Stacionárius folyamatok vizsgálata frekvencia-tartományban

Diplomamunka

készítette: Bauer Péter
ELTE TTK
alkalmazott matematikus, V. évfolyam

témavezető: Maricza István
BME
Távközlési és Telematikai Tanszék

2001

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Stacionárius folyamatokat a természettudományok számos területén alkalmaznak olyan jelenségek modellezésére, melyek jellemzői „állandósultak". Vizsgálatuk több módon lehetséges, a jelfeldolgozásban megszokott szóhasználattal élve időtartományban és frekvencia-tartományban is vizsgálódhatunk. Ez a dolgozat a stacionárius folyamatok frekvencia-tartományban történő vizsgálatával foglalkozik, ami a spektrális sűrűségfüggvénnyel való leírást jelenti majd.

Az utóbbi években előtérbe kerültek olyan modellek, például a távközlésben, amelyeknél a folyamatok időben távoli pontjai között számottevő korreláció van: az autokovariancia függvény lassan cseng le. Az ilyen folyamatok a hosszútávon összefüggő, más néven hosszú emlékezetű folyamatok. Ezeknek a folyamatoknak a hagyományos, rövidtávon összefüggő folyamatoktól eltérő statisztikai tulajdonságai vannak. A dolgozat nagy része egy olyan, a folyamatokon ható operációval, az aggregációval foglalkozik, amelynek segítségével a rövid és hosszútávon összefüggő folyamatok azonos módszerrel osztályozhatók.

Az 1. részben vezetjük be a spektrális sűrűségfüggvényt, és ez a rész tartalmazza a spektrális sűrűségfüggvény létezésére és előállítására vonatkozó állításokat. Ezek többségében elégséges feltételek, és Fourier-elméleti tételek alkalmazásai. Úgy tűnik, hogy ezt a témakört a stacionárius folyamatokkal foglalkozó szakirodalom meglehetősen elhanyagolja. Ebben a részben szerepel néhány közismert folyamat spektrális sűrűségfüggvényének kiszámítása is, és itt kerül bevezetésre a már említett hosszútávon összefüggő folyamatok fogalma időtartományban és frekvencia-tartományban.

A 2. rész a spektrális sűrűségfüggvény becslésével foglalkozik tömören, csak a főbb eredményeket ismertetve: a periodogramm aszimptotikus torzításával és a periodogramm eloszlásban való konvergenciájával foglalkozunk, megkülönböztetve az abszolút szummázható autokovariancia függvényű folyamatok esetét a hosszútávon összefüggő folyamatok esetétől.

A 3. rész az aggregációval foglalkozik. Az aggregáció egy folyamat egyenlő hosszú, egymást nem metsző szeleteit külön-külön átlagolja, majd az így kapott átlagokból új folyamatot készít. Ez még kutatás alatt álló terület, és a cél az volt, hogy a már ismert tételekre frekvencia-tartománybeli megközelítéssel más, lehetőleg egyszerűbb bizonyítást adjak. Ez csak részben sikerült: a tételekhez mindenféle többlet feltételt kellett feltenni, és bizonyos tételek átvitele megoldhatatlannak bizonyult számomra. Ez annak a következménye, hogy az aggregáció jóval komplikáltabban írható le frekvencia-tartományban, mint időtartományban, valamint az autokovariancia függvény és a spektrális sűrűségfüggvény közötti megfeleltetés nehézségeivel magyarázható.

A dolgozatban stacionárius folyamaton – ha másként nem mondjuk – diszkrét idejű, gyengén (másodrendben) stacionárius folyamatot értünk.

A saját tételeket, bizonyításokat a dolgozatban (*)-gal jelölöm.

1. A spektrális sűrűségfüggvény

1.1 Definíció *[BD96]*
Egy X_t stacionárius folyamat autokovariancia függvényén a

$$\gamma_X(k) = \operatorname{cov}(X_t, X_{t+k}), \quad k \in \mathbb{Z}$$

függvényt értjük.

1.2 Megjegyzés *Mivel stacionárius folyamatról van szó, a definícióban szereplő kovariancia értéke független t-től, így az autokovariancia függvény jól definiált.*

A definícióból látszik, hogy az autokovariancia függvény valós esetben szimmetrikus, komplex esetben Hermite tulajdonságú ($\gamma(k) = \overline{\gamma(-k)}$). Az autokovariancia függvényt karakterizálja az a tulajdonsága, hogy pozitív szemidefinit függvény. Azaz igaz a következő tétel.

1.3 Tétel *[BD96]*
A $\gamma(\cdot)$ (esetleg komplex értékű) egész számokon értelmezett függvény pontosan akkor autokovariancia függvénye egy (esetleg komplex értékű) stacionárius folyamatnak, ha $\gamma(\cdot)$ pozitív szemidefinit. Azaz ha

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_j \gamma(j-k) \overline{a}_k \geq 0,$$

tetszőleges n pozitív egész számra és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ komplex számokra.

Tekinthetjük úgy, hogy az autokovariancia függvény a folyamatot *időtartományban* jellemzi, hiszen időpontbeli értékek kovariancia struktúráját adja meg. Determinisztikus függvényeknél szokásos a függvényt *frekvencia-tartományban* is jellemezni, ami a függvény valamilyen Fourier-transzformációját jelenti. Ha egy stacionárius folyamatot frekvencia-tartományban szeretnénk vizsgálni, több lehetőségünk van. Felírhatjuk magát a folyamatot egy ortogonális sztochasztikus mérték szerinti integrál alakjában, a következőkben tárgyalandó Herglotz-tételben szereplő alakhoz hasonlóan, csak persze nem egy F függvény szerint integrálunk, hanem az említett ortogonális sztochasztikus mérték szerint ([BD96, 145. oldal]). Ezt hívják a folyamat spektrális reprezentációjának. A másik lehetőség, hogy az autokovariancia függvényt jellemezzük frekvencia-tartományban. Mi ez utóbbi utat fogjuk követni.

A következő tétel arról szól, hogy egy autokovariancia függvény mindig felírható ún. *Fourier-Stieltjes integrál* alakban. Ezt az autokovariancia függvény pozitív szemidefinitségéből lehet levezetni.

1.4 Tétel (Herglotz)*[BD96, 117. oldal]*
Egy komplex értékű, egészeken értelmezett $\gamma(\cdot)$ függvény akkor és csak akkor

autokovariancia függvénye egy (esetleg komplex értékű) stacionáris folyamatnak, ha

$$\gamma(h) = \int_{(-\pi,\pi]} e^{ih\nu} dF(\nu) \tag{1}$$

minden h egész számra, ahol

F egy monoton növekedő, jobbról folytonos függvény, ami korlátos a $[-\pi, \pi]$ intervallumon és $F(-\pi) = 0$.

Az (1) összefüggést a Fourier-analízisben szokásos szóhasználattal úgy is mondhatjuk, hogy az autokovariancia függvény $\gamma(h)$ értékei az F függvény *Fourier-Stieltjes együtthatói.* Az F függvényt hívják a folyamat és az autokovariancia függvény *spektrális eloszlásfüggvényének.* F persze csak akkor igazi eloszlásfüggvény, ha $\gamma(0) = 1$. A spektrális eloszlásfüggvényt egyértelműen meghatározza az autokovariancia függvény, azaz ha F és G két monoton növekedő, jobbról folytonos függvény, ami korlátos $[-\pi, \pi]$-ben, és $-\pi$-ben 0, és

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\nu} dF(\nu) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\nu} dG(\nu),$$

akkor $F(\lambda) = G(\lambda)$, minden $\lambda \in (-\infty, \infty)$-re ([BD96, 119. oldal]).

Ha van olyan f függvény, hogy $F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f(\nu)d\nu$, $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, akkor f a folyamat és $\gamma(\cdot)$ *spektrális sűrűségfüggvénye.* Az ilyen F függvények abszolút folytonos függvények. Ekkor

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\nu} f(\nu) d\nu.$$

Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy $\gamma(h)$ az f függvény h-adik *Fourier-együtthatója.* Ha a folyamatunk valós értékű, akkor az autokovariancia-függvénye is valós, amiből az következik, hogy az F spektrális eloszlásfüggvény szimmetrikus abban az értelemben, hogy

$$F(\lambda) = F(\pi^-) - F(-\lambda^-), \quad -\pi < \lambda < \pi$$

A spektrális sűrűségfüggvényre ilyenkor a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. $f(\lambda) \geq 0$,
2. $\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)d\lambda = F(\pi) < \infty$
3. $f(\lambda) = f(-\lambda)$.

Az első két tulajdonság komplex esetben is teljesül. Hasonlóan a spektrális eloszlásfüggvényhez, a spektrális sűrűségfüggvény is egyértelmű, azaz ugyanahhoz az autokovariancia függvényhez ugyanaz a spektrális sűrűségfüggvény tartozik. Az egyértelműséget m.m. (majdnem mindenütt) értjük, hiszen egy függvényt nullmértékű halmazon megváltoztatva Fourier-együtthatói változatlanok maradnak.

Ha egy folyamatnak van spektrális sűrűségfüggvénye, akkor autokovariancia függvénye lecsengő, tehát ∞-ben 0-hoz tart. Ezt a Riemann-Lebesgue lemma biztosítja ([Zyg59, 45. oldal]). Ez persze csak abban az esetben áll fenn, ha a spektrális sűrűségfüggvény csak közönséges függvény lehet és nem általánosított függvény (disztribúció). Amennyiben ugyanis megengedjük az általánosított függvényeket is, akkor például az azonosan 1 autokovariancia függvényhez a Dirac-δ spektrális sűrűségfüggvény tartozik. A továbbiakban csak közönséges függvényekkel foglalkozunk.

Előfordulhat-e, hogy egy γ autokovariancia függvény felírható úgy

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\nu} f(\nu) d\nu \tag{2}$$

alakban, hogy f L^1-beli, azaz abszolútértéke végesen integrálható $-\pi$-től π-ig, de nem igaz, hogy nemnegatív? A válasz nemleges, miután igaz az, hogy ha két korlátos változású függvény Fourier-Stieltjes együtthatói ugyanazok, akkor a két függvény különbsége konstans ([Zyg59, 41. oldal]). Így ha az autokovariancia függvény felírható (2) alakban, akkor az f integráljával meghatározott korlátos változású G függvénynek és a Herglotz-tételből kapott F spektrális eloszlásfüggvénynek különbsége konstans. Így G monoton növő, tehát f nemnegatív. Tehát igaz a következő tétel:

1.5 Tétel *(*) Ha γ egy autokovariancia függvény, és egy f L^1-beli függvény k-adik Fourier-együtthatója $\gamma(k)$, akkor létezik spektrális sűrűségfüggvény és ez megegyezik az f függvénnyel.*

Milyen F spektrális eloszlásfüggvényekhez létezik spektrális sűrűségfüggvény? Mivel F monoton növő, ezért minden pontja vagy folytonossági, vagy szakadási pont. Ha F legalább egy pontban szakad, akkor nyilván nem létezik spektrális sűrűségfüggvény. Azonban ha F folytonos, az sem biztosítja a spektrális sűrűségfüggvény létezését, hiszen konstruálható olyan monoton növő, folytonos függvény, amely nem abszolút folytonos. Ilyen például a Cantor-függvény. (lásd például [GO64, 96. oldal]). Láttuk, hogy az autokovariancia függvény lecsengése szükséges feltétele a spektrális sűrűségfüggvény létezésének. De nem elégséges feltétel: létezik olyan monoton növő, folytonos, de nem abszolút folytonos függvény, amelyre vonatkozó Fourier-Stieltjes együtthatók nullához tartanak a végtelenben, mégpedig $O(n^{-\frac{1}{2}+\epsilon})$ (tetszőleges $\epsilon > 0$-ra) nagyságrendben ([Zyg59, II.kötet, 146. oldal]). (A Cantor-függvény nem ilyen, annál az együtthatók nem tartanak 0-hoz [Zyg59, 196. oldal].) Tehát létezik olyan 0-hoz tartó autokovariancia függvény, amelynek nincs spektrális sűrűségfüggvénye. Az azonban igaz ([Zyg59, 108. oldal]), hogy ha az autokovariancia függvény ∞-ben 0-hoz tart, akkor F folytonos.

A most következőkben azzal foglalkozunk, hogy mi mondható l_1-beli sorozatokról, speciálisan l_1-beli autokovariancia függvényekről.

1.6 Tétel *[BD96, 120. oldal]*
Ha $K(\cdot)$ egészeken értelmezett komplex értékű függvény, és teljesül rá, hogy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |K(n)| < \infty,$$

vagyis $K \in l_1$, akkor $K(\cdot)$ felírható

$$K(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\nu} f(\nu) d\nu, \quad h = 0, \pm 1, \ldots$$

alakban, ahol

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\lambda} K(n). \tag{3}$$

1.7 Megjegyzés *A tétel bizonyítása integrál és szumma cserével történik, a K függvény abszolút szummázhatósága biztosítja azt, hogy ez megtehető.*

1.8 Megjegyzés *A (3) egyenlőség jobb oldalán álló trigonometrikus sort $K(\cdot)$* Fourier-traszformáltjának *fogjuk nevezni. Ezzel a szóhasználattal akkor fogunk élni, amikor nem abból indulunk ki, hogy $K(\cdot)$ valamilyen f függvény Fourier-együtthatóiként áll elő.*

Ennek a tételnek folyományaként adódik az alábbi fontos következmény, amely szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy egy l_1-beli sorozat autokovariancia függvény, kimondja, hogy l_1-beli autokovariancia függvényhez létezik spektrális sűrűségfüggvény, és adódik az is, hogy hogyan kell kiszámolni az autokovariancia függvényből a spektrális sűrűségfüggvényt.

