Mátrixosztályok, és a lineáris komplementaritási feladat

Diplomamunka

Készítette: Csizmadia Zsolt
Témavezető: Illés Tibor egyetemi docens

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2003

Köszönetnyilvánítás.

Szeretnék köszönetet mondani elsősorban témavezetőmnek Illés Tibor tanár úrnak segítségéért, ösztönzésért, illetve munkámban való támogatásáért. Szeretnék azonban köszönetet mondani minden tanáromnak akik az egyetem évei alatt tanítottak, vagy szakmai segítséget nyújtottak.

Mátrixosztályok, és a Lineáris Komplementaritási Feladat

Alkalmazott matematika diplomamunka

Csizmadia Zsolt*

Témavezető: Illés Tibor

2003

Kivonat

A dolgozat a lineáris komplementaritási feladatok (LCP) vizsgálatakor felmerülő főbb mátrixosztályok áttekintésére vállalkozik. Egyben áttekintést ad az LCP feladatok jelentősebb előfordulásairól.

A dolgozat önálló eredményként új típusú criss-cross módszereket általánosít elégséges mátrixú LCP feladatokra. A legtöbb LCP megoldó algoritmus előre feltételez bizonyos tulajdonságokat a feladat mátrixáról. Egy mátrix elégségessége nehezen ellenőrizhető tulajdonság (nem ismert rá polinomiális eljárás). Az algoritmus Zhang lineáris programozási, illetve Akkeles-Balogh-Illés LCP-QP feladatra adott criss-cross típusú algoritmusával rokon.

Az algoritmus abban tér el az előzőektől, hogy számára nem szükséges a priori információ a mátrix tulajdonságáról. Az algoritmus leállási kritériumai: megoldja az LCP feladatot, megoldja az LCP feladat duálját, illetve kijelzi azt, hogy a feladat mátrixa nem elégséges és ezért ciklizálásra kerül(het)ne sor.

Annak ellenére, hogy az algoritmus általánosabb feltételek mellett dolgozik, mint Akkelesék módszere, mégis sikerült a végességet egyszerűbben bizonyítani.

Az algoritmus végessége egyben új, konstruktív bizonyítást jelent az LCP Dualitás tételére.

*ELTE TTK, Alkalmazott Matematika V, csisza@cs.elte.hu

Tartalomjegyzék

1. Jelölések

$\cdot$	a koordinátánkénti (Hadamard) szorzás
M	az LCP feladat együtthatómátrixa, $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$
B	bázis, a $[-M, I] \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ egy $n \times n$-es nem szinguláris részmátrixa
$\bar{M}$	egy adott bázishoz tartozó rövid pivot tábla mátrixa
M_B	egy adott bázishoz tartozó rövid pivot tábla mátrixa, ha a jelölés szükségessé teszi, hogy kiemeljük hogy a B bázishoz tartozik
M_{IJ}	az M mátrix azon részmátrixa, mely az I indexű sorokat, illetve a J indexű oszlopokat tartalmazza.
$\bar{m}_j$	az $\bar{M}$ mátrix j.-ik oszlopa
$\bar{\imath}$	$= n+i$ ha $i \in \{1,\ldots,n\}$ és $= i-n$ ha $i \in \{n+1,\ldots,2n\}$
J_B	a B bázishoz tartozó változók indexhalmaza
$J_N := \overline{J_B}$	a B bázison kívüli változók indexhalmaza
$\oplus$	nem negatív
$\ominus$	nem pozitív
$+$	pozitív
$-$	negatív
$\mathbf{x}, x_i$	vektorokat vastag betű, skalárokat normál betű jelzi
$< \cdots >$	jelöli a generált alteret
$\mathbf{a} > \mathbf{b}$	ha minden i koordinátára $a_i > b_i$

2. Bevezető

A lineáris komplementaritási feladat (LCP) a következő probléma: keressünk olyan $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokat, melyekre

$$\begin{aligned} -M\mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{q} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad \text{(LCP(q,M))}$$

ahol $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1 v_1, \ldots, u_n v_n)$.

Az LCP feladat az egyik legkutatottabb területe a matematikai programozásnak. Kiterjedt a gyakorlati felhasználása (lásd 3. fejezet), illetve több módszert fejlesztettek ki az utóbbi évtizedekben a megoldására.

Az LCP feladat $\mathbb{NP}$-teljes, lévén polinom időben visszavezethető rá pozitív egész együtthatós többváltozós lineáris egyenletek $0-1$ értékű kielégíthetősége. Az LCP feladat még akkor is $\mathbb{NP}$-teljes marad, ha az M mátrixot megszorítjuk a negatív szemidefinit mátrixok osztályára [Ch90], sőt még a P_0 mátrixok osztályán is [KMNY91], mely osztálynak része az elégséges mátrixok osztálya.

Az LCP feladat megoldására több pivot típusú algoritmus létezik. A criss-cross módszert egymástól függetlenül Chang, Terlaky illetve Wang fedezték fel. Azóta criss-cross módszer alatt algoritmusok egy családját értjük, melyek az indexválasztási szabályban különböznek egymástól. LCP feladat adódik kvadratikus programozási feladat Kuhn-Tacker feltételeiből is. Konvex feladat esetén az M mátrix biszimmetrikus. Ilyen LCP feladatra fogalmazták meg új típusú criss-cross algoritmusaikat Akkeleş, Balogh és Illés [ABI02]. Az általuk alkalmazott indexválasztási szabály a LIFO (utoljára bázisbakerült - elsőnek kikerülő) illetve a leggyakrabban mozgott változó választási szabálya. Érdekes lehet, hogy melyik az a legbővebb mátrixosztály, amelyre ez az algoritmus általánosítható.

Az elégséges mátrixok fogalmát először Cottle, Pang és Venkateswaran [CPV89] vezették be. Az elégséges mátrixokat a P és PSD mátrixok általánosításainak foghatjuk fel. Väliaho [Val96b] megmutatta, hogy az elégséges mátrixok valójában megegyeznek a P_* mátrixokkal. Hertog, Roos és Terlaky [HRT93] (1993) bizonyították, hogy az elégséges mátrixok éppen azon mátrixok, melyekre a minimál indexes criss-cross algoritmus tetszőleges jobb oldal esetén megoldja az LCP feladatot.

A dolgozat egy áttekintést kíván nyújtani az LCP feladatok vizsgálatakor felmerülő főbb mátrixosztályokról, azok tulajdonságairól, illetve tulajdonságaik az LCP feladatok megoldáshalmazára tett hatásairól. A dolgozat a vizsgált mátrixosztályok közül azokra szorítkozik, melyek valami módon az LCP feladat megoldáshalmazával vannak kapcsolatban, illetve a criss-cross vagy a belső pontos algoritmusok vizsgálatánál jelentős. Murty [Mu88] munkájában a dolgozat által vizsgált 11 mátrix osztályon kívül még 28 másik, a LCP feladatok vizsgálatakor felmerülő mátrix osztályt említ meg.

A dolgozat első önálló célja a LIFO és a leggyakrabban mozgott változó pivot szabállyal ellátott criss-cross algoritmust elégséges mátrixú LCP feladatokra általánosítani. Az általánosítás mellett, az [ABI02] cikkben közölt végesség bizonyítást is leegyszerűsítjük. Ezen választási szabályok egy előnye, hogy elsősorban az algoritmus elején jelentős szabadságot biztosítanak a változóválasztás terén, így gyakran lehetőséget biztosítva a numerikusan instabil báziscserék elkerülésére.

Jelenleg nem ismeretes hatékony algoritmus annak eldöntésére, hogy egy adott mátrix elégséges-e. (Väliaho [Val96a] kifejlesztett egy induktív módszert elégségesség ellenőrzésére, de a módszer nem polinomiális.) A korábban elégséges mátrixú LCP feladatokra adott algoritmusok gyakorlati szempontból hátrányos tulajdonsága volt, hogy előre kellett ismerniük az M mátrix elégségességét. Fukuda, Namiki és Tamura [FNT98] adtak először olyan algoritmust, amely Fukuda és Terlaky [FT92] LCP dualitástételének EP formában való megfogalmazására épült, és nem igényelte az előzetes információt a mátrix elégségességéről. Ha az algoritmus ennek hiánya miatt nem tudott tovább lépni, vagy ciklizálni kezdett, akkor a mátrix nem elégséges voltának polinomiális méretű bizonyítékát szolgáltatta.

A dolgozat másik önálló eredményeként az elégséges mátrixokra általánosított algoritmust úgy egészíti ki, hogy ha a mátrix nem elégséges volta miatt nem tud továbblépni, vagy ciklizálni kezd, akkor a mátrix nem elégségességének polinomiális méretű bizonyítékát adja. Vagyis olyan esetben mikor nem ismert a feladat mátrixának elégségessége, akkor is alkalmazhatjuk az algoritmust, az véges időn belül leáll.

Az így módosított algoritmus végességének bizonyítása egyben új, konstruktív bizonyítást jelent a lineáris komplementaritás dualitástételének, EP tétel alakjában megfogalmazott erősebb változatára.

3. Az LCP feladat előfordulásai, néhány gyakorlati alkalmazása

Az LCP feladat rendkívül széles körben felmerülő probléma mind mérnöki, mind pedig gazdasági feladatokban. A fejezet a teljesség igénye nélkül áttekinti az LCP feladat néhány gyakoribb előfordulási formáját. A példák között vannak olyan LCP feladatok, melyeknél még többet is lehet tudni a mátrixról minthogy elégséges, azonban vannak olyanok is, melyek mátrixa nem feltétlen elégséges.

A komplementaritási feltétel általánosan a következőt jelenti: két nem negatív változó szorzatának nullának kell lennie. Ilyen típusú feltételek leggyakrabban egyensúlyi feladatokban, illetve gazdasági és mérnöki jellegű problémákból adódnak. A komplementaritás gazdasági jelentése, hogy két tevékenység közül legfeljebb az egyiket végezzük.

3.1. Kvadratikus és lineáris programozás

A konvex kvadratikus programozási feladatok vizsgálata motiválta az első LCP feladatokat. A kvadratikus programozási feladat a következő:

$$\begin{array}{lrcl} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} & + & \frac{1}{2}\mathbf{x}^T H\mathbf{x} \\ & A\mathbf{x} & \leq & \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array} \tag{QP}$$

ahol $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. A Karush-Khun-Tucker optimalitási feltételek alapján: Ha $\mathbf{x}_*$ minimumhely, akkor

$\exists \boldsymbol{\lambda}^* \in R^m_\oplus$, $\boldsymbol{\mu}^* \in R^n_\oplus$ melyekre $(\mathbf{x}_*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ kielégíti a

$$\begin{aligned} H\mathbf{x} + \mathbf{c} + A^T\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} &= \mathbf{0} \\ A\mathbf{x} - \mathbf{b} &\leq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} &\geq \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda}^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

rendszert. Bevezetve az $\mathbf{y} = -(A\mathbf{x} - \mathbf{b})$ változót, és figyelembe véve, hogy nem negatív változók skaláris szorzata akkor és csak akkor nulla, ha a Hadamard szorzatuk a null vektor, a következő lineáris komplementaritási feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H & A^T \\ -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu} &\geq \mathbf{0} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \end{aligned} \qquad (\mathrm{LCP}_{QP})$$

Amennyiben a H mátrix pozitív szemidefinit (PSD) mátrix, akkor a (QP) feladat konvex kvadratikus feladat, így a Karush-Khun-Tucker feltételek elégségesek is [Mu88]. Ebben az esetben az

$$M := \begin{pmatrix} H & A^T \\ -A & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix biszimmetrikus. Definíció szerint könnyen látható, hogy a biszimmetrikus mátrixok egyben elégségesek is.

A lineáris programozási feladatot a $H = 0$ választás esetén kapjuk.

3.2. Bimátrix játékok egyensúlyi pontjának keresése

Az LCP feladatok vizsgálata 1963-ban lendült fel, mikor Lemke és Howson megmutatták, hogy bimátrix játékok egyensúlyi pontjának keresése megfogalmazható LCP feladatként.

Tekintsünk egy játékot, melyben két játékos egymástól függetlenül választ rögzített számú lehetőségei közül: az I. játékosnak n különböző választási lehetősége van, míg a II. játékosnak m. Egy játék folyamán, ha az I. játékos választása $i \in \{1, \ldots, n\}$, míg a II. játékos választása $j \in \{1, \ldots, m\}$, akkor az I. játékos nyeresége a_{ij}, míg a második játékos nyeresége b_{ij}. Az $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m}$, illetve a $B = (b_{ij})_{i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m}$ mátrixok a két játékos kifizetési mátrixa. Ha $a_{ij} + b_{ij} = 0$ minden i és j választás esetén, akkor nulla értékű játékról beszélünk, és ekkor Neumann minimax tételének segítségével könnyen kaphatunk optimális stratégiát.

Ha a játék értéke nem nulla, akkor bimátrix játékról beszélünk. Ilyen esetben nehéz optimális stratégiát találni, de definiálhatunk úgynevezett *egyensúlyi pontot.*

Tegyük fel, hogy az I. játékos x_i valószínűséggel választja az i. lehetőségét, a II. játékos pedig y_j valószínűséggel választja a j. lehetőségét. Ekkor az $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ illetve az $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ adja meg a két játékos stratégiáját. Könnyű látni, hogy a várható nyereség az I. illetve II. játékos esetén éppen az $\mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ illetve az $\mathbf{x}^T B\mathbf{y}$. A játékosok lehetséges stratégiái az

$$\mathbf{x} \in \Delta_n = \left\{ \mathbf{x} \in R^n : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

illetve

$$\mathbf{y} \in \Delta_m = \left\{ \mathbf{y} \in R^m : \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^{n} y_i = 1 \right\}$$

vagyis az n illetve m dimenziós egység szimplex elemei, ezeket nevezzük *kevert stratégiáknak.*

Egy $(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) \in \Delta_n \times \Delta_m$ stratégiát egyensúlyi párnak nevezünk, ha egyik játékosnak sem éri meg attól egyoldalúan eltérnie, vagyis

$$\begin{array}{ll} \overline{\mathbf{x}}^T A\overline{\mathbf{y}} \geq \mathbf{x}^T A\overline{\mathbf{y}}, & \text{minden } \mathbf{x} \in \Delta_n \text{ esetén} \\ \overline{\mathbf{x}}^T B\overline{\mathbf{y}} \geq \overline{\mathbf{x}}^T B\mathbf{y}, & \text{minden } \mathbf{y} \in \Delta_m \text{ esetén} \end{array}$$

Könnyen látható, hogy az $\overline{\mathbf{x}}^T A\overline{\mathbf{y}} \geq \mathbf{x}^T A\overline{\mathbf{y}}$ minden $\mathbf{x} \in \Delta_n$ esetén feltétel ekvivalens az

$$\overline{\mathbf{x}}^T A\overline{\mathbf{y}} \geq A^i\overline{\mathbf{y}}, \quad \text{minden } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ esetén,}$$

ahol A^i az A mátrix i. sora. A feltételeket összevonva:

$$(\overline{\mathbf{x}}^T A\overline{\mathbf{y}})\mathbf{e}_m \geq A\overline{\mathbf{y}}$$

ahol $\mathbf{e}_m = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$. Hasonló gondolatmenettel adódik, hogy
$(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) \in \Delta_n \times \Delta_m$ egyensúlyi pár, akkor és csak akkor, ha

$$\begin{array}{rcl} (\overline{\mathbf{x}}^T A\overline{\mathbf{y}})\mathbf{e}_n & \geq & A\overline{\mathbf{y}} \\ (\overline{\mathbf{x}}^T B\overline{\mathbf{y}})\mathbf{e}_m & \geq & (\overline{\mathbf{x}}^T B)^T = B^T\bar{x} \end{array}$$

Feltehető, hogy A és B minden eleme pozitív, lévén ha A és B minden eleméhez ugyanazt a rögzített számot adjuk, akkor mindkét játékos várható kifizetése ugyanannyival változik. Emiatt $(\overline{\mathbf{x}}^T A\overline{\mathbf{y}}) > 0$ és $(\overline{\mathbf{x}}^T B\overline{\mathbf{y}}) > 0$ is feltehető. Bevezetve a $\overline{\boldsymbol{\xi}} = \overline{\mathbf{x}}/(\overline{\mathbf{x}}^T B\overline{\mathbf{y}})$, illetve $\overline{\boldsymbol{\eta}} = \overline{\mathbf{y}}/(\overline{\mathbf{x}}^T A\overline{\mathbf{y}})$ változókat, illetve az $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ eltérés változókat, a következő rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{\xi}}\\ \overline{\boldsymbol{\eta}}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\mathbf{e}_n\\ \mathbf{e}_m\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{\xi}}\\ \overline{\boldsymbol{\eta}}\end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{\xi}}\\ \overline{\boldsymbol{\eta}}\end{pmatrix} &\geq 0 \end{aligned} \qquad (\mathrm{LCP}_{BIMAT})$$

Megmutatható, hogy az $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\boldsymbol{\xi}}/\left(\sum_{i=1}^n \overline{\xi}_i\right)$, illetve az $\overline{\mathbf{y}} = \overline{\boldsymbol{\eta}}/\left(\sum_{i=1}^m \overline{\eta}_i\right)$ egyensúlyi pontja az eredeti feladatnak [Mu88].

3.3. A 0-1 hátizsák feladat: példa $\mathbb{NP}$-teljes LCP feladatra

Egy adott változóra vonatkozó $0-1$ értékűségi feltétel könnyen átfogalmazható komplementaritási feltétellé:

$$x \in \{0,1\} \Leftrightarrow \exists y\colon \begin{cases} x + y = 1 \\ x, y \geq 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

Tekintsük a következő hátizsák feladatot: Adott $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)^T \in \mathbb{Z}^m$ és $b \in \mathbb{Z}$ esetén keresünk a

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T\mathbf{u} &= b \\ \mathbf{u} &\in \{0,1\}^m \end{aligned} \qquad (1)$$

rendszer megoldását. Ismert, hogy ez a feladat $\mathbb{NP}$ teljes.

A fentiek értelmében az $\mathbf{u} \in \{0,1\}^m$ felcserélhető a következő módon:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T\mathbf{u} &= b \\ \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Egy egyszerű csellel korrigáljuk a feltételi mátrix dimenzióját.

Figyeljük meg, hogy az $\mathbf{a}^T\mathbf{u} = b$ feltétel megfogalmazható a következőképp:

$$\begin{aligned} y_1 &= \mathbf{a}^T\mathbf{u} - b \geq 0 \\ y_2 &= -\mathbf{a}^T\mathbf{u} + b \geq 0 \\ y_1 &\geq 0,\ y_2 \geq 0,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \\ x_1 y_1 &= 0,\ x_2 y_2 = 0 \end{aligned}$$

ahol x_1 illetve x_2 az y_1 és y_2 változókhoz tartozó egyenlőtlenségekben az eltérés változók szerepét töltik be.

Most már megfogalmazhatjuk a (1) feladatot LCP formában:

$$\begin{aligned} -M\mathbf{u}^{'} + \mathbf{v}^{'} &= \mathbf{b}^{'} \\ \mathbf{u}^{'}, \mathbf{v}^{'} &\geq 0 \\ \mathbf{u}^{'} \cdot \mathbf{v}^{'} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ \mathbf{a}^T & -1 & 0 \\ -\mathbf{a}^T & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ b \\ -b \end{pmatrix} \\ \mathbf{u}^{'} &= (\mathbf{u}, y_1, y_2), \ \mathbf{v}^{'} = (\mathbf{v}, x_1, x_2) \end{aligned}$$

3.4. Markov-lánc optimális megállítása

Tekintsünk egy Markov-láncot az $E = \{1, \ldots, n\}$ véges állapottérrel, és a P átmenet valószínűségi mátrixszal. A lánc tetszőleges ideig megfigyelhető. Egy adott t időpillanatban lehetőségünk van megállítani a folyamatot, vagy tovább-bengedni. Ha a megállás mellett döntünk, akkor a kifizetés r_i amennyiben a lánc a leálláskor az $i \in E$ állapotban van. Ha nem állítjuk meg a folyamatot, az folytatódik a P mátrixnak megfelelő módon, és a következő lépésben újra dönthetünk. Célunk meghatározni az optimális leállás időpontját, ha maximalizálni szeretnénk a várható kifizetést.

Jelölje v_i a stacionárius optimális kifizetéseket, ha a folyamat az $i \in E$ állapotból indul, és legyen ezen értékek vektora a $\mathbf{v}$. Ezt a $\mathbf{v}$ vektort kívánjuk meghatározni, ugyanis ezután az optimális leállás az a pillanat, mikor a folyamat először látogatja meg az $\{i \in E : v_i = r_i\}$ halmazt.

A $\mathbf{v}$ vektornak a következő dinamikus programozásbeli rekurziót kell kielégítenie:

$$\mathbf{v} = \max(P\mathbf{v}, \mathbf{r}) \tag{2}$$

ahol a maximum koordinátánként vett maximumot jelent. Könnyen látható, hogy (2) ekvivalens a következő feltételekkel:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &\geq P\mathbf{v} \\ \mathbf{v} &\geq \mathbf{r} \\ (\mathbf{v} - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{v} - P\mathbf{v}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Bevezetve az $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{r}$ változót, a következő LCP feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} -(I-P)\mathbf{r} + \mathbf{q} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{r}, \mathbf{q} &\geq 0 \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{q} &= 0 \end{aligned}$$

A feladat $M := (I - P)$ mátrixának a diagonális elemei nem negatívak, illetve $M\mathbf{e} = \mathbf{0}$ ahol $\mathbf{e} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

3.5. Beágyazások

A LCP feladat (1) alakja nagyon kötöttnek tűnik, azonban tetszőleges méretű feladat, ahol nem feltétlen szükséges, hogy minden változónak legyen komplementáris párja, amennyiben az együtthatómátrixnak kiválasztható egy nem szinguláris négyzetes részmátrixa, melyben az együtthatómátrix komplementáris változókhoz tartozó oszlopai közül legfeljebb az egyik szerepel, beágyazható (1) alakú LCP feladatba.

