

A PCF DEF-je

(rövid bevezető a pcf-be és egy topológiai alkalmazás)

Vizer Máté

2005 május

Témavezető : Komjáth Péter egyetemi tanár

1. Bevezetés

Dolgozatom első részében Menachem Kojman: The A,B,C of PCF : a companion to PCF theory, part1. című cikkét[3] követve mutatok egy lehetséges bevezetést a pcf-generátorok definiálásához és létezésük bizonyításához.

Majd ennek egy topológiai alkalmazásaként bizonyítom Shelah és Kojman egy tételét kis számosságú Dowker-tér létezéséről. Dowker-térnek olyan T_4 teret hívunk, amelynek az egységintervallummal vett szorzata nem normális. 1971-ben M.E. Rudin bizonyította ZFC-ben ilyen tér létezését, az ő példája $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ nagyságú volt. Ez volt az egyedüli példa több, mint 20 éven keresztül, míg 1996-ban Balogh Zoltánnak sikerült 2^{\aleph_0} számosságú Dowker-teret konstruálni.

Kojman és Shelah cikkükben[4] $\aleph_{\omega+1}$ nagyságú példát mutatnak, mely azért fontos, mert az előbbi két számosság hatványalakjuk miatt akármekkora lehet ZFC-ben(sőt, akár egyenlőek is).

Bár több, a pcf bevezetését szolgáló cikk jelent meg, melyek nagyobb anyagot fognak át, Kojman cikke mégis stílusa és precizitása miatt tökéletes kedvcsinálónak is. A pcf-ről más stílusú, terjedelmében kb. ekkora nagyon jó anyagot találhatunk [1]-ben és [2]-ben.

Viszont az igazi "alapkönyv" a témában, bár nem bevezető jelleggel, Shelah monográfiája [6], melyért 2000-ben Bolyai-díjat kapott.

És nyíri ismerkedés után térjünk rá az A,B,C-re.

2. Club Guessing

2.1. Definíció. *A rendszámok egy X halmazára jelöljük $accX$ (vagy $acc(X)$)-szel X akkumulációs pontjainak halmazát, azaz $accX = \{\alpha \in On : \alpha = \sup X \cap \alpha\}$.*

Legyen továbbá $naccX = X \setminus accX$ és $clX = X \cup accX$.

2.2. Definíció. *Jelölje c rendszámok egy halmazát és α egy rendszámot. Ezután bevezetjük a $drop$ függvényt, melyre $drop(\alpha, c) = \sup c \cap \alpha$, ha $c \cap \alpha \neq \emptyset$ és $c \cap \alpha = \emptyset$ esetben nem definiáljuk.*

Ha X és c rendszámok halmazai, jelöljük $Drop(X, c)$ -vel a $\{drop(\alpha, c) : \alpha \in X\}$ halmazt.

2.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy c és X a rendszámok halmazai, valamint $\alpha \in On$.*

Ekkor igazak a következő állítások:

1. *$drop(\alpha, c) \leq \alpha$ vagy $drop(\alpha, c)$ nincs definiálva. Egyenlőség pontosan $\alpha \in acc(c)$ esetben áll fenn.*

2. *ha $drop(\alpha, c)$ definiálva van, akkor $drop(\alpha, c) \in clc$.*

3. *$Drop(X, c) \subseteq clc$.*

4. *ha $\alpha_1 \leq \alpha_2$ rendszámok és $drop(\alpha_1, c)$ definiált, akkor $drop(\alpha_2, c)$ is, és $drop(\alpha_1, c) \leq drop(\alpha_2, c)$.*

5. *$\alpha \mapsto drop(\alpha, c)$ rendezéstartó leképezés X egy végszeletén, így $típ Drop(X, c) \leq típ X$.*

6. ha $c_1 \subseteq c_2$ rendszámok részhalmazai, $\alpha \in On$ valamint $drop(\alpha, c_1)$ definiált, akkor $drop(\alpha, c_2)$ is és $drop(\alpha, c_1) \leq drop(\alpha, c_2)$.

7. ha $\langle c_i : i < i^* \rangle$ olyan, hogy $c_i \subseteq On$ és $c_i \subseteq c_j \forall i \leq j < i^*$, akkor $\forall \alpha \in On \exists i(\alpha) < i^*$, melyre $drop(\alpha, c_i)$ stabilizálódik $i(\alpha)$ -nál, azaz $drop(\alpha, c_i)$ vagy nincs definiálva vagy pedig konstans $i(\alpha) \leq i < i^*$ -ra.

8. ha $\langle c_i : i < \kappa \rangle$ rendszámok részhalmazainak tartalmazásra nézve monoton csökkenő sorozata, κ egy reguláris számosság és $X \subseteq On$, melyre $|X| < \kappa$, akkor $\exists i(X) < \kappa$ úgy, hogy $Drop(X, c_i)$ stabilizálódik $i(X)$ -nél, azaz $Drop(X, c_i(X)) = Drop(X, C_i) \forall i(X) \leq i < \kappa$ -ra.

9. $accDrop(X, c) = accX \cap acc(c)$.

Bizonyítás: Az első állítás $drop(\alpha, c)$ definíciójából következik, a többiek - az utolsó kivételével - pedig az előzőekből illetve abból, hogy a rendszámok jól vannak rendezve.

Nézzük az utolsót: először a \subseteq irányt bizonyítjuk. Legyen $\beta \in accDrop(X, c)$ és legyen $\langle drop(\alpha_i, c) : i < i^* \rangle$ egy β -ban kofinális, szigorúan monoton növő rendszámsorozat, melyre $\alpha_i \in X \forall i < i^*$ -re. Ugyanitt igaz az is, hogy $\alpha_i \leq drop(\alpha_{i+1}, c)$, hiszen egyébként $drop(\alpha_i, c) \geq drop(\alpha_{i+1}, c)$, ami lehetetlen. Mivel $\forall i$ -re $drop(\alpha_i, c) \in clc(2. \text{ pont})$, kapjuk, hogy $\beta \in acc(acc(c)) = acc(c)$. Végül $drop(\alpha_i, c) \leq \alpha_i$ (1.pont) és $\alpha_i \leq drop(\alpha_{i+1}, c) < \beta$ miatt, hogy $\beta \in accX$.

A \supseteq irányhoz tegyük fel, hogy $\beta \in accX \cap acc(c)$. Legyen $\langle \beta_i : i < i^* \rangle \subseteq \beta \cap c$, β -ban nem korlátos sorozat. Mivel $\beta \in accX$, $\forall i < i^*$ -re definiálva van a következő rendszám $\alpha_i = \min(\beta \cap X \setminus (\beta_i + 1))$. Így $\beta_i \leq drop(\alpha_i, c) < \beta$ és $\beta \in accDrop(X, c)$.

□

2.4. Tétel. Tegyük fel, hogy κ, λ reguláris, $\kappa^+ < \lambda$ valamint $S \subseteq \langle \delta < \lambda : cf \delta = \kappa \rangle$ egy stacionárius részhalmaza. Ekkor létezik egy $\bar{C} = \langle c_\delta : \delta \in S \rangle$ sorozat, amely teljesíti a következő két feltételt:

1. $c_\delta \subseteq \delta$ δ -nak zárt részhalmaza.

2. bármely $E \subseteq \lambda$, λ -ban kofinális zárt halmazra $N(E) = \langle \delta \in S : c_\delta \subseteq E \wedge sup c_\delta = \delta \wedge \text{típ } c_\delta = \kappa \rangle$ λ -nak egy stacionárius részhalmaza.

Bizonyítás: Két egyszerűsítési észrevétellel kezdjük. Először is, ha $\langle c_\delta : \delta \in S \rangle$ kielégíti a 2.feltételt, valamint hogy $c_\delta \subseteq \delta$, akkor $\langle clc_\delta \cap \delta : \delta \in S \rangle$ eleget tesz mindkét tételbeli követelménynek. Másodszor pedig, a tételnek megfelelő sorozatban minden egyes c_δ -t helyettesítve egy kofinális részhalmazával, szintén megfelelő sorozatot kapunk.

Ezután rátérünk a bizonyításra. Először transzfinit indukcióval "gyártunk" minden $i < \kappa^+$ -ra egy $C_i = \langle c_\delta^i : \delta \in S \rangle$ sorozatot és egy $E_i \subseteq \lambda$ (λ -ban) kofinális zárt részhalmazt a következőképpen. Legyen $E_0 = \lambda$ és $C_0 = \langle c_\delta^0 : \delta \in S \rangle$ olyan sorozat, melyre $c_\delta^0 \subseteq \delta$ típusú, δ -ban kofinális zárt halmaz. Két indukciós feltevésünk lesz: az első, hogy $c_\delta^i = Drop(c_\delta^0, E_i)$ δ -nak zárt részhalmaza, a második pedig, hogy ha $j < i$ akkor $E_i \subseteq E_j$. $i=0$ -ra mindkét feltétel fennáll.

Ha $i < \kappa^+$ limeszrendszám és E_j, C_j definiálva vannak minden $j < i$ -re, legyen $E_i = \bigcap_{j < i} E_j$. Mivel $i < \lambda$, a metszet λ -ban kofinális zárt. Legyen $c_\delta^i = Drop(c_\delta^0, E_i)$

minden $\delta \in S$ -re. c_δ^0 és E_i zárt halmazok, ezért az előző lemma 9. pontja szerint c_δ^i is az (és $\subseteq \delta$). Az 5. pont szerint pedig típ $c_\delta^0 \leq \kappa$.

Tehát feltehetjük, hogy $i=j+1 < \kappa^+$ és E_j, C_j definiálva vannak. Ha létezik $E \subseteq \lambda$ kofinális zárt, hogy $\forall \delta \in E \cap S$ -re vagy c_δ^i nem kofinális zárt δ -ban vagy pedig $c_\delta \not\subseteq E$, válasszuk E_i -t $E_j \cap E$ -nek.

Ha nem létezik $E \subseteq \lambda$ a fenti tulajdonságokkal, akkor minden $E \subseteq \lambda$ kofinális zártra $N^j(E) = \langle \delta \in S : \delta = \sup c_\delta^j \wedge c_\delta^i \subseteq E \rangle$ stacionárius λ -ban. Ugyanis, ha léteznének $E, E' \subseteq \lambda$ kofinális zártak, melyekre $N^j(E) \cap E' = \emptyset$, azaz $\delta \in S \cap E'$ -ből következne, hogy $c_\delta^j \not\subseteq E$, akkor $E \cap E'$ λ olyan kofinális zárt részhalmaza lenne, amelyet E_i definíciójában akartunk.

Ebben az esetben $c_\delta^i = \text{Drop}(c_\delta^0, E_j)$ az előző lemma 9. pontja szerint zárt, az 5. pontja szerint rendtípusa $\leq \kappa$, tehát ha nem korlátos δ -ban, akkor rendtípusa pontosan κ . A fentivel együtt ekkor megvagyunk.

Végül legyen E_{i+1} definiálva minden $i < \kappa^+$ -ra, ebből akarunk ellentmondásra jutni. Válasszuk E -t $\bigcap_{i < \kappa^+} E_i$ -nak. Mivel $\kappa^+ < \lambda$, E kofinális zárt λ -ban, és legyen $\delta \in \text{acc} E \cap S$. Az előző lemma 8. pontja szerint a $\langle c_\delta^i : i < \kappa^+ \rangle$ sorozat stabilizálódik valamely $i(\delta) < \kappa^+$ -nál, hiszen $\langle E_i : i < \kappa^+ \rangle$ monoton csökkenő és $c_\delta^i = \text{Drop}(c_\delta^0, E_i)$. Mivel $\delta \in \text{acc}(c_\delta^0) \cap \text{acc}(E_i) \forall i < \kappa^+$ esetén, a lemma 9. pontja szerint c_δ^i δ -ban kofinális zárt. Válasszuk egy $j \geq i(\delta)$ -t. $\delta \in E_{j+1}$ vagy c_δ^j nem kofinális zárt δ -ban vagy $c_\delta \not\subseteq E_{j+1}$. Azonban c_δ^j δ -ban kofinális zárt, $c_\delta^j \not\subseteq E_{j+1}$. De $c_\delta^{i+1} \subseteq \text{cl} E_{j+1} \cap \lambda = E_{j+1}$, így $c_\delta^i \neq c_\delta^{j+1}$, ellentmondásban a stabilizációval.

□

3. Az $I[\lambda]$ ideál

Legyen $\lambda = cf \lambda$, $\lambda > \aleph_0$. Az $I[\lambda]$ ideált a következőképpen definiáljuk.

3.1. Definíció. Legyen $S \subseteq \lambda$. $S \in I[\lambda] \iff \exists \bar{P} = (P_\alpha : \alpha < \lambda)$ és egy λ -ban kofinális zárt E halmaz a következő tulajdonságokkal:

1. $P_\alpha \subseteq P(\alpha)$ és $|P_\alpha| < \lambda$.
2. $\delta \in E \cap S \Rightarrow \delta$ szinguláris és $\exists c \subseteq \delta$, melyre $\delta = \text{sup} c$, típc $< \delta$ és $\forall \gamma < \delta$ $c \cap \gamma \in \bigcup_{\beta < \delta} P_\beta$.

3.2. Lemma. $I[\lambda]$ normális ideál.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $S_\alpha \in I[\lambda] \forall \alpha < \lambda$ és legyenek E_α , $\bar{P}_\alpha = (P_\beta^\alpha : \beta < \lambda)$ a definícióban megadott tulajdonságú halmazok, amik bizonyítják, hogy $S_\alpha \in I[\lambda]$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $(P_\beta^\alpha : \beta < \lambda)$ monoton növény.

Legyen $E = \bigcap_{\alpha < \lambda} E_\alpha$, $S = \bigtriangleup_{\alpha < \lambda} S_\alpha$ és $P_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} P_\beta^\alpha$.

Válasszuk δ -t $E \cap S$ -belinek. S definíciója miatt van $\beta < \delta$, melyre $\delta \in S_\beta$. E definíciója miatt (hiszen $E = \langle \alpha : \beta < \alpha \Rightarrow \alpha \in E_\beta \rangle$) pedig $\delta \in E_\beta$. Így $\delta \in S_\beta \cap E_\beta$, tehát δ szinguláris és létezik egy δ -ban kofinális zárt c halmaz, melyre $c \cap \gamma \in \bigcup_{\epsilon < \delta} P_\epsilon^\beta$ minden $\gamma < \delta$ -ra. De ekkor készen vagyunk, hiszen P_ϵ

definíciójából az $\cup_{\epsilon < \delta} P_\epsilon^\beta \subseteq \cup_{\epsilon < \delta} P_\epsilon$ tartalmazás következik, azaz $c \cap \gamma \in \cup_{\epsilon < \delta} P_\epsilon$. Tehát $S \in I[\lambda]$, ami ekvivalens a normalitással. \square

3.3. Lemma. *Ha $\lambda = cf\lambda$ és $\lambda > \aleph_0$ számosság, akkor $S_0^\lambda = \langle \alpha < \lambda : cf\alpha = \aleph_0 \rangle \in I[\lambda]$.*

Bizonyítás: Legyen $P_\alpha = [\alpha]^{< \aleph_0}$. Ha $\delta \in S_0^\lambda$, $c \subseteq \delta$ bármely α -ban kofinális részhalmaz, melyre $\text{típc} = \omega_0$. Ha $\gamma < \delta$, $c \cap \gamma$ véges, így P_γ -hoz tartozik. \square

3.4. Tétel. *Ha $\lambda = cf\lambda$ és $\lambda > \aleph_0$ számosság, akkor az $S_{< \lambda}^{\lambda^+} = \langle \alpha < \lambda^+ : cf\alpha < \lambda \rangle \in I[\lambda^+]$.*

Bizonyítás: Az előző lemma bizonyítja az állítást $\lambda = \omega_1$ -re, így feltehetjük, hogy $\lambda > \omega_1$.

