Nemlineáris parabolikus funkcionál-differenciálegyenletrendszerek

Diplomamunka

Besenyei Ádám

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető:

Simon László

egyetemi tanár

Alkalmazott Analízis Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2005.

Tartalomjegyzék

Előszó

Ebben a dolgozatban másodrendű parabolikus parciális differenciálegyenletek rendszereivel foglalkozunk. Ezen belül olyan rendszerekkel, melyekben az együttható függvények funkcionálisan is függenek az ismeretlen függvényektől. Ilyen típusú egyenletek például olyan diffúziós folyamatokban fordulhatnak elő, melyekben a diffúziós együttható nemlokális mennyiségektől is függ.

A fenti típusú egyenletekkel kapcsolatos elméleti eredményeket tartalmaz a [6] cikk. Jelen dolgozat célja a cikk eredményeinek rendszerekre való kiterjesztése, kibővítése.

Igazoljuk gyenge megoldás létezését, speciális esetben az egyértelműségét. Ezt követően belátjuk $[0, \infty)$-beli megoldás(ok) létezését, korlátosságát, és megvizsgáljuk a végtelenbeli viselkedésüket.

Az egzisztenciát J. Berkovits és V. Mustonen [3] cikkének fő tétele fogja biztosítani. A tétel a monoton típusú, pontosabban a pszeudomonoton operátorok elméletéhez szorosan kapcsolódik. Pszeudomonoton operátorokról szól F. E. Browder [4] cikke, amelyet mi is tárgyalni fogunk.

Gyenge megoldás létezését először olyan nemlineáris rendszerekre igazoljuk, amelyek nem tartalmaznak funkcionális függést, majd ezt az eredményt alkalmazzuk a funkcionálisan függő rendszerekre.

A fentieken kívül nagy hangsúlyt fektetünk az absztrakt tételekhez kapcsolódó konkrét példák bemutatására.

A hivatkozások egyszerűsítése érdekében a dolgozat elején összefoglaltuk a későbbiekben használt fogalmakat és tételeket. A dolgozatban használt jelölések magyarázata vagy itt található, vagy pedig a 2.3.1 szakasz Jelölések c. részében.

Ezúton mondok köszönetet Simon Lászlónak a bátorításáért és a témában nyújtott értékes segítségéért.

1. fejezet

Felhasznált ismeretek

A parciális differenciálegyenletek elméleti tárgyalása elképzelhetetlen az analízis és funkcionálanalízis megfelelő tételeinek alkalmazása nélkül. Ezért ebben a részben (nagyrészt) bizonyítás nélkül összefoglaljuk azon tételeket, illetve összefüggéseket, amelyekre szükségünk lesz a későbbi fejezetekben. Ezen belül is általában csak azokra térünk ki, amelyek esetleg nem szerepelnek a tananyagban, vagy amelyeket a megszokottól eltérően használunk. Külön hivatkozás nélkül használjuk viszont a többi, itt nem említett (a tananyagban előforduló) fogalmat.

1.1. Egyenlőtlenségek

1.1. Állítás. (háromszög-egyenlőtlenség) *Legyen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$. Ekkor*

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

1.2. Állítás. *Legyen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$ és $s > 0$ valós szám. Ekkor*

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n|^s \leq n^{s-1} \left(|a_1|^s + |a_2|^s + \dots + |a_n|^s\right). \tag{1.1}$$

1.3. Állítás. *Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n$ nemnegatív valós számok és $s > 0$ valós szám. Ekkor*

$$a_1^s + a_2^s + \dots + a_n^s \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^s. \tag{1.2}$$

1.4. Állítás. (Young-egyenlőtlenség) *Legyenek p, q véges konjugált kitevők, azaz $1 < p, q < \infty$ és $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ekkor $a \geq 0,\ b \geq 0$ esetén*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

1.5. Következmény. (ε-egyenlőtlenség) *Legyen $\varepsilon > 0$, ekkor az előző állítás feltételei mellett*

$$ab \leq \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{b^q}{\varepsilon^q q}.$$

1.6. Állítás. *Legyen c tetszőleges, $b \neq 0$ és $s > 0$ valós szám. Ekkor*

$$\int_0^1 |c + \tau b|^s d\tau \geq \frac{1}{2^s(s+1)} \cdot |b|^s. \tag{1.3}$$

Bizonyítás. Két esetet különböztetünk meg. Először tegyük fel, hogy c és $c+b$ különböző előjelű. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $c < 0$ és $c + b > 0$ (így szükségképpen $b > 0$).

Ekkor a $[0,1]$ intervallumot $c+\tau b$ előjele szerint két részre bonthatjuk, és azokon külön-külön elvégezhetjük az integrálást, majd a kapott eredményt alulról becsülhetjük az (1.1) egyenlőtlenség segítségével:

$$\int_0^1 |c+\tau b|^s\,d\tau = \int_0^{-\frac{c}{b}} |c+\tau b|^s\,d\tau + \int_{-\frac{c}{b}}^1 |c+\tau b|^s\,d\tau = \int_0^{-\frac{c}{b}} (-c-\tau b)^s\,d\tau + \int_{-\frac{c}{b}}^1 (c+\tau b)^s\,d\tau =$$
$$= \left[-\frac{(-c-\tau b)^{s+1}}{b(s+1)}\right]_{\tau=0}^{-\frac{c}{b}} + \left[\frac{(c+\tau b)^{s+1}}{b(s+1)}\right]_{\tau=-\frac{c}{b}}^{1} = \frac{1}{b(s+1)}\left((-c)^{s+1}+(c+b)^{s+1}\right) \geq$$
$$\geq \frac{2^{-s}}{b(s+1)}\,|c+b-c|^{s+1} = \frac{1}{2^s(s+1)}\cdot |b|^s.$$

A másik esetben tegyük fel, hogy c és $c+b$ azonos előjelű. Ekkor a $[0,1]$ intervallumon $c+\tau b$ nem vált előjelet, így

$$\int_0^1 |c+\tau b|^s\,d\tau \geq \int_0^1 |\tau b|^s\,d\tau = |b|^s\cdot\left[\frac{\tau^{s+1}}{s+1}\right]_{\tau=0}^1 = \frac{1}{s+1}\cdot|b|^s \geq \frac{1}{2^s(s+1)}\cdot|b|^s.$$

Mindkét esetben érvényes a bizonyítandó alsó becslés, készen vagyunk. Annyit még érdemes megjegyeznünk, hogy a becslés éles, hiszen $c=-\frac{b}{2}$ esetén egyenlőség áll fenn.

1.2. L^p-terek, Szoboljev-terek, szorzatterek

A Szoboljev-terek, és ebből következően az L^p-terek használata elengedhetetlen lesz későbbi munkánkban. Mivel egyenletek rendszereivel fogunk foglalkozni, ezért világos, hogy a terek szorzatterein kell dolgoznunk. A későbbi vizsgálódás során kényelmesebb lesz számunkra, ha ezeket nem a megszokott normákkal látjuk el. Ebben a szakaszban először bevezetjük ezen új normákat, majd emlékeztetünk néhány alapvető összefüggésre ebből a témakörből. Ezen belül is csak azon speciális esetekre, melyeket ténylegesen alkalmazni fogunk. További részleteket illetően lásd például az [1] monográfiát.

A továbbiakban legyen $n\geq 1$ rögzített egész szám, és jelölje λ az n-dimenziós Lebesgue-mértéket. Mivel e szakaszban mindig ezt a mértéket használjuk, ezért az integrálokban elhagyjuk a $d\lambda$ jelet.

1.7. Definíció. Legyen $1\leq p<\infty$ és $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ λ-mérhető halmaz. Ekkor $L^p(\Omega)$ jelöli azon $u\colon\Omega\to\mathbb{R}$ (Lebesgue-)mérhető függvények halmazát, melyekre

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

1.8. Definíció. Legyen $1\leq p<\infty$ és $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, melynek pereme folytonosan differenciálható. Jelölje D_i az x_i változó szerinti disztribúciós értelemben vett parciális deriválás operátorát, továbbá legyen $D=(D_1,\dots,D_n)$, azaz $Du=(D_1u,\dots,D_nu)$ a gradiensvektor. Ekkor

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u\in L^p(\Omega)\colon D_iu\in L^p(\Omega),\ 1\leq i\leq n\},$$

melyet az alábbi normával látunk el:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left[|u|^p+|Du|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Jelölje továbbá $W_0^{1,p}(\Omega)$ azon $u\in W^{1,p}(\Omega)$ függvények halmazát, melyekre $u|_{\partial\Omega}=0$ (nyom értelemben). Ekkor $W_0^{1,p}(\Omega)$ zárt lineáris altere a $W^{1,p}(\Omega)$ térnek.

A továbbiakban a $W^{1,p}(\Omega)$ térben mindig a fenti normát használjuk.

1.9. Megjegyzés. Az irodalomban inkább a

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left[|u|^p + \sum_{i=1}^n |D_i u|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}$$

norma használatos, de az (1.1) és (1.2) egyenlőtlenségek segítségével könnyen látható, hogy a két norma ekvivalens.

1.10. Állítás. *Ha $1 < p < \infty$, akkor a $W^{1,p}(\Omega)$ tér reflexív.*

Az L^p és $W^{1,p}$ terek kapcsolatáról szól a következő tétel.

1.11. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, melynek pereme folytonosan differenciálható, és legyen $1 \le p < \infty$. Ekkor a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ beágyazás kompakt.*

A következőkben definiáljuk a fenti terek direktszorzatait.

1.12. Definíció. Legyen $1 \le p < \infty$ valós, $N \ge 1$ egész szám és $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány. Ekkor $(L^p(\Omega))^N$ jelöli azon $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(N)}) \colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ mérhető függvények halmazát, melyekre $u^{(l)} \in L^p(\Omega)$ minden $1 \le l \le N$ egész szám esetén. Vezessük be a téren a következő normát:

$$\|u\|_{(L^p(\Omega))^N} := \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Könnyen látható (az (1.1) és (1.2) egyenlőtlenségek segítségével), hogy a fenti norma ekvivalens a legtöbbször használt $\left(\sum_{l=1}^N \|u^{(l)}\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$ normával, így minden, a szorzatterekre ismert állítás érvényben marad. Speciálisan $p = 2$ esetén $(L^2(\Omega))^N$ Hilbert-tér a következő skalárszorzattal:

$$(u, v)_{(L^2(\Omega))^N} := \sum_{l=1}^N \int_\Omega u^{(l)} v^{(l)}.$$

1.13. Definíció. Legyen $1 \le p < \infty$ valós, $N \ge 1$ egész szám és $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány. Ekkor $(W^{1,p}(\Omega))^N$ jelöli azon $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(N)}) \colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ mérhető függvények halmazát, melyekre $u^{(l)} \in W^{1,p}(\Omega)$ minden $1 \le l \le N$ egész szám esetén. A téren a következő normát vezetjük be:

$$\|u\|_{(W^{1,p}(\Omega))^N} := \left(\int_\Omega |u|^p + |Du|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

ahol $Du = (D_1 u^{(1)}, \dots, D_1 u^{(N)}, \dots, D_n u^{(1)}, \dots, D_n u^{(N)})$.

1.14. Állítás. *Ha $1 < p < \infty$, akkor $(W^{1,p}(\Omega))^N$ reflexív tér.*

1.15. Állítás. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, melynek pereme folytonosan differenciálható, és legyen $1 \le p < \infty$. Ekkor a $(W^{1,p}(\Omega))^N \hookrightarrow (L^p(\Omega))^N$ beágyazás kompakt.*

1.3. Ekviintegrálható függvények

A későbbi tételek bizonyításaiban szükségünk lesz egy kevésbé ismert konvergenciatételre. Ehhez először be kell vezetnünk az ekviintegrálhatóság fogalmát. A továbbiakban legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ λ-mérhető halmaz, ahol (az előző résznek megfelelően) λ az n dimenziós Lebesgue-mérték, valamint legyen $1 \le p < \infty$ valós szám.

1.16. Definíció. Legyen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat $L^p(\Omega)$-ban. Tegyük fel, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $A_\varepsilon \subset \Omega$ véges mértékű halmaz és $\delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy minden $k \in \mathbb{N}$-re

$$\int_{\Omega\setminus A_\varepsilon} |f_k|^p < \varepsilon, \tag{1.4}$$

valamint tetszőleges $\lambda(S) < \delta(\varepsilon)$ mérhető halmazra

$$\int_S |f_k|^p < \varepsilon.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a sorozat *ekviintegrálható* $L^p(\Omega)$-ban.

1.17. Megjegyzés. Ha Ω korlátos, akkor (1.4) az $A_\varepsilon = \Omega$ választással nyilvánvalóan teljesül, így ekkor ez a feltétel elhagyható.

1.18. Megjegyzés. Érdemes megjegyezni az alábbi triviálisan adódó észrevételt, melyet később hivatkozás nélkül használunk. Ha (f_k) és (g_k) $L^p(\Omega)$-beli sorozatok, melyekre $|f_k| \leq |g_k|$ minden k-ra, és (g_k) ekviintegrálható $L^p(\Omega)$-ban, akkor (f_k) is ekviintegrálható $L^p(\Omega)$-ban.

1.19. Állítás. *Ha az (f_k) sorozat konvergens $L^p(\Omega)$ normában, akkor ekviintegrálható.*

1.20. Tétel. (Vitali) *Tegyük fel, hogy az (f_k) sorozat ekviintegrálható $L^p(\Omega)$-ban és $f_k \to f$ majdnem mindenütt Ω-ban. Ekkor $f_k \to f$ $L^p(\Omega)$ normában is.*

Az előzőeken kívül használni fogjuk az alábbi, Riesz Frigyestől származó kiválasztási tételt is.

1.21. Lemma. (Riesz) *Legyen (f_k) Cauchy-sorozat $L^p(\Omega)$-ban. Ekkor létezik olyan $(\tilde{f}_k) \subset (f_k)$ részsorozat és $f \in L^p(\Omega)$, melyekre $\tilde{f}_k \to f$ majdnem mindenütt Ω-ban.*

1.22. Következmény. *Tegyük fel, hogy $f_k \to f$ $L^p(\Omega)$-ban. Ekkor létezik $(\tilde{f}_k) \subset (f_k)$ részsorozat, melyre $\tilde{f}_k \to f$ majdnem mindenütt Ω-ban.*

1.23. Megjegyzés. A fenti definícióban, illetve állításokban nyilván semmi szerepe nem volt annak, hogy éppen a Lebesgue-féle mértékteret használtuk.

1.4. Gyenge konvergencia

Három állításra lesz szükségünk ebből a témakörből.

1.24. Állítás. *Normált térben minden gyengén konvergens sorozat korlátos. Ha X Banach-tér, akkor minden X^*-beli gyenge* konvergens sorozat korlátos.*

1.25. Állítás. *Reflexív Banach-térben (speciálisan Hilbert-térben) minden korlátos sorozatnak van gyengén konvergens részsorozata.*

1.26. Állítás. *Tegyük fel, hogy az X normált térben $x_k \to x$ gyengén. Ekkor*

$$\|x\|_X \leq \liminf_{k\to\infty} \|x_k\|_X.$$

1.5. Speciális operátorok

Legyen X reflexív Banach-tér, a duálisát jelölje X^*. Egy $x^* \in X^*$ esetén használjuk az $\langle x^*, \cdot \rangle = x^*(\cdot)$ jelölést.

1.27. Definíció. Tekintsünk egy $T\colon X \supseteq D(T) \to X^*$ operátort. Ekkor

- T *korlátos*, ha (X-beli) korlátos halmazt (X^*-beli) korlátos halmazba képez.
- T *hemifolytonos*, ha tetszőleges u, v, $w \in X$ esetén a $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \langle T(u - \lambda v), w \rangle \in X$ leképezés folytonos.
- T *demifolytonos*, ha minden $(u_k) \subset D(T)$ sorozatra, melyre $u_k \to u \in D(T)$ X-ben, következik, hogy $T(u_k) \to T(u)$ gyengén X^*-ban.
- T *monoton*, ha $\langle T(u) - T(v), u - v \rangle \geq 0$ minden $u, v \in D(T)$ esetén. Ha itt egyenlőség csak $u = v$ esetén áll fenn, akkor T *szigorúan* monoton.
- T *maximálisan monoton*, ha monoton, továbbá ha $u \in X$ és $b \in X^*$, melyekre minden $v \in X$ esetén $\langle b - T(v), u - v \rangle \geq 0$, akkor $T(u) = b$.
- T *pszeudomonoton*, ha minden $(u_k) \subset D(T)$ sorozatra, melyre $u_k \to u$ gyengén X-ben és $\limsup\limits_{k\to\infty} \langle T(u_k), u_k - u \rangle \leq 0$, következik, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} \langle T(u_k), u_k - u \rangle = 0$ és $T(u_k) \to T(u)$ gyengén X^*-ban.
- T *koercitív*, ha $\lim\limits_{\|u\|_X \to \infty} \dfrac{\langle T(u), u \rangle}{\|u\|_X} = \infty$.

1.28. Megjegyzés. Ha T lineáris monoton operátor, akkor a monotonitás ekvivalens a $\langle T(u), u \rangle \geq 0$ feltétellel.

A nem időfüggő feladatok körében alapvető fontosságú az alábbi megoldhatósági tétel.

1.29. Tétel. *Legyen X reflexív Banach-tér. Tegyük fel, hogy a $T\colon X \to X^*$ operátor korlátos, hemifolytonos, pszeudomonoton és koercitív. Ekkor minden $v \in X^*$ esetén létezik $u \in X$, melyre $T(u) = v$.*

Az egyértelmű megoldhatóságról szól a következő tétel.

1.30. Tétel. *Legyen X reflexív Banach-tér. Tegyük fel, hogy a $T\colon X \to X^*$ operátor korlátos, hemifolytonos, szigorúan monoton és koercitív. Ekkor minden $v \in X^*$ esetén egyértelműen létezik $u \in X$, melyre $T(u) = v$.*

Az időfüggő (evolúciós) feladatok körében $S = L + T$ alakú operátorok kerülnek elő, ahol $L\colon X \supseteq D(L) \to X^*$ sűrűn definiált, zárt, maximálisan monoton, lineáris operátor, és a $T\colon X \to X^*$ operátor pszeudomonton $D(L)$-re nézve.

1.31. Definíció. A T operátor *pszeudomonoton $D(L)$-re nézve*, ha minden $(u_k) \subset D(L)$ sorozatra, melyre $u_k \to u$ gyengén X-ben, $L(u_k) \to L(u)$ gyengén X^*-ban és $\limsup\limits_{k\to\infty} \langle T(u_k), u_k - u \rangle \leq 0$, következik, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} \langle T(u_k), u_k - u \rangle = 0$ és $T(u_k) \to T(u)$ gyengén X^*-ban.

A demifolytonosság és a pszeudomonotonitás definíciójának alábbi átfogalmazása hasznos fogás lesz bizonyításainkban.

1.32. Lemma. („részsorozatos trükk")

a) A T operátor demifolytonos, ha minden $(u_k) \subset D(T)$ sorozatra, melyre $u_k \to u \in D(T)$ X-ben, létezik $(\tilde{u}) \subset (u_k)$ részsorozat úgy, hogy $T(\tilde{u}) \to T(u)$ gyengén X^*-ban.

b) A T operátor pszeudomonoton $D(L)$-re nézve, ha minden $(u_k) \subset D(L)$ sorozatra, melyre $u_k \to u$ gyengén X-ben, $L(u_k) \to L(u)$ gyengén X^*-ban és $\limsup_{k\to\infty} \langle T(u_k), u_k - u\rangle \leq 0$, létezik $(\tilde{u}_k) \subset (u_k)$ részsorozat úgy, hogy $\lim_{k\to\infty} \langle T(\tilde{u}_k), \tilde{u}_k - u\rangle = 0$ és $T(\tilde{u}_k) \to T(u)$ gyengén X^*-ban.

Bizonyítás. Csak az a) részt igazoljuk, a másik teljesen hasonló módon megy. Indirekt tegyük fel, hogy teljesül a feltétel, de T nem demifolytonos. Ekkor létezik $\varepsilon > 0$, $v \in X$ és $(u_k) \subset D(T)$ sorozat, melyekre $u_k \to u \in D(T)$ X-ben és $\langle T(u_k) - T(u), v\rangle \geq \varepsilon$. Ekkor viszont (u_k)-nak nincs olyan $(\tilde{u}_k)$ részsorozata, melyre a $T(\tilde{u}_k) \to T(u)$ gyenge konvergencia fennállna. Vagyis az indirekt feltevésünk helytelen volt.

Az időfüggő feladatok körében az alábbi tétel (lásd [3]-ban) lesz a megoldás létezésének kulcsa.

1.33. Tétel. *Legyen X reflexív Banach-tér és $L\colon X \supseteq D(L) \to X^*$ sűrűn definiált, zárt, maximálisan monoton, lineáris operátor, továbbá legyen $T\colon X \to X^*$ korlátos, demifolytonos, koercitív és pszeudomonoton $D(L)$-re nézve. Ekkor $(L+T)(D(L)) = X^*$.*

1.6. Az $L^p(0,T;V)$ terek

Röviden bevezetjük az időfüggő (evolúciós) egyenletek absztrakt tárgyalásmódját. Mivel a mi célunk nem az elmélet felépítése, hanem inkább annak alkalmazása, ezért a most következő szakaszban nem bizonyítjuk a kimondott állításokat. A részletek, illetve bizonyítások kimerítően megtalálhatók például a [10] könyvben.

1.34. Definíció. Legyen V Banach-tér, továbbá $1 \leq p < \infty$ és $0 < T < \infty$. Ekkor $L^p(0,T;V)$ azon $u\colon (0,T) \to V$ mérhető függvények halmaza, melyekre $\int_0^T \|u(t)\|_V^p \, dt < \infty$.

1.35. Állítás. *Az $L^p(0,T;V)$ tér teljes normált tér az alábbi normával:*

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.36. Állítás. *Legyen V reflexív Banach-tér és p, q véges konjugált kitevők. Ekkor az $L^p(0,T;V)$ tér reflexív, melynek duálisa $L^q(0,T;V^*)$, mégpedig a következő megfeleltetéssel: a $v \in L^q(0,T;V^*)$ funkcionál $u \in L^p(0,T;V)$ helyen felvett értéke*

$$[v,u] := \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle \, dt.$$

A továbbiakban az $L^p(0,T;V)$ terek tárgyalásában mindig $\langle w, \cdot\rangle$ (esetleg $\langle w, \cdot\rangle_V$, ha több térrel is dolgozunk) jelöli a $w \in V^*$, és $[v, \cdot]$ a $v \in L^q(0,T;V^*)$ funkcionálokat.

Legyen V Banach-tér és H (valós) Hibert-tér. Tegyük fel, hogy $V \subseteq H$, V sűrű H-ban és a $V \hookrightarrow H$ beágyazás folytonos. Jelölje $\|\cdot\|_V$ a V-beli normát és $(\cdot,\cdot)_H$ a H-beli skalárszorzatot. Ekkor egy tetszőleges $f \in H$ elemnek megfeleltethetünk egy $F \in V^*$ elemet az alábbi módon: $\langle F, \cdot\rangle := (f, \cdot)_H$. Mivel V sűrű H-ban, azért ez visszafelé is igaz, vagyis egy $F \in V^*$ funkcionál egyértelműen meghatározza az $f \in H$ elemet. Ilyen módon egy bijekciót létesíthetünk H és V^* egy részhalmaza között, és így $H \subset V^*$. Sőt, az is világos, hogy ezzel a $B \hookrightarrow V^*$ beágyazás folytonos.

1.37. Definíció. A $V \subseteq H \subseteq V^*$ hármast *evolúciós hármas*nak nevezzük.

1.38. Definíció. Legyen $u \in L^p(0,T;V)$. Tegyük fel, hogy létezik $v \in L^q(0,T;V^*)$, melyre minden $w \in V$ és $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ esetén

$$\int_0^T \langle u(t), w\rangle \varphi'(t)\, dt = -\int_0^T \langle v(t), w\rangle \varphi(t)\, dt.$$

Ekkor v-t (amely, ha létezik, akkor egyértelmű) az u (disztribúciós) deriváltjának nevezzük, és a $v = u'$ jelölést használjuk.

1.39. Definíció. Jelölje $W^{1,p}(0,T;V,H)$ az olyan $u \in L^p(0,T;V)$ függvények osztályát, melyekre $u' \in L^q(0,T;V^*)$. Vezessük be a következő normát:

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;V,H)} := \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u'\|_{L^q(0,T;V^*)}.$$

1.40. Állítás. *A $W^{1,p}(0,T;V,H)$ tér Banach-tér a fent bevezetett normával.*

1.41. Állítás. *Legyen $u \in W^{1,p}(0,T;V,H)$. Ekkor $\|u(\cdot)\|_H^2$ folytonos, sőt abszolút folytonos valós függvény $(0,T)$-n.*

1.42. Állítás. *$W^{1,p}(0,T;V,H) \subset C([0,T],H)$, sőt a $W^{1,p}(0,T;V,H) \hookrightarrow C([0,T],H)$ beágyazás folytonos. Pontosabban, ha $u \in W^{1,p}(0,T;V,H)$, akkor egyértelműen létezik $\bar{u}\colon [0,T] \to H$ folytonos függvény, melyre $\bar{u} = u$ m.m. $[0,T]$-ben és*

$$\max_{s\in[0,T]} \|\bar{u}(s)\|_H \le \mathrm{const} \cdot \|u\|_{W^{1,p}(0,T;V,H)}.$$

1.43. Következmény. *Ha $u \in L^p(0,T;V)$, melyre $u' \in L^q(0,T;V^*)$, akkor értelmes u pontbeli értéke, speciálisan $u(0)$ értelmes.*

1.44. Tétel. (parciális integrálás) *Legyen u, $v \in W^{1,p}(0,T;V,H)$. Ekkor $0 \le s \le t \le T$ esetén*

$$\int_s^t \big[\langle u'(\tau), v(\tau)\rangle + \langle v'(\tau), u(\tau)\rangle\big]\, d\tau = (u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H.$$

1.45. Következmény. *Legyen $u \in W^{1,p}(0,T;V,H)$. Ekkor $0 \le s \le t \le T$ esetén*

$$2\int_s^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle\, d\tau = \|u(t)\|_H^2 - \|u(s)\|_H^2.$$

1.46. Következmény. *Legyen $u \in W^{1,p}(0,T;V,H)$, melyre $u(0) = 0$. Ekkor $[u', u] \ge 0$.*

Bizonyítás. Az 1.45. következményt az $s = 0$ és $t = T$ szereposztással alkalmazva azonnal adódik a nemnegativitás.

Értelmezzük a következő $L\colon L^p(0,T;V) \supset D(L) \to L^q(0,T;V^*)$ operátort! Legyen $D(L) := \{u \in L^p(0,T;V)\colon u' \in L^q(0,T;V^*),\ u(0) = 0\}$, és $Lu = u'$. Nyilvánvaló, hogy L lineáris operátor, így az 1.46. következmény azt jelenti, hogy L monoton operátor. Sőt, ennél több is igaz.

1.47. Állítás. *A fenti L sűrűn definiált, zárt, maximálisan monoton, lineáris operátor.*

1.48. Megjegyzés. Az állítás igaz marad akkor is, ha $D(L)$-ben $u(0) = 0$ helyett $u(0) = u(T)$ feltételt követelünk meg.

Most már megfogalmazhatjuk absztrakt módon, hogy mit értünk parabolikus feladaton. Adott $V \subseteq H \subseteq V^*$ evolúciós hármas. Ezenkívül legyen $A\colon L^p(0,T;V) \to L^q(0,T;V^*)$ (nemlineáris) operátor és $b \in L^q(0,T;V^*)$. Keressünk olyan $u \in W^{1,p}(0,T;V,H)$ függvényt, amelyre

$$u' + A(u) = b$$
$$u(0) = u_0,$$

más szóval

$$u'(t) + [A(u)](t) = b(t)$$
$$u(0) = u_0$$

m.m. $t \in (0,T)$-re, ahol $u_0 \in H$ adott. A felírásból azonnal látszik, hogy a későbbiekben mit is kell tennünk megoldás létezésének bizonyításához. Ugyanis az 1.47. állításból tudjuk, hogy az $Lu = u'$ operátor maximálisan monoton, és így az 1.33. tétel miatt elegendő az A operátor néhány speciális tulajdonságát igazolnunk.

Végezetül megemlítünk néhány fontos beágyazási tételt, amelyek (következményei) hasznosak lesznek bizonyításainkban.

1.49. Állítás. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, melynek pereme folytonosan differenciálható, és $1 \leq p \leq \infty$ valós, $N \geq 1$ egész szám. Ekkor az $L^p\big(0,T;(W^{1,p}(\Omega))^N\big) \hookrightarrow L^p\big(0,T;(L^p(\Omega))^N\big)$ beágyazás folytonos.*

1.50. Tétel. *Legyen $V \subseteq H \subseteq V^*$ evolúciós hármas, ahol V reflexív Banach-tér. Tegyük fel, hogy B reflexív Banach-tér, melyre $V \subseteq B \subseteq V^*$, ahol a $V \hookrightarrow B$ beágyazás kompakt és a $B \hookrightarrow V^*$ beágyazás folytonos. Ekkor a $W^{1,p}(0,T;V,H) \hookrightarrow L^p(0,T;B)$ beágyazás kompakt, ha $1 < p < \infty$.*

1.51. Következmény. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, melynek pereme folytonosan differenciálható, és $2 \leq p < \infty$ valós, $N \geq 1$ egész szám. Ekkor a $W^{1,p}\big(0,T;(W^{1,p}(\Omega))^N,(L^2(\Omega))^N\big) \hookrightarrow L^p\big(0,T;(L^p(\Omega))^N\big)$ beágyazás kompakt.*

Bizonyítás. Mivel $2 \leq p < \infty$ esetén $(W^{1,p}(\Omega))^N \subset (L^2(\Omega))^N \subset (W^{1,p}(\Omega)^*)^N$ evolúciós hármas és $(W^{1,p}(\Omega))^N$ reflexív, azért az 1.15. állításból és az előző tételből következik az állítás.

