K+F Projekt portfóliók menedzselése: valós opciós megközelítés

Diplomamunka

Írta: Bódai Zoltán

Alkalmazott matematikus szak

Témavezető:

Fullér Róbert, egyetemi docens

Operációkutatási Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2005

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke

1. fejezet

Bevezetés

Fontos kérdés a mai gazdasági életben, hogy egy vállalat pontosan mekkora értéket tulajdoníthat egy elindításra váró, folyamatban lévő vagy befejezett K+F (R&D) projektjének[1]. Manapság az amerikai nagyvállalatok már több mint egynegyede használja kutatásainak, fejlesztéseinek kvantitatív értékelésére a dolgozatban tárgyalt valós opciós megközelítést, és ez az arány folyamatosan csak nő. A vállalatok vezetői kezdik felismerni a módszer jelentőségét: azt, hogy a projekt értékét nem célszerű csupán a hagyományos (passzív) stratégiai hozzáállásra alapozott módszerekkel számítani, hanem annak tükröznie kell az aktív menedzselés lehetőségének értékét is. Ha a környezeti változásokra lehetőségünk van intelligens módon reagálni, vagyis a projektben van egy bizonyos mértékű flexibilitás (pl. kiszállhatunk a projektből vagy eladhatjuk azt), akkor a nem kívánt veszteségek bekövetkezése megelőzhető. Tehát a rugalmasság megléte növeli egy projekt értékét, ezt a növekedést viszont a klasszikus NPV (nettó jelenérték) módszer nem veszi figyelembe.

A *2. fejezetben* áttekintjük a hagyományos, pénzügyi opciók alapvető típusait, majd ezután levezetésre kerül az árazásukra leggyakrabban használt Black-Scholes formula. Többféleképpen belátható az opciók piaci értékét meghatározó képlet. Ebben a fejezetben azon bizonyítás kerül ismertetésre, amelynek néhány főbb gondolatára a későbbiekben - más kontextusban - utalás történik.

A *3. fejezetben* először a projektek során potenciálisan felmerülő valós opciók fajtáit ismertetjük, illetve megvizsgáljuk, hogy az élet mely területén bírnak kimondottan nagy értékkel az egyes opciók. Megvizsgáljuk, hogy a pénzügyi opciók elmélete milyen mértékben alkalmazható a valós opciók esetében, illetve megteremt-

[1] Kutatás és fejlesztés (research and development)

jük a két elmélet közötti analógiát.

A *4. fejezetben* röviden áttekintjük a különféle projektek értékelésére általánosan használt módszereket. Megvizsgáljuk a valós opciók árazására használt módszerek tipikus bemenő paramétereit (alapeszköz, kockázat mértéke, osztalék-kifizetés, kötési árfolyam, kockázatmentes kamatláb, opció érvényességi ideje), így egyben áttekintést is kapunk a valós opciós módszer nehézségeiről. Említésre kerülnek azok az okok, melyek miatt egyes esetekben a valós opciós értékelés jóval nehezebb lehet, mint a klasszikus opciók árazása. A fejezet végén a felmerült kérdéseket foglaljuk össze, és a dolgozat hátralevő részében a megválaszolásukra teszünk kísérletet.

A valós opciós projektértékelési módszer számos iparágban használható, ill. már a gyakorlatban is használatos. Legszélesebb körben a gyógyszeriparban alkalmazzák, mivel itt viszonylag determinált a kutatás-fejlesztési fázisok hossza, de emellett számos más, bizonytalanságot rejtő kutatási projekt esetében is használható a módszer (információ technológia, természeti erőforrások kutatása, mezőgazdaság, telekommunikáció, stb.). Az *5. fejezetben* a K+F projektek főbb típusai kerülnek bemutatásra. Mivel nincsen két azonos projekt, ezért nehéz olyan általános modellt felállítani, amely egyben kezeli a különféle kutatások sajátosságait. Emiatt példaként ismertetünk egy gyógyszeripari és egy IT projektet, ami azonban alkalmas lesz arra, hogy a modellezés során felmerülő főbb kérdésekkel találkozzunk, és választ keressünk rájuk. Megvizsgáljuk, hogy milyen megközelítés alkalmas az előbbi két projekt főbb fázisainak (kutatás, fejlesztés, implementáció) megfelelő modellezésére, és milyen módszert célszerű használni a projektek pénzben kifejezhető értékének meghatározásához. A modellek iránt természetes elvárás lesz, hogy az adott projekt sajátosságait figyelembe vegye (pl. összetett opciók jelenléte a projektben).

Új információk érkezésével illetve az idő előrehaladtával a legtöbb esetben kiderül, hogy másképp alakult a projekt anyagi sorsa, mint korábban várható volt. Mivel az időben előrehaladva csökken a menedzsment jövőbeni pénzáramlásokhoz kapcsolódó bizonytalansága, így a változó körülményeknek megfelelően tudja módosítani a projekthez fűződő várakozásokat, reményeket. A lényegi információk azonban tipikusan nem folyamatosan áramlanak, hanem diszkrét időpillanatokban érkeznek. Emiatt egyes esetekben az a feltevés, hogy az alapeszköz lognormális eloszlást követ, nem megalapozott. A *6. fejezetben* a probléma kezelésére alkalmas projektértékelési módszert ismertetünk, mely tekintettel lesz a lényegi információk érkezésének gyakoriságára, illetve ennek a gyakoriságnak az alapeszköz eloszlását módosító hatására.

A *7. fejezetben* néhány alapvető volatilitás-becslési módszer kerül ismertetésre, illetve szó lesz a projekt érzékenységvizsgálata során definiált néhány parciális derivált (delta, gamma, vega, teta, ró) jelentőségéről.

A *8. fejezetben* olyan projektek árazására vezetünk le modellt, amelyek a piacon nem kereskedettek, mégis, egy ún. egységes piaci hasznossági függvény bevezetésével meg tudjuk határozni a befektetés pénzben kifejezhető értékét. Végül az opcióárazási képletek egyik bemenő paraméterére, az alapeszköz (pénzügyi kontextusban pl. a részvény, valós opciós megközelítés esetében leggyakrabban a jövőbeli várható pénzáramlás) volatilitására próbálunk meg becslést adni. A becslésben nem direkt módon próbáljuk meghatározni σ értékét, hanem feltételezzük, hogy a menedzsment minimális mennyiségű - ám megbízható - információval rendelkezik az alapeszköz jövőbeni eloszlásával kapcsolatban (pl. minimum érték, maximum érték, legvalószínűbb érték). Ezeket az információkat felhasználva magát az ismeretlen eloszlást fogjuk becsülni háromszög illetve trapéz alakú sűrűségfüggvényekkel, majd ezek szórását vesszük becslésünk alapjául. A modell előnye, hogy a valós életben könnyen interpretálható, egyszerű, hétköznapi fogalmakon alapszik.

Végül a *9. fejezetben* rövid összefoglalás olvasható.

2. fejezet

Pénzügyi opciók és a Black-Scholes formula

A fejezet célja, hogy - a pénzügyi opciók legfőbb típusainak áttekintése után - azok árazására használható képletet vezessen le: a Black- Scholes formulát. Többféleképpen is igazolható az 1973-as eredmény. Fisher Black és Myron Scholes Nobel-díjas cikkükben kétféle módon is eljutottak az árazási képlethez, és azóta többen más megközelítésben is belátták a formula helyességét. Mi az eredeti cikk egyik bizonyításának főbb lépéseit fogjuk végigkövetni, mivel az opcióárazás mérföldkövének tekinthető levezetésben több olyan fontos gondolat is található, melyek említést érdemelnek egy valós opció megközelítésről szóló dolgozatban, ill. melyekre a későbbiek megértéséhez szükség lehet.

2.1. Alapvető fogalmak áttekintése

A különféle (pénzügyi és valós) opciók különféle lehetőségek, vagyis jogot, de nem kötelezettséget jelentenek az opció tulajdonosának.

2.1.1. Definíció. *Ha valaki* ***európai típusú vételi (call) opcióval*** *rendelkezik, akkor ez azt jelenti, hogy jogában áll az opcióhoz tartozó alapeszközt (pl. részvényt) egy adott T lejárati időpontban egy rögzített P áron megvenni.*

2.1.2. Definíció. *Ha valaki* ***európai típusú eladási (put) opcióval*** *rendelkezik, akkor ez azt jelenti, hogy jogában áll az opcióhoz tartozó alapeszközt (pl. részvényt) egy adott T lejárati időpontban egy rögzített P áron eladni.*

2.1.3. Definíció. *Ha valaki* ***amerikai típusú vételi (call) opcióval*** *rendelkezik, akkor ez azt jelenti, hogy jogában áll az opcióhoz tartozó alapeszközt (pl. részvényt) bármely $t < T$ időpontban egy rögzített P áron megvenni (ahol T az előre rögzített lejárati időpont).*

2.1.4. Definíció. *Ha valaki* ***amerikai típusú eladási (put) opcióval*** *rendelkezik, akkor ez azt jelenti, hogy jogában áll az opcióhoz tartozó alapeszközt (pl. részvényt) bármely $t < T$ időpontban egy rögzített P áron eladni (ahol T az előre rögzített lejárati időpont).*

2.2. A Black-Scholes formula

Tegyük fel, hogy egy piacon a következő ideális feltételek teljesülnek:

1: A rövidtávú kamatláb ismert és konstans.

2: A részvényár véletlen bolyongásnak megfelelően mozog, folytonos időben. A relatív szórás arányos a részvényár négyzetével, vagyis a részvényárak bármely véges intervallumon lognormális eloszlást követnek.

3: A részvény nem fizet osztalékot.

4: Az opció európai típusú, vagyis csak lejáratkor lehet érvényesíteni.

5: Nincsenek tranzakciós költségek egy részvény vagy opció eladása/vétele során.

6: A rövidre eladást nem büntetik.

Ezen feltételek alapján az opció ára csak a részvényár, az idő, és a konstansnak tekintett változók függvénye lesz. Tehát létre tudunk hozni egy lefedezett pozíciót, ami egy hosszú pozícióban levő részvényből és egy rövid pozícióban levő opcióból áll. Belátjuk, hogy ennek értéke már csak az időtől és a konstansnak tekintett változóktól fog függni. Legyen $w(x,t)$ az opció értéke x (a részvényár) és t (idő) függvényében. A rövidre eladandó opciók száma egy darab hosszú pozícióban levő részvény mellé: $\frac{1}{w_x(x,t)}$.

2.2.1. Állítás. *Az így létrehozott lefedezett portfóliónk értéke nem függ a részvényártól.*

Az $\frac{\text{opció értékének változása}}{\text{részvényár változása}} = w_x(x,t)$, ha a részvényár változása nagyon kicsi. Első megközelítésben tehát, ha a részvényár Δx-szel változik, az opció ára $w_x(x,t)\Delta x$-szel változik, és az opciók száma $(1/w_x)\Delta x$-szel fog változni. Tehát, a hosszú pozícióban levő részvény értékében történő változás lényegében ugyanannyi, mint a rövid pozícióban levő $1/w_x$ db opció értékében történő változás. Ahogy x és t változik, a rövidre eladandó opciók számát is folyamatosan változtathatjuk oly módon, hogy továbbra is fennmaradjon a lefedezett pozíció. Ekkor a fenti becslések pontossá válnak, és a hozam, amit a lefedezett pozíció tekintetében realizálhatunk, teljesen független a részvény árának alakulásától[1].

Vegyük észre, hogy egy, a részvényárban történő nagyobb változás miatti értékcsökkenés a portfóliónkban kicsi. Ahogy a részvényárban történő változás egyre kisebb, a portfólió értékének a részvényár változásához viszonyított relatív megváltozása is egyre kisebb.

Láthatjuk, hogy a portfólió értéke a részvényár elmozdulásának irányától is független. Vagyis, mivel feltettük, hogy a részvényár véletlen bolyongást követ és a hozam konstans szórású, ezért

$$Cov(\text{portfólió hozama, részvény hozama}) = 0.$$

Ha a részvényár és a "piaci portfólió" együttesen is konstans kovarianciájú véletlen bolyongást követ, akkor megállapíthatjuk, hogy

$$Cov(\text{portfólió hozama, piaci hozam}) = 0.$$

Tehát a lefedezett pozícióban a kockázat 0, ha a rövidre eladott opciók számát folyamatosan módosítjuk. Ha e változtatás nem folyamatos módon történik, a kockázat kicsi és teljes mértékben diverzifikálható, ha képezünk egy sok ilyen lefedezett pozícióból álló portfóliót.

Portfóliónk értéke

$$x - \frac{w}{w_x}, \tag{2.1}$$

mivel egy darab hosszú pozícióban levő részvényből és $1/w_x$ rövid pozícióban levő opcióból áll.

