

Sztochasztikus volatilitásmodellek

Diplomamunka

Készítette: Kristóf Katalin
alkalmazott matematikus szak
Témavezető: Gerencsér László
MTA SZTAKI



Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Budapest
2005.

Tartalomjegyzék

1. Előszó	3
2. Lineáris modellek	5
2.1. A mozgó átlag folyamat	6
2.2. Az autoregressziós folyamat	8
3. ARCH(p) folyamatok	16
3.1. A stacionárius megoldás létezése	20
3.2. ARCH(p) folyamatok paraméterbecslése	23
4. GARCH(p, q) modell	25
4.1. Véletlen lineáris modellek	27
4.2. A stacionárius megoldás létezése	35
4.3. GARCH folyamatok paraméterbecslése	37
4.4. Rekurzív hibabecslés	39
4.5. A derivált folyamat stacionárius limesze	40
5. Bilineáris és egyéb alternatív modellek	41
6. Historikus és szimulált idősorok	47
6.1. S&P500	47
6.2. BUX és MAX	52
6.3. OTP	59
6.4. RICHTER	61
6.5. MATÁV	64
7. Szimulációk Matlabbal	65
7.1. Paraméterbecslés Matlab programmal	71

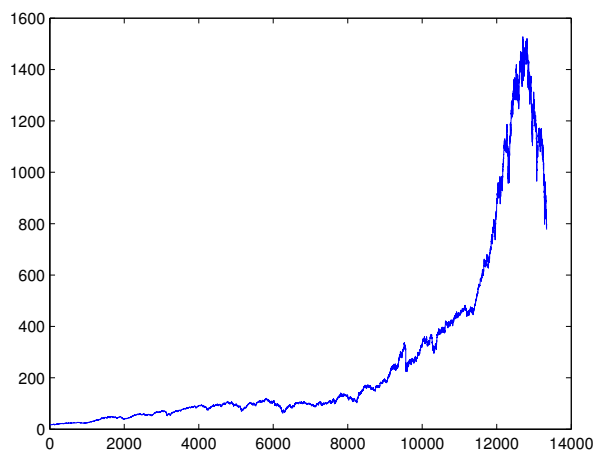
Köszönetnyilvánítás: Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Gerencsér Lászlónak, Arató Miklósnak, a Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszéken oktató tanárainknak, szüleimnek, Orlovits Zsanettnek, Máthé Andrásnak, Balogh Lászlónak és Sipos Ádámnak.

Ábrák jegyzéke

1.	Az S&P500 napi záróárfolyamai 1950.01.03-2000.10.09.	3
2.	Az S&P500 logaritmikus hozamai 1950.01.03-2000.10.09.	4
3.	1000 elemű Gauss fehérzaj folyamat	7
4.	Az y idősor	18
5.	A σ^2 volatilitásfolyamat	18
6.	Szimulált 1000-es mintaelemszámú GARCH(1,1) folyamat	26
7.	Az S&P500 loghozamaira illesztett normális eloszlás	47
8.	A GARCH(1,1) modellillesztés eredménye	50
9.	Az illesztett GARCH(1,1) folyamat	51
10.	A BUX napi záróárfolyamai 1996.12.31-2002.05.21.	52
11.	A MAX napi záróárfolyamai 1996.12.31-2002.05.21.	53
12.	A BUX logaritmikus hozamai 1996.12.31-2002.05.21.	53
13.	A BUX logaritmikus hozamaira illesztett normális eloszlás	54
14.	A BUX adatokra illesztett GARCH(1,1) modell	56
15.	A BUX adatokra illesztett GARCH(1,1) modell	57
16.	A MAX logaritmikus hozamai 1996.12.31-2002.05.21.	58
17.	Az OTP napi záróárfolyamai 1998.01.07-2005.04.01.	59
18.	Az OTP logaritmikus hozamai 1998.01.07-2005.04.01.	59
19.	A RICHTER napi záróárfolyamai 1998.01.07-2005.04.01.	61
20.	A RICHTER logaritmikus hozamai 1998.01.07-2005.04.01.	62
21.	A RICHTER logaritmikus hozamaira illesztett normális el- oszlás	62
22.	A MATÁV napi záróárfolyamai 1998.01.07-2005.04.01.	64
23.	A MATÁV logaritmikus hozamai 1998.01.07-2005.04.01.	64
24.	A kék az eredeti y , a piros a becsült idősort ábrázolja	72
25.	A σ^2 folyamat alakulása	72
26.	Az y és a becsült folyamat különbsége	73

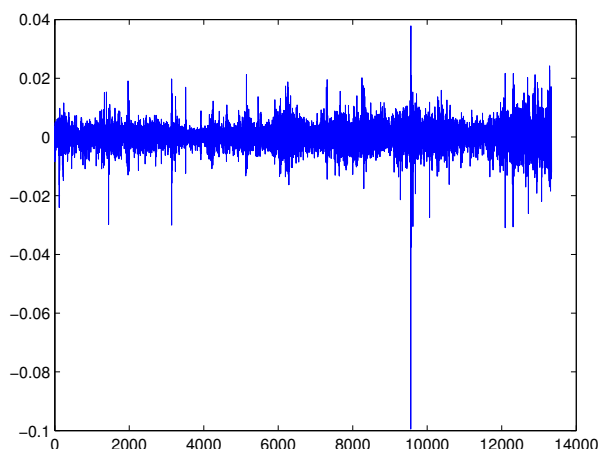
1. Előszó

Az **S&P500** logaritmikus hozamfolyamatát illusztráló ábrán is jól látható a pénzügyi idősorok sajátossága, hogy kis és nagy variabilitású időszakok váltogatják egymást (*volatility clustering*). A kis és nagy volatilitású¹ periódusok váltakozása azt mutatja, hogy egy hirtelen bekövetkező változás hatására megnövekszik a pénzpiaci forgalom, ezzel számos további reakciót indítva el, míg az ilyen jelenségek között nyugodtnak mondható a piac. Számomra érdekes tapasztalat volt, hogy míg az általunk használt adatsorok logaritmikus hozamai korrelálatlanok, bár időben nem függetlenek, addig a négyzetes és logaritmikus hozamok már hosszú emlékezetet mutatnak. A logaritmikus hozamfolyamatok döntő hányada hajlamos jelentős volatilitás-kiugrásokat, sokkokat mutatni. Jól szemlélteti ezt az **S&P500** amerikai kompozit index 1950.01.03. és 2000.10.09. közötti értékeinek alakulása (2.ábra). Kezdetben érdekes „púpperodicitás” látható. A második ábrán az $y_t = \log(\frac{P_t}{P_{t-1}})$ loghozamok láthatók, ahol P_t a t . napi záróárfolyamot jelenti.



1. ábra. Az **S&P500** napi záróárfolyamai 1950.01.03-2000.10.09.

¹Volatilitás alatt a hozam változékonyságát értjük, amit a folytonos kamatozással számított hozam szórásával szokás mérni.



2. ábra. Az **S&P500** logaritmikus hozamai 1950.01.03-2000.10.09.

Empirikus árfolyamadatokat vizsgálva látható, hogy az idő előrehaladtával a variancia változik. Mind erős, mind gyengén stacionárius idősor esetén a folyamat viszont állandó varianciájú, ezért csak a feltételes szórásnégyzet változását követelhetjük meg. Részvény- és devizaárfolyamoknál tapasztalt jelenség, hogy az eloszlás szélei vastagabbak (*fat tails*), mint amit a normális eloszlás adna, azaz a nagy változások relatíve gyakran alakulnak ki, akármelyik irányban. Tehát a normális eloszlás haranggörbéje alulbecsli a piaci kockázat fő forrását adó nagy ingadozások valószínűségét. Ez adta az alapot az időben változó, feltételes normális eloszlású modelleket célzó kutatások felé. A szakdolgozat fő célja, hogy a lineáris ARMA (Autoregressive Moving Average) modellektől indulva lényegretörő, átfogó képet nyújtson az ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity), majd a szintén a varianciát (nem a várható értéket) modellező általánosított ARCH, azaz GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) modellekről, és ezeknek néhány lehetséges módosításáról. A GARCH folyamatokkal egy olyan folyamatosztályt is bemutatunk, amely jól illeszkedik a tőzsdei termékek adatsoraira. Majd vázoljuk az említett folyamatokhoz kapcsolódó definíciókat, alapfogalmakat, hogy a későbbiek során ezek alaptulajdonságaival már tisztában legyünk. Ezt követően rátérünk a nemlineáris ARCH

és GARCH folyamatok tanulmányozására, megismerjük a gyengén illetve az erősen stacionárius megoldás létezésének szükséges és elégséges feltételét, és a Gauss eloszlásból generált $ARCH(p)$, $GARCH(p,q)$ folyamat állapotter-reprezentációját. Az ARCH és GARCH folyamatok a pénzügyi idősorok, logaritmusos hozamfolyamatok modellezésében alapvető eszközökké váltak. A továbbiakban a klasszikus $GARCH(p,q)$ modell paraméterbecslése fog következni. Meglepő módon az α_i és β_k együtthatók statisztikai becslése nem túl nehéz, ami egy alapvető érv a GARCH folyamatok mellett. Ha az $\epsilon(t)$ zaj-sorozat adott, i.i.d. és standard normális eloszlású, akkor az $(y(1), \dots, y(n))$ megfigyelésvektor likelihood-függvénye felírható, és a feltételes maximum-likelihood elmélet a paraméterek konzisztens és aszimptotikusan normális becslését adja (*Berkes*, [3]). Ez az eredmény akkor is érvényben marad, ha nem Gauss eloszlású $\epsilon(t)$ -kel hajtjuk meg a folyamatot. A dolgozat végén technikai elemzést végzünk. Matlab segítségével szimulált idősorokat vizsgálunk, elvégezzük a paraméterbecslést a maximum-likelihood módszerrel, az adódó nemlineáris egyenletet pedig gradiens módszerrel oldjuk meg. Az 1980-as évektől a részvényárfolyamok speciális tulajdonságaival foglalkozó irodalom hatalmassá duzzadt. *Engle* és *Nelson* is ebben a témában elért eredményeiért kapta meg a Nobel-díjat 2003-ban.