Minden $\alpha < \lambda^+$ -hoz válasszunk α -nak zárt részhalmazából álló $\langle a_\zeta^\alpha : \zeta < \lambda \rangle$ sorozatot a következők szerint:

1. $\forall \zeta < \lambda$ -ra $a_\zeta^\alpha \subseteq \alpha$ zárt és $|a_\zeta^\alpha| < \lambda$.
2. $\zeta_1 < \zeta_2 \Rightarrow a_{\zeta_1}^\alpha \subseteq a_{\zeta_2}^\alpha$ és ha ζ limesz, akkor $a_\zeta^\alpha = \cup_{\xi < \zeta} a_\xi^\alpha$.
3. $\cup_{\zeta < \lambda} a_\zeta^\alpha = \alpha$.

Legyen $P_\alpha = \langle a_\zeta^\beta \cap \gamma : \beta \leq \alpha, \zeta < \lambda, \gamma \leq \alpha \rangle$. A definícióból következik, hogy $P_\alpha \subseteq P(\alpha)$ és $|P_\alpha| \leq \lambda < \lambda^+$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető $\delta \in S_{< \lambda}^{\lambda^+}$, $\delta > \lambda$. Azt kell megmutatnunk, hogy $\exists c \subseteq \delta$ kofinális zárt, melyre $c \cap \gamma \in \cup_{\beta < \delta} P_\beta$ $\forall \gamma < \delta$ -ra. Válasszuk $c \subseteq \delta$ -ban kofinális zártat, melynek rendtípusa $= cf\delta$ és $\min c > \lambda$. $\forall \Theta \in c$ -re az $E_\Theta = \langle \zeta < \lambda : a_\zeta^\delta \cap \Theta = a_\zeta^\Theta \rangle$ λ -ban kofinális zárt. Ezért $E = \cap_{\Theta \in c} E_\Theta$ is λ egy kofinális zárt részhalmaza.

A definíciók miatt léteznie kell egy ζ_0 rendszámnak, amelyre $c \subseteq a_{\zeta_0}^\delta$. Vegyünk egy $\zeta(*) \in E$ pontot, amire $\zeta(*) > \zeta_0$. Tehát $a_{\zeta(*)}^\delta$ δ zárt részhalmaza, számossága $< \lambda$ és mivel részhalmazként tartalmazza c -t, nem korlátos δ -ban. $\delta > \lambda \Rightarrow \text{típc} a_{\zeta(*)}^\delta < \delta$. Legyen $\gamma < \delta$ tetszőleges. Annak a belátásához, hogy $a_{\zeta(*)}^\delta \cap \gamma \in \cup_{\beta < \delta} P_\beta$ elég $A_{\zeta(*)}^\delta \cap \Theta \in P_\Theta$ valamilyen $\Theta \in c$ -re, ami nagyobb, mint γ , hiszen P_Θ zárt a kezdőszületképzésre.

Fixálva egy ilyen Θ -t, kapjuk $a_{\zeta(*)}^\delta \cap \Theta = a_{\zeta(*)}^\Theta$ -t, mivel $\zeta(*) \in E \subseteq E_\Theta$ és így P_Θ -hoz tartozik. \square

3.5. Tétel. *Ha κ, λ reguláris számosságok és $\kappa^+ < \lambda$, akkor létezik $S \subseteq S_\kappa^\lambda$ stacionárius $I[\lambda]$ -ban.*

Bizonyítás: Ha λ reguláris számosság rákövetkezője, akkor a tétel az előző következménye. Így az első $\lambda > \kappa^+$ eset, amikor az előző tétel nem alkalmazható, $\kappa^{+\omega+1}$. Tehát feltehetjük, hogy $\kappa^{++} < \lambda$. Ezután már az előző tétel miatt csak egy esettel kell foglalkoznunk: ha λ reguláris limesz.

Legyen $\bar{C} = \langle c_\alpha : \alpha \in S_\kappa^{\kappa^{++}} \rangle$, mint a 2.4. tételben.

Rögzítsünk egy $\langle H(\chi), \in \rangle$ elemi részmodelljeiből álló folytonos $\bar{M} = \langle M_i : i \leq \lambda \rangle$ láncot, amely kielégíti a következőket:

- $|M_i| < \lambda$
- $\langle M_j : j \leq i \rangle \in M_{i+1}, i \in M_i$ és $i \subseteq M_i$
- $\bar{C}, \lambda \in M_0$ és $\kappa^{++} + 1 \subseteq M_0$

Definiáljuk Q_i -t $M_i \cap P(i)$ -nek. Az első tulajdonság miatt $|Q_i| < \lambda$.

Legyen $S \subseteq \lambda$ a következő halmaz:

$S = \langle \alpha < \lambda : cf\alpha = \kappa \wedge \exists c \alpha$ -ban kof. zárt, melyre $[(\forall \gamma < \alpha)(c \cap \gamma \in \cup_{i < \alpha} Q_i)] \rangle$.

A $\langle Q_i : i < \lambda \rangle$ sorozat bizonyíték $S \in I[\lambda]$ -ra. Ezután már csak az van hátra, hogy megmutassuk, S stacionárius.

Rögzítsünk $E \subseteq \lambda$ kofinális zártat és azt fogjuk belátni, hogy S -sel vett metszete nem üres. E -t csökkentve feltehetjük, hogy $M_i \cap \lambda = i$ minden $i \in E$ -re. Ez abból következik, hogy $\langle i < \lambda : M_i \cap \lambda = i \rangle$ λ egy kofinális zárt részhalmaza.

Ezután definiálunk egy másik elemi részmodell láncot $H(\chi)$ -ban. $\bar{N} = \langle N_\zeta : \zeta \leq \kappa^{++} \rangle$, mely kielégíti a következőket:

- $\bar{M}, E, \lambda, \bar{C} \in N_0$ és $\kappa^{++} + 1 \subseteq N_0$
- $|N_\zeta| = \kappa^{++}$
- $\langle N_\xi : \xi \leq \zeta \rangle \in N_{\zeta+1} \forall \zeta < \kappa^{++}$ -ra

Definiáljuk $f(\zeta)$ -t $\sup(N_\zeta \cap \lambda)$ -nak. $f : (\kappa^{++} + 1) \rightarrow \theta$ monoton növe és folytonos. Jelöljük Θ -val $f(\kappa^{++})$ -t. A fenti harmadik tulajdonság miatt láthatjuk, hogy $f \upharpoonright \zeta \in N_{\zeta+1}$ minden $\zeta < \kappa^{++}$.

Vegyük észre, hogy minden $\zeta \leq \kappa^{++}$ -ra az $f(\zeta)$ rendszám E -hez tartozik. Ez az elemiségből és abból következik, hogy $E \in N_\zeta$ minden ζ -ra: ha $\beta \in N_\zeta \cap \lambda$ tetszőleges, akkor $N_\zeta \models (\exists \gamma \in \lambda)[\gamma \in E \wedge \gamma > \beta]$. Ekkor létezik $\beta < \gamma \in E \cap N$ és ebből következően E nem korlátos $f(\zeta)$ alatt, amiből következik, hogy $f(\zeta) \in E$. Azaz $\text{ran } f \subseteq E$.

Ezután $M_{\Theta+1}$ -ben fogunk dolgozni. Abból, hogy $\Theta \in M_{\Theta+1}$ és $M_{\Theta+1}$ elemisége miatt tudunk egy $g: \kappa^{++} \rightarrow \Theta, g \in M_{\Theta+1}$ függvényt választani, amely növekvő, folytonos és $\Theta = \sup(\text{ran}(g))$.

Mivel f és g is növekvő és folytonosak κ^{++} -on, képük kofinális Θ -ban, ebből következik, hogy létezik egy $E \subseteq \kappa^{++}$ kofinális zárt, amelyre $f \upharpoonright E = g \upharpoonright E$.

\bar{C} "club guessing" tulajdonsága miatt tudunk fixálni egy $\delta \in S_{\kappa^{++}}$ -t, melyre $c_\delta \subseteq E, \delta = \sup c_\delta$ és $\text{tip } c_\delta = \kappa$. Legyen $c = f[c_\delta] = g[c_\delta]$.

Tehát $c \subseteq f(\delta)$ egy κ rendtípusú kofinális zárt halmaz $f(\delta)$ -ban. Tudjuk, hogy $f(\delta) \in E$ és azt fogjuk megmutatni, hogy $f(\delta) \in S$, mégpedig úgy, hogy belátjuk, $c \cap \gamma \in \cup_{i < \Theta} P_i$ minden $\gamma < f(\delta)$ -ra.

Legyen tehát $X = c_\delta \cap \zeta$ valamely $\zeta \in c_\delta$ -ra c_δ egy kezdőszelete és $Y = f[X]$ c egy megfelelő kezdőszelete. Mivel c_δ és ζ N_0 -hoz tartozik, $X \in N_0 \subseteq N_{\zeta+1}$ és mivel $f \upharpoonright \zeta \in N_{\zeta+1}$ a harmadik feltétel miatt, amit \bar{N} választásánál feltettünk. Ebből következik, hogy $Y = f[X] \in N_{\zeta+1}$.

Ha tudnánk, hogy $Y \in M_i$ valamilyen $i < \lambda$ -ra, akkor készen vagyunk: tegyük fel, hogy $H(\chi) \models \exists i < \lambda [Y \in M_i]$. Mivel $Y, \bar{M}, \lambda \in M_{\zeta+1}$ és $N_{\zeta+1} \prec H(\chi)$, kapjuk, hogy $N_{\zeta+1} \models \exists i < \lambda [Y \in M_i]$ az elemiség miatt. Így létezik $i < f(\zeta + 1) < f(\delta)$, melyre $Y \in P_i$, ahogyan akartuk.

De miért létezik $i < \lambda$?

$X \in M_0$, ám f nem biztos, hogy valamelyik M_i -hez tartozik. De $f \upharpoonright c_\delta = g \upharpoonright c_\delta$, ezért Y -t ($Y = f[X]$) definiálhatjuk g -vel f helyett. $g \in M_{\Theta+1}$, így Y definiálható $M_{\Theta+1}$ -ben és így $Y \in M_{\Theta+1}$.

□

3.6. Tétel. $S \in I[\lambda] \iff \exists E \subseteq \lambda$ *kofinális zárt és egy* $\langle c_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ *sorozat, melyek kielégítik a következőket:*

1. $c_\alpha \subseteq \alpha$ és *típ* $c_\alpha < \alpha$.
2. $\beta \in c_\alpha \Rightarrow \beta$ *rákövetkező rendszám és* $c_\alpha \cap \beta = c_\beta$.
3. $\delta \in S \cap E \Rightarrow \delta$ *szinguláris, típ* $c_\delta = cf \delta$ *és* $\delta = \sup c_\delta$.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy létezik E és egy fenti típusú sorozat. Legyen $P_\alpha = \langle c_\alpha \rangle$. Ha $\delta \in S \cap E$, akkor $c_\delta \subseteq \delta$ nem korlátos δ -ban és *típ* $c_\delta = cf \delta$. $\gamma < \delta \Rightarrow c \cap \gamma = c \cap \epsilon$, ahol $\epsilon = \min[c_\delta \setminus (\gamma + 1)]$ és $c_\delta \cap \epsilon = c_\epsilon \in P_\epsilon$. Azaz $S \in I[\lambda]$.

Az állítás megfordításának bizonyításához vegyünk $S \in I[\lambda]$ -t és legyen $E \subseteq \lambda$ olyan kofinális zárt halmaz valamint $\langle P_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ olyan sorozat, melyek $I[\lambda]$ definíciójában szerepelnek. Ezekből kell egy 1-3-at kielégítő E -t és $\langle c_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ -t készítenünk. Először P_α -ra teszünk néhány kitételt, melyek nem fogják növelni $|P_\alpha|$ -t (amely $< \lambda$). Tegyük fel, hogy χ elegendően nagy reguláris számság és $\alpha \in M \prec H(\chi)$, $P_\alpha = M \cap P^\alpha$. Így tehát ha $x \in P_\alpha$, akkor *típ* x is $\in P_\alpha$, minden limesz rendszámra, melyre $\beta \in P_\alpha$ egy kofinális zárt $e_\beta \subseteq \beta$, melyre *típ* $e_\beta = cf \beta$ is P_α -ban van, és P_α zárt a következő halmazműveletekerek: kivonás, unió, metszet....

Ezután fixáljunk egy növő, folyotnos $\langle \gamma_i : i < \lambda \rangle$ sorozatot, melyre γ_i limeszrendszám minden $i < \lambda$ -ra és $\gamma_{i+1} \setminus \gamma_i \geq |\cup_{\alpha \leq \gamma_i} P_\alpha| + |\gamma_i| + \aleph_0$. $\langle \gamma_i : i < \lambda \rangle$ -t megritkítva feltehetjük, hogy $\gamma_i \in E$ és ha $\gamma_i \in S$, akkor γ_i szinguláris.

Legyen $F_i : \cup_{\alpha \leq \gamma_i} P_\alpha \times \gamma_i \rightarrow (\zeta + 1 : \gamma_i < \zeta < \gamma_{i+1})$ bijektív függvény, úgy, hogy elkódoljon minden (x, β) párt $x \in \cup_{\alpha \leq \gamma_i} P_\alpha$, $\beta \leq \gamma_i$ -re egy (γ_i, γ_{i+1}) -beli rákövetkező rendszámmal.

Ezután próbáljuk meg definiálni c_α -t $\alpha < \lambda$ -ra.

1.eset : α rákövetkező rendszám.

Mivel minden γ_i limeszrendszám, létezik i , melyre $\gamma_i < \alpha < \gamma_{i+1}$.

Ha $\alpha \notin \text{ran} F_i$, legyen $c_\alpha = \emptyset$.

Ha pedig $\alpha = F_i(x, \beta)$ valamely $x \in \cup_{\alpha \leq \gamma_j} P_\alpha$ és $j < i$ -re, legyen $c_\alpha = \emptyset$.

A megmaradó esetben $\beta < \min x$. Ha $x \in \cup_{\alpha \leq \gamma_j} P_\alpha$ valamely $j < i$ -re, legyen szintén $c_\alpha = \emptyset$.