1.52. Következmény. *Tegyük fel, hogy az $(u_k) \subset W^{1,p}\big(0,T;(W^{1,p}(\Omega))^N,(L^2(\Omega))^N\big)$ sorozatra $u_k \to u$ gyengén $L^p\big(0,T;(W^{1,p}(\Omega))^N\big)$-ben és $u_k' \to u$ gyengén $L^q\big(0,T;(W^{1,p}(\Omega)^*)^N\big)$-ben. Ekkor létezik $(\tilde{u}_k) \subset (u_k)$ részsorozat, melyre $\tilde{u}_k \to u$ $L^p\big(0,T;(L^p(\Omega))^N\big)$-ben.*

Bizonyítás. A gyenge konvergencia miatt (u_k) korlátos $L^p\big(0,T;(W^{1,p}(\Omega))^N\big)$-ben és (u_k') korlátos $L^p\big(0,T;(W^{1,p}(\Omega)^*)^N\big)$-ben, vagyis (u_k) korlátos $W^{1,p}\big(0,T;(W^{1,p}(\Omega))^N,(L^2(\Omega))^N\big)$-ben. Így az 1.51. következmény miatt létezik $(\tilde{u}_k) \subset (u_k)$ részsorozat, mely $L^p\big(0,T;(L^p(\Omega))^N\big)$-ben konvergens. Az $L^p\big(0,T;(W^{1,p}(\Omega))^N\big)$ térbeli gyenge konvergenciából következik az $L^p\big(0,T;(L^p(\Omega))^N\big)$ térbeli gyenge konvergencia, és az $L^p\big(0,T;(L^p(\Omega))^N\big)$ tér erős konvergenciájából a gyenge konvergencia, ezért a gyenge limesz egyértelműsége miatt szükségkégképpen $\tilde{u}_k \to u$ $L^p\big(0,T;(L^p(\Omega))^N\big)$-ben.

2. fejezet

Klasszikus egyenletek, rendszerek

Ebben a részben klasszikus alakú másodrendű nemlineáris parciális differenciálegyenletek rendszerét vizsgáljuk, méghozzá ezeknek kezdeti-peremérték problémáját. Ehhez a vizsgálathoz a monoton típusú operátorok, ezen belül is a pszeudomonoton operátorok elméletét használjuk. Mivel dolgozatunk célja a funkcionálisan függő tagokat tartalmazó rendszerek vizsgálata, ezért ebben a fejezetben nem törekszünk a teljességre. Bevezetjük a gyenge megoldások fogalmát, és egy egzisztencia-tételt bizonyítunk, amely majd a következő fejezetben megkönnyíti munkánkat.

A gyenge alak levezetését motivációnak szánjuk, arra világítunk rá, hogy az általunk vizsgált absztrakt feladat értelmezhető úgy, mint egy (alkalmas) klasszikus másodrendű kezdeti-peremérték feladat gyenge alakja. Ezt a gyenge alakot (az egyszerűség kedvéért) először egyenletekre írjuk fel, ebből a rendszerek gyenge alakja azonnal látszani fog. Gyenge megoldás persze nem mindig létezik. Ahhoz, hogy ezt garantáljuk, megfelelő tulajdonságú együtthatóknak kell szerepelnie a rendszerünkben. Mivel a pszeudomonoton operátorokkal kapcsolatos 1.33. tételünket szeretnénk alakalmazni, így világos, hogy e feltételek bizonyos folytonossági, növekedési, monotonitási, koercitivitási feltételek lesznek. Az irodalomban ezeket (pontosabban ezeknek egyenletekre vonatkozó megfelelőit) szokás klasszikus Léray-Lions feltételeknek hívni.

2.1. Egyenletek gyenge alakja

Tekintsük a következő divergencia-alakban felírt klasszikus másodrendű parabolikus kvázilineáris parciális differenciálegyenletet:

$$D_t u(t,x) - \sum_{i=1}^{n} D_i\big[a_i(t,x,u(t,x),Du(t,x))\big] + a_0(t,x,u(t,x),Du(t,x)) = f(t,x), \tag{2.1}$$

$$(t,x) \in Q_T = (0,T)\times\Omega, \quad a_i\colon Q_T \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},$$

ahol D_i az x_i változó szerinti (disztribúciós értelemben vett) parciális deriválást jelöli, míg D_t a t (idő) szerinti deriváltat, és a szokásos módon $Du = (D_1 u, \dots, D_n u)$ a gradiensvektor. A fenti egyenlethez tartozik egy perem-, illetve kezdeti feltétel. A kezdeti feltétel legyen $u(0,x) = u_0(x)$ $(x \in \Omega)$, a peremfeltétel pedig legyen homogén Neumann-féle (később kiderül, hogy miért). Ez nemlineáris esetben azt jelenti, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x,u(t,x),Du(t,x))\nu_i(x) = 0,$$

ha $(t,x) \in \Gamma_T = (0,T)\times\partial\Omega$, ahol $\nu(x) = (\nu_1(x),\dots,\nu_n(x))$ a külső normális egységvektor az $x \in \partial\Omega$ pontban.

Minket most nem a klasszikus megoldás érdekel, hanem inkább az egyenlet valamilyen gyenge alakját szeretnénk értelmezni, és annak a megoldását keresni. Ezért annyit teszünk fel, hogy a tartomány elég szép (például a pereme folytonosan differenciálható), továbbá az előbb szereplő függvények megfelelően simák (ahhoz, hogy a következő átalakításokat el lehessen végezni). A gyenge alakot persze a jól ismert módon állíthatjuk elő. Feltesszük, hogy létezik a (2.1) feladatnak a megadott perem- és kezdeti feltételek mellett $u \in C^1(\overline{Q}_T)$ megoldása. Ekkor szorozzuk az egyenletet egy $v \in C^1(\overline{Q}_T)$ tesztfüggvénnyel, majd integráljuk az egészet Q_T-n:

$$\int_{Q_T} D_t u(t,x)v(t,x)\,dt\,dx - \\ - \int_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^n D_i\left[a_i(t,x,u(t,x),Du(t,x))\right] + a_0(t,x,u(t,x),Du(t,x))\right] v(t,x)\,dt\,dx = \\ = \int_{Q_T} f(t,x)v(t,x)\,dt\,dx.$$

Itt a bal oldalon szereplő második integrált (a negatív előjel nélkül) a Gauss-Osztrogradszkij-tétel segítségével a következő alakba írhatjuk át:

$$-\int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(t,x,u(t,x),Du(t,x)) D_i v(t,x)\,dx\,dt + \\ + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(t,x,u(t,x),Du(t,x))\nu_i(x)v(t,x)\,d\sigma_x\,dt + \\ + \int_{Q_T} a_0(t,x,u(t,x),Du(t,x))v(t,x)\,dt\,dx,$$

ahol $d\sigma_x$ a felszín szerinti integrálást jelenti. Figyelembe véve a peremfeltételt (itt használjuk, hogy homogén Neumann-féle a peremfeltétel), feladatunk végül a következő alakot ölti:

$$\int_{Q_T} D_t u v + \int_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^n a_i(t,x,u,Du)D_i v + a_0(t,x,u,Du)v\right] = \int_{Q_T} fv \tag{2.2}$$

minden $v \in C^1(\overline{Q}_T)$-re, és $u(0,x) = u_0(x)$.

A döntő észrevétel az, hogy a fenti egyenlet értelmes tetszőleges $v \in W^{1,p}\big(0,T;W^{1,p}(\Omega),L^2(\Omega)\big)$ $(2 \le p \le \infty)$ függvény esetén is, és u-t is kereshetjük ebből a térből. Nézzük ezt meg egy kicsit részletesebben!

Először is $p \ge 2$ esetén $W^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)^*$ nyilván evolúciós hármas, hiszen $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ folytonosan és sűrűen beágyazva. Ekkor az 1.6 szakasznak megfelelően értelmezhetjük az $L^p\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)\big)$, $L^q\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)^*\big)$ és $W^{1,p}\big(0,T;W^{1,p}(\Omega),L^2(\Omega)\big)$ tereket. Használjuk az említett, illetve az 1.2 szakasz jelöléseit! Mivel $u \in L^p\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)\big)$ esetén $u(t) =: u(t,\cdot) \in W^{1,p}(\Omega)$, azért tetszőleges $u \in L^p\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)\big)$ és $v \in L^q\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)^*\big)$ esetén

$$\|u\|_{L^p\left(0,T;W^{1,p}(\Omega)\right)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}\,dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{Q_T} |u(t,x)|^p + |Du(t,x)|^p\,dt\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

és

$$[v,u] = \int_0^T \langle v(t,\cdot),u(t,\cdot)\rangle_{W^{1,p}(\Omega)}\,dt.$$

A továbbiakban egy $u \in W^{1,p}\big(0,T;W^{1,p}(\Omega),L^2(\Omega)\big)$ függvény u' deriváltját $D_t u$-val jelöljük, azaz tetszőleges $u \in W^{1,p}\big(0,T;W^{1,p}(\Omega),L^2(\Omega)\big)$ esetén $D_t u \in L^q\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)^*\big)$, amelyre minden

$v \in W^{1,p}(\Omega)$ és $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ esetén

$$\int_0^T \langle D_t u(t,\cdot), v(\cdot)\rangle_{W^{1,p}(\Omega)}\, \varphi'(t)\, dt = -\int_{Q_T} \langle u(t,\cdot), v(\cdot)\rangle_{W^{1,p}(\Omega)}\, \varphi(t)\, dt.$$

A $W^{1,p}(\Omega)^*$-beli $\langle v,\cdot\rangle$ funkcionálok konkrét alakja általában nehezen adható meg, de ez (az absztrakt felírás miatt) számunkra nem is lényeges. Annyi azonban igaz, hogy ha $v \in L^2(\Omega)$, akkor $\langle v,\cdot\rangle_{W^{1,p}(\Omega)} = (v,\cdot)_{L^2(\Omega)}$

Ennyi elméleti előkészület után most már könnyen felírhatjuk az általunk vizsgált (2.2) egyenletet a $W^{1,p}\big(0,T;W^{1,p}(\Omega),L^2(\Omega)\big)$ térben. Ehhez vezessük be a következő $A\colon L^p\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)\big) \to L^q\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)^*\big)$ operátort: $u,\ v \in L^p\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)\big)$ esetén legyen

$$[A(u),v] := \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n a_i(t,x,u(t,x),Du(t,x))D_i v(t,x) + a_0(t,x,u(t,x),Du(t,x))v(t,x)\right] dt\, dx.$$

Más szóval m.m. $t \in (0,T)$-re $w \in W^{1,p}(\Omega)$ esetén

$$\langle [A(u)](t), w\rangle := \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n a_i(t,x,u(t,x),Du(t,x))D_i w(x) + a_0(t,x,u(t,x),Du(t,x))w(x)\right] dx.$$

Ezenkívül legyen $F \in L^q\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)^*\big)$, melyre

$$[F,v] := \int_{Q_T} f(t,x)v(t,x)\, dt\, dx,$$

továbbá tegyük fel, hogy $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. Végül $Lu := D_t u$, ahol

$$D(L) = \left\{u\colon u \in L^p\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)\big),\ D_t u \in L^q\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)^*\big)\right\}.$$

Ekkor a (2.2) feladat alakja a következő:

$$\begin{aligned}[L(u),v] + [A(u),v] &= [F,v]\\ u(0) &= u_0\end{aligned}$$

minden $v \in L^p\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)\big)$-ra. Azaz operátoros alakban

$$\begin{aligned}L(u) + A(u) &= F\\ u(0) &= u_0.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Ha egy $u \in L^p\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)\big)$ függvény kielégíti az előbbi absztrakt feladatot, akkor azt mondjuk, hogy u a (2.1) feladat gyenge megoldása.

Most egy kis időre ugorjunk vissza a kiindulási (2.1) feladathoz, pontosabban annak peremfeltételéhez. Tegyük fel, hogy most homogén Dirichlet-féle peremfeltétel adott. Könnyen látható, hogy ekkor is eljuthatunk a (2.2) alakhoz, mégpedig akkor, ha csak olyan $v \in C^1(\overline{Q}_T)$ tesztfüggvényeket választunk, melyekre $v(t,x) = 0$ minden $(t,x) \in \Gamma_T$ esetén. Ebben az esetben tehát a v tesztfüggvényeket nem az általánosabb $v \in W^{1,p}\big(0,T;W^{1,p}(\Omega),L^2(\Omega)\big)$ térből fogjuk választani, hanem a $v \in W^{1,p}\big(0,T;W_0^{1,p}(\Omega),L^2(\Omega)\big)$ térből. Sőt, u-t is kereshetjük ebből a térből. Ennek megfelelően most $F \in L^q\big(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)^*\big)$, és módosítanunk kell az A és L operátorok értelmezési tartományát, $W^{1,p}(\Omega)$-t mindenütt $W_0^{1,p}(\Omega)$-ra kell cserélnünk.

Ezek után térjünk vissza a kiindulási probléma (2.3) (absztrakt) gyenge alakjához! Ez számunkra már kezelhető, hiszen homogén kezdeti feltétel esetén az L operátor szép tulajdonságú, így a fenti feladat megoldásának létezéséhez elegendő, ha az A operátor rendelkezik néhány speciális tulajdonsággal. Ennek megfelelően fogunk az a_i függvényekre feltételeket szabni.

2.2. Áttérés rendszerekre

Miután az előző szakaszban megismerkedtünk az egyenletek gyenge alakjával, most már gyerekjáték lesz rendszerek gyenge alakját definiálni.

A (2.1) típusú egyenletekből álló rendszer a következőképpen néz ki:

$$
\begin{aligned}
&D_t u^{(l)}(t,x) - \\
&- \sum_{i=1}^{n} D_i \left[a_i^{(l)}(t,x,u^{(1)}(t,x),\dots,u^{(N)}(t,x),Du^{(1)}(t,x),\dots,Du^{(N)}(t,x)) \right] + \\
&+ a_0^{(l)}(t,x,u^{(1)}(t,x),\dots,u^{(N)}(t,x),Du^{(1)}(t,x),\dots,Du^{(N)}(t,x)) = f^{(l)}(t,x),
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

$$
(t,x) \in Q_T = (0,T) \times \Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad l = 1,\dots,N.
$$

Ehhez persze tartozik kezdeti és peremfeltételek rendszere. Tekintsünk most el a peremfeltételrendszer konkrét alakjától, csak annyit tegyünk fel, hogy homogén Neumann-féle. A kezdeti feltételek rendszere legyen $u^{(l)}(0,x) = u_0^{(l)}(x) \quad (x \in \Omega;\ l = 1,\dots,N)$. A gyenge alak felírásához szükségünk van néhány előzetes megjegyzésre.

A továbbiakban azzal a feltételezéssel élünk, hogy $n \geq 1$ rögzített egész szám, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, melynek pereme folytonosan differenciálható, és $2 \leq p \leq \infty$ rögzített valós szám. A (2.4) feladat megoldásait nyilván $u(t,x) = (u^{(1)}(t,x),\dots,u^{(N)}(t,x))$ alakban keressük. Az előző szakasz alapján nyilvánvaló, hogy most $u \in L^p\big(0,T;(W^{1,p}(\Omega))^N\big)$ gyenge megoldásokat értelmezünk, azaz amelyekre $u(t,\cdot) \in (W^{1,p}(\Omega))^N$. A jelölések egyszerűsítése érdekében használni fogjuk a $V = (W^{1,p}(\Omega))^N$, $X = L^p(0,T;V)$ jelöléseket. Az előző szakaszban látott módon most is könnyen specializálhatjuk az $L^p(0,T;V)$ terek fogalmait a konkrét $V = (W^{1,p}(\Omega))^N$ esetre. Röviden nézzük meg ezeket!

Tetszőleges $u = (u^{(1)},\dots,u^{(N)}) \in L^p\big(0,T;(W^{1,p}(\Omega))^N\big)$ esetén

$$
\|u\|_{L^p\left(0,T;(W^{1,p}(\Omega))^N\right)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p_{(W^{1,p}(\Omega))^N}\, dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{Q_T} |u(t,x)|^p + |Du(t,x)|^p \, dt dx \right)^{\frac{1}{p}},
$$

továbbá $v = (v^{(1)},\dots,v^{(N)}) \in L^q\big(0,T;(W^{1,p}(\Omega)^*)^N\big)$ esetén

$$
[v,u] = \int_0^T \langle v(t,\cdot), u(t,\cdot)\rangle_{(W^{1,p}(\Omega))^N}\, dt = \sum_{l=1}^{N} \int_0^T \langle v^{(l)}(t,\cdot), u^{(l)}(t,\cdot)\rangle_{W^{1,p}(\Omega)}\, dt.
$$

Ezenkívül $p \geq 2$ esetén $(W^{1,p}(\Omega))^N \subset (L^2(\Omega))^N \subset (W^{1,p}(\Omega)^*)^N$ evolúciós hármas, így értelmezhető a $W^{1,p}\big(0,T;(W^{1,p}(\Omega))^N,(L^2(\Omega))^N\big)$ tér. Ekkor $u \in W^{1,p}\big(0,T;(W^{1,p}(\Omega))^N,(L^2(\Omega))^N\big)$ esetén $D_t u \in L^q\big(0,T;(W^{1,p}(\Omega)^*)^N\big)$, amelyre minden $v \in (W^{1,p}(\Omega))^N$ és $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ esetén

$$
\sum_{l=1}^{N} \int_0^T \langle (D_t u)^{(l)}(t,\cdot), v^{(l)}(\cdot)\rangle_{W^{1,p}(\Omega)}\, \varphi'(t)\, dt = - \sum_{l=1}^{N} \int_0^T \langle u^{(l)}(t,\cdot) v^{(l)}(\cdot)\rangle_{W^{1,p}(\Omega)}\, \varphi(t)\, dt.
$$

Könnyen látható, hogy ekkor $D_t u = (D_t u^{(1)},\dots,D_t u^{(N)})$ (ehhez elég, ha $v = (0,\dots,0,v^{(j)},0,\dots,0)$ tesztfüggvényeket választunk).

Ezek után térjünk vissza a kiindulási (2.4) feladathoz! A gyenge alakot (az előző részhez hasonlóan) megint úgy állítjuk elő, hogy feltesszük, létezik megfelelően sima megoldás, ekkor az l-edik egyenletet szorozzuk $v^{(l)}$ tesztfüggvénnyel, majd integrálunk Q_T-n, és integrálátalakító tételt használunk. Ezután az egészet egy bővebb térben tekintjük, ami most (a Neumann-féle peremfelétel miatt) a $W^{1,p}\big(0,T;(W^{1,p}(\Omega))^N,(L^2(\Omega))^N\big)$ tér. Könnyen látható, hogy ekkor a következő alakú rendszer adódik:

$$\begin{aligned}
[D_t u^{(1)}, v^{(1)}] + [A^{(1)}(u), v^{(1)}] &= F^{(1)}(v^{(1)}) \\
&\vdots \\
[D_t u^{(N)}, v^{(N)}] + [A^{(N)}(u), v^{(N)}] &= F^{(N)}(v^{(N)}) \\
u(0) &= u_0
\end{aligned}$$

minden $v = (v^{(1)}, \dots, v^{(N)}) \in L^p(0,T;V)$-re. Itt $A^{(l)}\colon L^p(0,T;V) \to L^q\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)^*\big)$ operátor ($l = 1, \dots, N$), melyre $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(N)}) \in L^p(0,T;V)$ és $v = (v^{(1)}, \dots, v^{(N)}) \in L^p(0,T;V)$ esetén

$$[A^{(l)}(u), v] :=$$

$$\int_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x)) D_i v^{(l)}(t,x) + a_0^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x)) v^{(l)}(t,x) \right] dt\, dx.$$

Ezenkívül $F^{(l)} \in L^q\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)^*\big)$ ($l = 1, \dots, N$), melyre

$$[F^{(l)}, v] := \int_{Q_T} f^{(l)}(t,x) v^{(l)}(t,x)\, dt\, dx,$$

valamint $u_0 \in V$. Gyenge alaknak még nem a fenti absztrakt rendszert tekintjük. Vegyük észre ugyanis, hogy a fenti rendszer ekvivalens a következővel:

$$[D_t u, v] + [A^{(1)}(u), v^{(1)}] + \dots + [A^{(N)}(u), v^{(N)}] = F^{(1)}(v^{(1)}) + \dots + F^{(N)}(v^{(1)})$$

minden $v = (v^{(1)}, \dots, v^{(N)}) \in L^p(0,T;V)$-re, és $u(0) = u_0$. Valóban, a rendszerből következik az előbbi egyenlet, másrészt $v = (0, \dots, 0, v^{(j)}, 0, \dots, 0)$-t választva külön-külön következnek a rendszerbeli egyenletek.

Ennek alapján legyen $A\colon L^p(0,T;V) \to L^q(0,T;V^*)$, melyre $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(N)}) \in L^p(0,T;V)$ és $v = (v^{(1)}, \dots, v^{(N)}) \in L^p(0,T;V)$ esetén

$$[A(u), v] := \sum_{l=1}^{N} [A^{(l)}, v^{(l)}].$$

Ekkor (2.4) gyenge alakja:

$$\begin{aligned}
D_t u + A(u) &= F \\
u(0) &= u_0.
\end{aligned}$$

A fentiek alapján azt mondhatjuk tehát, hogy az előbbi absztrakt feladatnak egy $u \in L^p(0,T;V)$ megoldása a (2.4) rendszer gyenge megoldása (megfelelő kezdeti és peremfeltételek mellett).

Az előző szakaszban leírtak alapján könnyen láthatjuk, hogy ha a peremfeltételt homogén Dirichlet-félének választottuk volna, akkor az előző eljárás szóról-szóró végigvihető, azzal a módosítással, hogy abban az esetben $V = (W^{1,p}(\Omega))^N$. Minden, a későbbiekben következő tétel érvényben van nemcsak $V = (W^{1,p}(\Omega))^N$ választással, hanem akkor is, ha V tetszőleges olyan zárt lineáris altere $(W^{1,p}(\Omega))^N$-nek, amely sűrű $(L^2(\Omega))^N$-ben (speciálisan $V = (W_0^{1,p}(\Omega))^N$). Az egyszerűség kedvéért azonban mi végig a $V = (W^{1,p}(\Omega))^N$ térrel fogunk dolgozni.

A következőkben bevezetjük a bevezetőben már említett Léray-Lions feltételeket, és ennek segítségével belátjuk, hogy a fenti feladatnak létezik gyenge megoldása.

2.3. Gyenge megoldások

2.3.1. Léray-Lions feltételek

Jelölések

Ahhoz, hogy precízen fel tudjuk írni a feltételeket, be kell vezetnünk egy jelölésrendszert. Ezen jelölések egy részét az előző szakaszban már bevezettük, de a teljesség kedvéért most megismételjük ezeket is. A továbbiakban az alább felsorolt jelöléseknek (hivatkozás nélkül) mindig a most definiált jelentést tulajdonítjuk.

Legyen $n \geq 1$ rögzített egész szám és $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, amelynek pereme folytonosan differenciálható. Legyen $V = (W^{1,p}(\Omega))^N$, ahol $2 \leq p < \infty$ valós és $N \geq 1$ egész szám. Minden esetben q jelöli p konjugált kitevőjét, más szóval $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Legyen $0 < T < \infty$ valós szám, ekkor használjuk a $Q_T = (0,T) \times \Omega$, $X = L^p(0,T;V)$, $Y = L^p\big(0,T;(L^p(\Omega))^N\big)$ és $H = (L^2(\Omega))^N$ jelöléseket. Egy $u \in X$ elemre $u = (u^{(1)}, \ldots, u^{(N)})$, ahol $u^{(l)} \in L^p\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)\big)$ $(l = 1, \ldots, N)$. Ezenkívül a $\xi \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$ vektorokat $\xi = (\zeta_0, \zeta)$ alakban írjuk, ahol $\zeta_0 = (\zeta_0^{(1)}, \ldots, \zeta_0^{(N)}) \in \mathbb{R}^N$ és $\zeta = (\zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(N)}) \in \mathbb{R}^{nN}$ $(l = 1, \ldots, N)$. Itt $\zeta^{(l)} = (\zeta_1^{(l)}, \ldots, \zeta_n^{(l)}) \in \mathbb{R}^n$ $(l = 1, \ldots, N)$.

Feltételek

L1. Tegyük fel, hogy az $a_i^{(l)}\colon Q_T \times \mathbb{R}^{(n+1)N} \to \mathbb{R}$ függvények teljesítik a Carathéodory-féle feltételeket. Azaz mérhetők (t,x)-ben minden rögzített $(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$ esetén, és folytonosak (ζ_0, ζ)-ban m.m. $(t,x) \in Q_T$ esetén $(i = 0, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, N)$.

L2. Tegyük fel, hogy létezik $c_1 > 0$ konstans és $k_1 \in L^q(Q_T)$ függvény, melyekre

$$|a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)| \leq c_1 \left(|\zeta_0|^{p-1} + |\zeta|^{p-1}\right) + k_1(t,x)$$

m.m. $(t,x) \in Q_T$-re és minden $(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$-re $(i = 0, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, N)$.

L3. Tegyük fel, hogy minden $\zeta \neq \eta \in \mathbb{R}^{nN}$ esetén

$$\sum_{l=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta) - a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\eta)\right)(\zeta_i^{(l)} - \eta_i^{(l)}) > 0$$

m.m. $(t,x) \in Q_T$-re és minden $\zeta_0 \in \mathbb{R}^N$-re.

L4. Tegyük fel, hogy létezik $c_2 > 0$ konstans és $k_2 \in L^1(Q_T)$ függvény, melyekre

$$\sum_{l=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)\zeta_i^{(l)} \geq c_2\left(|\zeta_0|^p + |\zeta|^p\right) - k_2(t,x)$$

m.m. $(t,x) \in Q_T$-re és minden $(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$-re $(i = 0, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, N)$.

2.3.2. Gyenge megoldás létezése

A fejezet fő eredménye a 2.1. tétel, amelyből kiderül, hogy Léray-Lions felételek elegendőek ahhoz, hogy az előző szakasz végén definiált A operátor kielégítse az 1.33. tétel feltételeit.

Legyen tehát $A\colon L^p(0,T;V) \to L^q(0,T;V^*)$ operátor, melyre $u = (u^{(1)}, \ldots, u^{(N)}) \in L^p(0,T;V)$ és $v = (v^{(1)}, \ldots, v^{(N)}) \in L^p(0,T;V^*)$ esetén

$$[A(u), v] :=$$

$$\sum_{l=1}^{N} \int_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x))D_i v^{(l)}(t,x) + a_0^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x))v^{(l)}(t,x)\right] dt\,dx.$$

Valójában egyelőre nem tudjuk, hogy A fenti definíciója valóban értelmes, és tényleg $L^q(0,T;V^*)$-ba képez. Ez azonban a tétel bizonyításának első részéből ki fog derülni.

Végül a szokásos módon legyen $L\colon L^p(0,T;V) \to L^q(0,T;V^*)$ a következő operátor:

$$D(L) = \{u \in X\colon D_t u \in X^*,\ u(0) = 0\}, \qquad Lu = D_t u.$$

2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek az L1–L5 feltételek. Ekkor az $A\colon X \to X^*$ operátor korlátos, demifolytonos, koercitív és pszeudomonoton $D(L)$-re nézve.*

Bizonyítás. A bizonyítás egészen elemi technikákon, a Hölder-egyenlőtlenségen és néhány funkcionálanalízisbeli tételen alapul.

Korlátosság. A háromszög-egyenlőtlenség miatt nyilván elegendő az $[A(u),v]$ definíciójában szereplő integrálokat, sőt azoknak is csak egy-egy tagját külön-külön vizsgálnunk. Egy ilyen tagot a Hölder-egyenlőtlenség segítségével felülről becsülhetünk:

$$\left|\int_{Q_T} a_i^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x))D_i v^{(l)}(t,x)\,dt\,dx\right| \le \tag{2.5}$$
$$\left(\int_{Q_T} |a_i^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x))|^q\,dt\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{Q_T} |D_i v^{(l)}(t,x)|^p\,dt\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(Természetesen $i=0$ esetén hasonló érvényes $D_i v^{(l)}$ helyett $v^{(l)}$-lel.) Itt a második tényező nyilván legfeljebb akkora, mint $\|v\|_X$, az első tényezőt pedig az L2 feltétel és az (1.1) egyenlőtlenség (többszöri) alkalmazásával tovább becsülhetjük:

$$\left(\int_{Q_T} |a_i^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x))|^q\,dt\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \le \tag{2.6}$$
$$\le \text{const}\cdot\left(\int_{Q_T}\left[c_1^q\left(|u(t,x)|^{(p-1)q} + |Du(t,x)|^{(p-1)q}\right) + |k_1(t,x)|^q\right]dt\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \le$$
$$\le \text{const}\cdot\left[\left(c_1^q\int_{Q_T}\left[|u|^p + |Du|^p\right]\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{Q_T}|k_1|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right] =$$
$$= \text{const}\cdot\left(c_1\|u\|_X^{\frac{p}{q}} + \|k_1\|_{L^q(Q_T)}\right).$$

(A c_1 konstanst egy későbbi alkalmazás miatt hagytuk meg.) A fenti két egyenlőtlenséget i-re és l-re szummázva (és felhasználva a háromszög-egyenlőtlenséget) $|[A(u),v]|$-re vonatkozó becslést nyerünk:

$$|[A(u),v]| \le \text{const}\cdot\left(c_1\|u\|_X^{\frac{p}{q}} + \|k_1\|_{L^q(Q_T)}\right)\|v\|_X.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy

$$\|A(u)\|_{X^*} \le \text{const}\cdot\left(c_1\|u\|_X^{\frac{p}{q}} + \|k_1\|_{L^q(Q_T)}\right), \tag{2.7}$$

tehát $A\colon X \to X^*$ korlátos operátor.