2. Lineáris modellek

Ha egy idősor valamely jelenség időbeli fejlődését írja le, akkor az egymás utáni állapotok általában összefüggenek - méghozzá erősen - egymással. A bizonyos értelemben stabil vagy stabilizálódott idősort *stacionárius idősornak* hívjuk. Ha $t = 0$ -ban nem a stacionárius eloszlásból indítottuk a folyamatot, akkor exponenciális sebességgel fog stacionarizálódni. (A stacionárius eloszlástól való eltérés exponenciálisan gyorsan 0-hoz tart.)

Definíció: Az $y(1), y(2) \dots$ idősor *gyengén/ másodrendben stacionárius* (*widely stationary*), ha a várható értéke állandó: $E(y(k)) = \text{konstans} \forall k$, és $\text{Cov}(y(t), y(s))$ csak a $(t - s)$ különbségtől függ $\forall t, s$ esetén. $t = s$ választás

mellett kapjuk, hogy a $D^2(y(k)) = \text{konstans}$ is teljesül.

Definíció: Az $y(1), y(2) \dots$ idősor *erősen stacionárius* (*strictly stationary*), ha $\forall n$ -re az $(y(t), y(t+1), \dots, y(t+n))$ és az $(y(t+s), y(t+s+1), \dots, y(t+s+n))$ vektorok eloszlása megegyezik $\forall t, s$ esetén.

Jelölés:

$$(y(t), y(t+1), \dots, y(t+n)) \sim (y(t+s), y(t+s+1), \dots, y(t+s+n)).$$

Speciálisan: $y(t) \sim y(s) \forall t, s$ -re.

Ha egy idősor erősen stacionárius, akkor gyengén is. Normális eloszlás esetén a kétféle stacionaritás ekvivalens.

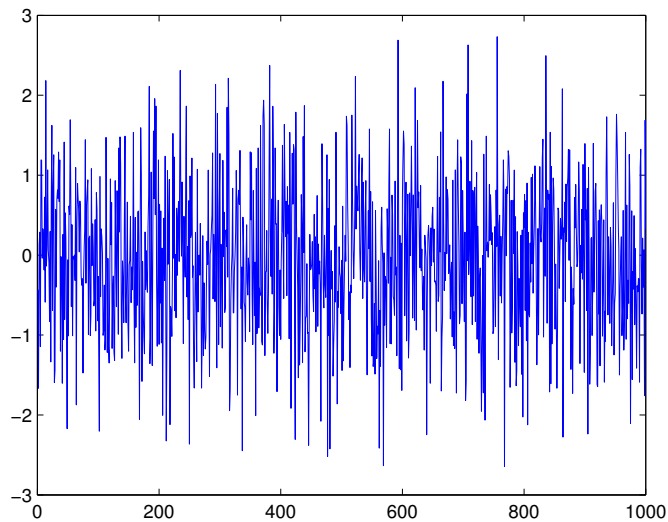
2.1. A mozgó átlag folyamat

Definíció: $y(k), k \in \mathbb{Z}$, $MA(q)$ (*mozgó átlag/ moving average*) folyamat, ha

$$y(k) = \sum_{j=1}^q b_j * w(k-j),$$

ahol $w(k), k \in \mathbb{Z}$ *Gauss-fehérzaj* (*GWN*), azaz $E(w(k)) = 0$, $D^2(w(k)) = 1$, független, azonos eloszlású (i.i.d./ independent, identically distributed) valószínűségi változó sorozat. (Feltesszük, hogy y, w skalárértékű.)

Így néz ki egy 1000 elemű normális fehérzaj folyamat:



3. ábra. 1000 elemű Gauss fehérzaj folyamat

Az állapottér-realizáció: Az állapotvektor a teljes múltból mindazt őrzi, ami szükséges a következő pillanat megismeréséhez, tehát a jövőbeli állapotok feltételes eloszlását már ismerni fogjuk.

Az állapotvektor és a paramétervektor:

$$X_n = \left[w(n-1), \dots, w(n-q) \right].$$

$$\theta = [b_1, \dots, b_q] \in \mathbb{R}^q.$$

Ha X_n ismert, akkor az $y(n)$ már meghatározható:

$$y(n) = X_n * \theta^T + w(n).$$

Az állapotegyenlet:

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} * X_n + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} * w(n).$$

Megjegyzés: Az X_n együttthatójaként megjelenő mátrix szinguláris, minden sajátértéke 0.

2.2. Az autoregressziós folyamat

Definíció: $y(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, $AR(p)$ folyamat, ha

$$y(k) = \sum_{j=1}^p a_j * y(k-j) + \sigma * w(k),$$

$w(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ fehérzaj (WN: white noise), (azaz $E(w(k)) = 0$, $D^2(w(k)) < \infty$, azonos eloszlású, korrelálatlan folyamat), és $w(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ korrelálatlan a korábbi y -októl: $y(k-1)$, $y(k-2)$, \dots -tól. (Gauss-eloszlású w esetén függetlenek is.) Az $y(k) - a_1 * y(k-1) - \dots - a_p * y(k-p) = \sigma * w(k)$ egyenlet karakterisztikus polinomja a következő:

$$x^p - a_1 * x^{p-1} - \dots - a_p = 0.$$

A gyengén stacionárius megoldás létezése a karakterisztikus polinom x_1, \dots, x_p gyökeinek a komplex egységkör belsejébe esésével ekvivalens. Ha S jelöli az idő-előreléptetés (*forward shift operator*), S^{-1} pedig az idő-visszaléptetés operátora (*backward shift operator*), azaz

$$Sy(k) = y(k+1),$$

$$S^{-1}y(k) = y(k-1),$$

akkor akkor a definícióban szereplő egyenlet

$$A(S^{-1})y(k) = \sigma * w(k),$$

azaz

$$y(k) = (A(S^{-1}))^{-1} \sigma * w(k)$$

alakot is ölthet. Az

$$\frac{1}{A(x)} = \delta_0 + \delta_1 * x + \delta_2 * x^2 + \dots$$

sorfejtés visszahelyettesítésével kapjuk, hogy

$$y(k) = \sigma * [\delta_0 * w(k) + \delta_1 * w(k-1) + \dots] = \sigma * \sum_{i=0}^{\infty} \delta_k * w(k-i),$$

ami a fehérzaj lineáris szűrőn való átbocsátását jelenti. Ha van másodrendben stacionárius megoldás, akkor ez a végtelen összeg L_2 -ben konvergens lesz.

AR(1) folyamat esetén szeretnénk felírni az $y(k)$ folyamatot a zaj múltjának segítségével. Legyen $w(k)$ *GWN*!

Iterációval:

$$\begin{aligned} y(k) &= a_1 * y(k-1) + w(k) = a_1 * (a_1 * y(k-2) + w(k-1)) + w(k) = \dots = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_1^i * w(k-i). \end{aligned}$$

Ez egy olyan folyamat, amely a zaj jövőjétől független. Az ilyen reprezentációt *okszági reprezentáció*nak nevezzük. $Ey(k) = 0$, $y(k-1)$ és $w(k)$ függetlensége miatt pedig $D^2(y) = a_1^2 * D^2(y) + D^2(w)$, ebből adódik, hogy

$$D^2(y) = R(0) = \frac{D^2(w)}{1 - a_1^2}.$$

Az $y(k)$ autokovariancia-függvényére a következő rekurzió igaz:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= E(y(\tau) * y(0)) = E[(a_1 * y(\tau - 1) + w(\tau)) * y(0)] = a_1 * R(\tau - 1) = \\ &= \dots = a_1^\tau * R(0). \end{aligned}$$

Így $r(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)} = a_1^\tau$, ahol $|a_1| < 1$. Tehát az $y(k)$ folyamat autokovariancia-függvénye exponenciálisan lecsengő, ami a rövid emlékezetet mutatja.

Ha már rendelkezésre áll az $y(k - 1)$, $y(k - 2)$, \dots , akkor $y(k)$ -ra a legjobb előrejelzés, illetve L_2 -értelemben a legjobb közelítés a feltételes várható érték lesz. Ez az L_2 téren egy *projekciót* jelent.

$$\begin{aligned} E(y(k) | y(k-1), y(k-2), \dots) &= E(a_1 * y(k-1) + w(k) | y(k-1), y(k-2), \dots) = \\ &= a_1 * y(k-1), \end{aligned}$$

amiben a zaj már nem is szerepel. Tehát a legjobb előrejelzéskor nem is vesszük figyelembe a zajfolyamatot, a távoli múlt nem ad a jelenre nézve információt, a folyamat a múltját gyorsan elfelejti. Az $AR(p)$ folyamatok rövid emlékezetűek, és nem érdemes túl messzire előre jelezni őket.