1.9 Következmény *[BD96, 120. oldal]*
Ha $\gamma(\cdot) \in l_1$, azaz $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty$, akkor $\gamma(\cdot)$ pontosan akkor autokovariancia függvénye egy stacionárius folyamatnak, ha

$$f(\lambda) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\lambda} \gamma(k) \geq 0 \tag{4}$$

minden $\lambda \in [-\pi, \pi]$-re. Ekkor $\gamma(\cdot)$ spektrális sűrűségfüggvénye f.

1.10 Megjegyzés *Természetesen itt is, mint mindig, csak m.m. beszélhetünk a spektrális sűrűségfüggvény értékéről.*

1.11 Megjegyzés *Valós értékű folyamat esetén $\gamma(-k) = \gamma(k)$, így a spektrális sűrűségfüggvényre vonatkozó (4) kifejezés a következő alakba írható:*

$$f(\lambda) = \frac{\gamma(0)}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\lambda) \gamma(k)$$

Azt tehát már tudjuk, hogy ha az autokovariancia függvény l_1-beli, akkor létezik spektrális sűrűségfüggvénye. A következő tétel kimondja, hogy nem csak létezik, hanem folytonos is ebben az esetben.

1.12 Tétel *Ha $\gamma_X \in l_1$, akkor f_X folytonos.*

Bizonyítás: $f_X(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikt}\gamma_X(k)$, és $e^{-itk}\gamma_X(k)$-nak van t-től független szummábilis majoránsa, mégpedig $|\gamma_X(k)|$, tehát Lebesgue tétele értelmében

$$\lim_{t\to t_0} f_X(t) = f_X(t_0),$$

vagyis f_X folytonos tetszőleges $t_0 \in [-\pi, \pi]$ pontban.

■

Milyen autokovariancia függvényre teljesül, hogy l_1-beli? Például arra, amelyik csak véges sok helyen nem 0, biztosan. Arra is teljesül, amelyik a végtelenben aszimptotikusan $n^{-\alpha}$, ahol $\alpha > 1$, hiszen ekkor létezik N természetes szám, hogy $n \geq N$ esetén $\gamma(n) < 2n^{-\alpha}$ és $\gamma(n) > 0$, így a $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\gamma(n)|$ összeget szétválasztva egy $-(N-1)$ indextől $N-1$ indexig terjedő részre és egy $-\infty$-től $-N$-ig illetve egy N-től ∞-ig terjedő részre, a két végtelen összeg konvergens, mivel felülről becsülhető a konvergens $2\sum n^{-\alpha}$ összeggel ($\alpha > 1$). Hasonlóan belátható, hogy ha az autokovariancia függvény a végtelenben aszimptotikusan $n^{-\alpha}$, de itt $\alpha \leq 1$, akkor nem l_1-beli. Tehát a később tárgyalandó (1.26 Definíció) *hosszútávon összefüggő* folyamatok autokovariancia függvénye nem l_1-beli.

Az l_1-beli sorozatok után vizsgáljuk most az l_2-beli sorozatokat!

1.13 Tétel *Ha $K(\cdot)$ egészeken értelmezett komplex értékű függvény, és teljesül rá, hogy*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |K(n)|^2 < \infty,$$

vagyis $K \in l_2$, akkor $K(\cdot)$ felírható

$$K(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\nu} f(\nu) d\nu, \quad h = 0, \pm 1, \ldots$$

alakban, ahol

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\lambda}K(n).$$

Itt az egyenlőség m.m. értendő, és a jobb oldalon álló trigonometrikus sor is csak m.m. konvergens.

Bizonyítás: A Riesz-Fischer-tétel ([Zyg59, 127. oldal], nem tévesztendő össze az L^p terek teljességéről szóló Riesz-Fischer-tétellel) kimondja, hogy egy l_2-beli K-hoz létezik olyan $f \in L^2(-\pi, \pi)$, hogy az f k-adik Fourier-együtthatója $K(k)$.

A Carleson-tételből (lásd pl. [Cha87, 157. oldal]) pedig következik, hogy egy L^2-beli f függvény Fourier-sora m.m. konvergál az f-hez (ez L^p-beli $(1 < p \leq \infty)$ függvényekre is igaz).

■

Ez a tétel az 1.6 Tétel l_2-beli megfelelője annyi különbséggel, hogy az ott szereplő trigonometrikus sor $K \in l_1$ miatt nemcsak majdnem mindenütt, hanem minden pontban konvergens. Az alábbi fontos következményt kapjuk a tételből, amely az 1.9 Következmény l_2-beli változata, és többek között azt is kimondja, hogy l_2-beli autokovariancia függvénynek van spektrális sűrűségfüggvénye.

1.14 Következmény *(*) Ha $\gamma(\cdot) \in l_2$, azaz $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)|^2 < \infty$, akkor $\gamma(\cdot)$ pontosan akkor autokovariancia függvénye egy stacionárius folyamatnak, ha*

$$f(\lambda) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\lambda} \gamma(k) \geq 0 \tag{5}$$

m.m. $\lambda \in [-\pi, \pi]$-re. Ekkor $\gamma(\cdot)$ spektrális sűrűségfüggvénye f.

Bizonyítás: Az 1.13 Tétel kimondja, hogy f k-adik Fourier-együtthatója γ. Ezért, ha f m.m. nemnegatív, akkor γ autokovariancia függvény, és f a spektrális sűrűségfüggvénye. Megfordítva, ha γ autokovariancia függvény, akkor f nemnegativitása következik az 1.5 Tételből.

■

Ismert, hogy $l_1 \subset l_2$, tehát ebből a Következményből következik az l_1-beli sorozatokra vonatkozó 1.9 Következmény. Azért foglalkoztunk mégis előbb az l_1 esettel, mert egyrészt ott jóval egyszerűbbek a bizonyítások, szemben az l_2 esettel, ahol olyan erős tételt is felhasználtunk, mint a Carleson-tétel, másrészt az l_1 esetnél a spektrális sűrűségfüggvényt előállító trigonometrikus sor mindenhol konvergens, és az is kiderült, hogy a spektrális sűrűségfüggvény folytonos. Abból, hogy minden l_1-beli sorozat egyben l_2-beli sorozat is, az az apró megjegyzés következik, hogy az 1.9 Következménynél is elegendő f m.m. való nemnegativitását feltenni. Ez persze abból is következik, hogy egy m.m. nemnegatív, mindenhol folytonos függvény mindenhol nemnegatív.

Felmerülhet az a kérdés, hogy vajon valamilyen $p > 2$ esetén igaz-e, hogy minden l_p-beli autokovariancia függvénynek van spektrális sűrűségfüggvénye. A válasz az, hogy nem, mivel már az 1.5 Tétel utáni részben megemlítettük, hogy létezik olyan autokovariancia függvény, amely $O(n^{-\frac{1}{2}+\epsilon})$ nagyságrendben tart a 0-hoz tetszőlegesen kicsi $\epsilon > 0$-ra, de nincs spektrális sűrűségfüggvénye. Az ilyen autokovariancia függvény pedig tetszőleges $p > 2$-re benne van l_p-ben.

Belátható, hogy az 1.9 és az 1.14 Következménynél a következtetés egyik irányánál elhagyható az a feltétel, hogy az autokovariancia függvény l_1-beli, illetve l_2-beli legyen, viszont m.m. konvergencia és nemnegativitás helyett a mindenütt való konvergenciát és nemnegativitást kell megkövetelni: [Zyg59, 326. oldalon] szerepel az a tétel, hogy, ha egy $(2\pi)^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-ixn}$ trigonometrikus sor minden x-re konvergál egy véges $f(x)$-hez, ahol f integrálható függvény, akkor a trigonometrikus sor f Fourier-sora, azaz c_n-ek f Fourier-együtthatói. Ehhez vegyük hozzá azt a tételt, ami [Zyg59, 328. oldalon] szerepel, és kimondja, hogy ha a trigonometrikus sor nemnegatív függvényhez konvergál mindenhol, akkor ez a függvény integrálható. Így kapjuk a következő tételt:

1.15 Tétel *Ha egy $\gamma(\cdot)$ egészeken értelmezett függvényre*

$$f(\lambda) := \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\lambda}\gamma(k)$$

konvergens és nemnegatív minden $\lambda \in [-\pi, \pi]$-re, akkor γ autokovariancia függvény és f a spektrális sűrűségfüggvénye.

A következő tételből ([Zyg59, 183. oldal]) szintén egy elégséges feltételt kaphatunk a spektrális sűrűségfüggvény létezésére.

1.16 Tétel *Ha $a_k \to 0$ és az $a_0, a_1, \ldots$ sorozat konvex, akkor az*

$$\frac{1}{2\pi}a_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \tag{6}$$

sor konvergál – kivéve esetleg $x = 0$-ban – egy nemnegatív, integrálható, valamint folytonos ($x \neq 0$) $f(x)$ függvényhez, és $\frac{1}{2\pi}a_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$ a Fourier-sora az f-nek, vagyis $a_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} f(x)dx$.

Az $a_0, a_1, \ldots$ sorozat konvexitása azt jelenti, hogy $\Delta^2 a_k \geq 0$ minden k-ra, ahol $\Delta a_k = a_k - a_{k+1}$, $\Delta^2 a_k = \Delta a_k - \Delta a_{k+1}$. Geometriailag ez azt jelenti, hogy a (k, a_k) pontok által meghatározott töröttvonal konvex. Igaz az, hogy ha $\{a_k\}$ konvex és korlátos, akkor monoton csökkenő. Az 1.16 Tételben tehát a feltétel teljesüléséhez szükséges, hogy a_k monoton csökkenő módon tartson 0-hoz.

Esetünkben, amikor a spektrális sűrűségfüggvény létezésére keresünk feltételt, a_k az autokovariancia függvény lesz a k helyen, vagyis $a_k := \gamma(k)$. Az 1.16 Tétel szerint tehát a konvex, 0-hoz tartó autokovariancia függvényeknek van spektrális sűrűségfüggvényük. Sőt, az is következik, hogy egy konvex, 0-hoz tartó sorozat autokovariancia függvény. A konvexitás nem jelent megkötést az autokovariancia függvény lecsengésének gyorsaságára, ugyanis konstruálható tetszőleges $\varepsilon_n \to 0$ pozitív számok sorozatához a_n konvex sorozat úgy, hogy $a_n \geq \varepsilon_n$ és $a_n \to 0$.

Az 1.16 Tétel feltétele enyhíthető, ha a_k-ról mindjárt feltesszük, hogy autokovariancia függvény. Ugyanis az 1.16 Tétel kis módosítása úgy szól ([Zyg59, 184. oldal]), hogy ha annyit teszünk fel, hogy a_k monoton csökkenően tart nullához, akkor a (6) sor konvergál $x = 0$-át esetleg kivéve egy $x \neq 0$ -ban folytonos $f(x)$ függvényhez, amelynek Fourier-együtthatói a_k-k. Itt tehát kimarad az az állítás, hogy f nemnegatív. Ha azonban a_k egy autokovariancia függvény, akkor ez automatikusan következik. Tehát az eredmény az alábbi tétel.

1.17 Tétel *(*) Ha γ autokovariancia függvény, és $\gamma(k)$, $k \geq 0$ monoton csökkenően tart 0-hoz, akkor létezik spektrális sűrűségfüggvénye.*

Foglaljuk össze röviden az ebben a szakaszban szerepelt feltételeket!
γ autokovariancia függvénynek létezik spektrális sűrűségfüggvénye, ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

1. γ l_1-beli,
2. γ l_2-beli,
3. γ Fourier-transzformáltja mindenhol konvergens és nemnegatív,
4. $\gamma(k)$ $(k \geq 0)$ monoton csökkenően tart a nullához.

Az 1., 2. és 3. feltétel komplex autokovariancia függvényre is teljesül, míg a 4. csak valós esetben. Ha valamelyik feltétel teljesül, akkor a γ Fourier-transzformáltja m.m. megegyezik a spektrális sűrűségfüggvénnyel. Az 1. feltétel teljesülése esetén a spektrális sűrűségfüggvény mindenhol folytonos (m.m. megegyezik egy folytonos függvénnyel), míg 4. esetén 0 kivételével mindenhol folytonos.

1.1. Fehér zaj

A legegyszerűbb stacionárius folyamat a fehér zaj.

1.18 Definíció *[BD96]*
Egy Z_t stacionárius folyamatot fehér zajnak hívunk, jelölésben: $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$, ha $Z_1, Z_2, \ldots$ korrelálatlan, 0 várható értékű, σ^2 szórásnégyzetű valószínűségi változók.

Az 1.9 Következményben szereplő eredmény segítségével számoljuk ki a fehér zaj spektrális sűrűségfüggvényét!