Egy kicsi, Δt idő alatt a portfólió értékében a változás: $\Delta x - \frac{\Delta w}{w_x}$.

[1] Sőt, a hozam nagysága előre tudható, lásd [12]

Feltéve, hogy folyamatos módon változtatjuk a rövid pozícióban levő opciók számát, sztochasztikus analízisbeli eszközökkel[2] kapjuk, hogy a lefedezett portfóliónk értékében történt változás:

$$-(\frac{1}{2}w_{11}\sigma^2x^2 + w_2)\frac{\Delta t}{w_1}, \tag{2.2}$$

ahol σ^2 a részvény hozamának szórásnégyzetét jelöli.

Mivel a lefedezett portfólió hozama garantált hozam, ezért meg kell egyeznie $r\Delta t$-vel. Jogosan merülhet fel a kérdés: mi történik, ha nem módosítjuk folyamatosan portfóliónk összetételét?

A kockázat még ekkor is kicsi marad, és ez a kockázat is teljes mértékben diverzifikálható, vagyis a lefedezett pozícióban levő portfóliónk hozama ekkor is a rövidtávú kamatláb értéke körül lesz. Ha nem így lenne, spekulánsok nagy értékű kölcsönt vennének fel, ilyen lefedezett pozíciókat hoznának létre, és így ennek következtében a hozamok lecsökkennének a rövidtávú kamatláb szintjére.

Tehát (2.1) és (2.2) között az összefüggés:

$$-(\frac{1}{2}w_{11}\sigma^2x^2 + w_2)\frac{\Delta t}{w_1} = (x - \frac{w}{w_1})r\Delta t \tag{2.3}$$

Δt-vel való leosztás és átrendezés után a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$w_2 = rw - rxw_1 - \frac{1}{2}\sigma^2x^2w_{11}. \tag{2.4}$$

A kezdetiérték feltétel is adott:

$$w(x,t^*) = \begin{cases} x - c & \text{ha } x \geq c \\ 0 & \text{ha } x < c, \end{cases} \tag{2.5}$$

ahol t^* az opció lejárati ideje, c pedig a kötési árfolyam.

A differenciálegyenlet megoldása[2]:

$$w(x,t) = x\Phi(d_1) - ce^{r(t-t^*)}\Phi(d_2), \tag{2.6}$$

ahol

$$d_1 = \frac{\ln\frac{x}{c} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(t^* - t)}{\sigma\sqrt{t^* - t}} \tag{2.7}$$

$$d_2 = \frac{\ln\frac{x}{c} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t^* - t)}{\sigma\sqrt{t^* - t}} \tag{2.8}$$

Vegyük alaposan szemügyre a most levezetett képletet, a *Black-Scholes formulát*!

[2] bővebben lásd [4]

2.2.2. Következmény. *A befektetők kockázatviselési hajlandósága nem befolyásolja az opció értékét.*

2.2.3. Következmény. *Az opció értéke nem függ a hozzá tartozó alapeszköz hozamának várható értékétől.*

2.2.4. Következmény. *Az opció várható hozama viszont már függ a részvény várható hozamától: ha gyorsabban növekszik a részvényár, az opció ára is gyorsabban fog változni.*

2.2.5. Következmény. *A (2.6) képletben $(t^* - t)$ önmagában nem, csak r-rel illetve σ^2-tel megszorozva szerepel, vagyis ha az érvényesség időtartamát növeljük (csökkentjük), ez ugyanolyan hatással van az opció árára, mintha r-et és σ^2-et növelnénk (csökkentenénk) ugyanolyan arányban.*

2.2.6. Következmény. *A formula szemléletesen azt mutatja, hogy egy vételi opció értéke megegyezik egy $\Phi(d_1)$ mértékű részvénybefektetés értékének és egy olyan hitelfelvételnek a különbsége, melynek nagysága a kötési árfolyam jelenértékének $\Phi(d_2)$-szöröse.*

Az is bizonyítható, hogy az opció értéke folytonos, monoton növő függvénye t^*-nak, r-nek illetve σ^2-nek (lásd[12]). Természetesen a maximum értéke az opciónak a részvény ára.

2.2.7. Állítás. *Az opció volatilitása mindig nagyobb, mint a részvény volatilitása.*

(2.6) x szerinti parciális deriváltját véve kapjuk, hogy

$$w_x(x,t) = \Phi(d_1) \tag{2.9}$$

Mivel értelemszerűen $x > 0$, $e^{-rt^*} > 0$ és $\Phi(-d^2) > 0$, ezért

$$\frac{xw_x}{w} > 1, \tag{2.10}$$

vagyis az opció tényleg mindig nagyobb volatilitású, mint a hozzá kapcsolódó alaptermék.

3. fejezet

Valós opciók

Ebben a fejezetben ismertetésre kerülnek a valós életbeli projektekben potenciálisan jelenlevő reálopciók fajtái. Ahogyan már a névből is sejthető, a valós és a hagyományos (pénzügyi) opciók között elég sok a jellegbeli hasonlóság. Megállapíthatjuk, hogy tulajdonképpen egy kutatásba történő befektetés ekvivalens egy valós opció megvételével. Az analógia megteremtése után azt is megvizsgáljuk, mennyire szorosan kapcsolódik a valós opciós elmélet a klasszikus opciók elméletéhez.

3.1. A valós opciók fajtái

Hat különböző valós opciót szokás megkülönböztetni:

1. Időzítési opció
2. A fázisokra bontás (Time-to-build) opciója
3. A projekt abbahagyásának (és értékesítésének) opciója
4. Ideiglenes szüneteltetés, bővítés (gyorsítás), szűkítés (lassítás) opciója
5. Input/output megváltoztatásának opciója
6. Terjeszkedési/növekedési opció

Hogyan lehet ezekre a valós opciókra szert tenni?

- A valós opciók közül sok természetes módon, extra költség ráfordítása nélkül jelentkezik: késleltetni, ideiglenesen felfüggeszteni, abbahagyni a projektet stb.
- Egyes opciók viszont csak plusz kiadással szerezhetőek meg: kapacitás növelése, alternatív inputra vagy outputra történő váltás, további terjeszkedés előkészítése stb.

3.1.1. Időzítési opció

Ha időzítési opcióval rendelkezünk, akkor lehetőségünk van várni egy megfelelő pillanatra, amikor érdemes lesz elindítani a kutatás adott fázisát. Ezt a lehetőséget más néven "beruházást megelőző várakozásra vonatkozó", vagy tanulási opciónak is szokták nevezni. Például: ha tulajdonunkban van egy rézbánya (vagy rendelkezünk egy erre vonatkozó vételi opcióval), érdemes lehet megvárni, míg a réz piaci ára kedvezően alakul, és csak ekkor indítani be a kitermelését (c_1 költséggel). Ha elég magas a réz árfolyama, érvényesítjük jogunkat (lehívjuk az opciót), míg kedvezőtlen esetben nem fogunk élni ezzel a lehetőséggel. Tehát, az opció értéke: $\max(V - c_1, 0)$, vagyis az időzítési opció egy *amerikai típusú vételi opció*, ami a bejezett projekt bruttó várható pénzáramlásának jelenértékének (V) megszerzésére jogosít minket, c_1 kötési árfolyammal számolva.

Az időzítési opció különlegesen nagy értékkel bír abban az esetben, ha nagy a jövővel kapcsolatos bizonytalanság, ha hosszú időhorizontot tekintünk, ill. ha jelenleg a projekt várható pénzáramlása alacsony.

3.1.2. A fázisokra bontás opciója

Egy projekt fázisokra bonthatósága elsősorban azért értékes, mert új információ érkezése után viszonylag rövid időn belül reagálhat arra a menedzsment[1]. Mindegyik fázis tulajdonképpen tekinthető egy olyan opciónak, amely lehetőséget biztosít a későbbi fázisok által generált pénzáramlások megszerzésére, vagyis ilyen esetben egy többszörösen összetett opciót tartalmaz a projektünk.

[1] pl. a projekt leállításával, szüneteltetésével, vagy a termelés mértékének megváltoztatásával

3.1.3. A projekt abbahagyásának (és értékesítésének) opciója

Ha a projekt előreláthatólag már nem lesz jövedelmező, úgy dönthetünk, hogy a kutatást leállítjuk, és az addigi eredményeket (illetve a félbehagyott projektet) értékesítjük. A projekt leállításának és értékesítésének opciója megfelel egy *amerikai típusú vételi opciónak*, amely lehívásával jogosultak leszünk a projekt V értékére, és amelynek kötési árfolyama az A érték, mely a projekt legjobb alternatív felhasználásának értéke. Ha az opcióval rendelkezünk,

$$V + \max(A - V, 0) = \max(V, A)$$

a várható értéke projektünknek. Természetesen az opció olyan projektek kapcsán merül fel legjellemzőbb módon, melyek könnyen pénzzé tehetők, a nagyon szélsőséges területtel foglalkozó iparágak esetében csak nagyon ritkán.

3.1.4. Ideiglenes szüneteltetés, bővítés (gyorsítás), szűkítés (lassítás) opciója

Az opció lényege, hogy a piaci körülményeknek megfelelően változtatható a termelés mértéke, vagy más szavakkal: a termelési skála módosítására vonatkozó joggal ruházza fel az opció tulajdonosát. Nyilván a termelés beindításakor még nem rendelkezik a menedzsment olyan pontos információkkal, ami a piac "véletlenszerű" alakulására vonatkozik. Emiatt időközben a plusz információk beérkezése után, ha aktív projekt-menedzselésről beszélhetünk, a menedzsment módosítja a termelés sebességét.

Ha a termelés $p\%$-kal való növeléséről szó, ami c_2 költséggel érhető el, akkor ez a gyorsítási opció megfelel egy *vételi opciónak*, melynek kötési árfolyama c_2, és lehetőséget biztosít a projekt $p\%$-ának megszerzésére. Vagyis az opció értéke:

$$V + \max(pV - c_2, 0).$$

Ha a termelés $p\%$-kal való csökkentésére vonatkozik az opció, ami c_3 értékű megtakarítást eredményez, akkor ez a lassítási opció nem más, mint egy *eladási opció*, amely a projekt $p\%$-ára vonatkozik c_3 kötési árfolyammal. Az opció értéke: $\max(c_3 - pV, 0)$.

Extrém esetekben a termelés bizonyos ideig szüneteltethető is. Tegyük fel, hogy a projekt sorsáról évenként dönt a menedzsment, ekkor az ideiglenes leállás opciója megfelel egy *vételi opciónak*, amely feljogosítja tulajdonosát az évi pénzáramlás (C) megszerzésére c_4 változó költség mellett, ami az opció kötési árfolyama. Ekkor az opció értéke: $\max(C - c_4, 0)$.

3.1.5. Input/output megváltoztatásának opciója

Az alapanyagok ill. a végtermék megváltoztatásának opciója nagy flexibilitást tükröz, és emiatt különösen is értékes. Tipikusan kétfajta rugalmasságot érdemes itt megkülönböztetni.

3.1.1. Definíció. *Egy projekttel kapcsolatban* ***termék-rugalmasságról*** *beszélünk, ha ugyanazon alapanyagok felhasználásával többféle végtermék is előállítható.*

3.1.2. Definíció. *Egy projekttel kapcsolatban* ***folyamat-rugalmasságról*** *beszélünk, ha ugyanazt a végterméket egymástól különböző alapanyagokból is elő lehet állítani.*

Hogy pontosan mikor melyik rugalmasság előnyét lehet kihasználni, az függhet például az alapanyag beszerzési vagy a végtermék értékesítési árától, vagy egyszerűen a termék iránti kereslettől.

3.1.6. Terjeszkedési/növekedési opció

Ha a projekt sikeres befejezése lehetővé teszi több későbbi projekt beindítását is, vagyis az adott projekt egy láncszem egy projektláncolatban és új lehetőségeket nyit meg a menedzsment előtt, akkor növekedési opcióról beszélünk. Tehát egy anyagilag kevésbé vonzó projekt is lehet nagyon értékes a menedzsment részére[2], ha az tartalmazza ezt a terjeszkedési opciót.

3.2. Alkalmazási területek

A valós opciók az élet számos területén jelen vannak. Ahol valamennyire befolyásunk van a jövőbeni kimenetelekre, vagyis rugalmasan tudunk reagálni a környezeti változásokra, ott tulajdonképpen valós opciókkal élünk. Számos iparágban fellelhetőek ezek a reálopciók, tipikusan a következőkben tulajdonítanak nekik nagy értéket:

[2] Sőt, egyes esetekben még negatív nettó jelenértékkel bíró projekteket is érdemes lehet beindítani.