Érdekességképpen még megemlítjük, hogy a komplementaritási feltétellel leírható egy változóra vonatkozó abszolút érték:

$$|x| = x^+ + x^-$$

ahol

$$\begin{aligned} x &= x^+ - x^- \\ x^+ &\geq 0, x^- \geq 0 \\ x^+x^- &= 0 \end{aligned}$$

4. Mátrixosztályok

A lineáris komplementaritási feladatok vizsgálatát elsősorban aszerint szokás csoportosítani, hogy milyen mátrixosztályra képes megoldani a feladatot. A mátrix tulajdonságai természetes módon befolyásolják a megoldáshalmaz tulajdonságait. A következőkben áttekintjük a főbb vizsgált mátrixosztályokat.

1. Definíció. *Egy mátrix P-beli, ha az összes diagonális menti négyzetes részmátrixának a determinánsa pozitív.*

2. Definíció. *Egy mátrix P_0-beli, ha az összes diagonális menti négyzetes részmátrixának determinánsa nem negatív.*

3. Definíció. *Pozitív definitnek* (PD) *nevezünk* $M \in \mathbb{R}^{n*n}$ *mátrixot, ha* $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ *esetén* $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} > 0$.

4. Definíció. *Pozitív szemidefinitnek* (PSD) *nevezünk* $M \in \mathbb{R}^{n*n}$ *mátrixot, ha* $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *esetén* $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} \geq 0$.

5. Definíció. *Ferdén szimmetrikusnak* (SS) *nevezünk egy* $M \in \mathbb{R}^{n*n}$ *mátrixot, ha* $M^T = -M$.

1. Megjegyzés. *Figyeljük meg, hogy a szimmetrikus mátrixok osztályán belül* P *és* PD*, illetve* P_0 *és* PSD *megegyeznek.*

6. Definíció. *Egy* $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mátrix* S*-beli, ha* $\exists \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$*, melyre* $\mathbf{z} > \mathbf{0}$ *és* $M\mathbf{z} > \mathbf{0}$.

7. Definíció. *Az* $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mátrix egy* $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *indexhalmazhoz tartozó négyzetes részmátrixát jelölje* $M_{\alpha\alpha}$*. Egy ilyen részmátrixot diagonális menti négyzetes részmátrixnak nevezünk.*

8. Definíció. *Egy* M *négyzetes mátrixot nem degeneráltnak nevezünk, ha egyik diagonális menti négyzetes részmátrixának a determinánsa sem nulla.*

9. Definíció. *Egy* $M \in \mathbb{R}^{n*n}$ *mátrix* $P_*(\kappa)$ $\exists \kappa$ *melyre*

$$(1+4\kappa) \sum_{i \in I^+(\xi)} \xi_i \left[M\boldsymbol{\xi}\right]_i + \sum_{i \in I^-(\xi)} \xi_i \left[M\boldsymbol{\xi}\right]_i \geq 0$$

bármely $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ *esetén, ahol*

$$\begin{aligned} I_+(\xi) &= \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \xi_i \left[M\boldsymbol{\xi}\right]_i > 0\} \\ I_-(\xi) &= \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \xi_i \left[M\boldsymbol{\xi}\right]_i < 0\} \end{aligned}$$

A $P_*(\kappa)$ mátrixok azok a mátrixok, melyekre a belső pontos módszerek polinom időben megoldják a feladatot (lásd a 4.7 fejezetet).

2. Megjegyzés. $P_*(\kappa_1) \subsetneq P_*(\kappa_2)$ *amennyiben* $\kappa_1 < \kappa_2$.

Indoklás: A tartalmazás közvetlen látszik a definícióból. A szigorú tartalmazás a későbbi eredményekből azonnal következik, lásd például a 47. tételt. ∎

3. Megjegyzés. $P_*(0) \equiv PSD$.

10. Definíció. $P_* = \bigcup_\kappa P_*(\kappa)$.

Megjegyzendő, hogy a $P_*(\kappa)$ mátrixok esetén a jelenleg ismert belső pontos módszerek komplexitása függ a κ értékétől. A P_* mátrixosztályról általánosságban nem ismert, hogy a hozzá tartozó LCP feladat polinom időben megoldható lenne.

11. Definíció. *Egy M $n \times n$-es mátrixot oszlop elégségesnek nevezünk (CS), ha $\nexists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ melyre*

$$\begin{cases} x_i \left(M\mathbf{x}\right)_i \leq 0 & \textit{minden } i \in \{1,\dots,n\} \textit{ indexre} \\ x_j \left(M\mathbf{x}\right)_j < 0 & \textit{valamely } j \in \{1,\dots,n\} \textit{ indexre} \end{cases} \tag{3}$$

12. Definíció. *Egy M $n \times n$-es mátrixot sor elégségesnek nevezünk (RS), ha transzponáltja oszlop elégséges, vagyis $\nexists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ melyre*

$$\begin{cases} x_i \left(M^T\mathbf{x}\right)_i \leq 0 & \textit{minden } i \in \{1,\dots,n\} \textit{ indexre} \\ x_j \left(M^T\mathbf{x}\right)_j < 0 & \textit{valamely } j \in \{1,\dots,n\} \textit{ indexre} \end{cases} \tag{4}$$

13. Definíció. *Egy M $n \times n$-es mátrixot elégségesnek nevezünk, ha egyszerre oszlop és sor elégséges.*

4. Megjegyzés. *Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor oszlop elégséges, ha $\mathbf{x} \cdot (M\mathbf{x})_i \leq \mathbf{0}$ esetén $\mathbf{x} \cdot (M\mathbf{x})_i = \mathbf{0}$.*
Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor sor elégséges, ha $\mathbf{x} \cdot \left(M^T\mathbf{x}\right)_i \leq \mathbf{0}$ esetén $\mathbf{x} \cdot \left(M^T\mathbf{x}\right)_i = \mathbf{0}$.

Bizonyítás: A definíciók közvetlen következménye. ■

A következőkben megmutatjuk a fenti mátrixosztályok néhány egyszerű tulajdonságát, illetve megvizsgáljuk a közöttük levő összefüggéseket.

1. Lemma. *Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor ferdén szimmetrikus (SS), ha $\boldsymbol{\xi}^T M \boldsymbol{\xi} = 0$ teljesül bármely $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ esetén.*

Bizonyítás:
Legyen M ferdén szimmetrikus, és $\boldsymbol{\xi} \in R^n$ tetszőleges. Ekkor

$$\boldsymbol{\xi}^T M \boldsymbol{\xi} = \langle \boldsymbol{\xi}, M\boldsymbol{\xi} \rangle = \left\langle M^T \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \right\rangle = \langle -M\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle = -\boldsymbol{\xi}^T M \boldsymbol{\xi}$$

ami csak úgy lehetséges, ha $\boldsymbol{\xi}^T M \boldsymbol{\xi} = 0$. ■

2. Lemma. $SS \subset PSD$, $P \cap SS = \emptyset$.

Bizonyítás:
Az állítás közvetlen adódik a (1) lemmából és a definíciókból. ■

3. Tétel. *Minden P_* mátrix oszlop elégséges, vagyis $P_* \subset CS$.*

Bizonyítás:
Legyen $M \in R^{n\times n}$ egy P_* mátrix, és tegyük fel hogy valamely $\boldsymbol{\xi} \in R^n$ vektorra $\boldsymbol{\xi} \cdot (M\boldsymbol{\xi}) \leq 0$. Ekkor $I_+(\boldsymbol{\xi}) = 0$. Emiatt a P_* mátrixok definícióját felhasználva

$$0 \geq \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} \xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i = \sum_{i\in I_-(\xi)} \xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i \geq 0$$

vagyis

$$\sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} \xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i = \sum_{i\in I_-(\xi)} \xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i = 0.$$

Emiatt $\xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i = 0$ bármely $i \in \{1,\ldots,n\}$ esetén, vagyis M oszlop elégséges. ■

A következő tétel megmutatja, hogy a P_* mátrixosztály tartalmazza az igen fontos PSD és P mátrixokat. Ennek igazolásához definiáljuk a következő értékeket:

14. Definíció. *Egy $M \in R^{n\times n}$ mátrix esetén legyen*

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(M) &= \min_{\|\boldsymbol{\xi}\|=1} \boldsymbol{\xi}^T M\boldsymbol{\xi},\\ \gamma(M) &= \min_{\|\boldsymbol{\xi}\|=1} \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i.\end{aligned}$$

Definíció alapján nyilvánvaló, hogy $M \in PSD$ akkor és csak akkor, ha $\lambda_{\min}(M) \geq 0$, illetve $M \in P$ akkor és csak akkor, ha $\gamma(M) > 0$. Valójában $\lambda_{\min}(M)$ nem más, mint az $(M + M^T)/2$ szimmetrikus mátrix minimális sajátértéke. Egy $M \in P$ mátrix nem szinguláris, és $M \in P$ akkor és csak akkor, ha $M^{-1} \in P$. Emiatt a $\gamma(M^{-1})$ érték jól definiált.

15. Definíció. *Egy $M \in P$ mátrix esetén definiáljuk a*

$$\bar{\gamma}(M) = \sqrt{\gamma(M)\gamma(M^{-1})}$$

értéket.

Megmutatható, hogy $0 < \bar{\gamma}(M) \leq 1/\sqrt{n}$ tetszőleges $M \in P$ mátrix esetén.

4. Tétel. *([KMNY91])*

i, $PSD = P_*(0) \subset P_*$.

ii, *Legyen* $M \in P$. *Definiáljuk a*

$$\begin{aligned}\kappa^* &= \max\left\{\frac{-\lambda_{\min}(M)}{4\gamma(M)}, 0\right\}\\ \kappa^{**} &= \frac{1}{4\bar{\gamma}(M)}\end{aligned}$$

számokat. Ekkor $M \in P_*(\kappa^*) \cap P_*(\kappa^{**}) = P_*(\min\{\kappa^*, \kappa^{**}\})$, *és így* $P \subset P_*$.

Bizonyítás:
Az i, állítás nyilvánvaló a definíciókból, tehát a ii, bizonyítására szorítkozunk. Tegyük fel, hogy $M \in R^{n\times n}$ egy P mátrix. A $\lambda_{\min}(M)$ és $\gamma(M)$ számok definíciója alapján

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}^T M\boldsymbol{\xi} &\geq \lambda_{\min}(M)\,\|\boldsymbol{\xi}\|^2\\ \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \xi_i(M\boldsymbol{\xi}_i) &\geq \gamma(M)\,\|\boldsymbol{\xi}\|^2\end{aligned}$$

tetszőleges $\boldsymbol{\xi} \in R^n$ esetén. Lévén $M \in P$, így $\gamma(M) > 0$. Emiatt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}^T M\boldsymbol{\xi} + 4\kappa^* \sum_{i\in I_+(\boldsymbol{\xi})} \xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i &\geq \boldsymbol{\xi}^T M\boldsymbol{\xi} + 4\kappa^*\gamma(M)\,\|\boldsymbol{\xi}\|^2\\ &\geq \lambda_{\min}(M)\,\|\boldsymbol{\xi}\|^2 + 4\kappa^*\gamma(M)\,\|\boldsymbol{\xi}\|^2\\ &\geq \lambda_{\min}(M)\,\|\boldsymbol{\xi}\|^2 - \frac{\lambda_{\min}(M)}{\gamma(M)}\gamma(M)\,\|\boldsymbol{\xi}\|^2\\ &= 0\end{aligned}$$

tetszőleges $\boldsymbol{\xi} \in R^n$ esetén. Vagyis megmutattuk, hogy $M \in P_*(\kappa^*)$. Mivel M^{-1} is P mátrix, így

$$\max_{i\in\{1,\dots,n\}} \xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i \geq \gamma(M^{-1})\,\|\boldsymbol{\xi}\|^2.$$

A fenti képletben a $\boldsymbol{\xi}$ vektort az $M\xi$ vektorra cserélve

$$\max_{i\in\{1,\dots,n\}} \xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i \geq \gamma(M^{-1})\,\|M\boldsymbol{\xi}\|^2$$

adódik tetszőleges $\boldsymbol{\xi} \in R^n$ esetén. A korábbiak felhasználásával kapjuk, hogy

$$\max_{i\in\{1,\dots,n\}} \xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i \geq \bar{\gamma}(M)\,\|\boldsymbol{\xi}\|\,\|M\boldsymbol{\xi}\| \geq -\bar{\gamma}(M)\boldsymbol{\xi}^T M\boldsymbol{\xi}.$$

Emiatt tetszőleges $\boldsymbol{\xi} \in R^n$ esetén

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi}^T M\boldsymbol{\xi} + 4\kappa^{**} \sum_{i\in I_+(\boldsymbol{\xi})} \xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i &\geq \boldsymbol{\xi}^T M\boldsymbol{\xi} + 4\kappa^{**} \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i \\
&\geq \boldsymbol{\xi}^T M\boldsymbol{\xi} + 4\kappa^{**}\bar{\gamma}(M)\boldsymbol{\xi}^T M\boldsymbol{\xi} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

vagyis $M \in P_*(\kappa^{**})$. ■

5. Megjegyzés. *([KMNY91]) Általános estben nem állítható, hogy a fenti κ^* vagy κ^{**} lenne a kisebb.*

Bizonyítás:
Legyen $a \in R$ és tekintsük a következő P mátrixokat:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ és } M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Egyszerű számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(M) &= 1 - |a|, \\
\gamma(M) &= \gamma(M^{-1}) = \bar{\gamma}(M) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|a|}{\sqrt{a^2-1}}\right),
\end{aligned}$$

és így

$$\kappa^* = \max\{|a| - 1, 0\}\kappa^{**}.$$

Vagyis $\kappa^* < \kappa^{**}$ ha $|a| < 2$, és $\kappa^* > \kappa^{**}$ ha $|a| > 2$. ■

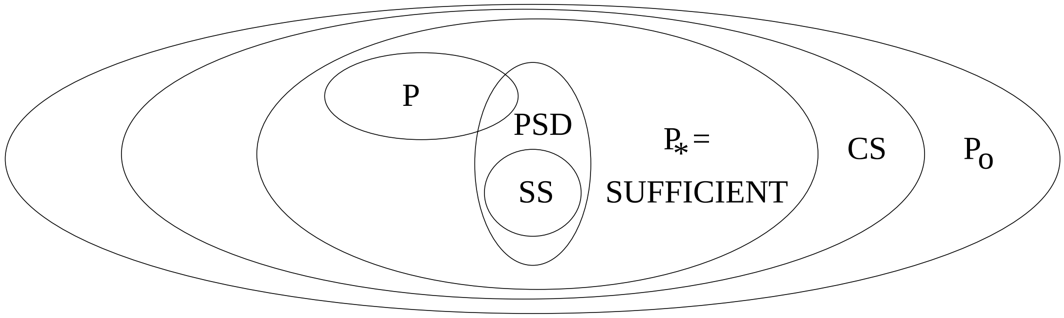
Megemlítjük, hogy az összes eddig említett mátrix osztály (P_0, CS, P_*, $P_*(\kappa)$, PSD, P, PD, SS) rendelkezik azzal a szép tulajdonsággal, hogy tetszőleges diagonális részmátrixuk, is a megfelelő mátrix osztályba tartozik.

A fejezetet Väliaho eredményével zárjuk:

5. Tétel. *([Val96b]) A P_* mátrixosztály megegyezik az elégséges mátrixok osztályával.*

4.1. Példák

Az előző fejezet folytatásaként példákat mutatunk az egyes mátrixosztályokra, illetve arra, hogy az egyes mátrixosztályok különbözőek.



Néhány további példa:

6. Állítás. *A* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *mátrix oszlop elégséges, de nem sor elégséges.*

7. Állítás. *A* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *mátrix sor elégséges, de nem oszlop elégséges.*

8. Állítás. *Az* $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *mátrix* P *mátrix, de nem pozitív definit* (PD).

4.2. Mátrixosztályok és az LCP

A következőkben megvizsgáljuk, hogy az M mátrix tulajdonságai hogyan befolyásolják a megoldhatóságot, a megoldás egyértelműségét, illetve a megoldáshalmaz tulajdonságait.

9. Tétel. *([CPS92]) Egy* $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mátrix* S*-beli* $\Longleftrightarrow$ *ha az*

$$\begin{aligned} -M\mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{q} \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5}$$

feladatnak tetszőleges $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ *vektor esetén van megengedett megoldása.*

Bizonyítás:
Mivel az M egy S mátrix, így van olyan $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre $\mathbf{z} > \mathbf{0}$ és $M\mathbf{z} > \mathbf{0}$. Ekkor egy megfelelően nagy λ szám esetén

$$\lambda M\mathbf{z} = M(\lambda\mathbf{z}) \geq -\mathbf{q},$$

vagyis a $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{z}$, $\mathbf{v} = \mathbf{q} - M(\lambda\mathbf{z}) \geq \mathbf{0}$ megoldása a (5) rendszernek.
Megfordítva, ha a (5) rendszer megoldható tetszőleges $\mathbf{q}$ esetén, akkor válasszunk egy $\mathbf{q} < \mathbf{0}$ vektort. Ekkor a (5) rendszer egy tetszőleges megoldása bizonyítja hogy az M egy S mátrix. ■

10. Állítás. *Minden P mátrix egyben S mátrix is.*

Bizonyítás:
Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az M nem S mátrix, vagyis nincs olyan $\mathbf{z}$ vektor, melyre

$$\begin{aligned} M\mathbf{z} &> \mathbf{0} \\ \mathbf{z} &> \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ez persze a homogenitás miatt azzal ekvivalens, hogy nincs olyan $\mathbf{z}$ vektor, melyre

$$\begin{aligned} M\mathbf{z} &\geq \mathbf{1} \\ \mathbf{z} &\geq \mathbf{1} \end{aligned}$$

A Farkas lemma alapján ekkor van olyan $\mathbf{u}$ vektor, melyre

$$\begin{aligned} M^T\mathbf{u} + \mathbf{v} &\leq 0 \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} &\geq 0 \\ \mathbf{1}^T\mathbf{u} + \mathbf{1}^T\mathbf{v} &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Ha $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ akkor (6) alapján $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, vagyis $\mathbf{u} \gneq \mathbf{0}$ melyre $M^T\mathbf{u} \leq \mathbf{0}$. Ha azonban $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ akkor $M^T\mathbf{u} \lneq \mathbf{0}$, amiből ismét $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ következik. Mindkét esetben tehát az $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ vektorra $\mathbf{u} \cdot (M^T\mathbf{u}) \leq \mathbf{0}$, mely ellentmond a későbbi (20) tételnek, így az M nem P mátrix, ellentmondás. ■

A következő tételben szintén használni fogjuk a későbbi (20) tétel eredményeit, mely tétel a P mátrixok jellemzésével foglalkozik.

11. Tétel. *([CPS92]) Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix esetén a következők ekvivalensek.*

i, $M \in P$.

ii, Az $LCP(\mathbf{q}, M)$ feladatnak bármely $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén egyértelmű megoldása van.

Bizonyítás:
A (10. és 9.) tételek alapján tudjuk, hogy a

$$\begin{aligned} -M\mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{q} \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

rendszer tetszőleges $\mathbf{q}$ vektor esetén megoldható. Ezen észrevételből, illetve a (4) és (36) tételekből következik, hogy az LCP feladat megoldható.

Az egyértelműség bizonyításához tekintsünk egy $(\mathbf{u}', \mathbf{v}')$ másik megoldást. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{v} - \mathbf{v}' &= M(\mathbf{u} - \mathbf{u}') \\ \mathbf{0} &\geq (\mathbf{u} - \mathbf{u}') \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}') = (\mathbf{u} - \mathbf{u}') \cdot M(\mathbf{u} - \mathbf{u}') \end{aligned}$$

ez a (20) tétel alapján csak úgy lehetséges, ha $\mathbf{0} = \mathbf{u} - \mathbf{u}'$ és így $\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$, vagyis a két megoldás megegyezik.
Most tegyük fel indirekt, hogy az M nem P mátrix. Ekkor a (20) tétel alapján van olyan $\mathbf{z} \neq 0$ vektor, melyre $\mathbf{z} \cdot (M\mathbf{z}) \leq \mathbf{0}$ teljesül. Legyen $\mathbf{z}^+ = \max(\mathbf{0}, \mathbf{z})$ és $\mathbf{z}^- = \max(\mathbf{0}, -\mathbf{z})$ a $\mathbf{z}$ vektor pozitív, illetve negatív része. Mivel $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ így $\mathbf{z}^+ \neq \mathbf{z}^-$. Hasonlóan, legyen $\mathbf{u}^+ = \max(\mathbf{0}, M\mathbf{z})$ és $\mathbf{u}^- = \max(\mathbf{0}, -M\mathbf{z})$. Vegyük észre, hogy $\mathbf{z} = \mathbf{z}^+ - \mathbf{z}^-$, illetve $M\mathbf{z} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$. Definiáljuk a

$$\mathbf{q} = \mathbf{u}^+ - M\mathbf{z}^+ = \mathbf{u}^- - M\mathbf{z}^-$$

vektort. Ekkor a konstrukció alapján $\mathbf{z} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$, vagyis $\mathbf{z}^+, \mathbf{u}^+$ megoldása az $LCP(\mathbf{q}, M)$ feladatnak. Könnyen látható, hogy ugyanez igaz a $\mathbf{z}^-, \mathbf{u}^-$ vektor párra, vagyis az $LCP(\mathbf{q}, M)$ megoldása nem egyértelmű, ami ellentmond a feltevésünknek. ■

Megemlítjük a következő eredményeket:

12. Tétel. *([CPS92]) A következők ekvivalensek.*

i, Ha $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ az $LCP(\mathbf{q}, M)$ feladat két tetszőleges megengedett komplementáris megoldása, akkor $M\mathbf{x}_1 = M\mathbf{x}_2$.

ii, $M \in P_0$ és bármely $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ indexhalmazra, melyre $\det(M_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}}) = 0$ az M $\boldsymbol{\alpha}$ indexű oszlopai lineárisan függetlenek.