1.19 Tétel *[BD96]*
Legyen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ egy korrelálatlan folyamat, $E(\varepsilon_i) = 0$, $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_\varepsilon^2$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Ekkor $\{\varepsilon_t\}$ folyamatnak létezik spektrális sűrűségfüggvénye, és ez

$$f_\varepsilon(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}.$$

Bizonyítás: Az autokovariancia függvényre igaz, hogy $\gamma_\varepsilon(t) = 0$, $t \neq 0$ a korrelálatlanság miatt, és $\gamma_\varepsilon(0) = \sigma_\varepsilon^2$, így az autokovariancia függvény l_1-beli. Most alkalmazzuk az 1.9 Következményt, és így kapjuk, hogy

$$f_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\lambda} \gamma_\varepsilon(k) = \frac{1}{2\pi} \gamma_\varepsilon(0) = \frac{1}{2\pi} \sigma_\varepsilon^2$$

$\blacksquare$

Látható, hogy a fehér zaj spektrális sűrűségfüggvénye konstans, nem függ a λ frekvenciától.

1.2. Lineáris időinvariáns szűrő és a spektrális sűrűségfüggvény

Most nézzük meg, mi történik, ha az idősort ún. lineáris időinvariáns szűrővel szűrjük! Először definiáljuk [BD96, 122. oldal]-t követve, hogy mi is az a lineáris időinvariáns szűrő.

1.20 Definíció *Azt mondjuk, hogy Y_t folyamat az X_t folyamat $\psi = \{\psi_j : j \in \mathbb{Z}\}$ lineáris időinvariáns szűrővel szűrt folyamata, ha*

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}, \tag{7}$$

és

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty.$$

A (7) egyenletet rövidebben az

$$Y = \psi * X$$

jelöléssel is írhatjuk, ahol a $*$ a konvolúciót jelenti. A $\tilde{\psi}(\lambda)$ függvénnyel fogjuk a ψ lineáris időinvariáns szűrő átviteli függvényét jelölni, amely

$$\tilde{\psi}(\lambda) := \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-i\lambda j}.$$

Vizsgáljuk a szűrt folyamat spektrális sűrűségfüggvényét! Először a spektrális eloszlásfüggvényt vizsgáljuk:

1.21 Tétel *[BD96, 122. oldal]*
Ha $X(t)$ 0 várható értékű stacionárius folyamat F_X spektrális eloszlás-függvénnyel, és $Y(t)$ a $\psi = \{\psi_j : j \in \mathbb{Z}\}$ lineáris időinvariáns szűrővel $X(t)$-ből kapott folyamat, akkor $Y(t)$ stacionárius, és spektrális eloszlásfüggvénye

$$F_Y(\lambda) = \int_{(-\pi,\lambda]} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-ij\nu} \right|^2 dF_X(\nu), \quad -\pi \le \lambda \le \pi$$

Ebből már következik az eredmény a spektrális sűrűségfüggvényre:

1.22 Következmény *Legyen $X(t)$ stacionárius folyamat, $Y(t)$ pedig a ψ lineáris időinvariáns szűrővel szűrt folyamat. Ha $X(t)$-nek van f_X spektrális sűrűségfüggvénye, akkor $Y(t)$-nek is van f_Y spektrális sűrűségfüggvénye és*

$$f_Y(\lambda) = |\tilde{\psi}(\lambda)|^2 f_X(\lambda),$$

ahol $\tilde{\psi}$ a ψ átviteli függvénye.

1.3. ARMA folyamatok

Az ARMA folyamatokat régóta használják folyamatok modellezésére, becslésére. Ez viszonylag egyszerű kezelhetőségük eredménye.

Először is lássuk az ARMA folyamat definícióját!

1.23 Definíció *[BD96, 78. oldal]*
X_t stacionárius folyamatot ARMA(p, q) folyamatnak nevezzük, ha

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t,$$

ahol $Z_t \sim WN(0, \sigma^2)$, és $\phi(z)$ p-ed fokú, $\theta(z)$ q-ad fokú polinom z-ben. B a back-shift operátor, vagyis $BX_t = X_{t-1}$.

Az 1.22 Következmény alkalmazásával levezethetjük egy ARMA(p, q) folyamat spektrális sűrűségfüggvényét.

1.24 Tétel *[BD96, 123. oldal]*
X_t legyen egy ARMA(p, q) folyamat, amire

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t,$$

ahol Z_t 0 várható értékű, σ^2 szórásnégyzetű fehér zaj. $\phi(z)$ p-ed fokú, $\theta(z)$ q-ad fokú polinom z-ben, nincs közös nullhelyük, és $\phi(z)$-nek nincs nullhelye az egységkör kerületén. B a backshift operátor. Ekkor X_t-nek van spektrális sűrűségfüggvénye, és ez

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2}.$$

Bizonyítás: Ismert [BD96]-ből, hogy X_t felírható $\sum \psi_j Z_{t-j}$ alakban, ahol $\sum |\psi_j| < \infty$, tudjuk, hogy a fehér zajnak van spektrális sűrűségfüggvénye (1.19 Tétel), tehát az 1.22 Következmény szerint X_t-nek is van spektrális sűrűségfüggvénye. Legyen $U_t := \phi(B)X_t = \theta(B)Z_t$, akkor az 1.22 Következményt felhasználva a következő, spektrális sűrűrűségfüggvények közötti összefüggést írhatjuk fel:

$$f_U(\lambda) = |\phi(e^{-i\lambda})|^2 f_X(\lambda) = |\theta(e^{-i\lambda})|^2 f_Z(\lambda).$$

Az 1.19 Tételből következik, hogy $f_Z(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$. Ezt írjuk be az előbbi egyenlőségbe, majd osszunk át $|\phi(e^{-i\lambda})|^2$-tel (felhasználva azt, hogy $\phi(z)$-nek nincs nullhelye az egységkörön), és így kapjuk f_X-re a bizonyítandó állítást.

■

1.4. Frakcionális ARIMA folyamatok

A *frakcionális ARIMA* (fARIMA) folyamatok az ARMA folyamatokból származtathatóak. Hosszútávon összefüggő folyamatok modellezésére használhatóak. Az alábbiakban definiáljuk a fARIMA folyamatokat, majd levezetjük a spektrális sűrűségfüggvényüket! Az ARIMA és fARIMA folyamatok definíciója hasonló az ARMA folyamatokhoz. Míg egy X_t ARMA folyamatnál $\phi(B)X_t = \psi(B)Z_t$ teljesült, ahol Z_t fehér zaj volt, addig egy ARIMA(p, d, q) folyamatra (d nemnegatív egész) a megfelelő egyenlet:

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = \psi(B)Z_t. \tag{8}$$

Mivel $(1-B)X_t = X_t - X_{t-1}$, $(1-B)^2 X_t = (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2})$, stb., ezért $(1-B)^d$-t joggal hívhatjuk a d-edik differencia operátornak. A felírt (8) egyenlet értelmezhető úgy, hogy X_t d-edik differenciája egy ARMA(p, q) folyamat. Tehát X_t egy ARMA folyamat „integráltja", ha az integrálást most mint a d-edik differenciaképzés inverz műveleteként tekintjük. Innen jön az ARIMA elnevezés is: integrált ARMA folyamat. Ha $(1-B)^d$-t kifejtjük:

$$(1-B)^d = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} (-1)^k B^k, \tag{9}$$

ahol

$$\binom{d}{k} = \frac{d!}{k!(d-k)!} = \frac{\Gamma(d+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d-k+1)}.$$

A Γ függvénnyel való felírás segítségével $(1-B)^d$-t általánosítani tudjuk tetszőleges valós d-re:

$$(1-B)^d := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} (-1)^k B^k.$$

Ha itt d nemnegatív egész, akkor $k > d$-re $\binom{d}{k} = 0$. Így ebben az esetben visszakapjuk a korábbi (9)-beli definíciót. Most, hogy $(1-B)^d$-t már definiáltuk valós d-kre is, ennek segítségével $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$-re a (8) egyenlettel definiálható X_t stacionárius folyamatot frakcionális ARIMA folyamatnak nevezzük. A d-re vonatkozó korlátok a folyamat stacionaritása miatt kellenek ([Ber94, 60. oldal]). A definíciót úgy is fel lehet fogni, hogy egy fARIMA(0, d, 0) folyamatot átengedünk egy ARMA(p, q) szűrőn. Tehát ha a fARIMA(0, d, 0) folyamat spektrális sűrűségfüggvénye f, akkor az X_t spektrális sűrűségfüggvénye $f_X(\lambda) = f(\lambda)\frac{|\theta(e^{-i\lambda}|^2}{|\phi(e^{-i\lambda}|^2}$. Így elegendő fARIMA(0, d, 0) spektrális sűrűségfüggvényével foglalkozni. A megfelelő definiáló egyenlet tehát:

$$(1-B)^d X_t = Z_t,$$

illetve

$$X_t = (1-B)^{-d} Z_t.$$

Láttuk már az 1.22 Következménynél, hogy, ha X_t-t Y_t-ből a $\sum a(s)Y_{t-s}$ lineáris szűrővel kapjuk, és Y_t-nek f_Y a spektrális sűrűségfüggvénye, akkor X_t spektrális sűrűségfüggvénye $|A(\lambda)|^2 f_Y(\lambda)$, ahol $A(\lambda) = \sum a(s)e^{is\lambda}$. Most Y_t legyen Z_t, és tudjuk, hogy $X_t = (1-B)^{-d} Z_t = \sum \binom{-d}{s}(-1)^s Z_{t-s}$, így $A(\lambda) = \sum \binom{-d}{s}(-1)^s e^{is\lambda}$, ami éppen $(1 - e^{i\lambda})^{-d}$ kifejtése, tehát $|A(\lambda)|^2 = |1 - e^{i\lambda}|^{-2d}$. Tehát fARIMA(0, d, 0) spektrális sűrűségfüggvénye:

$$\frac{\sigma^2}{2\pi}|1 - e^{i\lambda}|^{-2d}.$$

Így kapjuk a következő tételt.

1.25 Tétel *Egy X_t fARIMA(p, d, q) folyamatnak, amelyre*

$$\phi(B)(1 - B)^d X_t = \psi(B)Z_t,$$

a spektrális sűrűségfüggvénye:

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}|1 - e^{i\lambda}|^{-2d} \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\phi(e^{-i\lambda})|^2}. \tag{10}$$

Mivel $|1 - e^{i\lambda}| = 2\sin\frac{1}{2}\lambda$ és $\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-1}(2\sin\frac{1}{2}\lambda) = 1$, ezért a spektrális sűrűségfüggvény az origóban:

$$f(\lambda) \sim f_{ARMA}(0)|\lambda|^{-2d}. \tag{11}$$

Így $d > 0$-ra a spektrális sűrűségfüggvénynek pólusa van a nullában. Ha $0 < d < \frac{1}{2}$, akkor fellép a *hosszútávú összefüggés* jelensége.

1.5. Hosszútávon összefüggő folyamatok

A hosszútávú összefüggést lehet az autokorreláció (autokovariancia) függvénnyel vagy a spektrális sűrűségfüggvénnyel definiálni. Nézzük előbb az autokorrelációs definíciót. Itt és a későbbiekben is ρ-val az autokorreláció függvényt jelöljük.

1.26 Definíció *Legyen X_t egy stacionárius folyamat, amire a következő teljesül. Létezik egy $\alpha \in (0, 1)$ valós szám és egy $c_\rho > 0$ konstans úgy, hogy*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\rho(k)}{c_\rho k^{-\alpha}} = 1. \tag{12}$$

Ekkor X_t-t stacionárius hosszútávon összefüggő (LRD) folyamatnak, vagy hosszú emlékezetű folyamatnak nevezzük.

Gyakran α helyett a $H = 1 - \alpha/2$ paramétert használjuk. Ezt a H paramétert szokás *Hurst-paraméternek* nevezni. Hosszútávú összefüggés tehát $\frac{1}{2} < H < 1$ esetén jelentkezik.

1.27 Definíció *Legyen X_t egy olyan stacionárius folyamat, amire igaz, hogy létezik $\beta \in (0,1)$ valós szám és egy $c_f > 0$ konstans úgy, hogy*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda)}{c_f |\lambda|^{-\beta}} = 1. \tag{13}$$

Ekkor X_t LRD folyamat.

Itt β paraméter mellett $H = \frac{1}{2}(\beta + 1)$ is használatos. A definíciókban szereplő feltételek aszimptotikus jelöléssel írhatóak

$$\rho(k) \sim_{k \to \infty} c_\rho k^{-\alpha}$$

illetve

$$f(\lambda) \sim_{\lambda \to 0} c_f |\lambda|^{-\beta}$$

alakban. Az $f(x) \sim_{x \to a} g(x)$ jelölés azt jelenti, hogy f és g függvény aszimptotikusan ekvivalens $x \to a$ mellett, azaz $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Az $f(x) \sim g(x)$ jelölés az $f(x) \sim_{x \to \infty} g(x)$ összefüggést jelöli.