- Az *időzítési opció* kiemelkedő jelentőséggel bír a mezőgazdaságban, a papíriparban, természeti erőforrások kitermelésével kapcsolatosan.
- A *fázisokra való felosztás opciója* tipikusan a K+F projektekben értékes, ezeken belül is a hosszabb időhorizonttal rendelkező kutatásokban, mint pl. a gyógyszeripar.
- A *projekt abbahagyásának opciója* különösen fontos olyan területeken, mint például a légi- és vasútvonalak kiépítése, pénzügyi szolgáltatások, új termék forgalmazásának megkezdése bizonytalan piacon.
- Az *ideiglenes szüneteltetés, bővítés (gyorsítás), szűkítés (lassítás) opciója* kimondottan jelentős például a fogyasztási termékek gyártásában ill. a bányászatban.
- A *végtermék (kimenet) megváltoztatásának opciója* nagy értékkel rendelkezik olyan területen, ahol nagyon ingadozó a termékkereslet (pl. szórakoztató elektronika, papíripar, alkatrészgyártás, autók, játékok), míg az *a termeléshez szükséges alapanyag (input) megváltoztatásának opciója* tipikusan nyersanyag alapú iparágakban fontos (pl. olajipar, vegyipar, stb.) .
- A *növekedési opció* különösen fontos az infrastruktúra alapú iparágakban (csúcstechnológia, K+F), illetve több különféle terméket előállító iparágakban (számítástechnika, gyógyszeripar, stb.) .

3.3. Analógia megvalósítása a klasszikus és a valós opciók között

Ahogyan a fentiekben is láttuk, nem állnak messze a valós opciók - természetüket tekintve - a pénzügyi opcióktól. Hogy az analógia még szorosabb legyen, vizsgáljuk meg, mi lehet a valós opciók esetében az alapeszköz, a kötési árfolyam, a lejárat, a kockázat, osztalék-kifizetés, és a diszkontáláshoz használt kamatláb!

PÉNZÜGYI OPCIÓK $\Longleftrightarrow$ VALÓS OPCIÓK

Opció fajtája:

$$\text{vételi opció egy befektetési projektre} \Longleftrightarrow \text{vételi opció egy részvényre}$$

Alapeszköz:

$$\text{a részvény jelenlegi értéke} \Longleftrightarrow \text{a várható pénzáramlások (bruttó) jelenértéke}$$

Kötési árfolyam:

$$\text{egy rögzített részvényár} \Longleftrightarrow \text{a befektetés költségének jelenértéke}$$

Lejárat:

$$\text{rögzített időpont} \Longleftrightarrow \text{amikor a lehetőség érvényét veszíti}$$

Kockázat:

$$\text{bizonytalanság a részvény értékében} \Longleftrightarrow \text{bizonytalanság a projekt értékében}$$

Osztalék-kifizetés:

$$\text{osztalék-kifizetés részvény tulajdonosának} \Longleftrightarrow \text{osztalék-kifizetés indirekt módon}^3$$

Kamatláb:

$$\text{kockázatmentes kamatláb} \Longleftrightarrow \text{kockázatmentes kamatláb}$$

[3] Tipikusan a befektetésig várakozással eltöltött időszakban felmerülő veszteségek tekinthetőek osztalékjellegű kifizetéseknek

4. fejezet

Projektértékelési módszerek

Ebben a fejezetben több különféle projektértékelési módszert vizsgálunk meg. Először említésre kerülnek az ismertebb módszerek (DCF, döntési fák), és megállapítjuk, hogy miért nem használhatjuk őket sikeresen egy K+F projekt pénzben kifejezhető értékének meghatározására, majd az opciók árazására használt módszerek tipikus bemenő paramétereinek lehetséges állapotait vizsgáljuk meg. Egyben áttekintést kapunk a valós opciós módszerről, és találkozni fogunk azokkal a nehézségekkel, ami miatt egyes esetekben a valós opciók értékelése jóval nehezebb lesz, mint a klasszikus opcióké.

4.1. A klasszikus módszerek kritikája

4.1.1. A klasszikus DCF (NPV) módszer

A legősibb és legelterjedtebb eljárás projektek kvantitatív értékelésére a *diszkontált pénzáramlások módszere*[1]. Ez a módszer csupán arra ad becslést, hogy mennyi a jelenleg várható pénzáramlások várható értéke, figyelembe véve a pénz időben történő értékcsökkenését. A diszkontált pénzáramlások módszere nem tulajdonít értéket a projektekben gyakran jelenlevő flexibilitásnak: annak a lehetőségnek, hogy a menedzsment aktívan beavatkozhat a projekt folyamán, ha erre - a változó körülmények miatt - szükség lenne.
A kockázatnak megfelelő diszkontálás problémája még akkor sem lenne megoldva, ha

[1]DCF = discounted cashflow (diszkontált pénzáramlás), NPV = nettó present value (nettó jelenérték)

a DCF-analízis figyelembe venné ezt a többlet- pénzáramlást, vagyis a projekthez kapcsolódó opciók értékét, mivel egy opció kockázata természetesen nem egyezik meg az aktuális pénzáramlások kockázatával. Az opció kockázata nem becsülhető meg, így egy egységes - a kockázat mértékének megfelelő - diszkontráta sem adható meg. (A kockázat az idő és a pénzáramlások bizonytalan méretének függvénye.)

Összegezve: A DCF-módszert sokan elavultnak tartják, mivel nem tulajdonít értéket a projektekben jelenlevő flexibilitás mértékének: nem tükrözi a menedzsment értékét. Nem veszi figyelembe, hogy aktív portfólió kezeléssel csökkenthetőek a veszteségek, és növelhetőek a várható hozamok. Azonban a módszer mégsem használhatatlan: ez a passzív hozzáállásra alapozott módszer, mint azt később látni fogjuk, kibővíthető egy sokkal inkább használható modellé, amely már figyelembe veszi az aktív projektkezelés lehetőségének értékét is.

4.1.2. Döntési fák

A döntési fák módszere már fejlettebb módon kezeli a projektben rejlő opciók kérdését. A döntési fa minden egyes pontja egy opciónak a lehívását reprezentálja. A döntési fa gyökerében (csúcsában) a projekt feltételes várható értéke szerepel, azokra az eseményekre tekintve, amik a fa gyökeréből (csúcsából) valamilyen (előre vezető) úton elérhetőek.

A projekt értékének a meghatározása tehát a következő: a feltételezett jövőbeli értékektől haladunk fokozatosan visszafelé a jelenig, míg végül megkapjuk, hogy az opciók jelenléte mennyivel növeli meg a projekt értékét.

A modell hátránya: nagyon gyorsan kezelhetetlenné válik a fa a sok ág miatt, ezért valós életbeli, bonyolultabb opciókat tartalmazó projektek értékének meghatározására nem tanácsos használni. De ami még ennél is nagyobb probléma: sajnos a diszkontráta módosításának szükséges mértékét ez a módszer sem adja meg.[2]

A modell előnye: A modell szinte bármilyen opció értékelésére használható. Ennek akkor van nagy jelentősége, ha más opcióértékelési módszerek nem alkalmazhatóak[3].

[2] E probléma a menedzsment hasznossági függvényének megfelelő becslésével feloldható. Részletek: Smith and Nau, 1995

[3] pl. mert a Black-Scholes formula használata nem megalapozott

4.2. A valós opciós módszerekről - általánosságban

A valós opciós módszerek a beágyazott opciók értékét is meg tudják ragadni, és így végre az adott projekt *aktív* (meglévő opciók értékével növelt) értékét fogjuk tudni meghatározni. Erről két faktor gondoskodik:

- A lehetséges pénzáramlásokat elméletileg megalapozott eloszlásokkal adjuk meg (pl. lognormális, binomiális), így az opciók megjelenése ezen eloszlások megfelelő transzformálásával lesz ekvivalens.
- A kifizetések aktuális valószínűségeit kockázatsemleges valószínűségekre cseréljük, így lehetővé válik a kockázatmentes kamatlábbal történő diszkontálás.

Megjegyzés: Ez tulajdonképpen úgy írható le szemléletesen, mintha levághatnánk az aktuális döntési fa kevésbé tetszetős ágait anélkül, hogy a diszkontrátára tekintettel kellene lennünk. Vagyis tulajdonképpen a valós opciós módszer nem más, mint a döntési fák módszerének módosított változata, melyben úgy rendezzük át a kockázatot, hogy lehetővé váljon, hogy mindig a kockázatmentes kamatlábbal kelljen diszkontálnunk.

4.3. Az opciós értékelési módszerek bemeneti változói

A legtöbb opcióárazási modell 6 különböző inputváltozót használ:

- alapeszköz (eloszlása, aktuális értéke, stb.)
- kockázat mértéke
- osztalék-kifizetés
- kötési árfolyam
- kockázatmentes kamatláb
- érvényességi idő

A valós opciók árazása jóval bonyolultabb feladat, mint a klasszikus opcióké, mivel - a korábban felismert hasonlóságok ellenére - sok különbség is van közöttük. A következőkben célunk ezeknek a különbségeknek a számbavétele. Néhány nehézségre csupán rávilágítunk, néhány fontosabb kérdésre viszont a későbbi fejezetekben választ is próbálunk adni.

4.3.1. Az alapeszköz

Az alapeszköz pénzügyi eszközök esetében például egy részvény, valós opciók esetén pedig tipikusan a projekttel kapcsolatos várható pénzáramlások (bruttó) jelenértéke: ezek az árak változhatnak folytonosan, vagy diszkrét időpontokban. Folytonos esetben többféle modell használata is indokolt lehet (a projekt jellegétől, sajátosságától függően): diffúziós, ugró vagy várható értékhez visszatérő (mean-reverting) folyamatot tekinthetünk vizsgálódásunk során.

- A diffúziós folyamat során nincsenek hirtelen ugrások az ár változásait feltüntető grafikonban, ilyen például a geometriai Brown-mozgás. A Black-Scholes modell is az alapeszköz árának ilyen jellegű mozgását feltételezi. Az eszköz ára ebben az esetben lognormális eloszlású.

- Gyakran ez a folytonos árváltozás nem felel meg teljes mértékben a valóságnak, előfordulhat ugyanis, hogy ha valamilyen új információhoz jutunk, hirtelen felmegy vagy lezuhan a vizsgált ár, vagyis ugrás történik az árban. Például részvényárfolyamok vizsgálata során gyakran találkozhatunk ilyen jellegű ugrásokkal, ahol ezek a hirtelen árváltozások ismert vagy sejthető okokkal magyarázhatóak(nyilvánosságra kerül egy vállalat anyagi helyzete, háború kitörése, csatlakozás az Európai Unióhoz, stb.). Az ugrások tekinthetőek fixnek vagy véletlentől függőnek.

  Arról, hogy új információ érkezése hogyan befolyásolhatja az alapeszköz (és ezzel együtt az ehhez tartozó opciók) értékét, a 6. részben, a 30. oldalon foglalkozunk részletesebben. A modell hátránya, hogy ugró folyamatok esetén nehéz zárt alakban megadni az adott opció értékét.

- A Brown-mozgással szimulált sztochasztikus folyamatok a kiindulóponttól nagyon eltávolodhatnak. Ez bizonyos eszközárak modellezésénél meglehetősen irreális, mivel hosszabb időtartamot tekintve a várható érték körüli értékek a tipikusak. A várható értékhez visszatérő modell hátránya, hogy általában igen nehéz megállapítani, hogy egy folyamat ténylegesen visszatérő-e vagy nem.

- Végül lehetőség van az árváltozások még egy fokkal komplexebb modellezésére: a vizsgált folyamatot diffúziós és ugró folyamatnak is tekinthetjük, vagyis két korábbi modell vegyesen jelenik meg ebben a megközelítésben.

Az opciók árazásának elméletében fontos feltétel, hogy az alapeszköz kereskedett legyen(hogy az arbitrázsmentességet kihasználó értékelési módszert alkalmazni lehessen). Ha egy K+F befektetés kereskedett (pl. jegyezhető a tőzsdén), akkor van piaci ára, ami tekinthető alapeszköznek. Általában azonban ez a ritkább eset, tehát jogos a kérdés: *mi legyen az alapeszköz abban az esetben, ha egy befektetés nem kereskedett?*

1. megjegyzés: Bár a valóságban leggyakrabban a jövőbeni pénzáramlások nettó jelenértékét tekintik alapeszköznek, ez nyilván felvehet negatív értéket is, míg a hagyományos, pénzügyi opciók árazási formuláiban az alapeszköz nem lehet negatív. Ez azt jelenti, hogy egyes projektekre az alapeszköz nem lehet a jövőbeni pénzáramlások nettó jelenértéke.