Egyébként pedig:

$c_\alpha = \langle F_j(x \cap \zeta, \beta) :$

1. $\zeta \in x$ és *típ* $x \cap \zeta \in e_\beta$ -hoz tartozik
2. $j < i$ a legkisebb, melyre $x \cap \zeta \in \cup_{\alpha \leq \gamma_j} P_\alpha$
3. minden $\xi \in x \cap \zeta$ -ra, melyre *típ* $(x \cap \zeta) \in e_\beta$, létezik $k < j$, hogy $x \cap \xi \in \cup_{\alpha \leq \gamma_k} P_\alpha$

2.eset : α limeszrendszám: Ha lehetséges, válasszunk egy $c_\alpha \subseteq \alpha$ nem korlátos halmazt, melyre *típ* $cf \alpha < \alpha$, minden $\beta \in c_\alpha$ rákövetkező rendszám és $c_\alpha \cap \beta = c_\beta$. Egyébként legyen $c_\alpha = \emptyset$.

Most pedig leellenőrizzük, hogy $\langle c_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ -ra fennállnak-e az előírt követelmények.

Az 1.: $c_\alpha \subseteq \alpha$ és típ $c_\alpha < \alpha$. Limesz α -ra ez c_α választása miatt van így, ha α rákövetkező, akkor minden zárt részalmazának rendtípusa $< \alpha$.

A 2.: Tegyük fel, hogy $\gamma \in c_\alpha$. Ekkor γ rákövetkező rendszám. Legyen $\Theta \in c_\alpha \cap \gamma$. c_α definíciója miatt létezik $\xi \in x$, melyre típ $x \cap \xi \in e_\beta$ és az a $k (< i)$ a legkisebb, hogy $x \cap \xi \in \cup_{\alpha \leq \gamma_k} P_\alpha$, melyre $\Theta = F_k(x \cap \xi, \beta)$. (ezek a c_α definíciójabeli 1. és 2. kritériumok). c_α harmadik kritériuma alapján és mivel $\xi \in x \cap \zeta$, kapjuk, hogy létezik $l < k$, melyre $x \cap \xi \in \cup_{\alpha \leq \gamma_l} P_\alpha$.

Legyen $y = x \cap \zeta$, és $\gamma = F_j(y, \beta)$, $\beta < \min y$ és $\xi \in y$, úgy, hogy típ $y \cap \xi =$ típ $x \cap \xi \in e_\beta$. Ugyanígy, legyen $k < j$ a legkisebb, melyre $y \cap \xi = x \cap \xi \in \cup_{\alpha \leq \gamma_k} P_\alpha$ és $F_k(y \cap \xi, \beta) = \Theta$.

Így c_γ -ra, ha y -t kicseréljük x -re, mindhárom definícióbeli követelmény fenn fog állni. Tehát $\Theta \in c_\gamma$. A megfordítás szintén igaz, így kapjuk, hogy $c_\alpha \cap \gamma = c_\gamma$.

És végül a 3.: Azt kell megmondanunk, hogy mi legyen E' . Legyen $E' = \langle \gamma(i) : i \text{ limesz} \rangle$. Tegyük fel, hogy $\sigma \in S \cap E'$. Tudjuk, hogy σ szinguláris (mert $\langle \gamma_i : i < \gamma \rangle \subseteq E$) és hogy van $x \subseteq \delta$, típ $x < \sigma$ és $\forall \gamma < \sigma$ $x \cap \gamma \in \cup_{\alpha < \sigma} P_\alpha$. Feltehetjük, hogy $x \in P_\sigma$. Legyen $\beta =$ típ x . Ekkor $\beta \in P_\sigma$ és válasszuk β -t $< \min x$ -nek.

Legyen $\delta = \sup \langle \gamma_i : i < i(*) \rangle$, azaz $\delta = \gamma_{i(*)}$. $e_\beta \subseteq \beta$ és típ $e_\beta = \text{cf } x = \text{cf } \sigma$. Ebből tudjuk, hogy $e_\beta \in P_\beta$.

Definiáljuk y -t $\langle \zeta \in x : \text{típ}(x \cap \zeta) \in e_\beta \rangle$ -nak. Ekkor típ $y =$ típ $e_\beta = \text{cf } \delta$ és $y \subseteq \delta$ kofinális zárt halmaz δ -ban.

Legyen $h(\zeta) = \min \{ j : x \cap \zeta \in \cup_{\alpha \leq \gamma_j} P_\alpha \}$ valamilyen $\zeta \in y$ -ra. Szóval $h: y \rightarrow \langle \gamma_i : i < \lambda \rangle$ és h nem csökkenő, mivel P_{γ_i} kezdőszeletre zárt minden i -re. Sőt, $\forall \zeta \in y$ -ra $h(\zeta) < \gamma_{i(*)} = \delta$.

Legyen $z = \langle \zeta \in y : \forall \xi \in y \cap \zeta$ $h(\xi) < h(\zeta) \rangle$.

Valamint $c = \langle F_{h(\zeta)}(x \cap \zeta, \beta) : \zeta \in z \rangle$.

c -ről akarjuk bizonyítani, hogy jó c_δ -nak. Nem korlátos δ -ban és a rendtípusa $\text{cf } \sigma$. Az egyedüli, amit ellenőriznünk kell, hogy $\gamma \in c \Rightarrow \beta$ rákövetkező rendszám és $c \cap \gamma = c_\gamma$. Azaz elég látnunk, ami igaz, hogy $\alpha = F_{h(\zeta)}(x \cap \zeta, \beta)$ $\zeta \in z$ esetén $j = h(\zeta)$, és $c_\alpha = c \cap \alpha$. Így készen vagyunk.

□

4. Egy kis bevezető a legkisebb felső korlátról

Ebben a fejezetben a rendszámfüggvényeken (melyek egy A végtelen halmazról a rendszámokba képeznek) adott $<_I, \leq_I, \not\leq_I$ relációkat tárgyaljuk, ahol I egy A -n adott ideál. A legfontosabb eset most számunkra az lesz, amikor van egy rendszámfüggvénysorozatunk, amely valamelyik reláció szerint szigorúan monoton nő és kíváncsiak vagyunk a sorozat (vagy hogy egyáltalán létezik-e) legkisebb és egzakt felső korlátjára. (Ezeket a fogalmakat később fogom definiálni)

Tehát legyen A egy végtelen halmaz és $I \subseteq P(A)$ egy ideál A -n. Jelöljük I^* -gal a duális filtert, azaz az $\langle X \subseteq A : A \setminus X \in I \rangle$ részalmazrendszerrel és I^+ -szal a $P(A) \setminus I$ -t. Talán a legkönnyebb úgy elképzelni őket, hogy I -ben az A -n lévő "nullmértékű halmazok", I^* -ban az "egymértékű halmazok", I^+ -ban pedig a "pozitív mértékű halmazok" vannak.

Ezután definiálok a fent említett relációkat. Ha adott az A végtelen halmazról a rendszámokba képező 2 függvény f és g , akkor:

- $f =_I g$ pontosan akkor, ha $\langle a \in A : f(a) \neq g(a) \rangle \in I$
- $f \leq_I g$ pontosan akkor, ha $\langle a \in A : f(a) > g(a) \rangle \in I$
- $f <_I g$ pontosan akkor, ha $\langle a \in A : f(a) \geq g(a) \rangle \in I$
- $f \geq_I g$ pontosan akkor, ha $f \leq_I g$ és $\langle a \in A : f(a) < g(a) \rangle \in I^+$.

A következő jelöléseket is fogom használni:

- $f \leq g$ pontosan akkor, ha $\forall a \in A$ -ra $[f(a) \leq g(a)]$
- $f < g$ pontosan akkor, ha $\forall a \in A$ -ra $[f(a) < g(a)]$
- $f \leq g$ pontosan akkor, ha $f \leq g$ és $f \neq g$.

Hívjuk $f_\alpha : A \rightarrow On$ függvények egy $\langle f_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ sorozatát növekvőnek $<_I (\leq_I \dots)$ szerint akkor és csak akkor, ha $\alpha < \beta < \lambda$ esetén $f_\alpha <_I f_\beta (f_\alpha \leq_I f_\beta \dots)$.

A fejezet hátralevő részére rögzítsünk le A -t és a rajta levő I ideált.

4.1. Definíció. *Tegyük fel, hogy $F = \langle f_\alpha : \alpha < \alpha(*) \rangle$ rendszámfüggvények egy halmaza. Ekkor*

- *egy $g : A \rightarrow On$ függvény pontosan akkor felső korlátja F -nek, ha $f_\alpha \leq_I g$ minden $\alpha < \alpha(*)$ -ra.*
- *egy $g : A \rightarrow On$ függvény pontosan akkor legkisebb felső korlátja F -nek, ha g felső korlátja és $g \leq_I g'$ minden g' felső korlátja.*
- *egy $g : A \rightarrow On$ függvény pontosan akkor egzakt felső korlátja F -nek, ha legkisebb felső korlátja és minden $g' <_I g$ -re létezik $\alpha < \alpha(*)$, hogy $g' < f_I \alpha$.*

Ezután megpróbálunk megfelelő feltételeket keresni, melyek fennállása esetén tudjuk igazolni legkisebb ill egzakt felső korlát létezését egy \bar{f} monoton növény sorozathoz. De ehhez előbb definiálunk egy új fogalmat.

4.2. Definíció. *Legyen $\bar{C} = \langle c_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ olyan sorozat, melyre $c_\alpha \subseteq \alpha$. Egy, az A halmazból a rendszámokba képező függvényekből álló sorozat, $\bar{f} = \langle f_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ pontosan akkor engedelmes \bar{C} -nek, ha $\forall \alpha < \lambda$ -ra és $\forall \beta \in c_\alpha$ -ra $[f_\beta < f_\alpha]$.*

A következő lemma azt állítja, hogy ha egy \bar{C} sorozat, melynek \bar{f} engedelmes "koherens", akkor \bar{f} tartalmaz monoton növény részsorozatot.

4.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy $\bar{f} = \langle f_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ engedelmes $\bar{C} = \langle c_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ -nak. Ha \bar{C} -re teljesül, hogy $\beta \in c_\alpha \Rightarrow c_\beta = c_\alpha \cap \beta$, akkor minden $\alpha < \lambda$ -ra az $\langle f_\beta : \beta \in c_\alpha \rangle$ sorozat $<$ szerint monoton nő.*

Bizonyítás: Legyenek $\beta, \gamma \in c_\alpha$ valamilyen $\alpha < \lambda$ -ra és tegyük fel, hogy $\beta < \gamma$. Mivel $c_\alpha \cap \gamma = c_\gamma$, a sorozat "koherenciájából" kapjuk, hogy $\beta \in c_\gamma$. \bar{f} , engedelmességéből pedig $f_\beta < f_\gamma$.

□

A következőkben egy elégséges feltételt írunk le egzakt felső korlát létezésére $<_I$ szerint monoton növekedő sorozatra.

4.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy $|A| \leq \kappa$ és $\kappa^+ < \lambda = cf \lambda$. Valamint, hogy $S \subseteq S_{\kappa^+}^\lambda = \langle \delta < \lambda : cf \delta = \kappa^+ \rangle$ stacionárius, $S \in I[\lambda]$ és \bar{C} -re teljesülnek a következők:*

1. $\bar{C} = \langle c_\alpha : \alpha < \lambda \text{ és } cf\alpha \leq \kappa^+ \rangle$
 2. $c_\alpha \subseteq \alpha$, típ $c_\alpha < \alpha$
 3. $\beta \in c_\alpha \Rightarrow \beta$ rákövetkező és $c_\alpha \cap \beta = c_\beta$
 4. típ $c_\delta = \kappa^+$ és $supc_\delta = \delta$ minden $\delta \in S$ -re
- Ha $\bar{f} = \langle f_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ (A -ból a rendszámokba képező) függvények $<_I$ szerint monoton növekvő sorozata engedelmes \bar{C} -nek, akkor létezik egzakt felső korlátja.

Bizonyítás:

Először legkisebb felső korlát létezését bizonyítjuk, majd ezután belátjuk, hogy minden legkisebb felső korlát egzakt is.

Legkisebb felső korlátot "approximációval" fogunk keresni. Tehát veszünk egy felső korlátot és ahol lehet csökkentjük, persze hogy felső korlát maradjon. Limesz lépésekben fogjuk kihasználni, hogy \bar{f} engedelmeskedik \bar{C} -nek, így produkálva kisebb felső korlátot.

Transzfinit indukcióval $\zeta (< \kappa^+)$ -ra definiáljuk g_ζ , \bar{f} -hez tartozó felső korlátok sorozatát, hogy a következő teljesüljön rá:

$$\circ \xi < \zeta < \kappa^+ \Rightarrow g_\zeta \leq_I g_\xi$$

Legyen $g_0(a) = \sup \langle f_\alpha(a) + 1 : \alpha < \lambda \rangle$. Minden $\alpha < \lambda$ -ra $g_0 > f_\alpha$, így g_0 felső korlátja az \bar{f} sorozatnak.

Rákövetkező rendszámra, ha lehetséges, $g_{\zeta+1}$ elégítse ki a fentit. Ha nem, akkor g_ζ legkisebb felső korlát és az "approximációnk" véget ért.

Tegyük fel, hogy $\zeta < \kappa^+$ limesz. Azt kell persze belátnunk, hogy ha g_ξ definiálva van minden $\xi < \zeta$ -ra, akkor tudjuk definiálni g_ζ -t is. (tehát a transzfinit indukciónk nem állhat le $< \kappa^+$ limeszrendszámnál.)

Szükségünk lesz az $S_\zeta(a)$ halmaz, h_α^ζ segédfüggvények és egy $\alpha_\zeta < \lambda$ rendszám definícióira, hogy definiálhassuk g_ζ -t.

Tehát:

$$\circ a \in A\text{-ra legyen } S_\zeta(a) = \langle g_\xi(a) : \xi < \zeta \rangle$$

$$\circ \alpha < \lambda\text{-ra } h_\alpha^\zeta(a) = \min(S_\zeta(a) \setminus f_\alpha(a)).$$

A következő lemma h_α^ζ néhány tulajdonságát bizonyítja.

- 4.5. Lemma.** 1. $h_\alpha^\zeta \in \Pi_{a \in A} S_\zeta(a)$ és $h_\alpha^\zeta \geq f_\alpha$.
2. $f_\alpha(a) \leq f_\beta(a) \Rightarrow h_\alpha^\zeta(a) \leq h_\beta^\zeta(a)$ minden $\alpha, \beta < \lambda$ -ra.
 3. fix $\zeta < \kappa^+$ -ra a $\langle h_\alpha^\zeta : \alpha < \lambda \rangle$ sorozat monoton nő \leq_I szerint és \bar{f} bármely $\langle f_\alpha : \alpha \in c, c \subseteq \lambda \rangle$ részhalmazára, amely monoton nő $<$ szerint, $\langle h_\alpha^\zeta : \alpha \in c \rangle$ monoton nő \leq szerint.
 4. ha $\alpha, \beta < \lambda$ és $h_\alpha^\zeta(a) < h_\beta^\zeta(a)$, akkor $h_\alpha^\zeta(a) < f_\beta^\zeta(a)$.
 5. ha $\xi < \zeta < \kappa^+$ és $\alpha < \lambda$, akkor $h_\alpha^\xi \geq h_\alpha^\zeta$.

Bizonyítás: Az első állítás közvetlenül h_α^ζ definíciójából következik.

A másodikhoz legyen $\alpha, \beta < \lambda$. Ha $f_\alpha(a) < f_\beta(a)$, akkor $h_\alpha^\zeta(a) = \min(S_\zeta(a) \setminus f_\alpha(a)) \leq \min(S_\zeta(a) \setminus f_\beta(a)) = h_\beta^\zeta(a)$.