Demifolytonosság. Tegyük fel, hogy az $(u_k) \subset X$ sorozatra $u_k \to u$ az X normája szerint. Ekkor minden $1 \le i \le n$, $1 \le l \le N$ esetén az $(u_k^{(l)})$ és $(D_i u_k^{(l)})$ sorozatok $L^p(Q_T)$-ben konvergensek, ezért a Riesz-lemma (1.21. lemma) miatt létezik $(\tilde{u}_k) \subset (u_k)$ részsorozat, melyre $\tilde{u}_k \to u$ és $D\tilde{u}_k \to Du$ m.m. $(t,x) \in Q_T$-re. Belátjuk, hogy minden $v \in X$ esetén $[A(\tilde{u}_k) - A(u), v] \to 0$, ekkor a részsorozatos trükk (1.32. lemma) alapján készen leszünk. Az $[A(\tilde{u}_k) - A(u), v]$-ben lévő tagokat a korlátosság bizonyításában szereplő (2.5) Hölder-egyenlőtlenséghez hasonlóan becsülhetjük:

$$\left|\int_{Q_T}\left[a_i^{(l)}(t,x,\tilde{u}_k(t,x),D\tilde{u}_k(t,x)) - a_i^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x))\right]D_i v^{(l)}(t,x)\,dt\,dx\right| \le \tag{2.8}$$
$$\le \|a_i^{(l)}(\cdot\,,\tilde{u}_k(\cdot),D\tilde{u}_k(\cdot)) - a_i^{(l)}(\cdot\,,u(\cdot),Du(\cdot))\|_{L^q(Q_T)}\cdot\|v\|_X.$$

Ebből következően elegendő belátnunk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \|a_i^{(l)}(\cdot\,,\tilde{u}_k(\cdot), D\tilde{u}_k(\cdot)) - a_i^{(l)}(\cdot\,,u(\cdot), Du(\cdot))\|_{L^q(Q_T)} = 0$$

minden $0 \le i \le n$-re és $1 \le l \le N$-re. Ehhez először vegyük észre, hogy az L1 feltétel szerint $a_i^{(l)}$ a (ζ_0,ζ) koordinátákban folytonos, így

$$\lim_{k\to\infty} a_i^{(l)}(t,x,\tilde{u}_k(t,x), D\tilde{u}_k(t,x)) = a_i^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x)) \quad \text{m.m. } (t,x)\in Q_T\text{-re},$$

felhasználva az $(\tilde{u}_k)$ és a $(D\tilde{u}_k)$ sorozatok majdnem mindenütt való konvergenciáját Q_T-ben. Továbbá az L2 feltételből következően (lásd pl. (2.6))

$$|a_i^{(l)}(t,x,\tilde{u}_k(t,x), D\tilde{u}_k(t,x))|^q \le c_1^q\left(|\tilde{u}_k(t,x)|^p + |D\tilde{u}_k(t,x)|^p\right) + |k_1(t,x)|^q = f_k(t,x).$$

Az $(\tilde{u}_k)$ sorozat X-beli konvergenciája miatt az $(|\tilde{u}_k|)$ és $(|D\tilde{u}_k|)$ függvénysorozatok $L^p(Q_T)$-ben konvergensek, ezért az $(|\tilde{u}_k|^p)$, $(|D\tilde{u}_k|^p)$ sorozatok $L^1(Q_T)$-ben konvergensek. Tehát az (f_k) függvénysorozat $L^1(Q_T)$-ben konvergens, és így ekviintegrálható $L^1(Q_T)$-ben (1.19. állítás). Következésképpen az $\left(a_i^{(l)}(\cdot\,,\tilde{u}_k(\cdot), D\tilde{u}_k(\cdot)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvények ekviintegrálhatók $L^q(Q_T)$-ben. Ekkor viszont e függvények kielégítik a Vitali-tétel (1.20. tétel) feltételeit, így

$$\lim_{k\to\infty} \|a_i^{(l)}(\cdot\,,\tilde{u}_k(\cdot), D\tilde{u}_k(\cdot)) - a_i^{(l)}(\cdot\,,u(\cdot), Du(\cdot))\|_{L^q(Q_T)} = 0.$$

Éppen ezt akartuk belátni.

Koercitivitás. Az L4 feltétel szerint

$$[A(u),u] \ge \int_{Q_T} \left[c_2\left(|u(t,x)|^p + |Du(t,x)|^p\right) - k_2(t,x)\right] dt\,dx = c_2\|u\|_X^p - \|k_2\|_{L^1(Q_T)},$$

ahonnan

$$\lim_{\|u\|_X\to\infty} \frac{[A(u),u]}{\|u\|_X} \ge \lim_{\|u\|_X\to\infty} \left[c_2\|u\|^{p-1} - \frac{\|k_2\|_{L^1(Q_T)}}{\|u\|_X}\right] = \lim_{\|u\|_X\to\infty} c_2\|u\|_X^{p-1} = +\infty.$$

Ez éppen A koercitivitását jelenti.

Pszeudomonotonitás. A bizonyítás alapjául a [4] cikk szolgál. A benne alkalmazott technikák egészen elemiek, mégis a bizonyítás nagy figyelmet igényel. Ezért menet közben mindig előre jelezzük a fontosabb célokat, illetve gondolatokat, nehogy elvesszünk a részletekben.

Tekintsünk egy tetszőleges (u_k) sorozatot X-ben, melyre

(2.9) $$u_k \to u \quad \text{gyengén } X\text{-ben} \quad \text{és} \quad D_t u_k \to D_t u \quad \text{gyengén } X^*\text{-ban},$$

valamint

(2.10) $$\limsup_{k\to\infty}[A(u_k), u_k - u] \le 0.$$

Belátjuk, hogy egy alkalmas $(\tilde{u}_k) \subset (u_k)$ részsorozatra

$$\lim_{k\to\infty}[A(\tilde{u}_k), \tilde{u}_k - u] = 0 \quad \text{és} \quad A(\tilde{u}_k) \to A(u) \quad \text{gyengén } X^*\text{-ban}.$$

Ekkor a részsorozatos trükk miatt készen leszünk.

Mindenekelőtt tegyünk meg néhány előkészületi lépést! Elöször is szükségünk lesz az (u_k) egy majdnem mindenütt konvergens részsorozatára, a továbbiakban azzal fogunk dolgozni. Ehhez vegyük észre, hogy (2.9) miatt alkalmazhatjuk az 1.52. következményt, és így létezik $(\tilde{u}_k) \subset (u_k)$ részsorozat, melyre $\tilde{u}_k \to u$ Y-ban. A részsorozatos trükk miatt feltehető, hogy $(\tilde{u}_k) \equiv (u_k)$, így a továbbiakban feltesszük, hogy $u_k \to u$ Y-ban. Ekkor persze az 1.22. következmény miatt létezik részsorozat (ugyancsak feltehető, hogy az eredeti sorozat), melyre $u_k \to u$ m.m. Q_T-ben. Végeredményben tehát feltesszük, hogy $u_k \to u$ m.m. Q_T-ben.

A bizonyítás másik fontos előkészületi lépése, hogy bevezetjük a $p_k(t,x)$ függvényeket, melyekre

$$p_k(t,x) :=$$
$$\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\left[a_i^{(l)}(t,x,u_k(t,x),Du_k(t,x)) - a_i^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x))\right](D_i u_k^{(l)}(u,x) - D_i u^{(l)}(u,x)) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{N}\left[a_0^{(l)}(t,x,u_k(t,x),Du_k(t,x)) - a_0^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x))\right](u_k^{(l)}(u,x) - u^{(l)}(u,x)).$$

A későbbiekben használjuk a szokásos $p_k^+(t,x) = \max(p_k(t,x),0)$ és $p_k^-(t,x) = -\min(p_k(t,x),0)$ jelöléseket. Vegyük észre, hogy p_k fenti definíciójából adódóan

$$[A(u_k) - A(u), u_k - u] = \int_{Q_T} p_k(t,x)\,dt\,dx. \tag{2.11}$$

Mivel $u_k \to u$ gyengén X-ben, azért $\lim_{k\to\infty}[A(u), u_k - u] = 0$, és így

$$\limsup_{k\to\infty}[A(u_k), u_k - u] = \limsup_{k\to\infty}[A(u_k) - A(u), u_k - u].$$

Ez (2.10) és (2.11) alapján azt jelenti, hogy

$$\limsup_{k\to\infty}\int_{Q_T} p_k(t,x)\,dt\,dx \le 0. \tag{2.12}$$

A bizonyítás menete innen a következő. Először belátjuk, hogy p_k^- majdnem mindenütt 0-hoz konvergál, amiből következni fog, hogy a konvergencia $L^1(Q_T)$-ben is teljesül. Ennek segítségével igazoljuk, hogy $p_k \to 0$ $L^1(Q_T)$-ben, és így egy részsorozat majdnem mindenütt is konvergál. Majd az előbbit felhasználva a (Du_k) sorozatból kiválasztunk egy majdnem mindenütt konvergens részsorozatot, amelyről ki fog derülni, hogy valójában Du-hoz konvergál. Mindezekből pedig a pszeudomonotonitás már egyszerűen belátható.

A továbbiakban a képletek egyszerűsítése érdekében előfordulhat, hogy egyes függvények argumentumát (ha nem okoz félreértést) nem írjuk ki.

Lássunk neki a bizonyítás érdemi részének! Írjuk p_k-t a következő alakban:

$$p_k(t,x) = \sum_{l=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^{(l)}(t,x,u_k,Du_k)D_i u_k^{(l)} + a_0^{(l)}(t,x,u_k,Du_k)u_k^{(l)}\right] -$$
$$- \sum_{l=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^{(l)}(t,x,u,Du)(D_i u_k^{(l)} - D_i u^{(l)}) + a_0^{(l)}(t,x,u,Du)(u_k^{(l)} - u^{(l)})\right] -$$
$$- \sum_{l=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^{(l)}(t,x,u_k,Du_k)D_i u^{(l)} + a_0^{(l)}(t,x,u_k,Du_k)u^{(l)}\right] =$$
$$= f_k(t,x) - g_k(t,x) - h_k(t,x).$$

Az L4 feltétel alapján világos, hogy

$$f_k(t,x) \ge c_2(|u_k(t,x)|^p + |Du_k(t,x)|^p) - k_2(t,x) \ge c_2|Du_k(t,x)|^p - k_2(t,x). \tag{2.13}$$

Vizsgáljuk most meg, hogy mit mondhatunk a g_k-ban, illetve h_k-ban szereplő tagokról. Az L1 feltételt és a nyilvánvaló $|D_i u^{(l)}| \le |Du|$ egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$|a_i^{(l)}(t,x,u,Du)(D_i u_k^{(l)} - D_i u^{(l)})| \le c_1(|u|^{p-1} + |Du|^{p-1} + k_1)(|Du_k| + |Du|).$$

A $|Du_k|$-et nem tartalmazó tagokat a p, q kitevőkkel alkalmazott Young-egyenlőtlenség, majd az (1.1) egyenlőtlenség segítségével becsülhetjük. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left|\left(|u|^{p-1}+|Du|^{p-1}+k_1\right)|Du|\right| \le \frac{1}{q}\left(|u|^{(p-1)q}+|Du|^{(p-1)q}+|k_1|^q\right)+\frac{1}{p}|Du|^p \le$$
$$\le \mathrm{const}\cdot(|u|^p+|Du|^p+|k_1|^q).$$

A $|Du_k|$-et tartalmazó tagokat pedig az ε-egyenlőtlenség segítségével becsüljük (ahol ε-t később határozzuk meg):

$$\left|\left(|u|^{p-1}+|Du|^{p-1}+k_1\right)|Du_k|\right| \le \frac{1}{\varepsilon^q q}\left(|u|^{(p-1)q}+|Du|^{(p-1)q}+|k_1|^q\right)+\frac{\varepsilon^p}{p}|Du_k|^p \le$$
$$\le c(\varepsilon)\cdot(|u|^p+|Du|^p+|k_1|^q)+\varepsilon^p p^{-1}|Du_k|^p,$$

ahol $c(\varepsilon)$ a továbbiakban mindig egy ε-tól függő pozitív konstanst jelent. Az előbbi két becslést összevetve végülis azt kaptuk, hogy

$$|a_i^{(l)}(t,x,u,Du)(D_i u_k^{(l)}-D_i u^{(l)})| \le c(\varepsilon)\cdot(|u|^p+|Du|^p+|k_1|^q)+\varepsilon^p p^{-1}|Du_k|^p. \tag{2.14}$$

Az előbbi technikához hasonlóan becsülhetjük a g_k-ban és h_k-ban lévő többi tagot. Azaz először az L1 feltételt használjuk, aztán a kapott kifejezés $|Du_k|$-et tartalmazó részeit az ε-egyenlőtlenséggel, a többit pedig a Young-egyenlőtlenséggel becsüljük. Ha az így kapott becsléseket szummázzuk (és felhasználjuk a háromszög-egyenlőtlenséget), akkor könnyen láthatóan azt kapjuk, hogy

$$|g_k(t,x)|+|h_k(t,x)| \le \delta(\varepsilon)\cdot|Du_k|^p+c(\varepsilon)\cdot(|u|^p+|Du|^p+|u_k|^p+|k_1|^q), \tag{2.15}$$

ahol $\delta(\varepsilon)$ az ε megfelelő választásával tetszőlegesen kicsivé tehető. Ezért válasszuk meg ε-t úgy, hogy $\delta(\varepsilon) < \frac{c_2}{2} =: c^*$ teljesüljön. Ekkor a (2.13) és (2.15) becslésekből következik, hogy

$$p_k(t,x) \ge c^*|Du_k(t,x)|^p - d^*\left(|u(t,x)|^p+|Du(t,x)|^p+|u_k(t,x)|^p+|k_1(t,x)|^q\right). \tag{2.16}$$

Legyen $N_k = \{(t,x)\in Q_T\colon p_k<0\}$, vagyis p_k^- tartója, és jelölje χ_{N_k} e halmaz karakterisztikus függvényét. Ekkor az előbbi egyenlőtlenségből az (u_k) $(k\in\mathbb{N})$ sorozat m.m. való pontonkénti konvergencia miatti m.m. korlátossága folytán következik, hogy

$$\begin{aligned}
&c^*|\chi_{N_k}Du_k(t,x)|^p \le \\
&\le d^*(|\chi_{N_k}u(t,x)|^p+|\chi_{N_k}Du(t,x)|^p+|\chi_{N_k}u_k(t,x)|^p+|\chi_{N_k}k_1(t,x)|^q)+\chi_{N_k}p_k(t,x) \le \\
&\qquad \le d^*(|\chi_{N_k}u(t,x)|^p+|\chi_{N_k}Du(t,x)|^p+|\chi_{N_k}u_k(t,x)|^p+|\chi_{N_k}k_1(t,x)|^q) \le b(t,x),
\end{aligned} \tag{2.17}$$

ahol a b függvény független k-tól.

Ezen eredmény segítségével megmutatjuk, hogy $p_k^-\to 0$ majdnem mindenütt Q_T-ben, amiből pedig következni fog, hogy $p_k\to 0$ $L^1(Q_T)$-ben. Ehhez hasznos lesz a p_k függvényeket az alábbi alakban írni:

$$\begin{aligned}
&p_k(t,x) = \\
&=\sum_{l=1}^N\sum_{i=1}^n\left[a_i^{(l)}(t,x,u_k(t,x),Du_k(t,x))-a_i^{(l)}(t,x,u_k(t,x),Du(t,x))\right](D_iu_k^{(l)}(u,x)-D_iu^{(l)}(u,x))+\\
&+\sum_{l=1}^N\sum_{i=1}^n\left[a_i^{(l)}(t,x,u_k(t,x),Du(t,x))-a_i^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x))\right](D_iu_k^{(l)}(u,x)-D_iu^{(l)}(u,x))+\\
&+\sum_{l=1}^N\left[a_0^{(l)}(t,x,u_k(t,x),Du_k(t,x))-a_0^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x))\right](u_k^{(l)}(u,x)-u^{(l)}(u,x))=\\
&=q_k(t,x)+r_k(t,x)+s_k(t,x).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Az L1 folytonossági feltétele következtében $k \to \infty$ esetén $a_i^{(l)}(\cdot\,, u_k(\cdot), Du(\cdot)) \to a_i^{(l)}(\cdot\,, u(\cdot), Du(\cdot))$ m.m. Q_T-ben, hiszen $u_k \to u$ m.m. Q_T-ben. Így felhasználva a $(|\chi_{N_k} Du_k|)$ függvénysorozat pontonkénti m.m. való korlátosságát (lásd (2.17)), következik, hogy $\chi_{N_k} r_k(t,x) \to 0$ m.m. $(t,x) \in Q_T$-re. Az s_k esetében pont fordítva okoskodunk. Ekkor ugyanis $u_k \to u$ m.m. Q_T-ben. Továbbá a $\left(\chi_{N_k} a_i^{(l)}(\cdot\,, u_k(\cdot), Du_k(\cdot))\right)_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként m.m. korlátos, mert L2 alapján

$$|\chi_{N_k} a_i^{(l)}(t,x,u_k(t,x), Du_k(t,x))| \le c_1(|\chi_{N_k} u_k(t,x)|^p + |\chi_{N_k} Du_k(t,x)|^p) + \chi_{N_k} k_1(t,x),$$

és itt a jobb oldalon minden tag pontonként korlátos. Ebből következően $\chi_{N_k} s_k \to 0$ m.m. Q_T-ben. Végezetül q_k-val kapcsolatban vegyük észre, hogy L4 miatt $q_k(t,x) \ge 0$ m.m. $(t,x) \in Q_T$-re. Összefoglalva az előzőekben leírtakat, azt mondhatjuk, hogy

$$0 \ge -p_k^- = \chi_{N_k} q_k + \chi_{N_k} r_k + \chi_{N_k} s_k \ge \chi_{N_k} r_k + \chi_{N_k} s_k \to 0 \ \text{ m.m. } \ Q_T\text{-ben},$$

következésképpen $p_k^- \to 0$ m.m. Q_T-ben.

Most már könnyen igazolhatjuk, hogy $p_k \to 0$ $L^1(Q_T)$-ben. Ehhez először vegyük észre, hogy (2.16) miatt

$$p_k(t,x) \ge -d^*(|u(t,x)|^p + |Du(t,x)|^p + |u_k(t,x)|^p + |k_1(t,x)|^q) = -d_k(t,x),$$

azaz $p_k^- \le |d_k|$. Itt $u \in X$ miatt $|u|^p, |Du|^p \in L^1(Q_T)$, és $k_1 \in L^q(Q_T)$ miatt $|k_1|^q \in L^1(Q_T)$. Továbbá az $u_k \to u$ X-beli konvergencia miatt $|u_k| \to |u|$ $L^p(Q_T)$-ben, és így $|u_k|^p \to |u|^p$ $L^1(Q_T)$-ben. Tehát d_k konvergens $L^1(Q_T)$-ben, következésképpen ekviintegrálható is $L^1(Q_T)$-ben. Mivel $p_k^- \le |d_k|$, azért a (p_k^-) függvénysorozat is ekviintegrálható $L^1(Q_T)$-ben. Ekkor viszont Vitali tétele alapján szükségképpen $p_k^- \to 0$ $L^1(Q_T)$-ben. Ezt és (2.12)-t felhasználva

$$0 \le \limsup_{k\to\infty} \int_{Q_T} p_k^+(t,x)\,dt\,dx \le \limsup_{k\to\infty} \int_{Q_T} p_k(t,x)\,dt\,dx + \limsup_{k\to\infty} \int_{Q_T} p_k^-(t,x)\,dt\,dx \le 0.$$

Ez azt jelenti, hogy $p_k^+ \to 0$ $L^1(Q_T)$-ben, végeredményben tehát $p_k \to 0$ $L^1(Q_T)$-ben. Ekkor az 1.22. kiválasztási tétel alapján létezik $(\hat{p}_k) \subset (p_k)$ részsorozat, melyre $\hat{p}_k \to 0$ majdnem mindenütt $L^1(Q_T)$-ben.

A bizonyítás nehezebbik felén túl vagyunk, most még egy apró kiválasztási meggondolásra van szükségünk, utána már különösebb nehézség nélkül be tudjuk fejezni a bizonyítást. Először is a majdnem mindenütt való konvergenciája miatt a $(\hat{p}_k)$ sorozat majdnem minden $(t,x) \in Q_T$-re korlátos. Ezért (2.16)-ból következően

$$c^*|D\hat{u}_k(t,x)|^p \le d^*(|u(t,x)|^p + |Du(t,x)|^p + |\hat{u}_k(t,x)|^p + |k_1(t,x)|^q) + \hat{p}_k(t,x) \le b^*(t,x).$$

(Itt $(\hat{u}_k)$ az (u_k) sorozat $(\hat{p}_k)$-nak megfelelő részsorozata. Ebben az értelemben használjuk később a $\tilde{}$ jelölést is.) Azaz $(|D\hat{u}_k(t,x)|)$ majdnem minden $(t,x) \in Q_T$ esetén korlátos sorozat. Ekkor persze létezik $(\tilde{u}_k) \subset (\hat{u}_k)$ m.m. pontonként konvergens részsorozat, melyre $D\tilde{u}_k(t,x) \to v$ m.m. Q_T-ben (ahol v mérhető). Sőt most már az is következik, hogy $\tilde{r}_k \to 0$ és $\tilde{s}_k \to 0$ majdnem mindenütt Q_T-ben, hiszen ugyanazt a gondolatmenetet követhetjük, mint p_k^- konvergenciájának bizonyításában, csak most χ_{N_k} nélkül. Mindezek alapján, felhasználva a Carathéodory-féle folytonossági feltételt és $(\tilde{u}_k)$ ill. $(D\tilde{u}_k)$ m.m. pontonkénti konvergenciáját, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k\to\infty} \tilde{p}_k(t,x) = \\ &= \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} \left[a_i^{(l)}(t,x,u(t,x),v(t,x)) - a_i^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x))\right](D_i u^{(l)}(t,x) - v_i^{(l)}(t,x)), \end{aligned}$$

ahonnan L3 alapján szükségképpen $v = Du$ következik, vagyis $D_t\tilde{u}_k \to D_t u$ m.m. Q_T-ben.

Vegyük észre, hogy

$$(2.19)\quad [A(\tilde{u}_k), \tilde{u}_k - u] =$$
$$= [A(\tilde{u}_k) - A(u), \tilde{u}_k - u] + [A(u), \tilde{u}_k - u] = \int_{Q_T} \tilde{p}_k(t,x)\,dt\,dx + [A(u), \tilde{u}_k - u] \to 0,$$

hiszen $\tilde{p}_k \to 0$ $L^1(Q_T)$-ben valamint $\tilde{u}_k \to u$ gyengén X^*-ban. Ezenkívül tudjuk, hogy tetszőleges $v \in X$ esetén

$$[A(\tilde{u}_k), v] =$$
$$\sum_{l=1}^{N} \int_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^{(l)}(t,x,\tilde{u}_k(t,x), D\tilde{u}_k(t,x)) D_i v^{(l)}(t,x) + a_0^{(l)}(t,x,\tilde{u}_k(t,x), D\tilde{u}_k(t,x)) v^{(l)}(t,x) \right] dt dx.$$

Itt az integrandusok pontonként konvergensek az $\tilde{u}_k \to u$ X-beli ill. $D\tilde{u}_k \to Du$ X^*-beli konvergenciák és a Carathéodory-féle feltétel miatt. Ráadásul az integrandusok ekviintegrálhatók is, mert (ahogy hasonlót már korábban láttunk, pl. (2.14))

$$|a_i^{(l)}(t,x,\tilde{u}_k, D\tilde{u}_k) D_i v^{(l)}| \le \text{const} \cdot (|\tilde{u}_k|^p + |D\tilde{u}_k|^p + |k_1|^q + |D_i v^{(l)}|^p),$$

ahol a jobb oldal $L^1(Q_T)$-ben konvergens. Így a Vitali-tétel alapján $[A(\tilde{u}_k), v] \to [A(u), v]$. Ez (2.19)-cel együtt azt jelenti, hogy A valóban pszeudomonoton $D(L)$-re nézve. Kész a pszeudomonotonitás bizonyítása. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

2.2. Megjegyzés. Az A operátor peszeudomonotonitásához L4 helyett a következő gyengébb feltétel is elegendő:

$$\sum_{l=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)\zeta_i^{(l)} \ge c_2|\zeta|^p - k_2(t,x)$$

m.m. $(t,x) \in Q_T$-re és minden $(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$-re. Valóban, az L4 feltételt csak a (2.13) becsléshez használtuk, ahol valójában csak az előbbi gyengébb feltételre volt szükség.

2.3. Következmény. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a L1–L4 feltételek. Ekkor tetszőleges $F \in X^*$ esetén a*

$$D_t u + A(u) = F$$
$$u(0) = 0$$

absztrakt feladatnak van $u \in W^{1,p}(0,T;V,H)$ megoldása.

Bizonyítás. Mivel az $L^p(0,T;V)$ tér reflexív (lásd az 1.14. és 1.36. állításokat), valamint az $L : D(L) \to L^q(0,T;V^*)$, $Lu = D_t u$ operátor maximálisan monoton (1.47. állítás), így az előző tételből az 1.33. tétel alapján következik, hogy az $L(u) + A(u) = F$ egyenletnek van $u \in D(L)$ megoldása.

3. fejezet

Funkcionálisan függő rendszerek

A következőkben olyan nemlineáris másodrendű parabolikus differenciálegyenletek rendszerével foglalkozunk, amelyekben az együttható függvények az ismeretlen függvényektől egy funkcionálon keresztül is függenek. Az ilyen típusú egyenleteket (többek között) Simon László vizsgálta [6] cikkében, melyben a következő alakú egyenlet szerepelt:

$$D_t u(t,x) - \sum_{i=1}^{n} D_i\big[a_i(t,x,u(t,x),Du(t,x);u)\big] + a_0(t,x,u(t,x),Du(t,x);u) = f(t,x),$$
$$(t,x) \in Q_T = (0,T)\times\Omega, \quad a_i\colon Q_T \times \mathbb{R}^{n+1} \times L^p\big(0,T;W^{1,p}(\Omega)\big) \to \mathbb{R},$$

ahol $2 \le p < \infty$.

Mi most a fenti típusú egyenletekből álló rendszert fogjuk vizsgálni, vagyis az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} &D_t u^{(l)}(t,x) - \\ &- \sum_{i=1}^{n} D_i\left[a_i^{(l)}(t,x,u^{(1)}(t,x),\dots,u^{(N)}(t,x),Du^{(1)}(t,x),\dots,Du^{(N)}(t,x);u^{(1)},\dots,u^{(N)})\right] + \\ &+ a_0^{(l)}(t,x,u^{(1)}(t,x),\dots,u^{(N)}(t,x),Du^{(1)}(t,x),\dots,Du^{(N)}(t,x);u^{(1)},\dots,u^{(N)}) = f^{(l)}(t,x), \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$(t,x) \in Q_T = (0,T)\times\Omega, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad l = 1,\dots,N.$$

Ehhez persze tartozik kezdeti és peremfeltételek rendszere, de ahogy korábban, most sem törődünk azok konkrét alakjával, csak annyit teszünk fel, hogy a peremfeltétel homogén Neumann-féle.

A következő részben az előző fejezethez hasonlóan definiáljuk a (3.1) feladat gyenge alakját, majd az együtthatókra tett feltételek segítségével bizonyítjuk gyenge megoldás létezését. E feltételek a korábban megismert Léray-Lions feltételek általánosításai, kiegészítve a fenti típusú egyenletek megoldhatóságához elegendő speciális feltételekkel. Ezt követően néhány példát mutatunk megfelelő együttható függvényekre. Végül egy speciális esetben igazoljuk a gyenge megoldás egyértelműségét. A fejezetben továbbra is a 2.3.1 szakaszban bevezetett jelöléseket használjuk.

3.1. Gyenge megoldások

Értelmezzük a $B\colon L^p(0,T;V) \to L^q(0,T;V^*)$ operátort a következő módon. Legyen $u = (u^{(1)},\dots,u^{(N)}) \in L^p(0,T;V)$ és $v = (v^{(1)},\dots,v^{(N)}) \in L^p(0,T;V)$ esetén

$$[B(u),v] :=$$

$$\sum_{l=1}^{N}\int_{Q_T}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x);u)D_i v^{(l)}(t,x) + a_0^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x);u)v^{(l)}(t,x)\right] dt\,dx.$$

Vagyis m.m. $t \in (0,T)$-re $w = (w^{(1)},\dots,w^{(N)}) \in V$ esetén

$$\langle [B(u)](t), w\rangle := \tag{3.2}$$

$$\sum_{l=1}^{N}\int_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x);u)D_i w^{(l)}(x) + a_0^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x);u)w^{(l)}(x)\right] dx.$$

Ezenkívül a szokott módon legyen $L\colon L^p(0,T;V) \to L^q(0,T;V^*)$ operátor, melyre

$$D(L) = \{u \in X\colon D_t u \in X^*,\ u(0) = 0\}, \qquad Lu = D_t u.$$

Az előző fejezetben leírtak alapján most már könnyen felírhatjuk a (3.1) típusú rendszer gyenge alakját (valamilyen kezdeti és homogén Neumann-peremfeltétel mellett) a B operátor segítségével. Nevezetesen

$$D_t u + B(u) = F$$
$$u(0) = u_0,$$

ahol $F \in L^q(0,T;V^*)$ és $u_0 \in V = (W^{1,p}(\Omega))^N$.

3.1.1. Feltételek

F1. Tegyük fel, hogy az $a_i^{(l)}\colon Q_T \times \mathbb{R}^{(n+1)N} \times L^p(0,T;V) \to \mathbb{R}$ függvények minden (rögzített) $v \in L^p(0,T;V)$ esetén teljesítik a Carathéodory-féle feltételeket. Azaz mérhetők (t,x)-ben minden rögzített $(\zeta_0,\zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$ esetén, és folytonosak (ζ_0,ζ)-ban m.m. $(t,x) \in Q_T$ esetén $(i = 0,\dots,n;\ l = 1,\dots,N)$.