2. megjegyzés:A valós opciós megközelítés akkor adja ugyanazt a végeredményt, mint a nettó jelenérték módszerrel történő számítás, ha a piaci és a technológiai bizonytalanság nullához közelit, és ha a piacra kerülést megelőző új termékfejlesztési (NPD) beruházás reverzibilis (vagyis a kutatás költségei a kutatás abbahagyása után visszanyerhetőek).

4.3.2. A kockázat

A volatilitásnak 5 különböző fajtáját szokták megkülönböztetni:

- *jövőbeli volatilitás*: általában nem ismert, de ez határozza meg az opció tényleges értékét

- *múltbeli volatilitás*: múltbéli adatokból levezetett volatilitás

- *előrejelzett volatilitás*: tapasztalt szakemberek által becsült, korábbi elemzésen alapuló volatilitási érték

- *implicit volatilitás*: az opciók piaci árát alapul véve, opcióárazási modellek segítségével meghatározott belső volatilitás

- *szezonális volatilitás*: akkor érdemes szezonális volatilitást tekinteni, ha az adott termék ára nagyon ingadozó, és ezen változás ciklikussága felismerhető a piacon (pl. búza, szója ára)

Az alapeszköz kockázatának mérése a következőképpen zajlik: az ármozgások volatilitását kell megállapítani ahhoz, hogy meghatározhassuk a relatív hozam volatilitását. K+F befektetési projektek volatilitását nehéz mérni, mert általában nincsenek múltbeli volatilitási adatok, amikre támaszkodhatnánk. Ez nem meglepő, mivel a kutatásnak éppen az a célja, hogy valami újat hozzon létre. Tehát felmerül a következő kérdés: *Milyen módon tudunk mégis valamilyen módon egy használható volatilitási paramétert megadni?*

4.3.3. Osztalék-kifizetések

A hagyományos (pénzügyi) opciók elméletében csupán olyan osztalék-kifizetést szokás vizsgálni, amire az alapeszköz tulajdonosa jogosult. A valós opciók elméletében kétféle osztalék-kifizetést érdemes vizsgálni: lehet az, hogy az alapeszköz tulajdonosa jogosult az osztalékra, de az is gyakran előfordulhat, hogy az opció tulajdonosának jár az osztalék-kifizetés. Az első esetről beszélhetünk, ha elindítunk egy befektetést. Ekkor a projekthez kapcsolódó pénzáramlások nálunk, az alapeszköz tulajdonosánal jelentkeznek osztalék formájában. Viszont ha egy földterületre vonatkozó vételi opcióval rendelkezünk, és a föld hasznot termel (pl. termés formájában), ez az opciónk értékét is megnöveli, vagyis az opció tulajdonosánál fog jelentkezni egy osztalék-jellegű kifizetés. A pénzügyi opciókkal ellentétben egy befektetési projekt olyan pénzáramlásokat generálhat, amelyek nagysága, megjelenési gyakorisága általában nem ismert. Az első esetről beszélhetünk pl. ha rendelkezünk egy földterületre vonatkozó építési joggal, és az építkezés megkezdése (az opció lehívása) előtt még profit származik a területből (pl. termés). A pénzügyi opcióknál nem annyira jellemző különféle osztalékok (osztalék-jellegű juttatások) különösen komplikálttá tehetik a valós opciók értékét, mivel itt

- az osztalék nagysága lehet determinisztikus vagy sztochasztikus

- az osztalék-kifizetés történhet diszkrét időpontokban vagy folytonos módon.

4.3.4. A kötési árfolyam

Sokminden múlik azon, hogy projektünk értékelése során milyen kötési árfolyammal számolunk. A kötési árfolyam lehet ismert (például egy K+F projekt során a befektetés költsége általában ilyen), de sztochasztikus jelleggel is rendelkezhet.

K+F projektek kötési árfolyama általában nem ismeretes előre, ezért ha alkalmazni szeretnénk valamilyen opcióértékelési modellt, helyettesíteni (replikálni) kell azt egy sztochasztikus változóval.

4.3.5. A kockázatmentes kamatláb

A kockázatmentes kamatláb általában ismertnek tekinthető a pénzügyi opciók esetében. K+F projektek esetében viszont lényegesen hosszabb időperiódusokkal kell számolnunk, mint általában a pénzügyi opcióknál, ezért a kockázatmentes kamatlábat ilyenkor ismeretlennek, sztochasztikus változónak célszerű tekinteni. Ez viszont ismételten nehezebbé teszi a projekt során felmerülő opciók kvantitatív értékelését. Ha olyan állampapírok várható hozamát tekintjük, amelyek ugyanannyi idő múlva járnak le, mint egy adott opció, akkor általában egy jó becslést kapunk a kockázatmentes kamatláb értékére.

4.3.6. Lejárat

A lejárat konkrét időpontja lehet:

- ismert: rövid, hosszú vagy végtelen ideig tartó
- ismeretlen

A K+F projektekkel kapcsolatban felmerülő valós opciók - a pénzügyi opciókkal ellentétben - általában jóval hosszabb érvényességi idővel rendelkeznek, ezért viszonylag nagy hatással van az opció értékére ez a paraméter. Ilyen esetekben gyakran nem is lehet pontosan tudni, meddig is érvényes egy adott opció.

Megemlítünk még egy apró különbséget a pénzügyi és a valós opciók között: míg a pénzügyi opciók esetében nem igazán kell számításba vennünk, hogy megszűnhet az alapeszköz (a részvény), addig a K+F projektek esetében ez is előfordulhat (a valós opció tovább lenne érvényes, ám a projektet időközben leállították). Ezzel a problémával a klasszikus opcióárazási modellek nem számolnak.

4.3.7. Verseny

Számolnunk kell azzal az eshetőséggel is, hogy versenytársak is belépnek a piacra miénkhez hasonló, konkurens termékekkel: ez esetben nyilván csökken a projektünk értéke. Ezért célszerű a valós opciókat két részre osztani aszerint, hogy kinek van joga érvényesíteni az adott opciót.

4.3.1. Definíció. ***Exkluzív opcióknak*** *nevezzük azokat az opciókat, melyeket csak az opció tulajdonosa hívhat le.*

4.3.2. Definíció. ***Közönséges opcióknak*** *nevezzük azokat az opciókat, melyeket bárki érvényesíthet.*

A közönséges opciók esetében nehezebb a kvantitatív értékelés. Ilyenkor egy lehetőség a probléma kezelésére, ha úgy jelenítjük meg a versenytársak lépéseit projektünk értékelése során, mint osztalék-kifizetéseket.

4.4. Az opciós módszer gyakorlati lépései

Egy opciós értékelés során a gyakorlati teendők tipikusan[4] a következők:

- meg kell állapítanunk, milyen valós opciók rejlenek a projektben
- az alapeszköz definiálása/karakterizálása
- volatilitás megállapítása (vagy valamilyen módszerrel becsülni kell)
- kötési árfolyam megállapítása
- az érvényességi idő rögzítése
- a kockázatmentes kamatláb meghatározása
- osztalék kifizetések vannak-e, ill. ha igen, milyenek
- lehet-e versenyhelyzetre számítani
- az opció típusának megállapítása

[4] Természetesen ezek a lépések függenek az éppen használni kívánt modelltől, de általában a fejlettebb modellek esetében mindenképpen szükségesek.

4.5. Kérdések

A dolgozat további részében a következő kérdésekkel fogunk foglalkozni:

1. Milyen valós életbeli projektek esetében lehet sikerrel alkalmazni a valós opciós megközelítést? Hogyan lehet egy ilyen projektet modellezni? Milyen valós opciók merülnek fel a projekttel kapcsolatban? Milyen modellt alkalmazzunk az opciós értékelés során? Hogyan lehet összetett opciókat értékelni[5]?

2. Jogos-e az a feltevés, hogy az alapeszköz a valós opciós megközelítésben is lognormális eloszlást követ? Milyen módon lehet az információk érkezésének alapeszközre vonatkozó hatását modellezni[6]?

3. Hogyan becsülhető az alapeszköz volatilitása? Mely bemenő paraméterekre érzékeny a leginkább az opcióárazási formula[7]?

4. Mit tehetünk abban az esetben, ha az adott projekt a piacon nem kereskedett[8]?

[5]Ezekkel a kérdésekkel az 5. fejezetben fogunk részletesen foglalkozni.
[6]Ezekkel a kérdésekkel a 6. fejezetben fogunk részletesen foglalkozni.
[7]Ezekkel a kérdésekkel a 7. fejezetben fogunk részletesen foglalkozni.
[8]Ezzel a kérdéssel a 8. fejezetben fogunk részletesen foglalkozni.

5. fejezet

A K+F projektek főbb típusai és modellezése

Kutatás és fejlesztés manapság egyre több iparágban zajlik. Számos modell létezik, melyek leírják egy adott területhez kapcsolódó projekt sajátosságait, azonban ezek a modellek egymástól nagyban különböznek. Ebben a fejezetben két ilyen K+F projektet ismertetünk. Ezek tipikusan egy-egy adott iparághoz kötődnek ugyan, de mégis kiválóan alkalmasak arra, hogy betekintést nyerjünk abba, hogy milyen kérdésekkel kell szembesülnünk egy projekt kvantitatív értékelése során.

Egy lehetőség projektünk kvantitatív értékelésére a viszonylag nem túl nagy múltra visszatekintő, mégis nagy reményekkel kecsegtető valós opciós megközelítés. Az opcióelmélet mérföldköve 1973, amikor is Black, Scholes és Merton egy a pénzügyi opciók értékelésére használható elmélettel állt elő. Ez az elmélet nem csak pénzügyi opciók megfelelő árazására lehet alkalmas, hanem a valós opciók értékelésére is, mivel, egy kutatásba történő befektetés, mint láttuk, ekvivalens egy valós opció megvételével.

Egyes esetekben teljesen helytálló ez a megközelítés, viszont, mint látni fogjuk, nem minden esetben célszerű ezzel a módszerrel számolnunk a kutatás opció értékét. Ennek több oka is lehet: nem feltétlenül teljesül az alapeszköz *lognormalitására* vonatkozó feltétel[1], vagy például mert gyakran *összetett opciók*[2] találhatóak egy valós életbeli projektben.

[1] ami a Black-Scholes formula egyik lényegi alapfeltevése volt

[2] opció egy opció megvételére

5.1. A kutatás és a későbbi pénzáramlások közötti kapcsolat

Fontos látnunk, hogy - bár korábban sokan így látták - a kutatás önmagában nem jár profittal, célszerű inkább erre úgy tekinteni, mint egy lehetőségre, amelyet megfelelő módon kihasználva esetleges jövőbeli pénzekhez juthatunk. A kutatás és a későbbi pénzáramlások közötti kapcsolatot gyakran nehéz megállapítani, nagyban függ attól, hogy a kutatás milyen területen folyik.

Például *gyógyszeripari kutatásokban*, ahol a kutatás fázisai meglehetősen determináltak és viszonylag könnyen nyomon követhetőek, ez a kapcsolat viszonylag szoros. (Gondoljunk például arra, hogy törvény írja elő, hogy egy piacra bevezetendő gyógyszer kifejlesztése és tesztelése mennyi ideig kell, hogy tartson). Szemléltetésként a következő részben bemutatásra kerül egy valós életbeli gyógyszeripari projekt.

A *telekommunikáció* területén folyatott kutatások esetében viszont sokkal nehezebb megállapítani, hogy a kutatások eredményessége milyen mértékben befolyásolja a jövőbeni pénzáramlásokat. Természetesen bármely területen vizsgálódunk, ezt a hatást teljesen pontosan nem lehet megállapítani, csupán becsülni lehet őket. Becslésünket alapozhatjuk korábbi adatsorokból levont következtetésekre, illetve ennek hiányában más, hasonló kutatási projektekből nyert adatokat használhatunk fel paramétereink becslésére. A kutatási tevékenység előfeltétele a későbbi fázisoknak, így a kutatás értéke tulajdonképpen egyenlő a kutatásra maximálisan áldozható összeggel, amely mellett a hozam még arányos a kockázattal. Ez könnyen igazolható néhány iparágban, ahol a kutatás eredménye valamilyen explicit tudás, és így könnyen megragadható a kutatás és a későbbi pénzáramlások közötti kapcsolat. Más esetekben, ahol a kutatási fázis csupán csak az egyik előfeltétele a későbbi hozamnak, definiálhatunk egy technológiai faktort, amely azt mutatja meg, hogy milyen mértékben felelős a kutatás eredményessége a későbbi pénzáramlások nagyságáért. Azonban a pénzáramlások erőteljes sztochasztikus jellege miatt ennek a faktornak még a becslése is elég körülményes.