A harmadik a másodikból, a negyedik a definíciókból következik.

Az ötödikhez legyen $\xi < \zeta < \kappa^+$, amely esetben $S_\xi(a) \subseteq S_\zeta(a)$ minden $a \in A$ -ra és ebből persze $h_\alpha^\xi(a) = \min(S_\xi(a) \setminus f_\alpha(a)) \leq \min(S_\zeta(a) \setminus f_\alpha(a)) = h_\alpha^\zeta(a)$.

□

Az $\alpha_\zeta < \lambda$ "stabilizálódási korlát" létezése pedig a következő lemmából jön:

4.6. Lemma. *Létezik $\alpha_\zeta < \lambda$, melyre*

$$\alpha_\zeta \leq \alpha < \lambda \Rightarrow h_\alpha^\zeta =_I h_{\alpha_\zeta}^\zeta.$$

Bizonyítás:

Az előző lemma harmadik pontja szerint $\langle h_\alpha^\zeta : \alpha < \lambda \rangle$ monoton nő $_{\leq I}$ szerint. Ha tehát $\bar{h} = \langle h_\alpha^\zeta : \alpha < \lambda \rangle$ nem stabilizálódna (modulo I), akkor $\forall \alpha < \lambda \exists \gamma < \lambda [h_\alpha^\zeta \not\leq h_\gamma^\zeta]$ és mivel \bar{h} monoton nő $_{\leq I}$ szerint, létezik egy E, λ -beli kofinális zárt halmaz, melyre igaz, hogy ha $\beta \in E \Rightarrow \forall \alpha < \beta [h_\alpha^\zeta \not\leq_I h_\beta^\zeta]$

Mivel S stacionárius, létezik $\delta \in S \cap \text{acc}(E)$.

Ezután rögzítsünk egy $c \subseteq c_\delta$ halmazt, hogy bármely két c-beli pont között legyen E-beli.

A 4.3 lemma miatt az $\langle f_\alpha : \alpha \in c \rangle$ sorozat $<$ szerint monoton növekvő és így a 4.5 lemma értelmében $\langle h_\alpha^\zeta : \alpha \in c \rangle \leq$ szerint nő monoton. Mivel c-t úgy választottuk, hogy bármely két eleme között legyen E-beli, a $\langle h_\alpha^\zeta : \alpha \in c \rangle$ szigorúan monoton nő. $f \leq g$ és $f \not\leq_I g \Rightarrow f < (\neq)g$ bármely két $f, g: A \rightarrow \text{On}$ -re. Tehát ebből következik, hogy $\langle h_\alpha^\zeta : \alpha \in c \rangle$ szigorúan monoton nő. Ez azonban ellentmond annak, hogy $|S_\zeta(a)| \leq \kappa$ minden $a \in A$ -ra, mert hogy $\langle h_\alpha^\zeta(a) : a \in c \rangle$ monoton nő \leq szerint és mivel $|S_\zeta(a)| \leq \kappa$, stabilizálódik $\alpha_a < \kappa^+$ -nál. α -t $\text{sup}(\alpha_a : a \in A) (< \kappa^+)$ -nak választva $h_\alpha^\zeta = h_{\alpha+1}^\zeta$ -et kapunk, ellentmondásban a feltevéssel, mely szerint a sorozat szigorúan monoton nő.

□

Ezt a lemmát használva limeszrendszámokra (mondjuk $\zeta < \kappa^+ - ra$) létezik $\alpha_\zeta < \lambda$ stabilizálódási rendszám és definiáljuk g_ζ -t $h_{\alpha_\zeta}^\zeta$ -nak. Bármely $\alpha_\zeta < \alpha < \lambda$ -ra persze $g_\zeta = h_\alpha^\zeta$, ezért α_ζ -t esetleg növelhetjük is.

4.7. Lemma. *g_ζ egy felső korlát \bar{f} -re és $g_\zeta \leq_I g_\xi (\xi < \zeta)$.*

Bizonyítás:

Legyen adott $\alpha < \lambda$. (α -t esetleg megnövelve feltehetjük, hogy $\alpha \geq \alpha_\zeta$.) Ekkor $f_\alpha \leq h_\alpha^\zeta =_I h_{\alpha_\zeta}^\zeta$, azaz g_ζ egy felső korlátja \bar{f} -nek.

Ha $\xi < \zeta \Rightarrow f_{\alpha_\zeta} <_I g_\xi$, mivel g_ξ felső korlát és \bar{f} monoton nő $<_I$ szerint. Ez azt jelenti, hogy valamely 1 mértékű részhalmazára az A halmaznak $g_\xi(a) > f_{\alpha_\zeta}(a)$. Mivel $g_\xi(a) \in S_\zeta(a)$, minden egyes a -ra tudjuk, hogy $h_{\alpha_\zeta}^\zeta(a) \leq g_\xi(a)$. Ebből persze következik, hogy $g_\zeta \leq_I g_\xi$ bármely $\xi < \zeta$ -re. Mivel ζ limeszrendszám és $g_\xi \geq g_{\xi+1}$ ($\xi < \zeta$) kapjuk, hogy $g_\zeta \leq g_\xi$ ($\xi < \zeta$).

□

A legkisebb felső korlát létezését persze úgy bizonyítjuk, hogy belátjuk, az indukció befejeződik κ^+ előtt. Mivel limeszrendszámnál nem fejeződik be, rákövetkező rendszámra fog, ami pont egy legkisebb felső korlátot jelent. És készen leszünk a legkisebb felső korlát létezésével.

4.8. Lemma. *Valamely $\zeta < \kappa^+$ -ra $g_{\zeta+1}$ nincs definiálva.*

Bizonyítás: Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy indukciónk működik minden $\zeta < \kappa^+$ -ra.

Minden $\zeta < \kappa^+$ limeszrendszámra tudjuk, hogy $g_\zeta = h_{\alpha_\zeta}^\zeta =_I h_\alpha^\zeta$ ($\alpha \geq \alpha_\zeta$). $\lambda > \kappa^+$ regularitása miatt létezik $\alpha(*) < \lambda$ úgy, hogy $g_\zeta =_I h_{\alpha(*)}^\zeta$ minden limesz $\zeta < \kappa^+$ -ra.

A $\langle h_{\alpha(*)}^\zeta : \zeta \in \text{acc}(\kappa^+) \rangle$ stabilizálódik valamely $\zeta(*) \in \text{acc}(\kappa^+)$ rendszámnál a 4.5 lemma miatt. Legyen $\zeta > \zeta(*)$ limeszrendszám. Ekkor $g_{\zeta(*)} \geq g_\zeta = g_{\zeta(*)}$ ellentétben a stabilizálódással.

□

Készen vagyunk.

Miután meglett egy legkisebb felső korlát, belátjuk róla, hogy egzakt felső korlát is.

4.9. Lemma. *Tegyük fel, hogy g egy legkisebb felső korlátja az \bar{f} sorozatnak. Ekkor ha $g' <_I g$, akkor $g' <_I f_\alpha$ valamely $\alpha < \lambda$ -ra.*

Bizonyítás: Legyen $B_\alpha = \langle a \in A : f_\alpha(a) > g'(a) \rangle$. Ha $\alpha < \beta < \lambda$, akkor $B_\alpha \subseteq_I B_\beta$, mert $f_\alpha <_I f_\beta$. Ha B_α/I nem stabilizálódik, akkor létezik egy $E \subseteq \lambda$ kofinális zárt, hogy $\alpha < \beta \in E \Rightarrow B_\alpha \subsetneq_I B_\beta$. Rögzítsünk $\delta \in S \cap \text{acc}(E)$ -t, majd ezután egy kofinális c halmazt, hogy c bármely két eleme között legyen E-beli.

Mivel a választásunk folytán c bármely két eleme között van E-beli, a $\langle B_\alpha : \alpha \in c \rangle$ sorozat szigorúan monoton nő \subseteq_I szerint. De ekkor a 4.3 lemma miatt az $\langle f_\alpha : \alpha \in c \rangle$ is szigorúan monoton nő $<$ szerint, amiből az következik, hogy $\langle B_\alpha : \alpha \in c \rangle \subseteq$ szerint monoton nő. \subsetneq_I és \subseteq szerinti monoton növekedésből pedig következik a \subsetneq szerinti monoton növekedés, amiből kapjuk, hogy $\langle B_\alpha : \alpha \in c \rangle$ A egy szigorúan monoton növvő részhalmazzorozata, ami ellentmond annak, hogy $|A| < \kappa$.

Tehát tegyük fel, hogy B_α/I stabilizálódik valamely $\alpha(*) < \lambda$ -nál. Ha $B_{\alpha(*)} \in I^*$, akkor $f_{\alpha(*)} >_I g'$ és kész vagyunk. Ellenkező esetben minden $\alpha \geq \alpha(*)$ -ra $f_\alpha \upharpoonright (A \setminus B_{\alpha(*)}) \leq_I g' \upharpoonright (A \setminus B_{\alpha(*)})$.

Ebből definiáljuk $g'' = g' \upharpoonright (A \setminus B_{\alpha(*)}) \cup g \upharpoonright B_{\alpha(*)}$ -ot. g'' felső korlátja \bar{f} -nek és $g'' \leq g$, hiszen $g' <_I g$ és $A \setminus B_{\alpha(*)} \in I^*$. Ez pedig ellentmond annak, hogy g legkisebb felső korlát.

□

befejeztük a tétel bizonyítását.

□

Ejtsünk pár szót $I[\lambda]$ bizonyításbeli szerepéről. Abból, hogy \bar{f} engedelmeskedik \bar{C} -nek és \bar{C} koherenciájából a 4.3 lemma alapján következik, hogy \bar{f} monoton nő "lokálisan", vagyis részsorozatokban, melyeket $c_\delta \in \bar{C}$ -vel indexeltünk. Tudjuk, hogy ha \bar{h}^ζ nem stabilizálódik modulo I , monoton nő \leq_I szerint λ egy kofinális zárt részhalmazán. És azt is tudjuk, hogy lehetetlen \bar{h}^ζ bármely κ^+ hosszú részsorozatának \leq szerint monoton nőnie, hiszen $h^\zeta \in \bar{h}^\zeta$ képtere benne van $\Pi S_\zeta(a)$ -ban.

Mivel azonban $S \in I[\lambda]$ stacionárius, belehetjük E egy akkumulációs pontját (δ -t) S-be és közrefogva c_δ E-beli pontokkal, találhatunk egy κ^+ hosszú sorozatot, amely mindkét reláció szerint szigorúan monoton nő.

Ugyanez van megismételve a 4.9. lemmában: ha a B_α sorozat nem stabilizálódik modulo I, akkor egy kofinális zárt halmazon nő. Van S-ben minden kofinális zártnak akkumulációs pontja, ezért találhatunk κ^+ hosszú részsorozatot, amelyen B_α nő mind \subseteq , mind \subsetneq_I szerint.

A 4.4. tételbeli engedelmességo feltételt elhagyhatjuk, ha feltesszük hogy $2^{|A|} < \lambda$.

Végül azt is megjegyezhetjük, hogy a későbbiekben arra lesz jó egy $I|\lambda$ -beli stacionárius halmaz, hogy elhagyhatunk $2^{|A|}$ -ről bármilyen feltételt.

5. A PCF elmélet alapfogalmai

Tehát ebben a fejezetben elkezdjük tárgyalni a PCF("possible cofinality"-ból jön a rövidítés)-et, lényegében reguláris számosságok egy kis halmazának egy, a halmazon lévő ideállal lefaktorizált szorzatával fogunk foglalkozni.

5.1. Definíció. Legyen $\langle P, \leq \rangle$ egy részbenrendezett halmaz, azaz \leq egy tranzitív és reflexív reláció P -n. ($p < q$ -t írunk, ha $p \leq q$, de $q \not\leq p$)

- Egy $D \subseteq P$ részhalmaz kofinális pontosan akkor, ha $\forall p \in P \exists d \in D [p \leq d]$
- P kofinalitása (cfP) a legkisebb számosság, amekkora egy P -beli kofinális részhalmaz számossága lehet.

- Egy $\bar{d} = \langle d_i : i < \lambda \rangle$, P elemeiből álló sorozat monoton növő és kofinális, ha $<$ szerint monoton növő és kofinális.

- P -nek pontosan akkor létezik valódi kofinalitása, ha létezik egy monoton növő, kofinális \bar{d} részhalmaza. Ekkor P valódi kofinalitása ($tcfP$ =true cofinality of P) a legkisebb számosság, amekkora egy monoton növő, kofinális részhalmaz lehet.

Minden részbenrendezett halmaznak van kofinalitása. De pl ha az $(\omega_n : n < \omega)$ részbenrendezett halmazoknak vesszük a diszjunkt unióját, akkor ennek a kofinalitása \aleph_ω és nincs valódi kofinalitása. Így P kofinalitásának nem kell feltétlenül reguláris számosságnak lennie és nem is biztos, hogy van valódi kofinalitása. (de ha létezik $tcfP$, akkor reguláris és $tcfP=cfP$)

5.2. Definíció. Reguláris számosságok egy A halmazára legyen $pcf A =$ ($tcf \Pi A / I : I$ egy A -n lévő ideál és $\Pi A / I$ -nek létezik valódi kofinalitása)

A \leq_I reláció értelmezve volt bármely két, az A halmazból a rendszámokba menő függvényre, és persze alkalmazható bármely, a szorzatban lévő függvényre (hiszen képzelhetjük a szorzatot függvények halmazaként, azaz $\Pi A = \langle f : f$ egy függvény A -n, $\forall a \in A$ -ra $[f(a) \in A]$). Tegyük fel, hogy $\Pi A / I$ -nek létezik valódi kofinalitása és rögzítsünk egy függvényekből álló monoton, kofinális sorozatot $\bar{f} = \langle f_\alpha : \alpha < tcf \Pi A / I \rangle$ -t. Minden $I' \supseteq I$ ideálra persze \bar{f} monoton növő kofinális lesz, ezért $tcf \Pi A / I' = tcf \Pi A / I$. És végül mivel minden A fölötti ideált ki lehet terjeszteni egy duális ultaszűrővé, kapjuk a következő ekvivalens átfogalmazást:

5.3. Lemma. $pcfA = \langle cf\Pi A/D : D \text{ ultrafilter } A\text{-n} \rangle$

Bizonyítás:

□

A Los tétele miatt $\Pi A/D$ (ahol D ultrafilter) teljesen rendezett halmaz és így mindig létezik valódi kofinalitása.

Jegyezzük meg, hogy $A \subseteq pcfA$, az egy elem által generált ultrafilterek miatt.

Tehát most elkezdjük a szorzatok valódi kofinalitásainak vizsgálatát.

5.4. Definíció. Legyen $A \subseteq REG$ és tegyük fel, hogy $|A| < \min A$. Reguláris λ -ra definiáljuk $J_{<\lambda}[A] = \langle B \subseteq A : B \in D \Rightarrow cf\Pi A/D < \lambda \text{ minden } A\text{-n lévő } D \text{ ultrafilterre} \rangle$ -t.

Mivel $cf\Pi A/D$ mindig reguláris, az hogy μ szinguláris estén $J_{<\mu^+} = J_{<\mu}$, triviális.