F2. Tegyük fel, hogy léteznek $g_1\colon L^p(0,T;V) \to \mathbb{R}^+$ és $k_1\colon L^p(0,T;V) \to L^q(Q_T)$ korlátos operátorok, melyekre

$$|a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;v)| \le g_1(v)\left(|\zeta_0|^{p-1} + |\zeta|^{p-1}\right) + [k_1(v)](t,x)$$

m.m. $(t,x) \in Q_T$-re, minden $(\zeta_0,\zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$-re és $v \in L^p(0,T;V)$-re $(i = 0,\dots,n;\ l = 1,\dots,N)$.

F3. Tegyük fel, hogy minden $\zeta \ne \eta \in \mathbb{R}^{nN}$ esetén

$$\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;v) - a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\eta;v)\right)(\zeta_i^{(l)} - \eta_i^{(l)}) > 0$$

m.m. $(t,x) \in Q_T$-re, minden $\zeta_0 \in \mathbb{R}^N$-re és minden $v \in L^p(0,T;V)$-re.

F4. Tegyük fel, hogy léteznek $g_2\colon L^p(0,T;V) \to \mathbb{R}$ és $k_2\colon L^p(0,T;V) \to L^1(Q_T)$ operátorok, melyekre

$$\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=0}^{n} a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;v)\zeta_i^{(l)} \ge g_2(v)\left(|\zeta_0|^p + |\zeta|^p\right) - [k_2(v)](t,x)$$

m.m. $(t,x) \in Q_T$-re, minden $(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$-re és $v \in L^p(0,T;V)$-re $(i = 0, \dots, n;\ l = 1, \dots, N)$. Továbbá a g_2, k_2 operátorok rendelkeznek az alábbi tulajdonsággal:

$$\lim_{\|v\|_{L^p(0,T;V)} \to \infty} \left(g_2(v) \|v\|^{p-1}_{L^p(0,T;V)} - \frac{\|k_2(v)\|_{L^1(Q_T)}}{\|v\|_{L^p(0,T;V)}} \right) = +\infty. \tag{3.3}$$

F5. Tegyük fel, hogy ha $u_k \to u$ gyengén $L^p(0,T;V)$-ben és norma szerint $L^p\big(0,T;(L^p(\Omega))^N\big)$-ben, akkor minden $i = 0, \dots, n$, és $l = 1, \dots, N$ esetén

$$\lim_{k\to\infty} \|a_i^{(l)}(\cdot\,, u_k(\cdot), Du_k(\cdot); u_k) - a_i^{(l)}(\cdot\,, u_k(\cdot), Du_k(\cdot); u)\|_{L^q(Q_T)} = 0.$$

3.1.2. Létezés

A most következő tétel a 2.1. tétel párja, hasonlót állít a B operátorról.

3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek az F1–F5 feltételek. Ekkor a $B\colon X \to X^*$ operátor korlátos, demifolytonos, koercitív és pszeudomonoton $D(L)$-re nézve.*

3.2. Megjegyzés. A bizonyítás részben az 2.1. tételre való visszavezetésen alapul, ezért érdemes a bizonyítás előtt megtennünk néhány apró előkészületet. Vezessük be rögzített $w \in X$ esetén a $\tilde{B}_w\colon X \to X^*$ operátort, melyre $u \in X$ és $v \in X^*$ esetén

$$[\tilde{B}_w(u), v] :=$$
$$\sum_{l=1}^N \int_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^n a_i^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x);w) D_i v^{(l)}(t,x) + a_0^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x);w) v^{(l)}(t,x) \right] dt\,dx.$$

Ekkor nyilvánvaló, hogy ha teljesülnek az F1–F5 feltételek, akkor a $\tilde{B}_w$ operátor kielégíti a 2.3.1 szakaszban szereplő L1–L4 feltételeket, mégpedig a $k_1(t,x) = [k_1(w)](t,x)$, $k_2(t,x) = [k_2(w)](t,x)$, $c_1 = g_1(w)$, $c_2 = g_2(w)$ megfeleltetésekel. Tehát a 2.1. tétel alapján minden $w \in X$ esetén a $\tilde{B}_w$ operátor korlátos, demifolytonos, koercitív és pszeudomonoton $D(L)$-re nézve.

Ezek után lássunk hozzá a bizonyításhoz!.

Bizonyítás [3.1. tétel]. *Korlátosság.* Legyen $v \in X$ rögzített. Ekkor az előzetes megjegyzés miatt a $\tilde{B}_v$ operátorra igaz a (2.7) becslés $c_1 = g_1(v)$-vel és $k_1 = k_1(v)$-vel, azaz

$$\|\tilde{B}_v(u)\|_{X^*} \le \mathrm{const} \cdot \left(g_1(v) \|u\|_X^{\frac{p}{q}} + \|k_1(v)\|_{L^q(Q_T)} \right).$$

Mivel $\tilde{B}_u(u) = B(u)$, azért $v = u$ esetén az előbbi egyenlőtlenség a

$$\|B(u)\|_{X^*} \le \mathrm{const} \cdot \left(g_1(u) \|u\|_X^{\frac{p}{q}} + \|k_1(u)\|_{L^q(Q_T)} \right) \tag{3.4}$$

alakot ölti. Ebből pedig g_1 és k_1 korlátossága folytán következik a B operátor korlátossága.

Demifolytonosság. Legyen (u_k) X-beli sorozat, melyre $u_k \to u$ az X normája szerint. Megmutatjuk, hogy minden $v \in X$ esetén $[B(u_k) - B(u), v] \to 0$, ekkor készen leszünk. Ehhez elegendő belátnunk, hogy $B(u_k) - \tilde{B}_u(u_k) \to 0$ és $\tilde{B}_u(u_k) - B(u) \to 0$ gyengén X^*-ban. Ez utóbbihoz megint vegyük észre, hogy $\tilde{B}_u(u) = B(u)$, így $\tilde{B}_u$ demifolytonosságából következően $\tilde{B}_u(u_k) \to \tilde{B}_u(u) = B(u)$ gyengén X^*-ban. A $[B(u_k) - \tilde{B}_u(u_k), v] \to 0$ konvergenciához pedig (a 2.1. tétel demifolytonossági bizonyításában szereplő) (2.8)-hoz hasonlóan tagonként alkalmazhatjuk a Hölder-egyenlőtlenséget:

$$\left| \int_{Q_T} \left[a_i^{(l)}(t,x,u_k,Du_k;u_k) - a_i^{(l)}(t,x,u_k,Du_k;u) \right] D_i v^{(l)}\, dt\,dx \right| \le \tag{3.5}$$
$$\le \|a_i^{(l)}(\cdot\,, u_k(\cdot), Du_k(\cdot); u_k) - a_i^{(l)}(\cdot\,, u_k(\cdot), Du_k(\cdot); u)\|_{L^q(Q_T)} \cdot \|v\|_X.$$

Ebből következően elég belátnunk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \|a_i^{(l)}(\cdot\,, u_k(\cdot), Du_k(\cdot); u_k) - a_i^{(l)}(\cdot\,, u_k(\cdot), Du_k(\cdot); u)\|_{L^q(Q_T)} = 0 \tag{3.6}$$

minden $0 \le i \le n$-re és $1 \le l \le N$-re. Ez viszont F5 alapján valóban teljesül, hiszen u_k X-beli erős konvergenciájából következik az X-beli gyenge konvergencia, és az $X \hookrightarrow Y$ folytonos beágyazás (lásd 1.49. állítás) miatt az Y-beli erős konvergencia is.

3.3. Megjegyzés. A $B(u_k) - \tilde{B}_u(u_k) \to 0$ gyenge X^*-beli konvergencia helyett igaz az erősebb $[B(u_k) - \tilde{B}_u(u_k), v_k] \to 0$ állítás is, ahol (v_k) korlátos sorozat X-ben. Ugyanis $v = v_k$ esetén is a (3.5) egyenlőtlenségből (v_k) korlátossága miatt következik, hogy az előbbihez elég, ha (3.6) fennáll (u_k)-ra. Vegyük észre, hogy (3.6) teljesüléséhez (F5 miatt) (u_k) X-beli gyenge és Y-beli erős konvergenciája szükséges.

Koercitivitás. Az F4 feltétel szerint

$$\begin{aligned} &[B(u), u] \ge \\ &\ge \int_{Q_T} \big[g_2(u)\left(|u(t,x)|^p + |Du(t,x)|^p\right) - [k_2(u)](t,x)\big]\, dt\, dx = g_2(u)\|u\|_X^p - \|k_2(u)\|_{L^1(Q_T)}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

ahonnan a g_2, k_2 operátorokra vonatkozó (3.3) feltételt használva adódik, hogy

$$\lim_{\|u\|_X\to\infty} \frac{[B(u), u]}{\|u\|_X} \ge \lim_{\|u\|_X\to\infty} \left[g_2(u)\|u\|_X^{p-1} - \frac{\|k_2(u)\|_{L^1(Q_T)}}{\|u\|_X}\right] = +\infty.$$

Pszeudomonotonitás. Tegyük fel, hogy

$$u_k \to u \quad \text{gyengén } X\text{-ben} \qquad \text{és} \qquad D_t u_k \to D_t u \quad \text{gyengén } X^*\text{-ban}, \tag{3.8}$$

valamint

$$\limsup_{k\to\infty} [B(u_k), u_k - u] \le 0. \tag{3.9}$$

A részsorozatos trükköt alkalmazva elég igazolnunk, hogy egy $(\tilde{u}_k) \subset (u_k)$ részsorozatra

$$\lim_{k\to\infty} [B(\tilde{u}_k), \tilde{u}_k - u] = 0 \qquad \text{és} \qquad B(\tilde{u}_k) \to B(u) \quad \text{gyengén } X^*\text{-ban}.$$

A (3.8) konvergenciák miatt az 1.52. következmény alapján létezik $(\tilde{u}_k) \subset (u_k)$ részsorozat, melyre $\tilde{u}_k \to u$ Y-ban. Ekkor alkalmazhatjuk (a demifolytonosságról szóló rész végén szereplő) 3.3. megjegyzést, és azt kapjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} [B(\tilde{u}_k) - \tilde{B}_u(\tilde{u}_k), \tilde{u}_k - u] = 0. \tag{3.10}$$

Ezt (3.9)-el összevetve

$$\limsup_{k\to\infty} [\tilde{B}_u(\tilde{u}_k), \tilde{u}_k - u] \le 0 \tag{3.11}$$

adódik. Mivel $\tilde{B}_u$ pszeudomonoton $D(L)$-re nézve, így a (3.8) és (3.11) tulajdonságokból következik, hogy

$$\lim_{k\to\infty} [\tilde{B}_u(\tilde{u}_k), \tilde{u}_k - u] = 0 \qquad \text{és} \qquad \tilde{B}_u(\tilde{u}_k) \to \tilde{B}_u(u) (= B(u)) \quad \text{gyengén } X^*\text{-ban}. \tag{3.12}$$

Innen (3.10) miatt egyrészt $\lim\limits_{k\to\infty} [B(\tilde{u}_k), \tilde{u}_k - u] = 0$ következik. Másrészt a demifolytonosság bizonyításából tudjuk, hogy (ha $\tilde{u}_k \to u$ gyengén X-ben és erősen Y-ban, akkor) $\tilde{B}_u(\tilde{u}_k) - B(\tilde{u}_k) \to 0$ gyengén X^*-ban, így (3.12) második feléből a $B(\tilde{u}_k) \to B(u)$ gyenge X^*-beli konvergencia következik. Ezzel kész a 3.1. tétel bizonyítása.

3.4. Következmény. *Tegyük fel, hogy teljesülnek az F1–F5 feltételek. Ekkor tetszőleges $F \in X^*$ esetén a*

$$
\begin{aligned}
D_t u + B(u) &= F \\
u(0) &= 0
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

absztrakt feladatnak van $u \in W^{1,p}(0,T;V,H)$ megoldása.

Bizonyítás. Az állítás igazolása teljesen hasonlóan megy, mint a korábbi 2.3. következmény bizonyítása.

A fenti következmény szerint homogén kezdeti feltétel esetén mindig van megoldása a (3.13) feladatnak. Sajnos az F1–F5 feltételekből még nem következik, hogy inhomogén kezdeti feltétel esetén is mindig van megoldás. Az inhomogén eset vizsgálata (a szokott módon) a homogén esetre való visszavezetéssel történhet. Tekintsük a következő absztrakt feladatot:

$$
\begin{aligned}
D_t u + B(u) &= F \\
u(0) &= u_0,
\end{aligned}
$$

ahol $u_0 \in V$. Legyen $u_0(t,x) \equiv u_0(x)$ kiterjesztés $L^p(0,T;V)$-re, és keressük a megoldást $u = v + u_0$ alakban! Ekkor az előbbi feladat a következő alakot ölti:

$$
\begin{aligned}
D_t v + \hat{B}(v) &= F \\
v(0) &= 0,
\end{aligned}
$$

ahol $\hat{B}(v) = B(v + u_0)$. Elég tehát igazolnunk (az 1.33. tétel alapján), hogy a $\hat{B}\colon X \to X^*$ operátor korlátos, demifolytonos, koercitív és pszeudomonoton $D(L)$-re nézve. Könnyen beláthatjuk, hogy a koercitivitás kivételével a B operátor tulajdonságai átöröklődnek $\hat{B}$-ra.

A korlátosság nyilvánvaló, hiszen egy X-beli korlátos halmaz u_0-lal való eltoltja is korlátos, amelyet B korlátos X^*-beli halmazba képez.

A demifolytonosság szintén nyilvánvaló. Ugyanis, ha $v_k \to v$ X-ben, akkor $v_k + u_0 \to v + u_0$ X-ben. Ekkor B demifolytonossága miatt $B(v_k + u_0) \to B(v + u_0)$ gyengén X^*-ban.

A pszeudomonotonitáshoz tekintsünk egy (v_k) sorozatot, melyre $v_k \to v$ gyengén X-ben és $D_t v_k \to D_t v$ gyengén X^*-ban, valamint

$$
\limsup_{k\to\infty} [\hat{B}(v_k), v_k - v] \le 0. \tag{3.14}
$$

Mindez egyben azt is jelenti, hogy $v_k + u_0 \to v + u_0$ gyengén X-ben és $D_t(v_k + u_0) \to D_t(v + u_0)$ gyengén X^*-ban, továbbá

$$
\limsup_{k\to\infty} [B(v_k + u_0), (v_k + u_0) - (v + u_0)] \le 0.
$$

Ekkor B pszeudomonotonitása miatt az előbbi $\limsup$ valójában limesz, és egyenlőtlenség helyett egyenlőség áll fenn, így (3.14)-ben is ezek teljesülnek. Ezenkívül B pszeudomonotonitásából az is következik, hogy $B(v_k + u_0) \to B(v + u_0)$ gyengén X^*-ban, más szóval $\hat{B}(v_k) \to \hat{B}(v)$ gyengén X^*-ban. Tehát $\hat{B}$ valóban pszeudomonoton $D(L)$-re nézve.

Próbálkozzunk most a koercitivitás igazolásával! Vegyük észre (felhasználva (3.7)-et), hogy

$$
\begin{aligned}
\frac{[\hat{B}(v), v]}{\|v\|_X} &\ge \frac{[\hat{B}(v), v]}{\|v + u_0\|_X} = \frac{[B(v+u_0), v+u_0]}{\|v+u_0\|_X} - \frac{[B(v+u_0), u_0]}{\|v+u_0\|_X} \ge \\
&\ge g_2(v+u_0)\|v+u_0\|_X^{p-1} - \frac{\|k_2(v+u_0)\|_{L^1(Q_T)}}{\|v+u_0\|_X} - \frac{\|B(v+u_0)\|_{X^*}}{\|v+u_0\|_X}\|u_0\|_X.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Ha $\|v+u_0\|_X \to \infty$, akkor nyilván $\|v\|_X \to \infty$, így F4 miatt a jobb oldal első két tagja $+\infty$-hez tart. A harmadik tag nagyságrendjéről első ránézésre nem tudunk semmit, azonban (3.4) alapján becsülhetjük (felhasználva, hogy $\frac{p}{q} = p-1$):

$$\frac{\|B(v+u_0)\|_{X^*}}{\|v+u_0\|_X}\|u_0\|_X \leq \text{const}\cdot\left(g_1(v+u_0)\|v+u_0\|_X^{p-2} + \frac{\|k_1(v+u_0)\|_{L^q(Q_T)}}{\|v+u_0\|_X}\right)\|u_0\|_X.$$

Az lenne számunkra megfelelő, ha a fenti kifejezés „lassabban" tartana $+\infty$-hez, mint (3.15) jobb oldalán álló első két tag összege. Ennek alapján „természetes" az alábbi feltétel.

F+ Tegyük fel, hogy az F1, F4 feltételekben definiált g_1, k_1, g_2, k_2 operátorokra teljesülnek az alábbi összefüggések. Létezik $C_2 > 0$ konstans, melyre $g_2(v) \geq C_2$ minden $v \in L^p(0,T;V)$-re, továbbá

$$\lim_{\|v\|_{L^p(0,T;V)}\to\infty} \frac{g_1(v)}{\|v\|_{L^p(0,T;V)}} = 0, \tag{3.16}$$

$$\lim_{\|v\|_{L^p(0,T;V)}\to\infty} \frac{\|k_1(v)\|_{L^q(Q_T)}}{\|v\|^p_{L^p(0,T;V)}} = 0, \tag{3.17}$$

$$\lim_{\|v\|_{L^p(0,T;V)}\to\infty} \frac{\|k_2(v)\|_{L^1(Q_T)}}{\|v\|^p_{L^p(0,T;V)}} = 0. \tag{3.18}$$

3.5. Állítás. *Tegyük fel, hogy teljesülnek az F1–F5 és F+ feltételek. Ekkor tetszőleges $F \in X^*$ és $u_0 \in V$ esetén a*

$$D_t u + B(u) = F$$
$$u(0) = u_0$$

absztrakt feladatnak van $u \in W^{1,p}(0,T;V,H)$ megoldása.

Bizonyítás. Az előbbiek alapján már csak a $\hat{B}$ operátor koercitivitását kell igazolnunk. Sőt az is világos, hogy ehhez elegendő belátnunk, hogy $\|v\|_X \to \infty$ esetén

$$g_2(v)\|v\|_X^{p-1} - \frac{\|k_2(v)\|_{L^1(Q_T)}}{\|v\|_X} - \text{const}\cdot\left(g_1(v)\|v\|_X^{p-2} + \frac{\|k_1(v)\|_{L^q(Q_T)}}{\|v\|_X}\right) \to \infty.$$

Emeljünk ki a fenti kifejezésből $\|v\|_X^{p-1}$-et!

$$\|v\|_X^{p-1}\left[g_2(v) - \frac{\|k_2(v)\|_{L^1(Q_T)}}{\|v\|_X^p} - \text{const}\cdot\left(\frac{g_1(v)}{\|v\|_X} + \frac{\|k_1(v)\|_{L^q(Q_T)}}{\|v\|_X^p}\right)\right]$$

Az F+ feltétel szerint $\|v\|_X \to \infty$ esetén a szögletes zárójelben lévő kifejezések g_2-t kivéve 0-hoz tartanak, továbbá $g_2(v) \geq C_2$, következésképpen az egész kifejezés $+\infty$-hez tart. Tehát $\hat{B}$ valóban koercitív, és ezzel az állítás bizonyítása kész.

3.2. Példák

Ebben a részben az $a_i^{(l)}$ együttható függvényekre mutatunk példákat. Először egy általános alakban felírt példát adunk, amelyről belátjuk, hogy megfelelő feltételek mellett rendelkezik az előző részben megismert F1–F5 és F+ tulajdonságokkal. Ezt követően az általános alakban szereplő függvényekre és operátorokra adunk konkrét példákat.

3.2.1. Általános eset

Tegyük fel, hogy az $a_i^{(l)}$ $(i = 0, \dots, n;\ l = 1, \dots, N)$ függvények a következőképpen néznek ki:

(3.19) $a_i^{(l)}(t, x, \zeta_0, \zeta; v) = [H^{(l)}(v)](t, x) b_i^{(l)}(t, x, \zeta_0, \zeta) + [G^{(l)}(v)](t, x) d_i^{(l)}(t, x, \zeta_0, \zeta),$ ha $i \neq 0$, és

(3.20) $a_0^{(l)}(t, x, \zeta_0, \zeta; v) = [H^{(l)}(v)](t, x) b_0^{(l)}(t, x, \zeta_0, \zeta) + [G_0^{(l)}(v)](t, x) d_0^{(l)}(t, x, \zeta_0, \zeta),$

ahol a $b_i^{(l)}, d_i^{(l)}, H^{(l)}, G^{(l)}, G_0^{(l)}$ függvények ill. operátorok az alábbi feltételeknek tesznek eleget.

K1. Tegyük fel, hogy a $b_i^{(l)} : Q_T \times \mathbb{R}^{(n+1)N} \to \mathbb{R}$ és $d_i^{(l)} : Q_T \times \mathbb{R}^{(n+1)N} \to \mathbb{R}$ függvények teljesítik a Carathéodory-féle feltételeket. Azaz mérhetők (t, x)-ben minden $(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$ esetén, és folytonosak (ζ_0, ζ)-ban m.m. $(t, x) \in Q_T$ esetén $(i = 0, \dots, n;\ l = 1, \dots, N)$.

K2. Tegyük fel, hogy léteznek $c_1 > 0,\ 0 \le r < p - 1$ konstansok és $k_1 \in L^q(\Omega)$ függvény, melyekre

a) $|b_i^{(l)}(t, x, \zeta_0, \zeta)| \le c_1 \left(|\zeta_0|^{p-1} + |\zeta|^{p-1}\right) + k_1(x),$

b) $|d_i^{(l)}(t, x, \zeta_0, \zeta)| \le c_1 \left(|\zeta_0|^r + |\zeta|^r\right)$

m.m. $(t, x) \in Q_T$-re és minden $(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$-re $(i = 0, \dots, n;\ l = 1, \dots, N)$.

K3. Tegyük fel, hogy minden $\zeta \neq \eta \in \mathbb{R}^{nN}$ esetén

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(b_i^{(l)}(t, x, \zeta_0, \zeta) - b_i^{(l)}(t, x, \zeta_0, \eta)\right)(\zeta_i^{(l)} - \eta_i^{(l)}) > 0,$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(d_i^{(l)}(t, x, \zeta_0, \zeta) - d_i^{(l)}(t, x, \zeta_0, \eta)\right)(\zeta_i^{(l)} - \eta_i^{(l)}) \ge 0$

m.m. $(t, x) \in Q_T$-re és minden $\zeta_0 \in \mathbb{R}^N$-re $(l = 1, \dots, N)$.

K4. Tegyük fel, hogy létezik $c_2 > 0$ konstans és $k_2 \in L^1(\Omega)$ függvény úgy, hogy

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} b_i^{(l)}(t, x, \zeta_0, \zeta)\zeta_i^{(l)} \ge c_2(|\zeta_0^{(l)}|^p + |\zeta^{(l)}|^p) - k_2(x),$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i^{(l)}(t, x, \zeta_0, \zeta)\zeta_i^{(l)} \ge 0$

m.m. $(t, x) \in Q_T$-re és minden $(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$-re $(l = 1, \dots, N)$.

K5. a) Tegyük fel, hogy $H^{(l)} : L^p\big(0, T; (L^p(\Omega))^N\big) \to L^\infty(Q_T)$ korlátos és folytonos operátor, amelyre található olyan $c_3 > 0$ konstans, hogy minden $v \in L^p\big(0, T; (L^p(\Omega))^N\big)$ esetén $[H^{(l)}(v)](t, x) \ge c_3$ teljesül m.m. $(t, x) \in Q_T$-re $(l = 1, \dots, N)$.

b) Tegyük fel, hogy $G^{(l)}, G_0^{(l)} : L^p\big(0, T; (L^p(\Omega))^N\big) \to L^{\frac{p}{p-1-r}}(Q_T)$ korlátos és folytonos operátorok, ahol r a K2/b-ben definiált konstans. Továbbá minden $v \in L^p\big(0, T; (L^p(\Omega))^N\big)$ esetén $[G^{(l)}(v)](t, x) \ge 0$ m.m. $(t, x) \in Q_T$-re, és $l = 1, \dots, N$ esetén

$$\lim_{\|v\|_{L^p(0,T;V)} \to \infty} \frac{\displaystyle\int_{Q_T} |[G_0^{(l)}(v)](t, x)|^{\frac{p}{p-1-r}}\, dt\, dx}{\|v\|^p_{L^p(0,T;V)}} = 0. \qquad (3.21)$$

3.6. Állítás. *Ha teljesülnek a K1–K5 feltételek, akkor a* (3.19)–(3.20) *függvények kielégítik az F1–F5 feltételeket.*

A bizonyításhoz szükségünk van egy technikai jellegű lemmára, először ezt bizonyítjuk.

3.7. Lemma. *Vezessük be a következő operátorokat:*

$$[H^*(v)](t,x) := \sum_{l=1}^{N} |[H^{(l)}(v)](t,x)|,$$

$$[G^*(v)](t,x) := \sum_{l=1}^{N} |[G^{(l)}(v)](t,x)|,$$

$$[G_0^*(v)](t,x) := \sum_{l=1}^{N} |[G_0^{(l)}(v)](t,x)|.$$

Ekkor a H^*, G^* és G_0^* operátorok rendre teljesítik a K5-ben $H^{(l)}$-re, $G^{(l)}$-re és $G_0^{(l)}$-re kiszabott feltételeket.

Bizonyítás [3.7. lemma]. Egyedül a (3.21) összefüggés teljesülése nem nyilvánvaló. Ez viszont következik abból, hogy az integrandust becsülhetjük az (1.1) egyenlőtlenség segítségével, és így tagonként véve a limeszt, a határérték valóban 0.

Bizonyítás [3.6. tétel]. *F1 feltétel.* A K1 tulajdonság miatt nyilván teljesülnek az F1-ben szereplő Carathéodory-feltételek.

F2 feltétel. Legyen $i > 0$ és először $0 < r < p-1$. Nyilvánvaló, hogy

$$|[H^{(l)}(v)](t,x)b_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)| \le \|H^*(v)\|_{L^\infty(Q_T)} \left(c_1 \left(|\zeta_0|^{p-1} + |\zeta|^{p-1}\right) + k_1(x)\right).$$

Másrészt a Young-egyenlőtlenséget a $1 < p_1 = \dfrac{p-1}{r} < \infty$ és $q_1 = \dfrac{p-1}{p-1-r}$ konjugált kitevőkkel alkalmazva

$$(3.22)\quad |[G^{(l)}(v)](t,x)d_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)| \le |[G^*(v)](t,x)d_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)| \le$$
$$\le \frac{|d_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)|^{p_1}}{p_1} + \frac{|[G^*(v)](t,x)|^{q_1}}{q_1}.$$

Tovább becsülve K2/b és az (1.1) egyenlőtlenség segítségével azt kapjuk, hogy

$$(3.23)\quad |[G^{(l)}(v)](t,x)d_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)| \le \text{const}\cdot\left(|\zeta_0|^{rp_1} + |\zeta|^{rp_1} + |[G(v)](t,x)|^{q_1}\right) =$$
$$= \text{const}\cdot\left(|\zeta_0|^{p-1} + |\zeta|^{p-1} + |[G^*(v)](t,x)|^{q_1}\right).$$

A fenti becsléseket összevetve

$$(3.24)\quad |a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;v)| \le$$
$$\le \text{const}\cdot\left[\left(\|H^*(v)\|_{L^\infty(Q_T)} + 1\right)\left(|\zeta_0|^{p-1} + |\zeta|^{p-1}\right) + \|H^*(v)\|_{L^\infty(Q_T)}k_1(x) + |[G^*(v)](t,x)|^{q_1}\right]$$

adódik. Itt a H^* operátor korlátossága és az $X \hookrightarrow Y$ folytonos beágyazás miatt $\|H^*(\cdot)\|_{L^\infty(Q_T)}$ korlátos $X \to \mathbb{R}^+$ funkcionál. Másrészt $k_1 \in L^q(\Omega)$ folytán $\|H^*(\cdot)\|_{L^\infty(Q_T)}k_1$ korlátos $X \to L^q(Q_T)$ operátor. Vegyük észre azt is, hogy $q_1 q = \frac{p}{p-1-r}$, és így

$$(3.25)\quad \int_{Q_T} \left(|[G^*(v)](t,x)|^{q_1}\right)^q \,dt\,dx = \int_{Q_T} |[G^*(v)](t,x)|^{\frac{p}{p-1-r}} \,dt\,dx = \|G^*(v)\|_{L^{\frac{p}{p-1-r}}(Q_T)}^{\frac{p}{p-1-r}}.$$

Ez viszont G^* korlátossága folytán azt jelenti, hogy $|G^*(\cdot)|^{q_1}$ korlátos $X \to L^q(Q_T)$ operátor.

Most nézzük az $r = 0$ esetet! Vegyük észre, hogy ekkor $q_1 = 1$, ezenkívül K2/b-ből következően $|d_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)| \le 2c_1$. Így ebben az esetben is igaz egy (3.23)-hoz hasonló (erősebb) becslés:

$$|[G^{(l)}(v)](t,x)d_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)| \le \text{const}\cdot|[G^*(v)](t,x)|^{q_1}.$$

A fenti egyenlőtlenséget használva az $r = 0$ esetben is igaz a (3.24) becslés, így a bizonyítás az előbbi részhez hasonlóan fejezhető be. Ezzel az $i > 0$ esetben beláttuk az F2 tulajdonságot. Az $i = 0$ eset bizonyítása nyilván ugyanez, csak G^* helyett G_0^* szerepel.

