Kivonat

A modern villamosenergia-ellátást biztosító országos és nemzetközi hálózatok rövid távú optimális ütemezésének előállítása a megbízható rövid távú energiaigények előrejelzése miatt a gyakorlatban determinisztikus programozási feladatként tekintendő. A dolgozatban lévő eredményeket inspirálta a nagyméretű gyakorlati feladatok során szerzett tapasztalatok, megfigyelések összessége.

A vizsgált ütemezési probléma egy többcélfüggvényű globális optimalizálási függvényváltozós feladat, mely részfeladatként tartalmaz komoly, nagyméretű differenciálegyenlet-rendszert is; az eredmények és a következményeik közül kiemelendő, hogy szép, természetes relaxáció során kapott egészértékű programozási modell, mint lineáris programozási feladatok összessége zömében teljesen unimoduláris, sőt hálózati mátrixszal leírható, ún. áramfeladat lesz. Ez a részfeladat minden hasonló modellben is természetesen adódóan előfordul. A fennmaradó részfeladatok sajnos azonban bizonyítottan NP-teljesek még a relaxált modellben is, mivel speciálisan tartalmazzák pl. a részhalmaz-összeg feladatot.

Ismertetünk egy algoritmust, mely a modellből az NP-teljes korlátozó feltételek eltávolítása után megmaradó többcélfüggvényű egészértékű LP feladatra erősen polinomiális időben közel optimális ütemezést kapunk, és pár példán keresztül bemutatjuk a működését.

Áramelosztás operációkutatási elmélete, modelljei és megoldási módszerei

DIPLOMAMUNKA

Naszvadi Péter

matematikus szak

Témavezető:

dr. Illés Tibor, egyetemi docens

Operációkutatási Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2007

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Felhasznált matematikai alapfogalmak

1.1.1. Definíció: Egy mátrixot teljesen unimodulárisnak nevezünk, ha minden négyzetes részmátrixának determinánsa ±1 vagy 0. Az ilyen mátrixot a továbbiakban *TU*-nak nevezzük.

1.1.2. Megjegyzés: *TU* mátrix csak ±1 vagy 0 elemekből állhat.

1.1.3. Definíció: Adott $\vec{G} \overset{\text{def}}{=} (V, \vec{E})$ irányított gráf; pont-él incidenciamátrixán egy olyan mátrixot értünk, mely sorai a gráf csúcsainak, oszlopai a gráf éleinek felelnek meg. A következőképp töltsük ki a táblázatot: az *i.* sor és *j.* oszlop kereszteződésében álló mátrixelem 1, ha az *i.* csúcsba belép a *j.* él, -1, ha az *i.* csúcsba kilép a *j.* él, minden más esetben zérus.

1.1.4. Definíció: Egy *A* mátrix ún. hálózati mátrix, ha létezik *G* irányított gráf és benne irányítatlan értelemben feszítő *F* fa, ahol is a mátrix sorait megfeleltetjük *F*, oszlopait *E(G)-E(F)* éleknek. Egy $a_{i,j}$ mátrixelemre $a_{i,j} = \pm 1$, ha az *j.* oszlopnak megfelelő e_j éllel kiegészítve a fát - e_i benne van a keletkezett körben és e_j-vel megegyező/ellentétes irányítású (negatív pontosan akkor, ha ellentétes); a többi esetben 0 a mátrixelem. Az *A* hálózati mátrixhoz tartozó *G* gráfot (a mátrixhoz tartozó) hálózati gráfnak nevezzük.

1.1.5. Megjegyzés: speciálisan minden irányított gráf incidenciamátrixa hálózati mátrix, a nem-fa élek legyenek az eredeti gráf élei, és a feszítőfa-élek pedig legyenek egy tetszőleges hozzávett csúcsból a gráf csúcsaiba mutató élek.

1.1.6. Tétel: *TU* mátrix részmátrixa, transzponáltja *TU*; hálózati mátrix részmátrixa hálózati mátrix.

1.1.7. Megjegyzés: Hálózati mátrix transzponáltja nem feltétlen hálózati mátrix

$$(1)\quad A \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

A hálózati mátrix, A^T viszont nem az. A hálózati gráf pedig nem más, mint egy teljes ötcsúcsú gráf aciklikusan irányítva, a feszítőfa-élek pedig a forrásból kiinduló feszítő csillag élei.

1.1.8. Definíció: Pivotálás egy mátrix valamely *a* nemzérus elemén:

$$(2)\quad A\in\mathbb{R}^{m\times n},\quad A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & D \end{pmatrix}\ \rightarrow\ \overline{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{c}{a} \\ -\frac{b}{a} & D-\frac{1}{a}(bc) \end{pmatrix},\quad \{D, bc\}\subset\mathbb{R}^{(m-1)\times(n-1)}$$

Speciálisan hálózati mátrixoknál a pivotálás szemléletes jelentése nem más, mint egy feszítőfabeli élt kicserélni egy nem-fa élre.

1.1.9. Tétel: A *TU*, illetve a hálózati mátrixok invariánsak az alábbi műveletekre: tetszőleges két sor/oszlop megkettőzése, tetszőleges két sor/oszlop felcserélése, tetszőleges sor/oszlop elemenkénti negálása, tetszőleges sor/oszlop nullával való beszorzása, identitásmátrix soraival/oszlopaival történő konkatenáció, pivotálás bármely nemnulla elemen.

1.1.10. Tétel: Minden hálózati mátrix *TU*. Megfordítva nem igaz.

1.1.11. Megjegyzés: *TU*, de nem hálózati mátrixok, és a transzponáltjuk sem az:

$$(3)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \text{illetve}\ (4)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.12. Tétel: (Ghouila-Houri, [3])

$$(5)\quad A\in\mathbb{R}^{m\times n}\ TU\ \Leftrightarrow\ \forall x\in\{1,0\}^n\ \exists\bar{x}\in\{\pm1,0\}^n: A\bar{x}\in\{\pm1,0\}^m\wedge\forall i: |\bar{x}_i|=x_i$$

1.1.13. Megjegyzés: (5) azzal ekvivalens, hogy a mátrix sorai egyenletesen 2-színezhetők

1.1.14. Definíció: egy poliéder egész, ha minden támaszhipersíkjával vett metszete tartalmaz minden koordinátájában egész pontot. Speciálisan politópok, azaz korlátos poliéderek esetén azzal ekvivalens, hogy véges sok egész pont konvex burka.

1.1.15. Tétel: minden nemdegenerált TU mátrixszal leírt egészértékű lineáris programozási feladat polinomidőben megoldható, ha egészértékűek a korlátozó vektorok.

Bizonyítás: a megengedettségi halmaz egész poliéder (lásd [4]). Így az egészértékűségi megkötés elhagyható, az ellipszoid módszer ([2], [5]) tulajdonságai miatt az LP feladatot meg tudjuk oldani polinomidőben, a kapott megengedett megoldásból meg elő tudunk állítani egy bázismegoldást, ami egész lesz. Q.E.D.