AR(2) folyamat esetén szeretnénk meghatározni a legjobb előrejelzést, ha $y(k - 1)$, $y(k - 2)$, \dots alapján már van információnk a folyamatról, amit az $\mathcal{F}_{k-1} := \sigma(y(k - 1), \dots, y(1))$ σ -algebra hordoz:

$$\begin{aligned} E(y(k) | \mathcal{F}_{k-1}) &= E(a_1 * y(k - 1) + a_2 * y(k - 2) + \sigma * w(k) | \mathcal{F}_{k-1}) = \\ &= a_1 * y(k - 1) + a_2 * y(k - 2). \end{aligned}$$

Azt használjuk ki, hogy $y(k - 1)$ és $y(k - 2)$ mérhető az \mathcal{F}_{k-1} feltételre nézve, $w(k)$ pedig független a feltételtől. Mivel a közelítésben az $y(k - 2)$ is szerepel, ezért $y(k)$ *nem Markov-folyamat*. Az autokovariancia-függvényre adott rekurziónál $y(k)$ és $w(k + \tau)$ Gauss fehérzaj függetlenségét használjuk:

$$R(\tau) = E[y(k) * (a_1 * y(k + \tau - 1) + a_2 * y(k + \tau - 2) + \sigma * w(k + \tau))] =$$

$$= a_1 * R(\tau - 1) + a_2 * R(\tau - 2),$$

$$R(1) = \frac{a_1}{1 - a_2} * R(0).$$

Ugyanígy: $r(\tau) = a_1 * r(\tau - 1) + a_2 * r(\tau - 2)$.

Az *állapotter-reprezentáció*:

$$Ay = w.$$

Az *állapotvektor és a paramétervektor*:

$$X_n = \left[-y(n-1), \dots, -y(n-p) \right].$$

$$\theta = [a_1, \dots, a_p] \in \mathbb{R}^p.$$

Ekkor

$$y(n) = X_n * \theta^T + w(n).$$

Az *állapotegyenlet*:

$$X_{n+1} = \begin{bmatrix} -a_1 & \dots & \dots & -a_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} * X_n + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} * w(n).$$

Az $\tilde{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & \dots & \dots & -a_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ mátrixot *kísérő vagy companion* mátrixnak nevezük.

Állítás: Az $A(z^{-1}) = 0$ egyenlet gyökei azonosak a $\det(\tilde{A} - z * I) = 0$ polinom gyökeivel, ahol \tilde{A} a fenti kísérőmátrixot jelöli:

$$\det(\tilde{A} - z * I) = (-z)^p * A(z^{-1}).$$

Bizonyítás: A tételt a fokszámra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk .
 Legyen $\alpha_p(z) := \det(\tilde{A}_p - z * I)$. $p = 1$ esetén

$$\alpha_1(z) = -a_1 - z = -z * (1 + a_1 * z^{-1}) = -z * A_1(z^{-1}).$$

A szóbanforgó determinánst az utolsó oszlopa szerint kifejtjük, és felhasználjuk az indukciós feltevést. Az indukciós feltétel szerint

$$\alpha_{p-1}(z) = (-z)^{p-1} * A_{p-1}(z^{-1}).$$

$$\begin{aligned} \det(\tilde{A} - z * I) &= -a_p(-1)^{p+1} + (-z)\alpha_{p-1}(z) = (-z)\alpha_{p-1}(z) + (-1)^p * a_p = \\ &= (-z)^p * \underbrace{[A_{p-1}(z^{-1}) + a_p * z^{-p}]}_{A_p(z^{-1})} = (-z)^p * A_p(z^{-1}). \end{aligned}$$

Következmény: Az $A(z^{-1})$ polinom *stabil* (abban az értelemben, hogy a gyökei az egységkör belsejébe esnek) akkor és csak akkor, ha az \tilde{A} mátrix stabil.

Gyakorlatban AR(1) modellt az

$$I(t) = \log Q(t) - \log Q(t - 1)$$

logaritmikus inflációfolyamatra szoktak illeszteni, ahol $Q(t)$ a t . időpillanatban a fogyasztói árindex. A 0. időpillanatot tekintjük 100%-nak, $Q(t)$ az ehhez képesti változást mutatja.

$$Q(t) = Q(t - 1) * \exp \{I(t)\}.$$

A $\xi(t) = \rho * \xi(t - 1) + \epsilon(t)$ folyamat AR(1), ha az $\epsilon(t)$ fehérzaj független $\xi(t - 1), \xi(t - 2) \dots$ -től, $\epsilon(1)$ független $\xi(0)$ -tól. Az $\epsilon(1), \epsilon(2), \dots$ -ről gyakran felteszik nemcsak azt, hogy független, azonos eloszlásúak, hanem azt is, hogy normális eloszlást követnek ($\epsilon(t) \sim N(0, \sigma^2)$), azaz $\epsilon(t)$ *GWN*. Az

$$(I(t) - m) = \rho * (I(t - 1) - m) + \epsilon(t)$$

elsőrendű autoregresszió a skót *Wilkie* nevéhez fűződik, három paramétere van: ρ , m , σ^2 .

Definíció: $y(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, $ARMA(p, q)$, ha

$$y(k) - a_1 * y(k-1) - \dots - a_p * y(k-p) = b_0 * w(k) + b_1 * w(k-1) + \dots + b_q * w(k-q),$$

ahol $w(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ fehérzaj, és $w(k)$ korrelálatlan az y folyamat múltjától ($y(k-1)$, $y(k-2)$, ...-tól).

Megjegyzés: Az S^{-1} (*visszafelé léptető/ backshift operátor*) segítségével az egyenlet ilyen alakot is ölthet:

$$(a_1 * S^{-1} - \dots - a_p * S^{-p})y(k) = (b_0 * I + b_1 * S^{-1} + \dots + b_q * S^{-q}),$$

azaz

$$a(S^{-1})y(k) = b(S^{-1})w(k),$$

ahol a p -edfokú, b q -adfokú polinom. Még egy lehetséges felírás:

$$y(k) = \frac{b}{a}(S^{-1}) * w(k),$$

vagy

$$y(k) = \frac{b}{a}w(k).$$

Ebben a mérnöki felírásban a $\frac{b}{a}$ racionális törtfüggvény (, nem polinom). A stabilitás feltétele, hogy az a polinom gyökei a komplex egységkörön kívül essenek.

Tétel: $ARMA(p, q)$ folyamatnak mindig létezik állapotteres realizációja, és tetszőleges állapotteres realizációval rendelkező folyamat $ARMA(p, q)$.

Konstrukció: $ARMA(p, q)$ folyamathoz megadjuk az állapotteres leírását.

Először definiálunk egy *segédfolyamatot*, amit jelöljön $\eta(t)$:

$$\eta(k) - a_1 * \eta(k-1) - \dots - a_p * \eta(k-p) = w(k),$$

illetve

$$\eta = \frac{1}{a} w.$$

Az *állapotegyenlet*

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k),$$

ahol $x(k) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$, $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ lesz, amely kiírva a következő:

$$\begin{bmatrix} \eta(k) \\ \eta(k-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \eta(k-p+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & \dots & \dots & a_p \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \eta(k-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \eta(k-p+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} * w(k).$$

Feltehető, hogy $p = q$, hiszen ha például $p < q$, akkor a következő együtthatókat 0-nak definiáljuk: $a_{p+1} := 0, \dots, a_q := 0$.

Az *állapotegyenlet*:

$$x(k) = \frac{1}{a} (S^{-1}) \begin{bmatrix} S^{-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ S^{-p} \end{bmatrix} * w(k).$$

A *megfigyelésegyenlet*:

$$y(k) = [b_1 + b_0 * a_1, \dots, b_p + b_0 * a_p] * x(k) + b_0 * w(k) =$$

$$\begin{aligned}
&= b_1 * \eta(k-1) + b_2 * \eta(k-2) + \dots + b_q * \eta(k-p) + \\
&+ \underbrace{b_0 * [a_1 * \eta(k-1) + \dots + a_p * \eta(k-p)]}_{b_0 * \eta(k)} + b_0 * w(k) = \\
&= b_0 * \eta(k) + b_1 * \eta(k-1) + b_2 * \eta(k-2) + \dots + b_q * \eta(k-p) = b(S^{-1})\eta = \frac{b}{a}w.
\end{aligned}$$

Definíció: $ARIMA(p, d, q)$ folyamat esetén a d -ed rendben vett differencia legyen $ARMA(p, q)$. Az $X(t)$ folyamat $ARIMA(p, d, q)$, ha az $Y(t) = \Delta^d X(t)$ $ARMA(p, q)$.

Például az folyamat $ARIMA(p, 1, q)$, ha a $\Delta X(t) = Y(t) = X(t) - X(t-1)$ folyamat $ARMA(p, q)$.

Maximum-likelihood módszerrel $ARIMA(3, 1, 2)$ -t illesztünk az **S&P500** index logaritmikus hozamfolyamatára 1959.01.03-tól 2000.10.09-ig:

AR együtthatók:	-0.57702	-0.00704	-0.02357
MA együtthatók:	0.31137	0.65693	-

A variancia-kovariancia mátrix:

	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2
a_1	0.0303142	-0.00271724	0.00276676	0.0302134	-0.02959010
a_2	-0.0027172	0.00035996	-0.00020507	-0.0027580	0.0027094
a_3	0.0027668	-0.0002057	0.00033048	0.0027650	-0.0027036
b_1	0.0302134	-0.00275803	0.002764095	0.0301876	-0.0295656
b_2	-0.029590	0.00270939	-0.00270362	-0.0295656	0.0289647

A táblázat a fenti idősrora legjobban illeszkedő $ARIMA(3, 1, 2)$ folyamatnak az idősortól való átlagos négyzetes eltérését mutatja. Az **S&P500** idősor mintaelemszáma: 1338 adat (1950.01.03-2000.10.09).

3. $ARCH(p)$ folyamatok

A lineáris modellek illesztése miért viselkedik rosszul? Tekintsük az AR modellt $Ay = w$ alakját, ahol w i.i.d. sorozat, A pedig a visszaléptetés operátorának stabil polinomja, gyökei az komplex egységkörön kívül esnek. $\mathcal{F}_{t-1} := \sigma(y(t-1), \dots, y(1))$.