F3 feltétel. Használjuk fel a $G^{(l)}$ és $H^{(l)}$ operátorok nemnegativitását és a K3 feltételt, ekkor tetszőleges $\zeta \neq \eta \in \mathbb{R}^{nN}$ esetén

$$\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;v) - a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\eta;v)\right)(\zeta_i^{(l)} - \eta_i^{(l)}) =$$

$$= \sum_{l=1}^{N}[H^{(l)}(v)](t,x)\sum_{i=1}^{n}\left(b_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta) - b_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\eta)\right)(\zeta_i^{(l)} - \eta_i^{(l)}) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{N}[G^{(l)}(v)](t,x)\sum_{i=1}^{n}\left(d_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta) - d_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\eta)\right)(\zeta_i^{(l)} - \eta_i^{(l)}) > 0.$$

F4 feltétel. Figyelembe véve a K4 és K5 feltételeket azt kapjuk, hogy

$$\text{(3.26)}\quad \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=0}^{n} a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;v)\zeta_i^{(l)} = \sum_{l=1}^{N}[H^{(l)}(v)](t,x)\sum_{i=0}^{n} b_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)\zeta_i^{(l)} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{N}[G^{(l)}(v)](t,x)\sum_{i=1}^{n} d_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)\zeta_i^{(l)} + \sum_{l=1}^{N}[G_0^{(l)}(v)](t,x)d_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)\zeta_0^{(l)} \geq$$

$$\geq \sum_{l=1}^{N}\left[c_3c_2(|\zeta_0^{(l)}|^p + |\zeta^{(l)}|^p) - c_3k_2(x)\right] + \sum_{l=1}^{N}[G_0^{(l)}(v)](t,x)d_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)\zeta_0^{(l)} \geq$$

$$\geq \frac{c_3c_2}{N^{p-1}}(|\zeta_0|^p + |\zeta|^p) - c_3Nk_2(x) + \sum_{l=1}^{N}[G_0^{(l)}(v)](t,x)d_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)\zeta_0^{(l)}.$$

Itt az utolsó lépésben az (1.1) egyenlőtlenséget használtuk. Legyen $c' = \dfrac{c_3c_2}{N^{p-1}} > 0$ és vizsgáljuk a fenti egyenlőség jobb oldalán álló szummát. Alkalmazzuk az ε-egyenlőtlenséget a p, q kitevőkkel, ekkor kapjuk, hogy

$$|[G_0^{(l)}(v)](t,x)d_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)\zeta_0^{(l)}| \leq$$

$$\leq |[G_0^*(v)](t,x)d_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)\zeta_0^{(l)}| \leq \frac{\varepsilon^p}{p}|\zeta_0^{(l)}|^p + \frac{\varepsilon^{-q}}{q}|[G_0^*(v)](t,x)d_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)|^q.$$

Legyen $\varepsilon > 0$, melyre $\dfrac{\varepsilon^p}{p} \leq \dfrac{c'}{3N}$, ekkor az első tag legfeljebb akkora, mint $\dfrac{c'}{3N}(|\zeta_0|^p + |\zeta|^p)$. A második tagban pedig az ε-egyenlőtlenséget a $\mu > 0$ (később meghatározandó) számmal és a korábban (az F2 feltétel bizonyításában) bevezetett p_1, q_1 kitevőkkel alkalmazva (3.22), (3.23)-hoz hasonló módon a következő becslés adódik:

$$|[G_0^{(l)}(v)](t,x)d_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)|^q \leq \text{const}\cdot\left(\mu^{p_1}(|\zeta_0|^{p-1} + |\zeta|^{p-1}) + \mu^{-q_1}|[G_0^*(v)](t,x)|^{q_1}\right)^q \leq$$

$$\leq c^*\mu^{p_1q}(|\zeta_0|^p + |\zeta|^p) + c^*\mu^{-q_1q}|[G_0^*(v)](t,x)|^{q_1q}.$$

Válasszuk μ-t úgy, hogy $\dfrac{c^*\mu^{p_1q}\varepsilon^{-q}}{q} \leq \dfrac{c'}{3N}$ teljesüljön. Ekkor az előző két becslésből adódik, hogy

$$|[G_0^{(l)}(v)](t,x)d_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)\zeta_0^{(l)}| \leq \frac{c'}{3N}(|\zeta_0|^p + |\zeta|^p) + d^*|[G_0^*(v)](t,x)|^{q_1q}.$$

Ezt (3.26)-ba behelyettesítve

$$\text{(3.27)}\quad \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=0}^{n} a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;v)\zeta_i^{(l)} \geq \frac{c'}{3}(|\zeta_0|^p + |\zeta|^p) - \underbrace{(c_3Nk_2(x) + Nd^*|[G_0^*(v)](t,x)|^{q_1q})}_{=:\,[h(v)](t,x)}$$

adódik, ahol (3.25)-ből (és $k_2 \in L^1(\Omega)$-ból) következően $h(v) \in L^1(Q_T)$. Ráadásul

$$\|h(v)\|_{L^1(Q_T)} \leq c_3 NT\|k_2\|_{L^1(\Omega)} + Nd^* \int_{Q_T} |[G_0^*(v)](t,x)|^{\frac{p}{p-1-r}}\, dt\, dx.$$

Mivel a lemma szerint G_0^* teljesíti a (3.21) összefüggést, így

$$\lim_{\|v\|_X \to \infty} \frac{\|h(v)\|_{L^1(Q_T)}}{\|v\|_X^p} = 0, \tag{3.28}$$

ezért

$$\lim_{\|v\|_X \to \infty} \|v\|_X^{p-1} \left(\frac{c'}{3} - \frac{\|h(v)\|_{L^1(Q_T)}}{\|v\|_X^p} \right) = \lim_{\|v\|_X \to \infty} \frac{c'}{3} \|v\|_X^{p-1} = +\infty.$$

Ezzel az F4 tulajdonságot beláttuk.

F5 feltétel. Legyen $i > 0$ és $0 < r < p-1$. Tegyük fel, hogy $u_k \to u$ gyengén X-ben és a norma szerint Y-ban. Ekkor persze (u_k) korlátos X-ben. Így K2/a miatt $\left(b_i^{(l)}(\cdot\,, u_k(\cdot), Du_k(\cdot))\right)_{k\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat $L^q(Q_T)$-ben, ugyanis (2.6)-hoz hasonló módon látható, hogy

$$\int_{Q_T} |b_i^{(l)}(t,x,u_k(t,x),Du_k(t,x))|^q\, dt\, dx \leq$$
$$\leq \text{const} \cdot \int_{Q_T} \left[|u_k(t,x)|^{(p-1)q} + |Du_k(t,x)|^{(p-1)q} + |k_1(x)|^q \right] dt\, dx \leq$$
$$\leq \text{const} \cdot \left(\|u_k\|_X^p + T\|k_1\|_{L^q(\Omega)}^q \right) \leq K.$$

Vegyük észre, azt is hogy $\left(d_i^{(l)}(\cdot\,, u_k(\cdot), Du_k(\cdot))\right)_{k\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat $L^{\frac{p}{r}}(Q_T)$-ben, hiszen K2/b miatt

$$\int_{Q_T} |d_i^{(l)}(t,x,u_k(t,x),Du_k(t,x))|^{\frac{p}{r}}\, dt\, dx \leq \int_{Q_T} \left[|u_k(t,x)|^{r\frac{p}{r}} + |Du_k(t,x)|^{r\frac{p}{r}} \right] dt\, dx = \|u_k\|_X^p \leq M.$$

Ezek alapján egyrészt

$$\int_{Q_T} \left| \left([H^{(l)}(u_k)](t,x) - [H^{(l)}(u)](t,x) \right) b_i^{(l)}(t,x,u_k(t,x),Du_k(t,x)) \right|^q dt\, dx \leq$$
$$\leq \|H^{(l)}(u_k) - H^{(l)}(u)\|_{L^\infty(Q_T)}^q \int_{Q_T} |b_i^{(l)}(t,x,u_k(t,x),Du_k(t,x))|^q\, dt\, dx \leq$$
$$\leq K\|H^{(l)}(u_k) - H^{(l)}(u)\|_{L^\infty(Q_T)} \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

felhasználva $H^{(l)}$ folytonosságát (és (u_k) Y-beli konvergenciáját). Másrészről a p_1, q_1 kitevőkkel (lásd az F2 feltétel bizonyításában) alkalmazott Hölder-egyenlőtlenség szerint

$$\int_{Q_T} \left| \left([G^{(l)}(u_k)](t,x) - [G^{(l)}(u)](t,x) \right) d_i^{(l)}(t,x,u_k(t,x),Du_k(t,x)) \right|^q dt\, dx \leq$$
$$\leq \left(\int_{Q_T} |d_i^{(l)}(t,x,u_k(t,x),Du_k(t,x)|^{\frac{p}{p-1}\cdot\frac{p-1}{r}}\, dt\, dx \right)^{\frac{1}{p_1}} \times$$
$$\times \left(\int_{Q_T} |[G^{(l)}(u_k)](t,x) - [G^{(l)}(u)](t,x)|^{\frac{p}{p-1}\cdot\frac{p-1}{p-1-r}}\, dt\, dx \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq$$
$$\leq M^{\frac{1}{p_1}} \|G^{(l)}(u_k) - G^{(l)}(u)\|_{L^{\frac{p}{p-1-r}}(Q_T)}^{\frac{p-1-r}{p}} \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

hiszen $G^{(l)}$ folytonos operátor (és (u_k) konvergens Y-ban). Mindez pedig azt jelenti, hogy

$$\|a_i^{(l)}(\cdot\,, u_k(\cdot), Du_k(\cdot); u_k) - a_i^{(l)}(\cdot\,, u_k(\cdot), Du_k(\cdot); u)\|_{L^q(Q_T)} \leq \tag{3.29}$$
$$\leq \|(H^{(l)}(u_k) - H^{(l)}(u)) b_i^{(l)}(\cdot\,, u_k(\cdot), Du_k(\cdot))\|_{L^q(Q_T)} +$$
$$+ \|(G^{(l)}(u_k) - G^{(l)}(u)) d_i^{(l)}(\cdot\,, u_k(\cdot), Du_k(\cdot))\|_{L^q(Q_T)} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Ha $r = 0$, akkor (3.29) jobb oldalán az első tag továbbra is 0-hoz tart. A másik tag pedig automatikusan 0-hoz tart, hiszen ekkor $\frac{p}{p-1-r} = \frac{p}{p-1} = q$ (vagyis a G operátor $L^q(Q_T)$-be képez folytonosan) és $|d_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)| \le 2c_1$, így

$$\|(G^{(l)}(u_k) - G^{(l)}(u))d_i^{(l)}(\cdot\,, u_k(\cdot), Du_k(\cdot))\|_{L^q(Q_T)} \le 2c_1\|(G^{(l)}(u_k) - G^{(l)}(u))\|_{L^q(Q_T)} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Természetesen $i = 0$ esetén hasonló igaz, $G^{(l)}$ helyett $G_0^{(l)}$-lel. Ez éppen, amit bizonyítani akartunk. Ezzel a 3.6. tétel bizonyítása kész.

Most vizsgáljuk meg, vajon az F+ feltételt is teljesíti-e a fenti általános példa. Először vegyük észre ((3.24) és (3.27) alapján), hogy most $g_1(v) = \|H^*(v)\|_{L^\infty(Q_T)} + 1$, $g_2(v) = \frac{c'}{3}$, továbbá $k_1(v) = \|H^*(v)\|_{L^\infty(Q_T)}k_1(x) + |[G^*(v)](t,x)|^{q_1} + |[G_0^*(v)](t,x)|^{q_1}$ és $k_2(v) = h(v)$. (Itt k_1-be azért került bele G_0^* is, mert (3.24) az $i \ne 0$ esetben érvényes, $i = 0$ esetén G^* helyett G_0^* szerepel.)

Az előbbiek alapján az F+ feltétel g_2-re vonatkozó része nyilván teljesül. Sőt a k_2-re vonatkozó (3.18) feltétel is fennáll, hiszen éppen ezt mondja ki (3.28).

A g_1-re vonatkozó feltételhez nyilván elegendő feltennünk, hogy minden l-re

$$\lim_{\|v\|_{L^p(0,T;V)}\to\infty} \frac{\|H^{(l)}(v)\|_{L^\infty(Q_T)}}{\|v\|_{L^p(0,T;V)}} = 0. \tag{3.30}$$

A k_1-re vonatkozó (3.17) feltétel (a háromszög-egyenlőtlenség miatt) elegendő, ha tagonként teljesül. Az első tagra fennáll (3.17), ha az erősebb (3.30) teljesül. Mivel $\|\,|G_0^*(v)|^{q_1}\|_{L^q(Q_T)} = \|\,|G_0^*(v)|^{qq_1}\|_{L^1(Q_T)}^{\frac{1}{q}}$, így $q > 1$ és (3.28) miatt k_1-ben az utolsó tag is teljesíti (3.17)-et. A második tag is teljesíti, ha feltesszük, hogy G^*-ra is fennáll (3.21). Más szóval, elegendő ha minden l-re $G^{(l)}$ teljesíti (3.21)-et. Végeredményben az F+ feltétel a $H^{(l)}$ és $G^{(l)}$ operátorokra jelent plusz feltételt.

3.2.2. Konkrét példák

A $H^{(l)}$ operátorok

Legyen $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre létezik $c > 0$ konstans úgy, hogy $\phi(\tau) \ge c$ minden $\tau \in \mathbb{R}$ esetén. Értelmezzük $L^p\big(0,T;(L^p(\Omega))^N\big)$-n az alábbi operátorokat:

$$[\tilde{H}_1(v)](t,x) := \phi\left(\int_{Q_t}\sum_{j=1}^N b_j(\tau,\xi)v^{(j)}(\tau,\xi)\,d\tau\,d\xi\right), \quad \text{ahol } b_j \in L^q(Q_T) \ (1 \le j \le N),$$

$$[\tilde{H}_2(v)](t,x) := \phi\left(\left[\int_{Q_t}|v(\tau,\xi)|^\alpha\,d\tau\,d\xi\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right), \quad \text{ahol } 0 < \alpha \le p.$$

3.8. Állítás. *A fenti $\tilde{H}_1$ és $\tilde{H}_2$ operátorok teljesítik a K5/a feltételt.*

Bizonyítás. Nézzük először a $\tilde{H}_1$ operátor esetét. A Hölder-egyenlőtlenség miatt $b_jv^{(j)} \in L^1(Q_T)$, vagyis $\tilde{H}_1$ jól definiált, és nyilván $\tilde{H}_1(v) \ge c > 0$. Másrészt $\|v\|_Y \le K$ esetén

$$\left|\int_{Q_t}\sum_{j=1}^N b_jv^{(j)}\right| \le \sum_{j=1}^N\int_{Q_T}|b_jv^{(j)}| \le K\sum_{j=1}^N\|b_j\|_{L^q(Q_T)},$$

amiből ϕ folytonossága miatt következik, hogy $\tilde{H}_1$ valóban $L^\infty(Q_T)$-be képez, és korlátos. Ezenkívül, ha $v_k \to v$ $L^p\big(0,T;(L^p(\Omega))^N\big)$-ben, akkor

$$\left|\int_{Q_t}\sum_{j=1}^N b_jv_k^{(j)} - \int_{Q_t}\sum_{j=1}^N b_jv^{(j)}\right| \le \sum_{j=1}^N\left(\int_{Q_T}|b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{Q_T}|v_k^{(j)} - v^{(j)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0,$$

és így ϕ folytonosságából adódóan $[\tilde{H}_1(v_k)](t,x) \to [\tilde{H}_1(v)](t,x)$ minden $(t,x) \in Q_T$-re. Ekkor viszont $\tilde{H}_1(v_k) \to \tilde{H}_1(v)$ teljesül $L^\infty(Q_T)$-ben is. Ezzel az operátor folytonosságát is beláttuk.

A $\tilde{H}_2$ operátor esetének bizonyítása teljesen hasonlóan megy, csak abban még fel kell használnunk az (1.1) egyenlőtlenséget is.

3.9. Állítás. *Tegyük fel, hogy $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre léteznek C, c és $\varrho \le 1$ pozitív konstansok úgy, hogy $\phi(\tau) \le C \cdot |\tau|^{1-\varrho} + c$ minden $\tau \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor a $\tilde{H}_1$, $\tilde{H}_2$ operátorok teljesítik a (3.30) összefüggést.*

Bizonyítás. Csak a $\tilde{H}_2$ operátor esetét igazoljuk. A feltételből és a Hölder-egyenlőtlenségből adódóan

$$\|\tilde{H}_2(v)\|_{L^\infty(Q_T)} \le \text{const} \cdot \left(\left[\int_{Q_T} |v(\tau,\xi)|^\alpha \, d\tau \, d\xi \right]^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{1-\varrho} + c \le$$

$$\le \text{const} \cdot \left(\left[\int_{Q_T} |v(\tau,\xi)|^{\alpha \cdot \frac{p}{\alpha}} \, d\tau \, d\xi \right]^{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{p}} \cdot \left(\int_{Q_T} 1 \right)^{\frac{p}{p-\alpha}} \right)^{1-\varrho} + c \le \text{const} \cdot \|v\|_X^{1-\varrho} + c.$$

($\alpha = p$ esetén természetesen nincs szükség a Hölder-egyenlőtlenségre.) Ebből következően

$$\lim_{\|v\|_X \to \infty} \frac{\|\tilde{H}_2(v)\|_{L^\infty(Q_T)}}{\|v\|_X} \le \lim_{\|v\|_X \to \infty} \left(\text{const} \cdot \|v\|_X^{-\varrho} + \frac{c}{\|v\|_X} \right) = 0.$$

Éppen ezt akartuk belátni.

A $G^{(l)}$, $G_0^{(l)}$ operátorok

Legyen $\psi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre létezik $C > 0$ és $0 < r_0 < p-1$ konstans, hogy minden $\tau \in [0,\infty)$ esetén a $|\psi(\tau)| \le C \cdot |\tau|^{p-1-r_0}$ becslés érvényes.

Tekintsük ekkor a következő, $L^p\big(0,T;(L^p(\Omega))^N\big)$-en értelmezett operátorokat:

$$[\tilde{G}_1(v)](t,x) := \psi\left(\left| \int_0^t \sum_{j=1}^N a_j(\tau,x) |v^{(j)}(\tau,x)|^\alpha \, d\tau \right|^{\frac{1}{\alpha}} \right),$$

$$[\tilde{G}_2(v)](t,x) := \psi\left(\left| \int_\Omega \sum_{j=1}^N a_j(t,\xi) |v^{(j)}(t,\xi)|^\alpha \, d\xi \right|^{\frac{1}{\alpha}} \right),$$

ahol $a_j \in L^\infty(Q_T)$ $(1 \le j \le N)$ és $0 < \alpha \le p$.

3.10. Állítás. *A fenti $\tilde{G}_i$ operátorok tetszőleges $0 \le r < r_0$ számmal teljesítik a $G_0^{(l)}$-re vonatkozó K5/b feltételt. (Ha $\psi \ge 0$, akkor nyilván $\tilde{G}_i$ a $G^{(l)}$-re vonatkozó nemnegativitási feltételt is teljesíti.)*

Bizonyítás. Szorítkozzunk a $\tilde{G}_1$ operátorra, $\tilde{G}_2$ teljesen hasonlóan vizsgálható. Legyen $0 \le r < r_0$, ekkor a feltételek alapján nyilvánvaló, hogy

$$\int_{Q_T} |[\tilde{G}_1(v)](t,x)|^{\frac{p}{p-1-r}} \, dt \, dx \le \int_{Q_T} \text{const} \cdot \left(\sum_{j=1}^N \int_0^T \|a_j\|_{L^\infty(Q_T)} |v^{(j)}(\tau,x)|^\alpha d\tau \right)^{\frac{p\lambda}{\alpha}} dt \, dx \le$$

$$\le \text{const} \cdot \int_{Q_T} \left(\sum_{j=1}^N \int_0^T |v(\tau,x)|^\alpha d\tau \right)^{\frac{p\lambda}{\alpha}} dt \, dx = \text{const} \cdot \int_{Q_T} \left(\int_0^T |v(\tau,x)|^\alpha d\tau \right)^{\frac{p\lambda}{\alpha}} dt \, dx,$$

ahol $0<\lambda=\frac{p-1-r_0}{p-1-r}<1$. Alkalmazzuk a külső integrálra a Hölder-egyenlőtlenséget a $p_1=\frac{1}{\lambda}(>1)$ és $q_1=\frac{p_1}{p_1-1}$ konjugált kitevőkkel. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\int_{Q_T}\left(\int_0^T|v(\tau,x)|^\alpha d\tau\right)^{\frac{p\lambda}{\alpha}}dt\,dx\le \text{const}\cdot\left(\int_{Q_T}\left(\int_0^T|v(\tau,x)|^\alpha d\tau\right)^{\frac{p\lambda}{\alpha}\cdot\frac{1}{\lambda}}dtdx\right)^{\lambda}\cdot\left(\int_{Q_T}1^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}}=$$

$$=\text{const}\cdot\left(\int_{Q_T}\left(\int_0^T|v(\tau,x)|^\alpha d\tau\right)^{\frac{p}{\alpha}}dt\,dx\right)^{\lambda}$$

Most újból a Hölder-egyenlőtlenség segítségével becsülhetünk, méghozzá a $\frac{p}{\alpha}$ és $q'=\frac{p}{p-\alpha}$ kitevőkkel, majd használjuk fel a Fubini-tételt. Így kapjuk, hogy

$$\int_{Q_T}\left(\int_0^T|v(\tau,x)|^\alpha d\tau\right)^{\frac{p}{\alpha}}dt\,dx\le\int_{Q_T}\left[\left(\int_0^T|v(\tau,x)|^{\alpha\cdot\frac{p}{\alpha}}d\tau\right)^{\frac{\alpha}{p}}\cdot\left(\int_0^T1^{q'}d\tau\right)^{\frac{1}{q'}}\right]^{\frac{p}{\alpha}}dt\,dx=$$

$$=\text{const}\cdot\int_{Q_T}\int_0^T|v(\tau,x)|^p\,d\tau\,dx\,dt=\text{const}\cdot\int_{Q_T}|v(t,x)|^p\,dt\,dx\le\text{const}\cdot\|v\|_X^p.$$

($\alpha=p$ esetén $q'=\infty$, de ekkor nincs is szükség a becslésre.) Az előbbieket összefoglalva azt kaptuk, hogy

$$\int_{Q_T}|[\tilde{G}_1(v)](t,x)|^{\frac{p}{p-1-r}}\,dt\,dx\le\text{const}\cdot\|v\|_X^{p\lambda}.$$

Innen világosan látszik, hogy $\tilde{G}_1$ valóban $L^{\frac{p}{p-1-r}}(Q_T)$-be képez, korlátos, továbbá

$$\lim_{\|v\|_X\to\infty}\frac{\int_{Q_T}|[\tilde{G}_1(v)](t,x)|^{\frac{p}{p-1-r}}\,dt\,dx}{\|v\|_X^p}=\lim_{\|v\|_X\to\infty}\|v\|_X^{p(\lambda-1)}=0,$$

hiszen $\lambda-1<0$. Az operátor folytonossága az előző állításhoz hasonlóan látható be.

3.11. Megjegyzés. A lemmához hasonló meggondolás mutatja, hogy a fenti operátorok (nemnegatív) lineáris kombinációi is kielégítik a K5/a, illetve K5/b feltételeket.

A $b_i^{(l)}$, $d_i^{(l)}$ függvények

Először (a szakasz címével ellentétben) egy általános példával kezdjük. Legyen $b_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta):=\tilde{b}_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta_i^{(l)})$ $(i\neq0;\ l=1,\dots,N)$, ahol $\tilde{b}_i^{(l)}\colon Q_T\times\mathbb{R}^{N+1}\to\mathbb{R}$ Carathéodory-féle függvény (azaz mérhető (t,x)-ben és folytonos $(\zeta_0,\zeta_i^{(l)})$-ben), melyre a következő feltételek teljesülnek. A $\zeta_i^{(l)}\mapsto\tilde{b}_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta_i^{(l)})$ függvény szigorúan monoton növő, továbbá

$$|\tilde{b}_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta_i^{(l)})|\le c_1(|\zeta_0|^{p-1}+|\zeta_i^{(l)}|^{p-1})+k_1(x),$$

$$\tilde{b}_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta_i^{(l)})\zeta_i^{(l)}\ge c_2|\zeta_i^{(l)}|^p-k_2(x),$$

ahol $c_1>0,k_1\in L^q(\Omega)$ és $k_2\in L^1(\Omega)$. Végül a $b_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)$ $(l=1,\dots,N)$ Carathéodory-féle függvények legyenek olyanok, melyekre

$$|b_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)|\le c_1(|\zeta_0|^{p-1}+|\zeta|^{p-1})+k_1(x),$$

$$b_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)\zeta_0^{(l)}\ge c_2|\zeta_0^{(l)}|^p-k_2(x).$$

Ekkor a $b_i^{(l)}$ függvények nyilvánvalóan kielégítik a K1, K2/a feltételeket. A K3/a feltétel a monotonitás, a K4/a feltétel pedig az (1.1) egyenlőtlenség felhasználásával közvetlenül adódik.

A legegyszerűbb konkrét példa a fenti tulajdonságú függvényekre a $b_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta) = \zeta_i^{(l)}|\zeta_i^{(l)}|^{p-2}$ függvények ($i = 0,\dots,n$; $l = 1,\dots,N$).

Az előzőekhez hasonlóan legyen $d_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta) := \tilde{d}_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta_i^{(l)})$ ($i \neq 0$; $l = 1,\dots,N$), ahol $\tilde{d}_i^{(l)} : Q_T \times \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$ Carathéodory-féle függvény, melyre a következő feltételek teljesülnek. A $\zeta_i^{(l)} \mapsto \tilde{d}_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta_i^{(l)})$ függvény monoton nemcsökkenő és $\tilde{d}_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,0) = 0$, továbbá

$$|\tilde{d}_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta_i^{(l)})| \leq c_1(|\zeta_0|^r + |\zeta_i^{(l)}|^r) + k_1(x),$$

ahol $0 \leq r < p-1$ és $c_1 > 0$, $k_1 \in L^q(\Omega)$. Az $i = 0$ esetben $d_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)$ legyen Carathéodory-féle függvény, melyre

$$|d_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta)| \leq c_1(|\zeta_0|^r + |\zeta|^r) + k_1(x),$$

ahol $c_1 > 0$ és $k_1 \in L^q(\Omega)$ ($l = 1,\dots,N$). Ebben az esetben a $d_i^{(l)}$ függvényekre a K1, K2/b, K3/b feltételek nyilvánvalóan teljesülnek. K4/b-hez pedig vegyük észre, hogy a feltételekből adódóan $i \neq 0$ esetén $\tilde{d}_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta_i^{(l)})\zeta_i^{(l)} \geq 0$.

Konkrét példaként $r > 0$ esetén vegyük a $d_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta) = \zeta_i^{(l)}|\zeta_i^{(l)}|^{r-1}$ függvényeket. E függvényeket $0 < r < 1$ esetén a 0-ban természetesen 0-ként definiáljuk, hiszen így lesznek folytonosak. Ha $r = 0$, akkor könnyen látható, hogy a legegyszerűbb példa a $d_i^{(l)} \equiv 0$ ($i \neq 0$) és $d_0^{(l)} \equiv c_1$ függvények.

Két másik fontos (de a fenti általánosba nem beleillő) példa a $b_i^{(l)}$ függvényekre a következő. Legyen

$$b_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta) = \zeta_i^{(l)}|\zeta|^{p-2} \quad (i \neq 0),$$
$$b_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta) = \zeta_0^{(l)}|\zeta_0|^{p-2},$$

vagy

$$b_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta) = \zeta_i^{(l)}|\zeta^{(l)}|^{p-2} \quad (i \neq 0),$$
$$b_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta) = \zeta_0^{(l)}|\zeta_0^{(l)}|^{p-2}.$$

Az utóbbi függvények esetén

$$\sum_{i=1}^{n} D_i b_i^{(l)}(t,x,u,Du) = \sum_{i=1}^{n} D_i(D_i u^{(l)}|Du^{(l)}|^{p-2}) = \operatorname{div}\big(Du^{(l)}|Du^{(l)}|^{p-2}\big).$$

A fenti egyenlőség jobb oldalán álló operátort szokás p-Laplace-operátornak hívni.

E függvényekre csak a K3/a tulajdonság nem nyilvánvaló. Ebben az esetben K3/a-nál egy sokkal erősebb alsó becslést igazolunk. Egyrészt azért, mert a későbbiekben szükségünk lesz erre, másrészt a bizonyítás igen tanulságos. Ilyen becslés egyébként mindhárom fent említett konkrét példában igazolható.

