től. Ekkor y a $\preceq$-ra legnagyobb olyan elem I_j-ben, mely $\mathcal{I}_0$-ban nincs lefedve.*

Ezt az y-t meg tudjuk találni folyamalgoritmussal. Könnyen látható továbbá, hogy $u_j^{(t)} \wedge y$ lesz V maximális eleme, azaz $u_j^{(t+1)}$. Az algoritmus többi része egyszerűen végrehajtható.

5.4.1. Bonyolultság

Legyen L a leghosszabb lehetséges lánchossz, K pedig egy felső korlát k-ra, az intervallumok számára. Nevezzük triviálisnak azt a $\textsc{Pushdown}(j,t)$ lépést, melynek során $u_j^{(t+1)} = u_j^{(t)}$, és nemtriviálisnak, ha $u_j^{(t+1)} \prec u_j^{(t)}$. A nemtriviális $\textsc{Pushdown}$ lépések száma legfeljebb LK. Mivel minden t-re legalább egy nemtriviális $\textsc{Pushdown}$ van, így a triviálisok száma legfeljebb K-szor annyi, azaz $\mathrm{O}(LK^2)$. ST-összefüggőség növelése esetén $L = n$ és $K = n^2$ felső korlátok lesznek. Ez utóbbi azért, mert egy növelésben nem érdemes kétszer bevenni ugyanazt az élt.

A $\textsc{Pushdown}(j,t)$ lépésben először meghatározzuk a J indexhalmazt, ami $O(K)$ időben tehető meg. Ezzel együtt tudjuk ellenőrízni, hogy $u_j^{(t+1)} = u_j^{(t)}$ teljesül-e, tehát egy triviális $\textsc{Pushdown}$ ideje $O(K)$. Ha ez nem teljesül, akkor $u_j^{(t+1)}$ egy folyamszámítással kapható meg, $O(MC)$ időben, azaz egy nemtriviális $\textsc{Pushdown}$ összesen $O(K+MC)$ időben történik. A $\textsc{Pushdown}$ lépések összideje tehát $O(LK^3 + LK\ MC)$ A $\textsc{Reduce}$ lépés során $t^* \leq LK$. Egy iteráció $O(K)$ időben végrehajtható, tehát a $\textsc{Reduce}$ ideje $O(LK^2)$. A $\textsc{PushToMin}$ egy lépésében csökken a különböző u_i-k száma, azaz a $\textsc{PushToMin}$ ideje $\mathrm{O}(K)$. Így az algoritmus összbonyolultsága $O(LK^3 + LK\ MC) = O(n^7 + n^3n^3) = O(n^7)$. Az ST-összefüggőség növeléséhez kiindulunk egy legfeljebb n^2 elemű fedésből, arra legfeljebb n^2-szer végrehajtva ezt az algoritmust megkapjuk az optimális növelő élhalmazt, legfeljebb $O(n^9)$ időben.

Ha a kiindulási gráfunk $k-1$ összefüggő volt, akkor kicsit jobbat mondhatunk. A 4.6. részben leírt $O(kn^6)$ idejű approximációs algoritmus az optimálisnál legfeljebb $k-1$-gyel több élt ad meg. Ha ez a kiindulási fedés, akkor algoritmusunkat csak k-szor kell lefuttatni, ezért az összbonyolultság $\mathrm{O}(kn^7)$.

Irodalomjegyzék

[1] FRANK A. ÉS JORDÁN T., Minimal Edge-Coverings of Pairs of Sets, *J. Combin. Theory, Ser B 65*, (1995), pp. 73-110

[2] FRANK A. ÉS JORDÁN T., How to Make a Strongly Connected Digraph Two-Connected. *IPCO* (1995) pp. 414-425

[3] FRANK A. ÉS JORDÁN T., Directed vertex-connectivity augmentation *Math. Program 84*, (1999), pp. 537-553

[4] FRANK A., Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements. *SIAM J. Discrete Math. 5*, No. 1 (Feb. 1992), pp. 22-53

[5] T. WATANABE ÉS A. NAKAMURA, Edge-connectivity augmentation problems, *Comput. System Sci. 35*, No 1 (1987), pp. 96-144

[6] K. P. ESWARAN ÉS R. E. TARJAN, Augmentation problems, *SIAM J. Comput. 5*, No. 4 (Dec. 1976), pp. 653-665

[7] GYŐRI E., A minimax theorem on intervals *J. Combin. Theory, Ser B 37*, (1984), pp. 1-9

[8] FRANK A., Finding minimum generators of path systems, *J. Combin. Theory Ser B, 75 n.2*, (March 1999), pp.237-244

[9] FRANK A., Finding minimum weighted generators of a path system, in: R.L. Graham, J. Kratochvil, J. Nesetril, F.S. Roberts (Eds.), Contemporary Trends in Discrete Mathematics, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, AMS, Providence, Rhode Island, Vol. 49, 1999, pp. 129-138.

[10] BENCZÚR A. A., J. FÖRSTER, KIRÁLY Z. Dilworth's Theorem and its application for path systems of a cycle - implementation and analysis, *Proc. European Symp. Alg., Springer Lecture Notes in Computer Science 1643* (1999) pp. 598-609

[11] FRANK A., An Algorithm to Increase the Node-Connectivity of a Digraph, in: Proceedings of the 3rd Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, Tokyo, Japan (2003), 378-387.

[12] BENCZÚR A. A., Pushdown-reduce: an algorithm for connectivity augmentation and poset covering problems, *Discrete Applied Mathematics 129*, (2003), pp. 233-262

[13] S. Enni, A 1-(S,T)-edge-connectivity augmentation algorithm, *Math. Program 84*, (1999), pp. 529-535

[14] Jordán T., Increasing the vertex-connectivity in directed graphs, in: Proceedings of the First Annual European Symposium on Algorithms, Bad Honnef, 1993, Springer Lecture Notes In Computer Science, Vol 726, pp. 236-247, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1993

[15] Jordán T., On the optimal vertex connectivity augmentation, *J. Combin. Theory Ser. B. 63*, (1995) pp. 8-20.

[16] Jordán T. és B. Jackson, Independence free graphs and vertex connectivity augmentation, *EGRES Tech. Report* TR-2001-04

[17] W. Mader, Minimal n-fach zusammenhängende Digraphen, *J. Combin. Theory Ser B, 38*, (1985), pp.102-117

[18] M.R. Henzinger, S. Rao, H.N. Gabow, Computing vertex connectivity: New bounds from old techniques *Journal of Algorithms 34, 2*, (2000) pp. 222-250

[19] Frank A., Válogatott fejezetek a kombinatorikus optimalizálásból *(egyetemi jegyzet)* (2003) `http://www.cs.elte.hu/~frank/jegyzet/valfej2003.ps.gz`

[20] Frank A., Kombinatorikus algoritmusok II. *(egyetemi jegyzet)* (2003) `http://www.cs.elte.hu/~frank/jegyzet/kombal2003.ps.gz`