13. Tétel. *(Jansen) Egy lineáris komplementaritási feladat megoldáshalmaza poliedrikus halmazok véges uniója.*

14. Tétel. *(Cottle, Pang, Venkateswaran [CPV89]) Legyen adott az $LCP(\mathbf{q}, M)$ feladat. A következők ekvivalensek:*

i, Az $LCP(\mathbf{q}, M)$ megoldáshalmaza poliedrikus.

ii, Az $LCP(\mathbf{q}, M)$ megoldáshalmaza konvex.

iii, Az $LCP(\mathbf{q}, M)$ tetszőleges $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ és $(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)$ megengedett komplementáris megoldására teljesül, hogy

$$\mathbf{u}_1^T \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2^T \mathbf{v}_1 = 0. \tag{7}$$

iv, Van olyan komplementáris α,$\bar{\alpha}$ $\in \{1,\ldots,n\}$ *indexhalmaz, melyre az* $LCP(\mathbf{q},M)$ *feladat bármely* $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ *megoldására*

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha &= \mathbf{q}_\alpha + M_{\alpha\alpha}\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_{\bar{\alpha}} &= \mathbf{q}_{\bar{\alpha}} + M_{\bar{\alpha}\alpha}\mathbf{u}_\alpha \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_\alpha &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_{\bar{\alpha}} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{8}$$

Bizonyítás:
$(i) \Rightarrow (ii)$: Nyilvánvaló, minden poliéder konvex.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Legyen $(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1)$ és $(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_2)$ az $LCP(\mathbf{q},M)$ két megoldása. A konvexitási feltevés alapján az $(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1) + (1-\lambda)(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_2)$ vektor is megoldás minden $\lambda \in (0,1)$ esetén. Ennek komplementaritását felírva adódik, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\lambda\mathbf{v}^1 + (1-\lambda)\mathbf{v}^2\right]^T \left[\lambda\mathbf{u}^1 + (1-\lambda)\mathbf{u}^2\right] \\ &= \lambda(1-\lambda)\left[\left(\mathbf{v}^1\right)^T\mathbf{u}^2 + \left(\mathbf{v}^2\right)^T\mathbf{u}^1\right] \end{aligned}$$

melyből $\lambda(1-\lambda) \neq 0$ miatt az állítás következik.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Az állításban szereplő indexhalmaz nem más mint az

$$\alpha = \{i : \mathbf{u}_i > 0 \text{ valamely } (\mathbf{u},\mathbf{v}) \text{ megoldás esetén}\}$$

indexhalmaz. A definícióból következik, hogy $i \in \bar{\alpha}$ akkor és csak akkor, ha $u_i = 0$ bármely $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ megoldás esetén. Legyen $(\bar{\mathbf{u}},\bar{\mathbf{v}})$ tetszőleges megoldás. Elegendő megmutatnunk, hogy $\bar{\mathbf{v}}_\alpha = 0$. Válasszunk egy tetszőleges $i \in \alpha$ indexet. Ekkor $u_i > 0$ valamely (u,v) megoldásra. Felhasználva a (7) feltételt $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$ és $\mathbf{u}_2 = \bar{\mathbf{u}}$ választás mellett adódik, hogy $\bar{\mathbf{v}}_i = 0$, vagyis $\bar{\mathbf{v}}_\alpha = 0$, bizonyítva állításunkat.
$(iv) \Rightarrow (v)$ Jelölje U a (8) rendszer megoldáshalmazát. Könnyen látható, hogy U poliedrikus, és éppen az $LCP(\mathbf{q},M)$ feladat megoldáshalmazát definiálja. ■

A fenti tétel ad ugyan szükséges és elégséges feltételt a megoldáshalmaz konvexitására, azonban csak rögzített $\mathbf{q}$ vektor esetén. A következő tétel ebben az irányban általánosítja a fenti eredményt.

15. Tétel. *(Cottle, Pang, Venkateswaran [CPV89]) Legyen adott egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix. A következők ekvivalensek:*

i, Tetszőleges $q \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén az $LCP(\mathbf{q}, M)$ megoldáshalmaza (esetlegesen üres) konvex.

ii, Az M mátrix oszlop elégséges.

Bizonyítás:
$(i) \Rightarrow (ii)$: Tegyük fel indirekt, hogy az M mátrix nem oszlop elégséges. Ekkor van olyan $\mathbf{x}$ vektor, melyre $x_i(M\mathbf{x})_i \leq 0$ bármely $i = 1, \ldots, n$ esetén, és $x_j(M\mathbf{x})_j < 0$ legalább egy j indexre. Legyen $\mathbf{u}^+ = \mathbf{x}^+ = \max(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ és $\mathbf{u}^- = \mathbf{x}^- = \max(-\mathbf{x}, \mathbf{0})$ ahol a maximumot koordinátánként értelmezzük. Hasonló módon, legyen $\mathbf{v}^+ = (M\mathbf{x})^+$ és $\mathbf{v}^- = (M\mathbf{x})^-$. Definiáljuk a $\mathbf{q} = \mathbf{v}^+ - M\mathbf{x}^+$ vektort. Vegyük észre, hogy $\mathbf{q} = \mathbf{v}^- - M\mathbf{x}^-$ is teljesül. Könnyen látható, hogy $(\mathbf{u}^+, \mathbf{v}^+)$ és $(\mathbf{u}^-, \mathbf{v}^-)$ az $LCP(\mathbf{q}, M)$ feladat egy-egy megoldása az általunk definiált $\mathbf{q}$ vektorra nézve. Azonban vagy $u_j^+ v_j^- > 0$ vagy $u_j^- v_j^+ > 0$ attól függően, hogy $x_j > 0$ vagy $x_j < 0$. Ez azonban a (14) tétel alapján ellentmond a megoldáshalmaz konvexitásának.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Legyen adott egy $\mathbf{q} \in R^n$ vektor. Feltehetjük, hogy az $LCP(\mathbf{q}, M)$ feladatnak legalább két megoldása van, ellentkező esetben nincs mit bizonyítani. Legyen tehát $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$ és $(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)$ két megoldás. Ekkor

$$\mathbf{0} \geq (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) \cdot (M(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)) \tag{9}$$

Az M mátrix oszlop elégségességéből következik, hogy a (9) jobboldali kifelyezése azonosan nulla, ami miatt végig egyenlőségnek kell teljesülnie, vagyis $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ teljesül. Felhasználva a (14) tétel eredményeit, a megoldáshalmaz konvexitását kapjuk. ∎

16. Tétel. *([CPS92]) Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix esetén a következők ekvivalensek:*

i, M nem degenerált.

ii, Az $LCP(\mathbf{q}, M)$ feladatnak bármely $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén véges sok megoldása van.

iii, Bármely $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ esetén, bármely megengedett komplementáris megoldás (ha létezik) lokálisan egyértelmű.

Bizonyítás:
$(i) \Rightarrow (ii)$: Tegyük fel hogy M nem degenerált, de valamely $\mathbf{q}$ vektor esetén az

$LCP(\mathbf{q}, M)$ feladatnak végtelen sok megoldása van. Válasszuk a megoldásoknak egy olyan végtelen számosságú részhalmazát, melyben a komplementáris változó párok közül az egyik mindig nulla szinten van, és legyen ezek indexhalmaza β. Ekkor szükségszerűen a $[-M, I]_{\{1,\dots,n\}-\beta,\{1,\dots,n\}-\beta}$ szinguláris. Ennek a mátrixnak a felépítése azonban

$$\begin{bmatrix} M_{\alpha\alpha} & 0 \\ M_{\gamma\alpha} & I \end{bmatrix}$$

Itt az α nem lehet az üres halmaz, mert az egységmátrix nem szinguláris. De ekkor az $M_{\alpha\alpha}$ mátrix szinguláris, ellentmondásban M nem degeneráltságával.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Nyilvánvaló.
$(iii) \Rightarrow (i)$: Tegyük fel, hogy valamely α indexhalmazra az $M_{\alpha\alpha}$ diagonális menti részmátrix szinguláris. Legyen $\mathbf{u}_\alpha \neq 0$ olyan vektor, melyre $M_{\alpha\alpha}\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{0}$. Definiáljuk a $\mathbf{q} = -M_{\alpha\alpha}\mathbf{e}_\alpha$ vektort, ahol $\mathbf{e}_\alpha = (1, \dots, 1)$. Legyen $\mathbf{q}_{\bar{\alpha}}$ olyan, hogy

$$\mathbf{q}_{\bar{\alpha}} + M_{\bar{\alpha}\alpha}(\mathbf{e}_\alpha + \theta\mathbf{u}_\alpha) \geq \mathbf{0}$$

minden elég pici $\theta \geq 0$ esetén. Az így definiált $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{q}_{\bar{\alpha}})$, és a

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}_\alpha, \mathbf{z}_{\bar{\alpha}}) = (\mathbf{e}_\alpha + \theta\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{0})$$

vektorra a $\mathbf{z}$ megoldása az $LCP(\mathbf{q}, M)$ feladatnak tetszőleges olyan pici $\theta \geq 0$ esetén, melyre még $\mathbf{z}_\alpha \geq 0$. Ez azonban ellentmond a feltételünknek. ■

A (16) tétellel kapcsolatban megjegyezzük, hogy természetesen minden P mátrix nem degenerált.

Megemlítünk néhány eredményt az LCP feladatok megoldáshalmazának egyéb tulajdonságairól:

17. Tétel. *([JG98]) Az $LCP(\mathbf{q}, M)$ feladatnak, amennyiben $M \in P_0$, akkor vagy nincs megoldása, vagy 1 megoldása, vagy végtelen sok megoldása van.*

18. Tétel. *([JG98]) Az $LCP(\mathbf{q}, M)$ feladatnak, amennyiben $M \in P_0$, akkor ha a megoldáshalmaz korlátos, akkor összefüggő.*

19. Tétel. *([JG98]) Az $LCP(\mathbf{q}, M)$ feladatnak, amennyiben $M \in P_0$, akkor és csak akkor van egyértelmű megoldása, ha van lokálisan egyértelmű megoldása.*

Végül a mátrixosztályok további vizsgálata előtt bevezetjük a legtöbb pivot típusú algoritmus által használt diagonális menti blokk pivotálási műveletet.

16. Definíció. *Legyen $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ennek $M_{\alpha\alpha}$ egy diagonális menti nem szinguláris részmátrixa. Az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy $\alpha = \{1, \ldots, r\}$. Ekkor az*

$$\begin{bmatrix} M_{\alpha\alpha} & M_{\alpha\bar{\alpha}} \\ M_{\bar{\alpha}\alpha} & M_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} \end{bmatrix}$$

mátrix az $M_{\alpha\alpha}$ részmátrixhoz tartozó blokk pivotálási művelet után:

$$\begin{bmatrix} M_{\alpha\alpha}^{-1} & M_{\alpha\alpha}^{-1} M_{\alpha\bar{\alpha}} \\ M_{\bar{\alpha}\alpha} M_{\alpha\alpha}^{-1} & M_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} - M_{\bar{\alpha}\alpha} M_{\alpha\alpha}^{-1} M_{\alpha\bar{\alpha}} \end{bmatrix}$$

Algebrailag az történik egy ilyen blokk pivot során, hogy a $\binom{y_\alpha}{y_{\bar{\alpha}}} = M\binom{x_\alpha}{x_{\bar{\alpha}}}$ rendszerben felcséréltük az y_α és x_α változók szerepét. Egy $M \in R^{n\times n}$ mátrix és $\alpha \subseteq \{1, \ldots, n\}$ esetén, ha $M_{\alpha\alpha}$ nem szinguláris, akkor az α indexhalmazhoz tartozó blokk pivotálási műveletet jelölje η_α.

Az általunk vizsgált mátrixosztályok mindegyike olyan, hogy (P_0, CS, P_*, $P_*(\kappa)$, PSD, P, PD, SS) rendelkezik azzal a szép tulajdonsággal, hogy zártak a fenti blokk pivotálási műveletre nézve.

4.3. P és P_0 mátrixok

Ebben a fejezetben ismertetjük a P és P_0 mátrixok alapvető tulajdonságait.

20. Tétel. *(Fiedler, Pták [FP66]) Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix esetén a következők ekvivalensek:*

i, $M \in P$.

ii, *Tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektor esetén van olyan i index, melyre $x_i\,(M\mathbf{x})_i > 0$; Vagyis ha $\mathbf{x} \cdot (M\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ akkor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

iii, *Tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén van olyan $D_\mathbf{x}$ szigorúan pozitív átlójú diagonális mátrix, hogy $\mathbf{x}^T D_\mathbf{x} M\mathbf{x} > 0$*

iv, *Tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén van olyan $H_\mathbf{x}$ nem negatív átlójú diagonális mátrix, hogy $\mathbf{x}^T H_\mathbf{x} M\mathbf{x} > 0$.*

v, *Az M mátrix, csak úgy mint bármely diagonális menti részmátrixának valós sajátértékei pozitívak.*

Bizonyítás:
$(i) \Rightarrow (ii)$: Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor, melyre $\mathbf{x} \cdot (M\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ minden $i = 1, \ldots, n$ indexre. Legyen $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ azon

indexek halmaza, melyekre $x_i \neq 0$. Olyan x vektort tekintettünk, melyre a J indexhalmaz nem üres. Mivel M egy P mátrix, így $\det(M_{JJ}) \neq 0$, és így $M_{JJ}\mathbf{x}_J \neq \mathbf{0}$. Ekkor van olyan D nemnegatív átlójú, nem azonosan nulla, $|J|\times|J|$ méretű diagonális mátrix, melyre $M_{JJ}\mathbf{x}_J = -D\mathbf{x}_J$. Vagyis az $(M+D)$ mátrix szinguláris, emiatt

$$0 = \det(M + D) = \sum_{I\cup K=\{1,\dots,n\}} \det D_{II} \det M_{KK}$$

ami nem lehetséges a P mátrix osztály definíciója, és a D tulajdonságai miatt.
$(ii) \Rightarrow (iii)$, Legyen $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, és i olyan index, melyre $x_i(M\mathbf{x})_i > 0$. A feltétel szerint választható ilyen index. Kellően pici $\epsilon > 0$ esetén

$$x_i(M\mathbf{x})_i + \epsilon \sum_{j\neq i} x_j(M\mathbf{x})_j > 0.$$

Vagyis a $D_x = diag(d_k)$, ahol $d_i = 1$, $d_j = \epsilon$ ha $i \neq j$ megfelelő.
$(iii) \Rightarrow (iv)$: Az következtetés semmitmondó.
$(iv) \Rightarrow (v)$: Legyen $\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}$ indexhalmaz, illetve λ és $\mathbf{x}_I$ az M_{II} mátrix sajátértéke a hozzá tartozó sajátvektorral. Egészítsük ki az $\mathbf{x}_I$ vektort nullákkal n dimenzióssá. A feltétel alapján ekkor van olyan nem negatív átlójú diagonális H mátrix, melyre $\mathbf{x}^T HM\mathbf{x} > 0$. De ekkor

$$0 < \mathbf{x}_I^T H_I M_{II}\mathbf{x}_I = \lambda\mathbf{x}_I^T H_I\mathbf{x}_I = \lambda\mathbf{x}^T H\mathbf{x}. \tag{10}$$

A H mátrix definíciója miatt $\mathbf{x}^T H\mathbf{x} \geq 0$, így (10) csak úgy teljesülhet, ha $\lambda > 0$.
$(v) \Rightarrow (i)$: Mivel az M mátrix valós, így a komplex sajátértékek a konjugált párjukkal együtt szerepelnek. Egy nem nulla komplex szám és konjugáltjának a szorzata mindig pozitív. Mivel egy mátrix determinánsa a sajátértékeinek a szorzata, az állítás következik.

Megemlítjük, hogy a $(ii) \Rightarrow (v)$ közvetlen is könnyen bizonyítható: Legyen ugyanis λ az M egy valós sajátértéke az $\mathbf{x}$ sajátvektorral. Mivel λ valós, így az $\mathbf{x}$ is. A feltétel szerint van olyan i index, melyre $x_i(M\mathbf{x})_i = \lambda x_i^2 > 0$, amiből $\lambda > 0$ következik. ■

21. Tétel. *([CPS92]) Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix esetén a következők ekvivalensek:*

i, $M \in P_0$.

ii, Tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén van olyan i index, melyre $x_i\,(M\mathbf{x})_i \geq 0$.

iii, Az M mátrix, csak úgy mint bármely diagonális menti részmátrixának valós sajátértékei nem negatívak.

iv, Az $M + \epsilon I$ P mátrix tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén.

Bizonyítás:
$(i) \Rightarrow (iv)$: Tetszőleges D diagonális mátrix esetén

$$\det(M + D) = \sum_{\alpha} \det D_{\alpha\alpha} \det(M_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}})$$

ahol a szumma a $\{1, \ldots, n\}$ összes részhalmazára megy. Mivel az M mátrix P_0, így az összeg összes tagja nem negatív. De az $\alpha = \{1, \ldots, n\}$ választás esetén a megfelelő összeadandó értéke ϵ^n. Emiatt $\det(M + \epsilon I) > 0$. Mivel egy P_0 mátrix teteszőleges diagonális menti részmátrixa is nyilvánvalóan P_0 mátrix, így az állítás következik.
$(iv) \Rightarrow (ii)$: Legyen $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ adott. Mivel $M + \epsilon I$ tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén P mátrix, így a (20) tétel alapján van olyan i index melyre $z_i((M + \epsilon I)\mathbf{z})_i > 0$. Legyen $\{\epsilon_k\}$ egy szigorúan felülről nullához tartozó sorozat. Van olyan j index, melyre végtelen sok ϵ_k esetén $z_j((M + \epsilon I)\mathbf{z})_j > 0$. Ha $k \to \infty$ akkor $\epsilon_k \to 0$, és $z_j(M\mathbf{z})_j \geq 0$.
$(ii) \Rightarrow (iii), (iii) \Rightarrow (i)$: Analóg módon bizonyítható a P mátrixokra vonatkozó tételhez. ■

22. Tétel. *([Mu88]) $M \in P$ akkor tetszőleges $\alpha \subseteq \{1, \ldots, n\}$ indexhalmazhoz, melyre $M_{\alpha\alpha}$ nem szinguláris, az α indexhalmazhoz tartozó blokk pivot transzformáltja is P mátrix.*

23. Tétel. *([Mu88]) $M \in P$ akkor és csak akkor, ha tetszőleges $\alpha \subseteq \{1, \ldots, n\}$ esetén, melyre $M_{\alpha\alpha}$ nem szinguláris, az α indexhalmazhoz tartozó blokk pivot transzformáltja esetén a diagonális elemek pozitívak.*

A (20). tétel v, pontja motiválja a P mátrixok sajátértékeinek a vizsgálatát.

24. Tétel. *Egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ P mátrix sajátértékeinek valós része pozitív.
Egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ P_0 mátrix sajátértékeinek valós része Nem negatív.
Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ahol $n \geq 3$ P mátrix sajátértékeinek valós részére nincs általános alsó korlát.*

Bizonyítás:
Legyen $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ egy P mátrix. Definíció szerint

$$M \in P \iff (a > 0, d > 0, ad - bc > 0).$$

A sajátértékek

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}.$$

Ha (mindkét) sajátérték valós, akkor azt kell megmutatni hogy

$$a + d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc} > 0,$$

ami azzal eqvivalens hogy $ad > bc$. Ha $\lambda_1, \lambda_2 \notin R$ akkor a valós rész $\frac{a+d}{2}$ ami a feltevés szerint pozitív.
A P_0 mátrixok esetén egyenez az érvelés teljesül a $>$ helyett $\geq$ relációkkal.
Tekintsük az

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixokat. Az összes 1×1 és 2×2 méretű diagonális menti részmátrix determinánsa 1, míg $\det(M(a)) = 1 + a$, így $M(a)$ a P mátrixok osztályába tartozik, ha $a > -1$. Az $M(a)$ mátrix sajátértékei az

$$1 + a^{1/3},\ 1 - \frac{1}{2}a^{1/3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}a^{1/3}$$

és

$$\lambda(a) = 1 - \frac{1}{2}a^{1/3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}a^{1/3}$$

számok, melyre

$$\lim_{a\to\infty} \operatorname{real} \lambda(a) = -\infty.$$

Magasabb dimenzióra az $M(a)$ mátrix könnyen kiterjeszthető tetszőleges pozitív főátlójú diagonális mátrix hozzáillesztésével. ■

6. Megjegyzés. *Mivel $P_* \subset P_0$, így tetszőleges $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ P_* mátrix sajátértékeinek valós része nem negatív. Az állítás éles, lévén az $SS \subset P_*$ mátrixoknak tisztán képzetes sajátértékeik vannak.*

25. Állítás. *Az M négyzetes mátrix P mátrix akkor és csak akkor, ha van olyan $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ vektor, melyre $M\mathbf{x} > \mathbf{0}$, és M csakúgy mint minden blokk pivot transzformáltjának*

A fejezet zárásaként megemlítünk egy további eredményt a P mátrixok sajátértékeiről.

26. Állítás. *([Kel72]) Komplex számok egy $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ halmaza sajtáértékei egy $n \times n$-es P mátrixnak (P_0 mátrixnak) akkor és csak akkor, ha a*

$$\prod_{i=1}^{n}(t+\lambda_i) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i$$

polinomra $b_i > 0$ ($b \geq 0$) teljesül $i = 1..n$ esetén.
A nem nulla $\lambda = re^{i\Theta}$ komplex szám egy $n \times n$-es P mátrix sajátértéke akkor és csak akkor, ha $|\Theta - \pi| > \pi/n$.

4.4. Elégséges mátrixok

Az elégséges mátrixokat először Cottle és társszerzői [CPV89] vezették be. Megmutatták, hogy ezek a P-mátrixok és a PSD mátrixok általánosításai. Később Hertog és társszerzői [HRT93] igazolták, hogy az elégséges mátrixok éppen azok a mátrixok, melyekre a szokásos minimál index szabályú criss-cross módszer bármely jobboldali $\mathbf{q}$ vektor esetén véges lépésben vagy talál egy megoldást, vagy kimutatja hogy az LCP nem megoldható.

A továbbiakban megmutatjuk az elégséges mátrixok néhány alapvető tulajdonságát. A lemma kimondása előtt bevezetjük a szigorúan előjelfordító, illetve szigorúan előjeltartó vektorok fogalmát.

17. Definíció. *Egy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ vektort szigorúan előjelfordítónak nevezünk, ha*

$$\begin{array}{ll} x_i x_{\bar{\imath}} \leq 0 & \textit{minden } i = 1, \ldots, n \textit{ indexre} \\ x_i x_{\bar{\imath}} < 0 & \textit{valamely } i \in \{1, \ldots, n\} \textit{ indexre} \end{array}$$

Egy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ vektort szigorúan előjeltartónak nevezünk, ha

$$\begin{array}{ll} x_i x_{\bar{\imath}} \geq 0 & \textit{minden } i = 1, \ldots, n \textit{ indexre} \\ x_i x_{\bar{\imath}} > 0 & \textit{valamely } i \in \{1, \ldots, n\} \textit{ indexre} \end{array}$$

Vezessük be a

$$V := \left\{ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid [-M, I](\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{0} \right\}$$

illetve a

$$V^{\perp} := \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid [I, M^T](\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \right\}$$

altereket.