A következő tétel a későbbiekben elég használhatónak bizonyuló információt ad azokkal az ideálokkal faktorizált szorzatról, ahol az ideál kiterjeszti $J_{<\lambda}$ -t. Tehát:

5.5. Tétel. Ha $\min A > |A|$, akkor $\Pi A/J_{<\lambda}$ λ -irányított.

Bizonyítás: Transzfinit indukcióval $\mu < \lambda$ -ra bizonyítjuk, hogy bármely $F \subseteq \Pi A$ -nek, melyre $|F| = \mu$, van felső korlátja $\Pi A/J_{<\lambda}$ -ban.

Tehát legyen adva $F \subseteq \Pi A$ és tegyük fel, hogy $|F| = \mu$.

1. eset: ha μ szinguláris.

Az indukciós hipotézist használva az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $F = \langle f_\alpha : \alpha < \mu \rangle$ monoton nő $<_{J_{<\lambda}}$ szerint. Válasszunk ki ebből egy kofinális sorozatot $\langle f_{\alpha_\zeta} : \zeta < cf\mu \rangle$ -t.

Mivel $cf\mu < \mu$, az indukciós hipotézis ad egy $g \in \Pi A/J_{<\lambda}$ felső korlátot az $\langle f_{\alpha_\zeta} : \zeta < cf\mu \rangle$ sorozathoz, ami persze felső korlátja F -nek is.

2. eset: μ reguláris és $|\mu \cap A| < \aleph_0$. Legyen $g(a) = \sup\{f(a) : f \in F\}$ minden $a \geq \mu$ -re A -ban és $g(a) = 0$, ha $a \in A \cap \mu$. Mivel $A \cap \mu$ véges, $A \cap \mu \in J_{<\lambda}$ és $g \in \Pi A/F$ egy felső korlátja.

3. eset: μ reguláris és $A \cap \mu$ végtelen. Legyen $\kappa = |A|^+$. Mivel $|A| < \min A$, tudjuk, hogy $\kappa^+ < \mu$. A 3.5 tétel miatt találhatóunk egy $S \subseteq S_{\kappa^+}^\mu$ stacionárius halmazzal, ahol $S \in I[\mu]$. Soroljuk fel F -et $\langle f_\alpha : \alpha < \mu \rangle$. Az indukciós hipotézis használatával definiáljuk transzfinit indukcióval $\alpha < \mu$ -re a következő $\langle h_\alpha : \alpha < \mu \rangle$ sorozatot, amely eleget tesz az alábbi kívánalmaknak:

1. $h_\alpha >_I f_\beta$ és $h_\alpha >_I h_\beta$ minden $\beta < \alpha$ -ra.

2. $\bar{h} = \langle h_\alpha : \alpha < \mu \rangle$ engedelmeskedik \bar{C} -nek.

A feltételekből adódóan az α -adik lépésnél tudunk definiálni egy $g_\alpha \in \Pi A$ felső korlátot a $\langle h_\beta : \beta < \alpha \rangle \cup \langle f_\beta : \beta < \alpha \rangle$ halmaznak, és ezután legyen $h_\alpha(a) = \max(\langle g_\alpha(a) \rangle \cup \langle h_\beta(a) : \beta \in c_\alpha \rangle)$ minden $a \in A \setminus \kappa^+$ -ra és válasszuk $h_\alpha(a)$ -t α -nak, ha $a \in A \cap \kappa^{++}$.

Az előző fejezet 4.4 tételéből következően találhatóunk egy g egzakt felső korlátot $\leq_{J_{<\lambda}}$ szerint \bar{h} -hoz. Mivel $h_\alpha(a) < a$ minden $a \in A \setminus \kappa^{++} \in J_{<\lambda}$ -ra,

az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $g(a) \leq a$ minden $a \in A$ -ra. Legyen $B = \langle a \in A : g(a) = a \rangle$.

5.6. Lemma. $B \in J_{<\lambda}$.

Bizonyítás: Ha $B \notin J_{<\lambda}$, akkor tudunk találni egy olyan B -t tartalmazó D ultrafiltert A -n, amelyre $D \cap J_{<\lambda} = \emptyset$. D duálisa kiterjeszti $J_{<\lambda}$ -t, tehát $\bar{h} = \langle h_\alpha : \alpha < \mu \rangle$ egy monoton növekvő sorozat $<_D$ szerint is. Minden $f \in F$ -re legyen f' az a függvény, melyet f -ből úgy kapunk, hogy $(A \setminus B)$ -n kicseréljük a konstans 0-ra. Mivel $B \in D$, $f =_D f'$, és mivel $f' <_{J_{<\lambda}} g$ és g egzakt felső korlát, létezik olyan $\alpha < \mu$, hogy $f' <_{J_{<\lambda}} h_\alpha$. Mivel D kiterjeszti $J_{<\lambda}^*$ -t, $f =_D f' <_D h_\alpha$. Így \bar{h} monoton növekvő, kofinális $\Pi A/D$ -ben, bizonyítva hogy $\text{cf} \Pi A/D = \mu < \lambda$. Ezután $J_{<\lambda}$ definíciójából levonhatjuk, hogy $B \in J_{<\lambda}$. \square

Tudjuk, hogy $B \in J_{<\lambda}$ és definiáljuk át g -t B -n nullának, amitől még egzakt felső korlátja marad \bar{h} -nak $\leq_{J_{<\lambda}}$ szerint. (de így már ΠA -hoz fog tartozni). \bar{h} definíciója miatt g F egy felső korlátja.

\square

Ezután bizonyítom a λ -irányítottság néhány következményét.

5.7. Tétel. Ha D egy A -n lévő ultrafilter, akkor $\text{cf} \Pi A/D = \min\{\lambda : D \cap J_{<\lambda^+} \neq \emptyset\}$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy D egy ultrafilter A -n és legyen λ a legkisebb számosság, melyre $D \cap J_{<\lambda^+} \neq \emptyset$. $J_{<\lambda^+}$ definíciója miatt ekkor $\text{cf} \Pi A/D \leq \lambda$.

Visszafelé, D kiterjeszti $J_{<\lambda}^*$ -t, hiszen $D \cap J_{<\lambda^+} = \emptyset$ és ekkor természetesen \leq_D kiterjeszti $\leq_{J_{<\lambda}}$ -t. A 5.5 tétel miatt a $\Pi A/J_{<\lambda}$ irányított, tehát a $\Pi A/D$ is az, és ebből következően a kofinalitása legalább λ .

\square

5.8. Tétel. Ha μ limesz számosság, akkor $J_{<\mu} = \bigcup_{\lambda < \mu} J_{<\lambda}$.

Bizonyítás: Legyen $J = \bigcup_{\lambda < \mu} J_{<\lambda}$ valamely μ limesz számosságra. $J \subseteq J_{<\mu}$, ami $J_{<\mu}$ definíciójából nyilvánvaló.

Visszafelé, ha $B \notin J$, akkor létezik egy $B \in D$ ultrafilter A -n, melyre $D \cap J = \emptyset$. Mivel D kiterjeszti $J_{<\lambda}$ -t minden $\lambda < \mu$ -re, az 5.7. tételből kapjuk, hogy $\text{cf} \Pi A/D \geq \lambda$. Ebből pedig, hogy $\text{cf} \Pi A/D \geq \mu$ és $B \notin J_{<\mu}$.

\square

5.9. Tétel. Minden $B \subseteq A$ halmazra létezik egyértelműen egy reguláris λ számosság, melyre $B \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$.

Bizonyítás: Mivel $\text{cf} \Pi A/D < |\Pi A|^+$ bármely A -n lévő D ultrafilterre, minden $B \subseteq A$ halmazra létezik legkisebb μ , melyre $B \in J_{<\mu}$. Az előző tételből tudjuk, hogy μ nem lehet limesz, ebből következően $\mu = \lambda^+$ és $B \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$. Mivel $J_{<\mu}$ monoton növekvő μ -ben, λ egyértelmű. És nyilvánvaló, hogy λ reguláris.

\square

5.10. Tétel. *pcfA-nak létezik legnagyobb eleme.*

Bizonyítás: Az előző tétel biztosít egy egyértelmű reguláris λ számosságot, melyre $A \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$. Ebből következően $\text{cf} \Pi A / D \leq \lambda$ minden A fölötti D ultrafilterre tehát $\lambda \geq \sup \text{pcf} A$.

A másik irányú becsléshez legyen D egy A fölötti ultrafilter, melyre $D \cap J_{<\lambda} = \emptyset$. Ilyen D biztosan létezik, hiszen $A \notin J_{<\lambda}$. A $\text{cf} \Pi A / D$ kofinalitás legalább λ , hiszen D kiterjeszti $J_{<\lambda}^*$ -t és így az előző bekezdéssel együtt megkaptuk, hogy $\lambda \in \text{pcf} A$.

Tehát $\lambda = \max \text{pcf} A$.

□

5.11. Tétel. *Ha $|A| < \min A$, akkor $|\text{pcf} A| \leq 2^{|A|}$.*

Bizonyítás: Az 5.3 lemma miatt 1-1 értelmű kapcsolat van $\text{pcf} A$ elemei és a $\langle J_{<\lambda} : \lambda \in \text{pcf} A \rangle$ növekvő ideálsorozat tagjai közt. Ám egy ilyen növekvő ideállánc hossza legfeljebb $2^{|A|}$ lehet.

□

Vizsgáljuk most pcf -et, mint egy operációt a reguláris rendszámok részhalmozatain. Tudjuk, hogy $A \subseteq \text{pcf} A$, illetve nyilvánvaló, hogy $\text{pcf} A \cup B = \text{pcf} A \cup \text{pcf} B$. Ha még azt is tudnánk, hogy $\text{pcf} \text{pcf} A = \text{pcf} A$, akkor ez az operáció kielégítené a topológiai lezárás axiómáit. És persze most ez érdekel minket, hogy mikor. A válasz a kérdésre pedig, hogy egy olyan modelljében a halmazelméletnek, ahol nincsenek elérhetetlen számosságok, igaz. De a valódi állítás az, hogy ha nincsen elérhetetlen számosság $\text{acc}(\text{pcf} A)$ -ban, akkor is igaz. Ezt fogjuk most bizonyítani...

5.12. Tétel. *Tegyük fel, hogy $B \subseteq \text{pcf} A$ és $|B| < \min B$. Ekkor $\text{pcf} B \subseteq \text{pcf} A$.*

Ennek a tételnek a következménye a fent említett állítás, azaz

5.13. Tétel. *Tegyük fel, hogy nincs elérhetetlen számosság $\text{acc}(\text{pcf} A)$ -ban. Ekkor $\text{pcf} \text{pcf} A = \text{pcf} A$.*

Bizonyítás: Legyen $\lambda_0 = \sup \text{pcf} A$. Ekkor λ_0 vagy nem elérhetetlen vagy nem akkumulációs pontja $\text{pcf} A$ -nak. Mindkét esetben $\lambda_1 = |\text{pcf} A| < \lambda_0$. Legyen $B_0 = \text{pcf} A \cap (\lambda_1, \lambda_0]$. Mivel $\min B_0 > |\text{pcf} A|$, használhatjuk az 5.12. tételt, amiből következik, hogy $\text{pcf} B_0 \subseteq \text{pcf} A$.

Indukciót használva definiálhatjuk $\lambda_{n+1} = \text{cf} |\text{pcf} A \cap (\lambda_n + 1)|$ -t és legyen $B_n = \text{pcf} A \cap (\lambda_{n+1}, \lambda_n]$. Mivel a $\langle \lambda_n : n < \omega \rangle$ sorozat szigorúan monoton csökken, véges sok lépés után befejeződik az indukció (azaz $B_{n+1} = \emptyset$ és $\lambda_{n+1} = 0$ valamely n -re) és ez $\text{pcf} A$ véges sok részre bontását adja ($B_l : l \leq n$) részekre, melyekre igaz, hogy $\text{pcf} B_l \subseteq \text{pcf} A$ minden $l \leq n$ -re. Mivel minden A-n lévő ultrafilter valamelyik B_l -re "koncentrálódik" (azaz B_l -l metszve az ultrafilter elemeit B_l -en ultrafiltert kapunk), kapjuk, hogy $\text{pcf} \text{pcf} A \subseteq \text{pcf} A$. □

Most pedig rátérünk az 5.12. tétel bizonyítására:

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy $B \subseteq pcfA$, $\min B > |B|$ és legyen az I_λ ideál A -n olyan, hogy $tcf \Pi A / I_\lambda = \lambda$ minden $\lambda \in B$ -re. (Legyen $\lambda(*) \in pcfB$ és hozzá tartozó $I(*)$ ideál olyan, hogy $tcf \Pi B / I(*) = \lambda(*)$)

Legyen $I = \langle X \subseteq A : (\lambda \in B : X \not\subseteq I_\lambda) \in I(*) \rangle$ megmutatjuk, hogy I ideál A fölött és $tcf \Pi A / I = \lambda(*)$.

Annak az ellenőrzése, hogy valóban ideált kaptunk, egyszerű.

Minden egyes $\lambda \in B$ -re rögzítsünk egy kofinális növekvő sorozatot, $\bar{f}^\lambda = \langle f_\alpha^\lambda : \alpha < \lambda \rangle$ -t $\Pi A / I_\lambda$ -ban.

Minden egyes $g \in \Pi B$ függvényhez definiáljunk egy $G(g) \in \Pi A$ függvényt a következők szerint: mivel $\Pi A / J_{<|B|+} \mid B \mid$ -irányított, a 4.4. tétel szerint létezik $f \in \Pi A / J_{<|B|+}$ felső korlátja az $\langle f_{g(\lambda)}^\lambda : \lambda \in B \rangle$ halmaznak. Legyen $G(g)$ egy ilyen felső korlát.

Megint rögzítsünk egy $\langle g_\alpha : \alpha < \lambda(*) \rangle$ monoton növekvő kofinális sorozatot $\Pi B / I(*)$ -ban. Belátjuk, hogy minden egyes $f \in \Pi A$ -hoz létezik $\beta < \lambda(*)$, melyre $f <_I G(g_\alpha)$ minden $\alpha \in (\beta, \lambda(*))$. Legyen adva $f \in \Pi A$. Definiáljuk $F(f)$ -et a következőképp $F(f)(\lambda) = \min\{\alpha < \lambda : f <_{I_\lambda} f_\alpha^\lambda\}$ $\lambda \in B$ -re. Ez jól definiált, mert $\langle f_\alpha^\lambda : \alpha < \lambda \rangle$ monoton növekvő kofinális $\Pi A / I_\lambda$ -ban ($\lambda \in B$). Legyen $\beta \in \lambda(*)$ a legkisebb, melyre $F(f) <_{I(*)} g_\beta$. Ha $\alpha \in (\beta, \lambda(*))$, akkor $F(f) <_{I(*)} g_\alpha$ és ebből következően $f <_{I_\lambda} f_{g_\alpha(\lambda)}^\lambda$. Egy $I(*)$ -beli halmaz kivételével az összes $\lambda \in B$ -re. Ez pedig azt jelenti, hogy $f <_I G(g_\alpha)$ I definíciója szerint.