1.1.16. Tétel: minden hálózati mátrixszal leírt LP feladat ekvivalens egy áramfeladattal. (lásd [6])

1.1.17. Következmény: hálózati mátrixszal leírt LP feladat erősen polinomidőben megoldható (egészértékű korlátozó vektorok esetén létezik egészértékű optimális megoldás, amit pl. speciális hálózati szimplex algoritmusokkal megtalálunk (lásd [6])).

1.1.18. Tétel: Lineáris korlátozó feltételes optimalizálási feladat, mely célfüggvénye egy lineáris tagból meg véges sok lineáris kifejezés abszolútértékeinek az összegéből áll, átírható LP feladattá; továbbá az új feladat mérete az eredeti feladat inputja méretének polinomjával felülről korlátozható.

Bizonyítás: Írjuk fel formálisan a feladatot:

$$\text{(7.a)}\quad f(x) \stackrel{\text{def}}{=} c^T x + \sum_{i=1}^{k} \left|\bar{c}_i^{\,T} x\right|$$

$$\text{(7.b)}\quad \begin{matrix} min\, f(x) \\ Ax \le b \end{matrix}$$

Vezessünk be új változókat és korlátozó feltételeket:

$$\bar{c}_i^{\,T} x = z_i - w_i$$
$$z_i \ge 0,\quad w_i \ge 0$$

$$\text{(8)}\quad C \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \vdots \\ \bar{c}_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times n},\quad z \stackrel{\text{def}}{=} (z_1, z_2, \cdots, z_k),\, w \stackrel{\text{def}}{=} (w_1, w_2, \cdots, w_k), \in \mathbb{R}^k$$

$$\left(\text{ahol}\quad A \in \mathbb{R}^{m\times n};\quad c, \bar{c}_i \in \mathbb{R}^n\right)$$

Ekkor a feladat az alábbi módon írható le:

$$\text{(9.a)}\quad min\left(c^T x + \sum_{i=1}^{k} (z_i + w_i)\right)$$

$$\text{(9.b)}\quad \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ C & -I_{k\times k} & I_{k\times k} \\ 0 & I_{k\times k} & 0 \\ 0 & 0 & I_{k\times k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z & w \end{pmatrix} \begin{matrix} \le b \\ = 0 \\ \ge 0 \\ \ge 0 \end{matrix}$$

Látható, hogy a (9) egy LP probléma, mérete a (7) által meghatározott eredeti probléma méretének legföljebb kvadratikus polinomjával korlátozható felülről. Már csak azt kell belátni, hogy $\forall i:\ z_i = 0 \lor w_i = 0$ minden *(x,z,w)* optimális megoldás-vektorhármas esetén. Valóban, ha feltesszük indirekt, hogy *(x,z,w)* optimális megoldás és létezik *i* index, melyre: $z_i > 0$ és $w_i > 0$; ekkor

$$\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_{i-1}, z_i - min(z_i, w_i), z_{i+1}, \cdots, z_k, w_1, \cdots, w_{i-1}, w_i - min(z_i, w_i), w_{i+1}, \cdots, w_k\right)$$

is megengedett megoldás lesz, node szigorúan csökkent a célfüggvény érték, ami ellentmondás. Ezzel beláttuk, hogy (7) és (9) optimális megoldáshalmazai ekvivalensek. Q.E.D.

1.1.19. Tétel: Részhalmaz-összeg feladat NP-teljes (lásd [7]).

1.1.20. Jelölés: Bidiagonális mátrix:

$$(10.a)\quad bidiag_{s\times t}(a,b) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a & b & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & a & b & \\ \mathbf{0} & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{s\times t}$$

$$(10.b)\quad bidiag_s(a,b) \overset{\text{def}}{=} bidiag_{(s-1)\times s}(a,b)$$

1.1.21. Jelölés: Mátrixok konkatenációit a szokásos módon egymás mellé írással jelöljük, viszont fontos az alábbi művelet, az átlós konkatenáció adott $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nem feltétlenül azonos méretű mátrixokra nem más, mint az ún. 1-összeg, azaz:

$$(11)\quad \bigoplus_{i=1}^{k}{}_1 A_i \overset{\text{def}}{=} A_1 \oplus_1 A_2 \oplus_1 \cdots \oplus_1 A_k \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

1.1.22. Tétel: Egy hálózati mátrix transzponáltja pontosan akkor hálózati mátrix, ha a hálózati gráf síkbarajzolható.

1.2. A menetrend-készítésről általában

Először is tisztázandó, hogy mit is értsünk menetrend alatt: ez a villamosenergia-optimalizálásban szokásos zsargon szerint értendő általánosított ütemezési feladat. Legyen adott bizonyos számú erőmű és fogyasztó, ezek egy villamosvezeték-hálózatra bizonyos kapcsolódási pontokon illeszkednek. Feltesszük, hogy bármely két kapcsolódási pont között tetszőleges mennyiségű áram eljuttatható. Fontos további feltétel, hogy minden időpillanatban a kivett és a betáplált össz-villamosenergia nagysága megegyezzen. Ha egy időintervallumon belül a fenti feltételeket kielégítve üzemelnek az erőművek, akkor a kapcsolódási pontokon mért (előjeles) energiaértékeket az idő függvényeként tekintve, az így kapott függvényhalmazt (megengedett) *menetrendnek* nevezzük. Természetesen a megengedettségi feltételek között szerepelhetnek az egyes erőművek és fogyasztók fizikai paraméterei, úgymint pl. minimális és maximális energialeadás/áramfelvétel, kötelező minimális és maximális üzemanyag-felhasználás (a rendelkezésre álló hasadóanyagok, fosszilis és megújuló tüzelőanyag-források, a napsütéses órák száma, vízlépcsők esetén a csapadék-, a vízállás- és árapály-adatok, kapcsolt hőtermelés során a kommunális hőszolgáltatás biztosítása, hulladékmegsemmisítés, nagy(obb)teljesítményű termelő turbinák indításainak előkészítése, stb.) az egyes kapcsolódási pontoktól, az időtől, a korábbi teljesítményértékektől is függő gradiensértékek (melyek igencsak korlátozhatják a hagyományos széntüzelésű turbinák fel- és leterhelési paramétereit). Ezen feltételek közül majd az egyikről később belátjuk, hogy NP-teljes konvex vagy lineáris célfüggvény esetén is.

A gyakorlatban többcélfüggvényű optimalizálási feladatként szokták megoldani különböző relaxációs eljárások, könnyítések elvégzése után úgy, hogy gyakran nem is létezik megengedett menetrendet reprezentáló megoldás, és a megengedettségi feltételek helyett büntető- vagy akadályfüggvényes célfüggvények segítségével generálnak megoldásokat, melyek közül azokat választják ki, melyek a megengedettségi feltételeket a legkevésbé sértik meg. A következő fejezetben formálisan is definiáljuk az alapproblémát, valamint a leggyakoribb relaxációját.