A feltételes szórásnégyzet: $\sigma^2(y(t) | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma^2(w) = \text{konstans}$. Viszont valódi adatsorra: $\sigma^2(y(t) | \mathcal{F}_{t-1}) \neq \text{konstans}$.

Legyen $\epsilon(t)$ GWN . Ekkor egy diszkrét idejű, valós értékű sztochasztikus $ARCH(p)$ folyamatot leíró egyenletek a következők [4]:

$$y(t) = \sigma(t) * \epsilon(t),$$

$$\sigma^2(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i * y^2(t-i).$$

A modell *Engle* nevéhez fűződik, aki 2003-ban Nobel-díjat kapott a pénzügyi matematika területén végzett kutatásaiért. A hangsúlyos az első egyenlet, a *visszacsatolást* (*feedback*) megadó egyenlet $|\sigma| = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i * |y(t-i)|$ is lehetne. A fenti két egyenlet által meghatározott $y(t)$ -t nevezzük $ARCH(p)$ folyamatnak. Adódik, hogy

$$y^2(t) = \left[\alpha_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_1^j * y^2(t-ij) \right] * \epsilon^2(t).$$

$\sigma^2(t)$ éppen az $y(t)$ folyamat feltételes szórásnégyzete a múlttra nézve:

$$\begin{aligned} D^2(y(t) | y(s), s < t) &= D^2(\sigma(t) * \epsilon(t) | y(s), s < t) = \\ &= \sigma^2(t) * \underbrace{D^2(\epsilon(t) | y(s), s < t)}_{D^2(\epsilon(t))=1} = \sigma^2(t). \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $D^2(y(t)) < \infty$. Ekkor belátjuk, hogy az $y(t)$ $ARCH(p)$ folyamat fehérzaj.

$$E(y(t)) = E(E(y(t) | y(s), s < t)) = E(\sigma(t) * \underbrace{E(\epsilon(t) | y(s), s < t)}_{=0}) = 0,$$

kihasználva, hogy az $\epsilon(t)$ fehérzaj eloszlása gaussi .

Megjegyzés: Az $ARCH(1)$ folyamat tehát fehérzaj, de nem *i.i.d.* folyamat.

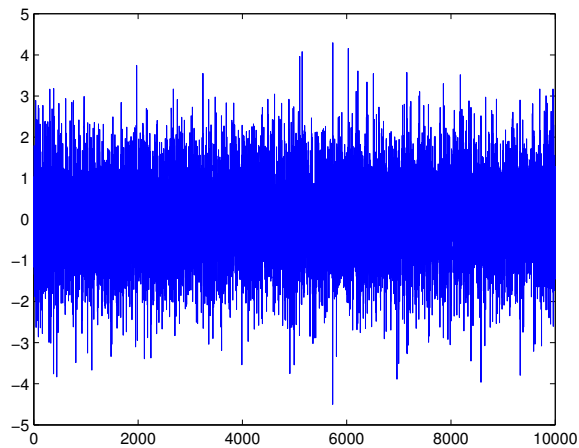
$$\begin{aligned} E[y^2(t) | y^2(t-1)] &= E[(\alpha_0 + \alpha_1 * y^2(t-1)) * \epsilon^2(t) | y^2(t-1)] = \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1 * y^2(t-1)) * E[\epsilon^2(t) | y^2(t-1)] \neq \text{konstans}. \\ E(y^2(t) | y(t-1)) &= E(\sigma^2(t) * \epsilon^2(t) | y(t-1)) = \sigma^2(t) = \alpha_0 + \alpha_1 * y^2(t-1). \end{aligned}$$

Legyen $s < t$. Ekkor a

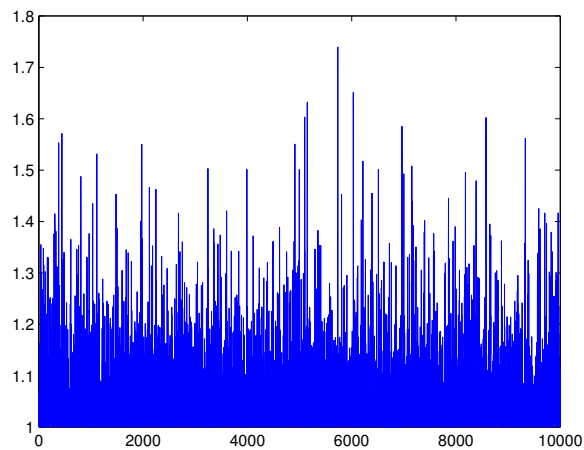
$$\begin{aligned} Cov(y(t), y(s)) &= E(y(t) * y(s)) = E(E(y(t) * y(s) | y(l), l < t)) = \\ &= E(y(s) * \underbrace{E(y(t) | y(l), l < t)}_{=0}) = 0, \end{aligned}$$

mivel az $y(s)$ mérhető az $y(l)$, $l < t$ feltételre nézve. Mivel az $y(t)$ azonos eloszlású, 0 várható értékűek és korrelálatlanok is, az $y(t)$ folyamat fehérzaj.

Szimulált ARCH(1) folyamat $\omega = 1$, $\alpha_1 = 0.3$ együtthatókkal és $N = 10000$ mintaelemszámmal:



4. ábra. Az y idősor



5. ábra. A σ^2 volatilitásfolyamat

Speciálisan tekintsük az ARCH(1) folyamatot $|\alpha_1| < 1$, $\epsilon(t)$ *GWN* mellett (ekkor a másodrendben és erősen stacionárius fogalmak ekvivalensek). A

múltak folyamatos behelyettesítésével visszafejtjük az $y^2(t)$ folyamatot:

$$\sigma^2(t) = \alpha_0 + \alpha_1 * y^2(t-1).$$

$$\begin{aligned} y^2(t) &= (\alpha_0 + \alpha_1 * y^2(t-1)) * \epsilon^2(t) = \alpha_0 * \epsilon^2(t) + \alpha_1 * y^2(t-1) * \epsilon^2(t) = \\ &= \alpha_0 * \epsilon^2(t) + \alpha_1 * \epsilon^2(t) * [\alpha_0 * \epsilon^2(t-1) + \alpha_1 * y^2(t-2) * \epsilon^2(t-1)] = \\ &= \alpha_0 * \sum_{j=0}^n \alpha_1^j * \epsilon^2(t) * \epsilon^2(t-1) * \dots * \epsilon^2(t-j) + \\ &+ \alpha_1^{n+1} * y^2(t-n-1) * \epsilon^2(t) * \epsilon^2(t-1) * \dots * \epsilon^2(t-n). \end{aligned}$$

Vajon $y^2(t)$ előáll-e zárt alakban? Konstruálunk egy megoldást és megadjuk $y^2(t)$ -nek a fehérzaj folyamat segítségével történő előállítását. Belátjuk, hogy a

$$\xi := \sum_{j=1}^n \alpha_1^j * \epsilon^2(t-1) * \dots * \epsilon^2(t-j)$$

valószínűségi változó létezik, véges várható értékű és nem független tagú sorozat. Ha

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{|\alpha_1|^j * \epsilon^2(t-1) * \dots * \epsilon^2(t-j)} < 1$$

egy valószínűséggel, akkor ξ majdnem mindenütt létezik. Mivel $\epsilon(t-1), \dots, \epsilon(t-j)$ függetlenek, alkalmazható a *Kolmogorov-féle nagy számok törvénye*:

$$\frac{\log \epsilon^2(t-1) + \dots + \log \epsilon^2(t-j)}{j} \rightarrow E(\log \epsilon^2(t-1)) \quad (j \rightarrow \infty)$$

majdnem mindenütt és $E(\log \epsilon^2(t-1)) < 0$ a *Jensen-egyenlőtlenség* miatt. Tehát

$$\begin{aligned} &\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{|\alpha_1|^j * \epsilon^2(t-1) * \dots * \epsilon^2(t-j)} = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left\{ |\alpha_1| * \exp \left\{ \frac{\log \epsilon^2(t-1) + \dots + \log \epsilon^2(t-j)}{j} \right\} \right\} < 1, \end{aligned}$$

$$E\left(\sum_{j=1}^n |\alpha_1|^j * \epsilon^2(t-1) * \dots * \epsilon^2(t-j)\right) = \sum_{j=1}^n |\alpha_1|^j .$$

Tényleg teljesül, hogy $E|\xi| < \infty$, így ξ valóban jól definiált, véges várható értékű valószínűségi változó. Az

$$y(t) = \epsilon(t) * \sqrt{\alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_1^j * \epsilon^2(t-1) * \dots * \epsilon^2(t-j)} \quad (1)$$

kielégíti az $y(t) = \sigma(t) * \epsilon(t)$ egyenletet, stacionárius ARCH(1) folyamat, $Ey(t) = 0$, $Ey^2(t) < \infty$, $\text{Cov}(y(t), y(s)) = 0$, ha $t \neq s$, a variancia pedig a következő: $D^2(y(t)) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$. A fenti

$$y^2(t) = \alpha_0 * \sum_{j=0}^n \alpha_1^j * \epsilon^2(t) * \epsilon^2(t-1) * \dots * \epsilon^2(t-j) +$$

$$\alpha_1^{n+1} * y^2(t-n-1) * \epsilon^2(t) * \epsilon^2(t-1) * \dots * \epsilon^2(t-n)$$

előállításból következik, hogy ha $y(t)$ stacionárius ARCH(1) folyamat és $D^2(y(t)) < \infty$, akkor $y(t)$ csak (1) alakú lehet. Így a zaj segítségével kifejeztük az $y(k)$ folyamatot.