5.2. Egy telekommunikációs projekt

5.2.1. Az E-commerce projekt ismertetése

1. Kutatási fázis (R: kutatás költsége, E: egyéb kiadások (pl. piacelemzés költsége)). Hossza: tipikusan **egy év**.
2. Fejlesztési fázis (D: fejlesztés költsége). Hossza: tipikusan **egy év**.
3. Implementáció fázisa (I: befektetés, C: befolyó pénzáramlás). Hossza: ez a fázis **a projekt élettartamának végéig** tart.

Megjegyzés: A modell az e-commerce projektek többségére igaz, de néhány kutatási terület esetében az 1. és a 2. fázis tovább is eltarthat.

5.2.2. A projekt modellezése

Ilyen esetben a Black-Scholes-képlet nem ragadja meg ennek a modellnek a többlépcsős jellegét, mivel ebben az esetben tulajdonképpen egy *összetett vételi opcióról* van szó, ahol a kutatási fázis rendelkezik a fejlesztési fázis elindításának opciójával, a fejlesztési fázis pedig a megvalósítási fázis beindításának opciójával. A két opciót nem lehet lehívni lejáratuk előtt, vagyis *európai típusú opciók*. Ez a feltevés teljesen helytálló, mivel nyilván nem lehet elkezdeni a megvalósítást, ha a megfelelő technológia még nem elérhető.

Formalizálva:

- Az első opció kötési árfolyama: D.
- A második opció kötési árfolyama: I.
- A pénzáramlások jelenértéke: C (az az érték, amelyhez akkor jutunk, ha lehívjuk a második opciót).
- D, I: determinisztikusak
- C: sztochasztikus (Wiener folyamat)

Összetett opciók értékelésére a Black-Scholes formula Geske által 1979-ben továbbfejlesztett változata használható. Eszerint az összetett opció értéke:

$$G = CM(d_1(\frac{C}{C^* e^{-rt_1}}, t_1), d_1(\frac{C}{Ie^{-rt_2}}, t_2), \rho) -$$
$$- Ie^{-rt_2} M(d_2(\frac{C}{C^* e^{-rt_1}}, t_1), d_2(\frac{C}{Ie^{-rt_2}}, t_2), \rho) - De^{-rt_1}\Phi(d_2(\frac{C}{C^* e^{-rt_1}}, t_1)) \quad (5.1)$$

ahol

- G: az összetett opció értéke
- C: a pénzáramlások becsült jelenértéke
- I: az implementáció során felmerülő költség
- D: a fejlesztés beindításának költsége
- t_1: a fejlesztés beindításának időpontja
- t_2: az implementáció megkezdésének időpontja
- σ: C volatilitása
- r: kockázatmentes kamatláb
- M: a kétváltozós normális eloszlás eloszlásfüggvénye
- ρ: korrelációs együttható M-ben
- $d_1(x,t) = \dfrac{\ln x + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}$
- $d_2(x,t) = d_1(x,t) - \sigma\sqrt{t}$
- C^*: C azon értéke, mikor az opciót t_1-ben ajánlatos lehívni (Ezt az értéket úgy kapjuk meg, hogy megoldjuk a standard Black-Scholes egyenletet egy t_2-ben lejáró opció értékére, vagyis ha $F_{BS}(C, I, \sigma, t, r)$ egy európai típusú vételi opció értéke a szokásos jelölésekkel, akkor C^*-ra teljesül, hogy $F_{BS}(C^*, I, \sigma, t_2 - t_1, r) = 0$).

5.3. Az NDA-projekt

5.3.1. A projekt ismertetése

Egy új gyógyszer kifejlesztése[3] sokáig tartó, költséges, komplex kutatással indul. Az elsődleges kutatás során általában többezer kémiai anyagot tesztelnek, míg megtalálják azt az egyet, amely eléri a kívánt hatást (pl. képes legyőzni egy adott betegséget). Körülbelül 5000-10000 kémiai összetevő közül 250 alkalmas további vizsgálatokra, ami állatokon történő tesztelést jelent, mind külsőleg, mind belsőleg. Általában legalább kettő fajon sikeresnek kell lennie a tesztelésnek ahhoz, hogy emberen is ki lehessen próbálni az anyagot. Ha a klinikai fázis előtt kiderül, hogy a gyógyszer alkalmazása komoly veszélyt jelenthet az emberi egészségre (pl. emberi szerv károsodása, rák, stb.), a kutatást berekesztik. Ha a tesztek sikeresek, és az erre jogosult hivatalos szerv[4] engedélyt ad rá, következhetnek a klinikai tesztek. A 250 kémiai összetevőből körülbelül már csak 5 jut el ebbe a fázisba. Ez az állomás 3 alfázisból áll:

1. 20-80 önkéntesen tesztelik a "gyógyszert". (Fő szempontok: biztonságosság, dózis, tipikus hossz: **néhány hónap–egy év**)

2. 100-300 emberen tesztelik a "gyógyszert". (Fő szempontok: hatékonyság, mellékhatások, tipikus hossz: **néhány hónap–két év**) Ha komoly mellékhatások jelentkeznek, a gyógyszer nem kerülhet alkalmazásra a későbbiekben.

3. 1000-5000 emberen tesztelik a gyógyszert. (Fő szempontok: hatékonyság, jobb-e, mint a korábbi hasonló gyógyszer?, Tipikus hossz: **3 év**)

A következő lépés a tesztadatok összegyűjtése, továbbítása annak hivatalos szervnek, amelynek feladata az új gyógyszer jóváhagyása. Ezután következik az üzleti fázis. Miután megvan a szabadalom, ezt a projektet indító cég értékesítheti. (A szabadalom hossza tipikusan 11–12 év.) Statisztikák mutatják, hogy egy gyógyszer piacra jutásának ideje átlagosan **14,2 év**.

[3] NDA = new drug application

[4] az USA-ban az FDA

5.3.2. A projekt modellezése

A kezdeti kutatási fázis tehát tekinthető egy opciónak, amely a klinikai tesztek előtti fázisba lépésre jogosít. Ha a kezdeti fázis sikeres, a projekt továbblép a következő fázisba, különben vége a projektnek. A klinikai tesztek előtti fázis tekinthető egy opciónak, amely a klinikai tesztek elindítására jogosít. Ha a klinikai tesztek előtti fázis sikeres, a projekt továbblép a tesztelési fázisba, ha pedig sikertelen, a kutatásnak ismét vége. A mostani fázis ismét tartalmaz egy opciót, amely a következő fázisba lépésre jogosít, és így tovább.

A modell tehát egy **hatszorosan összetett opciót** tartalmaz, melynek értékelése után megkapjuk, hogy mekkora a K+F projekt értéke a projekt elindítása előtt. Ebből az elsődleges információ az, hogy érdemes-e belevágni a kutatásba. Másodlagos haszna ennek a kvantitatív értékelésnek az, hogy különböző K+F projektek között preferencia sorrendet tudunk felállítani. Nyilván érdemes abba a projektbe belevágni, amelyik a lehető legnagyobb várható haszonnal kecsegtet.

5.3.3. A modell értékelése

Mivel összetett opciókat tartalmazó projektet kell értékelnünk, a Black-Scholes-modell nem a legmegfelelőbb választás. Ennek továbbfejlesztett változata, a Geske-modell, ami kétfázisú projektek értékelésére lett kifejlesztve. Ez már pontosabb értéket szolgáltatna a projekt értékére, de ezesetben két fő fázisra kellene osztani a kutatást. Jelen esetben viszont ez túl nagy kompromisszum lenne, tekintve, hogy *hatszorosan* összetett opciót tartalmazó projektet kell értékelnünk. Ilyen esetben az *általánosított Geske-modell* az, ami megfelel projektünk sajátosságának[5].

[5] Erről a modellről részletesebben [2]-ben lehet olvasni.

6. fejezet

Új információ

A Black-Scholes képlet levezetésekor feltettük, hogy az alapeszköz geometriai Brown-mozgást végez, ami egyes kutatási projektek esetében könnyen támadható. Tulajdonképpen azt jelentené a feltevés, hogy a lényegi információ, amely módosítja az alapeszköz értékét, folytonosan érkezik. Azonban könnyen elfogadható, hogy lényegi információk inkább diszkrét időpillanatokban érkeznek, mint folytonosan. A valós életben, a valós piacokon a menedzsment a jövőbeli pénzáramlások jelenértékét nem folyamatosan módosítja, hanem csak stratégiai jelentőséggel bíró információk érkezése után. (Az a tapasztalat, hogy a gyakorlatban a menedzsment még ennél is passzívabb hozzáállást tanúsít korábbi becsléseinek felülvizsgálatára.)

Az a feltevés, hogy az alapeszköz geometriai Brown-mozgást követ, nincs összhangban a tipikus menedzsment döntési folyamataival, mivel a projekt nettó jelenértékével kapcsolatos bizonytalanság a piacra lépés pillanatában előre nem látható események függvénye. A menedzsment akkor fog érvényesíteni egy valós opciót (piacra dobni egy új terméket), ha $S > I$, vagyis ha a jövőbeli nettó pénzáramlások várható jelenértéke (S) meghaladja a befektetés költségét (I). A jövőbeli profit várható jelenértéke véletlen számú alkalommal módosulni fog a jelen pillanat (t) és a piacra lépés időpontja között (T).

6.0.1. Definíció. *A **lényegi információ** olyan stratégiai jelentőséggel bíró információ, melynek következménye a várható jövőbeni pénzáramlások megváltozása.*

Feltesszük, hogy az új, lényegi információ érkezéséig eltelt idő (w) θ paraméterű exponenciális eloszlású. Előnyei a feltevésnek:

- Az exponenciális eloszlás örökifjú, vagyis egy új lényegi információ érkezése nem függ a korábban érkezett információk érkezési időpontjától.

- A beérkezett lényegi információk száma (n) $\lambda = 1/\theta$ intenzitású homogén Poisson-folyamat. Vagyis

  $$E(n) = \lambda(T - t),$$

  ahol n a $[t, T]$ intervallumon beérkezett lényegi információk száma.

A λ paraméter tipikusan a K+F projekt kutatási területétől függ. Technológiai alapú piacokon λ értéke nagy lesz (az a lehetőség, hogy szabványosíthatják az újonnan kifejlesztett technológiát, pozitív módon befolyásolja a projekt nettó jelenértékét), míg például az infrastruktúra kiépítéséhez/bővítéséhez kapcsolódó (tipikusan irreverzibilis) projektek esetében, mivel a kutatási fázisban túl sok lényegi információ érkezése nem várható, λ értéke kicsi.

A jövőbeli nettó pénzáramlások piaci értéke, feltéve, hogy a piacra lépés megtörténik:

$$S(t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-(T+i)\mu} E(CF_{T+i}|\Omega(t)) \tag{6.1}$$

ahol

- $\Omega(t)$: a t időpontig megismert információk halmaza, melyre $\Omega(t) \subseteq \Omega(s)$ teljesül, ha $t < s \leq T$

- μ: a projekt költségei

- CF_{T+i}: a nettó pénzáramlás i évvel az irreverzibilis befektetés elindítása után

Feltesszük, hogy a pénzáramlások azonos kockázati karakterisztikával rendelkeznek, vagyis μ minden lehetséges pénzáramlásra konstans. Az opció értékét a piacra lépés pillanatában értelemszerűen a következőképpen definiáljuk:

$$V(S(T)) = \max(0, S(T) - I). \tag{6.2}$$

Mivel T rögzített, és az opció nem hívható le a piacra lépés előtt (ehhez szükséges a K+F fázisok teljesítése), az opció *európai típusú.*

A Black-Scholes feltételek mellett megvalósítható egy (megfelelő számú opcióból és részvényből álló) kockázatmentes, lefedezett P portfólió létrehozása (lásd 2.6. rész

7. oldal), és az így kapott differenciálegyenlet már nem függ kockázati preferenciáktól. Ilyen esetben a kockázatmentes kamatláb az, amit alapul vehetünk a portfólió növekedési ütemére vonatkozóan.

Ha a Black-Scholes folytonossági feltétele nem teljesül, konkrétan: ha az alapeszköz egy olyan diffúziós folyamat, amelyben ugrások vannak, akkor részvényekből és opciókból nem állítható össze egy lefedezett kockázatmentes P portfólió.

P várható hozama a kockázatmentes kamatláb, ha a CAPM (Capital Asset Pricing Model) teljesül és ugrások komponensei nem korreláltak a világpiaccal.

Következmény: Ilyen esetben a CAPM modellben $\beta = 0$ teljesül, és az ugrási komponensek tisztán nem-szisztematikus kockázatot jelentenek.