1.2.1. Definíció: Egy többcélfüggvényű optimalizálási (minimalizálási) feladat egy x megoldását Pareto-optimumnak nevezzük, ha tetszőleges bármely másik y megoldás esetén kiválasztható olyan $c(v)=c_{x,y}(v)$ célfüggvény, melyre $c(x)<c(y)$. (Azaz x legalább az egyik célfüggvény szerint "szigorúan jobb", mint y.)

1.2.2. Megjegyzés: A Pareto-optimumok halmaza nemkonvex halmaz is lehet, már lineáris korlátozó feltételes két célfüggvényes optimalizálási feladat esetén is.

2. fejezet
Modellek leírása

2.1. Modell és relaxáció

Konvenció: a továbbiakban minden megszámlálhatónál bővebb halmazon értelmezett függvényt folytonosnak és majdnem mindenütt analítikusnak tekintünk. Legyen egy optimalizálási feladat a következő: adott egy véges hosszú időtartam, véges darabszámú áramfogyasztó, illetve áramtermelő erőmű. Ismertek az energiaárak és a villamoshálózati, meg az erőművek teljesítményeire vonatkozó korlátozó feltételek, továbbá az energiaigény, mint az idő függvénye. Mint minden gyakorlati optimalizálási feladat, ez is többcélfüggvényű; ilyenkor kétféle bevett szokás létezik megoldás előállítására. Az első szerint a különböző célfüggvények kúpkombinációit célfüggvénynek tekinteni, a kúpkombinációból kimaradó célfüggvényeket minorálva/majorálva a korlátozó feltételek közé venni, a második eljárás során szekvenciálisan optimalizálunk a célfüggvények adott sorrendjei szerint akár több fázisban, rekurzívan is addig, amíg egy Pareto-optimumot nem találtunk. Az erőművek/fogyasztók halmazát jelölje E, $k \stackrel{\text{def}}{=} |E|$, $(k<\infty)$, az időtartamot pedig jelölje T, $T \stackrel{\text{def}}{=} [0,r]$, $(r<\infty)$ Célunk megadni egy minimális költségű menetrendet. Formálisan felírva kapjuk az alábbi függvényegyenletet:

$$\text{(12.a)} \quad min\, C(\vec{x}(t))$$

$$\text{(12.b)} \quad \vec{x}(t) \in F$$

ahol *C(.)* skalárértékű költségfunkcionál, $F \stackrel{\text{def}}{=} \cap F_i$ megengedettségi halmaz, $\vec{x}(t) : T \rightarrow \mathbb{R}^k$ pedig az erőművek/fogyasztók által megtermelt előjeles energiaérték-vektorokba képező függvényt jelenti (, dimenziója MW). A nemzetközi energia-kereskedelemben elfogadott szokás, hogy *T* időtartamot diszkrét halmaznak tekintik, ekvidisztáns időpontokat kijelölve, egyenlő egymásba nem nyúló intervallumokra partícionálva; időpont helyett intervallum-végpontokra hivatkozva. Két szomszédos időpont távolsága megállapodás szerint tipikusan 1 óra, de használnak 30, 20, 15, 12, 10 és 1 perces beosztásokat is, illetve középtávú ütemezéseknél több órás távolságot is szoktak alkalmazni. Újradefiniáljuk a változóinkat: $\vec{x}(t)$ helyett egy *(r+1)k* dimenziós vektort értünk: $x \in \mathbb{R}^{(r+1)*k}$ ($r, k \in \mathbb{N}^+$ rögzített). Továbbá feltehető, hogy az általunk vizsgált esetekben a költségfunkcionál lineáris. A (12) eképpen az alábbi alakúra fog módosulni:

$$(13.a)\ \ min\, c^T x$$

$$(13.b)\ \ x \in F \subseteq \mathbb{R}^{(r+1)*k}$$

Még ebben az esetben is reménytelen megoldani a feladatot amennyiben csak egyetlen időpontunk van, k erőművünk/fogyasztónk, és $F_1 \stackrel{\text{def}}{=} \times_{i=1}^{k} \{0, a_i\}$, $F_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \mid \sum_{i=1}^{k} x_i = b \right\}$, $F \stackrel{\text{def}}{=} F_1 \cap F_2$, akkor ez a részhalmaz-összeg feladat. Azaz e speciális esetben NP-teljes (12.b) mint megengedettségi feladat, a 1.1.19. miatt.

Az egyik célfüggvényünk már elkészült, most a korlátozó feltételeket definiáljuk. Mivel minden erőmű/fogyasztó által leadható/felvehető villamosenergia-kapacitása korlátos, ezért:

$$(14)\ \ b_{LO,e,t} \leq x_{e,t} \leq b_{UP,e,t}$$

$\forall\ e \in E,\ t \in T$. Azaz a megengedettségi halmazt elmetsszük egy kompakt hipertéglával. Következménye az, hogy korlátos a megengedett megoldások halmaza (ha nem üres).

A következő korlátozó feltételnek szemléletes fizikai jelentést tulajdonítunk. Tegyük fel, hogy egyetlen erőművünk van összesen, amit jelöljünk *e*-vel, és szilárd tüzelőanyaggal működő, tüzelőanyag-őrlést nem végző blokk, amely 50, illetve 200 MW közötti teljesítményekre képes. A valóságban elegendően kicsiny időegységet választva egy időegységnyi idő eltelte alatt nem tud 50 MW-ról 200 MW-ra ugrani, ezért az ilyen jellegű technológiai korlátokat is figyelembe kell venni, ami újabb korlátozó feltételeket jelent. A kazán teljesítményeire vonatkozó fizikai összefüggés:

$$(15)\ \ \frac{\partial}{\partial t} \vec{x}(t) \in \left[g_{LO}(t), g_{UP}(t) \right]$$

ahol $-\infty < g_{LO}(t) \leq g_{UP}(t) < \infty$ $(\forall\, t \in T)$. Szemléletesen ez olyasmi, mint egy „differenciálegyenlőtlenség". Diszkrét esetben a számlálómérték szerint vett jobboldali differenciahányados-függvényre adott korlátozás analogonjának veendő:

$$(16.a)\ \ \Delta x_{e,t} \stackrel{\text{def}}{=} x_{e,t} - x_{e,(t-1)}$$

$$(16.b)\ \ g_{LO,e,t} \leq \Delta x_{e,t} \leq g_{UP,e,t}$$

ahol $\Delta x_{e,t}$ értelmes, azaz $t \geq 1$, amit hallgatólagosan feltettünk.

Ismert a villamosenergia-igény, mint az idő függvénye. Ez folytonos esetben az alábbi korlátozó feltételt jelenti:

$$(17)\ \ \sum_{e \in E} \vec{x}(t) = D(t)$$

ahol $D(t)\colon\ T \to \mathbb{R}$ függvény. Diszkrét esetben az alábbi alakot fogja ölteni:

$$(18)\quad \sum_{e=1}^{k} x_{e,t} = D_t$$

$\forall t \in [0, r] \cap \mathbb{Z}$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy (18) jobboldala 0; továbbá t=0 időpontban $b_{LO,e,0}$=$b_{UP,e,0}$. Ez utóbbi amiatt van, hogy a kezdeti erőművi állapotok többnyire ismertek, azaz olyan, mintha egy kezdetiérték-problémát tekintenénk.