27. Lemma. *A V illetve $V^\perp$ $\mathbb{R}^{2n}$ alterek egymás ortogonális kiegészítő alterei.*

Bizonyítás: Először az ortogonalitást bizonyítjuk:

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})^T(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{u}, M\mathbf{u})^T(-M^T\mathbf{y},\mathbf{y}) = -\mathbf{u}^T M^T\mathbf{y} + \mathbf{u}^T M^T\mathbf{y} = 0$$

Az ortogonalitásból azonnal következik a függetlenség. Marad, hogy megmutassuk, hogy direkt összegük éppen az $\mathbb{R}^{2n}$. Ismert összefüggés, hogy tetszőleges $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés esetén

$$\dim V = \dim \operatorname{Im}\varphi + \dim\ker\varphi$$

Persze $\dim \mathbb{R}^{2n} = 2n$, és mind a $[-M, I]$ illetve $[I, M^T]$ képtere nyilvánvalóan n dimenziós, így magterük $2n - n = n$ is, vagyis a magterek függetlensége miatt a direkt összeg dimenziója $2n$. ■

28. Lemma. *Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ elégséges mátrix akkor és csak akkor, ha a V altérben nincs szigorúan előjelfordító vektor, illetve a $V^\perp$ altérben nincs szigorúan előjeltartó vektor.*

Bizonyítás: Ha lenne a V altérben szigorúan előjelfordító vektor, mondjuk az $(\mathbf{u},\mathbf{v})$, akkor

$$\mathbf{0} \gneq \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot M\mathbf{u}$$

ami ellentmondás. Ha pedig a $V^\perp$ altérben lenne szigorúan előjeltartó vektor, például (x, y) akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &\lneq \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = -\mathbf{y}\cdot M^T\mathbf{y} \\ \mathbf{0} &\gneq \mathbf{y}\cdot M^T\mathbf{y} \end{aligned}$$

ami ismét ellentmondás. ■

18. Definíció. *Legyen adott egy S vektorhalmaz, melynek tagjait a J halmazzal indexeltük. Legyen továbbá a $J_B \subseteq J$ olyan, hogy tagjai az S egy bázisát alkotják. Jelölje $J_N = J\setminus J_B$, a nem bázisbeli vektorok indexhalmazát. Ekkor a J_B bázishoz tartozó rövid pivot tábla az $M \in \mathbb{R}^{|J_B|\times|J_N|}$ mátrix, amelyre m_{ij} a $j \in J_N$ index által jelölt vektor J_B szerinti előállításának $i \in J_B$ index által jelölt bázisvektor együtthatóját adja meg.*

A következő lemmára a mátrixok előjelszerkezetének vizsgálatakor lesz szükségünk, mely előjelszerkezet valójában a 7. fejezetben az elégséges mátrixok általunk felhasznált minden tulajdonságát tartalmazza.

29. Lemma. *(Cottle, Pang és Venkateswaran [CPV89]) Legyen M elégséges mátrix, B bázis,*

$$\bar{M} = [\bar{m}_{ij} : i \in J_B, j \in J_N]$$

a hozzá tartozó rövid pivot tábla. Ekkor a következő állítások teljesülnek:

i, $\bar{m}_{i\bar{\imath}} \geq 0$ *minden* $i \in J_B$ *indexre, továbbá*

ii, minden $i \in J_B$ *indexre, ha* $\bar{m}_{i\bar{\imath}} = 0$ *akkor* $\bar{m}_{i\bar{\jmath}} = \bar{m}_{j\bar{\imath}} = 0$ *vagy* $\bar{m}_{i\bar{\jmath}} \cdot \bar{m}_{j\bar{\imath}} < 0$ *minden* $j \in J_B,\ j \neq i$ *esetén.*

Bizonyítás: Vezessük be a következő jelölést: $A := [-M, I]$, ahol az oszlopokat indexeljük rendre a $\{1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n}\}$ halamaz elemeivel. A lemma szerint M oszlop elégséges akkor és csak akkor, ha $\nexists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ melyre $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ és $x_i x_{\bar{\imath}} \leq 0$ minden $i \in \{1, \ldots, n\}$-re és $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$ melyre $x_i x_{\bar{\imath}} < 0$. Vagyis $\mathbf{x}$ olyan szigorúan előjel fordító vektor, melyre $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(i) : Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel hogy $i \in J_B$ olyan, hogy $\bar{m}_{i\bar{\imath}} < 0$. Definíció szerint $\mathbf{a}_{\bar{\imath}} = \sum_{j \in J_B} -\bar{m}_{j\bar{\imath}}\, \mathbf{a}_j$, vagyis az

$$\mathbf{x} = \begin{cases} \bar{m}_{j\bar{\imath}}, & \text{ha } j \in J_B \\ 1, & \text{ha } j = \bar{\imath} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

vektorra $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De ekkor az $\mathbf{x}$ szigorúan előjelfordító:

$$x_j x_{\bar{\jmath}} = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \neq i, \text{ mert ekkor } j \text{ vagy } \bar{\jmath} \text{ bázison kívüli} \\ \bar{m}_{i\bar{\imath}} < 0, & \text{ha } j = \bar{\imath} \end{cases}$$

ellentmondás.

(ii) : Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $\bar{m}_{i\bar{\imath}} = 0$, és i, j két olyan index mely sérti a tétel állítását. Definíció szerint ismét $\mathbf{a}_{\bar{\imath}} = \sum_{k \in J_B} -\bar{m}_{k\bar{\imath}}\, \mathbf{a}_k$ illetve $\mathbf{a}_{\bar{\jmath}} = \sum_{k \in J_B} -\bar{m}_{kj}\, \mathbf{a}_k$, és definiáljuk az

$$(\mathbf{y}_1)_k = \begin{cases} \bar{m}_{k\bar{\imath}}, & \text{ha } k \in J_B \\ 1, & \text{ha } k = \bar{\imath} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \qquad \text{illetve} \qquad (\mathbf{y}_2)_k = \begin{cases} \bar{m}_{k\bar{\jmath}}, & \text{ha } k \in J_B \\ 1, & \text{ha } k = \bar{\jmath} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

vektorokat. A tétel $(\mathbf{b})$ része kétféleképpen sérülhet:

1. eset: $\bar{m}_{i\bar{\imath}} = 0$ és $\bar{m}_{i\bar{\jmath}} \cdot \bar{m}_{j\bar{\imath}} > 0$. Ekkor, ha $\bar{m}_{j\bar{\jmath}} = 0$, akkor az $\mathbf{x} = \mathbf{y}_1 - \bar{m}_{i\bar{\jmath}}\,\mathbf{y}_2$ vektorra $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ és szigorúan előjelfordító. Figyelembe véve hogy $k = j$ esetén

$$x_k x_{\bar{k}} = \left(\bar{m}_{j\bar{\imath}} - \bar{m}_{i\bar{\jmath}}\bar{m}_{j\bar{\jmath}}\right)\left(\bar{m}_{\bar{\jmath}\bar{\imath}} - \bar{m}_{i\bar{\jmath}} \cdot 1\right) = -\bar{m}_{j\bar{\imath}}\,\bar{m}_{i\bar{\jmath}} < 0$$

illetve $k = i$ esetén

$$x_k x_{\bar{k}} = \left(\bar{m}_{i\bar{\imath}} - \bar{m}_{i\bar{\jmath}}\bar{m}_{i\bar{\jmath}}\right)\left(1 - \bar{m}_{i\bar{\jmath}}\bar{m}_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}\right) = -\bar{m}_{i\bar{\jmath}} \cdot \bar{m}_{j\bar{\imath}} < 0$$

továbbá hogy $k \notin \{i, j\}$ esetén k vagy $\bar{k}$ bázison kívüli mind $\mathbf{y}_1$ illetve $\mathbf{y}_2$ esetén, kapjuk hogy

$$x_k x_{\bar{k}} \begin{cases} = 0, & \text{ha } k \notin \{i, j\} \\ < 0, & \text{ha } k = j \\ < 0, & \text{ha } k = i \end{cases}$$

ellentmondás.

Ha pedig $\bar{m}_{j\bar{\jmath}} > 0$ (az (**a**) eset értelmében már tudjuk hogy $\bar{m}_{j\bar{\jmath}} \geq 0$) akkor az $\mathbf{x} = \frac{1}{\bar{m}_{j\bar{\imath}}}\,\mathbf{y}_1 - \frac{1}{\bar{m}_{j\bar{\jmath}}}\,\mathbf{y}_2$ vektorra $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ és szigorúan előjelfordító: $k = j$ esetén a $x_k x_{\bar{k}}$ szorzat első tényezője

$$\left(\frac{\bar{m}_{j\bar{\imath}}}{\bar{m}_{j\bar{\imath}}} - \frac{\bar{m}_{j\bar{\jmath}}}{\bar{m}_{j\bar{\jmath}}}\right) = 0$$

illetve $k = i$ esetén

$$x_k x_{\bar{k}} = \left(\frac{\bar{m}_{i\bar{\imath}}}{\bar{m}_{j\bar{\imath}}} - \frac{\bar{m}_{i\bar{\jmath}}}{\bar{m}_{j\bar{\jmath}}}\right)\left(\frac{1}{\bar{m}_{j\bar{\imath}}} - \frac{\bar{m}_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}}{\bar{m}_{j\bar{\jmath}}}\right) = \frac{\bar{m}_{i\bar{\jmath}}}{\bar{m}_{j\bar{\jmath}}\,\bar{m}_{j\bar{\imath}}} < 0$$

továbbá hogy $k \notin \{i, j\}$ esetén k vagy $\bar{k}$ bázison kívüli mind $\mathbf{y}_1$ illetve $\mathbf{y}_2$ esetén, kapjuk hogy

$$x_k x_{\bar{k}} \begin{cases} = 0, & \text{ha } k \notin \{i, j\} \\ = 0, & \text{ha } k = j \\ < 0, & \text{ha } k = i \end{cases}$$

ellentmondás.

2. eset: $\bar{m}_{i\bar{\imath}} = 0$ és $\bar{m}_{i\bar{\jmath}} \cdot \bar{m}_{j\bar{\imath}} = 0$, de nem mind $\bar{m}_{i\bar{\jmath}}$ és $\bar{m}_{j\bar{\imath}}$ nullák. Tegyük fel először hogy $\bar{m}_{j\bar{\imath}} \neq 0$ és $\bar{m}_{i\bar{\jmath}} = 0$. Ekkor az $\mathbf{x} = -\frac{1+\bar{m}_{j\bar{\jmath}}}{\bar{m}_{j\bar{\imath}}}\,\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ vektorra $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{x}$ szigorúan előjelfordító: $k = j$ esetén

$$x_k x_{\bar{k}} = \left(-\frac{1 + \bar{m}_{j\bar{\jmath}}}{\bar{m}_{j\bar{\imath}}}\,\bar{m}_{j\bar{\imath}} + \bar{m}_{j\bar{\jmath}}\right)\left(\frac{1 + \bar{m}_{j\bar{\jmath}}}{\bar{m}_{j\bar{\imath}}}\,\bar{m}_{\bar{\jmath}\bar{\imath}} + 1\right) = -1 < 0$$

illetve $k = i$ esetén

$$x_k x_{\bar{k}} = \left(-\frac{1 + \bar{m}_{j\bar{j}}}{\bar{m}_{j\bar{\imath}}} m_{i\bar{\imath}} + m_{i\bar{j}} \right) \left(-\frac{1 + \bar{m}_{j\bar{j}}}{\bar{m}_{j\bar{\imath}}} \cdot 1 + m_{\bar{\imath}\bar{j}} \right) = 0$$

továbbá, hogy $k \notin \{i, j\}$ esetén k vagy $\bar{k}$ bázison kívüli mind $\mathbf{y}_1$ illetve $\mathbf{y}_2$ esetén kapjuk, hogy

$$x_k x_{\bar{k}} \begin{cases} = 0, & \text{ha } k \notin \{i, j\} \\ < 0, & \text{ha } k = j \\ = 0 & \text{ha } k = i \end{cases}$$

ellentmondás.

Ha most $\bar{m}_{i\bar{j}} \neq 0$ és $\bar{m}_{j\bar{\imath}} = 0$, akkor a transzponált mátrixra felírva, az eredeti mátrix sor elégségessége alapján kapjuk az állítást: Legyen

$$(\mathbf{y}_1)_k = \begin{cases} \bar{m}_{ik}, & k \in J_N \\ 1, & k = i \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad \text{illetve} \quad (\mathbf{y}_2)_k = \begin{cases} \bar{m}_{jk}, & \text{ha } k \in J_N \\ 1, & \text{ha } k = j \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

és ekkor az $\mathbf{x} = -\frac{1+\bar{m}_{j\bar{j}}}{\bar{m}_{i\bar{j}}} \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ vektorra $[I, M^T]\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{x}$ szigorúan előjeltartó. ∎

Figyeljük meg, hogy a lemma konstruktív, tehát ha valahol sérül a kívánt előjelszerkezet, akkor az $\bar{M}$ táblájából könnyen leolvasható a bizonyíték, hogy M nem elégséges.

A következő lemma az előző egyfajta megfordítása:

30. Tétel. *([CG92]) Egy $M \in R^{n\times n}$ mátrix oszlop elégséges akkor és csak akkor, ha az M mátrixra, csak úgy mint tetszőleges $\alpha \subseteq \{1, \ldots, n\}$ indexhalmazhoz, melyre $M_{\alpha\alpha}$ nem szinguláris, az α indexhalmazhoz tartozó $\bar{M}$ blokk pivot transzformáltjára $m_{ii} \geq 0$ továbbá*

$$(m_{ii} = 0 \wedge (m_{ij} = 0 \vee m_{ji} = 0)) \Rightarrow (m_{ij} = 0 \wedge m_{ji} = 0))$$

teljesül minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén.

Cottle [Cot90] nyomán:

Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix *átrendezésén* a $P^T M P$ mátrixot értjük, ahol P egy permutációmátrix.

31. Lemma. *Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sor (oszlop) elégséges mátrix tetszőleges átrendezése is sor (oszlop) elégséges.*

Bizonyítás: Legyen $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges permutációmátrix. Figyeljük meg, hogy tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorok esetén a Hadamard szorzást alkalmazva

$$P^T(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = (P^T\mathbf{x})\cdot(P^T\mathbf{y}).$$

Felhasználva hogy $P^TP = I_n$ könnyen látható, hogy

$$P^T(\mathbf{x}\cdot(M\mathbf{x})) = (P^T\mathbf{x})\cdot((P^TMP)(P^T\mathbf{x})).$$

Az $\mathbf{y} = P^T\mathbf{x}$, vagyis $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ helyettesítéssel élve:

$$P^T((P\mathbf{y})\cdot(M(P\mathbf{y}))) = (\mathbf{y})\cdot((P^TMP)(\mathbf{y})). \tag{11}$$

Vagyis ha létezne $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ P^TMP mely sértené az elégségeségét, akkor $P\mathbf{y}$ sértené az M elégségességét, mivel az (11) bal oldalán a P^T mátrixal való szorzás csak az elemek sorrendjét változtatja meg, az egyes előjelek számát nem. ∎

32. Lemma. *Ha $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sor (oszlop) elégséges mátrix, D alkalmas méretű diagonális mátrix, akkor DMD is sor (oszlop) elégséges.*

Bizonyítás: Az állítás következik a sor (oszlop) elégséges mátrixok definíciójából, és abból hogy tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\mathbf{x}\cdot((DMD)\mathbf{x}) \quad = \quad (D\mathbf{x})\cdot(M(D\mathbf{x}))$$

mivel

$$\begin{aligned}
[\mathbf{x}\cdot((DMD)\mathbf{x})]_i &= x_i(DMD\mathbf{x})_i = x_i\left(\delta_i\sum_{j=1}^n m_{ij}\delta_j x_j\right) = \\
&= (\delta_i x_i)\sum_{j=1}^n m_{ij}(\delta_j x_j) \\
&= [(D\mathbf{x})\cdot(M(D\mathbf{x}))]_i
\end{aligned}$$

∎

33. Lemma. *Legyen $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sor (oszlop) elégséges mátrix. Ekkor M tetszőleges diagonális menti négyzetes részmátrixa is sor (oszlop) elégséges.*

Bizonyítás: Legyen $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sor elégséges, és tekintsük egy tetszőleges $M_{\alpha\alpha}$ részmátrixát. Legyen most $\mathbf{y} \in R^{|\alpha|}$ olyan, hogy $\mathbf{y}\cdot(M^T_{\alpha\alpha}\mathbf{y}) \leq \mathbf{0}$. Definiáljuk az $\mathbf{x}$ vektort olymódon, hogy $\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{y}$, $\mathbf{x}_{\bar\alpha} = \mathbf{0}$. Ekkor $\mathbf{x}\cdot(M^T\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$, de mivel M^T oszlop sor elégséges, így $\mathbf{x}\cdot(M^T\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, azonban

$$(\mathbf{x}\cdot(M^T\mathbf{x}))_\alpha = \mathbf{y}\cdot(M^T_{\alpha\alpha}\mathbf{y})$$

ami bizonyítja állításunkat. Az oszlop elégséges eset hasonlóan bizonyítható. ■

Két lemma formájában még megjegyezzük, hogy ha az M elégséges, akkor belőle tetszőleges pivot sorozat után kapott $\bar{M}$ mátrix is az, vagyis az elégséges mátrixok osztálya pivot műveletre zárt, így a criss-cross típusu algoritmusok során a tábla elégségessége megőrződik.

34. Lemma. *Legyen $M_{\alpha\alpha}$ az M oszlop elégséges mátrix egy nem szinguláris, diagonális menti négyzetes részmátrixa. Ekkor az $M' = \eta_\alpha(M)$ is oszlop elégséges.*

Bizonyítás: Legyen $\mathbf{y} = M'\mathbf{x}$ és tegyük fel, hogy $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$. Blokkosítva M-et α szerint

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_\alpha \\ \mathbf{y}_{\bar\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M'_{\alpha\alpha} & M'_{\alpha\bar\alpha} \\ M'_{\bar\alpha\alpha} & M'_{\bar\alpha\bar\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_\alpha \\ \mathbf{x}_{\bar\alpha} \end{pmatrix}$$

Az $\mathbf{x}\cdot M'\mathbf{x} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$ értelmében

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_\alpha \\ \mathbf{x}_{\bar\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_\alpha \\ \mathbf{y}_{\bar\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_\alpha\cdot\mathbf{y}_\alpha \\ \mathbf{x}_{\bar\alpha}\cdot\mathbf{y}_{\bar\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_\alpha\cdot\mathbf{x}_\alpha \\ \mathbf{x}_{\bar\alpha}\cdot\mathbf{y}_{\bar\alpha} \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}$$

Mivel $M' = \eta_\alpha(M)$ ezért

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_\alpha \\ \mathbf{y}_{\bar\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{\alpha\alpha} & M_{\alpha\bar\alpha} \\ M_{\bar\alpha\alpha} & M_{\bar\alpha\bar\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_\alpha \\ \mathbf{x}_{\bar\alpha} \end{pmatrix}$$

De mivel M oszlop elégséges, így $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{0}$, ami egyben M' oszlopelégségességét is bizonyítja. ■

A lemma sor elégséges megfelelőjének bizonyításához vezessük be az előjelfordító mátrixokat: Legyen $S_{\bar\alpha} = Diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ ahol minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ indexre

$$\sigma_i = \begin{cases} 1 & \text{ha } i \in \alpha \\ -1 & \text{ha } i \in \bar\alpha \end{cases}$$

35. Lemma. *Legyen $M_{\alpha\alpha}$ az M sor elégséges mátrix egy nem szinguláris, diagonális menti négyzetes részmátrixa. Ekkor az $M^{'} = \eta_\alpha(M)$ is sor elégséges.*

Bizonyítás: Elegendő bizonyítani, hogy $\left(M^{'}\right)^T$ oszlop elégséges. Az előbbi tétel értelmében mindenesetre a $\eta_\alpha(M^T)$ oszlop elégséges. Mivel

$$(M^{'})^T = (\eta_\alpha(M))^T = S_{\bar{\alpha}}\eta_\alpha(M^T)S_{\bar{\alpha}},$$

így a 32. lemmát felhasználva a fenti észrevétel bizonyítja a állításunkat. ■

A fejezetet a rendkívüli jelentőséggel bíró kvadratikus programozási feladat, és az elégségesség összefüggésével zárjuk.

36. Tétel. *([CPV89]) Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix esetén a következők teljesülnek:*

i, M sor elégséges $\iff$ tetszőleges $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ esetén, ha az $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ vektor egy Karush-Kuhn-Tucker pontja a

$$\min x^T(M\mathbf{x} + \mathbf{q})$$

$$\begin{aligned} M\mathbf{x} + \mathbf{q} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

kvadratikus programozási feladatnak, akkor $\mathbf{x}$ megoldása az $LCP(\mathbf{q}, M)$ feladatnak.

ii, M elégséges $\iff$ tetszőleges $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ esetén az i, pontban definiált kvadratikus program KKT pontjainak a halmaza konvex, és megegyezik az $LCP(\mathbf{q}, M)$ megoldásainak a halmazával.