Ha az alapeszköz kereskedett, akkor a nem-szisztematikus kockázat diverzifikálható. Ebben az esetben létezik opcióárazási formula (Merton), de sajnos nem írható könnyen kezelhető, zárt alakba.

Tehát tegyük fel, hogy $S(t)$ értéke egy kockázat-semleges környezetben egy r drifttel rendelkező ugró folyamatnak megfelelően változik, vagyis

$$dS(t) = rS(t)dt + S(t)dn \tag{6.3}$$

ahol

- $P(dn = 0) = 1 - \lambda dt$
- $P(dn = \Theta_i) = \lambda dt$

Cox és Ross 1975-ös modelljét kapjuk vissza, ha az ugrás amplitúdója (az alapeszköz értékében történt relatív változás) pozitív és determinisztikus. A geometriai Brown-mozgás ebben az esetben nem lenne helytálló, mivel most olyan módon modellezzük az alapeszköz változását, hogy az nem változik, amíg új információ nem érkezik.

A modell sztochasztikus amplitúdójú ugrásokat tekint. Az ugrások amplitúdóját tekintsük a következő szorzatalakban:

$$\Theta_i = X_i \Gamma_i, \tag{6.4}$$

ahol

- X_i: az ugrás irányára utal

- Γ_i pedig az ugrás abszolút nagyságára utal.

a következőképp:

$$X_i = \begin{cases} 1 & p \text{ valószínűséggel} \\ -1 & 1-p \text{ valószínűséggel,} \end{cases} \tag{6.5}$$

és $\Gamma_i \geq 0$. Feltesszük még, hogy $\Gamma_i | X_i \sim Weibull(\gamma_{X_i}, 2)$ (ez tulajdonképpen az ún. Rayleigh-eloszlás).

A valóságot esetleg jobban leírhatja egy olyan modell, amelyben pl. a nagyobb ugrások valószínűsége nagyobb (vagyis az ugrások eloszlása nem szimmetrikus), mint egy olyan, amelyben $p = 0,5$ és $\gamma_{-1} = \gamma_1$ (vagyis az eloszlás szimmetrikus).

(Feltételezzük, hogy olyan esemény nemigen fog bekövetkezni, amikor a lényegi információ olyan mértékben befolyásolja a kimenő és befolyó pénzek nagyságát, hogy azok éppen "kioltják egymást", vagyis előjeles összegük éppen zérus lesz.)

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban feltesszük, hogy a sztochasztikus ugrások nagysága szimmetrikus eloszlású.

Ekkor

$$E(\Theta_i | X_i) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} X_i \gamma_{X_i} \tag{6.6}$$

és

$$Var(\Theta_i | X_i) = (1 - \frac{1}{4}\pi)\gamma_{X_i}^2 \tag{6.7}$$

A Θ_i-k feltétel nélküli eloszlásában a várható érték 0, ha teljesül, hogy

$$p\gamma_1 = (1-p)\gamma_{-1} \tag{6.8}$$

$$S(T) = S(t)(\Theta(N) + 1) \tag{6.9}$$

ha $N \geq 0$.

Illetve nyilván

$$\Theta(N) + 1 = \prod_{i=0}^{n} (\Theta_i + 1), \tag{6.10}$$

ahol $\Theta_0 = 0$, vagyis $\Theta(0) = 0$ lesz. A Θ_i-k egymástól függetlenek, N pedig Poisson-eloszlású, $\lambda(T-t)$ paraméterrel.

Megjegyzés: Kis valószínűséggel előfordulhat, hogy az alapeszköz értéke negatívvá válik (nagy mértékű lefelé történő ugrás esetén). Ilyen esetben megkérdőjelezhetjük, hogy ténylegesen európai típusú opciókat tartalmaz-e a projekt, mivel ekkor egy teljesen logikus lépés a menedzsment részéről, ha azonnal él azzal a jogosultságával, hogy leállítja a projektet. A gyakorlatban nagyon gyakran fix időtartamokban gondolkodik a menedzsment (pl. a kutatás jellege miatt), és csak konkurensek piacra lépése, és egyéb drasztikus változások esetén kérdőjeleződhet meg egy projekt sikeressége, mikor is a menedzsment kénytelen idő előtt leállítani a kutatásokat. Ilyen esetekben, ha kicsi annak a valószínűsége, hogy a nagy esés után még pozitívvá válhat a projekt értéke, mind az európai típusú, mind az amerikai típusú opciók értéke (közel) nulla lesz. Tehát az, hogy amerikai típusú opciók helyett európaiakkal dolgozunk, nem módosítja nagyban a projekt értékét.

Tegyük fel, hogy $\gamma_1 = \gamma_{-1}$, és jelöljük ezt a közös értéket γ-val.

$$
\begin{aligned}
Var(\Theta+1) &= Var(X_i\Gamma_i) = E_{X_i}(Var(X_i\Gamma_i|X_i)) + Var_{X_i}(E(X\Gamma_i|X_i)) = \\
&= (1-\frac{1}{4}\Pi)\gamma^2 + Var_{X_i}(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}X_i\gamma) = (1-\frac{1}{4}\Pi)\gamma^2 + \frac{1}{4}\Pi\gamma^2 E_{X_i}(X_i^2) = \\
&= (1-\frac{1}{4}\Pi)\gamma^2 + \frac{1}{4}\Pi\gamma^2 = \gamma^2
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

$$
\begin{aligned}
E((\Theta(N)+1)^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(\prod_{i=0}^{n}(\Theta_i+1)^2)P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty}\prod_{i=0}^{n}(E(\Theta_i+1)^2)P(N=n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\prod_{i=0}^{\infty}(E(\Theta_i^2)+1))P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty}(\gamma^2+1)^n\frac{(\lambda(T-t))^n e^{-\lambda(T-t)}}{n!} = e^{\lambda(T-t)\gamma^2}
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

Mivel

- Θ_i-k függetlenek, $i = 0, 1, \ldots, N$-re.
- $E(\Theta_i) = 0$ és
- $Var(\Theta_i) = \Gamma^2$

és mivel

$$E(\Theta(N)+1) = 1, \tag{6.13}$$

ezért

$$Var(\Theta(N)+1) = e^{\lambda(T-t)\Gamma^2} - 1. \tag{6.14}$$

Tegyük fel, hogy az alapeszköz nulla driftű, szigma szórású, egységnyi kezdő értékű geometriai Brown-mozgást követ. Ekkor

$$D^2(S_T) = e^{D^2(T-t)} - 1, \tag{6.15}$$

és a piacra lépés pillanatában a kapott eloszlás lognormális lesz.

A Centrális Határeloszlás Tétel értelmében $S(t)$ értékében történő logaritmikus változások összege, vagyis az alapeszköz hozamai normális eloszláshoz konvergálnak, ha az időintervallumok hossza a nullához tart.

Mivel a K+F projektek hossza általában több év, ezért az alapeszközről feltehetjük, hogy $\lambda\Gamma^2$ **szórásnégyzetű geometriai Brown-mozgást** követ.

Az opció jelenértéke (6.2)-t felhasználva:

$$V(t) = e^{-r(T-t)}\hat{E}(\max(0, S(T) - I)) \tag{6.16}$$

ahol $\hat{E}$ a kockázat-semleges világban vett várható értéket jelöli.

$S(t)$ lognormalitását feltéve, és a Black-Scholes levezetéssel analóg módon (lásd 2.6. rész, 7. oldal) ez az egyenlet

$$V(t) = S(t)\Phi(d + \sqrt{\lambda(T-t)}\gamma) - I\Phi(d)e^{-r(T-t)} \tag{6.17}$$

alakra írható át, ahol

$$d = \frac{\ln\frac{S(t)}{I} + (r - \frac{1}{2}\lambda\gamma^2)(T-t)}{\sqrt{\lambda(T-t)}\gamma}. \tag{6.18}$$

7. fejezet

Bemenő paraméterek hatása az opció értékére

7.1. A volatilitás becslése

Valós opciók esetében az alapeszköz általában nem kereskedett, ami azt jelenti, hogy az alapeszköz volatilitásának becslése nem triviális feladat. A pénzügyi opciókkal ellentétben nincs korábbi idősorunk, amire támaszkodhatnánk az alapeszközhöz kapcsolódó bizonytalanság megbecslése során. Azonban az opció értéke nagyon *érzékeny* az alapeszköz volatilitásában történő változásra, tehát megbízható becslési módszerrel kellene szolgálnunk a nagyobb tévedések elkerülése végett. Sajnos a mai napig nem ismeretes meggyőzően működő heurisztika.

7.2. Néhány módszer

1. Tekinthetjük alapnak például az aktuális kutatási projekthez kapcsolódó tőzsdei indexek múltbeli volatilitását. (*múltbeli volatilitás*)

2. Korábbi sikeres K+F projektek volatilitásából megbecsülhetjük az éppen aktuális projekt volatilitását. (*előrejelzett volatilitás*)

3. Egy K+F projekt volatilitása tekinthető a *piaci bizonytalanság* és a *technikai bizonytalanság* függvényének is, mivel gyakran ez a két fő faktor, ami nagyban befolyásolja a volatilitás értékét. Hatásuk ellentétes: ha nő a technikai bizonytalanság, akkor csökken az értéke a projektnek(magasabb költségek is

előfordulhatnak), viszont ha a piaci bizonytalanság nő, ez a projekt értékére pozitív hatással van(a magasabb hozamoknak nagyobb a valószínűsége).

4. Gyakran a projekthez kapcsolódó természeti erőforrások árának alakulásából következtethetünk a volatilitásra. Például adott egy opció, amely feljogosít minket egy rézbánya ideiglenes bezárására, ill. későbbi megnyitására. Ebben az esetben a réz piaci árának idősorát használva annak szórását vehetjük a becslés alapjául. (*Brennan, Schwartz, 1985*)

5. Tipikusan a gyógyszeripar esetében a kutatással valamilyen módon kapcsolatba hozható tőzsdei részvények szórását vehetjük becslésünk alapjául. (*Quigg, 1993*)

6. Egyes esetekben a projekt értékében rejlő bizonytalanságot sikerül néhány faktor(technikai kockázat, konkurencia fellépésének kockázata, stb.) együttes hatásának tulajdonítani, vagyis a σ fő komponensekre bontható. Ha r_i-vel jelöljük azt a kockázatot, ami hozzájárul az alapeszközben(V) rejlő bizonytalansághoz, és $\sigma(r_i)$ jelöli r_i direkt hozzájárulását V varianciájához, akkor σ becslése:

$$\sigma(V) = \sum_{i \neq j} (\sigma(r_j) + cov(r_i, r_j))$$

   Természetesen, ha a kockázatok nem korreláltak, ez az egyenlet független elemek szimpla összegévé alakul, ahol az összeg minden egyes elemét a fenti módszerek egyikével becsülhetjük. A modell elméletileg megalapozott, ám a valóságban - a kockázati faktorokra bontás nehézsége miatt - nehezen alkalmazható.

7. A tapasztalt vezetőség alapeszközre vonatkozó sejtéseit vesszük közelítésünk alapjául[1].

[1] Bővebben kifejtve ld. a 8. fejezetben.

7.3. Érzékenységvizsgálat

A hagyományosan görög betűkkel[2] jelölt érzékenységi mutatók azt jelzik, hogy az opció értéke hogyan reagál, ha valamelyik változó (alapeszköz, implikált volatilitás, kamatláb, idő) megváltozik[3], míg a többi paraméter változatlan marad.

7.3.1. Definíció. ***Delta*** *az opcióérték alapeszköz-érték szerinti deriváltja, azaz* $\Delta = \frac{\partial V}{\partial s}$

7.3.2. Definíció. ***Vega*** *az opcióérték volatilitás szerinti deriváltja, azaz* $\Lambda = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$

7.3.3. Definíció. ***Theta*** *az opcióérték idő szerinti deriváltja, azaz* $\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$

7.3.4. Definíció. ***Rho*** *az opcióérték kamatláb szerinti deriváltja, azaz* $\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$

7.3.5. Definíció. ***Gamma*** *az opcióérték alapeszköz-érték szerinti másodrendű deriváltja, azaz* $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$

A módszer lényege, hogy ezen parciális deriváltak értéke alapján döntünk befektetésünk további sorsáról.

Megjegyzés: Bár a módszer a vállalatok körében nagymértékben elterjedt, használhatósága igencsak korlátolt a deriváltak *nemlineáris* volta miatt: ha a paraméterek értéke nagymértékben változik, a parciális deriváltak nem hordoznak elegendő információt ahhoz, hogy helyes következtetéseket vonhassunk le belőlük.

[2] Tulajdonképpen a vega kivétel. Ismeretlen okokból a Lyra csillagkép legfényesebb csillagjáról kapta a nevét. Korábbi szakirodalomban a kappa(még ritkábban: omega, tau) nevet viselte, de manapság a vega elnevezés az, ami széles körben használatos.