2.2. Lehetséges célfüggvények

Láttuk a (13.a)-nál az egyik célfüggvényt, ami az anyagi összköltséget jellemzi. A másik modellbeli célfüggvényt pedig az alábbi dolog motiválta: kivételes eseteket leszámítva nem célszerű úgy ütemezni az energiatermelőket, hogy két, egymás utáni időpillanatban az egyik által a rendszerbe táplált villamos energia szigorúan nő, míg ugyanazon két időpontban egy másiké szigorúan csökken. Ezt szokás ellenszabályozásnak nevezni. Persze kivételes esetekben nem lehet elkerülni, pl. amikor ugyanazon időpontban igénynövekedés van, továbbá különböző okok miatt leállítja a termelést egy erőmű. Ezért meg kell büntetni minden rögzített időpont esetén az erőművek egymástól való eltéréseit. Ez lehetséges például tetszőleges valósból valósba képező, a negatívokon monoton csökkenő, a pozitívakon monoton növő $W_{e,f,t}(.)$ függvényeket felhasználva:

$$(19.a)\quad \sum_{t \in T} \sum_{e,f \in E} W_{e,f,t}\left(x_{e,t} - x_{f,t}\right)$$

Ezt az ötletet majd a (28)-nál aknázzuk ki. Lehetséges célfüggvények még tetszőleges valósból valósba képző $Q_{e,t}(.)$ konvex függvények esetén:

$$(19.b)\quad \sum_{\substack{t \in T \\ e \in E}} Q_{e,t}\left(x_{e,t}\right)$$

illetve

$$(19.c)\quad \sum_{\substack{t \in T \\ e \in E}} Q_{e,t}\left(\Delta x_{e,t}\right);$$

Ezekkel azonban nem foglalkozunk e dolgozat keretein belül.

3. fejezet

A modell mátrixának tulajdonságai

3.1. Teljes unimodularitás

3.1.1. Tétel: A (13.a), (14), (16.a), (16.b) és (18) feltételek által definiált lineáris programozási feladat mátrixa *TU*.

Bizonyítás (2004): A célfüggvény elhagyható triviális megfontolásokból (nem része a mátrixnak). Az 1.1.9. miatt a (14) korlátozó feltétel által definiált mátrix-sorokat elhagyhatjuk, ők invariánsak a *TU*-ság szempontjából. Így elegendő csupán (16.a), (16.b), és (18) által definiált sorokat tekinteni a mátrixban, és az összefüggő sorok eltávolítása után az alábbi mátrix *TU*-ságát kell csak igazolni:

$$(20)\quad A \stackrel{\text{def}}{=} \overbrace{\begin{pmatrix} \left(I_{(r+1)};\ I_{(r+1)};\ \cdots\ ; I_{(r+1)}\right) \\ \left(\bigoplus_{i=1}^{k}{}_{1}\, bidiag_{(r+1)}(-1,1)\right) \end{pmatrix}}^{k*r\ \ oszlop}$$

Belátjuk, hogy egyenletesen 2-sorszínezhető, ekkor ugyanis [3] miatt *TU*. Az *A* mátrix két részre bontható:

$$(21.a)\quad A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

$$(21.b)\quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & 1 & & & & 1 & & \\ & 1 & & & 1 & & \cdots & & 1 & \\ & & \ddots & & & \ddots & & & & \ddots \\ & & & 1 & & & 1 & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(r+1)\times((r+1)*k)}$$

$$(21.c)\quad A_2 = \begin{pmatrix} \left|\begin{matrix} -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 1 \end{matrix}\right| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left|\begin{matrix} -1 & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 1 \end{matrix}\right| & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \left|\begin{matrix} -1 & 1 & \\ & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 1 \end{matrix}\right| \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(r*k)\times((r+1)*k)}$$

Tekintsük az A mátrix sorainak tetszőleges S részrendszerét. Vezessük be az alábbi jelölést: $S_1 \stackrel{\text{def}}{=} A_1 \cap S$, $S_2 \stackrel{\text{def}}{=} S \setminus S_1$. Most már csak azt kell igazolni, hogy csupán A-beli sorok és oszlopok némelyikének negálásával A_2 azon oszlopaiban szereplő egyeseket negálni lehet, amely oszlopokban S_1 egyest tartalmaz úgy, hogy A többi eleme változatlan maradjon. Ez azért jó nekünk, mert ekkor rögzített S_1 esetén tetszőleges S_2 választásánál elegendő a kiválasztott sorokat összeadni, és ekkor *TU* vektort kapunk. Nézzük a következő eljárást: első lépésben kiválasztunk egy olyan j oszlopot, melyre S_1 nemnulla elemet tartalmaz, $a_{i,j}$ pedig azon A_2-beli nemnulla elem, melyre i minimális. Második lépésben A minden olyan j' oszlopát negáljuk, melyre $(j' \ mod(r+1))<(j \ mod(r+1))$, és A minden negatív elemet tartalmazó sorát negáljuk. Harmadik és egyben utolsó lépésben A_2 minden olyan i' sorát negáljuk, melyre $(i' \ mod(r))\leq(i \ mod(r))$. Az eljárás során $a_{i,j}$ és minden vele azonos *(r+1)*-es maradékú oszlop-koordinátával rendelkező A_2-beli nemzérus elemek közül a legkisebb sorindexűek negálódnak, mert őket csak egyszer negáltuk, míg a többi nemzérus mátrixelemet páros sokszor. Az eljárást addig folytatjuk, míg a kívánt alakú nem lesz A. Q.E.D.

3.1.2. Következmény: Az 1.1.15. miatt (13.a), (14), (16.a), (16.b) és (18) által meghatározott lineáris optimalizálási feladatnak egészértékű korlátozó vektorok esetén egészértékű bázismegoldása állítható elő polinomidőben (ha létezik). Sajnos azonban erősen polinomiális algoritmus létezéséről még egyelőre semmit sem tudunk mondani.

Fontos, lényeget nem érintő megjegyzés, hogy az időpontokat a következő tételekben praktikus okokból pozitív egészeknek vesszük, azaz $T \stackrel{\text{def}}{=} [1, r+1] \cap \mathbb{Z}$. A következő állításból következik a 3.1.1. tétel, de az előbbi korábban lett igazolva.