Bizonyítás:
(i) : " $\Rightarrow$ " Írjuk fel a Karush-Khun-Tucker feltételeket a kvadratikus programra: ha $\mathbf{x}$ lokális optimum, akkor létezik hozzá olyan $\mathbf{u}$ duál szorzó, melyre a következők teljesülnek:

$$\begin{aligned} M\mathbf{x} + \mathbf{q} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{q} + (M + M^T)\mathbf{x} - M^T\mathbf{u} &\geq 0 \\ u &\geq 0 \\ \mathbf{x}^T(\mathbf{q} + (M + M^T)\mathbf{x} - M^T\mathbf{u}) &= 0 \\ \mathbf{u}^T(M\mathbf{x} + \mathbf{q}) &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Legyen az $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ vektor egy Karush-Kuhn-Tucker pontja a kvadratikus programnak. Ekkor mivel $\mathbf{x}$ nem negatív, és $\mathbf{u}$ megengedett duál változó,

$$x_i(M^T(\mathbf{x}-\mathbf{u}))_i \leq 0, \tag{13}$$

továbbá a komplementaritási tulajdonság miatt $u_i(M\mathbf{x}+\mathbf{q})_i = 0$ (feltétel aktív, vagy a duál változója nulla) és így

$$-u_i(M^T(\mathbf{x}-\mathbf{u}))_i \leq 0 \tag{14}$$

teljesül minden $i = 1, \ldots, n$ esetén. Összefoglalva

$$(\mathbf{x}-\mathbf{u}) \cdot (M^T(\mathbf{x}-\mathbf{u})) \leq \mathbf{0}$$

adódik. Ez azonban M^T oszlop elégségessége miatt csak úgy lehet, ha

$$(\mathbf{x}-\mathbf{u}) \cdot (M^T(\mathbf{x}-\mathbf{u})) = \mathbf{0},$$

vagyis

$$x_i(M^T(\mathbf{x}-\mathbf{u}))_i = u_i(M^T(\mathbf{x}-\mathbf{u}))_i$$

Felhasználva a (12,13,14) egyenlőtlenségeket, adódik hogy

$$x_i(M\mathbf{x}+\mathbf{q})_i = 0$$

minden $i = 1, \ldots, n$ esetén. Vagyis az $\mathbf{x}$ megoldása az $LCP(\mathbf{q}, M)$ feladatnak.
(i) : " $\Leftarrow$ " Tegyük fel indirekt, hogy az M mátrix nem sor elégséges. Ekkor van olyan $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathbf{x} \cdot (M\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ és $x_i(M\mathbf{x})_i < 0$ valamely i esetén. Az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy $x_i > 0$. Legyen $\mathbf{z} = \mathbf{x}^+$, $\mathbf{u} = \mathbf{x}^-$ és $\mathbf{q} = -M\mathbf{z} + (M^T\mathbf{x})^-$, ahol $(\ldots)^+$ illetve $(\ldots)^-$ a vektor pozitív illetve negatív része. Könnyen látható, hogy ekkor $(\mathbf{z}, \mathbf{u})$ Karush-Kuhn-Tucker pár az M mátrixhoz, és az így definiált $\mathbf{q}$ vektorhoz. A konstrukció miatt $z_i > 0$ és $(\mathbf{q} + Mz)_i > 0$, ami ellentmondás, mert emiatt a $\mathbf{z}$ vektor nem lehet az $LCP(\mathbf{q}, M)$ megoldása.
(ii) : Az tétel első felének, és a 15 tétel közvetlen következménye. ■

4.5. P_* mátrixok (elégséges mátrixok II)

A továbbiakban folytatjuk az elégséges mátrixok tulajdonságainak ismertetését, azonban a P_* mátrixok megközelítéséből.

37. Tétel. *([Val96a]) Legyen $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oszlop (sor) elégséges, $rang(M) = r < n$. Legyen $R \subset \{1, \ldots, n\}$ olyan, hogy a neki megfelelő oszlopok (sorok) lineárisan függetlenek. Ekkor az M_{RR} mátrix nem szinguláris.*

Bizonyítás:
Indukció r szerint. Az $r = 0$ esetben nincs mit bizonyítani. Tegyük fel, hogy $rang(M) < r$ esetén már igazoltuk az állítást, és legyen $r = rang(M) >= 1$. Legyen R mint a tételben; az általánosság elvesztése mellett feltehetjük, hogy $R = \{1, \ldots, r\}$.
Tegyük fel indirekt, hogy $rang(M_{RR}) = k < r$. Legyen $S \subset R$ olyan, hogy az M mátrix S indexhalmazhoz tartozó oszlopok lineárisan függetlenek. Az indukciós feltevés alapján M_{SS} mátrix nem szinguláris. Elvégezve az M_{SS} szerinti blokpivotálási műveletet az M mátrixon, majd törölve az S indexű sorokat és oszlopokat a következő mátrixot kapjuk:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

ahol a 0 nulla mátrix mérete $(r-k) \times (r-k)$ és $rang(B_{12}) = r - k$. A (29) tétel alapján tudjuk, hogy $B_{12} \neq 0$. Emiatt

$$rang(M) = k + rang(B) \geq k + rang(B_{21}) + rang(B_{12}) > r$$

ami ellentmondás. (A B mátrix valójában nem más mint az M_{SS} mátrix Schur-féle komplemense az M mátrixra nézve) ■

38. Következmény. *Legyen $M \in P_*$ és $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Az M mátrixban az I indexű oszlopok lineárisan függetlenek akkor és csak akkor, ha az I indexű sorok is lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás:
Legyen $r := rang(M)$, és $I \subset R \subset \{1, \ldots, n\}$ olyan, hogy az R indexhalmazhoz tartozó oszlopok lineárisan függetlenek. Ekkor M_{RR} nem szinguláris a (37) tétel alapján, és így a megfelelő sorok is lineárisan függetlenek. ■

A $P_*(\kappa)$ mátrixok következő jellemzésének a belső pontos algoritmusok vizsgálatánál van jelentősége:

39. Tétel. *[KMNY91] A következők ekvivalensek:*

i, $M \in P_*(\kappa)$

ii, Tetszőleges diagonális D mátrix, és $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ vektorok esetén a

$$\begin{aligned} D^{-1}\boldsymbol{\xi} + D\boldsymbol{\eta} &= \mathbf{h} \\ -M\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

rendszer teljesüléséből

$$\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\eta} \geq -\kappa \|\mathbf{h}\|_2^2$$

következik.

iii, Tetszőleges $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ *esetén*

$$\boldsymbol{\xi}^T M \boldsymbol{\xi} \geq -\kappa \inf_D \left\| D^{-1}\boldsymbol{\xi} + DM\boldsymbol{\xi} \right\|_2^2$$

ahol az infimum az összes pozitív átlójú diagonális mátrixon értelmezett.

Väliaho [Val96a] a 2×2-es mátrixok esetén teljes jellemzését adja a P_* mátrixosztályba tartozásnak.

40. Tétel. *Egy* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *mátrix esetén*

$$\begin{array}{lcl} M \in P & \iff & (a > 0, d > 0, ad - bc > 0) \\ M \in PSD & \iff & (a \geq 0, d \geq 0, (b+c))^2 \leq 4ad \\ M \in P* & \iff & (a \geq 0, d \geq 0, (ad - bc > 0 \vee \\ & & \vee(ad - bc = 0 \wedge ((a = 0 \vee d = 0) \Rightarrow b = 0, c = 0)) \end{array}$$

Magasabb dimenzióban a következő eredmények ismertek.

41. Tétel. *([CG92]) Egy* $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *mátrix (sor,oszlop) elégséges akkor és csak akkor, ha tetszőleges diagonális menti blokk pivot transzponáltjának a* 2×2*-es diagonális menti részmátrixai (sor,oszlop) elégségesek.*

42. Állítás. *([Val96a]) Egy* $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $rang(M) = r < n$ *mátrix (oszlop/sor) elégséges akkor és csak akkor, ha tetszőleges* $r + 1$ *méretű diagonális menti négyzetes részmátrixa (oszlop/sor) elégséges.*

Bizonyítás:
A szükségesség nyilvánvaló. (ha van olyan vektor, mely sérti a definíciót, az nullákkal kiegészítve jó az eredeti mátrixhoz is)
Az elégségességet az oszlop elégséges esetre bizonyítjuk, a sor elégséges eset hasonlóan bizonyítható. A (41) tételt alkalmazzuk. Legyen B az M mátrix egy diagonális menti blokk pivot transzponáltja mely egy $\alpha \subset \{1, \ldots, n\}$ indexhalmazhoz tartozik. Mivel ekkor szükséges, hogy $M_{\alpha\alpha}$ nem szinguláris, így $|\alpha| \leq r$. Legyen továbbá $S \subset \{1, \ldots, n\}$, $|S| = 2$. Azt kell megmutatnunk, hogy B_{SS} oszlop elégséges. Két esetet különböztetünk meg.
1. Ha $|R \cup S| \leq r+1$, akkor $M_{R\cup S, R\cup S}$ oszlop elégséges, így a (34) tétel alapján a $M_{R\cup S, R\cup S}$, speciálisan a B_{SS} is oszlop elégséges.
2. Ha $|R| = r$, $R \cap S = \emptyset$. Ekkor a Schur formula alapján

$$\begin{array}{rcl} rang(M) & \geq & rang(M_{\alpha\alpha}) + rang(B_{SS}) \\ r & \geq & r + rang(B_{SS}) \end{array}$$

és emiatt $B_{SS} = 0$. ■

43. Állítás. *([Val96a]) Ha az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix tetszőleges $(n-1)\times(n-1)$ méretű diagonális menti négyzetes részmátrixa (oszlop,sor) elégséges, és* $\det(M) > 0$ *akkor M is (oszlop,sor) elégséges.*

Bizonyítás:
Az oszlop elégséges esetet bizonyítjuk, a sor elégséges eset analóg. Figyeljük meg, hogy $M \in P_0$. Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $\mathbf{x} \in R^n$ vektor, melyre $\mathbf{x}\cdot(M\mathbf{x}) \lneqq 0$. Két esetet különböztetünk meg.
1. Ha $x_k = 0$ valamely k indexre. Ekkor

$$\mathbf{x}_{\{1,\dots,n\}-k}\cdot(M\mathbf{x})_{\{1,\dots,n\}-k} \lneqq \mathbf{0}$$

vagyis az $M_{\{1,\dots,n\}-k,\{1,\dots,n\}-k}$ mátrix nem elégséges, ami ellentmondás.
2. Ha $x_i \neq 0$ bármely $i \in \{1,\dots,n\}$ esetén. Az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ illetve $M\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$. Legyen $\mathbf{z} = -M^{-1}\mathbf{e}$ ahol $\mathbf{e} = (1,\dots,1) \in R^n$ és legyen $\epsilon > 0$ olyan pici, hogy hogy $\bar{\mathbf{x}} := \mathbf{x} + \epsilon\mathbf{z} > \mathbf{0}$. Ekkor $M\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{y} - \epsilon\mathbf{e} < \mathbf{0}$ vagyis $\bar{\mathbf{x}}\cdot(M\bar{\mathbf{x}}) < \mathbf{0}$, ami ellentmondás. ■

44. Állítás. *([Val96a]) Ha az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $rang(M) = r < n$ mátrix tetszőleges r rangú diagonális menti négyzetes részmátrixa P mátrix, akkor $M \in P_*$.*

A következőkben megvizsgáljuk a P_* mátrixok skálázási lehetőségeit.

19. Definíció. *Egy M mátrix $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ skálázása alatt a PMQ mátrixot értjük, ahol $P = diag(\mathbf{p})$ és $Q = diag(\mathbf{q})$ tetszőleges pozitív főátlójú diagonális mátrixok. (A sorokat $\mathbf{p}$ szerint, míg az oszlopokat $\mathbf{q}$ szerint slálázzuk)*

45. Állítás. *([KMNY91]) A P_* mátrixok halmaza invariáns a $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ skálázásra. Ha $M \in P_*(\kappa)$, akkor $\hat{M} = PMQ \in P_*(\kappa')$ ahol*

$$\frac{(1+4\kappa')}{(1+4\kappa)} = \frac{\max_i(\frac{p_i}{q_i})}{\min_i(\frac{p_i}{q_i})}$$

Bizonyítás:
Legyen $\hat{\boldsymbol{\xi}} \in R^n$, és $\boldsymbol{\xi} = Q\hat{\boldsymbol{\xi}}$. Definiáljuk a

$$\begin{aligned} I_+(\boldsymbol{\xi}) &= \{i \in \{1,\dots,n\} : \xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i > 0\}, \quad I_-(\boldsymbol{\xi}) = \{i \in \{1,\dots,n\} : \xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i < 0\}, \\ \hat{I}_+(\hat{\boldsymbol{\xi}}) &= \{i \in \{1,\dots,n\} : \hat{\xi}_i(M\hat{\boldsymbol{\xi}})_i > 0\}, \quad \hat{I}_-(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = \{i \in \{1,\dots,n\} : \hat{\xi}_i(M\hat{\boldsymbol{\xi}})_i < 0\}. \end{aligned}$$

indexhalmazokat. Mivel

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_i(\hat{M}\hat{\boldsymbol{\xi}})_i = \hat{\boldsymbol{\xi}}_i(PMQ\hat{\boldsymbol{\xi}})_i = \frac{p_i}{q_i}(Q\hat{\boldsymbol{\xi}})_i(M(Q\hat{\boldsymbol{\xi}}))_i = \frac{p_i}{q_i}\boldsymbol{\xi}_i(M\boldsymbol{\xi})_i$$

és így

$$\hat{I}_+(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = I_+(\boldsymbol{\xi}), \quad \text{és} \quad \hat{I}_-(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = I_-(\boldsymbol{\xi}).$$

Emiatt tetszőleges $\boldsymbol{\xi} \in R^n$ esetén

$$\begin{aligned}
& (1+4\hat{\kappa}) \sum_{i\in \hat{I}_+(\hat{\xi})} \hat{\boldsymbol{\xi}}_i(\hat{M}\hat{\boldsymbol{\xi}})_i + \sum_{i\in \hat{I}_-(\hat{\boldsymbol{\xi}})} \hat{\xi}_i(\hat{M}\hat{\boldsymbol{\xi}}) \\
= \; & (1+4\hat{\kappa}) \sum_{i\in I_+(\xi)} \frac{p_i}{q_i}\xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i + \sum_{i\in I_-(\xi)} \frac{p_i}{q_i}\hat{\xi}_i(M\hat{\boldsymbol{\xi}})_i \\
\geq \; & (1+4\hat{\kappa}) \left(\min_i \frac{p_i}{q_i}\right) \sum_{i\in I_+(\xi)} \xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i + \left(\max_i \frac{p_i}{q_i}\right) \sum_{i\in I_-(\xi)} \hat{\xi}_i(M\hat{\boldsymbol{\xi}})_i \\
= \; & (1+4\kappa) \left(\max_i \frac{p_i}{q_i}\right) \sum_{i\in I_+(\xi)} \xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i + \left(\max_i \frac{p_i}{q_i}\right) \sum_{i\in I_-(\xi)} \hat{\xi}_i(M\hat{\boldsymbol{\xi}})_i \\
= \; & \left(\max_i \frac{p_i}{q_i}\right) \left((1+4\kappa) \sum_{i\in I_+(\xi)} \xi_i(M\boldsymbol{\xi})_i + \sum_{i\in I_-(\xi)} \hat{\xi}_i(M\hat{\boldsymbol{\xi}})_i \right) \geq 0
\end{aligned}$$

felhasználva hogy $M \in P_*(\kappa)$. Vagyis $\hat{M} \in P(\hat{\kappa})$. ■

46. Állítás. *A $P_*(0)$ mátrixok osztálya nem zárt a $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ skálázása. A P és P_0 mátrixok zártak a $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ skálázása.*

Bizonyítás:

A $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix $P_*(0)$-beli, de a $\mathbf{p} = (2,1)$ és $\mathbf{q} = (1,1)$ vektorokkal való skálázás után a $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix adódik, mely már nem $P_*(0)$ mátrix.

Tegyük fel, hogy az $M = (m_{ij}) \in P$. Ekkor $PMQ = (p_i q_j m_{ij})$. Definíció szerint

$$\begin{aligned}
\det(PMQ) &= \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} p_i q_{\sigma(i)} m_{i,\sigma(i)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} p_i q_j \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)}
\end{aligned}$$

ami a feltevés szerint pozitív. (S_n az n elemű permutáció csoport). Hasonló gondolatmenet mondható a diagonális menti négyzetes részmátrixok determinánsáról, illetve a P_0 eset analóg bizonyítható. ■

A fejezet zárásaként bevezetjük az elégséges mátrixok hendikepjét. Jelentősége a belső pontos algoritmusok komplexitásának a vizsgálatánál van (lásd a 4.7.fejezetet)

20. Definíció. *Egy $M \in P_*$ mátrix hendikepjén a legkisebb olyan κ számot értjük, melyre $M \in P_*(\kappa)$, és $\hat{\kappa}(M)$ jelöljük.*

7. Megjegyzés. *Könnyen látható, hogy ha $M \in P_*$, akkor $\hat{\kappa}(\alpha M) = \hat{\kappa}(M)$ tetszőleges $\alpha > 0$ esetén.*

A hendikep néhány tulajdonsága ([Val96a], [Val96b]):

47. Tétel. *Egy $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix esetén*

i, Ha M elégséges de nem PSD, akkor $1 + 4\hat{\kappa} = \frac{\max\{b^2, c^2\}}{(\sqrt{ad} + \sqrt{ad - bc})^2}$.
(Ha M elégséges és PSD, akkor definíció szerint $\hat{\kappa} = 0$)

ii, Ha M elégséges, de se nem PSD vagy P, akkor $1 + 4\hat{\kappa} = \max\{\frac{b}{c}, \frac{c}{b}\}$.

Az általános esetre a következő eredmények ismertek:

48. Állítás. *Legyen M egy nem PSD elégséges mátrix. Ekkor*

$$\frac{1}{4} \sup \left\{ \frac{-\mathbf{x}^T M \mathbf{x}}{\sum\limits_{i: \mathbf{x}_i [M\mathbf{x}]_i > 0} \mathbf{x}_i [M\mathbf{x}]_i} : \mathbf{x}^T M \mathbf{x} < 0 \right\}$$

Megjegyzendő, hogy mivel M nem PSD, így mindig van a feltételt kielégítő $\mathbf{x}$ vektor, továbbá mivel M elégséges, így egy ilyen $\mathbf{x}$ vektor esetén a summa soha nem az üres halmazon lesz értelmezve.

A fejezet zárásaként felsoroljuk a hendikep néhány tulajdonságát. (lásd [Val97])

49. Állítás. *Ha $M \in P$ de nem PD, akkor van olyan $\bar{x} \neq 0$ hogy*

$$\hat{\kappa}(M) = \frac{1}{4} \frac{-\bar{\mathbf{x}} M \bar{\mathbf{x}}}{\sum\limits_{i: \bar{\mathbf{x}}_i [M\bar{\mathbf{x}}]_i > 0} \bar{\mathbf{x}}_i [M\bar{\mathbf{x}}]_i}.$$

Ha M nem P, akkor az állítás még 2 dimenzióban sem teljesül.

50. Állítás. *$\hat{\kappa}(DMD) = \hat{\kappa}(M)$ tetszőleges nem nulla determinánsú D diagonális mátrix esetén.*

51. Állítás. *Legyen $M_{\alpha\alpha}$ az M mátrix egy nem szinguláris, diagonális menti négyzetes részmátrixa. Ekkor $\hat{\kappa}(M) = \hat{\kappa}(\eta_\alpha(M))$.*

52. Állítás. *Egy mátrix hendikepje legalább akkora, mint a diagonális menti részmátrixainak a hendikepje.*

53. Állítás. *Ha* $M = diag(M_1, M_2)$, *akkor* $\hat{\kappa}(M) = \max\{\hat{\kappa}(M_1), \hat{\kappa}(M_2))\}$.

54. Állítás. *Ha* $M \in P_*$ *egy* D *egy nem negatív főátlójú diagonális mátrix, akkor* $\hat{\kappa}(M + D) \leq \hat{\kappa}(M)$,

55. Állítás. *Ha* $M \in P_* \backslash P$ *akkor* $\hat{\kappa}(A) = \max\{\hat{\kappa}(B_{\alpha\alpha}) : B_{\alpha\alpha}$ *az* $M_{\alpha\alpha}$ *nem szinguláris részmátrixhoz tartozó blokk pivot transzformált,* $\alpha \subset \{1, \ldots, n\}\}$

56. Állítás. *Ha* $M \in P_*$ *és* D *azonos dimenziójú nem negatív főátlójú diagonális mátrix, akkor* $\hat{\kappa}\left(\begin{pmatrix} M & I \\ -I & D \end{pmatrix}\right) = \hat{\kappa}(M)$.
Következésképpen ha $d \geq 0$ *szám, akkor* $\hat{\kappa}\left(\begin{pmatrix} M & -\mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_1^T & d \end{pmatrix}\right) = \hat{\kappa}(A)$.

57. Állítás. *Ha* $M \in P_*$ *akkor* $\hat{\kappa}(A^T) = \hat{\kappa}(A)$.

58. Következmény. *Legyen* $M \in P_*(\kappa)$ *ahol a* $\kappa = \hat{\kappa}(M)$, *és legyen* λ_i *az* M *mátrix sajátértékei. Ekkor az* $(\alpha I)M(\alpha I)$ *szimmetrikusan skálázott mátrixra* $\hat{\kappa}((\alpha I)M(\alpha I)) = \hat{\kappa}(M)$, *de a sajátértékei* $\alpha^2\lambda_i$.