A fentiekből következik, hogy $\langle G(g_\alpha) : \alpha < \lambda(*) \rangle$ kofinális $\Pi A / I$ -ben és valamely $E \subseteq \lambda(*)$ kofinális zárt részhalmazra a $\langle G(g_\alpha) : \alpha \in E \rangle$ sorozat monoton növekvő $<_I$ szerint. Ezzel befejeztük annak a bizonyítást, hogy $tcf \Pi A / I = \lambda(*)$.

Azaz $pcfB \subseteq pcfA$ és készen vagyunk.

□

6. PCF-generátorok létezése

Ebben a fejezetben azt fogjuk belátni, hogy minden $\lambda \in pcfA$, $A \subseteq Reg$ -re, ahol $\min A > |A|$, létezik $B_\lambda \subseteq A$ halmaz, amely generálja $J_{<\lambda+}$ ideált $J_{<\lambda}$ -ból. Ezen B_λ -kat fogjuk $pcfA$ generátorainak hívni. B_λ -k J_λ erejéig egyértelműen definiáltak. A tételt, amely kimondja a generátorok létezését hívjuk pcf tételnek. Kezdjük el a bizonyítást.

6.1. Lemma. *Ha $\lambda \in pcfA$ és $B \in J_{<\lambda+} \setminus J_{<\lambda}$, akkor $tcf \Pi B / J_{<\lambda} = \lambda$.*

Bizonyítás: Először jegyezzük meg, hogy ha $A \cap \lambda$ véges, akkor készen vagyunk, hiszen $J_{<\lambda+} = A \cap \lambda^+$ és $J_{<\lambda} = A \cap \lambda$, azaz $J_{<\lambda+} \setminus J_{<\lambda} = \langle \lambda \rangle$. Tehát feltehetjük, hogy $\lambda > |A|^{++}$ és válasszunk egy $S \subseteq S_{|A|+}^\lambda$ halmazt $I[\lambda]$ -ban egy C sorozattal együtt, amely bizonyítja ezt.

Legyen $J = J_{<\lambda} \cup \langle B \in J_{<\lambda+} \setminus J_{<\lambda} : tcf B_{J_{<\lambda}} = \lambda \rangle$.

6.2. Lemma. *J ideál.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy B_1 és $B_2 \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$ J -ben vannak és rögzítsünk monoton növekvő kofinális \bar{f}^1, \bar{f}^2 sorozatokat $\Pi B_1/J_{<\lambda}$ és $\Pi B_2/J_{<\lambda}$ -ban, amelyek ezt bizonyítják. Legyen $f_\alpha = \max(f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2})$. A \bar{f} sorozat monoton növekvő $\leq_{J_{<\lambda}}$ szerint és kofinális $B_1 \cup B_2$ -n és ez elegendő arra, hogy $B_1 \cup B_2 \in J$ legyen. Ha csak az egyik B_i tartozik $J_{<\lambda}$ -hoz, rögtön készen vagyunk.

□

Ha $J = J_{<\lambda^+}$, készen vagyunk. Tegyük tehát fel, hogy létezik $B \in J_{<\lambda^+} \setminus J$ és ebből kell ellentmondásra jutnunk.

Vegyük egy $B \in D$ ultrafiltert A -n, melyre $J \cap D = \emptyset$. A 5.7. tétel miatt tudjuk, hogy $\text{cf} \Pi A/D = \lambda$. Ezután rögzítsünk egy monoton növekvő kofinális sorozatot, $\langle f_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ -t $\Pi A/D$ -ben. $\alpha < \lambda$ -ra való indukcióval válasszunk $h_\alpha \in \Pi B$ -t, hogy $\langle h_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ monoton növekvő $<_{J_{<\lambda}}$ szerint és $h_\alpha >_{J_{<\lambda}} f_\beta$ minden $\beta < \alpha$ -ra. Ez, mint a korábbiakban már láttuk, $J_{<\lambda}$ λ -irányítottságának következménye.

Sőt, válasszuk úgy \bar{h} -t, hogy engedelmeskedjen \bar{C} -nek.

Legyen g egzakt felső korlátja \bar{h} -nak, melyre $g(a) \leq a$ teljesül minden $a \in A$ -ra és legyen $B_g = \langle a \in A : g(a) = a \rangle$. Mivel \bar{h} monoton növekvő és kofinális g alatt, az egzakt felső korlát definíciójából következik, hogy $\text{tcf} \Pi B_g/J_{<\lambda} = \lambda$ és ebből adódik, hogy $B_g \in J$. Másrésztől, ha B_g nem volna D -ben, akkor $A \setminus B_g \in D$. Mivel $g \upharpoonright (A \setminus B_g) \cup 0 \upharpoonright B_g \in \Pi A$, kapjuk hogy \bar{h} , és ebből következően \bar{f} korlátos $\Pi A/D$ -ben, ami ellentmondás. Tehát $B_g \in D$. Ez pedig a $D \cap J = \emptyset$ -nak mond ellen.

□

Egy generátor maximális halmaz $\subseteq_{J_{<\lambda}}$ szerint. Hogy a létezését bizonyítsuk, az alábbiakban fogunk konstruálni egy monoton növekvő sorozatot $\subsetneq_{J_{<\lambda}}$ szerint. Hogy fel tudjuk használni $I[\lambda]$ -t akkor is, amikor egyszerre használjuk \subseteq -t és $\subsetneq_{J_{<\lambda}}$ -t egy speciális engedelmes sorozatot, amelyet "szerényen" engedelmesnek nevezünk.

6.3. Definíció. Legyen $\lambda \in \text{pcf}(A \setminus |A|^{+++})$ és legyen \bar{C} , amely bizonyítja, hogy a stacionárius $S \subseteq S_{\kappa^+}^\lambda \setminus I[\lambda]$ -ban van. Egy $\bar{f} = \langle f_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ "szerényen" engedelmeskedik \bar{C} -nek pontosan akkor, ha \bar{f} monoton nő $<_{J_{<\lambda}}$ szerint, \bar{f} engedelmeskedik \bar{C} -nek és $f_\delta = \sup\{f_\beta : \beta \in c_\delta\}$ minden $\delta \in S$ -re.

A \bar{C} -nek való engedelmeség azt jelenti, hogy $f_\alpha \geq \sup\{f_\beta : \beta \in c_\alpha\}$. Ezzel szemben az szerény engedelmeség azt, hogy $\delta \in S \Rightarrow f_\delta = \sup\{f_\beta : \beta \in c_\delta\}$ azaz f_δ a legkisebb függvény, amely meg van engedve \bar{f} engedelmesége miatt, ha $\delta \in S$. Jegyezzük meg, hogy míg az engedelmeség definiálva volt minden sorozatra, a "szerény" engedelmeséget csak a monoton növekvő, λ hosszú, $\Pi A/J_{<\lambda}$ sorozatokra definiáltuk.

A "szerény" engedelmes sorozatok egy valódi részosztályt alkotnak az engedelmes sorozatok körében. Hogy nem üres ez a részosztály, azt az mutatja, hogy minden monoton növekvő \bar{f} sorozathoz tudunk találni egy szerényen engedelmes \bar{h} -t, amely azokat majorálja, amiket \bar{f} .

Rögzítsük a fejezet hátralevő részére $\lambda \in \text{pcf}(A \setminus |A|^{+++})$, S és \bar{C} legyen, ahogyan azt a definícióban megadtuk.

6.4. Lemma. Minden $\bar{f} = \langle f_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ sorozatra, amelyik $<_{J_{<\lambda}}$ szerint monoton növő, létezik "szerényen" engedelmes $\bar{h} = \langle h_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ sorozat, mely szintén monoton növő $<_{J_{<\lambda}}$ szerint és $f_\alpha \leq h_\alpha$ minden $\alpha \in \lambda \setminus S$ -re.

Bizonyítás: $\alpha < \lambda$ -ra való transzfinit indukcióval definiáljuk h_α -t. Ha $\alpha \in S$, akkor legyen $h_\alpha = \sup\{h_\beta : \beta \in c_\delta\}$. Ha $\alpha \in \lambda \setminus S$, kihasználva a λ -irányítottságot, találhatunk egy $g_\alpha \in \Pi A$ korlátot $\langle f_\beta : \beta < \alpha \rangle \cup \langle h_\beta : \beta < \alpha \rangle$ -nak és legyen $h_\alpha(a) = \sup\{(g_\alpha(a)) \cup (f_\alpha(a)) \cup (h_\beta(a) + 1 : \beta \in c_\alpha)\}$.
□

Ezután egy részbenrendezést fogunk bevezetni a "szerényen" engedelmes sorozatokon.

6.5. Definíció. Ha \bar{f}^1, \bar{f}^2 "szerényen" engedelmes sorozatokra $\bar{f}^1 \leq \bar{f}^2$, pontosan akkor, ha $f_\alpha^1 \leq f_\alpha^2$ fennáll minden $\alpha < \lambda$ -ra.

6.6. Lemma. Ha \bar{f}^1, \bar{f}^2 "szerényen" engedelmes sorozatok, akkor $\bar{f}^1 \leq \bar{f}^2$ pontosan akkor, ha $f_\alpha^1 \leq f_\alpha^2$ fennáll minden $\alpha \in \lambda \setminus S$ -re.

Bizonyítás: Az egyik irány abból következik, hogy $\lambda \setminus S \subseteq \lambda$.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy $f_\alpha^1 \leq f_\alpha^2$ minden $\alpha \in \lambda \setminus S$ -re, és rögzítsünk egy legkisebb $\delta \in S$ -et, amelyre $f_\delta^1 \not\leq f_\delta^2$. Mivel minden $\beta \in c_\delta$ -ra tudjuk, hogy $f_\beta^1 \leq f_\beta^2$ és $f_\beta^2 = \sup\{f_\beta : \beta \in c_\delta\}$, illetve $f_\delta^1 = \sup\{f_\beta^1 : \beta \in c_\delta\}$, ellentmondásra jutottunk.
□

Mivel mindegyik "szerényen" engedelmes sorozat egy $<_{I_{<\lambda}}$ szerint monoton növő engedelmes sorozata rendszámfüggvényeknek, a 4.4. tétel miatt létezik egzakt felső korlátja. Válasszunk $g_{\bar{f}}$ felső korlátot minden \bar{f} "szerényen" engedelmes sorozathoz, amelyről feltehetjük, hogy $g_{\bar{f}}(a) \leq a$ minden $a \in A$ -ra. Ezután jelöljük $B_{\bar{f}}$ -fel a következő halmazt: $\langle a \in A : g_{\bar{f}}(a) = a \rangle$. Mivel \bar{f} kofinális g alatt, kapjuk, hogy $\text{tcf} B_{\bar{f}} / J_{<\lambda} = \lambda$ és ezért $B_{\bar{f}} \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$ minden "szerényen engedelmes" \bar{f} sorozatra.

Megmutatjuk, hogy minden $B \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$ ekvivalens (modulo $J_{<\lambda}$) egy $B_{\bar{f}}$ halmazzal, ahol \bar{f} "szerényen" engedelmes sorozat, és $\bar{f}^1 \leq \bar{f}^2$ esetén $B_{\bar{f}^1} \leq_{J_{<\lambda}} B_{\bar{f}^2}$. Azaz

6.7. Lemma. 1. Tegyük fel, hogy $B \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$. Ekkor létezik egy "szerényen" engedelmes \bar{f} sorozat, melyre $B =_{J_{<\lambda}} B_{\bar{f}}$.

2. Ha $\bar{f}^1 \leq \bar{f}^2$, akkor $B_{\bar{f}^1} \subseteq_{J_{<\lambda}} B_{\bar{f}^2}$.

Bizonyítás: Egészítsük ki a $J_{<\lambda}$ ideált az $A \setminus B$ halmazzal. Így elértük, hogy $\Pi A / J_{<\lambda}$ helyett dolgozhatunk $\Pi B / J_{<\lambda}$ -ban is.

Használva az 5.5. tételt, rögzítsünk egy λ hosszú kofinális sorozatot $\Pi B / J_{<\lambda}$ -ban, amit cseréljünk ki egy "szerényen" engedelmes \bar{f} sorozatra, amely létezik a 5.7. tétel miatt. Legyen g egzakt felső korlátja \bar{f} -nek és $B_{\bar{f}} = B_g = \langle a \in A : g(a) = a \rangle$. Mivel feltettük, hogy \bar{f} konstans nulla B -n kívül, feltehetjük ugyanezt g -ről is, amiből következik, hogy $B_g \subseteq B$. Legyen ezután $C = B \setminus B_g =$

$\langle a \in B : g(a) \in a \rangle$. A $\langle f_\alpha \upharpoonright C : \alpha < \lambda \rangle$ sorozat monoton növő és kofinális $\Pi C / J_{<\lambda}$ -ban, tehát $g \upharpoonright C <_{J_{<\lambda}} f_\alpha$ valamely $\alpha < \lambda$ -ra. Mivel $f_\alpha <_{J_{<\lambda}} g$, levonhatjuk a következtetést, hogy $C \in J_{<\lambda}$.

Tehát $B =_{J_{<\lambda}} B_g$

A második állítás bizonyításához vegyük észre, hogy mivel $f_\alpha^1 \leq f_\alpha^2$ minden $\alpha < \lambda$ -ra és \bar{f}^1 kofinális $\Pi B_{\bar{f}^1} / J_{<\lambda}$ -ban, $\bar{f}^2 \upharpoonright B_{\bar{f}^1}$ szintén kofinális $\Pi B_{\bar{f}^1} / J_{<\lambda}$ -ban és ezért $B_{\bar{f}^1} \subseteq_{J_{<\lambda}} B_{\bar{f}^2}$.

□

Ha létezik $J_{<\lambda^+}$ -nak $J_{<\lambda}$ fölött generátora B_λ , akkor $J_{<\lambda^+} / J_{<\lambda}$ Boole algebra, melynek maximális eleme B_λ és minden κ -ra κ -irányított. A következő lemma, mely a pcf tétel bizonyításához kell majd, egy bizonyos κ -ra ($\kappa = |A|^+$ -ra) állítja $J_{<\lambda^+} / J_{<\lambda}$ κ -irányítottságát. (Igazából egy kicsit többet állít: mégpedig, hogy \leq a "szerényen" engedelmes sorozatokon $|A|^+$ -irányított.)

6.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\zeta(*) < |A|^+$. Ekkor*

1. *Ha $\langle \bar{f}^\zeta : \zeta < \zeta(*) \rangle$ "szerényen" engedelmes sorozatok egy halmaza, akkor létezik egy \bar{f} "szerényen" engedelmes sorozat úgy, hogy $\bar{f}^\zeta \leq \bar{f}$ minden $\zeta < \zeta(*)$ -ra.*

2. *Ha $\langle B_\zeta : \zeta < \zeta(*) \rangle \subseteq J_{<\lambda^+}$, akkor létezik egy $B \in J_{<\lambda^+}$, melyre $B_\zeta \subseteq_{J_{<\lambda}} B$.*

Bizonyítás: Mivel minden $B \in J_{<\lambda^+}$ ekvivalens egy $B_{\bar{f}}$ -fel valamilyen "szerényen" engedelmes \bar{f} sorozatra és $\bar{f}^\zeta \leq \bar{f}$ -ből következik, hogy $B_{\bar{f}^\zeta} \subseteq_{J_{<\lambda}} B_{\bar{f}}$ és $B_{\bar{f}} \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$, azaz elegendő az 1. pontot bizonyítani.