3.2. Hálózatiság igazolása

3.2.1. Tétel: A (13.a), (14), (16.a), (16.b) és (18) által definiált LP feladat mátrixa hálózati mátrix.

Bizonyítás (2006): vegyük észre, hogy csakúgy, mint 3.1.1-nél, itt is elegendő (21)-beli mátrixról igazolni, hogy hálózati. Ezt pedig hálózati gráf megkonstruálásával látjuk be, amit a továbbiakban $\vec{G} \stackrel{\text{def}}{=} (V, \vec{E})$-vel jelölünk. Először a feszítő fát állítjuk elő. Az A mátrix *i.* sorát jelölje a_i. A feszítő fánk olyan lesz, hogy egyetlen, p-vel jelölt csúcs kivételével minden pontjának befoka 1, így a soroknak megfelelően a_i-vel nemcsak fa-élre, hanem minden csúcsra is egyértelműen hivatkozhatunk. A feszítő fa konstrukciója:

$$(22)\quad V \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ a_i \,\middle|\, 1 \le i \le r+1+(r*k) \wedge i \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{p\}$$

$$(23)\quad \vec{E}_{feszítő\ fa} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \overrightarrow{a_{t+1} a_t} \,\middle|\, 1 \le t \le r \wedge t \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \overrightarrow{p\ a_{r+1}} \right\} \cup \left\{ \overrightarrow{a_t a_{(e*r+t+1)}} \,\middle|\, \forall t \in \mathbb{Z} \cap [2, r+1\ ], \forall e \in \mathbb{Z} \cap [1, k] \right\}$$

látható, hogy $\vec{E}_{feszítő\ fa}$ egy p gyökerű ki-fenyő, így a gyökér kivételével valóban minden pont be-foka 1. Már csak A oszlopainak megfelelő nem-fa éleket kell megkonstruálni. A oszlopait felső indexbe írt koordinátával fogjuk jelölni(a^i), és ugyanezzel a jelöléssel hivatkozunk majd a nem-fa élekre is.

$$(24.a)\quad \vec{E} \setminus \vec{E}_{feszítő\ fa} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \overrightarrow{a_{e*r+t+1} a_{e*r+t+2}} \,\middle|\, \forall e \in \mathbb{Z} \cap [1,k], \forall t \in \mathbb{Z} \cap [2, r] \right\} \cup \left\{ \overrightarrow{a_{e*r+r+1}\, p} \,\middle|\, \forall e \in \mathbb{Z} \cap [1,k] \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ \overrightarrow{a_1 a_{e*r+2}} \,\middle|\, \forall e \in \mathbb{Z} \cap [1,k] \right\}$$

$$(24.b)\quad a^{(e-1)*(r+1)+t} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{cl} \overrightarrow{a_1 a_{e*r+2}} & ,\ ha\ \ t=1 \\ \overrightarrow{a_{e*r+r+1}\, p} & ,\ ha\ \ t=r+1 \\ \overrightarrow{a_{e*r+t+1} a_{e*r+t+2}} & ,\ ha\ \ 2 \le t \le r \end{array} \right\} \forall e \in \mathbb{Z} \cap [1, k]$$

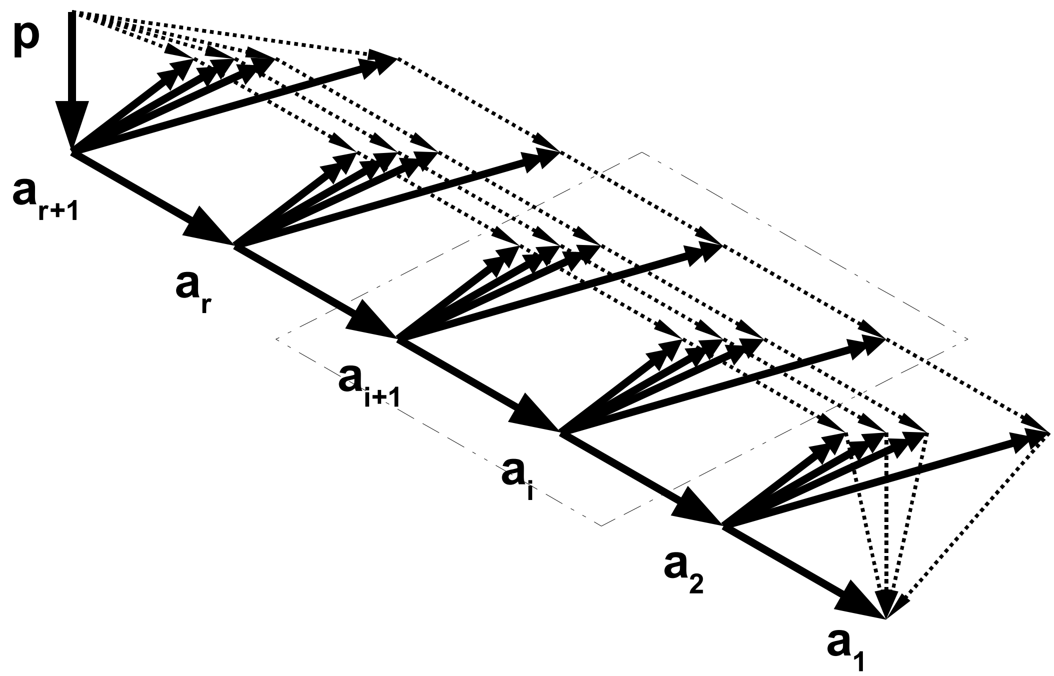
Vegyük észre, hogy bármely a^i nem-fa él feszítő fába való vételekor egyetlen, 3 vagy 4 hosszúságú kör keletkezik attól függően, hogy $i\, mod\, (r+1) \in \{0, 1\}$ vagy sem.

$$(25.a)\quad a_i^j = \left\{ \begin{array}{lllll} 1 & \text{ha} & i \le r+1 & \text{és} & (r+1) | (j-i) \\ -1 & \text{ha} & i > r+1 & \text{és} & ((i-r-2)\, mod\, r) = ((j-1)\, mod\, (r+1)) \\ 1 & \text{ha} & i > r+1 & \text{és} & ((i-r-2)\, mod\, r)+1 = ((j-1)\, mod\, (r+1)) \\ 0 & \multicolumn{4}{l}{\text{minden más } i, j - \text{re}} \end{array} \right\}$$

A (25) ábrán ellenőrizhető, hogy valóban az A-t kapjuk vissza a hálózati gráfból. Q.E.D.

A gráf ábrája, ahol a vastag, folytonos vonalak a feszítőfa-élek, a szaggatottak a nemfa-élek.

(25.b)



A (23) ábra alapján az a_i ($1<i<r+2$) kezdőpontú, nagyobb indexű csúcsba mutató élek által alkotott csillagkomponensek uniója a feszítő fában: $\left\{\overrightarrow{a_t a_{(e*r+t+1)}} \mid \forall t \in \mathbb{Z} \cap [2, r+1], \forall e \in \mathbb{Z} \cap [1, k]\right\}$. A szaggatott tartományban levő gráfkomponens periodikusan ismétlődik, az indexeknek megfelelően.

3.2.2. Megjegyzés: Sajnos jelenlegi ismereteink szerint TU mátrixszal rendelkező LP feladat (egészértékű) megoldását még nem tudjuk erősen polinomiálisan előállítani, hiszen [6] 6.8. lemma és az az utáni megjegyzés szerint egy tetszőlegesen megirányított teljes hatcsúcsú irányított gráf incidenciamátrixát *A*-val jelölve $B = A^T \oplus_1 A$ 1-összegként definiálva *B* mátrix *TU*, de nem hálózati, sőt nem is binet-mátrix (lásd [6]). Ennek következménye, hogy az eddig ismert network-LP algoritmusok nem alkalmazhatóak, vagy nem igazolhatók rájuk a kívánt komplexitási tulajdonságok csak *TU* mátrixokkal rendelkező LP feladatokra.