4.6. A PSD, P, P_* és P_0 mátrixosztályok struktúrája

59. Állítás. *Az* SS *és* PSD *mátrixosztályok konvex kúpot alkotnak.*
A P, P_0 *és* P_* *mátrixosztályok kúpot alkotnak, melyek azonban nem konvexek.*
A P *mátrixosztály kúpja nyílt, míg az* SS, PSD *és* P_0 *mátrixosztályok kúpja zárt.*

Bizonyítás:
Az SS és PSD mátrixokról szóló állítás a definíciók közvetlen következménye. Hasonlóan nyilvánvaló, hogy mindegyik fenti mátrix osztály kúpot alkot.
Tekintsük az $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ és ennek transzponáltját a $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixokat. Mindkét mátrix P mátrix, így egyben P_0 és P_* is, de az összegük $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ még csak nem is P_0 mátrix.
Mivel egy mátrix determinánsa folytonosan függ a mátrix elemeitől, a P mátrixok kúpja nyílt, a P_0 mátrixok kúpja pedig zárt, mivel a két esetben a diagonális menti részmátrixok determinánsaitól > 0 illetve ≥ 0 feltételt követelünk. Hasonlóan, definíciókból következik az SS és PSD mátrixok kúpjainak a zártsága. ∎

60. Állítás. *A P_* mátrix osztály kúpja se nem nyílt, se nem zárt.*

Bizonyítás:

Tekintsük az $M_k := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/k & 0 \end{pmatrix}$ mátrixokat. Ezen mátrixokra $M_k \in SS \subset P_*(0)$, és minden $k > 1$ esetén elégséges (40), de se nem $P_*(0)$ se nem P. (lévén $\mathbf{x} = (1,1)$ esetén $\mathbf{x}^T M \mathbf{x} = 1/k - 1$). Emiatt (47) alapján $\hat{\kappa}(M_k) = (k-1)/4$. Mivel az $M_\infty = \lim_{k\to\infty} M_k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ márix nem P_* (például nem tesz eleget a 29 tulajdonságainak), így a P_* mátrixok osztálya nem zárt. Tekintsük az $M := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in P_* \backslash (P \cup P_*(0))$ mátrixot. Ezen mátrixra $\hat{\kappa}(M) = 3/4$. De az $M_\epsilon := \begin{pmatrix} 2 & 4+\epsilon \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ nem P_*, sőt még csak nem is P_0 semmilyen $\epsilon > 0$ esetén, így a P_* mátrixok osztályának komplementere sem zárt. ■

A P illetve az elégséges mátrixok osztályokról már láttuk, hogy a diagonális menti blokk pivotálási műveletre zártak, azonban fontos megemlíteni, hogy ez a tulajdonság teljesül a PD, PSD ([Mu88]) és P_0 osztályokra is.

4.7. Mátrixosztályok és megoldó algoritmusok

Ebben a fejezetben megemlítünk néhány eredményt a criss-cross típusú (lásd 7. fejezet), és a belső pontos algoritmusokkal kapcsolatban. Az előbbi a dolgozat későbbi eredményei miatt érdekes, míg a második a hendikep és a κ szám szerepének megértésében.

61. Tétel. *([HRT93]) A következők ekvivalensek:*

i, Az $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix elégséges.

ii, A minimál indexes criss-cross algoritmus bármely $q \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén megoldja az $LCP(\mathbf{q}, M)$ és $LCP(\mathbf{q}, M^T)$ feladatokat abban az értelemben, hogy vagy ad egy megoldást, vagy kimutatja annak nemlétezését.

A $\hat{\kappa}$ szerepének szemléltetése céljából megemlítünk egy komplexitási eredményt a belső pontos algoritmusok világából. A tétel bonyolultsága miatt bizonyos részletek csak elhanyagolva kerülnek említésre, a teljes felépítés megtalálható Kojima et.al. könyvében [KMNY91].

62. Tétel. *Tegyük fel, hogy az M mátrix minden eleme egész szám, míg a* $\mathbf{q}$ *egész vektor. Legyen továbbá $M \in P_*(\kappa)$, és legyen ismert egy belső pont* *a centrális út egy megfelelő környezetében. Ekkor egységesített belső pontos módszer (UIP)*

$$O(c(1+\kappa)L)$$

iterációban megoldja az $LCP(q,M)$ feladatot. Itt L az M mátrix és q vektor kódolásához szükséges bithossz, míg c alkalmas konstans.

5. LCP dualitás

Annak eldöntése, hogy egy tetszőleges LCP feladatnak van-e megoldása $\mathbb{NP}$-beli feladat, és nem feltétlen *co*-$\mathbb{NP}$-beli, de bizonyos mátrixosztályokra az. Ilyen mátrixosztály az elégséges mátrixok osztálya. Fukuda és Terlaky [FT92] a következő dualitás tétel egy általánosított formáját bizonyítják.

Definiáljuk az LCP feladat duálisát.

$$\begin{array}{l} (\mathbf{u},\mathbf{v}) \in V(M,\mathbf{q}) := \{(\mathbf{u},\mathbf{v}) : -M\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{q}\} \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u},\mathbf{v} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \text{(Primal LCP)}$$

illetve a duál LCP:

$$\begin{array}{l} (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in V(M,\mathbf{q})^{\perp} := \left\{ (\mathbf{x},\mathbf{y}) : \begin{array}{l} \mathbf{x}+M^T\mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \mathbf{q}^T\mathbf{y} = -1 \end{array} \right\} \\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \mathbf{x},\mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \text{(Dual LCP)}$$

Az elégséges mátrixú LCP feladatok megoldhatóságának jellemzéséhez lesz segítségünkre a következő tétel:

63. Tétel (LCP dualitás). *Bármely $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ elégséges mátrix és $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén pontosan az egyik teljesül:*
(1) az LCP feladatnak van $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ megengedett komplementáris megoldása,
(2) a DLCP feladatnak van $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ megengedett komplementáris megoldása.

Bizonyítás: Tegyük fel hogy mindkettő megoldható, és legyen (u,v) a primál, (x,y) pedig a duál feladat egy megoldása. Ekko

$$\begin{array}{rcl} -M\mathbf{u}+\mathbf{v} & = & \mathbf{q} \\ -\mathbf{y}^TM\mathbf{u}+\mathbf{y}^T\mathbf{v} & = & \mathbf{y}^T\mathbf{q} = -1 \\ 0 & \leq & \mathbf{x}\mathbf{y}^T+\mathbf{v}^T\mathbf{u} = -\mathbf{1} \end{array}$$

ami ellentmondás. Legalább az egyik teljesül, következik abból, ha megmutatjuk, hogy a criss-cross algoritmus véges. ■

Vagyis ha az M mátrixunk elégséges és racionális, akkor az LCP feladat nem megoldhatósága jól jellemzett, és polinomiális méretű bizonyíték adható rá, éspedig a DLCP feladat egy megoldása.

Következő célunk, hogy a fenti tételt kiegészítsük olymódon, hogy ne kelljen előre feltenni a mátrixunk elégségességét.

6. EP tételek

Egy EP (Existentially Polynomial time) [CE] tétel formája a következő:

$$[\forall \mathbf{x} : F_1(\mathbf{x}) \text{ vagy } F_2(\mathbf{x}) \text{ vagy } \dots \text{ vagy } F_k(\mathbf{x})]$$

ahol $F_i(\mathbf{x})$ olyan állítás, melynek formája

$$F_i(\mathbf{x}) = [\exists \mathbf{y}_i \text{ melyre } \|\mathbf{y}_i\| \leq \|\mathbf{x}\|^{n_i} \text{ és } f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i)]$$

Itt $n_i \in \mathbb{Z}^+$, $\|\mathbf{z}\|$ jelöli a $\mathbf{z}$ kódolási hosszát, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ pedig olyan állítás, melynek teljesülésére van polinomiális bizonyíték.

Az LCP dualuitástételt EP formában szeretnénk felírni. Ehhez előbb meg kell szabadulnunk a tétel feltételétől, és be kell azt olvasztanunk az állításába.

64. Tétel. *Bármely M $n \times n$-es racionális mátrix, és $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n$ esetén legalább az egyik teljesül:*
(1) az LCP feladatnak van $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ megengedett komplementáris megoldása,
(2) a DLCP feladatnak van $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ megengedett komplementáris megoldása.
(3) az M mátrix nem elégséges

A tétel még nincs EP formában. Az (1) és (2) rész teljesülése esetén maga a megoldás mérete polinomiális méretű. A (3) részhez azonban meg kell még mutatni, hogy ha az M mátrix nem elégséges, akkor ennek van egy polinomiális méretű bizonyítéka.

21. Definíció. *Egy $\mathbf{x}$ vektor tartójának az $\{i \mid \mathbf{x}_i \neq 0\}$ halmazt nevezzük.*

22. Definíció. *Egy adott vektorhalmazból egy minimális tartójú vektort elemi vektornak nevezünk.*

23. Definíció. *Legyen $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges lineáris altér, $\mathbf{x}, \mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ vektorok a V altérből. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{x}$ vektor konform módon felbomlik $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ vektorokra, ha*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x} = \mathbf{x}^1 + \ldots \mathbf{x}^k \text{ és} \\
&x_i = 0 \Longrightarrow x_i^1 = \cdots = x_i^k = 0, \\
&x_i > 0 \Longrightarrow x_i^1, \ldots, x_i^k \geq 0, \\
&x_i < 0 \Longrightarrow x_i^1, \ldots, x_i^k \leq 0 \text{ minden } i = 1, \ldots, n\text{-re}
\end{aligned}$$

Tetszőleges lineáris altér esetén teljesül a következő:

65. Lemma. *[Rock96] Legyen V lineáris altér $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor bármely $\mathbf{x} \in V$ felbontható konform módon V $\mathbf{c}^1, \ldots, \mathbf{c}^k$ elemi vektoraira.*

A fenti lemma segítségével megmutatható, hogy ha M nem elégséges, akkor ennek bizonyítéka megadható egy elemi, vagy két elemi vektor összegeként. [FNT98]. A (27). lemma jelöléseit használva:

66. Lemma. *Ha M nem oszlop elégséges (sor elégséges), akkor létezik egy szigorúan előjelváltó (szigorúan előjeltartó) elemi vektor a V altérben ($V^\perp$ alterében), vagy létezik egy szigorúan előjelváltó (szigorúan előjeltartó) $\mathbf{x}$ vektor a V altérben, ($\mathbf{y}$ a $V^\perp$ altérben) mely felírható két komplementáris, elemi vektor összegeként.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy A nem oszlop elégséges. Ekkor V tartalmaz szigorúan előjelfordító vektort, legyen ez $\mathbf{x}$. Az előző lemma értelmében $\mathbf{x}$ konform módon felbomlik elemi vektorok összegére, legyen tehát

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}^1 + \cdots + \mathbf{c}^k.$$

Ha $k \leq 0$ készen vagyunk, a komplementaritás következik a minimális tartókból. Ha $k > 2$ akkor legyen $I = \{i \mid x_i x_{\bar{\imath}} < 0\}$ és legyen $j \in I$. Ekkor van olyan $\mathbf{c} \in \left\{\mathbf{c}^1, \ldots, \mathbf{c}^k\right\}$ elemi vektor, melyre $c_j \neq 0$. Ha $c_j c_{\bar{\jmath}} \leq 0$ akkor $\mathbf{c}$ megfelel a lemma kívánalmainak. Egyébb esetben van olyan $\mathbf{c}' \in \left\{\mathbf{c}^1, \ldots, \mathbf{c}^k\right\}$ melyre $c_{\bar{\jmath}} \neq 0$. Mivel a $\left\{\mathbf{c}^1, \ldots, \mathbf{c}^k\right\}$ az $\mathbf{x}$ konform felbontását adják, ezért $\mathbf{x}' = \mathbf{c} + \mathbf{c}'$ szigorúan előjelfordító a vektor Vtérben, vagyis $\mathbf{c}$ és $\mathbf{c}'$ a keresett két elemi vektor. A komplementaritás ismét következik a tartók minimális voltából. Az az eset mikor M nem sor elégséges analóg módon következik. ■

67. Tétel. *Legyen M $n \times n$-es, nem elégséges mátrix. Ekkor létezik M nem elégséges voltára olyan bizonyíték, melynek mérete polinomiálisan korlátozott az M input méretének függvényében.*

Bizonyítás: Az előző lemma értelmében a bizonyíték M nem elégséges voltára felírható egy elemi vektorként, vagy két elemi vektor összegeként. Minden a V altérbeli ($V^{\perp}$ altérbeli) elemi vektor kifejezhető fundamentális elemi (coelemi) vektoraként egy megfelelő $\bar{M}$ pivot táblának. Az $\bar{M}$-beli együtthatók mérete az M input méretében polinomiálisan korlátozottak. ■

Most már megfogalmazhatjuk az LCP dualitás tételt EP formában: [FNT98]

68. Tétel. *Bármely $M \in \mathbb{Q}^{n\times n}$-es mátrix, és $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n$ esetén legalább az egyik teljesül:*
(1) az LCP feladatnak van $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ megengedett komplementáris megoldása, melynek kódolási mérete az M és $\mathbf{q}$ kódolási méretével polinomiálisan korlátozott.
(2) a DLCP feladatnak van $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ megengedett komplementáris megoldása, melynek kódolási mérete az M és $\mathbf{q}$ kódolási méretével polinomiálisan korlátozott.
(3) az M mátrix nem elégséges, és ennek van olyan bizonyítéka, melynek kódolási mérete az M kódolási méretével polinomiálisan korlátozott.

Bizonyítás: .A módosított criss-cross algoritmus végessége. ■

Fontos kiemelni, hogy az (1) és (2) esetek kizáróak, míg a (3) teljesülhet egyszerre akár az (1) akár a (2) teljesülése mellett is.

7. Az algoritmus

Elsőként a Akkeleş, Balogh és Illés[ABI02] algoritmusának általánosítását tekintjük elégséges mátrixokra. Jelölje $\mathcal{I} := \{u_1, u_2, ..., u_N, v_1, v_2, ..., v_N\} \cup \{q\}$ a változók halmazát, míg $I := \{1, 2, ..., N, \bar{1}, \bar{2}, ..., \bar{N}\} \cup \{q\}$ a megfelelő indexhalmazt, ahol $N = n + m$ és $|\mathcal{I}| = |I| = 2N + 1$. A jelölés egyszerűsítésének érdekében legyen $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ minden $\alpha \in I \setminus \{q\}$-ra, vagyis az $\bar{\alpha}$ komplementáris párja az α.

A kiindulási komplementáris megoldás az $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{q}$. A pivot táblázat mátrixát $\bar{M}$ jelöli. A kiinduló komplementáris megoldásból pivot műveletek során megengedett komplementáris megoldás előállítása a cél. A 34. és 35. lemmák biztosítják, hogy a mátrix elégségessége a pivotálások során megőrződik. Csak olyan pivot műveleteket végzünk, melyek megőrzik az aktuális megoldás komplementaritását. Kétfajta pivot műveletet fogunk végezni: diagonális és felcserélős pivot.

Legyen az algoritmus egy lépésében a v_j változó értéke nem megengedett. Ekkor ha $\bar{m}_{jj} < 0$ akkor diagonális pivotot végzünk, mely során u_j belép a bázisba, míg v_j elhagyja azt.

$$
\begin{array}{c|ccc||c|}
 & & u_j & & \\
\hline
 & & \vdots & & \\
v_j & \dots & - & \dots & - \\
 & & \vdots & & \\
\hline
\end{array}
$$

Diagonális pivot

Ha azonban $\bar{m}_{jj} = 0$, akkor olyan k indexen kell pivotálni, melyre $\bar{m}_{jk} < 0$. Az így kapott megoldás azonban nem lesz komplementáris, így ennek visszaállítására pivotálni kell a (k, j) pozíción. A 29. lemma értelmében ekkor $\bar{m}_{kj} > 0$. A két pivotot együtt felcserélő pivotnak nevezzük.

$$
\begin{array}{c|ccccc||c|}
 & & u_j & & u_k & & \\
\hline
 & & & & \vdots & & \\
v_j & & & & + & & \\
 & & & & \vdots & & \\
v_k & \dots & - & \dots & 0 & \dots & - \\
 & & & & \vdots & & \\
\hline
\end{array}
$$

Felcserélős pivot

Az ábra szerinti helyzetben u_j és u_k belép a bázisba, míg v_j és v_k elhagyja azt. Azt mondjuk, hogy ekkor az u_k, v_k aktívan, míg az u_j, v_j passzívan választott.

A LIFO pivotálási szabályt az [ABI02] cikkben a szerzők egy számláló $\mathbf{s}_r : I \to \mathbb{N}_0^{2N}$ vektor segítségével kezelik:

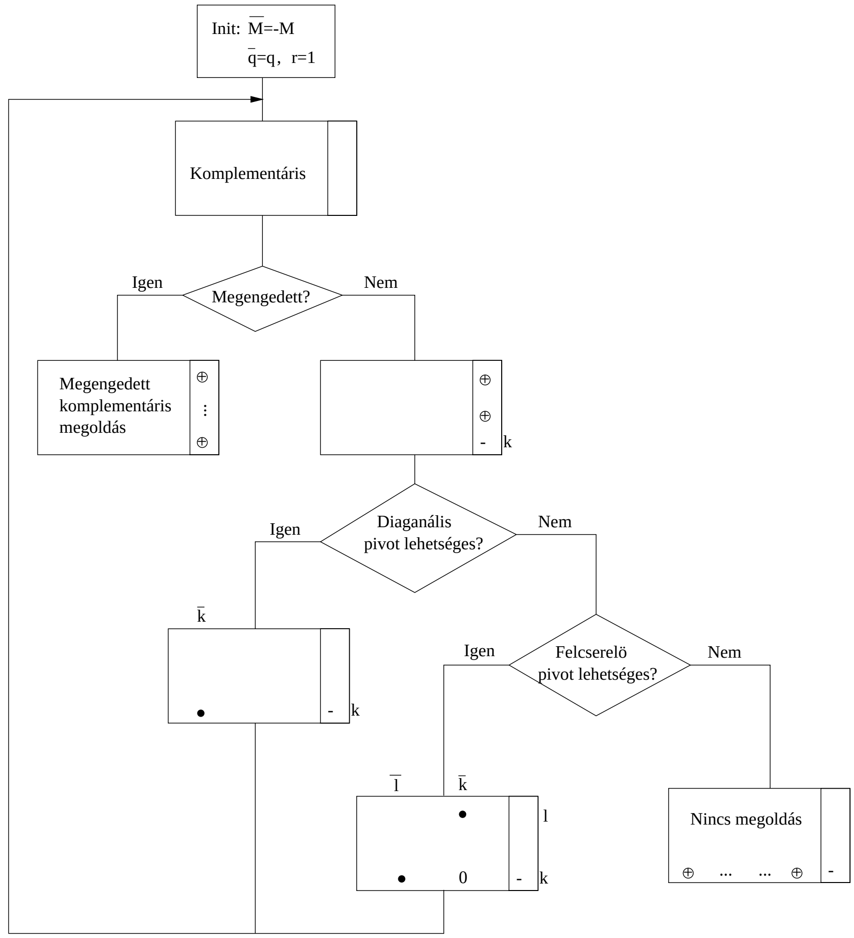
$$
\mathbf{s}_r(\alpha) = \begin{cases} r, & \text{ha az } \alpha \in I \text{ indexelt változó mozog az } r\text{-ik iterációban} \\ \mathbf{s}_{r-1}(\alpha), & \text{egyébként.} \end{cases}
$$

Legyen továbbá $\mathbf{s}_0(\alpha) = 0$ minden $\alpha \in I$-re. Könnyű látni, hogy $\mathbf{s}_r \geq \mathbf{s}_{r-1}$ és $\mathbf{s}_r \neq \mathbf{s}_{r-1}$.

Az algoritmus:

Input:
  Adott az (1) feladat, ahol M elégséges, $\bar{M} := -M$, $\bar{q} := q$, $r := 1$.
Begin
  $J := \{\alpha \in I : \bar{q}_\alpha < 0\}$
  While $(J \neq \emptyset)$ **do**
    $J_{\max} := \{\beta \in J : \mathbf{s}_{r-1}(\beta) \geq \mathbf{s}_{r-1}(\alpha)$, minden $\alpha \in J$-re$\}$
    Legyen $k \in J_{\max}$ tetszőleges
    If $(\bar{m}_{kk} < 0)$ **then**
      diagonális pivot $\bar{m}_{kk}$ elemen
      $\mathbf{s}$ modosítása
      $r := r + 1$
    Else
      $K := \{\alpha \in I : \bar{m}_{k\alpha} < 0\}$
      If $(K = \emptyset)$ **then**
        Stop: Az LCP-nek nincs megengedett megoldása
      Else
        $K_{\max} = \{\beta \in K : \mathbf{s}_{r-1}(\beta) \geq \mathbf{s}_{r-1}(\alpha)$, minden $\alpha \in K$-ra$\}$
        Legyen $l \in K_{\max}$ tetszőleges
        Felcserélős pivot az $\bar{m}_{kl}$ és m_{lk} elemeken
        $\mathbf{s}$ modosítása
        $r := r + 2$
      Endif
    Endf
  EndWhile
Stop: Megengedett és komplementáris megoldást állítottunk elő
End

Az algoritmus a triviális komplementáris megoldásból indul, és mivel csak diagonális illetve felcserélő pivotokat csinál, ezért a komplementaritást meg is őrzi. Lévén a mátrix elégséges, a (29. lemma) biztosítja hogy ha felcserélő pivotra kerül sor, akkor a mátrix megfelelő elemeinek az előjele megfelelő. Az algoritmus csak olyan esetben áll le, ha vagy nincs megoldás, vagy megtalálta azt, elég bizonyítani, hogy véges, vagyis nem ciklizál.



1. ábra. Az algoritmus diagramábrája

7.1. Az ortogonalitási tulajdonság

Akkeleş, Balogh és Illés [ABI02] bizonyítást általánosítjuk elégséges mátrixokra, miközben egyben leegyszerűsítjük azt, lehetővé téve az algoritmus módosítását az EP tételek szellemében. Bizonyításunk jelentős része a jól ismert ortogonalitási tételen alapszik.
Definiáljuk a $\mathbf{t}^{(i)}$, $j \in J_B$ illetve a $\mathbf{t}_j$, $j \in J_N \cup \{q\}$vektorokat a következőképpen:

$$\left(\mathbf{t}^{(i)}\right)_k = \begin{cases} \bar{m}_{ik}, & \text{ha } k \in J_N \cup \{q\} \\ 1, & \text{ha } k = i \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

illetve

$$(\mathbf{t}_j)_k = \begin{cases} \bar{m}_{kj}, & \text{ha } k \in J_B \\ -1, & \text{ha } k = j \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

24. Definíció. *A fent definiált $\mathbf{t}^{(i)}$ vektort fundamentális elemi vektornak, illetve a $\mathbf{t}_j$ vektort fundamentális co-elemi vektornak nevezzük.*

69. Tétel. *Bármely M mátrix esetén, tetszőleges B' illetbe B'' bázisok esetén az $M_{B'}$ mátrixhoz tartozó $\mathbf{t}^{(i)}$ vektorok merőlegesek az $M_{B''}$ mátrixhoz tartozó $\mathbf{t}_j$ vektorokra.*

Bizonyítás: Ha $B' = B''$ akkor az állítás nyilvánvaló:

$\mathbf{t}^{(i)} =$	$0 \quad \dots \quad 0$	1	$* \quad \dots \quad *$	$\bar{m}_{ij}$
	$J_B / \{i\}$	$\{i\}$	$J_N \cup \{q\} / \{j\}$	$\{j\}$
$\mathbf{t}_j =$	$* \quad \dots \quad *$	$\bar{m}_{ij}$	$0 \quad \dots \quad 0$	-1

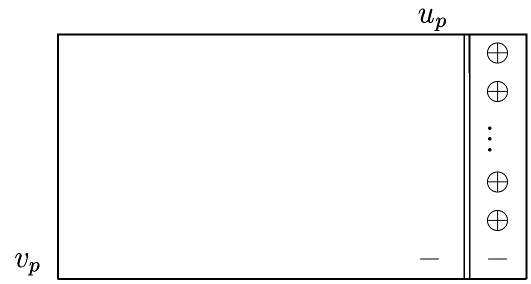
Vagyis a $\mathbf{t}_j$ vektorok merőlegesek az $[M; q; I]$ mátrix sorterére. Felhasználva, hogy bármely két bázis megkapható egymásból pivotálásokkal, és hogy egy elemi pivot során egy mátrix sortere nem változik, a kívánt állítást kapjuk. ∎

7.2. A majdnem leállási táblák

Ezek után rátérhetünk az algoritmus végességének bizonyítására. Tegyük fel, hogy van olyan példa, amelyre az algoritmus nem véges. Mivel a lehetséges bázisok száma véges, $\binom{2n}{n}$ így ez csak úgy lehetséges ha ciklizálás lép fel. Az ilyen példák közül vegyünk egy minimálisat. Egy ilyen probléma esetén a minimalitás miatt egy ciklus során minden változó mozog.