Az 1.26 és az 1.27 Definíciók ekvivalensek ([Ber94, 43. oldal]):

1.28 Tétel *(i) Tegyük fel, hogy (12) egyenlőség $0 < \alpha = 2 - 2H < 1$-gyel teljesül. Ekkor a spektrális sűrűségfüggvény f létezik és*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda)}{c_f |\lambda|^{1-2H}} = 1,$$

ahol

$$c_f = \sigma^2 \pi^{-1} c_\rho \Gamma(2H - 1) \sin(\pi(1 - H))$$

és $\sigma^2 = \mathrm{var}(X_t)$.
(ii) Tegyük fel, hogy (13) egyenlőség teljesül $0 < \beta = 2H - 1 < 1$-re. Ekkor

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\rho(k)}{c_\rho k^{2H-2}} = 1,$$

ahol

$$c_\rho = 2\sigma^{-2} c_f \Gamma(2 - 2H) \sin\left(\pi \left(H - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Az 1.27 definíció és a fARIMA folyamatok spektrális sűrűségfüggvényének nullabeli pólusáról (11)-ben felírt kifejezés alapján adódik, hogy a fARIMA(p, d, q), $0 < d < \frac{1}{2}$ folyamatok hosszútávon összefüggő folyamatok $H = d + \frac{1}{2}$ paraméterrel.

1.6. A frakcionális Gauss-zaj

A frakcionális Gauss-zaj (FGN) a frakcionális Brown-mozgás (FBM) növekményi folyamata. A frakcionális Brown-mozgást sokféleképpen lehet definiálni. Itt a következőképpen definiáljuk:

1.29 Definíció *[Ber94]*
H paraméterű ($0 \leq H \leq 1$) frakcionális Brown-mozgásnak hívjuk azt az $X(t)$ $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ folyamatot, amelyre a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. *stacionárius növekményű*
2. $X(0) = 0$, 1 *valószínűséggel*
3. $X(t)$ *Gauss-folyamat*
4. $E(X(t) - X(s)) = 0$
5. $\mathrm{var}(X(t) - X(s)) = \sigma^2 |t-s|^{2H}$
6. *folytonos trajektóriájú*

1.30 Megjegyzés *A definícióban az 5-ös pont helyett gyakran a folyamat* önhasonlóságát *szabják feltételül. Ez azt jelenti, hogy $X(ct)$ és $c^H X(t)$ véges dimenziós eloszlásai megegyeznek, azaz*

$$(X(ct_1), X(ct_2), \ldots, X(ct_n)) \stackrel{d}{=} c^H (X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)),$$

tetszőleges n-re és $t_1, t_2, \ldots, t_n$ számokra.

Az FBM tulajdonságaiból egyszerűen levezethető a kovariancia függvénye:

1.31 Tétel *Ha $X(t)$ H paraméterű frakcionális Brown-mozgás, akkor*

$$\mathrm{cov}(X(t), X(s)) = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ |t|^{2H} - |t-s|^{2H} + |s|^{2H} \right\}.$$

1.32 Definíció *[Ber94]*
A frakcionális Gauss-zaj a frakcionális Brown-mozgás növekményi folyamata, azaz ha $X(t)$-vel jelöljük a frakcionális Brown-mozgást, akkor

$$Y(k) = X(k) - X(k-1) \quad k \geq 1 \text{ egész}$$

a frakcionális Gauss-zaj.

Mivel az FBM stacionárius növekményű, ezért a FGN stacionárius folyamat. Az FBM kovariancia függvényéből könnyedén kiszámolható a frakcionális Gauss-zaj autokovariancia függvénye:

1.33 Tétel *[Ber94]*
A H paraméterű frakcionális Gauss-zaj autokovariancia függvénye

$$\gamma(k) = \frac{\sigma^2}{2}\left\{|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H}\right\}.$$

Taylor-sorfejtéssel megmutatható, hogy $\gamma(k) \sim \sigma^2 H(2H-1)k^{2H-2}$. Tehát, ha $\frac{1}{2} < H < 1$, akkor a frakcionális Gauss-zaj hosszútávon összefüggő H Hurst-paraméterrel. Ezért viszonylagos egyszerűsége folytán az FGN a hosszútávon összefüggő folyamatok népszerű modellje, bár nem tökéletes, hiszen várható értéke 0, mégis nyilvánvalóan nem-nulla várható értékű folyamatokat modelleznek vele (például adatforgalmi modelleknél: [Nor95]).

Most a frakcionális Gauss-zaj spektrális sűrűségfüggvényével foglalkozunk. Kiszámolásához fel fogjuk írni a folyamat ún. *harmonizálható reprezentációját*, ami a folyamatot a t pontban egy t-től függő integrandusnak egy $\tilde{M}$ komplex, izotróp, azaz forgatás-invariáns véletlen mérték szerinti integráljaként állítja elő. Ehhez a felíráshoz előbb a frakcionális Brown-mozgásnak adjuk meg a harmonizálható reprezentációját. Az itt használt eredmények a harmonizálható reprezentációról megtalálhatóak [ST94, 318-333. oldalon]. Az $\tilde{M}$ véletlen mérték szerinti integrál egy fontos tulajdonságáról, az izometriájáról szól a következő tétel.

1.34 Tétel

$$EI(f_1)I(f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}dx,$$

ahol $I(f_1)$ és $I(f_2)$ két, $\tilde{M}$ véletlen mérték szerinti integrál f_1 illetve f_2 integrandussal.

Most nézzük a frakcionális Brown-mozgás harmonizálható reprezentációját!

1.35 Tétel *Legyen $0 < H < 1$. Akkor a $\{B_H(t),\, t \in \mathbb{R}\}$ H-paraméterű, σ_0^2 szórásnégyzetű frakcionális Brown-mozgás a következő alakba írható:*

$$B_H(t) = \frac{\sigma_0}{C_2(H)}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}-1}{ix}|x|^{-(H-1/2)}\tilde{M}(dx), \quad t \in \mathbb{R},$$

ahol

$$C_2(H) = \left(\frac{\pi}{H\Gamma(2H)\sin H\pi}\right)^{1/2}.$$

A tétel bizonyításának lényege, hogy ellenőrizni kell, hogy az integrállal definiált folyamat H-paraméterű önhasonló, stacionárius növekményű folyamat, melynek szórásnégyzete σ_0^2.

Most könnyen megkaphatjuk az FGN harmonizálható reprezentációját, figyelembe véve, hogy az FGN a frakcionális Brown-mozgás növekményi folyamata, vagyis ha Y_j-vel jelöljük az FGN folyamatot a j időpontban, akkor $Y_j = B_H(j+1) - B_H(j)$. Így kapjuk:

1.36 Tétel *Az $\{Y_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ H-paraméterű, σ_0^2 szórásnégyzetű FGN folyamat harmonizálható reprezentációja:*

$$\frac{\sigma_0}{C_2(H)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixj} \frac{e^{ix}-1}{ix} |x|^{-(H-1/2)} \tilde{M}(dx), \quad j \in \mathbb{Z},$$

ahol $C_2(H)$ ugyanaz, mint az 1.35 Tételben.

Ennek az állításnak és az 1.34 Tétel segítségével írjuk fel $\gamma(j)$-t, az FGN autokovariancia függvényét a j helyen.

$$\begin{aligned}
\gamma(j) = EY_0Y_j = \sigma_0^2 C_2^{-2}(H) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixj} \left| \frac{e^{ix}-1}{ix} \right|^2 |x|^{-2(H-1/2)} dx \\
= \sigma_0^2 C_2^{-2}(H) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixj} |e^{ix}-1|^2 |x|^{-2H-1} dx \\
= \sigma_0^2 C_2^{-2}(H) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k} e^{ixj} |e^{ix}-1|^2 |x|^{-2H-1} dx \\
= \sigma_0^2 C_2^{-2}(H) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda j} |e^{i\lambda}-1|^2 |\lambda + 2\pi k|^{-2H-1} d\lambda \\
= \sigma_0^2 C_2^{-2}(H) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda j} |e^{i\lambda}-1|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\lambda + 2\pi k|^{2H+1}} d\lambda.
\end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy $\gamma(j) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda j} f(\lambda) d\lambda$, ahol $f(\lambda)$ a spektrális sűrűségfüggvény, kapjuk:

1.37 Tétel *A H-paraméterű, σ_0^2 szórásnégyzetű FGN spektrális sűrűségfüggvénye*

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_0^2}{C_2^2(H)} |e^{i\lambda}-1|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\lambda + 2\pi k|^{2H+1}}, \quad -\pi \le \lambda \le \pi.$$

2. A spektrális sűrűségfüggvény becslése

A spektrális sűrűségfüggvény becslésére használatos a *periodogramm.* Egy tetszőleges $x \in \mathbb{C}^n$ vektorra értelmezhető az I periodogramm, mégpedig egy $\omega_j = 2\pi j/n$ ún. Fourier-frekvenciánál a következőképpen:

2.1 Definíció *Ha $x \in \mathbb{C}^n$, ω_j egy Fourier-frekvencia, akkor*

$$I(\omega_j) := |a_j|^2 = |\langle x, \mathbf{e}_j \rangle|^2 = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^{n} x_t e^{-it\omega_j} \right|^2$$

a periodogramm a j-edik Fourier-frekvenciánál.

Itt

$$\mathbf{e}_j = n^{-1/2}(e^{i\omega_j}, e^{i2\omega_j}, \ldots, e^{in\omega_j}),$$

$(j = -[(n-1)/2], \ldots, [n/2])$, ortonormált bázist alkot $\mathbb{C}^n$-ben, így a_j az x e bázis szerinti j-edik együtthatója. Úgy is mondhatjuk, hogy a periodogramm az x *diszkrét Fourier-transzformáltjának* (DFT) abszolútérték-négyzete osztva n-nel. Így, ha x egy stacionárius folyamatból egy minta, akkor a periodogramm a folyamatot frekvencia-tartományban jellemzi. Mivel a spektrális sűrűségfüggvény is egy stacionárius folyamat frekvencia-tartománybeli jellemzését adja, ezért kézenfekvő kapcsolatot keresni a kettő között. Ki fog derülni, hogy a periodogrammal becsülhető a spektrális sűrűségfüggvény. A következő állításból látszik, hogy miért érdemes a periodogrammot használni a spektrális sűrűségfüggvény becslésére. Felülvonással a komplex konjugáltat jelöljük, valós értékű folyamat esetén ezek természetesen elhagyhatók.

2.2 Tétel *[BD96, 334. oldal]*
Ha ω_j egy nem nulla Fourier-frekvencia, akkor

$$I(\omega_j) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \hat{\gamma}(k) e^{-ik\omega_j}, \tag{14}$$

ahol $\hat{\gamma}(k) = n^{-1} \sum_{t=1}^{n-k} (x_{t+k} - m)(\bar{x}_t - \bar{m})$, $k \geq 0$, $m = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} x_t$, és $\hat{\gamma}(k) = \overline{\hat{\gamma}(-k)}$, $k < 0$. Ha $m = 0$ vagy $\hat{\gamma}(k)$ helyett egy olyan $\tilde{\gamma}(k)$-t írunk, amely úgy van definiálva, mint $\hat{\gamma}(k)$, csak m helyett 0-át írunk, akkor (14) egyenlőség minden Fourier-frekvenciára teljesül.

A fenti állításban szereplő $\hat{\gamma}$ az autokovariancia függvény becslése, ha x_t, $t = 1, \ldots, n$ egy stacionárius idősor realizációja. A (14) egyenlőség jobb oldala pedig nagyon hasonló az l_1-beli autokovariancia függvényű stacionárius folyamatok spektrális sűrűségfüggvényének felírásához, ami $f(\omega) = (2\pi)^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-ik\omega}$ volt.

2.1. Abszolút szummázható autokovariancia függvényű folyamatok spektrálbecslése

A következőkben a periodogramm aszimptotikus viselkedését fogjuk vizsgálni. Legyen I_n az $X_1, \ldots, X_n$ periodogrammja, ahol $\{X_t\}$ stacionárius idősor, melynek várható értéke μ, és a $\gamma(\cdot)$ autokovariancia függvénye l_1-beli, azaz abszolút szummázható. A fentiekben már definiáltuk a periodogrammot az $\omega_j = 2\pi j/n$ Fourier-frekvenciákban, most kiterjesztjük tetszőleges $\omega \in [-\pi, \pi]$-re, mégpedig a következőképpen:

$$I_n(\omega) := \begin{cases} I_n(\omega_k) & \omega_k - \pi/n < \omega \le \omega_k + \pi/n \\ I_n(-\omega) & \omega \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

A következő tétel arról szól, hogy $\frac{1}{2\pi} I_n(\omega)$ aszimptotikusan torzítatlanul becsli $f(\omega)$-át, amennyiben $\omega \ne 0$.

2.3 Tétel *[BD96, 343. oldal]*
Ha $\{X_t\}$ stacionárius, μ a várható értéke, és autokovariancia függvénye γ abszolút szummábilis, akkor

$$EI_n(0) - n\mu^2 \to 2\pi f(0),$$

és ha $\omega \ne 0$, akkor

$$EI_n(\omega) \to 2\pi f(\omega).$$

Ha $\mu = 0$, akkor $EI_n(\omega)$ egyenletesen konvergál $2\pi f(\omega)$-hoz $[-\pi, \pi]$-n.

A következő tétel a peridogramm eloszlásban való konvergenciájáról szól egy speciális esetben, amikor független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozatáról van szó.