3.1. A stacionárius megoldás létezése

Legyen ϵ_n adott, standard normális eloszlású folyamat. Létezik stacionárius y_n megoldása az ARCH(1) folyamatnak, ha $\alpha_0 > 0$ és $\alpha_1 \in (0, 2 * e^\gamma)^2$,

²Abban az esetben, ha $E \log |A_1| < 0$ ekvivalens $\gamma < 0$ -val:

$$E \log |A_1| = E \log(\alpha_1 * \epsilon^2(t)) = \log \alpha_1 + E \log \epsilon^2(t) = \log \alpha_1 + \log 2 + \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} =$$

$$= \log \alpha_1 + \log 2 - c - 2 * \log 2 < 0 \Leftrightarrow \log \alpha_1 - \log 2 - c < 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha_1 < 2 * e^c \approx$$

$$\approx 3,5686.$$

ahol γ az ún. *Euler-konstans* ([5]). GARCH(1,1) esetben az $\omega > 0$ és $E \log(\alpha_1 * \epsilon_n^2 + \beta_1)$ feltételek szükségesek és elégségesek is egy erősen stacionárius megoldás létezéséhez. ARCH(1) esetben létezik véges szórású stacionárius megoldás, ha $|\alpha_1| < 1$ és $\alpha_0 > 0$. A megoldás korrelálatlan folyamat, azaz fehérzaj lesz, így $y(t)$ és $y(t - k)$ korrelálatlansága könnyen adódik.

A megoldás eloszlása szimmetrikus lesz: $E[y(t)^{2j+1}] = 0$, de $\forall \alpha_1$ -re $\exists k : E[y(t)^{2k}] = \infty$, így lassan lecsengő vastag farkú eloszlást (*heavy tail distribution*) kapunk. Az ARCH(1) folyamat néhány *tulajdonsága*:

- $\forall \alpha_1$ -hez $\exists k : E(y^{2k}(t)) = \infty$.
- Ha $3 * \alpha_1^2 < 1$, akkor $y^2(t)$ ACF-e megegyezik egy $w(t) = \alpha_1 * w(t - 1) + \epsilon(t)$ AR(1) folyamat ACF-ével.

ARCH(1) folyamat esetén amennyiben teljesül, hogy $|\alpha_1| < 1$ és $\alpha_0 > 0$, akkor az

$$y^2(t) = \alpha_0 * \sum_{j=0}^n \alpha_1^j * \epsilon^2(t) * \epsilon^2(t - 1) * \dots * \epsilon^2(t - j) + \alpha_1^{n+1} * y^2(t - n - 1) * \epsilon^2(t) * \epsilon^2(t - 1) * \dots * \epsilon^2(t - n)$$

L_2 -értelemben konvergens (ha $n \rightarrow \infty$), és létezik stacionárius megoldás, amely véges varianciájú. $|\alpha_1| > 1$ mellett is előfordulhat, hogy van stacionárius megoldás, viszont ebben az esetben a szórásnégyzete végtelen.

Definíció: A $\beta_2(X) = \frac{E(X - E(X))^4}{D^2(X)}$ -t *kurtosisnak* nevezzük.

Ez a normális eloszlástól való eltérés kimutatására szolgál. *Normális eloszlás* esetén $\beta_2 = 3$, *logaritmikus hozamfolyamatokra* viszont $\beta_2 = 50$ is lehet.

Állítás: Feltéve, hogy $y(k)$ stacionárius ARCH(1) folyamat, $\alpha_0 > 0$ és $0 < \alpha_1 < 1$:

1. $E(y^2(k)) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$.

2. Ha $\alpha_1^2 < \frac{1}{3}$, akkor $E(y^4(k)) < \infty$ és az ún. *kurtosis* $= \frac{E(y^4(k))}{[E(y^2(k))]^2} > 3$. Ez az eloszlás *csúcsosabb*, mint a normális.

Megjegyzés: Az új *Wilkie-modell*, amely már időben változó volatilitást feltételez, az ARCH(1) folyamatra emlékeztet. ϵ_t -ről kihasználjuk, hogy Gauss fehérzaj.

$$I(t) = m + \rho * (I(t-1)) + \sigma_t * \epsilon_t,$$

$$\sigma_t^2 = q_{SA} + q_{SB} * (I(t-1) - q_{SC})^2,$$

ahol $q_{SA} > 0$, $q_{SB}, q_{SC} \geq 0$, $I(t)$ az infláció. Ha $q_{SB} = 0$, akkor visszakapjuk az eredeti konstans volatilitású modellt. Ha y_t és σ_t stacionárius, $\epsilon_t \sim N(0, 1)$, akkor a logaritmikus infláció várható értéke és szórásnégyzete:

$$EI(t) = m + \rho * (EI(t-1) - m) + \underbrace{E(E(\sigma_t * \epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}))}_{=E(\sigma_t * E(\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}))=0}.$$

Következésképpen $EI(t) = m$, ha $\rho \neq 1$.

$$D^2 I(t) = \rho^2 * D^2(I(t-1)) + E(\sigma_t^2 * \epsilon_t^2) + 2\rho \underbrace{E(\sigma_t * \epsilon_t * (I(t-1) - m))}_{=0}.$$

Mivel $E(\sigma_t^2 * \epsilon_t^2) = E(E(\sigma_t^2 * \epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})) = E(\sigma_t^2 * \underbrace{E(\epsilon_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})}_{=1}) = E(\sigma_t^2)$, azt kapjuk, hogy

$$D^2 I(t) = \rho^2 * D^2(I(t-1)) + E(\sigma_t^2),$$

azaz

$$(1 - \rho^2) * D^2 I(t) = E(\sigma_t^2).$$

Tehát

$$E(\sigma_t^2) = q_{SA} + q_{SB} * E(I(t-1) - m + m - q_{SC})^2 =$$

$$= q_{SA} + q_{SB} * [D^2 I(t) + (m - q_{SC})^2],$$

átrendezve pedig az

$$(1 - \rho^2 - q_{SB}) * D^2 I(t) = q_{SA} + q_{SB} * (m - q_{SC})^2$$

egyenlethez jutunk. Az erős stacionaritás érdekében q_{SB} -t nem szabad túl nagyra választanunk: $0 \leq q_{SB} \leq 1 - \rho^2$. A modell előnye, hogy hosszútávú előrejelzésre jól használható, mivel figyelembe veszi a saját tapasztalatot, véletlen szimulációra is kiválóan alkalmazható, valamint $I(t)$ jól generálható vele.

Tétel: [Engle [4], 1982] Legyen $r \in \mathbb{Z}$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$. Az ARCH(1) folyamatnak pontosan akkor létezik a $2 * r$ -edik momentuma, ha

$$\alpha_1^r * \prod_{j=1}^r (2j - 1) < 1.$$

A páratlan momentumok szimmetria alapján 0-val egyenlők.

Megjegyzés: Még ϵ_n Gauss-folyamatnak sem létezik az összes momentuma.

3.2. ARCH(p) folyamatok paraméterbecslése

Legyen az Z_1, Z_2, \dots, Z_n stacionárius folyamat. Mivel ϵ_n Gauss fehérzaj, így ekvivalens a Z_k -k erős, illetve gyenge értelemben vett stacionaritása. Először tekintsük az ARCH(1) esetet. A likelihood-függvény felírása nehéznek ígérkezik, viszont ha az Z_1 -re vett feltételes eloszlást nézzük, az már sokkal könnyebb lesz, a sűrűségfüggvény felírható. $Z_2 = \sigma_2 * \epsilon_2$ feltételes eloszlása a Z_1 -re nézve normális, 0 várható értékkel és σ_2 szórásnégyzettel.

$$\begin{aligned} & f_{Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_2 | Z_1}(z_n, \dots, z_2 | z_1) = \\ & = \prod_{t=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi * (\alpha_0 + \alpha_1 * Z_{t-1}^2)}} * \exp \left\{ -\frac{Z_t^2}{2 * (\alpha_0 + \alpha_1 * Z_{t-1}^2)} \right\}. \end{aligned}$$

Így az $f_{Z_2 | Z_1}(z_2 | z_1)$ is felírható zárt formulával, a feltételes sűrűségfüggvények tehát megvannak, ezek maximalizálásával kapjuk meg a becslést. Ha ARCH(p) folyamatunk van, akkor nem Z_1 -re vesszük a feltételes sűrűséget, hanem az első p darab megfigyelésre: $Z_n, Z_{n-1}, \dots, Z_{p+1} | Z_1, \dots, Z_p$. Ez már

jóval bonyolultabb.