Tegyük fel tehát, hogy $\langle \bar{f}^\zeta : \zeta < \zeta(*) \rangle$ sorozatok "szerényen" engedelmesek és $\zeta(*) < |A|^+$. Defináljunk $\alpha < \lambda$ -ra való indukcióval egy $<_{J_{<\lambda}}$ szerint monoton növő "szerényen" engedelmes sorozatot $\langle f_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ -t, melyre $f_\alpha^\zeta \leq_{J_{<\lambda}} f_\alpha$ minden $\zeta < \zeta(*)$, $\alpha < \lambda$. Indukciós lépésben ugyanazt kell csinálnunk, mint a 6.4. tétel bizonyításában annyi különbséggel, hogy most a g_α felső korlátot $\zeta(*) \times \alpha$ darab függvényre kell venni.

□

6.9. Lemma. *Ha $\bar{f}^1 \leq \bar{f}^2$ "szerényen" engedelmes sorozatok, és*

$B = B_{\bar{f}^1} \in J_{<\lambda^+} \setminus J_{<\lambda}$, akkor létezik egy $E \subseteq \lambda$ kofinális zárt, melyre $\delta \in S \cap E \Rightarrow f_\delta^1 \upharpoonright B =_{J_{<\lambda}} f_\delta^2 \upharpoonright B$

Bizonyítás: A \bar{f}^1 monoton növő kofinális $J_{<\lambda}$ szerint B-n B definíciója szerint. Ezért minden $\alpha < \lambda$ -ra létezik $\beta(\alpha) < \lambda$, melyre $f_\alpha^2 <_{J_{<\lambda}} f_{\beta(\alpha)}^1$. Legyen E egy kofinális zárt halmaz, ami zárt az $\alpha \rightarrow \beta(\alpha)$ leképezésre (azaz, $\delta \in E$ és $\alpha < \delta \Rightarrow \beta(\alpha) < \delta$). Tegyük fel, hogy $\delta \in E \cap S$. Meg fogjuk mutatni, hogy $f_\delta^1 \upharpoonright B =_{J_{<\lambda}} f_\delta^2 \upharpoonright B$. Már tudjuk, hogy $f_\delta^2 \geq f_\delta^1$.

Az állítással ellentétben legyen $C = \langle a \in B : f_\delta^1(a) < f_\delta^2(a) \rangle$.

Minden $a \in A$ -ra tudjuk, hogy $f_\delta^2(a) = \sup\{f_\alpha^2(a) : \alpha \in c_\delta\}$ és ezért minden $a \in C$ -hez rögzíteni tudunk egy $\alpha_a \in c_\delta$ rendszámot, melyre $f_{\alpha_a}^2(a) > f_\delta^1(a)$. Egy ilyen indexnek léteznie kell, hiszen $f_\delta^2(a) = \sup\{f_\alpha(a) : a \in c_\delta\} > f_\delta^1(a)$. Mivel $\text{típc}_\delta = |A|^+$, és $|C| \leq |A|$, találhatunk egy $\gamma \in \text{nacc}(c_\delta)$ -t, amelyik

nagyobb, mint α_a minden $a \in C$ -re. A sorozat γ -beli koherenciája miatt $f_\gamma^2(a) > f_\alpha^2(a) > f_\delta^1(a)$ minend $a \in C$ -re. De mivel $\delta \in E$, létezik $\beta < \delta$, melyre $f_\gamma^2 <_{J_{<\lambda}} f_\beta^1$. $C' = \langle a \in A : f_\gamma^2(a) < f_\beta^1(a) < f_\delta^1(a) \rangle$ diszjunkt C -től, hiszen $a \in C \cap C' \Rightarrow f_\gamma^2(a) < f_\beta^1(a) < f_\delta^1 < f_\gamma^2(a)$, ami lehetetlen. Mivel $C' \cup A \setminus B \equiv 1$ mértékű", ebből következik, hogy $C \in J_{<\lambda}$ és $f_\delta^2 \upharpoonright B =_{J_{<\lambda}} f_\delta^1 \upharpoonright B$.

□

Jön az utolsó tétel, a pcf generátorok létezéséről.

6.10. Tétel. *Tegyük fel, hogy $A \subseteq REG$ egy végtelen halmaz és $|A| < \min A$. Ekkor minden $\lambda \in pcf A$ -ra létezik egy $B_\lambda \subseteq A$ halmaz, melyre $J_{<\lambda^+} = J_{<\lambda} + B_\lambda$.*

Bizonyítás:

Mivel minden $\lambda \in pcf A$ -ra, melyre $\lambda \cap A$ véges, a tétel állítása egyszerűen annyi, hogy $\lambda^+ \cap A = \lambda \cap (A \cup \langle \lambda \rangle)$, a tétel igaz ezen λ -kra.

Tegyük fel, hogy $\lambda \in pcf(A \setminus |A|^{++})$ és rögzítsünk egy stacionárius $S \subseteq S_{\kappa^+}^\lambda$ halmazt $I[\lambda]$ -ban és egy \bar{C} halmazt, amely ezt bizonyítja. Ezután egy generátort kell találnunk, amely $J_{<\lambda^+}$ -t generálja $J_{<\lambda}$ -ból.

Transzfinit indukcióval $\zeta < |A|^+$ -ra definiáljunk "szerényen" engedelmes \bar{f}^ζ sorozatokat, melyekre és a hozzájuk tartozó $B_\zeta = B_{\bar{f}^\zeta}$ halmazokra igaz, hogy

- $\xi < \zeta < |A|^+ \Rightarrow \bar{f}^\xi \leq \bar{f}^\zeta$
- $\xi < \zeta < |A|^+ \Rightarrow B_\xi \subsetneq_{J_{<\lambda}} B_\zeta$

Tegyük fel, hogy $\zeta < |A|^+$ és hogy \bar{f}^ξ és $B_\xi = B_{\bar{f}^\xi}$ definiálva vannak minden $\xi < \zeta$ -ra és kielégítik a fenti feltételeket. Az $|A|^+$ -irányítottság miatt létezik olyan $B \in J_{<\lambda^+}$ halmaz, melyre $B_\xi \subseteq_{J_{<\lambda}} B$ minden $\xi < \zeta$ -ra. Ha B generálja $J_{<\lambda^+}$ -t, készen vagyunk.

Egyébként létezik B' , melyre $B \subsetneq_{J_{<\lambda}} B' \in J_{<\lambda^+}$. A 6.7. lemma szerint ekkor van olyan "szerényen" engedelmes \bar{f} sorozat, melyre $B' = B_{\bar{f}}$. Legyen \bar{f}^ζ a 6.8.tételből kapott sorozat, melyre $\bar{f} \leq \bar{f}^\zeta$ és $\bar{f}^\xi \leq \bar{f}^\zeta$ minden $\xi < \zeta$ -re. Ekkor persze $B_\xi \subsetneq_{J_{<\lambda}} B_\zeta$ minden $\xi < \zeta$ -ra.

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy \bar{f}^ζ és B_ζ definiálva vannak minden $\zeta < |A|^+$ -ra és teljesítik azt, hogy \bar{f}^ζ monoton nő \leq szerint, B_ζ pedig $\subsetneq_{J_{<\lambda}}$ szerint.

Minden egyes $\xi < \zeta < |A|^+$ rendszámpárra a 6.9.lemma miatt létezik $E_{\xi,\zeta} \subseteq \lambda$ kofinális zárt halmaz, melyre $\delta \in S \cap E_{\xi,\zeta} \Rightarrow f_\delta^\xi \upharpoonright B_\xi =_{J_{<\lambda}} f_\delta^\zeta \upharpoonright B_\xi$. Mivel \bar{f}^ζ kofinális, monoton növekvő $B_\zeta \setminus B_\xi$ -ben és $g_\xi \upharpoonright (B_\zeta \setminus B_\xi) \in \Pi(B_\zeta \setminus B_\xi)$, B_ξ definíciója miatt létezik $\alpha < \lambda$, melyre $g_\xi \upharpoonright (B_\zeta \setminus B_\xi) <_{J_{<\lambda}} f_\alpha^\zeta$. Ezután kivonva α -t $E_{\xi,\zeta}$ -ből, kapjuk, hogy $f_\delta^\xi \upharpoonright (B_\zeta \setminus B_\xi) <_{J_{<\lambda}} f_\delta^\zeta$ minden $\delta < \lambda$ -ra és $\zeta \in E$ -re.

Legyen $E = \bigcap_{\xi < \zeta < |A|^+} E_{\xi,\zeta}$. Mivel $|A|^+ < \lambda$, E kofinális zárt lesz λ -ban. Legyen $\delta \in S \cap E$. Tehát minden $\xi < \zeta < |A|^+$ -ra tudjuk, hogy

$$f_\delta^\zeta \upharpoonright B_\xi =_{J_{<\lambda}} f_\delta^\xi \upharpoonright B_\xi \text{ és } f_\delta^\xi \upharpoonright (B_\zeta \setminus B_\xi) <_{J_{<\lambda}} f_\delta^\zeta \upharpoonright (B_\zeta \setminus B_\xi)$$

Minden $a \in A$ -ra a $\langle f_\delta^\zeta(a) : \zeta < |A|^+ \rangle$ monoton növekvő \leq szerint, mert a $\langle \bar{f}_\zeta : \zeta < |A|^+ \rangle$ monoton növekvő \leq szerint. Ebből következik, hogy minden $a \in A$ -ra létezik $C_a \subseteq |A|^+$ kofinális zárt halmaz, amelyen a $\langle f_\delta^\zeta(a) : \zeta < |A|^+ \rangle$ halmaz vagy konstans vagy monoton növekvő.

Legyen $C = \bigcap_{a \in A} C_a$. Mivel $|A| < |A|^+$, C kofinális zárt $|A|^+$ -ban.

Válasszunk $\xi < \rho$ -t C -ben és $\zeta = \zeta(\xi) < \rho$ -t. Mivel $\delta \in E \subseteq E_{\zeta, \xi}$, tudjuk, hogy $f_{\delta}^{\zeta}(a) = f_{\delta}^{\rho}(a)$ minden $a \in B_{\zeta}$ -re egy nullmértékű halmaz kivételével. Egyébként pedig a $\langle \alpha \in B_{\zeta} \setminus B_{\xi} : f^{\xi}(a) < f^{\zeta}(a) \rangle$ halmaz pozitív mértékű. Emiatt találhatunk $a \in B_{\zeta} \setminus B_{\xi}$ -t, melyre mindkét reláció teljesül, azaz $f_{\delta}^{\xi}(a) < f_{\delta}^{\zeta}(a) = f_{\delta}^{\rho}(a)$. Ez azonban lehetetlen, hiszen, mert $\xi, \zeta, \rho \in C \subseteq C_a$ és ezért $\xi < \zeta < \rho$ miatt $f_{\delta}^{\xi}(a) = f_{\delta}^{\zeta}(a) = f_{\delta}^{\rho}(a)$ vagy $f_{\delta}^{\xi}(a) < f_{\delta}^{\zeta}(a) < f_{\delta}^{\rho}(a)$.

□

7. A Dowker-tér konstukció

Legyen $X^R = \{h \in \Pi_{n>1}(\aleph_n + 1) : \exists m \forall n [\aleph_0 < cf h(n) < \aleph_m]\}$.

X^R az úgynevezett Rudin-tér, melyen a következő T_2 topológia van: legyenek a bázisnyíltak $f < g \in \Pi_{n>1}(\aleph_n + 1)$ esetben $(f, g] = \{h \in X^R : f < h \leq g\}$. Ismert, hogy egy normális T_2 tér pontosan akkor megszámlálhatóan parakompakt, ha zárt halmazok bármely csökkenő $\langle D_n : n < \omega \rangle$ sorozatához, melyre $\bigcap_{n < \omega} D_n = \emptyset$ léteznek $U_n \supseteq D_n$ nyílt halmazok, melyekre szintén $\bigcap_{n < \omega} U_n = \emptyset$.

Legyen ezután $D_n = \{h \in X^R : \exists m \geq n [h(m) = \aleph_m]\}$.

7.1. Definíció. *Egy X topologikus tér kollektíven normális, ha bármely páronként diszjunkt zárt halmazokból álló $\langle U_i : U_i \subseteq X, i < i(*) \rangle$ halmazhoz található szintén diszjunkt $\langle V_i : V_i \subseteq X \rangle$ nyíltak rendszere, hogy $V_i \supseteq U_i$.*

Rudin vezette be a fenti zárt halmazokat [6]-ban és bizonyította róluk a következő tételt:

7.2. Tétel. *1. X^R kollektíven normális.*

2. Ha $U_n \subseteq X^R$ nyíltak és ha $D_n \subseteq U_n$ minden $n > 1$ esetén $\bigcap_{n > 1} U_n$ nem üres.

□

Ebből látta be Rudin (felhasználva Dowker cikkében lévő állításokat), hogy X^R Dowker-tér.

7.3. Lemma. *Létezik olyan $\aleph_{\omega+1}$ rendtípusú, $\Pi_{n>1} \aleph_n$ -ban kofinális $\bar{f} = \langle f_{\alpha} : \alpha < \aleph_{\omega+1} \rangle$ függvénysorozat, melyre igaz, hogy minden $\delta < \aleph_{\omega+1}$ -re ha $cf \delta > \aleph_0$ és $\bar{f} \upharpoonright \delta$ -nak létezik legkisebb felső korlátja, akkor f_{δ} egy ilyen legkisebb felső korlát.*

Bizonyítás: Először vegyünk egy tetszőleges $\aleph_{\omega+1}$ rendtípusú kofinális sorozatot $\Pi_{n>1} \aleph_n$ -ben, $\bar{g} = \langle g_{\alpha} : \alpha < \aleph_{\omega+1} \rangle$ -t, amely a 6.10. tétel szerint létezik. (Valójában a 6.10. tétel szerint csak egy $\Pi_{n \in B} \aleph_n$ -beli kofinális sorozatunk van, de mivel B végtelen, feltehetjük, hogy $B = \omega$.) Ezután definiáljuk f_{α} -t $\alpha < \aleph_{\omega+1}$ -re való transzfinit indukcióval:

o α rákövetkező vagy megszámlálható kofinalitású limesz, legyen $f_{\alpha} = g_{\beta}$, ahol $\beta \in (\alpha, \aleph_{\omega+1})$ az első olyan rendszám, melyre $g_{\beta} >^* f_{\gamma}$ minden $\gamma < \alpha$ -ra.

o α kofinalitása nem megszámlálható, g_{α} legyen a legkisebb felső korlátja az $\bar{f} \upharpoonright \alpha = \langle f_{\beta} : \beta < \alpha \rangle$ -nak, ha létezik. Egyébként definiáljuk, mint az előző esetben.

Az így kapott sorozat jó.

□

Legyen $\bar{f} = \langle f_\alpha : \alpha < \aleph_{\omega+1} \rangle$ a fenti sorozat és válasszuk X -et a következő halmaznak $\{h \in X^R : \exists \alpha < \aleph_{\omega+1} [h =^* f_\alpha]\}$. (ahol a továbbiakban $f =^* g$, $f \leq^* g$, $f <^* g$... jelentése a továbbiakban: $\{n : f(n) \neq g(n)\}$,... véges)

Mivel $|\{h \in X^R : h =^* f_\alpha\}| = \aleph_\omega$ minden $\alpha < \aleph_{\omega+1}$ -re, nyilvánvaló, hogy $|X| = \aleph_{\omega+1}$.