3.12. Állítás. *Létezik $c > 0$ konstans, melyre minden $\zeta^{(l)} = (\zeta_1^{(l)},\dots,\zeta_n^{(l)})$, $\eta^{(l)} = (\eta_1^{(l)},\dots,\eta_n^{(l)})$ $\mathbb{R}^n$-beli vektorra*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\zeta_i^{(l)}|\zeta^{(l)}|^{p-2} - \eta_i^{(l)}|\eta^{(l)}|^{p-2}\right)(\zeta_i^{(l)} - \eta_i^{(l)}) \geq c \cdot |\zeta^{(l)} - \eta^{(l)}|^p.$$

Bizonyítás. Az állítás $\zeta^{(l)} = \eta^{(l)}$ esetén triviális, sőt $p = 2$ esetén is nyilvánvalóan teljesül, hiszen

$$\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i^{(l)} - \eta_i^{(l)})(\zeta_i^{(l)} - \eta_i^{(l)}) = |\zeta^{(l)} - \eta^{(l)}|^2.$$

A továbbiakban legyen $p > 2$, és rögzítsük a $\zeta^{(l)} \neq \eta^{(l)}$ $\mathbb{R}^n$-beli vektorokat. Vezessük be az $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_i(x) := x_i|x|^{p-2}$ függvényeket, továbbá legyen $g_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, melyre $g_i(\tau) := f_i(\eta^{(l)} + \tau(\zeta^{(l)} - \eta^{(l)}))$ $(i = 1, \dots, n)$. Vegyük észre, hogy ekkor

$$
\begin{aligned}
(3.31)\quad & \sum_{i=1}^{n} \left(\zeta_i^{(l)} |\zeta^{(l)}|^{p-2} - \eta_i^{(l)} |\eta^{(l)}|^{p-2} \right) (\zeta_i^{(l)} - \eta_i^{(l)}) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (g_i(1) - g_i(0)) (\zeta_i^{(l)} - \eta_i^{(l)}) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 g_i'(\tau)(\zeta_i^{(l)} - \eta_i^{(l)}) d\tau = \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \left(\eta^{(l)} + \tau(\zeta^{(l)} - \eta^{(l)}) \right) (\zeta_j^{(l)} - \eta_j^{(l)})(\zeta_i^{(l)} - \eta_i^{(l)}) d\tau.
\end{aligned}
$$

Könnyen látható, hogy

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = (p-2)x_i x_j |x|^{p-4}, \quad \text{ha } i \neq j, \text{ és} \\
&\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) = |x|^{p-2} + (p-2)x_i^2 |x|^{p-4}.
\end{aligned}
$$

(Az is könnyen meggondolható, hogy a fenti függvények $p > 2$ esetén $x = 0$-ban is léteznek és folytonosak.) Ekkor tetszőleges $\xi \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) \xi_i \xi_j &= \sum_{i=1}^{n} |x|^{p-2} \xi_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (p-2) x_i x_j |x|^{p-4} \xi_i \xi_j = \\
&= |x|^{p-2} |\xi|^2 + (p-2) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i \right)^2 |x|^{p-4} \geq |x|^{p-2} |\xi|^2.
\end{aligned}
$$

Ezt az összefüggést alkalmazzuk a (3.31) egyenlet jobb oldalára. Ekkor kapjuk, hogy

$$
\sum_{i=1}^{n} \left(\zeta_i^{(l)} |\zeta^{(l)}|^{p-2} - \eta^{(l)} |\eta^{(l)}|^{p-2} \right) (\zeta_i^{(l)} - \eta_i^{(l)}) \geq \text{const} \cdot \int_0^1 |\eta^{(l)} + \tau(\zeta^{(l)} - \eta^{(l)})|^{p-2} |\zeta^{(l)} - \eta^{(l)}|^2 \, d\tau.
$$

Ebből az 1.3 állításban szereplő egyenlőtlenség segítségével azonnal adódik, hogy

$$
\sum_{i=1}^{n} \left(\zeta_i^{(l)} |\zeta^{(l)}|^{p-2} - \eta^{(l)} |\eta_i^{(l)}|^{p-2} \right) (\zeta_i^{(l)} - \eta_i^{(l)}) \geq \text{const} \cdot |\zeta^{(l)} - \eta^{(l)}|^p.
$$

Éppen ezt akartuk belátni.

3.13. Megjegyzés. A $\zeta_i^{(l)} |\zeta_i^{(l)}|^{p-2}$ és $\zeta_i^{(l)} |\zeta|^{p-2}$ függvények esetén teljesen hasonló módon ugyanez a becslés igazolható. A fentiek alapján az is könnyen belátható, hogy

$$
\left(\zeta_0^{(l)} |\zeta_0^{(l)}|^{p-2} - \eta_0^{(l)} |\eta_0^{(l)}|^{p-2} \right) (\zeta_0^{(l)} - \eta_0^{(l)}) \geq \text{const} \cdot |\zeta_0^{(l)} - \eta_0^{(l)}|^p,
$$

és

$$
\sum_{l=1}^{N} \left(\zeta_0^{(l)} |\zeta_0|^{p-2} - \eta_0^{(l)} |\eta_0|^{p-2} \right) (\zeta_0^{(l)} - \eta_0^{(l)}) \geq \text{const} \cdot |\zeta_0 - \eta_0|^p.
$$

Sőt, a fentiek valójában $p > 1$ esetén is igazak. Ehhez meg kell gondolnunk, hogy az 1.3 állítás egyenlőtlensége is igaz marad $s > -1$ esetén, esetleg improprius integrál értelemben, és a fenti bizonyítás is néhol improprius értelemben lesz igaz. A részletes bizonyítást (e technikai nehézségek miatt) elhagyjuk.

3.3. Egyértelműség

A most következő rész logikailag talán a megoldások létezéséről szóló szakaszba illene. Annak oka, hogy mégsem ott tárgyaljuk a következő. A megoldás egyértelműségéről nem lehet teljes általánosságban „szép" tételt megfogalmazni. Azonban speciális esetekben ez viszonylag könnyen megtehető, nevezetesen az előző fejezet bizonyos példáiban. Ezért is vettük előre a példákat tartalmazó részt.

Ebben a részben egy viszonylag speciális tételt fogalmazunk meg (és bizonyítunk be), amely inkább a bizonyításában alkalmazott (standard) technika megismerése miatt lehet érdekes számunkra. Ezt követően egy, az előző részben szereplő példára belátjuk, hogy kielégíti a tétel feltételeit.

3.14. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $a_i^{(l)}$ $(i = 0, \dots, n;\ l = 1, \dots, N)$ függvények a (3.19)–(3.20) formula szerint néznek ki, és teljesülnek rájuk a K1-K4, illetve az alábbi feltételek. A $b_i^{(l)}$, $d_i^{(l)}$ függvények $i \neq 0$ esetén nem függnek ζ_0-tól, illetve $b_0^{(l)}$ nem függ ζ-tól, továbbá $d_0^{(l)} \equiv 1$. Ezenkívül m.m $(t, x) \in Q_T$ és minden $\zeta_0 \in \mathbb{R}^N$ esetén*

$$\sum_{l=1}^{N} \left(b_0^{(l)}(t, x, \zeta_0) - b_0^{(l)}(t, x, \eta_0)\right)(\zeta_0^{(l)} - \eta_0^{(l)}) \geq 0. \tag{3.32}$$

Végül pedig tegyük fel, hogy $H^{(l)} \equiv G^{(l)} \equiv 1$, és $G_0^{(l)}$ teljesíti a K5/b feltételt $(l = 1, \dots, N)$, továbbá létezik $C > 0$ konstans úgy, hogy minden $\gamma > 0$ esetén tetszőleges u_1, $u_2 \in L^p(0, T; V)$-re

$$\left\| \frac{1}{f_\gamma} G_0^{(l)}(f_\gamma u_1) - \frac{1}{f_\gamma} G_0^{(l)}(f_\gamma u_2) \right\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq C \cdot \sum_{j=1}^{N} \|u_1^{(j)} - u_2^{(j)}\|_{L^2(Q_T)}^2, \tag{3.33}$$

ahol $f_\gamma(t, x) = e^{\gamma t}$. Ekkor a (3.13) feladatnak pontosan egy megoldása van.

Bizonyítás. A megoldás létezésével természetesen már nem kell foglalkoznunk. Tegyük fel, hogy u_1 és u_2 megoldások. Először az egyenletet egy alkalmas helyettesítéssel áttranszformáljuk egy számunkra jobban kezelhető alakra. Legyen $\gamma > 0$ rögzített (később megválasztandó) valós szám és vezessük be az alábbi függvényeket:

$$\tilde{u}_1(t, x) := e^{-\gamma t} u_1(t, x) \quad \text{és} \quad \tilde{u}_2(t, x) := e^{-\gamma t} u_2(t, x).$$

Könnyen látható, hogy ekkor

$$D_t u_j(t, x) = \gamma e^{\gamma t} \tilde{u}_j(t, x) + e^{\gamma t} D_t \tilde{u}_j(t, x).$$

Az, hogy u_j megoldása a (3.13) problémának, a fenti miatt $\tilde{u}_j$-re nézve azt jelenti, hogy

$$\gamma f_\gamma \tilde{u}_j + f_\gamma D_t \tilde{u}_j + B(f_\gamma \tilde{u}_j) = F(f_\gamma \tilde{u}_j).$$

A $j = 1, 2$ esetén adódó két egyenletet egymásból kivonva, majd rendezve

$$D_t(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) + \frac{1}{f_\gamma}(B(f_\gamma \tilde{u}_1) - B(f_\gamma \tilde{u}_2)) + \gamma(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) = 0.$$

Alkalmazzuk a fenti egyenletet $\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2$-ra, ekkor kapjuk, hogy

$$[D_t(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2), \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2] + \left[\frac{1}{f_\gamma}(B(f_\gamma \tilde{u}_1) - B(f_\gamma \tilde{u}_2)), \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\right] + \gamma[\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2, \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2] = 0.$$

A bal oldal első tagja nemnegatív, ugyanis $\tilde{u}_1(0) = \tilde{u}_2(0) = 0$ (hiszen a (3.13) probléma megoldásai), ezért alkalmazható az 1.46. következmény. Így szükségképpen

$$\left[\frac{1}{f_\gamma}(B(f_\gamma \tilde{u}_1) - B(f_\gamma \tilde{u}_2)), \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\right] + \gamma \sum_{l=1}^{N} \int_{Q_T} (\tilde{u}_1^{(l)} - \tilde{u}_2^{(l)})^2 \leq 0. \tag{3.34}$$

Most vizsgáljuk meg az előbbi egyenlőtlenség jobb oldalán álló első tagot:

$$\left[\frac{1}{f_\gamma}(B(f_\gamma \tilde{u}_1) - B(f_\gamma \tilde{u}_2)), \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\right] =$$

$$\int_{Q_T} e^{-2\gamma t} \sum_{l=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \left(b_i^{(l)}(t,x,De^{\gamma t}\tilde{u}_1) - b_i^{(l)}(t,x,De^{\gamma t}\tilde{u}_2)\right)(D_i e^{\gamma t}\tilde{u}_1^{(l)} - D_i e^{\gamma t}\tilde{u}_2^{(l)})\,dt\,dx +$$

$$+ \int_{Q_T} e^{-2\gamma t} \sum_{l=1}^{N} \left(b_0^{(l)}(t,x,e^{\gamma t}\tilde{u}_1) - b_0^{(l)}(t,x,e^{\gamma t}\tilde{u}_2)\right)(e^{\gamma t}\tilde{u}_1^{(l)} - e^{\gamma t}\tilde{u}_2^{(l)})\,dx +$$

$$+ \int_{Q_T} e^{-2\gamma t} \sum_{l=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \left(d_i^{(l)}(t,x,De^{\gamma t}\tilde{u}_1) - d_i^{(l)}(t,x,De^{\gamma t}\tilde{u}_2)\right)(D_i e^{\gamma t}\tilde{u}_1^{(l)} - D_i e^{\gamma t}\tilde{u}_2^{(l)})\,dt\,dx +$$

$$+ \int_{Q_T} e^{-\gamma t} \sum_{l=1}^{N} \left(G_0^{(l)}(e^{\gamma t}\tilde{u}_1) - G_0^{(l)}(e^{\gamma t}\tilde{u}_2)\right)(\tilde{u}_1^{(l)} - \tilde{u}_2^{(l)})\,dt\,dx.$$

Vegyük észre, hogy a fenti összeg első három tagja a K3, illetve a (3.32) feltétel miatt nemnegatív. Az utolsó integrált pedig Hölder-egyenlőtlenségek segítségével becsülhetjük felülről. Így végeredményben (3.34) jobb oldalát tudjuk alulról becsülni. Azt kapjuk, hogy

$$0 \geq \gamma \sum_{l=1}^{N} \|\tilde{u}_1^{(l)} - \tilde{u}_2^{(l)}\|^2_{L^2(Q_T)} - \sum_{l=1}^{N} \left\| \frac{1}{f_\gamma} G_0^{(l)}(f_\gamma \tilde{u}_1) - \frac{1}{f_\gamma} G_0^{(l)}(f_\gamma \tilde{u}_2) \right\|_{L^2(Q_T)} \cdot \|\tilde{u}_1^{(l)} - \tilde{u}_2^{(l)}\|_{L^2(Q_T)}.$$

Becsüljünk tovább a Cauchy-Schwartz-egyenlőtlenség segítségével, majd használjuk fel a (3.33) feltételt. Ekkor

$$0 \geq \gamma \sum_{l=1}^{N} \|\tilde{u}_1^{(l)} - \tilde{u}_2^{(l)}\|^2_{L^2(Q_T)} - \left(NC \sum_{l=1}^{N} \|\tilde{u}_1^{(l)} - \tilde{u}_2^{(l)}\|^2_{L^2(Q_T)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{l=1}^{N} \|\tilde{u}_1^{(l)} - \tilde{u}_2^{(l)}\|^2_{L^2(Q_T)}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= (\gamma - \sqrt{NC}) \cdot \sum_{l=1}^{N} \|\tilde{u}_1^{(l)} - \tilde{u}_2^{(l)}\|^2_{L^2(Q_T)} \geq 0$$

adódik, ha $\gamma > \sqrt{NC}$. Vagyis szükségképpen $\|\tilde{u}_1^{(l)} - \tilde{u}_2^{(l)}\|_{L^2(Q_T)} = 0$ minden l-re, tehát $u_1 = u_2$ m.m. Q_T-ben. Ezzel az egyértelműség bizonyítása kész.

Ahogy említettük, egy példával zárjuk ezt a részt. Először is nyilvánvaló (lásd a 3.13. megjegyzést), hogy a $b_i^{(l)}$, $d_i^{(l)}$ függvényekre az előző szakaszban adott konkrét példák kielégítik az előző tétel feltételeit, így ezekkel nem kell foglalkoznunk. Másrészt tekintsük a 3.10. állítás előtt szereplő példák egy speciális esetét! Nevezetesen legyen $\tilde{G}$ a következő, $L^p\big(0,T;(L^p(\Omega))^N\big)$-en értelmezett operátor:

$$[\tilde{G}(v)](t,x) := \left| \int_\Omega \sum_{j=1}^{N} a_j(t,\xi)|v^{(j)}(t,\xi)|^\alpha \,d\xi \right|^{\frac{1}{\alpha}},$$

ahol $a_j \in L^\infty(Q_T)$ $(1 \leq j \leq N)$ és $0 \leq \alpha \leq 2$.

3.15. Állítás. *A fenti $\tilde{G}$ operátor kielégíti a* (3.33) *összefüggést.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az (1.1) egyenlőtlenségből következően ($s > 0$ esetén) igaz a következő egyenlőtlenség: $\big||x|^s - |y|^s\big| \le \text{const} \cdot |x-y|^s$. Ez azt jelenti, hogy $t > 0$ esetén

$$\left|e^{-\gamma t}[\tilde{G}(f_\gamma u_1)](t,x) - e^{-\gamma t}[\tilde{G}(f_\gamma u_2)](t,x)\right|^2 \le$$

$$\le \text{const} \cdot e^{-2\gamma t} \left| \int_\Omega \sum_{l=1}^{N} |a_l(t,\xi)| \left| e^{\gamma t} u_1^{(l)}(t,\xi) - e^{\gamma t} u_2^{(l)}(t,\xi)\right|^\alpha d\xi \right|^{\frac{2}{\alpha}} \le$$

$$\le \text{const} \cdot \left(\sum_{l=1}^{N} \int_\Omega \left| u_1^{(l)}(t,\xi) - u_2^{(l)}(t,\xi)\right|^\alpha d\xi \right)^{\frac{2}{\alpha}}.$$

Felhasználva az (1.1) és a Hölder-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{l=1}^{N} \int_\Omega \left| u_1^{(l)}(t,\xi) - u_2^{(l)}(t,\xi)\right|^\alpha d\xi \right)^{\frac{2}{\alpha}} \le \text{const} \cdot \sum_{l=1}^{N} \left(\int_\Omega \left| u_1^{(l)}(t,\xi) - u_2^{(l)}(t,\xi)\right|^\alpha d\xi \right)^{\frac{2}{\alpha}} \le$$

$$\le \text{const} \cdot \sum_{l=1}^{N} \left[\left(\int_\Omega \left| u_1^{(l)}(t,\xi) - u_2^{(l)}(t,\xi)\right|^{\alpha \frac{2}{\alpha}} d\xi \right)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\int_\Omega 1 \, d\xi \right)^{\frac{2}{2-\alpha}} \right]^{\frac{2}{\alpha}} =$$

$$= \text{const} \cdot \sum_{l=1}^{N} \int_\Omega (u_1^{(l)}(t,\xi) - u_2^{(l)}(t,\xi))^2 \, d\xi.$$

Végeredményben tehát

$$\left\| \frac{1}{f_\gamma} \tilde{G}(f_\gamma u_1) - \frac{1}{f_\gamma} \tilde{G}(f_\gamma u_2) \right\|^2_{L^2(Q_T)} \le \text{const} \cdot \int_{Q_T} \sum_{l=1}^{N} \int_\Omega (u_1^{(l)}(t,\xi) - u_2^{(l)}(t,\xi))^2 \, d\xi \, dt \, dx =$$

$$= \text{const} \cdot \sum_{l=1}^{N} \int_{Q_T} (u_1^{(l)}(t,x) - u_2^{(l)}(t,x))^2 \, dt \, dx = \text{const} \cdot \sum_{l=1}^{N} \|u_1^{(l)} - u_2^{(l)}\|^2_{L^2(Q_T)}.$$

Éppen ezt akartuk belátni.

3.16. Megjegyzés. A fenti $\tilde{G}$ operátor speciális esete a 3.10. tétel előtt definiált $\tilde{G}_2$ operátornak. Valóban, a $\psi(\tau) = \tau$ választással éppen $\tilde{G}$-ot kapjuk. Ehhez pedig az kell, hogy $p - 1 - r_0 = 1$ legyen.

4. fejezet

Megoldások a $[0, \infty)$-en

Az előző fejezetben egy rögzített véges $[0, T]$ intervallumon vizsgáltuk a (3.13) problémát. Igazoltuk megoldás létezését, majd néhány példát mutattunk az operátorban szereplő függvényekre.

Ebben a fejezetben a feladatot a $[0, \infty)$ intervallumon tekintjük. Először pontosan definiáljuk, hogy mit értünk $[0, \infty)$-beli megoldáson. Ezt követően az előző szakasz egzisztencia-tételének segítségével igazoljuk megoldás(ok) létezését, és megvizsgáljuk a megoldások tulajdonságait. Belátjuk a megoldások korlátosságát, és $t \to \infty$ esetén a megoldások stabilizálódását. Végül ezt a fejezetet is példákkal zárjuk.

Erre a fejezetre méginkább igaz, amit az egyértelműségről szóló szakaszban mondtunk. Tudniillik nagy általánosságban nehéz szép (és egyszerű) tételt megfogalmazni, ahogy haladunk előre, feltételeink egyre bonyolultabbá és speciálisabbakká válnak. Míg az alább következő 4.3. tételben (a korábbiakhoz képest) csak egy plusz feltétel szükséges, addig a 4.6. tétel feltételeinek felírása már meglehetősen hosszadalmas. Ráadásul az alkalmazhatósági körök is egyre csökkennek.

4.1. A $[0, \infty)$-beli megoldások létezése

Először meg kell mondanunk, hogy milyen térben és milyen értelemben szeretnénk megoldást találni. Érezhető, hogy nem lenne célravezető egy, az $L^p(0, T; V)$ térhez hasonló, $L^p(0, \infty; V)$ téren dolgozni, mert ez igen nagy megszorítást jelentene. Ehelyett inkább bevezetjük az $L^p_{\text{loc}}(0, \infty; V)$ teret. Ezzel együtt a T-től való függés hangsúlyozása érdekében néhány új jelölést is bevezetünk. Minden egyéb itt külön nem definiált jelölés ugyanazt jelenti (és ugyanaz vonatkozik rá), mint ahogy azt a 2.3.1 szakaszban definiáltuk.

4.1. Definíció. Legyen $Q_\infty = (0, \infty) \times \Omega$. Rögzített $0 < T < \infty$ esetén használjuk az $X_T = L^p(0, T; V)$ és $X_T^* = L^q(0, T; V^*)$ jelöléseket. Legyen $L^p_{\text{loc}}(Q_\infty)$ azon $v\colon Q_\infty \to \mathbb{R}$ függvények halmaza, melyekre $v|_{Q_T} \in L^p(Q_T)$ minden $0 < T < \infty$ esetén. Ezenkívül jelölje $L^p_{\text{loc}}(0, \infty; V)$ azon $u\colon (0, \infty) \to V$ függvények halmazát, melyekre $u|_{(0,T)} \in L^p(0, T; V)$ minden $0 < T < \infty$ esetén. Ennek megfelelően értelmezzük az $L^q_{\text{loc}}(0, \infty; V^*)$ teret, ahol a szokott módon $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

4.2. Megjegyzés. Vegyük észre a következőket. Ha egy $u \in L^p(0, T_1; V)$ függvényre létezik $D_t u \in L^q(0, T_1; V^*)$, akkor minden $T_2 < T_1$ esetén létezik $D_t(u|_{(0,T_2)})$ is, és $D_t(u|_{(0,T_2)}) = (D_t u)|_{(0,T_2)}$. Valóban, az 1.38. definícióban olyan $\psi \in C^\infty[0, T_1]$ próbafüggvényeket választunk, amelyekre $\psi|_{[T_2,T_1]} \equiv 0$. Az előbbiekből következően, ha $u \in L^p_{\text{loc}}(0, \infty; V)$ függvényre minden $0 < T < \infty$ esetén létezik $D_t u|_{(0,T)} \in L^q(0, T; V^*)$, akkor u-hoz egyértelműen létezik $D_t u \in L^q_{\text{loc}}(0, \infty; V^*)$. Az is világos, hogy ekkor u folytonos függvény, tehát $u(0) = 0$ most is értelmes.

Most már pontosan megfogalmazhatjuk, hogy mit is értünk $[0,\infty)$-beli megoldáson. Legyenek $a_i^{(l)}\colon Q_\infty \times \mathbb{R}^{(n+1)N} \times L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V) \to \mathbb{R}$ együttható függvények ($i = 0,\dots,n$; $l = 1,\dots,N$). Ekkor a (3.2) formulával definiálhatjuk a $B\colon L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V) \to L^q_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V^*)$ operátort. Vagyis m.m. $t \in (0,\infty)$ esetén, minden $u = (u^{(1)},\dots,u^{(N)}) \in L^p(0,T;V)$ és $w = (w^{(1)},\dots,w^{(N)}) \in V$-re legyen

$$\langle [B(u)](t), w\rangle :=$$

$$\sum_{l=1}^N \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n a_i^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x);u)D_i w^{(l)}(x) + a_0^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x);u)w^{(l)}(x)\right] dx.$$

Ekkor minden $T > 0$ számra $B(u)|_{(0,T)} \in L^q(0,T;V^*)$, melyre $v = (v^{(1)},\dots,v^{(N)}) \in L^p(0,T;V)$ esetén

$$[B(u),v] =$$

$$\sum_{l=1}^N \int_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^n a_i^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x);u)D_i v^{(l)}(t,x) + a_0^{(l)}(t,x,u(t,x),Du(t,x);u)v^{(l)}(t,x)\right] dt\,dx.$$

Ezenkívül legyen adott $F \in L^q_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V^*)$, és keressünk olyan $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V)$ függvényt, melyre

$$\begin{aligned} D_t u + B(u) &= F \\ u(0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

A fenti első egyenlet azt jelenti, hogy minden $T > 0$ esetén

$$D_t u|_{(0,T)} + B(u)|_{(0,T)} = F|_{(0,T)}. \tag{4.2}$$

Szeretnénk erre az egyenletre alkalmazni az előző fejezetben megismert 3.4. egzisztencia-tételünket. Sajnos ez közvetlenül még nem megy, hiszen itt a B operátor argumentumában egy $L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V)$ függvény szerepel. Ezért célszerű feltenni a B-ről bizonyos tulajdonságot. Mégpedig tegyük fel, hogy B Volterra típusú. Ez azt jelenti, hogy minden $T > 0$ esetén $B(u)|_{(0,T)}$ csak $u|_{(0,T)}$-től függ. Pontosabban, ha $u_1|_{(0,T)} = u_2|_{(0,T)}$, akkor $B(u_1)|_{(0,T)} = B(u_2)|_{(0,T)}$. Ekkor B-t (minden $T > 0$ esetén) felfoghatjuk úgy is, mint egy $L^p(0,T;V) \to L^q(0,T;V^*)$ operátort. Valóban, egy $u \in L^p(0,T;V)$ függvényt tetszőlegesen (például 0-ként) kiterjesztve egy $L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V)$-beli függvénnyé, $B(u)|_{(0,T)}$ nem függ a kiterjesztéstől.

Ezzel az észrevétellel a (4.2) egyenletet átírhatjuk a következő, számunkra jól kezelhető formába:

$$D_t u|_{(0,T)} + B(u|_{(0,T)}) = F|_{(0,T)}.$$

Erre az alakra (megfelelő feltételek mellett) már alkalmazható lesz a 3.4. következmény.

A továbbiakban, ha egy $u \in W^{1,p}(0,T;V,H)$ függvényre

$$\begin{aligned} D_t u + B(u) &= F \\ u(0) &= 0, \end{aligned}$$

akkor azt mondjuk, hogy u a $[0,T]$-n megoldása a (4.1) feladatnak, vagy rövidebben u megoldás $[0,T]$-(be)n.

Vegyük észre, hogy a Volterra tulajdonság garantálja számunkra, hogy ha u megoldás $[0,T_1]$-en, akkor $T_2 < T_1$ esetén $u|_{(0,T_2)}$ megoldás $[0,T_2]$-n. Jegyezzük meg, hogy a B operátor Volterra tulajdonságához elegendő, ha az $a_i^{(l)}$ függvényekre teljesül, hogy $a_i^{(l)}(\cdot,x,\zeta_0,\zeta;v)|_{(0,T)}$ csak $v|_{(0,T)}$-től függ. Pontosabban $a_i^{(l)}(\cdot,x,\zeta_0,\zeta;v_1)|_{(0,T)} = a_i^{(l)}(\cdot,x,\zeta_0,\zeta;v_2)|_{(0,T)}$, ha $v_1|_{(0,T)} = v_2|_{(0,T)}$. Tehát most is azt mondhatjuk, hogy az $a_i^{(l)}|_{(0,T)}$ függvények valójában $Q_T \times \mathbb{R}^{(n+1)N} \times L^p(0,T;V) \to \mathbb{R}$ függvények. A továbbiakban mindig ezzel az azonosítással fogunk élni.

Megmutatjuk, hogy a fenti Volterra tulajdonság elegendő „plusz" feltétel a $[0,\infty)$-n értelmezett megoldás létezéséhez.

4.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $a_i^{(l)}: Q_\infty \times \mathbb{R}^{(n+1)N} \times L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V) \to \mathbb{R}$ függvényekre teljesül, hogy minden $v \in L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V)$ és $T > 0$ esetén $a_i^{(l)}(\cdot\,,x,\zeta_0,\zeta;v)|_{(0,T)}$ csak $v|_{(0,T)}$-től függ, továbbá $a_i^{(l)}(\cdot\,,x,\zeta_0,\zeta;v)|_{(0,T)}$ kielégíti a F1–F5 feltételeket ($i = 0,\dots,n$; $l = 1,\dots,N$). Ekkor tetszőleges $F \in L^q_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V^*)$ esetén létezik $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V)$, melyre $D_t u \in L^q_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V^*)$, $u(0) = 0$ és minden $T > 0$ esetén*

$$D_t u|_{(0,T)} + B(u|_{(0,T)}) = F|_{(0,T)}.$$

Bizonyítás. A bizonyítás első felében az átlós módszer segítségével „megkeressük" az u függvényt. A második felében pedig belátjuk, hogy a kiválasztott u függvény valóban megoldás a $[0,\infty)$-en.

Legyen (T_k) monoton növő pozitív számsorozat, melyre $T_k \to \infty$. Ekkor a feltételekből adódóan a B mint $L^p(0,T_m;V)$-ből képező operátor teljesíti a 3.4. következmény feltételeit, ezért minden $m \in \mathbb{N}$ esetén létezik $[0,T_m]$-en $u_m \in W^{1,p}(0,T_m;V,H)$ megoldás. Először belátjuk, hogy rögzített m esetén $\left(u_k|_{(0,T_m)}\right)_{k\geqslant m}$ korlátos sorozat X_{T_m}-ben. A Volterra tulajdonság miatt $k \geq m$ esetén $u_k|_{(0,T_m)}$ megoldás $[0,T_m]$-en, azaz

$$D_t u_k|_{(0,T_m)} + B(u_k|_{(0,T_m)}) = F|_{(0,T_m)}.$$

Alkalmazzuk az előbbi egyenlet mindkét oldalát $u_k|_{(0,T_m)}$-re, ekkor

$$[D_t u_k|_{(0,T_m)}, u_k|_{(0,T_m)}] + [B(u_k|_{(0,T_m)}), u_k|_{(0,T_m)}] = [F|_{(0,T_m)}, u_k|_{(0,T_m)}].$$

Itt egyrészt $[D_t u_k|_{(0,T_m)}, u_k|_{(0,T_m)}] \geq 0$, hiszen D_t lineáris monoton operátor (és így használható az 1.28. megjegyzés), másrészt $|[F|_{(0,T_m)}, u_k|_{(0,T_m)}]| \leq \|F|_{(0,T_m)}\|_{X^*_{T_m}} \|u_k|_{(0,T_m)}\|_{X_{T_m}}$, így

$$\frac{[B(u_k|_{(0,T_m)}), u_k|_{(0,T_m)}]}{\|u_k|_{(0,T_m)}\|_{X_{T_m}}} \leq \|F|_{(0,T_m)}\|_{X^*_{T_m}}.$$

Mivel B koercitív (X_{T_m}-en), ezért szükségképpen $\left(\|u_k|_{(0,T_m)}\|_{X_{T_m}}\right)_{k\geqslant m}$ korlátos, különben a fenti egyenlőtlenség bal oldala $k \to \infty$ esetén ∞-hez tartana. A B operátor (X_{T_m}-en való) korlátossága folytán pedig $\left(B(u_k|_{(0,T_m)})\right)_{k\geqslant m}$ korlátos sorozat $L^q(0,T_m;V^*)$-ban.