A tapasztalat azt mutatja, hogy egy p -edrendű ARCH modell valódi adatokra csak akkor ad jó becslést, ha az α_i paraméterek száma eléggé nagy. A konstrukció mögött húzódó alapgondolat az volt, hogy az $y(t)$ eloszlásának előrejelzéséhez csupán két összetevő ismeretére van szükség: a $\sigma(t)$ -re és az $\epsilon(t)$ eloszlására. Ha például $\epsilon(t) \sim N(0, 1)$, és az idősor múltbeli megfigyelései rendelkezésünkre állnak, akkor $y(t) \sim N(0, \sigma^2(t))$ lesz. Így a jelenlegi $y(t)$ feltételes várható értéke a múltbeli $y(t-1), \dots, y(t-p)$ értékekre nézve 95%-os valószínűséggel fog a $[-1.96\sigma(t), 1.96\sigma(t)]$ intervallumba esni. A logaritmikus hozam eloszlásának 5%-os kvantilisét a szóban forgó eszköz kockázatának mértékeként tekintik. Pénzügyi területen ezt a kvantilist *kockázatotott érték* (*Value at Risk / VaR*) néven ismerik. A gyakorlatban alkalmazott VaR modellek (*Risk metrics, Credit metrics, Crash metrics*) közül a *Risk metrics* méri az eszközök volatilitását. A variancia-kovarianciamátrix becslésével, a korrigált tapasztalati szórás, az opcióárból visszaállított σ meghatározásával, valamint GARCH modellek alkalmazásával foglalkozik. Egy GARCH(1,1)-re emlékeztető modellt használ, amely a teljes múltat figyelembe veszi, de egyre kisebb súllyal:

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{(1 - \lambda) * \sum_{j=-\infty}^i \lambda^{i-j} * R_j^2},$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = \lambda * \sigma_{i-1}^2 + (1 - \lambda) * R_i,$$

ahol $\lambda \in (0, 1)$, R_j pedig a j . napi megfigyelés. Minden részvényárfolyamra egységesen $\lambda = 0.94$ -et használnak napi adatoknál, és $\lambda = 0.97$ -et havi adatok estén. A *Credit metrics* a hitelkockázatok veszélyességével foglalkozik, míg a *Crash metrics* sztochasztikus differenciálegyenletet ír fel a portfólió változására, ennek alapján számol csődvalószínűséget.

Kézenfekvőnek tűnhet, hogy a $\sigma^2(t)$ -t ne csupán múltbeli $y^2(k)$ ($k < t$) megfigyelések súlyozott, időben változó lineáris kombinációjaként definiáljuk, hanem múltbeli $\sigma^2(k)$ ($k < t$)-kat is szerepeltessünk a $\sigma^2(t)$ előállításában. Az Engle-féle klasszikus *ARCH(p)* modell [4] megköveteli a feltételes szórásnégyzet linearitását és markovitását az első p időpontra nézve visszamenőleg. A

következőkben vizsgált *Bollerssev* nevéhez fűződő $GARCH(p, q)$ specifikáció már sokkal rugalmasabb struktúrát biztosít [1].

4. $GARCH(p, q)$ modell

Az ARCH és GARCH folyamatok a volatilitás modellezésében azt az újdonságot hozták, hogy a szórásnégyzet nem konstans, így jobb illeszkedést is várunk tőlük, mint az ARMA folyamatoktól. Az 2. ábrára pillantva is láthatjuk, hogy a nagy értékek meghaladása klaszterekben történik. Az ARCH és GARCH folyamatok a pénzügyi idősorok, például logaritmusos hozamfolyamatok modellezésének alapvető fontosságú eszközévé váltak. P_n jelölje az n . napi záróárfolyamát egy részvénynek vagy indexnek. Ekkor $y_n = \log \frac{P_n}{P_{n-1}}$ a *logaritmusos hozamfolyamat*.

Definíció: A $GARCH(p, q)$ folyamatot az alábbi két egyenlet definiálja:

$$y_n = \sigma_n \epsilon_n, \quad (2)$$

$$\sigma_n^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{n-j}^2, \quad (3)$$

ennek rövid *méternöki felírása*:

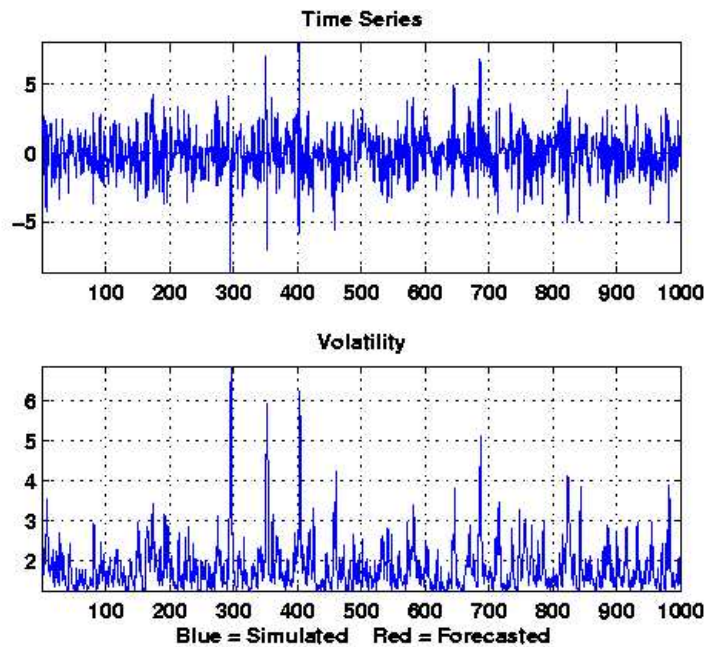
$$B(S^{-1})\sigma^2 = \omega + A(S^{-1})y^2,$$

ahol A és B a backward shift operátor (S^{-1}) stabil polinomja, $\omega > 0$, és α_i, β_j nemnegatív konstansok $\forall i, j$. $\epsilon(t)$ pedig i.i.d. valószínűségi változó sorozat, $E(\epsilon_n) = 0$, $D^2(\epsilon_n) = 1$ -el. Mint az ARCH folyamatok esetében itt is az (2) egyenleten van a hangsúly, a (3) egyenlet a visszacsatolást adja meg. A σ_n^2 az y_n feltételes varianciája az y_{n-1} -re nézve. A σ_n^2 feltételes szórásnégyzet egyik leghasznosabb specifikációja a GARCH modell. Ekkor az y_n -et nevezzük $GARCH(p, q)$ folyamatnak. Egy még tömörebb felírás:

$$B\sigma^2 = \omega + Ay^2.$$

Itt $B(z) = 1 - b(z)$, $\deg B(z) = q$, $b(z) = \beta_1 * z + \dots + \beta_q * z^q$,
 $A(z) = \alpha_1 * z + \dots + \alpha_p * z^p$ pedig p -edfokú polinom. A stabilitás és a stacionaritás érdekében az $[1 - A(S) - B(S)]$ és a $[1 - B(S)]$ polinimok gyökeinek az egységkörön kívül kell esniük. Ha az $[1 - A(S) - B(S)]$ polinomnak létezik egységgyöke, akkor a folyamat az integrált GARCH (IGARCH) folyamatok osztályába tartozik.

Példa: GARCH(1,1) folyamat $\alpha_1 = 0.3$, $\beta_1 = 0.5$ paraméterekkel és $N = 1000$ mellett:



6. ábra. Szimulált 1000-es mintaelemszámú GARCH(1,1) folyamat

A $GARCH(p, q)$ folyamat $ARCH(\infty)$ folyamatként is felírható, azaz

$$\sigma_n^2 = \omega(1 - b(1))^{-1} + A(S^{-1})(1 - b(S^{-1}))^{-1}y_n^2 = \omega(1 - b(1))^{-1} + \lambda(S^{-1})y_n^2.$$

ϵ_n eloszlását gyakran választják t -eloszlásnak: $\sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} * t_\nu$, ahol $\nu > 2$ a szabadságfokot jelenti. Teljesül, hogy $E(\epsilon_n) = 0$, $D^2(\epsilon_n) = 1$.

A GARCH modell felírható úgy is, mint egy $ARMA(\max\{p, q\}, q)$ folyamat,

azaz

$$[B(S^{-1}) - A(S^{-1})] y_n^2 = \omega + [B(S^{-1})] \nu_n ,$$

ahol

$$\nu_n^2 = y_n^2 - \sigma_n^2.$$

Ezt a változatot használva látható, hogy a folyamat autokorreláció-függvénye³ rövid emlékezetet mutat. Ha y_n erősen stacionárius és $E(y_n^2) < \infty$, akkor ν_n erősen stacionárius martingáldifferencia-sorozatot alkot. A fenti ARMA-alakú reprezentáció hamisan azt sugallhatja, hogy az ARCH és GARCH négyzetes folyamatok elmélete hasonlóan "egyszerű", mint a lineáris ARMA folyamatoké. Azonban néhány kivételtől eltekintve (a GARCH(1,1) valamint ARCH(1) modellektől is) az ϵ_n -k eloszlása, és a paraméterek ismeretében sem tudunk túl sokat az y_n marginális farokeloszlásáról, az ARCH-típusú modellek többváltozós kiterjesztéseinek elméletéről pedig még kevesebbet.

4.1. Véletlen lineáris modellek

Tekintsük a következő *homogén lineáris mátrixegyenletet*:

$$Y_{n+1} = BY, Y_0 = I, \tag{4}$$

ahol Y_n, B egy $r \times r$ dimenziós mátrix, $B = EA_n \forall n, I$ pedig az $r \times r$ dimenziós egységmátrix. Tegyük fel, hogy B mérhető és korlátos *mátrixfüggvény*, melynek spektrálsugara 1 alatt marad: $\rho(B) < 1$. Ekkor a (4) mátrixegyenletnek létezik egyértelmű Y_n megoldása.

³Stacionárius Y_n sorozatra az autokorreláció-függvény (ACF): $\gamma_Y(h) = \text{Corr}(Y_0, Y_h)$, $h \in \mathbb{Z}$. Azt mondjuk, hogy Y_n *hosszú emlékezetet (long range dependence / LRD)* mutat, ha

$$\sum_{h=0}^{\infty} |\gamma_Y(h)| = \infty.$$

Különben pedig rövid emlékezetűnek (*short range dependence / SRD*) nevezzük Y_n -t. Az erősen keverő tulajdonság speciális következménye, hogy $\gamma_{f(Y)}(h) \leq \text{konstans} \cdot a^h$ valamely $a \in (0, 1)$ -re, bármely f mérhető függvényre, feltéve, hogy a korreláció jól definiált. Speciálisan, ha $\gamma_{|Y|}$ és γ_{Y^2} jól definiált, akkor ezen ACF-ek exponenciális sebességgel csengetnek le a 0-ba. A GARCH modell hosszúemlékezetű folyamatok modellezésére nem jól használható.