2.4 Tétel *[BD96, 344. oldal]*
Legyen Z_t független, azonos eloszlású, 0 várható értékű, és σ^2 szórásnégyzetű folyamat, periodogrammja I_n. Ekkor
(i) Ha $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_m < \pi$ akkor a $(I_n(\lambda_1), \ldots, I_n(\lambda_m))$ véletlen vektor eloszlásban konvergál $n \to \infty$ mellett egy olyan vektorhoz, melynek koordinátái függetlenek és σ^2 várható értékű exponenciális valószínűségi változók.
(ii) Ha $EZ_1^4 = \eta\sigma^4 < \infty$, akkor

$$\operatorname{var}(I_n(\omega_j)) = \begin{cases} n^{-1}(\eta - 3)\sigma^4 + 2\sigma^4 & \omega_j = 0 \text{ vagy } \pi \\ n^{-1}(\eta - 3)\sigma^4 + \sigma^4 & 0 < \omega_j < \pi \end{cases}$$

és

$$\operatorname{cov}(I_n(\omega_j), I_n(\omega_k)) = n^{-1}(\eta - 3)\sigma^4,$$

ha $\omega_j \ne \omega_k$. Ha Z_1 normális eloszlású, akkor $\eta = 3$, így $I_n(\omega_j)$ és $I_n(\omega_k)$ korrelálatlan, ha $j \ne k$.

A következő tétel az előző állításhoz hasonlóan a periodogramm eloszlásban való konvergenciájával foglalkozik, itt azonban olyan idősorokról van szó, amelyek mozgóátlagként felírhatóak.

2.5 Tétel *[BD96, 347. oldal]*
Legyen X_t olyan folyamat, hogy

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j},$$

ahol Z_t független, azonos eloszlású, 0 várható értékű, σ^2 szórásnégyzetű sorozat, és $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Jelölje I_n az $X_1, \ldots, X_n$ periodogrammját és f X_t spektrális sűrűségfüggvényét. Ekkor
(i) Ha $f(\lambda) > 0$ minden $\lambda \in [-\pi, \pi]$ és ha $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_m < \pi$, akkor az $(I_n(\lambda_1), \ldots, I_n(\lambda_m))$ véletlen vektor eloszlásban tart egy független, exponenciális eloszlású változókból álló vektorhoz, ahol az i-edik komponens várható értéke $2\pi f(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, m$.
(ii) Ha $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j||j|^{1/2} < \infty$, $EZ_1^4 = \eta\sigma^4 < \infty$, $\omega_j, \omega_k \geq 0$, akkor

$$\operatorname{cov}(I_n(\omega_j), I_n(\omega_k)) = \begin{cases} 2(2\pi)^2 f^2(\omega_j) + O(n^{-1/2}) & \omega_j = \omega_k = 0 \, vagy \, \pi \\ (2\pi)^2 f^2(\omega_j) + O(n^{-1/2}) & 0 < \omega_j = \omega_k < \pi \\ O(n^{-1}) & \omega_j \neq \omega_k \end{cases}$$

ahol az $O(n^{-1/2})$ illetve $O(n^{-1})$ tagokat j-ben és k-ban egyenletesen felülről lehet becsülni $c_1 n^{-1/2}$-del illetve $c_2 n^{-1}$-gyel, valamilyen c_1 és c_2 pozitív konstansokkal.

2.2. Hosszútávon összefüggő folyamatok spektrálbecslése

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $E(X_i) = 0$. Az eredmények úgy is teljesülnek, ha X_i helyett $X_i - \bar{X}$-et írunk.

Az előző szakaszban láttuk, hogy l_1-beli autokovariancia függvényű stacionárius idősorokra $\lambda \neq 0$-ra

$$I(\lambda) \xrightarrow{d} 2\pi f(\lambda)\zeta,$$

ahol ζ egy 1 várható értékű exponenciális valószínűségi változó. Sőt az is igaz, hogy ha $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ véges sok nem 0 frekvencia, amire $\lambda_{n,j} \to \lambda_j$ és $\lambda_j \pm \lambda_{j'} \neq 2\pi l$ $(l \in \mathbb{Z})$, $j \neq j'$, akkor

$$[I(\lambda_{n,1}), \ldots, I(\lambda_{n,k})] \xrightarrow{d} 2\pi[f(\lambda_1)\zeta_1, \ldots, f(\lambda_k)\zeta_k],$$

ahol $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ független, 1 várható értékű exponenciális valószínűségi változók. Ez az eredmény bizonyos feltételekkel teljesül hosszútávon összefüggő folyamatokra is ([Ber94, 78. oldal]):

2.6 Tétel *Legyen X_t egy stacionárius folyamat f spektrális sűrűségfüggvénnyel. Tegyük fel, hogy*

$$f(x) = f^*(x)|1 - e^{ix}|^{1-2H},$$

ahol $\frac{1}{2} < H < 1$ és f^* egy $[-\pi, \pi]$-n értelmezett pozitív, folytonos függvény. Tegyük fel továbbá, hogy X_t-nek van egyoldali végtelen mozgóátlag előállítása, és a frekvenciák olyanok, mint az előbb, vagyis $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ véges sok nem 0 frekvencia, amire $\lambda_{n,j} \to \lambda_j$ és $\lambda_j \pm \lambda_{j'} \neq 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, $j \neq j'$. Ekkor

$$[I(\lambda_{n,1}), \dots, I(\lambda_{n,k})] \xrightarrow{d} 2\pi[f(\lambda_1)\zeta_1, \dots, f(\lambda_k)\zeta_k]$$

teljesül, ahol $\zeta_1, \dots, \zeta_k$ független, 1 várható értékű exponenciális valószínűségi változók.

A tétel fontos kikötése, hogy a frekvenciák nem tartanak 0-hoz. Ha 0-hoz tartanak, a periodogram másként viselkedik aszimptotikusan. Erről szól az alábbi tétel ([Ber94, 78. oldal]):

2.7 Tétel *Legyen X_t egy stacionárius, hosszútávon összefüggő folyamat, aminek spektrális sűrűségfüggvénye f olyan, mint a 2.6 Tételben. Legyen j rögzített és $\lambda_j = \frac{2\pi j}{n}$. A normált periodogramm a következő:*

$$I^*(\lambda_j) := \frac{I(\lambda_j)}{2\pi f(\lambda_j)}.$$

Ekkor a következő tulajdonságok teljesülnek:

(i) Az $I^*(\lambda_j)$ aszimptotikus torzítása:

$$\lim_{n\to\infty} E[I^*(\lambda_j)] = 2\Delta_j(H, -1),$$

ahol

$$\Delta_j(H, u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{(2\pi j - x)(2\pi j + ux)} \left| \frac{x}{2\pi j} \right|^{1-2H} dx$$

(ii) $I(\lambda_j)$ aszimptotikus szórásnégyzete:

$$\operatorname{var}[I(\lambda_j)] = O(n^{4H-2}).$$

(iii) $j \neq j'$ esetén $I^*(\lambda_j)$ és $I^*(\lambda_{j'})$ aszimptotikusan korreláltak.

(iv) Ha X_t Gauss-folyamat, akkor

$$I^*(\lambda_j) \xrightarrow{d} \eta_j,$$

ahol η_j a következő:

$$\eta_j = \left[\frac{1}{2}\Delta_j(H, -1) - \Delta_j(H, 1)\right] Z_1^2 + \left[\frac{1}{2}\Delta_j(H, -1) + \Delta_j(H, 1)\right] Z_2^2,$$

ahol Z_1, és Z_2 független standard normális valószínűségi változók.

Az (i) pontban a torzítottságot nyilván az jelenti, ha $2\Delta_j(H,-1) \neq 1$. Igaz az, hogy $H > \frac{1}{2}$-re és kis j-re az aszimptotikus torzítás nagy. $H = \frac{1}{2}$ esetén $\Delta_j(H,-1) = \frac{1}{2}$, $\Delta_j(H,1) = 0$, tehát ebben az esetben a (iv) pontban a rövidtávon összefüggő folyamatokra már ismert eredményt kapjuk vissza.

3. Aggregáció

A hosszútávon összefüggő folyamatok vizsgálatánál jelentős erőfeszítéseket tettek a folyamatok Hurst-paraméterének becslésére ([Ber94]). Foglalkoztak az úgynevezett *második paraméter* (c_γ illetve c_f) becslésével is ([VA99]). Legalább ilyen fontos volna a folyamat várható értékének becslése. Bár a mintaátlagról tudjuk, hogy a várható érték egyik leghatékonyabb becslése ([Ber94]), nem ismert a pontos hatékonysága, csak aszimptotikus eredmények vannak. Ilyen a következő tétel.

3.1 Tétel *[Cox84]*
Legyen X_t stacionárius, hosszútávon összefüggő folyamat $\frac{1}{2} < H < 1$ Hurst-paraméterrel. Ekkor

$$\operatorname{var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) \sim \frac{c_\gamma n^{2H-2}}{H(2H-1)}.$$

A mintaátlag szórásnégyzete (varianciája) pedig megegyezik az alábbiakban definiált aggregált folyamat szórásnégyzetével. Ez adja a motivációt arra, hogy az aggregált folyamattal részletesebben foglalkozzunk.

3.2 Definíció *Adott egy $X(t)$ diszkrét stacionárius folyamat. A folyamat $Y(t)$* m-aggregáltja *a következőképpen van értelmezve:*

$$Y(t) = \frac{1}{m} \sum_{k=(t-1)m+1}^{tm} X(k),$$

vagyis a folyamatot m hosszú, egymást nem metsző darabokra osztjuk, majd ezeket a darabokat külön-külön átlagoljuk és az átlagokból elkészítjük az $Y(t)$ folyamatot.

A most következő szakaszban ismerkedjünk meg az aggregációval kapcsolatos időtartománybeli eredményekkel. Ezek megtalálhatóak: [GVMM01].

3.1. Az aggregáció és az autokovariancia függvény

3.3 Definíció *Legyen γ az $X(t)$ folyamat autokovariancia függvénye, akkor $S_2^X := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)$ a kovariancia-összeg.*

A továbbiakban feltesszük, hogy S_2 létezik, véges vagy végtelen, és eltekintünk attól az esettől, amikor a sor úgy divergens, hogy nem a végtelenbe tart. Tehát például a $\gamma(k) = (-1)^k$ esetet nem vesszük figyelembe. S_2-t a folyamatok jellemzésére használjuk más paraméterekkel együtt.

Az ebben a szakaszban szereplő tételek bizonyításánál a kulcs az, hogy az m-aggregált folyamat autokovariancia függvényét felírjuk különböző mértékben aggregált folyamatok szórásnégyzetével:

3.4 Tétel *Ha $\gamma^{(m)}$ az m-aggregált folyamat autokovariancia függvénye, $v^{((k+1)m)}$, $v^{(km)}$ és $v^{((k-1)m)}$ a $(k+1)m$-, km-, illetve $(k-1)m$-aggregált folyamat szórásnégyzete, akkor*

$$\gamma^{(m)}(k) = \frac{1}{2}\left\{(k+1)^2 v^{((k+1)m)} - 2k^2 v^{(km)} + (k-1)^2 v^{((k-1)m)}\right\}.$$

Figyeljük meg, hogy a tételbeli autokovariancia függvény felírt alakja mennyire hasonlít a frakcionális Gauss-zaj autokovariancia függvényére (1.33 Tétel). Ezt használjuk ki ahhoz, hogy belássuk: a frakcionális Gauss-zaj (illetve általánosítása, a 3.7 Definícióban definiált ALP) szoros kapcsolatban áll az aggregációval (lásd a 3.10, 3.12, és 3.15 Tételek).

Előbb azonban nézzünk néhány, a kovariancia-összegre vonatkozó állítást.

3.5 Tétel *Ha S_2 létezik, akkor $S_2 \geq 0$.*

Ez az autokovariancia függvény pozitív szemidefinitségéből következik ([BD96]). Később, a 3.48 Tétel következményeként adunk egy bizonyítást a 3.5 Tételre.

3.6 Tétel *Ha $S_2^{(m)}$ az m-aggregált folyamat kovariancia-összege, és $S_2 \in (0,\infty)$ az eredeti folyamat kovariancia-összege, akkor $S_2^{(m)} = \frac{S_2}{m}$. Ha S_2 0 vagy ∞, akkor $S_2^{(m)} = S_2$.*

Ha kiszámoljuk, hogy hogyan változik meg az autokovariancia függvény értéke egy helyen az aggregáció hatására, majd összegezzük az így kapott értékeket, viszonylag egyszerűen beláthatjuk ezt a tételt. Később szerepel egy bizonyítás a spektrális sűrűségfüggvény segítségével is (3.47 Tétel). Igaz, hogy ott egyéb feltételek is szükségesek a bizonyításhoz.

3.7 Definíció *A H paraméterű* aggregációs határ-folyamat *(ALP), egy olyan folyamat, amelynek autokorrelációs függvénye ($0 \leq H \leq 1$ esetén):*

$$\rho_H(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 2^{2H-1} - 1 & |k| = 1 \\ \frac{1}{2}\left\{|k+1|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k-1|^{2H}\right\} & |k| \geq 2 \end{cases}$$

Látható, hogy a definícióban szereplő autokorrelációs függvény gyakorlatilag ugyanaz, mint a frakcionális Gauss-zaj autokorrelációs függvénye (lásd 1.33 Tétel). Annyi a különbség, hogy a fenti autokorrelációs függvény $H = 0$-ra is definiált, míg az FGN-nél $H = 0$ mellett $k = 0, 1, -1$-re akkor lesz ugyanaz a kifejezés mint itt, ha 0^0-ont 0-nak vesszük. Miért nem használjuk a fenti definíciót $H < 0$-ra? Azért mert belátható, hogy ebben az esetben nem kapunk valódi folyamatot, az autokovariancia függvény nem pozitív szemidefinit.