3.3. A transzponált mátrix hálózatisága

3.3.1. Tétel: Tegyük fel, hogy $r>0$. Ekkor a (13.a), (14), (16.a), (16.b) és (18) által definiált LP feladat mátrixának transzponáltja pontosan akkor hálózati mátrix, ha $k<3$.

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy $k<3$. Ekkor $k=2$ esetén:

$$(26.a)\quad A=\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0\\
0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 & 1 & \ddots & & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & 0 & & & & & 0\\
0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 & 1\\
-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & \cdots & & 0\\
0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & & \cdots & & 0\\
0 & & \cdots & & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & & & \vdots & 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots\\
 & & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
0 & & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1
\end{pmatrix}$$

Negáljunk az egyik általunk kiválasztott erőműhöz tartozó oszlopokat. A negálás után kapjuk az alábbi mátrixot, melynek minden sorában legfeljebb két $\{\pm 1\}$ -beli elem állhat, és minden sorban a sorbeli nemnulla elemek különbözők. Azaz ez nem más, mint egy él-pont incidenciamátrixa egy irányított gráfnak, ami egy hálózati mátrix transzponáltja.

$$(26.b)\quad \tilde{A}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & & 0 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\
0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & 0 & & & & & 0 \\
0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 & -1 \\
 & & & & & & & & & \\
-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & \cdots & & 0 \\
0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\
 & & & & & & & & & \\
0 & & \cdots & & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\
 & & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

Az $k=1$ eset pedig triviális: egy egyetlen irányított Hamilton-útból álló gráf incidencia-mátrixa transzponáltjának és egy identitásnak a konkatenáltja, tehát hálózati is egyúttal. Már csak a legnehezebb eset maradt hátra.

Tekintsük (25.b) ábrán található gráfot. Válasszuk az alábbi hat pontot: p, a_1, a_2, illetve a_1 tetszőleges a_2 -től különböző három szomszédját (melyeket b, c, illetve d jelöl a továbbiakban). Ez egy topologikus tiltott Kuratovszkij-részgráf lesz (azaz nem rajzolható síkba), méghozzá egy $K_{3,3}$. Az egyik komponens p, a_1, a_2; a másik értelemszerűen b, c, illetve d. A 9 élből csak három, a faktorizáció szerinti ősképét kell meghatározni, mégpedig bp, cp, illetve dp éleket. De hiszen látható, hogy egymástól (és a másik 6, az eredeti gráfban meglévő éltől is) diszjunkt szaggatott nemfa-élekből álló út vezet p-ből mindhárom másik komponensbeli csúcshoz, legyen ez a három út a három él faktorizálás szerinti ősképe. Ezzel bizonyításunkat befejeztük, állításunkat igazoltuk ebben az esetben is, ugyanis ilyen három végpontjaitól eltekintve diszjunkt út mindig lesz, ha k értéke legalább 3.

3.3.2. Következmény: Nem alkalmazható transzponált mátrixot inputként véve (duális) optimális megoldást kereső hálózati szimplex algoritmus kettőnél több erőművet tartalmazó input esetén.

4. fejezet
Megoldási módszerek

4.1. Egy "rossz" megoldás

A fejezet elején említettük, hogy többcélfüggvényű optimalizálási feladatról is szó lesz. Bevett módszer, hogy a megengedett megoldások halmazát rendre elmetsszük minden célfüggvény optimális értékeinek nívóhalmazaival, a célfüggvények egy előre ismert prioritási sorrend szerint csökkenő sorrendjében. Ipari alkalmazásoknál az elsődleges cél mindig a költségek minimalizálása, ezt követően szoktak egyéb technikai, környezetvédelmi, logisztikai stb. jellegű célfüggvények szerint optimalizálni (az optimális költségű megoldások halmazán)

Sajnos a (13.a), (14), (16.a), (16.b) és (18) által definiált LP feladatra a szokásos LP vagy áramfeladatot megoldó algoritmusok nem szolgáltatnak minden értelemben kielégítő megoldást. Gyakorta előfordul, hogy a villamosenergia-rendszerbe egy hálózati csomóponton csatlakozó erőművi blokkok, gépek árképzése azonos (azaz megegyezik a (13.a) célfüggvény vektorban szereplő koordinátájuk), és frekvenciazavarok, no meg a rossz fajlagos tüzelőanyag-fogyasztás elkerülése végett, illetve vízlépcsők esetén a víztározók egyenletes kihasználása miatt célszerű közel azonos teljesítményre ütemezni őket, mint azt előrevetítettük (19) definíciójánál, márpedig az ismert algoritmusok esetén a gyakorlatban alkalmazhatatlan ütemezéseket kapunk megoldás gyanánt, mint azt az alábbi, (27) példán is láthatjuk; keressünk egy napra ütemezést két minden paraméterében azonos erőműre, mindkettő 50 és 100 MW között ütemezhető, 75 MW-on indulnak a nap elején, az igény minden időpillanatban 150 MW, 1 MW energia előállítási költsége 1 Ft blokkonként, Egy óra alatt 1-1 megawattnyival tud megváltozni a teljesítményük, az időegység egy óra.

4.1.1. Feladat:

$$\text{(27.a)}\quad min\left(\sum_{e=1}^{2}\sum_{t=0}^{24} x_{e,t}\right)$$

$$
(27.b)\quad \begin{array}{c} x_{1,0}=x_{2,0}=75\,(MW) \\ 50\le x_{1,t}\le 100\,(MW) \\ 50\le x_{2,t}\le 100\,(MW) \\ -1\le x_{1,t}-x_{1,t-1}\le 1 \\ -1\le x_{2,t}-x_{2,t-1}\le 1 \\ x_{1,t}+x_{2,t}=150 \end{array}
$$

A 4.1.1. feladatra kapott tipikus megoldás pl. szimplex módszerek alkalmazása esetén:

$$(27.c)\ x_{j,t} = t(-1)^j+75 \ \ (\mathrm{MW}) \ \text{ ahol } j = 1;\, 2$$

holott ránézésre látszik, sokkal célszerűbb lenne mindkét gépet 75 MW-on üzemeltetni. Amennyiben csak folytonos változóink vannak, akkor szigorúan konvex célfüggvényt alkalmazva e probléma kiküszöbölhető, viszont már két változó esetén is a kvadratikus konvex vagy a tartományonként lineáris konvex célfüggvényes globális optimalizálási feladat is reménytelenül nehéz, az optimális egészértékű megoldás tetszőlegesen messze lehet az optimális megoldástól, továbbá a célfüggvény értéke globális optimum koordinátákban való kerekítése után kapott egészértékű pontban is tetszőlegesen eltérhet az optimális egészértékű megoldás értékétől. Ezért más jellegű kell legyen a második célfüggvényünk.