Az alábbi véletlen egyenletben $A(\epsilon_n)$ egy $r \times r$ -es mátrixértékű mérhető véletlen folyamat.

$$X_{n+1} = A(\epsilon_{n+1})X_n, \quad X_0 = I. \quad (5)$$

Tétel: Ha $n \geq 0$ -ra $EA(\epsilon_n) = B$ és ϵ_n korlátos i.i.d. zajfolyamat, akkor a (5) véletlen mátrixegyenletnek létezik egyértelmű X_n megoldása.

Definíció: Az

$$X_n = A_n X_{n-1} + B_n \quad (6)$$

alakú egyenleteket *sztochasztikus rekurzív egyenletnek* (6) nevezzük, ahol A_n véletlen mátrix, B_n véletlen vektor, (A_n, B_n) i.i.d. n szerint, és egymástól nem feltétlenül függetlenek.

Jelölje $\|A_n\| = \sup_{|x|=1} A_x$ operátornormát, $|B_n|$ pedig az *euklideszi vektornormát*.

Célunk a négyzetes GARCH folyamatot meghatározó y_n^2 egyenletet (6)-é alakítani, és így kapcsolatba hozni a sztochasztikus rekurzív egyenletek elméletével.

Definíció: A *Ljapunov exponens*:

$$\gamma = \inf_{n \geq 1} \left\{ \frac{1}{n} * E \log \|A_1 \dots A_n\| \right\}.$$

Megjegyzés: Ha $\log^+ \|A_1\| < \infty$, akkor a szubadditív ergodtételből adódik, hogy:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} * E \log \|A_1 \dots A_n\| \right\}$$

majdnem mindenütt.

Definíció: *Oksági (kauzális) megoldáson* azt értjük, hogy X_n független B_n jövőjétől.

Tétel: Legyen A_n, B_n i.i.d. n szerint. Ha

- $E(\log(\| A_1 \|^+)) < \infty$,
- $E(\log(| B_1 |)) < \infty$,
- γ *Ljapunov-exponens* < 0 ,

akkor az $X_n = B_n + \sum_{k=1}^{\infty} A_1 * \dots * A_{n-k+1} B_{n-k}$ sor egy valószínűséggel konvergens és egyértelmű, továbbá erősen stacionárius, oksági megoldása a (6)-nak.

Következmény: Ha $d = 1$, akkor a $\gamma < 0$ feltétel $E \log | A_1 | < 0$ -ra egyszerűsödik, hiszen

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} * E \log \| A_1 \dots A_n \| &= \frac{1}{n} * E \log | A_1 \dots A_n | = \frac{1}{n} * E \sum_{i=1}^n \log | A_1 | = \\ &= E \log | A_1 | < 0. \end{aligned}$$

Erősen stacionárius sorozatok esetén az adatok összefüggésének mérésére egyfajta *keverő feltételt* használnak. Y_n véletlen vektoroknak erősen stacionárius sorozatát *erősen keverőnek* nevezzük, ha léteznek olyan ϕ_k *keverő együtthatónak* nevezett konstansok, hogy

$$\sup_{A \in \sigma(Y_s, s \leq k), B \in \sigma(Y_s, s > k)} | P(A \cap B) - P(A)P(B) | =: \phi_k \rightarrow 0, (k \rightarrow \infty).$$

ϕ_k 0-hoz tartásának sebessége egy mértéke annak, hogy az idősor mennyire gyorsan felejt el a múltját. Minél lassabban tart ϕ_k 0-hoz, annál hosszabb emlékezetű a folyamat. Az Y_n sorozat *erősen keverő geometriai sebességgel*,

ha $\exists \kappa > 0$ konstans és $a \in (0, 1)$ úgy, hogy $\phi_k \leq \kappa * a^k \forall k \geq 1$ -re. Az ilyen tulajdonsággal rendelkező sorozatok gyorsan elfelejtik a múltjukat (*Dokhan*, [9]). Az erősen keverő tulajdonság szavakban kifejezve azt vizsgálja, hogy egy adatsor elemeinek mennyire szabad még összefüggniük ahhoz, hogy a centrális határeloszlás tétel (CHT) érvényben maradjon. A CHT az adatok függetlensége és véges szórása mellett teljesül.

Tétel: (*GARCH*(p, q)-folyamatokra) Tegyük fel, hogy az $X_n = A_n X_{n-1} + B_n$ Ljapunov-exponense szigorúan negatív ($\gamma < 0$) és $\omega > 0$. Továbbá A_n véletlen mátrix, B_n véletlen vektor, (A_n, B_n) i.i.d. n szerint. Ekkor

1. ha ϵ abszolút folytonos és $E(\log |\epsilon_1|^+) < \infty$, akkor egyértelműen létezik oksági, erősen stacionárius megoldása (6)-nak, azaz a négyzetes GARCH egyenletnek.

2. továbbá, ha ϵ_1 sűrűségfüggvénye abszolút folytonos,

$E |\epsilon_1|^h < \infty \forall h < h_0$, de $E |\epsilon_1|^{h_0} = \infty$ valamely $0 < h_0 \leq \infty$ esetén, akkor $\exists \kappa_1 > 0$ olyan, hogy X_t reguláris változású ⁴ κ_1 indexszel.

⁴**Definíció:** Az \underline{X} valószínűségi vektorváltozó eloszlása *reguláris változású*, ha

$$n * P(|\underline{X}| > t * a_n, e_x \in B_S) \rightarrow t^{-\alpha} * Q(B_S),$$

ahol e_x az \underline{x} irányú egységvektor, $a_n \rightarrow \infty$ számsorozat, α konstans, B_S az n -dimenziós egységgömböt jelöli. $e_x \in B_S$ azt jelenti, hogy az \underline{x} vektor iránya szerint az egységgömb Borel-halmazában van.

Következmény:

(a) $d = 1$ esetén: $n * P(|X| > t * a_n) \rightarrow c * t^{-\alpha}$, ahol c konstans.

(b) Szintén $d = 1$ mellett a számsorozatot $a_n = n$ -nek választva kapjuk, hogy

$$P(|\underline{X}| > t * n) \sim t^{-\alpha} * \frac{c}{n},$$

azaz a túlélésfüggvény hiperbolikusan cseng le $t^{-\alpha}$ nagyságrendben, mint a vastagfarú eloszlások.

3. ha még az is teljesül, hogy az ϵ_1 sűrűségfüggvénye a 0 egy környezetében szigorúan pozitív, akkor X_t erősen keverő geometriai sebességgel.

Tétel: ($GARCH(p,q)$ -folyamatokra, Mikosch és Starica [5], 2000)

1. $\gamma < 0$ szükséges és elégséges feltétele annak, hogy létezzen egyértelmű erősen stacionárius oksági megoldása a GARCH egyenletnek.
2. $\sum_{j=1}^q \beta_j < 1$, ($\beta_j \geq 0$) szükséges $\gamma < 0$ -hoz.
3. $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$, ($\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$) elégséges $\gamma < 0$ -hoz.
4. Ha ϵ_1 véges tartójú, nincs atomja a 0-ban, (azaz $P(\epsilon_1 = 0) = 0$), $\alpha_i > 0$, $\beta_j > 0 \forall i, j$ -re, akkor $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1$ elégséges $\gamma < 0$ -hoz.

Példaként vizsgáljuk a $GARCH(1,1)$ modellt. Célunk az $y_n^2 = A_n * y_{n-1}^2 + B_n$ sztochasztikus rekurziós egyenletben szereplő A_n és B_n meghatározása, majd az egyértelmű stacionárius oksági megoldás létezéséhez szükséges és elégséges $E \log |A_n| < 0$ feltétel megadása. A fenti következményben láttuk, hogy a Ljapunov exponens (γ) szigorú negativitása éppen erre a feltételre ($E \log |A_n| < 0$) egyszerűsödik egy dimenzióban. A modell:

$$y_n = \sigma_n * \epsilon_n,$$

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 * y_{n-1}^2 + \beta_1 * \sigma_{n-1}^2.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} y_n^2 &= \sigma_n^2 * \epsilon_n^2 = [\alpha_0 + \alpha_1 * y_{n-1}^2 + \beta_1 * \sigma_{n-1}^2] * \epsilon_n^2 = \alpha_0 * \epsilon_n^2 + \alpha_1 * y_{n-1}^2 * \epsilon_n^2 + \beta_1 * \sigma_{n-1}^2 * \epsilon_n^2 = \\ &= \alpha_0 * \epsilon_n^2 + \alpha_1 * \epsilon_n^2 * y_{n-1}^2 + \beta_1 * \frac{y_{n-1}^2}{\epsilon_{n-1}^2} * \epsilon_n^2 = [\alpha_1 * \epsilon_n^2 + \beta_1 * \frac{\epsilon_n^2}{\epsilon_{n-1}^2}] * y_{n-1}^2 + \alpha_0 * \epsilon_n^2. \end{aligned}$$