Vizsgáljuk, hogy az aggregációnak milyen folyamatok lehetnek fixpontjai. Definiáljuk az autokorrelációs függvény segítségével a fixpont fogalmát!

3.8 Definíció *Tegyük fel, hogy $X^{(m)}(t)$ folyamat $X(t)$ stacionárius folyamatból m-aggregációval keletkezett. Legyen a folyamatok autokorrelációs függvénye $\rho_X^{(m)}$ és ρ_X. Akkor mondjuk, hogy $X(t)$ folyamat fixpont az aggregációra nézve, ha $\rho_X^{(m)}(k) = \rho_X(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, minden m-re. Vagyis tetszőleges m-re az m-aggregáció megtartja az autokorrelációs függvényt.*

3.9 Megjegyzés *A fenti definíció az autokovariancia függvényre nézve azt jelenti, hogy – γ_X-szel illetve $\gamma_X^{(m)}$-szel jelölve az autokovariancia függvényeket – $\gamma_X^{(m)}(k) = C(m)\gamma_X(k)$, ahol $C(m)$ egy m-től függő, de k-tól független szorzó. $C(m)$-et a szórásnégyzetekkel kifejezve: $C(m) = \gamma_X^{(m)}(0)/\gamma_X(0)$.*

A következő tétel kimondja, hogy a 3.7 Definícióban bevezetett ALP fixpont az aggregációra nézve.

3.10 Tétel *Ha γ az ALP autokovariancia függvénye, $\gamma^{(m)}$ az ALP-ből m-aggregálással kapott folyamat autokovariancia függvénye, akkor*

$$\gamma^{(m)}(k) = m^{2H-2}\gamma(k) \text{ minden } k \in \mathbb{Z}\text{-re és minden } m \in \mathbb{Z}^+\text{-ra}$$

3.11 Definíció *Egy folyamat kovariancia-részösszege:*

$$S_2(n) := \sum_{k=-n}^{n} \gamma(k),$$

ahol γ a folyamat autokovariancia függvénye.

3.12 Tétel *Minden fixpont egy ALP.*

3.13 Megjegyzés *A 3.12 Tétel azon feltétel mellett bizonyított, hogy $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, hogy a kovariancia-részösszeg, $S_2(n)$, nem negatív, ha $n \geq n_0$.*

Ezzel meghatároztuk az aggregációra nézve fixpontok osztályát. Vizsgálható az a kérdés is, hogy ha m-mel tartunk a végtelenbe, és egy folyamatot m-aggregálunk, akkor a kapott folyamatok autokorrelációs függvénye konvergál-e, és ha igen, akkor milyen függvényhez. Pontosabban:

3.14 Definíció *Tegyük fel, hogy*

$$\rho^{(\infty)}(k) := \lim_{m\to\infty} \rho^{(m)}(k)$$

létezik minden $k \in \mathbb{Z}$-re, ahol $\rho^{(m)}$ az m-aggregált folyamat autokorrelációs függvénye. Ekkor azt mondjuk, hogy a folyamat a $\rho^{(\infty)}$ vonzási tartományában *van.*

Ezzel kapcsolatosak az alábbi eredmények.

3.15 Tétel *Tegyük fel, hogy az X_t folyamat a $\rho^{(\infty)}$ vonzási tartományában van, és teljesül a 3.13 Megjegyzésbeli feltétel. Ekkor $\rho^{(\infty)}$ megegyezik az ALP 3.7 Definíciójában felírt autokorrelációs függvénnyel.*

Meg kellene mondani, hogy milyen folyamatokra létezik $\rho^{(\infty)}$. Ehhez definiáljuk a $w^{(m)}$ mennyiséget.

3.16 Definíció *$w^{(m)} := m^2 v^{(m)}$, ahol $v^{(m)}$ az m-aggregált folyamat szórásnégyzete.*

A következő 3.22 Tételben regulárisan változó sorozatról lesz szó. Hogy ez érthető legyen, definiáljuk előbb a regulárisan változó függvényeket, majd a regulárisan változó sorozatokat (diszkrét idejű regulárisan változó függvényeket). A regulárisan változó függvényekkel kapcsolatos definíciók és tételek megtalálhatóak: [Fel71],[Res].

3.17 Definíció *Egy F függvény α exponensű regulárisan változó függvény, ha*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^\alpha \tag{15}$$

minden $x > 0$-ra.

3.18 Definíció *Ha egy függvény 0 exponensű regulárisan változó függvény, akkor lassan változó függvénynek nevezzük. Azaz a 3.17 Definícióban a (15) kifejezés jobb oldalára x^α helyett 1-et írva kapjuk meg a lassan változó függvény definícióját.*

3.19 Tétel *F függvény pontosan akkor α exponensű regulárisan változó függvény, ha F felírható*

$$F(x) = x^\alpha S(x)$$

alakban, ahol S lassan változó függvény.

3.20 Definíció *Egy $a_1, a_2, \ldots$ sorozat regulárisan változó α exponenssel, ha van egy olyan α exponensű regulárisan változó f függvény, amelynek $1, 2, \ldots$ helyeken felvett értékei $a_1, a_2, \ldots$, azaz $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$.*

3.21 Megjegyzés *Ha $F(k)$ egy α exponensű regulárisan változó sorozat, akkor*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{F(mn)}{F(m)} = n^\alpha, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Ugyanakkor a fenti formulát kielégítő egészeken értelmezett függvények nem feltétlenül regulárisan változóak.

3.22 Tétel *Ha teljesülnek a 3.15 Tétel feltételei, akkor a folyamat $w^{(m)}$ sorozata regulárisan változó.*

3.23 Tétel *Ha egy folyamatra $w^{(m)}$ regulárisan változó $2H$ exponenssel, ahol $H < 1$, akkor a folyamat a H-paraméterű ALP autokorrelációs függvényének vonzási tartományában van.*

3.24 Megjegyzés *Itt valójában elég az is, hogy $\lim_{m\to\infty} \frac{w(nm)}{w(m)} = n^{\alpha}$.*

3.25 Tétel *Ha γ autokovariancia függvény regulárisan változó, akkor a folyamathoz tartozó $w^{(m)}$ is regulárisan változó.*

3.26 Következmény *Ha γ autokovariancia függvény regulárisan változó, akkor a folyamat az ALP vonzási tartományában van.*

3.27 Megjegyzés *A 3.26 Következményben megfogalmazott állítás nem fordítható meg: létezik olyan nem regulárisan változó γ autokovariancia függvényű folyamat, amelynek $w^{(m)}$ sorozata regulárisan változó, tehát a folyamat az ALP vonzási tartományában van.*

3.28 Megjegyzés *Mivel a hosszútávon összefüggő folyamatok regulárisan változó autokovariancia függvényű folyamatok (1.26 Definíció), ezért ezek az ALP vonzási tartományában vannak.*

3.2. Az aggregáció felbontása

Tegyük fel, hogy $X(t)$ folyamat spektrális sűrűségfüggvénye f. Ki akarjuk fejezni az $X(t)$ folyamatból aggregációval kapott folyamat spektrális sűrűségfüggvényét f segítségével.
Ehhez az aggregálás műveletét bontsuk két részre: 1. mozgóátlag képzés, 2. mintavételezés.

Mozgóátlagképzés alatt a következőt értjük:

3.29 Definíció *$X(t)$ folyamatból képezzük $Y(t)$ folyamatot a következőképpen:*

$$Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X(t-k),$$

ahol

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{m}, & -(m-1) \le k \le 0 \\ 0, & \textit{különben} \end{cases}$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $Y(t)$ $X(t)$-ből mozgóátlagképzéssel keletkezett. Ha hangsúlyozni akarjuk az m paraméter értékét, akkor m-mozgóátlagképzésről beszélünk.

3.30 Megjegyzés *Itt az egyszerűség kedvéért használjuk a mozgóátlag elnevezést, általában mozgóátlag alatt tetszőleges együtthatókkal vett súlyozást szoktak érteni.*

Például $m = 2$ esetén az új folyamat:

$$\frac{X_0 + X_1}{2}, \frac{X_1 + X_2}{2}, \frac{X_2 + X_3}{2}, \ldots$$

Mintavételezésről a következő értelemben beszélünk:

3.31 Definíció *Az $X(t)$ folyamatból úgy képezzük az új $Y(t)$ folyamatot, hogy kiválasztjuk minden m-edik elemét, és ezekből képezünk sorozatot. Vagyis:*

$$Y(t) = X(mt).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $Y(t)$ $X(t)$-ből mintavételezéssel vagy – kiemelve m értékét – m-mintavételezéssel keletkezett.

A definíciókból világos, hogy ha egy $X(t)$ folyamatból m-mozgóátlagképzéssel kapjuk $Y(t)$ folyamatot, és $Y(t)$ folyamatból m-mintavételezéssel $Z(t)$ folyamatot, akkor $X(t)$-ből m-aggregációval képzett folyamat $Z(t)$. Ugyanis amikor $Y(t)$-t mintavételezzük, akkor pont az $X(t)$ folyamat egymást nem metsző m hosszú darabjainak átlagait választjuk ki.

3.3. Mozgóátlag képzés

Nézzük mi történik ekkor a spektrális sűrűségfüggvénnyel! A mozgóátlag képzés lineáris időinvariáns szűrés, ezért alkalmazható az 1.22 Következmény. Esetünkben $\psi_j = a_j$, és teljesül a $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ feltétel.

$$\tilde{\psi}(\lambda) = \frac{1}{m} \sum_{j=-m+1}^{0} e^{-ij\lambda} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} e^{ij\lambda}$$

Ez egy mértani sorozat összege. Számoljuk ki az összeget:

$$\sum_{j=0}^{m-1} e^{ij\lambda} = \frac{e^{im\lambda} - 1}{e^{i\lambda} - 1} = \frac{e^{i\frac{m}{2}\lambda}}{e^{i\frac{1}{2}\lambda}} \frac{\left(e^{i\frac{m}{2}\lambda} - e^{-i\frac{m}{2}\lambda}\right)}{\left(e^{i\frac{1}{2}\lambda} - e^{-i\frac{1}{2}\lambda}\right)} =$$

$$\frac{e^{i\frac{m}{2}\lambda}}{e^{i\frac{1}{2}\lambda}} \frac{\sin(\frac{m}{2}\lambda)}{\sin(\frac{1}{2}\lambda)}$$

Az összegzésre használt képlet persze $\lambda \neq 0$ esetén működik. Ha $\lambda = 0$, akkor az összegnek m-nek kell lennie. Ha az eredményt megnézzük, akkor látható (például L'Hospital-szabállyal), hogy $\lambda = 0$-ban m-hez tart. Terjesszük ki a 0-ban m-mel, és akkor az eredmény használható minden λ-ra. Tehát

$$|\tilde{\psi}(\lambda)|^2 = \frac{1}{m^2}\frac{\sin^2(\frac{m\lambda}{2})}{\sin^2(\frac{\lambda}{2})}.$$

Az egyenlőség jobb oldalán álló mennyiség az ún. *Fejér-mag* m-ed része, azaz a Fejér-mag definíciójában $\frac{1}{m^2}$ helyett $\frac{1}{m}$ szorzó áll. Így az eredeti spektrális sűrűségfüggvény ennyivel szorzódik:

$$f_Y(\lambda) = \frac{1}{m^2}\frac{\sin^2(\frac{m\lambda}{2})}{\sin^2(\frac{\lambda}{2})} f_X(\lambda).$$

Az előbbiekben kapott eredményt írjuk fel a következő tételben:

3.32 Tétel *Ha $Y(t)$ folyamat az $X(t)$ folyamatból keletkezett m-mozgóátlag képzéssel, és $X(t)$ spektrális sűrűségfüggvénye f_X, akkor $Y(t)$-nek is van spektrális sűrűségfüggvénye, és ez az alábbi:*

$$f_Y(\lambda) = \frac{1}{m^2}\frac{\sin^2(\frac{m\lambda}{2})}{\sin^2(\frac{\lambda}{2})} f_X(\lambda).$$

3.33 Megjegyzés *A fentebb elmondottak alapján $f_Y(0) = \frac{1}{m^2} \cdot m^2 f_X(0) = f_X(0)$.*

3.4. Mintavételezés

Az új spektrális sűrűségfüggvényt az autokovariancia függvény segítségével fogjuk kiszámolni. A számolás egyszerűsítése érdekében a

$$\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} f(t)dt$$

összefüggés helyett a

$$\gamma(k) = \int_{0}^{2\pi} e^{ikt} f(t)dt$$

kifejezést használjuk. Ez ekvivalens az előbbivel, hiszen e^{ikt} és $f(t)$ is 2π periodikus t szerint. Az új folyamat autokovariancia függvénye:

$$\gamma_Y(h) = \mathrm{cov}(Y_t, Y_{t+h}) = \mathrm{cov}(X_{mt}, X_{mt+mh}) = \gamma_X(mh),$$

így

$$\gamma_Y(h) = \gamma_X(mh) = \int_{0}^{2\pi} e^{imht} f_X(t)dt.$$

Ezt szeretnénk $\int_0^{2\pi} e^{iht} f_Y(t)dt$ alakba átírni. Alkalmazzunk $t = \frac{s}{m}$ helyettesítést, ekkor az integrál kifejezés a következőképpen alakul:

$$\int_0^{2\pi m} e^{ihs} \frac{1}{m} f_X \left(\frac{s}{m}\right) ds$$

Írjuk ezt fel 2π hosszú intervallumokon vett integrálok összegeként:

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{2\pi(k-1)}^{2\pi k} e^{ihs} \frac{1}{m} f_X \left(\frac{s}{m}\right) ds$$

Alakítsuk át minden egyes $\int_{2\pi(k-1)}^{2\pi k} e^{ihs} \frac{1}{m} f_X(\frac{s}{m})ds$ integrált $[0, 2\pi]$-n vett integrállá az $s = t + 2\pi(k-1)$ helyettesítéssel. Mivel 2π egésszámú többszörösével toltuk el az integrálást, ezért az exponenciális rész nem változik. Az eredmény:

$$\int_0^{2\pi} e^{iht} \frac{1}{m} f_X \left(\frac{t + 2\pi(k-1)}{m}\right) dt$$

Összegezve ezt a kifejezést k szerint, kapjuk, hogy a keresett spektrális sűrűségfüggvény:

$$f_Y(t) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f_X \left(\frac{t + 2\pi(k-1)}{m}\right) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f_X \left(\frac{t + 2\pi k}{m}\right)$$

Még ellenőrizni kell a kapott f_Y függvény nem-negativitását, de ez nyilvánvaló f_X nem-negativitásából.