[3] Szemléletesen: 1%-kal növekszik vagy csökken

8. fejezet

Újabb nehézségek kiküszöbölése

8.1. Lottók értékelése hasznossági függvények segítségével

Ebben a részben kísérletet teszünk olyan kockázatos projektek (befektetési lottók) kvantitatív értékelésére, melyek nem kereskedettek, így nem létezik "hivatalos" piaci áruk. A pénzben kifejezhető értéket becsült hasznossági függvények segítségével fogjuk meghatározni.

8.1.1. Definíció. *Döntéselméletben lottó alatt olyan befektetési lehetőséget értünk, amely jogot szolgáltat jövőbeli, bizonytalan nagyságú pénzáramlások megszerzésére.*

Ilyen értelemben minden kockázatos projekt, részvény, kötvény, pénzügyi vagy valós opció lottónak tekinthető.

Kockázatos befektetések ("lottók") értékelése történhet pénzügyi illetve döntéselemzési módszerekkel is, azonban - meglepő módon - a kétféle megközelítés, bár ugyanazokra a kérdésekre keresi a választ, ritkán szolgáltatja ugyanazt a végeredményt.

Vizsgálódásunk alapfeltevése egy természetes gondolat: ha két különböző módszer ugyanolyan szempontból közelít meg egy problémát és ugyanaz rendelkezésre álló információhalmaz, akkor egy adott befektetési lottó értéke mindkét esetben ugyanaz kell, hogy legyen.

Alapeszközök és származtatott termékek (derivatívák) árazására alapvetően két különböző értékelési elmélet áll a rendelkezésünkre: az előbbiek esetében a CAPM megközelítés a legnépszerűbb, míg az utóbbi termékek esetében az opcióárazási módszer a használatos. Ha a piac konzisztens kockázati struktúrával rendelkezik, akkor egy - a piacra jellemző - egységes hasznossági függvénnyel megpróbálhatjuk leírni a piac kockázat-elutasításának mértékét. Ennek a függvénynek a bevezetése lehetővé teszi, hogy egységes megközelítést alkalmazzunk mind az alapeszközök, mind a derivatívák árazására.

A pénzügyi és a döntéselemzési megközelítésben természetesen vannak hasonlóságok:

- Mindkét módszer kockázatos befektetések, lottók értékelésére tesz kísérletet.
- Mindkét módszer a bizonytalan jövőbeni pénzáramlások (lottók) jelenértékét szeretné meghatározni.
- A jövőbeni fejleményeket, döntéseket is figyelembe veszi mindkét módszer a projekt kvantitatív értékelésekor. (A döntési fák esetében ez konkrét módon megvalósul, felvázolva a tényleges lehetőségeket, míg a pénzügyi megközelítésben egyetlen paraméterbe, a várható értékbe sűrűsödnek össze a lehetséges kimenetelek hatásai.)

A két módszer között azonban alapvető különbség a következő:

- A döntéselemzés egy egyedi döntéshozó szemével nézi a problémát, és a kockázathoz való hozzáállás is ezesetben szubjektív. (Szubjektív hasznossági függvény alapján történik a döntések meghozatala.)
- Pénzügyi megközelítésben egy lottó értéke minden befektető számára ugyanaz, a piac kockázati magatartása lesz a meghatározó.

Tekintsük a következő lottót:

$$L = \begin{cases} L^+ & p \text{ valószínűséggel} \\ L^- & 1-p \text{ valószínűséggel} \end{cases} \tag{8.1}$$

A bizonytalan kimenetelű lottónak az értéke egy év múlva:

$$L_1 = u^{-1}(pu(L^+) + (1-p)u(L^-)), \tag{8.2}$$

ahol u a befektető hasznossági függvénye.

A lottó jelenértéke r kamatlábbal számolva:

$$L = \frac{u^{-1}(pu(L^+) + (1-p)u(L^-))}{1+r}. \tag{8.3}$$

Ezt átrendezve kapjuk:

$$u(L(1+r)) = pu(L^+) + (1-p)u(L^-). \tag{8.4}$$

A képlet magáért beszél: a lottó jövőbeli várható értékének hasznossága van felírva mindkét oldalon, bal oldalon a biztos, jobb oldalon pedig a bizonytalan szempontból megközelítve.

Még közelebb kerülünk a valósághoz, ha figyelembe vesszük azt is, hogy a döntéshozó személyes vagyona is egy fontos tényező abban, hogy mennyit ér neki egy bizonyos összeg:

$$u(W_1 + L_u(1+r)) = pu(W_1 + L^+) + (1-p)u(W_1 + L^-), \tag{8.5}$$

ahol

- W_1: a döntéshozó személyes vagyona egy év után
- L_u: egyensúlyi ár[1]

Tekintsük ismét a (8.1) lottót, azonban most a diszkontált pénzáramlások módszerével értékeljük azt.

$$L = \frac{E(L)}{1+k} = \frac{pL^+ + (1-p)L^-}{1+k}, \tag{8.6}$$

ahol k a kockázatnak megfelelő diszkontráta.

Mennyi lehet a k diszkontráta értéke? k értékének meghatározására egy lehetőség a CAPM modell alkalmazása, miszerint:

$$k = r + \beta(E_{R_M} - r), \tag{8.7}$$

ahol

- E_{R_M}: a piaci hozam várható értéke

[1]egyensúlyi ár: az az ár, amely esetén a döntéshozó szempontjából indifferens, hogy megtartja a lottót vagy értékesíti azt

- β: a lottó szisztematikus kockázata, vagyis

$$\beta = \frac{Cov(R_L, R_M)}{Var(R_M)}. \tag{8.8}$$

A lottó értéke nem függ a piac egyedi résztvevőinek kockázati preferenciájától vagy alaptőkéjük nagyságától, hanem azt mutatja meg, hogy mennyiért lehetne megvenni vagy értékesíteni a piacon.

Az "egy ár törvénye" alapján lesz egy konkrétan meghatározható piaci ára a lottónak, amely független mindenféle személyes, szubjektív ártól.

8.2. Az egységes piaci hasznosságfüggvény

Alapfeltevés: Piaci adatokat (pl. kockázatos eszközök árának vagy a piac értékének változásait) megfigyelve meg tudunk állapítani egy olyan konzisztens viselkedést, amely a piacra jellemző magatartás, és ezt egy hasznossági függvény megadásával analitikus formába tudjuk önteni.

8.2.1. Az LRT függvényosztály

A hasznossági függvények LRT osztályában[2] olyan függvények szerepelnek, melyek meg tudják ragadni a valós életben tipikusan előforduló, kockázattal kapcsolatos magatartásokat.

A *négyzetes hasznossági függvényt* tipikusan a CAPM-hez kapcsolódóan szokták alkalmazni. Hátránya, hogy nem teljesíti azt a természetesnek tűnő feltételt, hogy egy bizonyos vagyoni szint után a pénz hasznossági értéke csökken, hanem azt modellezi, hogy az abszolút és relatív kockázat-elutasítás mértéke a személyes vagyon függvényében növekszik.

A *negatív exponenciális hasznosság* feltételezi, hogy az abszolút kockázatelutasítás konstans.

Az *a-adik hatványon szereplő hasznossági függvény* konstans relatív kockázatelutasítást és csökkenő abszolút kockázatelutasítást ír le. (A vagyon szerinti marginális hasznosság pozitív és csökkenő, mint W függvénye.)

A *logaritmikus hasznossági függvény* csökkenő abszolút és konstans relatív kockázatelutasítási magatartásnak felel meg.

[2] Linear Risk Tolerance, vagyis lineáris kockázat tolerancia

Az általánosított logaritmikus hasznossági függvény szintén csökkenő abszolút kockázat-elutasítási magatartást modellez, ám lehetővé teszi, hogy - paramétertől függően- nem csak konstans, hanem növekvő illetve csökkenő relatív kockázat-elutasítást is képes legyen leírni.

Általában még a nem teljes piacokon is létezik egy a konzisztens piaci magatartást leíró hasznossági függvény, így ezt a függvényt fogjuk felhasználni a (8.1) lottó árazására.

Az L(befektetési lottó) és a piaci lottó(M) milyen kapcsolatban van egymással? Klasszikus pénzügyi kontextusban azt mondanánk, hogy ezt a kapcsolatot a CAPM modell bétája ragadja meg. Ahelyett, hogy két különálló lottót tekintenénk, tekintsük a következő feltételes lottót, amely már egy döntési fában modellezi az L befektetési lottót és az M piaci lottót, megragadva a köztük levő kapcsolatot.

$$M, L = \begin{cases} M^+ & q \text{ valószínűséggel} \\ M^- & 1-q \text{ valószínűséggel} \end{cases} \tag{8.9}$$

$$M^+ = \begin{cases} L^+ & p_1 \text{ valószínűséggel} \\ L^- & 1-p_1 \text{ valószínűséggel} \end{cases} \tag{8.10}$$

$$M^- = \begin{cases} L^+ & p_2 \text{ valószínűséggel} \\ L^- & 1-p_2 \text{ valószínűséggel} \end{cases} \tag{8.11}$$

Természetesen a feltételes és az alaplottónak konzisztensnek kell lennie egymással, vagyis teljesül, hogy

$$qp_1 + (1-q)p_2 = p. \tag{8.12}$$

8.3. A két modell megfeleltetése egymásnak

$$
\begin{aligned}
E(R_L) &= p(\frac{L^+}{L} - 1) + (1-p)(\frac{L^-}{L} - 1) && (8.13)\\
E(R_M) &= q(\frac{M^+}{M} - 1) + (1-q)(\frac{M^-}{M} - 1) && (8.14)\\
Var(R_L) &= p(\frac{L^+}{L} - 1 - E(R_L))^2 + (1-p)(\frac{L^-}{L} - 1 - E(R_L))^2 && (8.15)\\
Var(R_M) &= q(\frac{M^+}{M} - 1 - E(R_M))^2 + (1-q)(\frac{M^-}{M} - 1 - E(R_M))^2 && (8.16)
\end{aligned}
$$

A lottó szisztematikus kockázata, ha a feltételes lottó paraméterei adottak:

$$
\begin{aligned}
\beta = Cov(R_L, R_M)/Var(R_M) = (1/L)Cov(L, R_M)/Var(R_M) = \\
= (1/L)(qp_1(M^+/M - 1 - E(R_M))(L^+ - E(L)) + \\
+ q(1-p_1)(M^+/M - 1 - E(R_M))(L^- - E(L)) + \\
+ (1-q)p_2(M^-/M - 1 - E(R_M))(L^+ - E(L)) + \\
+ (1-q)(1-p_2)(M^-/M - 1 - E(R_M))(L^- - E(L)))/Var(R_M) \quad (8.17)
\end{aligned}
$$

ahol

$$E(L) = pL^+ + (1-p)L^- \quad (8.18)$$

Hasonlóképp az összes többi, feltételes lottóban szereplő paraméter is. Ezek után már egy megfelelő piaci hasznossági függvény segítségével meghatározható egy tetszőleges lottó ára, attól függetlenül, hogy az a piacon kereskedett-e, vagy nem.

A következő egyenlet írható fel a piaci hasznossági függvény várható értékére:

$$Eu(M + L) = Eu(M + L_u(1 + r)). \quad (8.19)$$

Az egyenlet igaz, mivel a bal oldalon a piac várható hasznossági értéke áll, ha a lottó a piac része, a jobb oldalon pedig a piac várható hasznossági értéke áll, ha a lottó nem része a piacnak, hanem az ő piaci árát magunknál tudva befektetjük azt, és így kockázatmentes kamatlábbal számolva kamatostól növeli a piac értékét.

Természetesen, ha a piac kockázatsemleges, akkor teljesül a következő feltétel is:

$$u(M(1 + r)) = qu(M^+) + (1 - q)u(M^-), \quad (8.20)$$

hiszen ugyanolyan értéket tulajdonít a biztos (kockázatmentes kamatlábbal számolt) vagyonnak(bal oldal), mint az ugyanilyen várható értékű, ám bizonytalan hozamú lottónak(jobb oldal).