4.2. A háromfázisú algoritmus

4.2.1. Algoritmus: Háromfázisú algoritmus (röv.: HFA)

input: (13.a), (14), (16.a), (16.b) és (18), minden paraméter egész, kivéve a célfüggvényt.

1. lépés: megoldjuk {(13.a), (14), (16.a), (16.b) és (18)} rendszert.

a kapott megoldást jelölje $\bar{x}$, továbbá legyen $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} c^T \bar{x}$

$$(28)\ \ c^T x=\gamma$$

$$(29)\ \ \min \sum_{t=1}^{r+1} \sum_{\substack{e<f \\ c_{e,t}=c_{f,t}}} |x_{e,t}-x_{f,t}|$$

2. lépés megoldjuk {(29), (14), (16.a), (16.b), (18), (28)} rendszert a 18.tételben leírtak

alapján. A kapott megoldást jelölje $\tilde{x}$

$$(30)\ \ \lfloor \tilde{x} \rfloor \le x \le \lceil \tilde{x} \rceil$$

3. lépés megoldjuk {(13.a), (16.a), (16.b), (18), (30)} feladatot.

output: x **vektor.**

4.2.2. Állítás: A HFA polinomidőben megoldható, egészértékű megoldást szolgáltat (feltéve, ha (14), (16.a), (16.b) és (18) nem üres)

Bizonyítás: Triviális, hiszen mind a 3 fázis polinomidőben megoldható, azt kell csak meggondolni, hogy (29), (30) és (28) az input méretének polinomjával korlátozható triviálisan. A 3. lépésben pedig az első lépéssel megegyező típusú feladatot oldunk meg, csak más korlátozó vektorokkal. Q.E.D

4.2.3. Megjegyzés: A HFA legföljebb $\sum_{e,t} \lceil x_{e,t} - \lfloor \tilde{x}_{e,t} \rfloor \rceil$ értékével tér el a másodlagos célfüggvény (29) optimális értékétől.

4.2.4. Megjegyzés: A HFA egy elméleti eljárás, a gyakorlatban relaxációkkal csökkentik a kerekítések okozta hibákat, továbbá heurisztikák alkalmazásával jelentősen redukálják a feladatok méreteit és a futási időt. Nyilvánvaló, hogy (28) helyett célszerűbb $c^T x \le \gamma + \varepsilon$ feltételt alkalmazni a feladattól függően rögzített $\varepsilon > 0$ pontossági paraméter mellett, ugyanis így akár belsőpontos LP-megoldó módszerek is alkalmazhatók lesznek; a megengedettségi halmaznak valódi alterekkel való elmetszése után kevésbé kellemes használni az algoritmust. Elméletben nem kell a fázisokat ciklizáltatni, ám a gyakorlatban célszerű (28)-et az előbb közölt módon perturbáltatni és újraindítani az eljárást a második fázistól, a pontossági paramétert iterációnként csökkentve.

4.2.5. Jelölés: $H \subseteq E$ ún. kiegyenlíthető halmaz, ha legalább két elemű, $\forall t \in T \, \forall e, f \in H$ esetén $c_{e,t} = c_{f,t}$, $b_{LO,e,t} = b_{LO,f,t}$, $b_{UP,e,t} = b_{UP,f,t}$, $g_{LO,e,t} = g_{LO,f,t}$, $g_{UP,e,t} = g_{UP,f,t}$; továbbá $\forall t \in T \;\forall e \in H \;\forall f \in E \setminus H$ esetén $c_{e,t} \ne c_{f,t}$.

$$\text{(31)} \quad \widetilde{E} \stackrel{\text{def}}{=} E \setminus \left(\bigcup_{\substack{H \text{ kiegyen-} \\ \text{líthető}}} H \right)$$

Kiegyenlíthető halmaz erőművek/fogyasztók egy részhalmazát jelöli, méghozzá azokat, amelyek fizikai tulajdonságai és árai megegyeznek. Ily módon (29) helyett az alábbi célfüggvényt, illetve korlátozó feltételt lehet alkalmazni HFA 2. lépésében:

$$\text{(32.a)} \quad \min \sum_{t=1}^{r+1} \sum_{\substack{e, f \in \widetilde{E} \\ e < f \\ c_{e,t} = c_{f,t}}} |x_{e,t} - x_{f,t}|$$

(32.b) $\exists H$ kiegyenlíthető $: \forall t \in T, \; \forall [e, f] \subseteq H \; : \; e < f, \;]e, f[\cap H = \emptyset \;\; x_{e,t} = x_{f,t}$

4.2.6. Jelölés: $J \subset E$ legalább egyelemű halmaz ún. feszítő erőművek halmaza, ha

$\forall t \in T \; \forall (e, f, h) \in J \times J \times (E \setminus J)$:

(33) $c_{e,t} = c_{f,t} \neq c_{h,t} \wedge ((\bar{x}_{e,t} - b_{LO,e,t} = \bar{x}_{f,t} - b_{LO,f,t} = 0) \vee (\bar{x}_{e,t} - b_{UP,e,t} = \bar{x}_{f,t} - b_{UP,f,t} = 0))$

A HFA 1. lépése utáni heurisztika a változók számának csökkentésére: mivel $\bar{x}$ ismert, ezért meghatározhatóak a feszítő (, azaz teljesítményeik valamelyik korlátján üzemelő) erőművek, s ezen erőművek teljesítményeit vegyük konstansnak az algoritmus 2. és 3. lépésében, hiszen ezeken már nem tudna változtatni a további két lépés. Megjegyzendő, hogy kétfázisú (hálózati) szimplex-módszerek esetén csak az algoritmus legelső lépésében kell első fázisfeladatot megoldanunk, ez is lényegesen könnyebbé teszi a megoldhatóságot.

4.3. Egy hasznos heurisztika

A 4.1.1-hez hasonlóan mutatunk egy inputot, ami igazolja, hogy a Pareto-optimumaink halmaza még ennél a modellnél sem szép. Tekintsük a következő feladatot:

4.3.1. Feladat:

$$\text{(34.a)} \quad min\left(\sum_{e=1}^{2}\sum_{t=0}^{3} x_{e,t}\right)$$

$$\text{(34.b)} \quad \begin{array}{c} x_{1,0} = 50(MW) \\ x_{2,0} = 80(MW) \\ 50 \leq x_{1,t} \leq 90(MW) \\ 50 \leq x_{2,t} \leq 90(MW) \\ x_{1,1} - x_{1,0} \leq 20 \\ x_{1,1} = x_{1,2} \\ -11 \leq x_{1,3} - x_{1,2} \leq 11 \\ -10 \leq x_{2,1} - x_{2,0} \leq 10 \\ -20 \leq x_{2,2} - x_{2,1} \leq 20 \\ -11 \leq x_{2,3} - x_{2,2} \leq 11 \\ x_{1,1} + x_{2,1} = 140 \\ x_{1,2} + x_{2,2} = 120 \\ x_{1,3} + x_{2,3} = 122 \end{array}$$