Mivel $\bar{f} <^*$ szerint teljesen rendezett, minden $h \in X$ -ra létezik egyértelműen $\alpha < \aleph_{\omega+1}$, melyre $h =^* f_\alpha$. Ebből következően X teljesen részbenrendezett $<^*$ szerint, azaz $h, k \in X \Rightarrow [h <^* k \vee k <^* h \vee h =^* k]$.

A következő állításhoz felhasználunk egy, a legkisebb felső korlátra vonatkozó lemmát: Legyen $\bar{f} = \langle f_\alpha : \alpha < \aleph_{\omega+1} \rangle$, mint 7.3. lemmában.

7.4. Lemma. *Tegyük fel, hogy $0 < m \leq k < \omega$ és legyen $\langle \alpha(\zeta) : \zeta < \aleph_m \rangle$ szigorúan monoton növekvő, melyre $\sup\{\alpha(\zeta) : \zeta < \aleph_m\} = \delta < \aleph_{\omega+1}$. Ha $\langle g_\zeta : \zeta < \aleph_m \rangle$ $\Pi_{n>k} \aleph_n$ -beli $<$ szerint monoton növekvő függvények sorozata és $g_\zeta =^* f_{\alpha(\zeta)}$ minden $\zeta < \aleph_m$ -re, akkor:*

- $g = \sup\{g_\zeta : \zeta < \aleph_m\} \in \Pi_{n>k} \aleph_n$ $\bar{f} \upharpoonright \delta$ egy legkisebb felső korlátja
- $\text{cfg}(n) = \aleph_m$ minden $n > k$ -ra
- $g =^* f_\delta$

Bizonyítás: Következik a 6.10. tétel bizonyításából. □

7.5. Lemma. *Tegyük fel, hogy $0 < m \leq k < \omega$ és hogy $\langle h_\zeta : \zeta < \aleph_m \rangle$ X pontjaiból álló olyan sorozat, melyre $\langle h_\zeta \upharpoonright (k, \omega) : \zeta < \aleph_m \rangle$ növekvő $<$ szerint. Legyen $g = \sup\{h_\zeta : \zeta < \aleph_m\}$. Ekkor létezik $h \in X$, melyre $h =^* g$.*

Bizonyítás: Minden $\zeta < \aleph_m$ -hez létezik egyértelműen $\alpha(\zeta) < \aleph_{\omega+1}$, melyre $h_\zeta =^* f_{\alpha(\zeta)}$. Mivel $\langle h_\zeta : \zeta < \aleph_m \rangle$ monoton növekvő $<^*$ szerint, a $\langle \alpha(\zeta) : \zeta < \aleph_m \rangle$ szigorúan monoton nő. Legyen $\delta = \sup\{\alpha(\zeta) : \zeta < \aleph_m\}$. A 7.4 lemmából tudjuk, hogy $\text{cfg}(n) = \aleph_m$ minden $n \in (k, \omega)$ -ra és $g =^* f_\delta$.

Legyen $h \in \Pi_{n>1}(\aleph_n + 1)$ $h(n) = \aleph_n$ -nek definiálva $n \leq k$ -ra és $h(n) = g(n)$ $n > k$ -ra. Ekkor $h \in X^R$ és $h =^* f_\delta$. Azaz $h \in X$ és $h =^* g$, ahogy az nekünk kellett.

□

7.6. Tétel. X zárt altere X^R -nek.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $t \in \text{cl}X$ és $t \in X^R$. Minden $h \in X$ -re legyen $E(h, t) = \{n > 1 : h(n) = t(n)\}$.

7.7. Lemma. *Ha $h \leq t$ és $h \in X$, akkor $E(h, t)$ véges vagy ko-véges.*

Bizonyítás: Tegyük fel a lemma állításával ellentétben, hogy $h \leq t$, $h \in X$ és $|E(h, t)| = |\omega \setminus E(h, t)| = \aleph_0$. Legyen, $n > 1$ -re

$$f(n) = \{0, \text{ha } n \in E(h, t) \text{ és } h(n), \text{ha } n \in (\omega_E(h, t))\}$$

Nyilvánvalóan $f < t$. Ezután belátjuk, hogy $X \cap (f, t]$ üres, ellentétben a $t \in \text{cl}X$ feltevessel. Ha $k \in X$ és $k(n) > h(n)$ minden $n \in (\omega_E(h, t))$, akkor

$k \not\prec^* h \wedge k \not\prec^* h$, hiszen $\omega \setminus E(h, t)$ végtelen és így $h \prec^* k$ a trichotómia miatt. Mivel $E(h, t)$ végtelen és $\{n > 1 : k(n) \leq h(n)\}$ véges, létezik $n \in E(h, t)$, melyre $k(n) > h(n) = t(n)$ és ezért $k \notin (f, t]$.

□

Legyen $W = \{w \subseteq \omega : \forall f < t \exists h \in (f, t][E(h, t) = w]\}$

Az előző állítás szerint ha $w \in W$, akkor w véges vagy kovéges.

7.8. Lemma. $W \neq \emptyset$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy W üres. Az előző lemma szerint ez ekvivalens azzal, hogy egy véges vagy kovéges $w \subseteq \omega$ sincs W -ben. Minden véges vagy ko-véges w -re rögzítsünk egy $f_w < t$ -t úgy, hogy $h \in (f_w, t] \cap X$

$\Rightarrow E(h, t) \neq w$. Legyen f az f_w -k szuprémuma, ahol w végigfut ω összes véges és ko-véges részhalmazán. Mivel megszámlálhatóan sok f_w van, $\text{cft}(n) > \aleph_0$ minden $n > 1$ -re, amiből $f < t$ következik. Ha $h \leq t$ X -ben és $w = E(h, t)$, akkor $h \notin (f_w, t]$ és így $h \notin (f, t]$. Tehát $(f, t] \cap X = \emptyset$, ellentmondásban $t \in \text{cl}X$ -szel.

□

Jelöljük M_m -mel a $\{n > 1 : \text{cft}(n) = \aleph_m\}$ halmazt. ($M_{< m} = \cup_{1 < i < m} M_i$)

7.9. Lemma. Ha létezik $h \in X$, melyre $E(h, t)$ kovéges, akkor $t \in X$.

Bizonyítás: □

7.10. Lemma. Létezik $h \in X$, melyre $E(h, t)$ kovéges

Bizonyítás: Szintén a 7.4. lemma miatt elég egy $h \in X$ -et találni, amelyre $E(h, t)$ végtelen. Legyen m a legkisebb egész, amelyre M_m végtelen. Mivel $t \in X^R$, ilyen m létezik.

Legyen $w \in W$ fix. Ha w végtelen, készen vagyunk. Tehát tegyük fel, hogy véges és legyen $k = \max\{M_{< m}, \max w\}$.

Minden $n \in M_m$ -re rögzítsünk egy $\langle \gamma_\zeta^n : \zeta < \aleph_m \rangle$ sorozatot, melynek a szuprémuma legyen $t(n)$. Transzfinit indukcióval $\zeta < \aleph_m$ -re találhatunk $\langle h_\zeta : \zeta < \aleph_m \rangle$ sorozatot, melyre teljesülnek a következők:

1. $h_\zeta \leq t$ X -ben van és $E(h_\zeta, t) = w$
2. $\xi < \zeta < \aleph_m \Rightarrow h_\xi \upharpoonright (k, \omega) < g$ és $h_\zeta \upharpoonright (k, \omega) < t \upharpoonright (k, \omega)$
3. $h_\zeta(n) \geq \gamma_\zeta^n \forall n \in (k, \omega) \cap M_m$ -ra

ζ -nál az indukciós lépésben legyen $f = \sup\{h_\xi \upharpoonright (k, \omega) : \xi < \zeta\}$. Mivel minden $\xi < \zeta$ -re $E(h_\xi, t) = w$ -ből következik, hogy $h_\xi \upharpoonright (k, \omega) < t \upharpoonright (k, \omega)$ és mivel $\text{cft}(n) \geq \aleph_m$ minden $n \in (k, \omega)$ -ra, kapjuk, hogy $f < t$. $w \in W$ definíciója miatt találhatunk $h_\zeta \leq t$ -t X -ben, melyre $E(h_\zeta, t) = w$ és $h_\zeta \upharpoonright (k, \omega) > f \upharpoonright (k, \omega)$. Az általánosság megszorítása nélkül választhatjuk h_ζ -t úgy, hogy $h_\zeta(n) > \gamma_\zeta^n$ minden $n \geq k$ -ra M_m -ben.

A 7.4. lemmából tudjuk, hogy létezik $h \in X$, melyre $h(n) =^* \sup\{h_\zeta(n) : \zeta < \aleph_m\}$. Azaz $h(n) = t(n)$ véges sok $n \geq k$ kivételével M_m -ben. Mivel M_m végtelen, $E(h, t)$ is és készen vagyunk.

□

□

7.11. Tétel. X kollektíven normális.

Bizonyítás: Világos a 7.1. és a 7.2. tételből. \square

Ezután megmutatjuk, hogy X nem megszámlálhatóan parakompakt. Legyen $D_n^X = \{f \in X : \exists m \geq n [f(m) = \aleph_m]\}$ $n > 1$ -re. Nyilvánvaló, hogy D_n^X zárt és $\bigcap_n D_n^X = \emptyset$.

Amit bizonyítani szeretnénk, nyilvánvalóan következik az X^R -re vonatkozó hasonló állításból és X zártóságából. Ugyanis tegyük fel, hogy $D_n^X \subseteq U_n \subseteq X^R$, hogy U_n nyílt minden n -re D_n definíciója miatt $V_n = U_n \cup (X^R \setminus X)$ nyílt és tartalmazza D_n -t. Rudin bizonyítása mutatja, hogy ha $D_n \subseteq V_n$ és V_n nyílt minden n -re, akkor létezik $f \in \prod_{n>1} \aleph_n$ úgy, hogy $h \in \bigcap_n V_n$ minden $h > f$ -re X^R -ben. Mivel minden ilyen f -hez létezik $h \in X$, melyre $h > f$, $\bigcap_{n>1} U_n \cap X$ nem üres.

Ezt most elemi részmodelleket használva fogjuk bebizonyítani.

7.12. Lemma. Ha $U_n \subseteq X$ nyílt és $D_n^X \subseteq U_n$ minden $n > 1$ -re, akkor $\bigcap U_n$ nem üres.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $U_n \supseteq D_n^X$ nyílt minden n -re és be kell látnunk, hogy $\bigcap_n U_n$ nem üres.

Azt fogjuk belátni, hogy létezik $f \in \prod_{n>1} \aleph_n$, melyre igaz, hogy minden $h > f$ X -ben a metszethez tartozik.

Elég látni, hogy minden $n > 1$ -re van $f_n \in \prod_{n>1} \aleph_n$, melyre igaz, hogy $\forall h \in X [h > f_n \Rightarrow h \in U_n]$, hiszen $f = \sup\{f_n : 1 < n < \omega\}$ pont megfelelő számunkra.

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy $m > 1$ rögzített esetén minden $f \in \prod_{n>1} \aleph_n$ esetén van $h_f > f$ $X \setminus U_m$ -ban. Mivel $h_f \notin D_m$, tudjuk, hogy $h_f(n) < \aleph_n$ minden $n \geq m$ -re.

Egy adott f -re legyen $g_f = \sup\{h_{f'} \in \prod_{n>1} \aleph_n \wedge (m, \omega) \subseteq E(f', f)\}$ A szuprémum \aleph_m darab $h_{f'}$ függvényen fut végig és a fentiekből következik, hogy $g_f(n) < \aleph_n$ minden $n > m$ -re. Az is nyilvánvaló, hogy $g_f(i) = \aleph_i$ $1 < i \leq m$ -re.

Legyen $\langle M_\zeta : \zeta < \omega_1 \rangle$ egy elemi részmodellekből álló folytonos sorozata $H(\Theta)$ -nak, melyre teljesül, hogy

◦ f, X és $f \mapsto h_f, f \mapsto g_f$ függvények M_0 -hoz tartoznak.

◦ M_ζ számossága \aleph_1 és $\langle M_\xi : \xi < \zeta \rangle \in M_{\zeta+1}$ minden $\zeta < \omega_1$ -re.

Minden ζ -ra legyen $\chi_\zeta(n) = \sup(M_\zeta \cap \aleph_n)$ minden $n > 1$ -re. Mivel $|M_\zeta| = \aleph_1$, $\chi_\zeta(n) < \aleph_n$ minden n -re és ezért $\chi_\zeta \in \prod_{n>1} \aleph_n$.

$\chi_\xi \in M_\zeta$ minden $\xi < \zeta < \omega_1$ -re, így az elemiség miatt h_{χ_ξ} és g_{χ_ξ} is M_ζ -hoz tartozik és ebből következően $h_{\chi_\xi}, g_{\chi_\xi} < \chi_\zeta$.

Tehát ha $\xi < \zeta < \omega_1$, akkor $\chi_\xi < h_\xi < \chi_\zeta < h_{\chi_\zeta} < \chi_{\omega_1}$. Ebből következően $\langle h_{\chi_\zeta} : \zeta < \omega_1 \rangle$ egy sorozat X -ben, $<$ szerint monoton növekvő, melynek szuprémuma χ_{ω_1} . A 7.3. tétel szerint $\chi_{\omega_1} \in X$.

Legyen χ' olyan, melyre $\chi'(n) = \chi_{\omega_1}(n)$ minden $n > m$ -re és $\chi'(i) = \aleph_i$ $1 < i \leq m$. Így $\chi' \in D_m^X \subseteq U_m$ és ezért $(f, \chi'] \subseteq U_n$ valamely $f < \chi'$ -re, hiszen U_m nyílt.

Ezután keressünk $\zeta < \omega_1$ -et, melyre $f \upharpoonright (m, \omega) < \chi_\zeta \upharpoonright (m, \omega)$. Legyen $f' = f \upharpoonright (m+1) \cup \chi_\zeta \upharpoonright (m, \omega)$. g_{χ_ζ} definíciója miatt $f' < h_{f'} \leq g_{\chi_\zeta} \leq \chi'$ és persze $h_{f'} \notin U_m$. Ez ellentmond $h_{f'} \in (f, \chi'] \subseteq U_m$ -nek.
 \square

Hivatkozások

- [1] Benkő Pál pcf szakdolgozata(1995)
- [2] Komjáth Péter honlapjáról letölthető pcf jegyzet
- [3] Menachem Kojman: The A,B,C of PCF: A companion to PCF theory, 1
 letölthető Kojman honlapjáról: www.math.bgu.ac.il/~kojman
- [4] Menachem Kojman, Saharon Shelah: A ZFC Dowker space in $\aleph_{\omega+1}$: an application of pcf theory to topology
 szintén megtalálható Kojman honlapján
- [5] M.E. Rudin : A normal space X for which $X \times I$ is not normal, Fund.Math. 73(1971) 186-189
- [6] Saharon Shelah: Cardinal Arithmetic , Oxford University Press 1994