Foglaljuk össze mindezt egy tételben:

3.34 Tétel *(*) Ha $Y(t)$ folyamat m-mintavételezéssel keletkezett $X(t)$ folyamatból, és az $X(t)$ spektrális sűrűségfüggvénye f_X, akkor $Y(t)$-nek is van spektrális sűrűségfüggvénye, mégpedig*

$$f_Y(t) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f_X \left(\frac{t + 2\pi k}{m}\right).$$

3.5. Az aggregált folyamat spektrális sűrűségfüggvénye

Ha végrehajtjuk a mozgóátlag képzést, majd a mintavételezést, akkor megkapjuk az aggregált folyamatot. Ezt és az előzőekben kapott eredményeket felhasználva adódik a következő tétel.

3.35 Tétel *(*) Ha az $X(\cdot)$ folyamatból m-aggregálással kaptuk az $Y(\cdot)$ folyamatot, és az $X(\cdot)$ folyamatnak létezik spektrális sűrűségfüggvénye (f_X), akkor az $Y(\cdot)$ folyamatnak is létezik spektrális sűrűségfüggvénye, mégpedig:*

$$f_Y(t) = \frac{1}{m^3} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sin^2(\frac{t}{2})}{\sin^2(\frac{t+2\pi k}{2m})} f_X \left(\frac{t + 2\pi k}{m}\right)$$

Bizonyítás: A 3.32 és a 3.34 Tételekből következik az eredmény, ha még azt is figyelembe vesszük, hogy

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{t+2k\pi}{m}\right)\right) = \sin^2\left(\frac{1}{2}(t+2k\pi)\right) = \sin^2\left(\frac{1}{2}t\right),$$

ahol a második egyenlőség a $\sin^2$ függvény π szerinti periodicitásából adódik. ■

3.36 Megjegyzés *A tételből következik, hogy egy folyamat spektrális sűrűségfüggvénye egyértelműen meghatározza az aggregált folyamat spektrális sűrűségfüggvényét.*

Az aggregált folyamat spektrális sűrűségfüggvényére kapott 3.35 Tételbeli összefüggést összehasonlítva a 3.4 Tételben az aggregált folyamat autokovariancia függvényére kapott összefüggéssel, látható, hogy mennyivel egyszerűbb az ott kapott eredmény. Igaz, hogy ott a $v^{(m)}$ függvény segítségével írjuk fel az aggregált folyamat autokovariancia függvényét, az eredeti autokovariancia függvénnyel a kifejezés kicsit bonyolultabb lenne. Ennek következménye, hogy a spektrális sűrűségfüggvénnyel nehezebb belátni a 3.1 szakaszban kimondott állításokat illetve az azokkal párhuzamos, spektrális sűrűségfüggvényre vonatkozó állításokat.

3.6. Néhány, az aggregációval kapcsolatos eredmény

3.37 Tétel *(*) Ha az $Y(t)$ folyamat az $X(t)$ folyamatból keletkezett mozgóátlag képzéssel, és X autokovariancia függvénye $\gamma_X \in l_1$, vagyis abszolútértékben összegezhető, akkor $\gamma_Y \in l_1$ is igaz.*

Bizonyítás: Ha f_X $X(t)$ spektrális sűrűségfüggvénye, akkor

$$f_Y(t) = \frac{1}{m^2}\frac{\sin^2(\frac{mt}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})}f_X(t)$$

Ismert, hogy

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\sin^2(\frac{mt}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})}$$

a

$$\Delta_m(k) = \begin{cases} m-|k|, & k \le m-1 \\ 0, & k \ge m \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

háromszög függvény Fourier-transzformáltja (Ez megtalálható például [Zyg59, 88. oldalon], de a 3.44 Lemma is lényegében ezt az állítást mondja ki). Emlékeztetünk a Fourier-transzformált elnevezés 1.8 Megjegyzésben bevezetett jelentésére: egy $a(k)$ egészeken értelmezett függvény $A(t)$, $t \in \mathbb{R}$ Fourier-transzformáltját az

$$A(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikt}a(k)$$

egyenlőséggel definiáljuk. Ez 2π szerint periodikus.

Tehát létezik ϑ egészeken értelmezett függvény, hogy

$$\frac{1}{m^2}\frac{\sin^2(\frac{mt}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikt}\vartheta(k)$$

Persze itt $\vartheta(k) = \frac{2\pi}{m^2}\Delta_m(k)$.
Ismert, hogy a Fourier-transzformáltak szorzata az eredeti függvények konvolúciójának Fourier-transzformáltja. Ez például igazolható szummacserével, ami megtehető, hiszen ϑ és γ_X is abszolút szummázható. Mivel γ_X l_1-beli, ezért f_X a γ_X Fourier-transzformáltja (1.9 Következmény). Tehát létezik β függvény, hogy

$$f_Y(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikt}\beta(k),$$

ahol $\beta(k) = (\vartheta * \gamma_X)(k)$.

$\vartheta \in l_1$, $\gamma_X \in l_1$, tehát $\beta \in l_1$ is (konvolúciós tulajdonság). $\beta(k) = \gamma_Y(k)$ pedig ekkor következik, hiszen mindkettő előáll:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} f_Y(t)dt$$

alakban: a γ_Y azért mert autokovariancia függvény, a β pedig az 1.6 Tétel miatt.

■

3.38 Tétel *(*) Ha $Y(t)$ folyamat az $X(t)$-ből m-mintavételezéssel áll elő, és $\gamma_X \in l_1$, akkor $\gamma_Y \in l_1$ is igaz.*

Bizonyítás: $\gamma_Y(k) = \gamma_X(mk)$, így

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_Y(k)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_X(mk)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_X(k)| < \infty$$

■

3.39 Következmény *(*) Ha $Y(t)$ folyamat m-aggregálással adódik $X(t)$-ből, és $\gamma_X \in l_1$, azaz $X(t)$ autokovariancia függvénye abszolút szummábilis, akkor $Y(t)$ autokovariancia függvénye is, azaz $\gamma_Y \in l_1$.*

A következő tételben azt vizsgáljuk, hogy a már a 3.3 Definícióban bevezetett S_2 kovariancia-összeg hogy változik az aggregált folyamatnál. Ez lényegében ugyanaz az állítás, mint a 3.6 Tételben, csak itt a spektrális sűrűségfüggvény segítségével bizonyítunk.

3.40 Tétel *(*) Legyen az $X(t)$ folyamat autokovariancia függvénye $\gamma_X \in l_1$. Az $Y(t)$ folyamat az $X(t)$-ből m-aggregációval áll elő. Ekkor $S_2^Y = \frac{1}{m} S_2^X$.*

Bizonyítás: Ha $\gamma_X \in l_1$, akkor $f_X(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikt} \gamma_X(k)$, pontosabban mondva: vegyük az X spektrális sűrűségfüggvényének ezt a verzióját, amelyről tudjuk, hogy folytonos (1.12 Tétel). Ekkor $2\pi f_X(0) = S_2^X$. Ha $f_Y(t)$-t kifejezzük a korábban a 3.35 Tételben megadott képlet segítségével f_X-ből (vagyis ezt a verzióját tekintjük Y spektrális sűrűségfüggvényének), akkor f_Y is folytonos, és ha t helyére 0-t helyettesítünk, akkor

$$f_Y(0) = \frac{1}{m} f_X(0)$$

adódik. A 3.39 Következményben beláttuk, hogy ha $\gamma_X \in l_1$, akkor $\gamma_Y \in l_1$, tehát f_Y m.m. megegyezik $\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikt} \gamma_Y(k)$ függvénnyel, ami szintén folytonos. Ha két folytonos függvény m.m. megegyezik, akkor mindenütt megegyezik. Tehát 0-ban is, így $2\pi f_Y(0) = S_2^Y$. Vagyis:

$$S_2^Y = 2\pi f_Y(0) = 2\pi \frac{1}{m} f_X(0) = \frac{1}{m} S_2^X,$$

amiből következik az állítás.

■

A továbbiakban a 3.40 Tételt általánosítjuk olyan folyamatokra, amelyek kovariancia-összege, S_2 véges. Ezekről nyugodtan feltehető, hogy autokovariancia függvényük nem l_1-beli, hiszen l_1-beli autokovariancia függvényű folyamatokra a 3.40 Tétel alkalmazható.

A következő tétel megtalálható például [Zyg59, 89. oldalon]:

3.41 Tétel *Legyen $f \in L^1(-\pi, \pi)$, azaz f $[-\pi, \pi]$-ben abszolút integrálható függvény, valamint legyen 2π periodikus. Ha f folytonos az x pontban, és f Fourier-sora ebben a pontban konvergens, akkor a Fourier-sor összege az x pontban azonos $f(x)$-szel.*

3.42 Megjegyzés *Amennyiben f-ről csak annyit teszünk fel, hogy x-ben bal és jobboldali határértéke van, akkor a Fourier sor összege az x pontban $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$-vel, vagyis a jobb és baloldali határérték átlagával egyezik meg.*

Ennek a tételnek a segítségével kapjuk az alábbi állítást, amely a spektrális sűrűségfüggvény 0-beli értéke és a kovariancia-összeg között teremt kapcsolatot. Azt használjuk ki, hogy az S_2 kovariancia-összeg a spektrális sűrűségfüggvény Fourier-sora a 0-ban.

3.43 Következmény *(*) Ha $S_2^X < \infty$, f_X a 0 pontban folytonos, akkor $S_2^X = 2\pi f_X(0)$.*

3.44 Lemma
$$\frac{\sin^2(\frac{mt}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})}=\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{k=-l}^{l}e^{ikt}$$

Bizonyítás: Belátható (mértani sorozat összegzése), hogy

$$\sum_{k=-l}^{l}e^{itk}=\frac{\sin[(l+\frac{1}{2})t]}{\sin(\frac{t}{2})}.$$

$$\sum_{l=0}^{m-1}\sin\left[(l+\frac{1}{2})t\right]=\frac{\sin^2(m\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$$

pedig $e^{[(l+\frac{1}{2})t]}$ l szerinti összegzésével, majd a képzetes rész vételével adódik. Tehát igaz a lemmában szereplő összefüggés.

∎

3.45 Tétel *(*) Ha az $Y(t)$ folyamat az $X(t)$ folyamatból keletkezett m-mozgóátlag képzéssel, és $S_2^X<\infty$, akkor $S_2^Y<\infty$ is igaz.*

Bizonyítás: Tudjuk:
$$f_Y(t)=\frac{1}{m^2}\frac{\sin^2(\frac{mt}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})}f_X(t).$$

A 3.44 Lemma alapján:

$$\gamma_Y(j)=\frac{1}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ijt}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{k=-l}^{l}e^{ikt}f_X(t)dt$$

$$=\frac{1}{m^2}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{k=-l}^{l}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(j+k)t}f_X(t)dt=\frac{1}{m^2}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{k=-l}^{l}\gamma_X(j+k)$$

Így

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\gamma_Y(j)=\frac{1}{m^2}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{k=-l}^{l}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\gamma_X(j+k)=\frac{1}{m^2}\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{k=-l}^{l}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\gamma_X(j)$$

$$=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\gamma_X(j)$$

∎

Be kellene látni, hogy a mintavételezés nem változtat S_2 végességén. Sajnos most nem működik az a bizonyítás, amit az l_1-beli autokovariancia függvényekre 3.38 Tételben adtunk, hiszen a mintavételezés során kihagyott tagok lehetnek negatívak, és így a mintavételezett folyamat S_2-jét nem majorálhatjuk az eredeti folyamat S_2-jével. Sőt, tetszőleges sorra nem is igaz az, hogy ha az eredeti sor konvergens, akkor az új sor, amit minden m-edik tag kiválasztásával kapunk, konvergens.