A 4.3.1. feladatra kapott megoldás HFA-t alkalmazva:

$$\text{(35.a)} \quad x = \begin{pmatrix} 50 & 70 & 70 & 61 \\ 80 & 70 & 50 & 61 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^{2\times 4}$$

Sajnos észre kell venni, hogy az eleje és a vége között ún. ellenszabályozás történik, holott kézzel való próbáltatás után könnyen találhatunk ellenszabályozást nem tartalmazó megoldást, mely minden célfüggvény szerint nem rosszabb, mint (35.a).

$$(35.b)\quad x=\begin{pmatrix} 50 & 60 & 60 & 61 \\ 80 & 80 & 60 & 61 \end{pmatrix},\quad x\in\mathbb{R}^{2\times 4}$$

(Vigyázat! x-et továbbra is vektornak tekintjük (nyolcdimenziósnak jelen példa esetén), csak az áttekinthetőség kedvéért van mátrixként ábrázolva.) Fontos megjegyezni, hogy (29) lehetséges legkisebb értéke 50 (az első lépésben legalább 30, a harmadikban legalább 20, a többi lépésben pedig legalább 0), és mindkét megoldás éles a másodlagos célfüggvény szerint (is).

4.3.2. Definíció: Vezessük be az alábbi korlátozó feltételt:

$$(36.a)\quad \begin{aligned} V(x) &\overset{\text{def}}{=} \sum_{t,e,f}\left(\left|\Delta_{e,t}\Delta_{f,t}\right|-\Delta_{e,t}\Delta_{f,t}\right) \\ V(x) &= 0 \end{aligned}$$

illetve egy vele ekvivalens (harmadlagos) célfüggvényt (ekvivalensek feltéve, ha *V(x)* eléri zérust valamilyen megengedett x-re):

$$(36.b)\quad min\,V(x)$$

A (36) sajnos nemkonvex, nemlineáris vegyesváltozós, nehezen megoldható korlátozó feltételeket határoz meg, és a vele ekvivalens, illetve hozzá hasonló célfüggvényekkel/feltételekkel is ugyanilyen megoldási nehézségekkel kerülünk szembe. Konkrétan (35.a) és (35.b) a harmadlagos célfüggvény szerint eltérnek egymástól 20-szal, (35.b) optimális, míg a másik nem az. A gyakorlatban hasznosnak bizonyul az a megfigyelés, miszerint az igények egymás utáni gradienseivel megegyező irányba történő (16) típusú korlátokat engedünk meg, az ellentétes irányba 0-t (kivételes eset például akkor van, ha pl. alulról és felülről ugyanolyan teljesítménykorlátokkal rendelkezik két, egymás utáni időpontban egy blokk, ilyenkor nem szoktunk gradiens korlátokat feltenni rá az adott időpontban.) A heurisztikát előzetes egyszerűsítések között szoktuk végrehajtani, még az algoritmus indítása előtt. Az alkalmazhatóság illusztrációként javítsuk meg a 4.3.1. inputot!

4.3.3. Feladat:

$$(37.a)\quad min\left(\sum_{e=1}^{2}\sum_{t=0}^{3} x_{e,t}\right)$$

$$
(37.b)\quad
\begin{gathered}
x_{1,\,0}=50(MW)\\
x_{2,\,0}=80(MW)\\
50\le x_{1,t}\le 90(MW)\\
50\le x_{2,t}\le 90(MW)\\
0\le x_{1,1}-x_{1,\,0}\le 20\\
x_{1,1}=x_{1,2}\\
0\le x_{1,3}-x_{1,2}\le 11\\
0\le x_{2,1}-x_{2,0}\le 10\\
-20\le x_{2,2}-x_{2,1}\le 0\\
0\le x_{2,3}-x_{2,2}\le 11\\
x_{1,1}+x_{2,1}=140\\
x_{1,2}+x_{2,2}=120\\
x_{1,3}+x_{2,3}=122
\end{gathered}
$$

A 4.3.3. feladatra kapott optimális megoldás HFA-t alkalmazva (35.b).

5. fejezet
Összefoglalás

Az első fejezetben felépítettük, összefoglaltuk a már ismert és használni kívánt matematikai eszközöket. A második fejezetben pedig bevezettük, megkonstruáltuk a modellt, a harmadik fejezetben megmutattunk két bonyolultságelméleti szempontból jelentős eredményt. A továbbiakban bemutatásra került egy háromfázisú algoritmus, amely megoldásaként kiegyenlített egészértékű villamosenergia-ipari menetrendet lehet előállítani, továbbá a HFA az általunk bevezetett módon nem iteratív, minden fázisa csak egyszer fut le és ez esetben is pontos, jó eredményt ad. Ezzel persze nem oldottuk meg az általános menetrendkészítési problémát, hiszen beláttuk róla, hogy NP-nehéz, mint általában a legtöbb ütemezési feladat. Viszont azt itt leírt HFA beágyazott szubrutinként hatékonyan alkalmazható, amikor mint egészértékű optimalizálási feladatként sokkal általánosabb, még több gyakorlati szempontot figyelembe vevő menetrendet akarunk előállítani. A tipikus változószám 10 perces időpontbeosztással egy heti intervallumra tervezve ezres nagyságrendű darabszámú erőmű/fogyasztó esetén milliós nagyságrendű, és ebbe nem számoltuk bele a segédváltozókat. Ilyen méretű csupán folytonos LP probléma esetén is reménytelen próbálkozni általános célú megoldási módszerekkel a feladat mélyebb ismerete nélkül.

Fizikai szempontból érdekes összefüggést kaptunk: hiszen (15) alkalmazása során látszik, hogy {(12.a), (12.b)} tekinthető egy differenciálegyenlet-rendszer megoldáshalmazán történő optimalizálásnak, és szép poliéderes kombinatorikai, lineáris algebrai, bonyolultságelméleti tulajdonságait igazoltuk az LP-relaxációnak.

Tárgymutató

Irodalomjegyzék:

[1] Deák I., Hoffer J., Mayer J., Németh Á., Potecz B., Prékopa A., Straziczky B., *Nagyméretű, vegyesváltozós, matematikai modell termikus villamos energia-rendszer rövid távú, optimális menetrendjének meghatározására hálózati feltételek figyelembevételével*, Alkalmazott matematikai lapok, 9, 221-337 (1983)

[2] Gács Péter, Lovász László, *Khachiyan's algorithm for linear programming*, Mathematical Programming Study, 14, 61-68 (1981)

[3] A. Ghouila-Houri, *Charactérisation des matrices totalement unimodulaires*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris), 254, 1192-1194 (1962)

[4] A. Hoffman, J. Kruskal, *Integral boundary points of convex polyhedra. In H. Kuhn and A. Tucker, editors, Linear inequalities and related systems*, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1956)

[5] L. G. Khachiyan, *A polynomial algorithm in linear programming*, Soviet Mathematics doklady, 20, 191-194 (1979)

[6] Kotnyek Balázs, *A generalization of totally unimodular and network matrices*, PhD thesis, London School of Economics, (2002)

[7] Lovász László, *Algoritmusok bonyolultsága*, Nemzeti tankönyvkiadó, (2001)