Ezek után legyen először $m = 1$. Mivel $\left(\|u_k|_{(0,T_1)}\|_{X_{T_1}}\right)$, $\left(B(u_k|_{(0,T_1)})\right)$ korlátos sorozatok az $L^p(0,T_1;V)$, illetve $L^q(0,T_1;V^*)$ reflexív normált terekben, azért létezik $(u_{1,k}) \subset (u_k)$ részsorozat, valamint léteznek $u_{1,*} \in X_{T_1}$ és $v_{1,*} \in X^*_{T_1}$ függvények úgy, hogy

$$u_{1,k}|_{(0,T_1)} \to u_{1,*} \text{ gyengén } X_{T_1}\text{-ben, és}$$
$$B(u_{1,k}|_{(0,T_1)}) \to v_{1,*} \text{ gyengén } X^*_{T_1}\text{-ban.}$$

Most legyen $m = 2$. Ekkor, mivel $(u_{1,k})_{k\geqslant 2}$ és $(B(u_{1,k}))_{k\geqslant 2}$ korlátos sorozatok az $L^p(0,T_2;V)$, illetve $L^q(0,T_2;V^*)$ térben, azért létezik $(u_{2,k}) \subset (u_{1,k})$ részsorozat, valamint léteznek $u_{2,*} \in X_{T_2}$ és $v_{2,*} \in X^*_{T_2}$ függvények, melyekre

$$u_{2,k}|_{(0,T_2)} \to u_{2,*} \text{ gyengén } X_{T_2}\text{-ben, és}$$
$$B(u_{2,k}|_{(0,T_2)}) \to v_{2,*} \text{ gyengén } X^*_{T_2}\text{-ban.}$$

A fenti eljárást folytatva minden (rögzített) m esetén kapunk egy $(u_{m,k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (u_{m-1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozatot, valamint $u_{m,*} \in X_{T_m}$ és $v_{m,*} \in X^*_{T_m}$ függvényeket, melyekre

$$u_{m,k}|_{(0,T_m)} \to u_{m,*} \text{ gyengén } X_{T_m}\text{-ben, és}$$
$$B(u_{m,k}|_{(0,T_m)}) \to v_{m,*} \text{ gyengén } X^*_{T_m}\text{-ban.}$$

A konstrukció alapján világos, hogy $l < m$ esetén $u_{m,k}|_{(0,T_l)} \to u_{l,*}$ gyengén X_{T_l}-ben, és hasonlóan $B(u_{m,k}|_{(0,T_l)}) \to v_{l,*}$ gyengén $X^*_{T_l}$-ban. Mivel a gyenge limesz egyértelmű, ezért szükségképpen $u_{m,*}|_{(0,T_l)} = u_{l,*}$ és $v_{m,*}|_{(0,T_l)} = v_{l,*}$ minden $l < m$ esetén. Tehát az $(u_{m,*})_{m\in\mathbb{N}}$, $(v_{m,*})_{m\in\mathbb{N}}$ függvények (m.m.) egyértelműen meghatároznak egy $u_*\colon (0,\infty) \to V$ és $v_*\colon (0,\infty) \to V^*$ függvényt, melyekre $u_*|_{(0,T_m)} = u_{m,*}$ és $v_*|_{(0,T_m)} = v_{m,*}$ minden m esetén. A bizonyítás hátralévő részében megmutatjuk, hogy minden m-re $u \in W^{1,p}(0,T_m;V,H)$ és $u_{m,*} = u_*|_{(0,T_m)}$ megoldás $[0,T_m]$-en.

Rögzítsük az m természetes számot. Mivel a bizonyítás további részében csak a $[0,T_m]$ intervallumon fogunk dolgozni, ezért mostantól (hacsak nem félrevezető) nem írjuk ki a $|_{(0,T_m)}$ jelölést.

Tekintsük az $(u_{k,k})_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot. Erre teljesül, hogy

$$u_{k,k} \to u_{m,*} \text{ gyengén } X_{T_m}\text{-ben, és}$$
$$B(u_{k,k}) \to v_{m,*} \text{ gyengén } X^*_{T_m}\text{-ban.}$$

Ezenkívül állítjuk, hogy $(u_{k,k}(T_m))_{k\geqslant m}$ korlátos sorozat H-ban. (Emlékeztetünk arra, hogy $H = (L^2(\Omega))^N$, és $(\cdot\,,\cdot)_H$ jelöli a H-beli skalárszorzatot.)

Az előbbi állítás igazolásához használjuk ki, hogy $k \geq m$ esetén $u_{k,k}$ megoldás $[0,T_m]$-ben, azaz

$$D_t u_{k,k}(t) + [B(u_{k,k})](t) = F(t)$$

teljesül m.m. $t \in (0,T_m)$-re. Alkalmazzuk az egyenlet mindkét oldalát $u_{k,k}(t)$-re, majd integráljunk a $[0,T_m]$ intervallumon. Ekkor kapjuk, hogy

$$\int_0^{T_m} \langle D_t u_{k,k}(t), u_{k,k}(t)\rangle\,dt + \int_0^{T_m} \langle [B(u_{k,k})](t), u_{k,k}(t)\rangle\,dt = \int_0^{T_m} \langle F(t), u_{k,k}(t)\rangle\,dt.$$

Vegyük észre (lásd az 1.45. következményt), hogy

$$\int_0^{T_m} \langle D_t u_{k,k}(t), u_{k,k}(t)\rangle\,dt = \frac{1}{2}\left(\|u_{k,k}(T_m)\|_H^2 - \|u_{k,k}(0)\|_H^2\right) = \frac{1}{2}\|u_{k,k}(T_m)\|_H^2,$$

hiszen $u_{k,k}$ megoldás (ezért $u_{k,k}(0) = 0$). Továbbá (3.7) miatt

$$\int_0^{T_m} \langle [B(u_{k,k})](t), u_{k,k}(t)\rangle\,dt = [B(u_{k,k}), u_{k,k}] \geq g_2(u_{k,k})\|u_{k,k}\|^p_{X_{T_m}} - \|k_2(u_{k,k})\|_{L^1(Q_{T_m})} \geq K,$$

mert $(u_{k,k})$ korlátos X_{T_m}-ben, és g, k_2 korlátos operátorok (X_{T_m}-en). Hasonlóképpen

$$\int_0^{T_m} \langle F(t), u_{k,k}(t)\rangle\,dt = [F, u_{k,k}] \leq \|F\|_{X^*_{T_m}}\|u_{k,k}\|_{X_{T_m}} \leq K^*.$$

Végeredményben

$$\frac{1}{2}\|u_{k,k}(T_m)\|_H^2 + K \leq K^*,$$

tehát $(u_{k,k}(T_m))$ korlátos sorozat a H Hilbert-térben. Következésképpen létezik $(\tilde{u}_k) \subset (u_{k,k})$ részsorozat és $z \in H$, melyekre $\tilde{u}_k(T_m) \to z$ gyengén H-ban. Összefoglalva az eddigieket, az $(\tilde{u}_k)$ (függvény)sorozatra a következők teljesülnek:

$$\tilde{u}_k \text{ megoldás } [0,T_m]\text{-en,} \tag{4.3}$$
$$\tilde{u}_k \to u_{m,*} = u_*|_{(0,T_m)} \text{ gyengén } X_{T_m}\text{-ben,} \tag{4.4}$$
$$B(\tilde{u}_k) \to v_{m,*} = v_*|_{(0,T_m)} \text{ gyengén } X^*_{T_m}\text{-ban,} \tag{4.5}$$
$$\tilde{u}_k(T_m) \to z \text{ gyengén } H\text{-ban.} \tag{4.6}$$

Állítjuk, hogy $u_{m,*} \in W^{1,p}(0,T_m;V,H)$, $D_t u_{m,*} + v_{m,*} = F|_{(0,T_m)}$, továbbá $u_*(0) = 0$ és $u_*(T_m) = z$. A (4.3) feltétel miatt minden $w \in X_{T_m}$-re

$$[D_t \tilde{u}_k, w] + [B(\tilde{u}_k), w] = [F, w],$$

amiből $k \to \infty$ esetén (4.5) miatt következik, hogy

$$D_t \tilde{u}_k \to F - v_{m,*} \text{ gyengén } X^*_{T_m}\text{-ben.} \tag{4.7}$$

Másrészt a disztribúciós derivált definíciója alapján minden $\psi \in C^\infty[0,T_m]$ és $w \in V$ tesztfüggvény esetén

$$\int_0^{T_m} \langle D_t \tilde{u}_k(t), \psi(t) w\rangle \, dt = -\int_0^{T_m} \langle \psi'(t) w, \tilde{u}_k(t)\rangle \, dt.$$

Így (4.4) és (4.7) miatt $k \to \infty$ esetén

$$\int_0^{T_m} \langle F(t) - v_{m,*}(t), \psi(t) w\rangle \, dt = -\int_0^{T_m} \langle \psi'(t) w, u_*(t)\rangle \, dt$$

minden $\psi \in C^\infty[0,T_m]$-re és $w \in V$-re. Ez viszont azt jelenti, hogy $D_t u_{m,*} = F|_{(0,T_m)} - v_{m,*}$ (tehát $u_{m,*} \in W^{1,p}(0,T;V,H)$, ami (4.7) alapján egyben azt is mutatja, hogy

$$D_t \tilde{u}_k \to D_t u_{m,*} \text{ gyengén } X^*_{T_m}\text{-ben.} \tag{4.8}$$

Most válasszunk tetszőleges $\psi \in C^\infty[0,T_m]$ és $w \in V$ próbafüggvényeket, és alkalmazzuk a parciális integrálás tételét (1.44. tétel) a következő módon:

$$\begin{aligned}(\tilde{u}_k(T_m), \psi(T_m) w)_H &= (\tilde{u}_k(T_m), \psi(T_m) w)_H - (\tilde{u}_k(0), \psi(0) w)_H = \\ &= \int_0^{T_m} \langle D_t \tilde{u}_k(t), \psi(t) w\rangle \, dt + \int_0^{T_m} \langle \psi'(t) w, \tilde{u}_k(t)\rangle \, dt.\end{aligned}$$

Felhasználva a (4.4), (4.6) és (4.8) tulajdonságokat $k \to \infty$ esetén a fenti egyenletből

$$(z, \psi(T_m) w)_H = \int_0^{T_m} \langle D_t u_{m,*}, \psi(t) w\rangle \, dt + \int_0^{T_m} \langle \psi'(t) w, u_{m,*}\rangle \, dt$$

következik. Az előbbi egyenlet jobb oldalán egy újabb parciális integrálást hajtunk végre, ekkor

$$(z, \psi(T_m) w)_H = (u_{m,*}(T_m), \psi(T_m) w)_H - (u_{m,*}(0), \psi(0) w)_H$$

adódik. Válasszuk a $\psi \in C^\infty[0,T_m]$ függvényt úgy, hogy $\psi(0) = 1$ és $\psi(T_m) = 0$ legyen. Ekkor a fenti egyenletből következően minden $w \in V$-re $(u_{m,*}(0), w)_H = 0$, tehát (mivel V sűrű H-ban, azért) $u_{m,*}(0) = 0$. Ha olyan ψ-t választunk, melyre $\psi(0) = 0$ és $\psi(T_m) = 1$, akkor minden $w \in V$-re $(u_{m,*}(T_m), \psi(T_m) w)_H = (z, w)_H$, és így $u_{m,*}(T_m) = z$.

Összefoglalva az eddigieket, $u_{m,*}$-ról a következőt tudjuk: $D_t u_{m,*} + v_{m,*} = F|_{(0,T_m)}$, továbbá $u_{m,*}(0) = 0$ és $u_{m,*}(T_m) = z$. Most már csak azt kell belátnunk, hogy $v_{m,*} = B(u_{m,*})$, ekkor $u_{m,*}$ valóban megoldás $[0,T_m]$-en.

Belátjuk, hogy $B(\tilde{u}_k) \to B(u_{m,*})$ gyengén $X^*_{T_m}$-ban, hiszen ekkor (4.5) és a gyenge limesz egyértelműsége miatt $v_{m,*} = B(u_{m,*})$. Az előbbihez viszont elegendő igazolnunk, hogy

$$\limsup_{k\to\infty} [B(\tilde{u}_k), \tilde{u}_k - u_{m,*}] \leq 0,$$

mert ekkor (4.4) és (4.8)-ból, B pszeudomonotonitása folytán következik, hogy $B(\tilde{u}_k) \to B(u_{m,*})$ gyengén $X^*_{T_m}$-ban.

A (4.5) tulajdonság miatt

$$\limsup_{k\to\infty}[B(\tilde{u}_k),\tilde{u}_k-u_{m,*}]=\limsup_{k\to\infty}[B_{T_m}(\tilde{u}_k),\tilde{u}_k]-[v_{m,*},u_{m,*}]. \tag{4.9}$$

Másrészt (4.3) miatt

$$[B(\tilde{u}_k),\tilde{u}_k]=[F,\tilde{u}_k]-[D_t\tilde{u}_k,\tilde{u}_k]=[F,\tilde{u}_k]-\frac{1}{2}\|\tilde{u}_k(T_m)\|_H^2, \tag{4.10}$$

hiszen (az 1.45. következmény miatt) $[D_t\tilde{u}_k,\tilde{u}_k]=\frac{1}{2}\|\tilde{u}_k(T_m)\|_H^2-\frac{1}{2}\|\tilde{u}_k(0)\|_H^2$, és $\|\tilde{u}_k(0)\|_H^2=0$. Vegyük észre, hogy az 1.26. állításból következően (4.6) miatt

$$\|u_{m,*}(T_m)\|_H\le\liminf_{k\to\infty}\|\tilde{u}_k(T_m)\|_H,$$

és így (4.10) alapján (felhasználva (4.4)-et) azt kapjuk, hogy

$$\limsup_{k\to\infty}[B(\tilde{u}_k),\tilde{u}_k]\le[F,u_{m,*}]-\frac{1}{2}\|u_{m,*}(T_m)\|_H^2=[F,u_{m,*}]-[D_tu_{m,*},u_{m,*}].$$

Ezt (4.9)-cel összevetve

$$\limsup_{k\to\infty}[B(\tilde{u}_k),\tilde{u}_k-u_{m,*}]\le[F,u_{m,*}]-[D_tu_{m,*},u_{m,*}]-[v_{m,*},u_{m,*}]=0,$$

amit be akartunk látni.

Végeredményben tehát igazoltuk, hogy minden T_m esetén $u_{m,*}=u_*|_{(0,T_m)}$ megoldás $[0,T_m]$-en. Ekkor a Volterra tulajdonságból következően u_* megoldás a $[0,\infty)$ intervallumon. Ezzel a 4.3. tétel bizonyítását befejeztük.

4.2. A megoldások korlátossága

Ebben a részben megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett az előző részben kapott megoldás(ok) korlátos(ak) a $[0,\infty)$ intervallumon.

4.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a 4.3. tétel feltételei úgy, hogy az $a_i^{(l)}$ függvények az F4 feltételt $g_2(\cdot)\equiv g_2\in\mathbb{R}^+$ konstanssal és $k_2\colon L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V)\to L^1_{\mathrm{loc}}(Q_\infty)$ Volterra típusú operátorral teljesítik. Tegyük fel ezenkívül, hogy létezik $c_4>0$, és $0\le p_1<p$ konstans, és $\varphi\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, melyekre $\lim_{\tau\to\infty}\varphi(\tau)=0$, valamint m.m. $t>0$ és $v\in L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V)$ esetén, melyre $D_tv\in L^q_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V^*)$, teljesül, hogy*

$$\int_\Omega|k_2(v)(t,x)|\,dx\le c_4\left(\sup_{\tau\in[0,t]}\|v(\tau)\|_H^{p_1}+\varphi(t)\cdot\sup_{\tau\in[0,t]}\|v(\tau)\|_H^p+1\right). \tag{4.11}$$

Ekkor, ha $\|F(\cdot)\|_{V^*}$ korlátos $L^\infty(0,\infty)$-ben, akkor a (4.1) probléma u megoldására $\|u(\cdot)\|_H$ korlátos a $[0,\infty)$ intervallumon.

4.5. Megjegyzés. A precizitás érdekében először értelmezzük a tétel feltételeit. Az F4-re vonatkozó feltételt a következőképpen értjük. Létezik $g_2\in\mathbb{R}^+$ konstans és $k_2\colon L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V)\to L^1_{\mathrm{loc}}(Q_\infty)$ Volterra típusú operátor (azaz minden $T>0$ esetén $k_2(v)|_{Q_T}=k_2(v|_{(0,T)})$ minden $v\in L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V)$-re) , melyekre

$$\sum_{l=1}^N\sum_{i=0}^n a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;v)\zeta_i^{(l)}\ge g_2\left(|\zeta_0|^p+|\zeta|^p\right)-[k_2(v)](t,x)$$

m.m. $(t,x)\in Q_\infty$-re, minden $(\zeta_0,\zeta)\in\mathbb{R}^{(n+1)N}$-re és $v\in L^p_{\mathrm{loc}}(0,\infty;V)$-re $(i=0,\dots,n;\ l=1,\dots,N)$. Továbbá minden $T>0$ esetén a $k_2|_{L^p(0,T;V)}$ operátor (mely a Volterra tulajdonság miatt egyértelműen értelmezhető) kielégíti a (3.3) összefüggést. Ekkor mind $a_i^{(l)}$, mind pedig k_2 Volterra tulajdonsága miatt minden $T > 0$ esetén teljesül az F4 feltétel.

A (4.11) feltételben a szuprémumok valóban léteznek, hiszen $D_t v \in L^q_{\mathrm{loc}}(0, \infty; V^*)$ esetén $\|v(\cdot)\|_H^2$ folytonos (lásd az (1.41.) állítást).

Bizonyítás [4.4. tétel]. A rövidség kedvéért legyen $y(t) = \|u(t)\|_H^2$. Jegyezzük meg, hogy az 1.41. állításból következően y folytonos függvény. Célunk egy, az y-ra vonatkozó felső becslés igazolása, amelyből a korlátossága következni fog.

Tudjuk, hogy

$$D_t u(t) + [B(u)](t) = F(t)$$

m.m. minden $t \in (0, \infty)$-re. Legyen $0 < T_1 < T_2 < \infty$ és alkalmazzuk a fenti egyenlet mindkét oldalát u-ra, majd integráljunk a $[T_1, T_2]$ intervallumon. Ekkor kapjuk, hogy

$$\int_{T_1}^{T_2} \langle D_t u(t), u(t)\rangle\, dt + \int_{T_1}^{T_2} \langle [B(u)](t), u(t)\rangle\, dt = \int_{T_1}^{T_2} \langle F(t), u(t)\rangle\, dt. \tag{4.12}$$

A bal oldal első tagját a már ismert módon alakíthatjuk:

$$\int_{T_1}^{T_2} \langle D_t u(t), u(t)\rangle\, dt = \frac{1}{2}\left(\|u(T_2)\|_H^2 - \|u(T_1)\|_H^2\right) = \frac{1}{2}\left(y(T_2) - y(T_1)\right). \tag{4.13}$$

A második tag integrandusát pedig a korábbi (3.7)-hez hasonlóan alulról becsülhetjük:

$$\begin{aligned}\langle [B(u)](t), u(t)\rangle &\geq \\ \geq \int_\Omega \left[g_2\left(|u(t,x)|^p + |Du(t,x)|^p\right) - [k_2(u)](t,x)\right] dx &= g_2\|u(t)\|_V^p - \int_\Omega [k_2(u)](t,x)\, dx,\end{aligned}$$

és így

$$\int_{T_1}^{T_2} \langle [B(u)](t), u(t)\rangle\, dt \geq g_2 \int_{T_1}^{T_2} \|u(t)\|_V^p\, dt - \int_{T_1}^{T_2}\int_\Omega [k_2(u)](t,x)\, dx\, dt. \tag{4.14}$$

Ebbe a (4.11) feltételt behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\int_{T_1}^{T_2} \langle [B(u)](t), u(t)\rangle\, dt \geq g_2 \int_{T_1}^{T_2} \|u(t)\|_V^p - c_4 \int_{T_1}^{T_2} \left[\sup_{\tau\in[0,t]} y(\tau)^{\frac{p_1}{2}} + \varphi(t)\cdot \sup_{\tau\in[0,t]} y(\tau)^{\frac{p}{2}} + 1\right] dt.$$

A (4.12) egyenletből már csak a jobb oldal vizsgálata van hátra. Legyen $\varepsilon > 0$, melyre $\dfrac{\varepsilon^p}{p} < \dfrac{1}{2} g_2$ és alkalmazzuk az integrandusra az ε-egyenlőtlenséget. Ekkor felhasználva $\|F(\cdot)\|_{V^*}$ korlátosságát

$$\begin{aligned}\int_{T_1}^{T_2} \langle F(t), u(t)\rangle\, dt &\leq \int_{T_1}^{T_2} \|u(t)\|_V \|F(t)\|_{V^*}\, dt \leq \\ &\leq \int_{T_1}^{T_2} \left[\frac{\varepsilon^p}{p}\|u(t)\|_V^p + \frac{1}{q\varepsilon^q}\|F(t)\|_{V^*}^q\right] dt \leq \frac{1}{2} g_2 \int_{T_1}^{T_2} \|u(t)\|_V^p\, dt + \int_{T_1}^{T_2} K\, dt\end{aligned} \tag{4.15}$$

adódik. Most a (4.13), (4.14), (4.15) összefüggéseket visszahelyettesítve a (4.12) egyenletbe a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{2}\left(y(T_2) - y(T_1)\right) + \frac{1}{2} g_2 \int_{T_1}^{T_2} \|u(t)\|_V^p\, dt \leq c_4' \int_{T_1}^{T_2} \left[\sup_{\tau\in[0,t]} y(\tau)^{\frac{p_1}{2}} + \varphi(t)\cdot \sup_{\tau\in[0,t]} y(\tau)^{\frac{p}{2}} + 1\right] dt.$$

Mivel az $(L^2(\Omega))^N \hookrightarrow (W^{1,p}(\Omega))^N$ beágyazás folytonos (Ω korlátos, $p \geq 2$), ezért

$$\|u(t)\|_H \leq \mathrm{const}\cdot \|u(t)\|_V,$$

ebből következően

$$y(t)^{\frac{p}{2}} \leq \mathrm{const} \cdot \|u(t)\|_V^p. \tag{4.16}$$

Ennek segítségével végeredményben a

$$y(T_2) - y(T_1) + d_1 \int_{T_1}^{T_2} y(t)^{\frac{p}{2}} \, dt \leq d_2 \int_{T_1}^{T_2} \left[\sup_{\tau\in[0,t]} y(\tau)^{\frac{p_1}{2}} + \varphi(t) \cdot \sup_{\tau\in[0,t]} y(\tau)^{\frac{p}{2}} + 1 \right] dt. \tag{4.17}$$

becslés adódik (ahol a konstansok nem függnek $[T_1, T_2]$-től).

Megmutatjuk, hogy a fenti becslésből következően $y(\cdot)$ korlátos. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ebben az esetben (y folytonossága miatt) minden $M > 0$ esetén létezik $t_1 > 0$, melyre

$$M + 1 = y(t_1) = \sup_{\tau\in[0,t_1]} y(\tau). \tag{4.18}$$

Ekkor y folytonosságából adódóan létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $t_1 - \delta \leq t \leq t_1$ esetén $y(t) > M$. Alkalmazzuk a (4.17) összefüggést a $T_1 = t_1 - \delta$ és $T_2 = t_1$ választással és használjuk fel a (4.18) becslést:

$$y(t_1) - y(t_1 - \delta) + d_1 \delta M^{\frac{p}{2}} \leq d_2 \delta (M+1)^{\frac{p_1}{2}} + (M+1)^{\frac{p}{2}} \int_{t_1-\delta}^{t_1} \varphi(t) \, dt + d_2 \delta. \tag{4.19}$$

Itt egyrészt (4.18) miatt $y(t_1) - y(t_1 - \delta) \geq 0$, másrészt az integrálszámítás első középértéktétele szerint $\int_{t_1-\delta}^{t_1} \varphi(t) \, dt = \delta \cdot \sup_{t\in[t_1-1,t_1]} \varphi(t) = \delta \cdot \varphi(t_*)$, ahol $t_* \in [t_1 - \delta, t_1]$. Az előbbiek figyelembe vételével (4.19) a $\delta(M+1)^{\frac{p}{2}}$-val való leosztás után így alakul:

$$\left(\frac{M}{M+1}\right)^{\frac{p}{2}} \leq (M+1)^{\frac{p_1-p}{2}} + \varphi(t_*) + d_2 (M+1)^{-\frac{p}{2}}.$$

Vegyük észre, hogy $M \to \infty$ esetén a bal oldal 1-hez tart. Ezenkívül $M \to \infty$ esetén a jobb oldal utolsó tagja 0-hoz tart, sőt $p_1 < p$ miatt az első tag is. Továbbá $M \to \infty$ esetén $t_* \to \infty$ és így a φ-re vonatkozó feltételből adódóan $\varphi(t_*) \to 0$. Következésképpen a fenti egyenlőtlenség jobb oldala 0-hoz tart. Ez viszont ellentmondás. Kiindulási feltevésünk helytelen volt, vagyis $y(\cdot)$ korlátos a $[0, \infty)$ intervallumon.

4.3. Stabilizáció

A $[0, \infty)$-beli megoldás(ok) tulajdonságaival kapcsolatban most megvizsgáljuk, hogy mit mondhatunk a megoldás(ok) viselkedéséről $t \to \infty$ esetén. Pontosabban milyen feltételek mellett állíthatjuk, hogy $t \to \infty$ esetén a (4.1) feladat $u(t)$ megoldása(i) stabilizálódik, azaz valamilyen stacionárius állapothoz tart.

Rögtön adódik néhány természetes feltétel. Nyilván érdemes feltennünk,hogy az $a_i^{(l)}$ függvények is valamilyen stacionárius állapothoz tartanak. Azaz

$$\lim_{t\to\infty} a_i^{(l)}(t, x, \zeta_0, \zeta; v) = a_{i,\infty}^{(l)}(x, \zeta_0, \zeta), \qquad i = 0, \ldots, n; \; l = 1, \ldots, N;$$

teljesül m.m. $x \in \Omega$, minden $(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$ és $v \in L^p_{\mathrm{loc}}(0, \infty; V)$ esetén, továbbá az $a_{i,\infty}^{(l)}$ függvények is Carathéodory-tulajdonságúak. Persze könnyen látható, hogy a fenti konvergenciát nem várhatjuk el minden v-re, mert ekkor nagyon leszűkítjük a tétel alkalmazhatósági körét.

Van egy másik probléma is a fenti konvergenciával. Mivel a fenti függvényekről t-ben csak a mérhetőséget tettük fel, ezért (a mértékelméleti nehézségek elkerülésére) az előbbi feltételt értsük úgy, hogy rögzítjük a függvények egy reprezentációját (vagy esetleg t-ben folytonosságot követelünk meg), és ezzel már értelmes a pontonkénti ∞-beli határérték. A továbbiakban hasonló esetekben (említés nékül) mindig az előbbi konvencióval élünk. Valójában egy kis mértékelméleti megfontolással teljesen precízzé tehetnénk e technikai részleteket, csak azzal a későbbi tétel bizonyítása válna túl aprólékossá.

Az előbbieken kívül nyilván szükséges feltétel, hogy a jobb oldali $F(t)$ függvény is stabilizálódjon, azaz létezzen $F_\infty \in V^*$, melyre

$$\lim_{t\to\infty} \|F(t) - F_\infty\|_{V^*} = 0. \tag{4.20}$$

Most értelmezzük a következő $B_\infty \colon V \to V^*$ operátort, melyre v, $w \in V$ esetén

$$\langle B_\infty(v), w\rangle := \sum_{l=1}^{N} \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n} a_{i,\infty}^{(l)}(x, v(x), Dv(x)) D_i w^{(l)}(x) + a_{0,\infty}^{(l)}(x, v(x), Dv(x)) w^{(l)}(x) \right] dx. \tag{4.21}$$

A mi célunk, hogy belássuk a következőt. Létezik $u_\infty \in V$, amelyre $B_\infty(u_\infty) = F_\infty$ és $\lim_{t\to\infty} \|u(t) - u_\infty\|_{(L^2(\Omega))^N} = 0$. Megmutatjuk, hogy néhány plusz feltevés mellett ez valóban teljesül is.

4.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a 4.4. tétel feltételei, valamint minden rögzített* $v \in L^p_{\mathrm{loc}}(0, \infty; V)$*-re, melyre* $\int_\Omega |v(\cdot\,, x)|^2\, dx$ *korlátos, igaz a következő két feltétel:*

1. *Létezik* $c_v > 0$ *konstans,* $k_v \in L^q(\Omega)$ *függvény úgy, hogy*

$$|a_i^{(l)}(t, x, \zeta_0, \zeta; v)| \le c_v \left(|\zeta_0|^{p-1} + |\zeta|^{p-1} \right) + k_v(x) \tag{4.22}$$

m.m. $x \in \Omega$*-re és minden* $(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$*-re.*

2. *Léteznek* $a_{i,\infty}^{(l)}$ *Carathéodory-tulajdonságú függvények, melyekre*

$$\lim_{t\to\infty} a_i^{(l)}(t, x, \zeta_0, \zeta; v) = a_{i,\infty}^{(l)}(x, \zeta_0, \zeta) \tag{4.23}$$

m.m. $x \in \Omega$ *és minden* $(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$ *esetén* $(i = 0, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, N)$.