Ennek ellenére igaz, hogy az aggregáció nem változtat S_2 végességén, ez következik a 3.6 Tételből, csak ezt másképp kellene belátni, hiszen pont a 3.6 Tételt szeretnénk frekvencia-tartománybeli megközelítéssel belátni.

3.46 Tétel *Ha $Y(t)$ folyamat $X(t)$ folyamatból m-aggregálással keletkezett, $S_2^X < \infty$, akkor $S_2^Y < \infty$*

Ez, és a 3.43 Következmény adja az alábbi állítást, figyelembe véve még az aggregált folyamat 3.35 Tételbeli alakját, amiből látszik, hogy $f^{(m)}$ 0-beli folytonosságához elég, ha f folytonos a 0-ban, és a $\frac{2\pi k}{m}$ pontok valamilyen környezetében korlátos ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$), azaz minden k nem-nulla egészhez van egy (k-tól és m-től függő) K korlát és $\delta > 0$ szám, hogy $|f(t)| < K$, ha $t \in \left(\frac{2\pi k}{m} - \delta, \frac{2\pi k}{m} + \delta\right)$. Hiszen a szinusznégyzetes kifejezés folytonos (0-ban megszüntethető szingularitással), a $\frac{2\pi k}{m}$ ($k \neq 0$) pontokban pedig 0. Az egyszerűség kedvéért a tételben feltesszük, hogy az f spektrális sűrűségfüggvény korlátos.

3.47 Tétel *(*) Ha az $Y(t)$ folyamat az $X(t)$ folyamatból keletkezett m-aggregálással, $S_2^X < \infty$, f_X korlátos, valamint folytonos a 0-ban, akkor $S_2^Y = \frac{1}{m}S_2^X$.*

Bizonyítás: Mivel $S_2^X < \infty$, ezért S_2^Y is véges. f_Y folytonos a 0-ban (mert f_X folytonos a 0-ban), így $S_2^Y = 2\pi f_Y(0)$ és $S_2^X = 2\pi f_X(0)$. Teljesül $f_Y(0) = \frac{1}{m} f_X(0)$ is, így $S_2^Y = \frac{1}{m}S_2^X$.

■

Az f_X spektrális sűrűségfüggvény 0-beli viselkedésének vizsgálata nem egyenértékű az S_2^X kovariancia-összeg vizsgálatával, hiszen mutatható olyan nemnegatív L^1-beli 2π periodikus függvény, amely folytonos, de Fourier-sora nem konvergens a 0-ban, azaz ez egy olyan spektrális sűrűségfüggvény, amely folytonos (s persze így korlátos, és folytonos a 0-ban), de kovariancia-összege nem véges. [Zyg59, 299. oldalon] található ilyen konstrukció, csak ott nincs kikötve a nem-negativitás, de ez könnyen megoldható: vegyük a függvény pozitív részét és a negatív részét, ekkor az eredeti függvény a pozitív rész mínusz a negatív rész. Ez két nemnegatív L^1-beli 2π periodikus folytonos függvény, melyek Fourier-együtthatóinak különbségeként kaphatóak meg az eredeti függvény Fourier-együtthatói. Így, ha a pozitív és a negatív rész Fourier-sora is konvergens lenne a 0 pontban, akkor az eredeti Fourier-sor is konvergens lenne a 0-ban. Nem ez a helyzet, tehát a pozitív és a negatív rész közül legalább az egyik Fourier-sora nem konvergens a 0-ban.

A következő tétel a 3.11 Definícióban bevezetett kovariancia-részösszeg és a 3.16 Definícióban definiált $w^{(m)}$ közötti összefüggésről szól.

3.48 Tétel $w_X^{(m)} = \sum_{l=0}^{m-1} S_2^X(l)$.

Bizonyítás: (*) Használjuk fel, hogy

$$\gamma_X^{(m)}(k) = \frac{1}{m^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{itkm} \frac{\sin^2(m\frac{t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})} f(t)dt,$$

így

$$w_X^{(m)} = m^2 \gamma_X^{(m)}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(m\frac{t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})} f(t)dt.$$

Másrészt

$$\sum_{l=0}^{m-1} S_2^X(l) = \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=-l}^{l} \gamma_X(k)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=-l}^{l} e^{itk} f(t)dt.$$

A 3.44 Lemma alapján pedig megkapjuk a kívánt egyenlőséget.

■

Ennek a tételnek a következményeként bebizonyítjuk a 3.5 Tételt, ami azt mondta ki, hogy ha S_2 létezik, akkor nemnegatív.

Bizonyítás: (3.5 Tétel)
Tegyük fel, hogy S_2 negatív. Ekkor az $S_2(n)$ kovariancia-részösszegek valamilyen n-től kezdve már kisebbek, mint egy negatív α valós szám, hiszen $S_2(n)$ határértéke S_2. Azaz $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \alpha < 0$, hogy $\forall n \geq n_0$ $S_2(n) < \alpha$. Ekkor $\sum_{n=0}^{m-1} S_2(n) < 0$, ha m elég nagy, hiszen a szummában $n = n_0$-tól kezdve csupa $\alpha < 0$-nál kisebb tag szerepel, tehát az első n_0 darab tag által adott esetleg nemnegatív összeget elég sok tag hozzávételével negatívvá tehetjük. De a 3.48 Tétel kimondja, hogy ez az összeg $w^{(m)}$, azaz az m-aggregált folyamat szórásnégyzetének m^2-szerese, ami nem lehet negatív. Tehát S_2 nem lehet negatív.

■

Be fogjuk látni, hogy a frakcionális Gauss-zaj az aggregációra nézve fixpont. Definiáljuk előbb, mit is értünk itt fixpont alatt. A fixpont fogalmát egyszer már definiáltuk a 3.8 Definícióban az autokorrelációs függvény segítségével. Most definiáljuk a spektrális sűrűségfüggvény segítségével:

3.49 Definíció *(*) Legyen az $X^{(m)}(t)$ folyamat az $X(t)$ folyamat m-aggregáltja. Legyenek a spektrális sűrűségfüggvények $f_X^{(m)}$ és f_X. Akkor mondjuk, hogy az $X(t)$ folyamat fixpont az aggregációra, ha $f_X^{(m)}(\lambda) = C(m) f_X(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, minden m-re, ahol $C(m)$ egy m-től függő, de λ-tól független szorzó. Vagyis tetszőleges m-re az m-aggregáció megtartja a spektrális sűrűségfüggvényt.*

3.50 Megjegyzés *Persze itt le lehet normálni a spektrális sűrűségfüggvényt, hogy ennél a definíciónál is a 3.8 Definícióhoz hasonlóan szorzótag nélküli összefüggést írhassunk. Tehát ha* $h_X(\lambda) := \frac{f_X(\lambda)}{\int_{-\pi}^{\pi} f_X(\lambda)d\lambda}$ *a normált spektrális sűrűségfüggvény, akkor a fenti fixpont-definícióban* $h_X^{(m)}(\lambda) = h_X(\lambda)$ *lenne a feltétel. Azért a spektrális sűrűségfüggvény integráljával osztunk le, mert ez megegyezik az autokovariancia függvény 0 helyen felvett értékével (vagyis a szórásnégyzettel), így a 3.8 Definícióval ekvivalens definíciót kapunk.*

Két definíciót is adtunk a fixpontra, meg kell mutatni, hogy ezek ekvivalensek.

3.51 Tétel *(*) A 3.8 és a 3.49 Definíciók ekvivalensek, azaz ha* $X^{(m)}(t)$ *az* $X(t)$ *folyamatból keletkezett* m*-aggregálással, akkor:* $\rho_X^{(m)}(k) = \rho_X(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, *minden* m*-re pontosan akkor, ha* $f_X^{(m)}(\lambda) = C(m)f_X(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, *minden* m*-re.*

Bizonyítás: Ha $f_X^{(m)}(\lambda) = C(m)f_X(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, akkor

$$\gamma_X^{(m)}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_X^{(m)}(\lambda)d\lambda =$$

$$C(m)\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_X(\lambda)d\lambda = C(m)\gamma_X(k).$$

Másrészt, ha $\rho_X^{(m)}(k) = \rho_X(k)$, akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_X^{(m)}(\lambda)d\lambda = \frac{\gamma_X^{(m)}(0)}{\gamma_X(0)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_X(\lambda)d\lambda,$$

ebből pedig a spektrális sűrűségfüggvények egyértelműsége miatt következik $f_X^{(m)}(\lambda) = C(m)f_X(\lambda)$.

■

Most pedig belátjuk, hogy a frakcionális Gauss-zaj fixpont az aggregációra nézve.

3.52 Tétel *Legyen* $\{X_j,\, j \in \mathbb{Z}\}$ H*-paraméterű,* σ_0^2 *szórásnégyzetű FGN,* γ_X *az autokovariancia függvénye. Ekkor*

$$\gamma_Y(j) = m^{2H-2}\gamma_X(j), \tag{16}$$

ahol Y *az* X *folyamatból* m*-aggregálással kapott folyamat,* γ_Y *pedig* Y *autokovariancia függvénye. Sőt, a frakcionális Gauss-zajéval azonos autokovariancia függvényű folyamatokra (tehát a korábban ALP néven emlegetett folyamatokra (H>0)) is igaz (16) összefüggés.*

Bizonyítás: (*) Az aggregált folyamat kifejezhető a frakcionális Brown-mozgás segítségével a következőképpen:

$$Y_j = \frac{1}{m}\left(B_H((j+1)m) - B_H(jm)\right),$$

ahol B_H az a frakcionális Brown-mozgás, aminek növekményi folyamata a szóban forgó FGN. Tehát az Y autokovariancia függvénye:

$$\gamma_Y(j) = EY_jY_0 = \frac{1}{m^2}E\left[\left(B_H((j+1)m) - B_H(jm)\right)\left(B_H(m) - B_H(0)\right)\right].$$

Alkalmazzuk az 1.30 Megjegyzést, mely szerint a H paraméterű frakcionális Brown-mozgás önhasonló folyamat H paraméterrel. Tehát ha az autokovariancia függvény fenti kifejtésében $B_H(t)$ helyett $m^H B_H(t/m)$ folyamatot írjuk be, akkor nem változtatunk $\gamma_Y(j)$ értékén. Tehát

$$\gamma_Y(j) = \frac{1}{m^2}E\left[m^H\left(B_H(j+1) - B_H(j)\right)m^H\left(B_H(1) - B_H(0)\right)\right] =$$

$$= m^{2H-2}EX_jX_0 = m^{2H-2}\gamma_X(j).$$

Ezzel a tétel nagyobb részét beláttuk. Az pedig, hogy az FGN-ével azonos autokovariancia függvényű folyamatokra is igaz az állítás, abból következik, hogy beláttuk, az aggregált folyamat spektrális sűrűségfüggvényét egyértelműen meghatározza (m.m.) az eredeti folyamat spektrális sűrűségfüggvénye (3.35 Tétel). Ekkor persze ez az autokovariancia függvényre is igaz, vagyis az aggregált folyamat autokovariancia függvényét egyértelműen meghatározza az eredeti folyamat autokovariancia függvénye. Így, ha egy olyan folyamatot tekintünk, aminek autokovariancia függvénye azonos az FGN autokovariancia függvényével, akkor annak aggregáltjának autokovariancia függvénye megegyezik az FGN aggregáltjának autokovariancia függvényével. Tehát (16) összefüggés teljesül.

■

Hivatkozások

[BD96] P. J. Brockwell and R. A. Davis. *Time Series: Theory and Methods.* Springer, 1996.

[Ber94] J. Beran. *Statistics for Long-Memory Processes.* Chapman & Hall, 1994.

[Cha87] D. C. Champeney. *A handbook of Fourier theorems.* Cambridge University Press, 1987.

[Cox84] D. R. Cox. Long-Range Dependence: A Review. In *Proceedings 50th Anniversary Conference Iowa State Statistical Laboratory.* The Iowa State University Press, 1984.

[Fel71] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* John Wiley and Sons, 1971.

[GO64] Gelbaum and Olmsted. *Counterexamples in Analysis.* Holden-Day, Inc., San Francisco, 1964.

[GVMM01] András Gefferth, Darryl Veitch, István Maricza, and Sándor Molnár. A characterization Framework for Short- and Long Memory Processes. In *International Workshop on High Speed Networking*, Balatonfüred, May 2001.

[Nor95] I. Norros. On the use of fractional brownian motion in the theory of connectionless networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, pages 953–962, August 1995.

[Res] Sidney I. Resnick. *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes.*

[ST94] Gennady Samorodnitsky and Murad S. Taqqu. *Stable Non-Gaussian Random Processes.* Chapman & Hall, 1994.

[VA99] D. Veitch and P. Abry. A Wavelet Based Joint Estimator of the Parameters of Long-Range Dependence. *Special issue on Multiscale Statistical Signal Analysis and its Applications, IEEE Trans. Info. Th.*, 45(3):878–898, April 1999.

[Zyg59] A. Zygmund. *Trigonometric Series.* Cambridge, University Press, 1959.