Tekintsünk azt a pillanatot, amikor már minden változó legalább egyszer mozgott. Ekkor már $|J_{\max}| = |K_{\max}| = 1$ minden iterációban, mivel minden pivotálásnál a mozgó változókhoz olyan s értéket rendelünk, mely még nem szerepelt, és azonos értékű változóknak mindig az egyike és csak az egyike van bázisban. Tekintsük az aktuális bázison kívüli változók közül az $\mathbf{s}$-szerinti rendezés alapján legkisebb sorszámút. Legyen r' az az iteráció, mikor ez a változó legközelebb mozog. Ekkor a választási szabály miatt a bázisban levő elemek közül még mindig ezen változó $\mathbf{s}$ szerinti értéke a legkisebb. Az r' iterációhoz tartozó bázis legyen a B'. Az állapothoz tartozó rövid pivot táblák a következők lehetnek feltéve, hogy a legkisebb $\mathbf{s}$ értékű változó az u_p, mely éppen belépni készül a bázisba:

1. Az algoritmus kiválasztja az u_p változót a bázisba való belépésre, $\bar{m}_{pp} < 0$ vagyis diagonális pivot lehetséges: u_p bekerül a bázisba, míg v_p elhagyja azt.

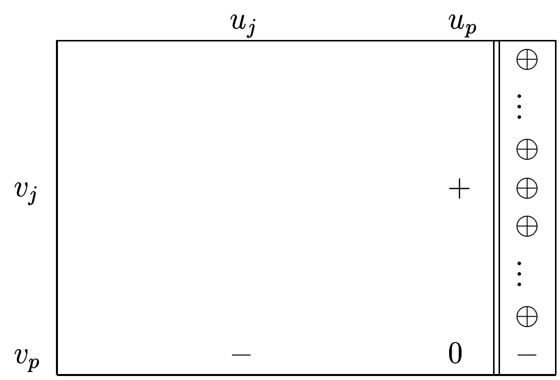


(T1)

A $\mathbf{q}$ oszlopában csak a v_p sorában szerepelhet negatív elem, vagyis $\mathbf{s}_{r'-1}(\bar{p})$ minimális, így a választási szabály miatt ha lenne más negatív elem is, akkor azt kellene választanunk.

$$\mathbf{s}_{r'}(\alpha) = \begin{cases} r', & \text{ha } \alpha \in \{p, \bar{p}\}, \\ \mathbf{s}_{r'-1}(\alpha), & \text{egyébként} \end{cases}$$

2. Az algoritmus kiválasztja u_p változót a bázisba való belépésre, de $\bar{m}_{pp} = 0$, vagyis felcserélő pivot szükséges. Az u_p és u_j változók belépnek a bázisba, míg a v_p és v_j változók elhagyják azt.



(T2)

A $\mathbf{q}$ oszlopa azonos az előző esettel. Ebben az esetben nem lényeges, hogy u_j vagy v_j van-e a bázisban. Mi azt az esetet vizsgáljuk mikor v_j van a bázisban. A másik esetben csupán az $\mathbf{s}_{r'+1}(\alpha)$ definíciójában kell a j és $\bar{j}$ szerepét felcserélni.

$$\mathbf{s}_{r'+1}(\alpha) = \begin{cases} r', & \text{ha } \alpha \in \{\bar{p}, j\}, \\ r'+1, & \text{ha } \alpha \in \{p, \bar{j}\}, \\ \mathbf{s}_{r'-1}(\alpha), & \text{egyébként} \end{cases}$$

3. Az algoritmus egy u_j változót választ a bázisba való belépésre, de $\bar{m}_{jj} = 0$, így felcserélős pivotra van szükség, és az algoritmus kiválasztja az u_p változót is.

$$\begin{array}{c|ccc|c||c|}
 & & u_p & & u_j & \\ \hline
 & & & & \ominus & \\
 & & & & \vdots & \\
 & & & & \ominus & \\
v_p & & & & + & \\
 & & & & \ominus & \\
 & & & & \vdots & \\
 & & & & \ominus & \\ \hline
v_j & \oplus\cdots\oplus & - & \oplus\cdots\oplus & 0 & - \\ \hline
\end{array} \qquad \textbf{(T3)}$$

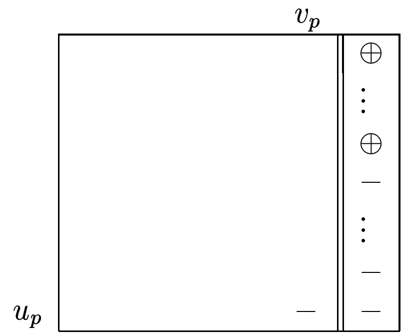
A választási szabály értelmében v_j sorában csak az u_p és a $\mathbf{q}$ oszlopában lehet negatív elem, és lévén
$\bar{m}_{jj} = 0$, így a 29. lemma alapján az u_j oszlopa a v_j sorának segítségével kitölthető. Ebben az esetben sem lényeges, hogy u_j vagy v_j van-e a bázisban. Mi azt az esetet vizsgáljuk mikor v_j van a bázisban, a másik esetben csupán az $\mathbf{s}_{r'+1}(\alpha)$ definíciójában kell a j és $\bar{j}$ szerepét felcserélni.

$$\mathbf{s}_{r'+1}(\alpha) = \begin{cases} r', & \text{ha } \alpha \in \{p, \bar{j}\}, \\ r'+1, & \text{ha } \alpha \in \{\bar{p}, j\}, \\ \mathbf{s}_{r'-1}(\alpha), & \text{egyébként} \end{cases}$$

A későbbiek miatt érdemes megfigyelni, hogy az 1. és 2. esetekben csak az algoritmus választási szabálya befolyásolta döntésünket, míg a 3. esetben kihasználtuk a mátrixunk elégséges az u_j oszlopának kitöltésekor.

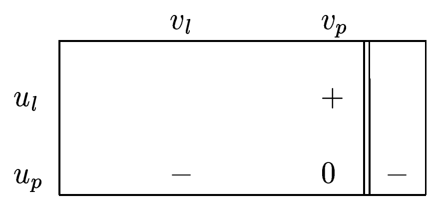
Most tekintsük azt a pillanatot, mikor az u_p újra elhagyja a bázist. Az ehhez az állapothoz tartozó bázist jelölje B''. A rövid pivot tábla a következő háromféle formát öltheti fel:

A. Az algoritmus kiválasztja az u_p változót a bázis elhagyására, $\bar{m}_{pp} < 0$, vagyis diagonális pivot lehetséges.



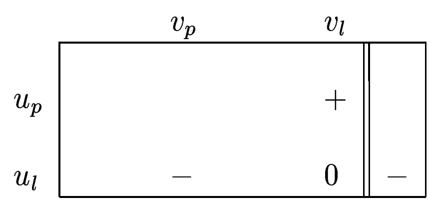
(**A**)

B. Az algoritmus kiválasztja az u_p változót a bázis elhagyására, de $\bar{m}_{pp} = 0$ vagyis felcserélős pivotra van szükség: v_l (vagy u_l) belép a bázisba, míg u_l(vagy v_l) elhagyja azt.



(**B**)

C. A algoritmus az u_l(vagy v_l) változót választja, de $m_{ll} = 0$ így felcserélős pivotra van szükség, és v_p belép a bázisba, míg u_l elhagyja azt.



(**C**)

A következőkben megmutatjuk, hogy ha M elégséges, akkor a (**T1**-**T3**) táblák egyikét sem követheti az (**A**-**C**) táblák valamelyike. A későbbi algoritmus érdekében külön figyelmet fordítunk arra, hogy a kizárhatóság hogyan függ a mátrix elégségességétől.

7.3. Segédtételek

A következőkben megmutatjuk hogy a ($\mathbf{T1} - \mathbf{T3}$) táblák egyikét sem követheti az ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$) táblák egyike sem. Előbb azon eseteket bizonyítjuk, melyek nem használják az LCP feladat mátrixának elégségességét.

Először megmutatjuk, hogy a (**T3**) táblát nem követheti az (**A**) illetve (**B**) táblák egyike sem.

70. Lemma. *Tekintsük a $\mathbf{t}'^{(\bar{j})}$ és $\mathbf{t}''_q$ vektorokat, melyek rendre a $\mathbf{v}_j$ sorához az $M_{B'}$ben, illetve a* **q** *oszlopához tartoznak az $M_{B''}$ táblákban, ahol B' a* (**T3**), *B'' pedig az* (**A**) *vagy a* (**B**) *táblák valamelyikéhez tartozik. Ekkor*

$$(\mathbf{t}'^{(\bar{j})})^T \mathbf{t}''_q > 0$$

Bizonyítás: Az előző lemmához hasonlóan legyen

$$J'' := \{ \alpha \in J_{B''} \ : \ \bar{q}''_i < 0 \},$$

és ekkor az s vektor miatt ismét $J'' \subset J_{B'}$ és így $\mathbf{t}'_{\bar{j}i} = 0$ minden $i \in J'' \setminus \{\bar{j}, p\}$ indexre, vagyis

$$\sum_{i \in J'' \setminus \{\bar{j}, p\}} t_{\bar{j}i} t''_{iq} = 0, \tag{15}$$

Figyelembe véve hogy $\mathbf{s}_{r'}(\bar{j}) = \mathbf{s}_{r'}(p)$ és $\mathbf{s}_{r''-1}(j) > \mathbf{s}_{r''-1}(p)$ tudjuk, hogy t''_{jq} és $t''_{\bar{j}q}$ nem negatívak. A **T3** tábláól leolvashatjuk hogy

$$t'_{\bar{j}j} = 0, \ t'_{\bar{j}\bar{j}} = 1, \ t'_{\bar{j}\bar{p}} = 0, \ t'_{\bar{j}p} < 0 \text{ és } t'_{\bar{j}q} < 0,$$

így

$$t'_{\bar{j}\bar{j}}\, t''_{\bar{j}q} + t'_{\bar{j}j} t''_{jq} + t'_{\bar{j}\bar{p}} t''_{\bar{p}q} + t'_{\bar{j}p}\, t''_{pq} + t'_{\bar{j}q}\, t''_{qq} t'_{\bar{j}p} t''_{pq} - t'_{\bar{j}q} > 0, \tag{16}$$

lévén $t''_{qq} = -1$ definíció szerint, és $t''_{pq} < 0$ az algoritmus választási szabályának értelmében, (**A** és **B** táblák).

Ha továbbá $l \notin J'' \cup \{j, \bar{j}, p, \bar{p}, q\}$ akkor ismét az ábráról leolvasható, hogy $t'_{\bar{j}l} \geq 0$ és J'' definíciója szerint $t''_{lq} \geq 0$ vagyis

$$\sum_{l \notin J \cup \{j, \bar{j}, p, \bar{p}, q\}} t'_{\bar{j}l}\, t''_{lq} \geq 0. \tag{17}$$

Összeadva a (15)-(17) egyenlőtlenségeket éppen az állításunkat kapjuk. ■

Figyeljük meg, hogy a (**T3**) táblából a v_j sorát tekintettük, míg az (**A**) és (**B**) tábláknál eredetileg sem használtuk ki a mátrix elégségességét, és így a lemma csak a választási szabályt használja: A (**T3**&**A**v.**B**) esetek kizáróak függetlenül a mátrix elégségességétől.

Következő segédállításunk értelmében a (**T1**) és (**T2**) táblákat nem követheti a (**C**) tábla.

71. Lemma. *Tekintsük a $\mathbf{t}'_q$ és $\mathbf{t}''^{(l)}$ vektorokat, melyek rendre az $M_{B'}$* **q**-*hoz tartozó oszlopához, illetve $M_{B''}$ u_l sorához tartoznak, ahol B' a* (**T1**) *vagy* (**T2**) *táblák valamelyikéhez, míg B'' a* (**C**) *táblához tartozik. Ekkor*

$$(\mathbf{t}''^{(l)})^T \mathbf{t}'_q > 0$$

Bizonyítás: Az előző lemmához hasonlóan

$$J_l'' := \{i \in I_{N''} : t_{li}'' < 0\} \subset I_{N'}$$

így $t_{iq}' = 0$ minden $i \in J_l''$ indexre, és emiatt

$$\sum_{i \in J_l''} t_{li}'' t_{iq}' = 0. \tag{18}$$

Továbbá minden $j \notin J_2 := J_l'' \cup \{\bar{l}, l, \bar{p}, p, q\}$ indexre $\mathbf{t}_{lj}'' \geq 0$ és $\mathbf{t}_{jq}' \geq 0$, így

$$\sum_{j \notin J_2} t_{lj}''\ t_{jq}' \geq 0. \tag{19}$$

Az $M_{B'}$ és $M_{B''}$ táblákról leolvasható, hogy

$$t_{qq}' = -1,\ t_{ll}'' = 1,\ t_{l\bar{l}}'' = t_{lp}'' = t_{pq}' = 0$$

továbbá,

$$t_{l\bar{p}}'' < 0,\ t_{lq}'' < 0,\ t_{\bar{p}q}' < 0,\ t_{\bar{l}q}' \geq 0 \ \textit{és}\ t_{lq}' \geq 0$$

így

$$\begin{aligned} & t_{l\bar{l}}'' t_{\bar{l}q}' + t_{ll}'' t_{lq}' + t_{l\bar{p}}'' t_{\bar{p}q}' + t_{lp}'' t_{pq}' + t_{lq}'' t_{qq}' \\ = \quad & t_{lq}' + t_{l\bar{p}}'' t_{\bar{p}q}' - t_{lq}'' \geq t_{l\bar{p}}'' t_{\bar{p}q}' - t_{lq}'' > 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Összeadva (18) – (20)-et a kívánt állítást kapjuk. ■

A későbbiek érdekében megjegyezzük, hogy a lemma esete a szerencsések közé tartozik, vagyis a kizárhatóság csupán a választási szabályokból következik, és nem használja ki a tábla elégségességét is.

A többi eset vizsgálatánál ki fogjuk használni a feladat mátrixának elégségességét.

A következő lemma mutatja, hogy a (**T1**) illetve (**T2**) táblákat nem követheti az (**A**) vagy (**B**) tábla.

72. Lemma. *Tekintsük a* $(\mathbf{u}', \mathbf{v}')$ *és* $(\mathbf{u}'', \mathbf{v}'')$, *a* B' *illetve* B'' *bázisokhoz tartozó komplementáris megoldásokat, ahol* B' *a* (**T1**) *vagy* (**T2**), B'' *pedig az* (**A**) *vagy* (**B**) *táblák valamelyikéhez tartozik. Ekkor*

$$(\mathbf{u}' - \mathbf{u}'') \cdot M(\mathbf{u}' - \mathbf{u}'') \lneq 0$$

Bizonyítás: Mind a négy esetet egyszerre bizonyíthatjuk. Tekintsük a B' és B'' bázisokhoz tartozó $(\mathbf{u}', \mathbf{v}')$ és $(\mathbf{u}'', \mathbf{v}'')$ komplementáris megoldásokat. Bizonyításunk a következő észrevételen alapszik:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}'') \cdot M(\mathbf{u}' - \mathbf{u}'') &= (\mathbf{u}' - \mathbf{u}'') \cdot (\mathbf{q} + M\mathbf{u}' - \mathbf{q} - M\mathbf{u}'') \\ &= (\mathbf{u}' - \mathbf{u}'') \cdot (\mathbf{v}' - \mathbf{v}'') \\ &= \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}' - \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'' - \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{v}'' \\ &= -\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'' - \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{v}'\end{aligned}$$

Jelölje $J'' := \{\, \alpha \in J_{B''} \; : \; \bar{q}_i'' < 0 \,\}$. A választási szabály miatt $\mathbf{s}_{r''}(p) > \mathbf{s}_{r''}(\alpha)$ bármely $\alpha \in J'' \setminus \{p\}$ indexre, így ezen indexek nem mozogtak B' óta, vagyis $\alpha \in J_{B'}$, és így $\forall i \in J'' \setminus \{p\}$ indexre (u_i' vagy v_i'') illetve (u_i'' vagy v_i') értéke nulla:

$$u_i' \, v_i'' + u_i'' \, v_i' = 0 \tag{21}$$

A **T1**,**T2** illetve az **A**,**B** táblákból leolvasható, hogy

$$u_p' = 0,\; v_p' < 0 \text{ és } u_p'' < 0,\; v_p'' = 0$$

vagyis

$$u_p' \, v_p'' + u_p'' \, v_p' > 0, \tag{22}$$

Továbbá minden $j \notin J''$ indexre $u_j', v_j', u_j'', v_j'' \geq 0$ és emiatt

$$u_j' \, v_j'' + u_j'' \, v_j' \geq 0. \tag{23}$$

Összefoglalva az $(\mathbf{u}' - \mathbf{u}'')$ vektor olyan, hogy $(\mathbf{u}' - \mathbf{u}'') \cdot M(\mathbf{u}' - \mathbf{u}'') \lneq 0$. ∎

8. Megjegyzés. *Fontos megjegyezni hogy a bizonyítás konstruktív: A B' illetve B'' bázisokból az M nem elégségességét bizonyító $\mathbf{u}' - \mathbf{u}''$ vektor könnyedén meghatározható.*

A utolsó segédállításunk értelmében a (**T3**) táblát nem követheti a (**C**) tábla.

73. Lemma. *Tekintsük a $\mathbf{t}_j'$ és $\mathbf{t}''^{(l)}$ vektorokat, melyek az $M_{B'}$ u_j oszlopához, illetve az $M_{B''}$ u_l sorához tartoznak, ahol B' a (**T3**), B'' pedig a (**C**) táblához tartozik. Ekkor*

$$(\mathbf{t}''^{(l)})^T \, \mathbf{t}_j' < 0$$

Bizonyítás: Jelölje $J_l'' = \{i \in I_{N''} : t_{li}'' < 0\} \setminus \{j\}$. Mivel tábláink komplementárisak, és a választási szabály szerint mindig azt a változót választjuk a lehetségesek közül, mely a legkevésbé régen mozgott, így a J_l'' indexeihez tarozó változók az $M_{B'}$ óta nem mozogtak, így $\bar{J}_l'' \subset I_{B'}$ és $J_l'' \subset I_{N'}$, és így $t_{ij}' = 0$ ha $i \in J_l''$. Összefoglalva

$$\sum_{i \in J_l'' \cup \{q\}} t_{li}'' t_{ij}' = 0. \tag{24}$$

Továbbá ha $i \notin J_1 := J_l^{''} \cup \{q, p, \bar{p}, j, \bar{j}, l, \bar{l}\}$ akkor $t_{ij}' \leq 0$ a **T3** ábra alapján, továbbá $J_l^{''}$ definíciója alapján $t_{li}'' \geq 0$ és így

$$\sum_{i \notin J_1} t_{li}'' t_{ij}' \leq 0, \tag{25}$$

Az $M_{B'}$ és $M_{B''}$ tábláiból, és definíció miatt

$$t_{l\bar{l}}'' = t_{\bar{j}j}' = t_{qj}' = 0, \; t_{ll}'' = 1, \; t_{jj}' = -1 \; és \; t_{lj}' \leq 0, \; t_{lp}'' < 0, \; t_{pj}' > 0$$

így

$$t_{lq}'' t_{qj}' + t_{lp}'' t_{pj}' + t_{l\bar{p}}'' t_{\bar{p}j}' + t_{lj}'' t_{jj}' + t_{l\bar{j}}'' t_{\bar{j}j}' + t_{ll}'' t_{lj}' + t_{l\bar{l}}'' t_{\bar{l}j}' < -t_{lj}'' \tag{26}$$

Hátra van még hogy megmutassuk, $t_{lj}'' \geq 0$. A $B^{'}$ bázissal, a (**T3**) tábla esetében felcserélő pivotot csinálunk, definíció szerint $\mathbf{s}_{r'}(\bar{j}) = \mathbf{s}_{r'}(p) = r'$ és $\mathbf{s}_{r'+1}(j) = \mathbf{s}_{r'+1}(\bar{p}) = r' + 1$. Az $M_{B''}$ tábla esetén $J_{max}'' = \{\bar{p}\}$. Mivel a tábla komplementáris, így két eset lehetséges:

Ha $j \in I_{N''}$ akkor az u_j az $(r^{'} + 1)$ és a $r^{''}$ iterációk között mozog, így $\mathbf{s}_{r''}(j) > \mathbf{s}_{r''}(\bar{p})$, és ez a választási szabály szerint csak úgy lehetséges, ha $\mathbf{t}_{lj}'' \geq 0$.

Ha $j \in I_{B''}$, akkor $t_{lj}'' = 0$.

Összeadva (24) – (26)-et a kívánt állítást kapjuk. ∎

Az előző lemma bizonyításakor a (**T3**) tábla szerkezeténél kihasználtuk a tábla elégségességét.