Tegyük fel, hogy a befektetési lottó értéke a piaci lottó értékéhez képest kicsi (pl. a piacon jegyzett projekt értéke sokkal kisebb, mint a piacon szereplő összes eszköz értéke), és hogy a piaci hasznossági függvénynek létezik első deriváltja. Ekkor

$$E(u(M) + Lu'(M)) = E(u(M) + L_u(1+r)u(M)) \tag{8.21}$$

melyet a lottó piaci értékére rendezve kapjuk, hogy

$$L_u = \frac{E(L) + Cov(L, u'(M))}{1+r}. \tag{8.22}$$

8.4. Összefoglalás

Alapfeltevésünk volt, hogy piaci adatokat (pl. kockázatos eszközök árának vagy a piac értékének változásait) megfigyelve meg tudunk állapítani egy olyan konzisztens viselkedést, amely a piacra jellemző magatartás, és ezt egy hasznossági függvény megadásával analitikus formába tudjuk önteni. A hasznossági függvény segítségével ezek után már konzisztens módon tudunk beárazni olyan alap- vagy származtatott terméket, amelyek esetleg nem is kereskedettek. Természetesen nem tudhatjuk, hogy létezik-e ilyen, a piac egészére érvényes hasznossági függvény, és ha igen, annak milyen alakkal kell rendelkeznie.

Az előbbi modellt használva egy opció nem más, mint egy befektetési lottó, melyet ugyanúgy az egységes piaci hasznossági függvénnyel értékelhetünk ki. Nem kellett feltennünk, hogy az opció kereskedhető vagy éppen replikálható legyen, és kockázat-semleges értékelési módszerre sem volt szükségünk.

Ha az alapeszköz nem kereskedett, és emiatt egyensúly alatti hozamok generálódnak (gyakran ez a helyzet a valós opciók esetében), akkor ez a különbség osztalékkifizetésnek tekinthető. Használtuk az ún. *ekvivalencia-elvet*: ha két opció ugyanazt a pénzáramlást generálja (bármilyen formában), függetlenül attól, hogy pénzügyi vagy valós opcióról van szó, vagy hogy az opció kereskedett-e vagy nem, akkor a piaci áruknak is szükségképpen meg kell egyeznie.

8.5. Gyakorlati alkalmazások

8.5.1. Opció értékének konkrét megadása

Tehát megállapítható, hogy ha az egységes piaci hasznossági függvény konzisztens a piaci és részvény lottókkal, akkor megbízható módon használható származtatott eszközök árazására is.

Válasszuk ki először is, hogy melyik hasznossági függvénnyel szeretnénk leírni a piaci magatartást!

1: *Négyzetes hasznossági függvény*: $u(x;a) = x - ax^2$

2: *Negatív exponenciális hasznossági függvény*: $u(x;a) = -e^{-\frac{x}{a}}$

3: *Hatvány alakban megadott hasznossági függvény*: $u(x;a) = x^a$

4: *Hatvány alakban megadott hasznossági függvény*: $u(x;a) = -x^{-a}$

5: *Általánosított logaritmikus hasznossági függvény*: $u(x;a) = \ln(x+a)$

Ha adottak a piaci lottó paraméterei (M, M^+, M^-, q és r), határozzuk meg a értékét úgy, hogy a korábban már említett

$$u(M(1+r)) = qu(M^+) + (1-q)u(M^-) \tag{8.23}$$

feltétel teljesüljön.

Ezt a függvényt használjuk majd lottók árazására.

Ezután nyilván ellenőriznünk kell a feltételes piac-részvény lottó (és a p_2 paraméter) konzisztenciáját, vagyis hogy a (8.19.) egyenletből kapott érték konzisztens-e a részvényárral.

Most az alapeszköz (a piac-részvény lottó) lehetséges kifizetéseiből meghatározzuk a lehetséges opciós kifizetéseket az egyesített piac- opció lottóban.

Ezután a (8.19) egyenlet segítségével meghatározhatjuk L_u-t, vagyis az opció árát.

Érdemes összehasonlítani, hogy az így kapott értékek vajon mennyire közelítik meg a binomiális (kockázat-semleges) módszerrel kapott opciós értéket, vagyis

$$L_0 = \frac{pL^+ + (1-p)L^-}{1+r}, \tag{8.24}$$

ahol a kockázatsemleges p értéke:

$$p = \frac{(1+r)S - S^-}{S^+ - S^-}. \tag{8.25}$$

8.5.2. Alapeszközök eloszlásának ill. szórásának becslése háromszög és trapéz alakú sűrűségfüggvények segítségével

Az alapeszközök jövőbeli eloszlására általában csak következtetni tudunk, pontos információkkal nyilván a legtöbb esetben nem rendelkezhetünk. Ez megnehezíti az opcióárazási képletek használatát, mivel az alapeszköz volatilitása egy fontos bemeneti paraméter. E probléma feloldására teszünk most kísérletet.

A volatilitás becslése a valós életben leggyakrabban direkt módon (múltbeli vagy implikált volatilitási adatok felhasználásával) történik. Ehelyett megkíséreljük indirekt módon megközelíteni a problémát, vagyis nem a σ értékére próbálunk meg becslést adni, hanem először az alapeszköz eloszlására, majd ennek az eloszlásnak a szórását vesszük alapul a későbbi számításaink során. Ily módon a projektben rejlő valós opciók ára tükrözni fogja a menedzsment szubjektív, jövőre vonatkozó elképzelését. Feltesszük, hogy a menedzsment konkrét, stabil jövőképpel rendelkezik a projektet illetően, vagyis elég pontosan előre tudja jelezni a projekttel kapcsolatos jövőbeni pénzáramlások várható nagyságát. Ez azt jelenti például, hogy tudja, hogy pozitív valószínűséggel milyen értékek között lesz majd ez az érték, de emellett opcionálisan azt is megadhatja, hogy mi a legvalószínűbb értéke az alapeszköznek.

Ilyen esetben egy egyszerű, háromszög alakú sűrűségfüggvény lesz az alapeszköz jövőbeli eloszlására adott becslésünk. Az első esetben szimmetrikus sűrűségfüggvény adódik (azt szemléltetve, hogy ilyen esetben a nem ismert, legvalószínűbb érték az alapeszközre adott alsó és felső határ számtani közepe), míg a második esetben - a legvalószínűbbnek megadott értéktől függően - nem-szimmetrikus eset is előfordulhat.

Számolásunkat kicsit általánosabban kezdjük: feltesszük, hogy a menedzsment kicsivel több(lényegében azért még mindig nem túl sok) információval rendelkezik a jövendő pénzáramlások eloszlásával kapcsolatban. Ismer egy A alsó és egy F felső korlátot az alapeszköz értékére, és tud mondani egy olyan $[i_1, i_2]$ intervallumot, amely a legvalószínűbb értékek intervalluma. Nyilván teljesülnie kell az

$$A \leq i_1 \leq i_2 \leq F, A \neq F$$

feltételeknek. Konkrétan: várhatóan trapéz alakú sűrűségfüggvénynek megfelelően alakul az alapeszköz eloszlása. Ez a modell nyilván magában foglalja az előbbi két modell mindegyikét.

Mivel a szórás invariáns a sűrűségfüggvény eltolására, ezért szemléletesen eltolhatjuk a sűrűségfüggvényt az origóba:

$$g(x) := f(x + A),$$

ahol f az eredeti sűrűségfüggvény. Ekkor az új paraméterek legyenek:

$$a := i_1 - A, b := i_2 - A, c := F - A.$$

Mivel $g(x)$-nek sűrűségfüggvénynek kell lennie, könnyen látható, hogy a trapéz magassága $\frac{2}{c+b-a}$. Az $g(0) = 0$, $g(a) = \frac{2}{c+b-a}$, $g(b) = \frac{2}{c+b-a}$ és $g(c) = 0$ feltételeket kielégítő, szakaszonként lineáris trapéz alakú sűrűségfüggvényre kapjuk, hogy a következő alakú:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{(c+b-a)a} x & \text{ha } 0 \leq x < a \\ \frac{2}{c+b-a} & \text{ha } a \leq x < b \\ \frac{2}{(b-c)(c+b-a)} x - \frac{2c}{(b-c)(c+b-a)} & \text{ha } b \leq x < c \\ 0 & \text{különben.} \end{cases} \tag{8.26}$$

Innen a megfelelő integrálással egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$E(\xi) = \frac{\frac{1}{3}(c^2 + b^2 - a^2 + cb)}{c + b - a}, \tag{8.27}$$

illetve

$$E(\xi^2) = \frac{\frac{1}{6}(c^3 + b^3 - a^3 + cb(c + b))}{c + b - a}. \tag{8.28}$$

Ezekből a szórás:

$$D(\xi) = \sqrt{E(\xi^2) - E^2(\xi)} = \sqrt{\frac{\frac{1}{6}(c^3 + b^3 - a^3 + cb(c + b))}{c + b - a} - \left(\frac{\frac{1}{3}(c^2 + b^2 - a^2 + cb)}{c + b - a}\right)^2} \tag{8.29}$$

Innen speciálisan a háromszög alakú sűrűségfüggvénnyel megadott valószínűségi változó szórását megkapjuk, ha $a = b$ (8.29)-ban, vagyis

$$D(\xi) = \sqrt{E(\xi^2) - E^2(\xi)} = \sqrt{\frac{\frac{1}{6}(c^3 + cb(c+b))}{c} - \left(\frac{\frac{1}{3}(c^2 + cb)}{c}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{6}(c^2 + cb + b^2) - \frac{1}{9}(c+b)^2} = \sqrt{\frac{1}{18}((c^2 - cb + b^2))} \quad (8.30)$$

Vagyis a relatív szórás tetszőleges háromszög alakú sűrűségfüggvény esetében:

$$\sigma = \frac{\sqrt{\frac{1}{18}(c^2 - cb + b^2)}}{\frac{1}{3}(c+b)} \quad (8.31)$$

Ezt becsülve felső korlátot kaphatunk σ értékére[3]:

$$\sigma = \frac{\sqrt{\frac{1}{18}(c^2 - cb + b^2)}}{\frac{1}{3}(c+b)} < \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{(c^2 + 2cb + b^2)}{(c+b)^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}. \quad (8.32)$$

Ha a jövőbeni pénzáramlásokra vonatkozó becslésünk szimmetrikus, vagyis a szóbanforgó háromszög szimmetrikus, akkor $c = 2b$. Ekkor a fenti képletek tovább egyszerűsödnek:

$$D(\xi) = \frac{1}{3}b \quad (8.33)$$

és

$$\sigma = \frac{1}{3} \quad (8.34)$$

[3]Természetesen az eredeti változatban is igaz lesz ez a becslés, mert ott a várható érték még nagyobb.

9. fejezet

Összefoglalás

A dolgozat célja volt, hogy áttekintést adjon a manapság igen széleskörben használt projektértékelési módszerekről, hangsúlyt fektetve azok matematikai hátterére. A projektértékelés soha nem volt, és természetéből adódóan soha nem is lesz egzakt tudomány, ezért ezt sokféleképpen meg lehet tenni: szándékom volt megmutatni, hogy hogyan kapcsolódhat egy valós életbeli problémához a matematika több különböző területe(a valószínűségszámítás, a döntésanalízis, a pénzügy csak néhány a sok közül). Célom volt, hogy bemutassam azokat a problémákat, amellyel szembe kell néznie annak, aki a projektértékelés elméletét a gyakorlatba szeretné átültetni. A sok felvetett kérdés közül igyekeztem néhányra válasszal is szolgálni.

Irodalomjegyzék

[1] Mondher Bellalah. Irreversibility, sunk costs and investment under incomplete information.

[2] L. Thomassen és M. Van Wouwe D. Cassimon, P. J. Engelen. The valuation of a nda using a 6-fold compound option. 2003.

[3] Lenos Trigeorgis Eero Kasanen. Merging finance theory and decison analysis.

[4] Myron Scholes Fisher Black. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81.

[5] Jaime Casassus Gonzalo Cortazar, Eduardo S. Schwartz. Optimal exploration investments under price and geological uncertainty: a real options model.

[6] Axel J. Jagle. Shareholder value, real options, and innovation in technology-intensive companies.

[7] Max P. Michaels Keith J. Leslie. The real power of real options. 1997.

[8] Alexander J. Triantis Kenneth W. Smith. The value of options in strategic acquisitions.

[9] Paul Warren Kjeld Jensen. The use of options theory to value research in the service sector.

[10] Randolf Schrank Manfred Perlitz, Thorsten Peske. Real options valuation: the new frontier in r&d project evaluation?

[11] Andrew Rennie Martin Baxter. *Pénzügyi kalkulus. Bevezetés a származtatott termékek árazásába.*

[12] Robert C. Merton. Theory of rational option pricing.

[13] Robert J. Kauffman Michel Benaroch. Justifying electronic banking network expansion using real options analysis.

[14] Brealey Myers. *Modern vállalati pénzügyek*. 1991.

[15] Enrico Pennings Onno Lint. An option approach to the new product development process: a case study at philips electronics.

[16] Enrico Pennings Onno Lint. The option value of advanced r&d.

[17] Lenos Trigeorgis. Real options: An overview.