Ezenkívül létezik $c_5 > 0$ *konstans, hogy m.m.* $x \in \Omega$*, minden* $(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{R}^{(n+1)N}$ *és* $v \in L^p_{\mathrm{loc}}(0, \infty; V)$ *esetén*

$$\sum_{l=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} \left(a_i^{(l)}(t, x, \zeta_0, \zeta; v) - a_i^{(l)}(t, x, \eta_0, \eta; v) \right) (\zeta_i^{(l)} - \eta_i^{(l)}) \ge \tag{4.24}$$
$$\ge c_5 \left(|\zeta_0 - \eta_0|^p + |\zeta - \eta|^p \right) - [k_3(v)](t, x),$$

ahol

$$\lim_{t\to\infty} \int_\Omega [k_3(v)](t, x)\, dx = 0, \quad \text{ha} \quad \int_\Omega |v(\cdot\,, x)|^2\, dx \ \text{ korlátos } \ (L^\infty(0, \infty)\text{-ben}). \tag{4.25}$$

Végül tegyük fel, hogy létezik $F_\infty \in V^*$*, melyre* (4.20) *teljesül. Ekkor egyértelműen létezik* $u_\infty \in V$*, melyre* $B_\infty(u_\infty) = F_\infty$ *és* $\lim_{t\to\infty} \|u(t) - u_\infty\|_{(L^2(\Omega))^N} = 0$*, ahol* u *a* (4.1) *probléma megoldása.*

A bizonyítás előtt (egy külön állításban) megvizsgáljuk a B_∞ operátor tulajdonságait. Ezekből ugyanis azonnal következni fog $B_\infty(u_\infty) = F_\infty$ egyértelmű megoldhatósága.

4.7. Lemma. *A* (4.21) *formulával értelmezett* $B_\infty\colon V \to V^*$ *operátor korlátos, hemifolytonos, szigorúan monoton és koercitív.*

Bizonyítás [4.7. lemma]. Legyen $w(t) \equiv w \in V$ rögzített. Ekkor $\int_\Omega |v(\cdot\,,x)|^2\,dx = \int_\Omega |w(x)|^2\,dx$ korlátos, így (4.22) szerint

$$|a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;w)| \le c_w\left(|\zeta_0|^{p-1} + |\zeta|^{p-1}\right) + k_w(x),$$

ahonnan (4.23) felhasználásával $t \to \infty$ esetén kapjuk, hogy

$$|a_{i,\infty}^{(l)}(x,\zeta_0,\zeta)| \le c_w\left(|\zeta_0|^{p-1} + |\zeta|^{p-1}\right) + k_w(x).$$

Tehát létezik $\tilde{c}_1 > 0$ konstans és $\tilde{k}_1 \in L^q(\Omega)$ függvény úgy, hogy

$$|a_{i,\infty}^{(l)}(x,\zeta_0,\zeta)| \le \tilde{c}_1\left(|\zeta_0|^{p-1} + |\zeta|^{p-1}\right) + \tilde{k}_1(x), \tag{4.26}$$

Innen B_∞ korlátossága teljesen hasonlóan bizonyítható, mint a 2.1. tételben szereplő A operátor korlátossága, ezért a bizonyítást nem részletezzük.

A hemifolytonosság is a fenti becslésből következik. Legyen $\lambda_k \to \lambda$ számsorozat. Ekkor tetszőleges u, v, $w \in V$ esetén

$$\langle B_\infty(u-\lambda_k v), w\rangle = \sum_{l=1}^N\sum_{i=1}^n \int_\Omega a_{i,\infty}^{(l)}\big(x,u(x)-\lambda_k v(x), Du(x)-\lambda_k Dv(x)\big)D_i w^{(l)}(x)\,dx + \\ + \sum_{l=1}^N a_{0,\infty}^{(l)}\big(x,u(x)-\lambda_k v(x),Du(x)-\lambda_k Dv(x)\big)w^{(l)}(x)\,dx. \tag{4.27}$$

A fenti összegben az integrandusok pontonként konvergensek a Carathéodory-féle folytonossági feltétel miatt. Továbbá a Young-egyenlőtlenség és a (4.26) becslés miatt (az (1.1) egyenlőtlenség többszöri felhasználásával)

$$\begin{aligned}|a_{i,\infty}^{(l)}(x,u-\lambda_k v,Du-\lambda_k Dv)D_i w^{(l)}| &\le \frac{1}{q}|a_{i,\infty}^{(l)}(x,u-\lambda_k v,Du-\lambda_k Dv)|^q + \frac{1}{p}|D_i w^{(l)}|^p \le\\ &\le \text{const}\cdot\Big(|u-\lambda_k|^{(p-1)q} + |Du-\lambda_k v|^{(p-1)q} + |\tilde{k}_1|^q + |Dw|^p\Big) \le\\ &\le \text{const}\cdot\Big(|u|^p + |\lambda_k v|^p + |Du|^p + |\lambda_k Dv|^p + |\tilde{k}_1|^q + |Dw|^p\Big) \le\\ &\le \text{const}\cdot\Big(|u|^p + |v|^p + |Du|^p + |Dv|^p + |\tilde{k}_1|^q + |Dw|^p\Big).\end{aligned}$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy (λ_k) konvergens és így korlátos. A fenti egyenlőtlenség jobb oldalán $L^1(\Omega)$-beli függvények állnak, így (4.27) integrandusainak van integrálható majoránsa. Ekkor viszont a Lebesgue-tétel miatt

$$\lim_{k\to\infty}\langle B_\infty(u-\lambda_k v), w\rangle = \langle B_\infty(u-\lambda v), w\rangle,$$

ami éppen B_∞ hemifolytonosságát jelenti.

Legyen megint $w(t) \equiv w \in V$ rögzített. Ekkor a (4.24) feltételből adódóan tetszőleges v, $v_* \in V$ függvényekre

(4.28)

$$\sum_{l=1}^N\sum_{i=1}^n \int_\Omega \Big(a_i^{(l)}(t,x,v(x),Dv(x);w) - a_i^{(l)}(t,x,v_*(x),Dv_*(x);w)\Big)\,(D_i v^{(l)}(x) - D_i v_*^{(l)}(x))\,dx + \\ + \sum_{l=1}^N \int_\Omega \Big(a_0^{(l)}(t,x,v(x),Dv(x);w) - a_0^{(l)}(t,x,v_*(x),Dv_*(x);w)\Big)\,(v^{(l)}(x) - v_*^{(l)}(x))\,dx \ge \\ \ge c_5\int_\Omega (|v(x)-v_*(x)|^p + |Dv(x)-Dv_*(x)|^p)\,dx - \int_\Omega [k_3(w)](t,x)\,dx.$$

Az előzőekhez hasonlóan a (4.23) feltételből és a (4.26) becslésből következően $t \to \infty$ esetén Lebesgue-tételt használhatunk (ennek belátását már nem részletezzük). Ekkor (4.25) miatt a következőt kapjuk. Tetszőleges v, $v_* \in V$ függvényekre

$$\sum_{l=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \left(a_{i,\infty}^{(l)}(x,v(x),Dv(x)) - a_{i,\infty}^{(l)}(x,v_*(x),Dv_*(x))\right)(D_i v^{(l)}(x) - D_i v_*^{(l)}(x))\,dx +$$
$$+\sum_{l=1}^{N}\int_\Omega \left(a_{0,\infty}^{(l)}(x,v(x),Dv(x)) - a_{0,\infty}^{(l)}(x,v_*(x),Dv_*(x))\right)(v^{(l)}(x) - v_*^{(l)}(x))\,dx \geq$$
$$\geq c_5\int_\Omega (|v(x)-v_*(x)|^p + |Dv(x)-Dv_*(x)|^p)\,dx.$$

Más szóval

$$\langle B_\infty(v) - B_\infty(v_*), v - v_*\rangle \geq c_5\|v-v_*\|_V^p. \tag{4.29}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy B_∞ szigorúan monoton operátor.

A koercitivitás következik az előbbi becslésből, ugyanis $v_* = 0$ választással

$$\langle B_\infty(v) - B_\infty(0), v\rangle \geq c_5\|v\|_V^p,$$

és így

$$\frac{\langle B_\infty(v), v\rangle}{\|v\|_V} \geq c_5\|v\|_V^{p-1} - \frac{\langle B_\infty(0), v\rangle}{\|v\|_V} \geq c_5\|v\|_V^{p-1} - \|B_\infty(0)\|_{V^*}.$$

A fenti egyenlőtlenség jobb oldala $\|v\|_V \to \infty$ esetén ($p \geq 2$ miatt) $+\infty$-hez tart, amiből következik B_∞ koercitivitása. A lemma bizonyítása ezzel kész.

Bizonyítás [4.6. tétel]. A lemma miatt teljesülnek az 1.30. tétel feltételei, ezért egyértelműen létezik $u_\infty \in V$, melyre $B_\infty(u_\infty) = F_\infty$. Legyen $y(t) = \int_\Omega |u(t,x) - u_\infty|^2\,dx$, ahol u a (4.1) probléma megoldása. Vegyük észre, hogy a 4.4. tételből következően $\int_\Omega |u(t,x)|^2\,dx$ korlátos, és így y is az. Be kell látnunk, hogy $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty}\|u(t)-u_\infty\|^2_{(L^2(\Omega))^N} = 0$. Hasonlóan járunk el, mint a 4.4. tétel bizonyításában. Levezetünk egy y-ra vonatkozó becslést, amelyből következni fog az előbbi állítás.

Induljunk ki abból, hogy u kielégíti a (4.1) feladatot, és $B_\infty(u_\infty) = F_\infty$. Ez azt jelenti, hogy

$$D_t(u(t)-u_\infty) + [B(u)](t) - B_\infty(u_\infty) = F(t) - F_\infty$$

teljesül m.m. $t \in (0,\infty)$-re. Alkalmazzuk az egyenletet $u(t) - u_\infty$-re. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\langle D_t(u(t)-u_\infty), u(t)-u_\infty\rangle + \langle [B(u)](t) - B_\infty(u_\infty), u(t)-u_\infty\rangle = \tag{4.30}$$
$$= \langle F(t) - F_\infty, u(t)-u_\infty\rangle.$$

A fenti egyenlőség bal oldalán álló első tag (ahogy korábban láttuk) $y'(t)$-vel egyenlő. A második tagot bontsuk ketté a következő módon:

$$\langle [B(u)](t) - B_\infty(u_\infty), u(t)-u_\infty\rangle = \tag{4.31}$$
$$= \langle [B(u)](t) - [B_u(u_\infty)](t), u(t)-u_\infty\rangle + \langle [B_u(u_\infty)](t) - B_\infty(u_\infty), u(t)-u_\infty\rangle.$$

(A B_u operátor definícióját lásd a 3.2. megjegyzésben.) A (4.28) összefüggést v és w helyett u-val, illetve v_* helyett u_∞-nel felírva azt kapjuk, hogy

$$\langle [B(u)](t) - [B_u(u_\infty)](t), u(t)-u_\infty\rangle \geq c_5\|u(t)-u_\infty\|_V^p - \int_\Omega [k_3(u)](t,x)\,dx. \tag{4.32}$$

A (4.31) egyenlőség jobb oldalán álló tagot becsüljük az ε-egyenlőtlenség segítségével:

$$|\langle [B_u(u_\infty)](t) - B_\infty(u_\infty), u(t) - u_\infty\rangle| \le \frac{\varepsilon^p}{p}\|u(t) - u_\infty\|_V^p + \frac{1}{q\varepsilon^q}\|[B_u(u_\infty)](t) - B_\infty(u_\infty)\|_{V^*}^q. \tag{4.33}$$

Végül (4.30) jobb oldalát szintén az ε-egyenlőtlenség segítségével becsüljük:

$$|\langle F(t) - F_\infty, u(t) - u_\infty\rangle| \le \frac{\varepsilon^p}{p}\|u(t) - u_\infty\|_V^p + \frac{1}{q\varepsilon^q}\|F(t) - F_\infty\|_{V^*}^q. \tag{4.34}$$

Legyen $\varepsilon > 0$, melyre $\dfrac{\varepsilon^p}{p} < \dfrac{c_5}{3}$. Ekkor a (4.32), (4.33), (4.34) becsléseket (4.30)-ba visszahelyettesítve

$$\begin{aligned} y'(t) + \frac{c_5}{3}\|u(t) - u_\infty\|_V^p &\le \\ &\le \text{const} \cdot \|[B_u(u_\infty)](t) - B_\infty(u_\infty)\|_{V^*}^q + \|F(t) - F_\infty\|_{V^*}^q + \int_\Omega [k_3(u)](t,x)\,dx \end{aligned} \tag{4.35}$$

adódik. Korábban láttuk (lásd például (4.16)), hogy

$$y(t)^{\frac{p}{2}} \le \text{const} \cdot \|u(t) - u_\infty\|_V^p. \tag{4.36}$$

Másrészt állítjuk, hogy (4.35) jobb oldala $t \to \infty$ esetén 0-hoz tart. A középső tag a tétel feltétele szerint 0-hoz tart. Továbbá $\int_\Omega |u(\cdot\,,x)|^2\,dx$ korlátossága folytán a második tag a k_3-ra vonatkozó feltevés miatt szintén 0-hoz tart. Ezenkívül könnyen látható (Hölder-egyenlőtlenségek segítségével, lásd pl. (2.5)), hogy

$$\begin{aligned} \|[B_u(u_\infty)](t) - B_\infty(u_\infty)\|_{V^*} &\le \\ &\le \sum_{l=1}^N \sum_{i=0}^n \left(\int_\Omega \left| a_i^{(l)}(t,x,u_\infty(x), Du_\infty(x), u) - a_{i,\infty}^{(l)}(x, u_\infty(x), Du_\infty(x)) \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Itt az integrandusok $t \to \infty$ esetén pontonként konvergensek, továbbá a (4.22), (4.26) becslések segítségével (a korábbiakban már látott módon) könnyen látható, hogy van integrálható majoránsuk. Ekkor a Lebesgue-tétel miatt valóban $\lim\limits_{t\to\infty} \|[B_u(u_\infty)](t) - B_\infty(u_\infty)\|_{V^*}^q = 0$. Tehát (4.35) jobb oldala $t \to \infty$ esetén valóban 0-hoz tart.

Felhasználva az előbbi részállítást és (4.36)-ot, azt kaptuk, hogy érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$y'(t) + c \cdot y(t)^{\frac{p}{2}} \le \varphi(t), \tag{4.37}$$

ahol $c > 0$ konstans és $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$. Megmutatjuk, hogy ekkor szükségképpen $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem teljesül. Ekkor létezik $t_k \to \infty$ sorozat és $\varepsilon > 0$ szám úgy, hogy $y(t_k) > \varepsilon$. Feltehető, hogy $t_{k+1} - t_k \ge 1$ minden k-ra. Mivel y korlátos, ezért feltehető, hogy $(y(t_k))$ konvergens sorozat. Legyen k_0 olyan, hogy $k \ge k_0$ esetén $|y(t_{k+1}) - y(t_k)| \le \frac{c}{2}\varepsilon^{\frac{p}{2}}$. Integrálva a (4.37) egyenlőtlenséget a $[t_{k+1}, t_k]$ intervallumon ($k \ge k_0$) a következő adódik:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(t)\,dt \ge c\int_{t_k}^{t_{k+1}} y(t)^{\frac{p}{2}}\,dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\,dt \ge c\varepsilon^{\frac{p}{2}}(t_{k+1} - t_k) + y(t_{k+1}) - y(t_k).$$

Leosztva $t_{k+1} - t_k$-val kapjuk, hogy

$$\|\varphi\|_{L^\infty[t_{k+1},t_k]} \ge \frac{1}{t_{k+1} - t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(t)\,dt \ge c\varepsilon^{\frac{p}{2}} + \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \ge c\varepsilon^{\frac{p}{2}} - \frac{c}{2}\varepsilon^{\frac{p}{2}} = \frac{c}{2}\varepsilon^{\frac{p}{2}}.$$

Ez viszont ellentmondás, hiszen a bal oldal $k \to \infty$ esetén 0-hoz tart. Ezzel beláttuk, hogy $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

4.4. Példák

Most néhány példát mutatunk olyan függvényekre, melyek kielégítik az előző két szakaszban szereplő tételek felételeit.

Először nézzük a 4.3. tétel esetét. Tegyük fel, hogy az $a_i^{(l)}: Q_\infty \times \mathbb{R}^{(n+1)N} \times L^p_{\text{loc}}(0,\infty;V) \to \mathbb{R}$ függvények a 3.2 szakaszban szereplő (3.19)–(3.20)-nak megfelelő alakúak, azaz

$$(4.38)\quad a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;v) = [H^{(l)}(v)](t,x)b_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta) + [G^{(l)}(v)](t,x)d_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta) \text{ ha } i \neq 0, \text{ és}$$

$$(4.39)\quad a_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;v) = [H^{(l)}(v)](t,x)b_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta) + [G_0^{(l)}(v)](t,x)d_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta),$$

ahol a $b_i^{(l)}, d_i^{(l)}, H^{(l)}, G^{(l)}, G_0^{(l)}$ függvények ill. operátorok a következő tulajdonságokkal rendelkeznek. A

$$H^{(l)}: L^p_{\text{loc}}\big(0,\infty;(L^p(\Omega))^N\big) \to L^\infty_{\text{loc}}(Q_\infty),$$
$$G^{(l)}, G_0^{(l)}: L^p_{\text{loc}}\big(0,\infty;(L^p(\Omega))^N\big) \to L^{\frac{p}{p-1-r}}_{\text{loc}}(Q_\infty)$$

operátorok Volterra típusúak és minden $T>0$ esetén (mint $L^p\big(0,T;(L^p(\Omega)^N\big)$-ből képező operátorok) teljesítik a K5 feltételt . (A Volterra tulajdonság azt jelenti, hogy például $H^{(l)}(v)|_{Q_T} = H^{(l)}(v|_{(0,T)})$.) Továbbá a $b_i^{(l)}, d_i^{(l)}: Q_\infty \times \mathbb{R}^{(n+1)N}$ függvények m. m. $(t,x) \in Q_\infty$ esetén teljesítik a K1–K4 feltételeket (más szóval T helyett mindenütt ∞ írandó K1–K4-ben). Ekkor könnyen látható, hogy a fenti általános alakú példa kielégíti a 4.3. tétel felételeit. Az is egyszerűen belátható, hogy a 3.2.2 szakaszban szereplő konkrét példák megfelelnek e feltételeknek. Pontosabban azzal a módosítással, hogy a bennük szereplő segédfüggvényeket az egész Q_∞-n értelmezzük a megfelelő tulajdonságokkal (lásd pl. $a_j \in L^\infty_{\text{loc}}(Q_\infty)$).

Most nézzük a 4.4. tétel esetét! Korábbi vizsgálódásaink alapján (3.27)-ből következően világos, hogy g_2 mindig konstansnak adódik (mely független T-től, hiszen K1-K4 az egész Q_∞-n teljesül). Másrészt (3.27)-ből az is látszik, hogy $k_2 = h$, amely Volterra típusú (hiszen G_0^* az, mert minden l-re $G^{(l)}$ is az). Tehát az előzőeken kívül még annyit elegendő feltennünk, hogy minden $v \in L^p_{\text{loc}}(0,\infty;V)$ esetén

$$(4.40)\qquad \int_\Omega |G_0^{(l)}(v)|^{\frac{p}{p-1-r}}\,dx \le c_4\left(\sup_{\tau\in[0,t]}\|v(\tau)\|_H^{p_1} + \varphi(t)\sup_{\tau\in[0,t]}\|v(\tau)\|_H^p + 1\right).$$

Az alábbiakban ilyen tulajdonságú (Volterra-típusú) operátorra adunk példát.

Legyenek $\psi,\chi,\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, melyekre $|\psi(\tau)| \le \text{const}\cdot|\tau|^{p-1-r_0}$, $|\chi(\tau)| \le \text{const}\cdot|\tau|^{p-1-r}$ és $\lim_{\tau\to\infty}\varphi(\tau) = 0$, ahol $0 \le r < r_0 < p-1$. Tekintsük ekkor a következő $L^p_{\text{loc}}\big(0,T;(L^p(\Omega))^N\big)$-n értelmezett operátorokat:

$$[\tilde G_1(v)](t,x) := \psi\left(\left|\int_\Omega \sum_{j=1}^N a_j(t,\xi)|v^{(j)}(t,\xi)|^\alpha\,d\xi\right|^{\frac{1}{\alpha}}\right),$$
$$[\tilde G_2(v)](t,x) := \varphi(t)\chi\left(\left|\int_\Omega \sum_{j=1}^N a_j(t,\xi)|v^{(j)}(t,\xi)|^2\,d\xi\right|^{\frac{1}{2}}\right),$$

ahol $a_j \in L^\infty(Q_\infty)$ $(1 \le j \le N)$, $0 < \alpha \le 2$.

4.8. Állítás. *A fenti $\tilde G_1$, $\tilde G_2$ operátorok rendelkeznek a (4.40) tulajdonsággal.*

Bizonyítás. Először tekintsük a $\tilde{G}_1$ operátort. A feltételekből adódóan

$$|[\tilde{G}_1(v)](t,x)|^{\frac{p}{p-1-r}} \le \text{const} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} \int_\Omega \|a_j\|_{L^\infty(Q_\infty)} |v^{(j)}(t,\xi)|^\alpha \, d\xi \right)^{\frac{p\lambda}{\alpha}} \le$$

$$\le \text{const} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} \int_\Omega |v(t,\xi)|^\alpha \, d\xi \right)^{\frac{p\lambda}{\alpha}} = \text{const} \cdot \left(\int_\Omega |v(t,\xi)|^\alpha \, d\xi \right)^{\frac{p\lambda}{\alpha}},$$

ahol $0<\lambda = \frac{p-1-r_0}{p-1-r} < 1$. Vegyük észre, hogy $\int_\Omega |v(t,x)|^\alpha \, dx \le \text{const} \cdot \|v(\tau)\|_H^\alpha$. Valóban, $\alpha = 2$ esetén nyilván (konstans nélküli) egyenlőség van, egyébként pedig a Hölder-egyenlőtlenség szerint

$$\int_\Omega |v(t,x)|^\alpha \, dx \le \left(\int_\Omega |v(t,x)|^{\alpha \frac{2}{\alpha}} \, dx \right)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\int_\Omega 1 \right)^{\frac{2}{2-\alpha}} = \text{const} \cdot \|v(t)\|_H^\alpha.$$

Ezt felhasználva

$$[\tilde{G}_1(v)](t,x)|^{\frac{p}{p-1-r}} \le \text{const} \cdot \|v(t)\|_H^{p\lambda},$$

és így

$$\int_\Omega [\tilde{G}_1(v)](t,x)|^{\frac{p}{p-1-r}} \, dx \le \text{const} \cdot \|v(\tau)\|_H^{p\lambda} \le \text{const} \cdot \sup_{\tau \in [0,t]} \|v(\tau)\|_H^{p\lambda}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\tilde{G}_0$ teljesíti a (4.40) összefüggést, mégpedig $p_1 = p\lambda$-val.

A $\tilde{G}_2$ operátor esete teljesen hasonlóan vizsgálható, ekkor természetesen (4.40) másik tagja adódik a végső becslésben.

Végül nézzük a 4.6. tétel esetét! Itt csak egy konkrét példát adunk (ami a korábbiak egy lehetséges „keveréke”). Ez a példa (mint ahogy a tétel feltételei is) meglehetősen speciális. Legyenek az (4.38)–(4.39) általános formulában szereplő függvények a következők:

$$b_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta) := \zeta_i^{(l)} |\zeta^{(l)}|^{p-2}, \quad \text{ha } i \ne 0, \quad \text{és } b_0^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta) := \zeta_0^{(l)} |\zeta_0^{(l)}|^{p-2},$$

továbbá $i \ne 0$ esetén $d_i^{(l)} \equiv 0$, végül $d_0^{(l)} \equiv 1$ $(l = 1, \dots, N)$. Ezenkívül legyen

$$[G_0^{(l)}(v)](t,x) := \varphi(t) \cdot \chi \left(\left[\int_\Omega \sum_{j=1}^{N} a_j(t,\xi) |v^{(j)}(t,\xi)|^2 \, d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \right),$$

$$[H^{(l)}(v)](t,x) := [G_0^{(l)}(v)](t,x) + k(x),$$

ahol $k \in L^\infty(\Omega)$, melyre $k(x) \ge c^* > 0$, továbbá $b_j \in L^q(\Omega)$ $(1 \le j \le N)$, és φ, $\chi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ nemnegatív folytonos függvények, melyekre $\lim_{\tau \to \infty} \varphi(\tau) = 0$, $\chi(\tau) \le \text{const} \cdot |\tau|^{p-1-r}$.

Belátjuk, hogy a fenti példa valóban kielégíti a 4.6. tétel feltételeit. A χ függvény argumentumát (mivel $a_j \in L^\infty(Q_\infty)$) nyilván felülről becsülhetjük a $\text{const} \cdot \left(\int_\Omega |v(t,x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ kifejezéssel. Így, ha $\int_\Omega |v(\cdot\,,x)|^2 dx$ korlátos, akkor (φ végtelenbeli viselkedése miatt) nyilván teljesül (4.23). Sőt, ekkor (4.22) is teljesül, hiszen ekkor mind $H^{(l)}(v)$, mind pedig $G^{(l)}(v)$ m.m. $(t,x) \in Q_\infty$-re korlátos. Így $a_i^{(l)}$ $(i \ne 0)$ felülről becsülhető $\text{const} \cdot \left(|\zeta_0^{(l)}|^{p-1} + |\zeta^{(l)}|^{p-1} \right)$-nel, $a_0^{(l)}$ pedig konstanssal becsülhető. Az is világos, hogy $a_{i,\infty}^{(l)} = k \cdot b_i^{(l)}$, ha $i \ne 0$, és $a_{0,\infty}^{(l)} \equiv 0$.

A (4.24) tulajdonság a 3.2.2 szakasz legvégén szereplő 3.12. állítás (és az utána lévő 3.13. megjegyzés) segítségével látható be. Valóban,

$$(4.41)\quad \sum_{l=1}^{N}\sum_{i=0}^{n}\left(a_i^{(l)}(t,x,\zeta_0,\zeta;v)-a_i^{(l)}(t,x,\eta_0,\eta;v)\right)(\zeta_i^{(l)}-\eta_i^{(l)})=$$

$$=\sum_{l=1}^{N}[H^{(l)}(v)](t,x)\sum_{i=1}^{n}\left(\zeta_i^{(l)}|\zeta^{(l)}|^{p-2}-\eta^{(l)}|\eta_i^{(l)}|^{p-2}\right)(\zeta_i^{(l)}-\eta_i^{(l)})+\sum_{l=1}^{N}[G_0^{(l)}(v)](t,x)(\zeta_0^{(l)}-\eta_0^{(l)})\geq$$

$$\geq c^*\cdot\sum_{l=1}^{N}\left(|\zeta^{(l)}-\eta^{(l)}|^p+|\zeta_0^{(l)}-\eta_0^{(l)}|^p\right)+\sum_{l=1}^{N}[G_0^{(l)}(v)](t,x)(\zeta_0^{(l)}-\eta_0^{(l)}).$$

Itt a jobb oldal második tagját az ε-egyenlőtlenséggel (tagonként) becsülhetjük. Legyen $\varepsilon>0$, melyre $\frac{\varepsilon^p}{p}\leq\frac{c^*}{2N}$, ekkor

$$(4.42)\quad |[G_0^{(l)}(v)](t,x)(\zeta_0^{(l)}-\eta_0^{(l)})|\leq\frac{\varepsilon^p}{p}|\zeta_0^{(l)}-\eta_0^{(l)}|^p+\frac{1}{\varepsilon^q q}|[G_0^{(l)}(v)](t,x)|^q\leq$$

$$\leq\frac{c^*}{2N}|\zeta_0^{(l)}-\eta_0^{(l)}|^p+c'\cdot|\varphi(t)|^q\sup_{\tau\in[0,t]}\left(\int_\Omega|v(\tau,x)|^2\right)^{\frac{p}{2}}dx$$

adódik, felhasználva a 4.8. állítást ($r=0$-val). Jelöljük a fenti egyenlőtlenség jobb oldalán álló második tagot $[k_3(v)](t,x)$-szel, ekkor (4.42) segítségével (4.41) jobb oldalát alulról becsülhetjük a

$$\frac{c^*}{2}\cdot\sum_{l=1}^{N}\left(|\zeta^{(l)}-\eta^{(l)}|^p+|\zeta_0^{(l)}-\eta_0^{(l)}|^p\right)+N[k_3(v)](t,x)\geq\tilde{c}\cdot(|\zeta-\eta|^p+|\zeta_0-\eta_0|^p)+N[k_3(v)](t,x)$$

kifejezéssel. Mivel $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=0$, ezért k_3 definíciója alapján valóban $\lim_{t\to\infty}\int_\Omega[k_3(v)](t,x)\,dx=0$, ha $\int_\Omega|v(\cdot\,,x)|^2dx$ korlátos. Ezzel beláttuk, hogy a fenti példa eleget tesz a 4.6. tétel feltételeinek.

Irodalomjegyzék

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York - San Francisco - London, 1975.

[2] Besenyei Ádám, On systems of parabolic functional differential equations, *Annales Univ. Sci. Budapest*, **47** (2004), 143-160.

[3] J. Berkovits, V. Mustonen, Topological degree for perturbations of linear maximal monotone mappings and applications to a class of parabolic problems, *Rend. Mat. Ser. VII.*, **12**, Roma (1992), 597–621.

[4] F. E. Browder, Pseudo-monotone operators and nonlinear elliptic boundary value problems on unbounded domains, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **74** (1977), 2659–2661.

[5] J.L. Lions, *Quelques métodes de résolution des problémes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[6] Simon László, On parabolic functional differential equations of general divergence form, *megjelenés alatt, Proceedings of FSDONA 04.*

[7] Simon László, On systems of strongly nonlinear parabolic functional differential equations, *Periodica Math. Hung.*, **33** (1996), 145–151.

[8] Simon László, On nonlinear hyperbolic functional differential equations, *Math. Nachr.*, **217** (2000), 175–186.

[9] Simon László, On different types of nonlinear parabolic functional differential equations, *PU.M.A.*, **9** (1998), 181–192.

[10] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications II/A and II/B*, Springer, 1990.