7.4. Végesség

74. Tétel. *Az algoritmus véges.*

Bizonyítás:

Bizonyításunk indirekt. Láttuk, hogy ha az algoritmus nem véges, akkor szükségszerűen ciklizál.

Tekintsük a fejezet elején említett minimális ellenpéldát. Ebben minden változó mozog egy ciklus során, a lemmák tanúlsága szerint azonban miután az u_p a B' bázis után belép, utána már nem léphet ki a bázisból:

Ha a (**T1**) vagy (**T2**) szerinti esetben lép be, majd az (**A**) vagy (**B**) szerinti esetben távozik a bázisnól, akkor a 72. lemma ellentmond az M mátrix elégségességének.

Ha a (**T3**) szerinti esetben lép be, majd az (**A**) vagy (**B**) szerinti esetben távozik a bázisból, akkor a 70. lemma ellentmond az ortogonalitási tulajdonságnak.

Ha a (**T3**) szerinti esetben lép be, majd a (**C**) szerinti esetben távozik a bázisnól, akkor a 73. lemma ellentmond az ortogonalitási tulajdonságnak.

Ha a (**T3**) vagy (**T2**) szerinti esetben lép be, majd a (**C**) esetben távozik a bázisnól, akkor a 70. lemma ellentmond az ortogonalitási tulajdonságnak.

Minden lehetséges eset ellentmondásra vezet, így állításunkat beláttuk.

■

A következő táblázat mutatja, hogy mely esetekben használtuk ki az M mátrix elégségességét:

	1	**2**	**3**
A	$*$	$*$	
B	$*$	$*$	
C			$*$

8. A módosított algoritmus

Következő célunk az algoritmust az EP tételek szellemében kiegészíteni. A gyakorlati alkalmazások esetén nem célszerű ha az algoritmus az input adatokról előre feltételez nehezen ellenőrizhető tulajdonságokat. Az elégségesség ilyen tulajdonság, jelenleg nem ismeretes ellenőrzésére hatékony algoritmus. Tehát az algoritmust úgy módosítjuk, hogy vagy megoldja a kitűzött (LCP) feladatot vagy a duálisát, vagy kimutatja hogy a bemeneti mátrix nem elégséges, és ennek polinomiális méretű bizonyítékát szolgáltatja.

A 29. lemma biztosítja, hogy ha a mátrix elégséges, akkor a pivotálási műveletek mindig elvégezhetőek, ha pedig nem, akkor megadja a kívánt bizonyítékot arra, hogy az M mátrix nem elégséges.

Hátravan annak vizsgálata, hogyan követjük nyomon a ciklizálás elkerülését.

8.1. A ciklizálás elkerülése

Vegyük észre, hogy az eredeti algoritmus végességének bizonyításában valójában nem lényeges hogy a ciklizáló példa minimális. Tekintsünk ugyanis egy tetszőleges ciklizáló példát. Legyen a ciklusban résztvevő változók indexeinek halmaza R. Tekintsünk egy olyan pillanatot, mikor már elkezdődött a ciklizálás, minden a ciklizálásban résztvevő változó már mozgott, és a ciklus során az algoritmus olyan változót választ a bázisba való belépésre, melynek az R bázison kívüli változói közül a legkisebb az $\mathbf{s}$ értéke. Ehhez a pillanathoz tartozó bázist jelölje $B^{'}$, és legyen a legkisebb $\mathbf{s}$ értékű, az R halmazbeli belépő változó az u_p. Jelölje $B^{''}$ azt a bázist, mikor az u_p legközelebb mozog. Ekkor $M_{B'}$ illetve $M_{B''}$ szerkezete az R indexű változókra illetve a $\mathbf{q}$ vektorra megszorítva pontosan az (**T1**,**T2**,**T3**) illetve (**A**,**B**,**C**) féle lehet. A két állapot között nem R indexhalmazokba tartozó változó nem mozgott, így az 70,71,73 lemmák esetében a fundamentális elemi vektorok szorzatában az R illetve q indexein kívül pontosan az egyik tag van a bázisban, tehát ezen indexekhez a szorzatban mindíg nulla fog tartozni. Ugyanezen okból az 72. lemma $-\mathbf{u}^{'} \cdot \mathbf{v}^{''} - \mathbf{u}^{''} \cdot \mathbf{v}^{'}$ szorzatában az R halmazon kívüli indexeken nullák lesznek. Vagyis a bizonyítások átmenthetők általános ciklizáló példára is.

8.2. Az elégségesség hiányának kezelése

Idézzük fel, hogy az elégségességet az 72. lemma, illetve a 73. lemma esetében használtuk ki. Ez utóbbi, az elégségességgel járó, a 29. lemmára alapuló előjelszerkezetet használta. Tehát ha az algoritmus minden felcserélő pivot esetén ((**T3**) és (**C**) ilyen esetekhez tartoznak) ellenőrzi az előjelszerkezet meglétét, akkor az ortogonalitási tétel miatt a (**T3**) táblát nem követheti (**C**) tábla. Ha bárhol sérül az előjelszerkezet, M nem elégséges voltára a kívánt bizonyítékot ugyanez a lemma biztosítja.

Marad a (**T1**) és (**T2**), illetve az (**A**) és (**B**) táblák esete. A 72. lemma a

$$-\mathbf{u}^{'} \cdot \mathbf{v}^{''} - \mathbf{u}^{''} \cdot \mathbf{v}^{'} \tag{27}$$

alakú vektorok nem szigorúan előjelfordító voltán alapszik olyan $M_{B'}$ és $M_{B''}$ táblák esetén, ahol ugyanazon változó mozog mindkét pivot során, és mindkét esetben a vizsgált változó az aktívan választott (vagyis nem a felcserélős pivot második változója). Érdemes megfigyelni, hogy nincs szükség a teljes táblára, elegendő annak a $\mathbf{q}$ vektorhoz tartozó oszlopa (vagyis az aktuális megoldás), illetve a bázisban levő indexek halmaza. Amennyiben a (27) vektor szigorúan előjelfordító, akkor a 72. lemma utáni megjegyzés értelmében az LCP feladat mátrixának nem elégséges voltára a bizonyíték az $\mathbf{u}^{'} - \mathbf{u}^{''}$ vektor.

Vezessünk be egy $Q(p)$ $(p = 1, \ldots, n)$ listát. A lista minden indexéhez két n dimenziós vektor tartozik. Induláskor legyen mindkét vektor minden p

indexre nulla:

$$Q(p) := \begin{bmatrix} [1, \ldots, n] \\ [0, \ldots, 0] \end{bmatrix} \quad p = 1, \ldots, n$$

Mikor egy u_l vagy v_l változó egy pivot során távozik a bázisból, mely során vagy diagonális pivothoz tartozik, vagy olyan felcserélőshöz, melyben ő passzív (az ő $\mathbf{s}$ értékét vizsgálta az algoritmus), a $Q(l)$ értékét úgy módosítjuk, hogy az első vektorba az u_l vagy v_l változó bázisból való kilépése előtti bázisváltozók indexeit, míg a második vektorba az u_l vagy v_l változó bázisból való kilépése előtti bázisváltozók értét írjuk, vagyis

$$Q(l) := \begin{bmatrix} [\text{bázisváltozók indexei}] \\ [\text{bázisváltozók aktuális értéke}] \end{bmatrix}$$

Ha az u_l vagy v_l változó passzív módon (felcserélős pivot esetén, a diagonális érték nulla volta miatt) lép be a bázisba, akkor módosítsuk a $Q(l)$ értéket a következőképpen:

$$Q(l) := \begin{bmatrix} [1, \ldots, n] \\ [0, \ldots, 0] \end{bmatrix}$$

Az algoritmus mikor a báziscseréhez ér, megnézi, hogy az aktívan belépő változó előző kilépésekor is aktívan választotta vagy sem. Ha igen, a Q lista segítségével ellenőrzi a (27) vektort, majd csak ezután módosítja a Q listát. Mivel a komplementáris változók pivot műveletek során egyszerre mozognak, így nem szükséges külön helyet fenntartani számukra a Q listában.

Technikailag érdemes megfigyelni, hogy a Q kezdeti, illetve a felcserélős pivot esetén a passzív változókra beállított értéke miatt elegendő minden pivot esetén ellenőrizni a (27) szorzatot, a nem $(\mathbf{T1}, \mathbf{T2})$ illetve $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ esetekben a szorzat automatikusan nulla lesz.

Természetesen nem lenne szükséges a Q listát minden esetben kitölteni, így az algoritmus minimális módosításával tárhelyet lehet spórolni. Megfigyelhető továbbá, hogy ekkor a legrosszabb esetben a Q lista tárigénye n^2 egész és n^2 lebegőpontos szám tárigényével azonos.

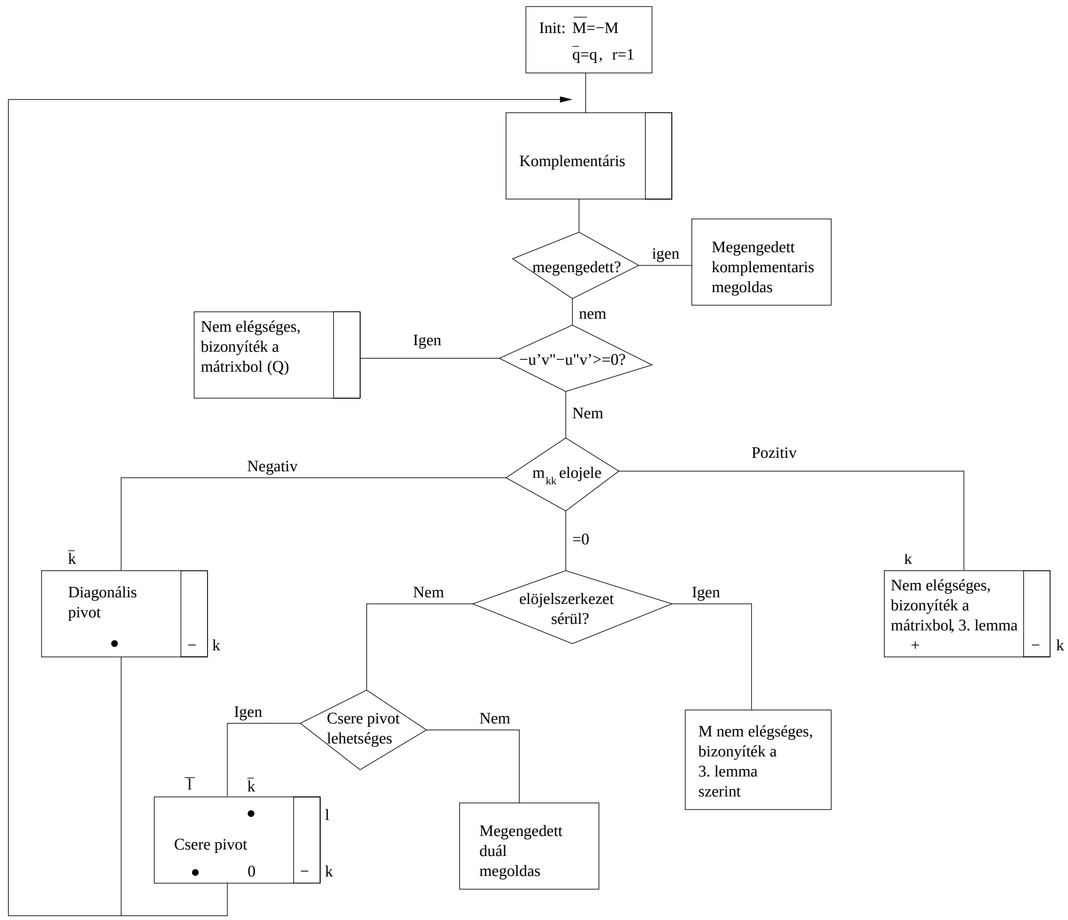
Egy $Q(j) = [\{I\}, \{\mathbf{h}\}]$ alakú értékadás alatt azt értjük, hogy a j. indexhez tartozó Q értékben a bázisváltozók indxeinek helyére az I indxeket, a $\mathbf{q}$ vektorhoz tartozó értékek helyére pedig a $\mathbf{h}$ vektort írjuk.

8.3. Az algoritmus

Most már megfogalmazhatjuk a módosított algoritmust.

A modosított algoritmus:

Input
Adott az (1) feladat. $\bar{M} = -M$, $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$, $r = 1$, Q inicializálása
Begin
While $((J := \{\alpha \in I : \bar{\mathbf{q}}_\alpha < 0\}) \neq \emptyset)$ **do**
$J_{\max} := \{\beta \in J : \mathbf{s}_{r-1}(\beta) \geq \mathbf{s}_{r-1}(\alpha)$, minden $\alpha \in J$-re$\}$
Legyen $k \in J_{\max}$ tetszőleges
Ellenőrizendő a $-\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'' - \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{v}'$ az elmentett $Q(k)$ segítségével:
If $(-\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'' - \mathbf{u}'' \cdot \mathbf{v}' \lneqq \mathbf{0})$ **then**
Stop: M nem elégséges, bizonyíték az $\mathbf{u}' - \mathbf{u}''$
Endif
If $(\bar{m}_{kk} < 0)$ **then**
diagonális pivot az $\bar{m}_{kk}$ értéken
$Q(k) = [J_B, \bar{\mathbf{m}}_q]$, $r := r + 1$
ElseIf $(\bar{m}_{kk} > 0)$
Stop: M nem elégséges, bizonyíték mint a 29. lemmában
Else /* $\bar{m}_{kk} = 0$ */
$K := \{\alpha \in I : \bar{m}_{k\alpha} < 0\}$
If $(K = \emptyset)$ **then**
Stop: DLCP megoldás //lásd megjegyzés
Else
$K_{\max} = \{\beta \in K : \mathbf{s}_{r-1}(\beta) \geq \mathbf{s}_{r-1}(\alpha)$, minden $\alpha \in K$-ra$\}$
Legyen $l \in K_{\max}$ tetszőleges
If ($\mathbf{m}_k$ és $\mathbf{m}^k$ vagy $\mathbf{m}_l$ és $\mathbf{m}^l$ előjelszerkezete sérűl) **then**
Stop: M nem elégséges, bizonyíték mint a 29. lemmában
Endif
Felcserélő pivot az $\bar{m}_{kl}$ és az $\bar{m}_{lk}$ számokon, $\mathbf{s}$ modosítása
$Q(k) = [\emptyset\,[J_B, \bar{\mathbf{m}}_q]]$, $Q(l) = [\emptyset, \mathbf{0}]$, $r := r + 2$
Endif
Endif
EndWhile
Stop: Megengedett és komplementáris megoldást állítottunk elő
End



2. ábra. A módosított algoritmus diagramábrája

Ha a duál oldalról tekintjük a feladatot, akkor kiindulási mátrixunk a

$$\boxed{\begin{matrix} \mathbf{q}^T & \mathbf{0}^T \\ -M^T & I \end{matrix}}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) + \boxed{\begin{matrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{matrix}} r = \mathbf{0}$$

rendszer, ahol az algoritmus indulásánál az $\mathbf{y}$ és a $r \in \mathbb{R}$ van bázisban. Az r az algoritmus során a bázisban maradt. Az algoritmus a /*/ esetben olyan sort határoz meg, mely a duál esetben egy olyan oszlopnak felel meg, melyben a bázisban levő v együtthatója szigorúan kisebb mint nulla, a többi komponens pedig nem pozitív. Legyen ez az oszlop (a primál sor) a $(\mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ Egy oldalra rendezve, illetve a bázison kívüli elemek helyén nullákkal kiegészítve olyan vektort kapunk, melyre

$$\boxed{\begin{matrix} \mathbf{q}^T & \mathbf{0}^T \\ -M^T & I \end{matrix}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \boxed{\begin{matrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{matrix}} v = \mathbf{0}$$

A $v < 0$ val leosztva a duál feladat egy megoldását kapjuk.

9. Összefoglalás

Áttekintettük az LCP feladatok vizsgálatánál felmerülő főbb mátrixosztályokat. A hangsúlyt azokra a mátrixosztályokra fektettük, melyek elsősorban a megoldáshalmaz tulajdonságaira, illetve a criss-cross típusú illetve belsőpontos algoritmusokra vanak hatással.

Arif A. Akkeleş, L. Balogh and T. Illés [ABI02] új tipusú LCP criss-cross algoritmusait általánosítottuk elégséges mátrixok esetére. A végesség bizonyítását az általánosítás mellett leegyszerűsítettük. Az elégséges mátrixokra általánosított algoritmust a jobb gyakorlati alkalmazhatóság érdekében kiegészítettük olymódon, hogy ne kelljen előre feltételezni a bemeneti mátrix elégségességét. Ha az elégségesség hiánya miatt az algoritmus nem tudja biztosítani a végességet, akkor leáll és polinomiálisan korlátozott méretű bizonyítékot ad az input mátrix nem elégséges voltára. Célunkat a lineáris komplementaritási feldatok dualitástétel [FT92] EP tétel [FNT98] formájának felhasználásával értük el. Az algoritmus Akkeleşék új típusú pivotálási szabályainak köszönhetően, főleg az első báziscserék esetén jelentős választási szabadságot biztosítanak, lehetővé téve esetlegesen felmerülő numerikusan instabil báziscserék elkerülését.

Hasonlóan a leírt LIFO (last in - forst out : utoljára bekerülő - először kikerülő) pivotálási szabályhoz, ugyanígy bizonyítható, illetve általánosítható a leggyakrabban választott változó pivotálási szabály is. Ehhez mindössze az $\mathbf{s}$ vektort kell másként definiálni, például

$$\mathbf{s}_r(\alpha) = \begin{cases} \mathbf{s}_{r-1}(\alpha) + 1, & \text{ha } \alpha \in I \text{ mozog az } r.\text{-ik iterációban} \\ \mathbf{s}_{r-1}(\alpha), & \text{egyébként} \end{cases}$$

Az algoritmus elején jelentős szabadsági fokunk van az infizibilis változók kiválasztásakor, később azonban rögzül a változók választási sorrendje.

Az $\mathbf{s}$ vektor segítségével a minimálindexes választási szabály mint speciális eset leírható, és a bizonyítások változatlanul működnek. Rögzítsük ehhez az $\mathbf{s}$ vektort a következő módon: $\mathbf{s}_r(i) = i$ minden iterációban minden $i \in I$-re. Ekkor a bizonyítások jelentősen leegyszerűsödnek.

Az elégséges mátrixokra általánosított criss-cross algoritmus végessége új, konstruktív bizonyítást ad az LCP dualitás tételre. Az módosított criss-cross algoritmus végessége pedig annak EP tétel formályában vett általánosítására konstruktív bizonyíték.

Hivatkozások

[ABI02] Arif A. Akkeleş, L. Balogh and T. Illés, *New variants of the criss-cross method for linearly constrainde convex quadratic programming.* Benyújtva: EJOR (2002)

[CE] K. Cameron, J. Edmonds, *Existentially polytime theorems,* in: W. Cook, P.D. Seymour (Eds.), Polyhedral Combinatorics, DIMACS Ser.

[Ch90] S. J. Chung, *NP-Completness of the Linear Complementary Problem*, Journal of Optimization Theory and Applications: Vol. 60, No. 3, (1989)

[Cot90] R. W. Cottle, *The principal pivoting method revisited*, Math Programming 48:369-386 (1990)

[CG92] R. W. Cottle, S. Goo, *Two Characterizations of Sufficient Matrices*, Linear Algebra and its Applications 170:65-74 (1992)

[CPS92] R. W. Cottle, J.-S. Pang, R.E. Stone, *The linear complementary problem*, Computer Science and Scientific Computing (1992)

[CPV89] R.W. Cottle, J.-S. Pang, V. Venkateswaran, *Sufficient matrices and the linear complementary problem*, Linear Algebra Appl. 114/115 230-249 (1989)

[FP66] M. Fiedler, V. Pták, *Some generalizations of positive definiteness and monotonicity.* Numerische Mathematik, 9:163-172 (1966)

[FNT98] K. Fukuda, M. Namiki, A. Tamura , *EP theorems and linear complementarity problems*, Discrete Applied Mathematics 84 (1998) 107-119

[FT92] K. Fukuda, T. Terlaky, *Linear complementary and orientated matroids*, J. Oper. Res. Soc. Japan 35 45-61 (1992)

[HRT93] D. den Hertog, C. Roos, and T. Terlalky, *The linear complementary problem, sufficient matrices, and the Criss-Cross method*, Linear Algebra and Its Applications 187 1-14 (1993)

[JG98] C. Jones, M. S. Gowda, *On the Connectedness of solution sets in linear complementarity problems,* Linear Algebra and Its Applications, 273:33-44 (1998)

[Kel72] R. B. Kellog, *On complex eigenvalues of M and P matrices.* Numerische Mathematik, 19:170-175, (1972)

[KT91] E. Klaszky and T. Terlaky *Some generalizations of the criss-cross method for quadratic programming.* Optimization, Vol. 24, pp. 127-139 (1991)

[KMNY91] M. Kojima, N. Megiddo, T. Noma, A. Yoshise, *A unifed approach to interior point algorithms for linear complementary problems*, Lecture Notes in Computer Science 538 (1991)

[Mu88] K. G. Murty, *Linear complementary, Linear and Nonlinear Programming.* Helderman, Berlin (1988)

[MPS96] G. S. R. Murty, T. Parthasarathy, M. Sabatini, *Lipschitzian Q-matrices are P-matrices*, Mathematical Programming, 74:55-58, (1996)

[Rock96] R.T. Rockafellar, *The elementary vectors of a subspace of* $\mathbb{R}^n$, in: R.C. Bose, T.A. Dowling (Eds.), Combinatorical Mathematics and Its Applications, Proc. Chapel Hill Conf., pp. 104-127 (1969)

[Val92] H. Väliaho , *A new proof for the criss-cross method for quadratic programming, Optimization*, Vol. 25, pp. 391-400 (1992)

[Val96a] H. Väliaho, *Criteria for Sufficient Matrices*, Linear Algebra and its Applications, 233:109-129 (1996)

[Val97] H. Väliaho, *Determining the Handicap of a Sufficient Matrix*, Linear Algebra and its Applications 253:279-298 (1997)

[Val96b] H. Väliaho,P_* *matrices are just sufficient*, Linear Algebra and Its Applications 239, 103-108 Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., American Mathematical Society, Providence, RI, pp. 83-100 (1996)