Azaz

$$A_n = \alpha_1 * \epsilon_n^2 + \beta_1 * \frac{\epsilon_n^2}{\epsilon_{n-1}^2} = \frac{\alpha_1 * \epsilon_n^2 * \epsilon_{n-1}^2 + \beta_1 * \epsilon_n^2}{\epsilon_{n-1}^2},$$

$$B_n = \alpha_0 * \epsilon_n^2.$$

Így a

$$\begin{aligned} E \log | A_n | &= E \log \left| \frac{\alpha_1 * \epsilon_n^2 * \epsilon_{n-1}^2 + \beta_1 * \epsilon_n^2}{\epsilon_{n-1}^2} \right| = E \log | \alpha_1 * \epsilon_n^2 * \epsilon_{n-1}^2 + \beta_1 * \epsilon_n^2 | - \\ &- E \log \epsilon_{n-1}^2 = E \log \epsilon_n^2 + E \log | \alpha_1 * \epsilon_{n-1}^2 + \beta_1 | - E \log \epsilon_{n-1}^2 = \\ &= E \log | \alpha_1 * \epsilon_{n-1}^2 + \beta_1 | = \int_0^\infty \log(y + \beta_1) * \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_1}} * \exp\left(-\frac{y}{2\alpha_1}\right) dy < 0 \end{aligned}$$

egyenlőtlenséget kell megoldani. Adott α_1 esetén β_1 -nek kisebbnek kell lennie a hozzátartozó értéktől ahhoz, hogy a fenti egyenlőtlenség fennálljon. A következők adódnak:

α_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\beta_1 <$	0.908	0.828	0.757	0.692	0.633	0.579	0.529	0.483	0.44	0.4

Az y_n^2 és a σ_n^2 a folyamatok kielégítik az alábbi *sztochasztikus rekurzív differenciaegyenletet*:

$$X_n = A_n X_{n-1} + B_n.$$

Az *állapottér-reprezentáció (Markov-reprezentáció)*:

Legyen $X_n = (y_n^2, \dots, y_{n-p+1}^2, \sigma_n^2, \dots, \sigma_{n-q+1}^2)^T \in \mathbb{R}^{p+q}$ az állapotvektor és így definiáljuk az *átmenetmátrixot (transition matrix)*:

$$A_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 * \epsilon_n^2 & \dots & \alpha_{p-1} * \epsilon_n^2 & \alpha_p * \epsilon_n^2 & \beta_1 * \epsilon_n^2 & \dots & \beta_{q-1} * \epsilon_n^2 & \beta_q * \epsilon_n^2 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p & \beta_1 & \dots & \beta_{q-1} & \beta_q \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

azaz

$$A_n = \begin{bmatrix} \eta_{\epsilon_n} & \alpha_p * \epsilon_n^2 & \xi_{\epsilon_n} & \beta_q * \epsilon_n^2 \\ I_{p-1} & 0 & 0 & 0 \\ \eta & \alpha_p & \xi & \beta_q \\ 0 & 0 & I_{q-1} & 0 \end{bmatrix},$$

ahol

$$\eta_{\epsilon_n} = (\alpha_1 * \epsilon_n^2, \dots, \alpha_{p-1} * \epsilon_n^2),$$

$$\eta = (\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}),$$

$$\xi_{\epsilon_n} = (\beta_1 * \epsilon_n^2, \dots, \beta_{q-1} * \epsilon_n^2),$$

$$\xi = (\beta_1, \dots, \beta_{q-1}),$$

és I_{p-1} , I_{q-1} a $p - 1$ illetve $q - 1$ méretű identitásmátrixok. Vegyük észre, hogy a várhatóérték-mátrix két sora azonos, ezért szinguláris lesz:

$$EA_n = \begin{bmatrix} \eta & \alpha_p & \xi & \beta_q \\ I_{p-1} & 0 & 0 & 0 \\ \eta & \alpha_p & \xi & \beta_q \\ 0 & 0 & I_{q-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$B_n = (\omega * \epsilon_n^2, \dots, 0, \alpha_0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{p+q}$$

választással az alábbi *sztochasztikus rekurzív egyenlethez* jutunk:

$$X_{n+1} = A_{n+1}X_n + B_{n+1}.$$

Megjegyzés: $q := 0$ mellett kapjuk az $ARCH(p)$ folyamat *állapotter-reprezentációját*.

Az állapotteres felírással a négyzetes GARCH folyamat (y_n^2) és a σ_n^2 négyzetes volatilitásfolyamat beágyazható az X_n *Markov-láncba*, így alkalmazhatók a sztochasztikus rekurzív egyenletekre vonatkozó tételek [9]. Ha az A_n véletlen mátrixok Ljapunov-exponense szigorúan negatív (ez a feltétel biztosítja a stacionaritást), és az ϵ_n eloszlására vonatkozó gyenge feltételek mellett az

X_n Markov-lánc erősen keverő geometriai sebességgel, akkor következik, hogy X_n és σ_n is erősen keverő lesz geometriai sebességgel.

Most ARCH(1) modell esetén fogjuk alkalmazni a sztochasztikus rekurzív egyenletekre vonatkozó tételket. Az ARCH(1) folyamatot meghatározó két egyenlet:

1. $y(t) = \sigma(t) * \epsilon(t) (\Rightarrow y^2(t) = \sigma^2(t) * \epsilon^2(t)),$
2. $\sigma^2(t) = \alpha_0 + \alpha_1 * y^2(t - 1).$

Az $y^2(t)$ stochasztikus rekurzív differenciaegyenletté alakítható:

$$y^2(t) = \alpha_0 * \epsilon^2(t) + \alpha_1 * y^2(t - 1) * \epsilon^2(t) = A_t * y^2(t - 1) + B_t,$$

ahol $A_t = \alpha_1 * \epsilon^2(t)$, $B_t = \alpha_0 * \epsilon^2(t)$. Az ARCH(1) folyamatoknál maradván célunk a κ_1 megadása az α_1 együttható függvényében. Tegyük fel, hogy pontosan egy κ_1 megoldása létezik a

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} * \log(E \| A_1 \| ^n)^{\kappa_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log(E \| A_1 \|)^{\kappa_1} = \log(E \| A_1 \|)^{\kappa_1}$$

egyenletnek. Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$(E | A_1 |)^{\kappa_1} = 1.$$

Ekkor a κ_1 megoldást *regularitási indexnek* nevezzük. Fontos, hogy $\epsilon(t)$ Gauss fehérzaj.

$$E | \alpha_1 * \epsilon^2(t) |^{\kappa_1} = \alpha_1^{\kappa_1} * \sqrt{\frac{2}{\pi}} * \int_0^\infty x^{2\kappa_1} * e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (2 * \alpha_1)^{\kappa_1} * \frac{1}{\sqrt{\pi}} * \Gamma(\kappa_1 + \frac{1}{2}) = 1.$$

⁵Mivel $\alpha_1 * \epsilon^2(t) \geq 0$, így az abszolútérték automatikusan elhagyható. Ez az egyenlet explicite nem oldható meg, a következő táblázatot szokták használni:

⁵A Γ -függvény: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} * e^{-t} dt$

α_1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1	1.5	2	2.5	3	3.5
κ_1	13.24	14.18	12.37	1.59	1.15	1	0.54	0.31	0.17	0.075	0.007

Az $\alpha_1 = 1$ -hez éppen a $\kappa_1 = 1$ tartozik, hiszen

$$E(\epsilon^2(t)) = 2 * \frac{1}{\sqrt{\pi}} * \Gamma(1 + \frac{1}{2}) = 2 * \frac{1}{\sqrt{\pi}} * \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1.$$

Tulajdonságok:

- $\kappa_1 > 1$, ha $\alpha_1 \in (0, 1)$.
- $\kappa_1 = 1$, ha $\alpha_1 = 1$.
- $\kappa_1 < 1$, ha $\alpha_1 \in (1, 2 * e^c) \approx (1, 3.5686)$.
- $E[y^{2m}(t)] < \infty$, amennyiben $m < \kappa_1$.

4.2. A stacionárius megoldás létezése

ARCH(1) esetben normális eloszlású $\epsilon(t)$ mellett létezik erősen stacionárius $y(t)$ megoldás, ha $\alpha_0 > 0$ és $\alpha_1 \in (0, 2 * e^c)$, ahol c az úgynevezett *Euler*-konstans ($2 * e^c \approx 3,5686$). GARCH(1,1) esetben az $\omega > 0$ és $E \log(\alpha_1 * \epsilon^2 + \beta_1) < 0$ feltételek szükségesegek és elégségesek is az erősen stacionárius megoldás létezéséhez (*Mikosch, Starica* [5]). Az általános *GARCH*(p, q) eset azonban sokkal összetettebb: pontosan akkor létezik erősen stacionárius megoldás, ha az állapotter-reprezentációban szereplő A_n véletlen mátrixok segítségével definiált Ljapunov-exponens negatív. *Bollerssev* tétele szükséges és elégséges feltételt adott a *GARCH*(p, q) folyamatok *másodrendben stacionárius megoldásának* létezésére [1].

Tétel: [*Bollerssev*, 1986] Az (3) és (4) egyenletek által meghatározott *GARCH*(p, q) folyamatnak $E(\epsilon_n) = 0$ és $\text{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0$ ($t \neq s$) mellett pontosan akkor létezik *másodrendben stacionárius megoldása*, ha

$$A(1) + B(1) = \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1.$$

Továbbá:

- $\sigma^2(\epsilon_n) = \omega(1 - A(1) - B(1))^{-1} = \omega * (1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j)^{-1}$,
- $\sigma^2(y_n) = \omega(A(1) - B(1))^{-1}$,
- $E(y_n) = 0$.

Tehát a folyamatot meghajtó zaj nem skálázható át tetszőlegesen az ω (pozitív) konstans miatt.

Az (2) és (3) egyenletek által meghatározott $GARCH(p, q)$ folyamat *erősen stacionárius megoldásának* létezésére szükséges és elégséges feltételt *Bougerol* és *Picard* [2] adott.

Tétel: [*Bougerol* és *Picard*, 1992] Tegyük fel, hogy az $\{\epsilon_n, n \geq 0\}$ i.i.d. sorozat. A $GARCH(p, q)$ folyamatnak akkor és csak akkor létezik egyértelmű *erősen stacionárius, kauzális megoldása*, ha az A_n véletlen mátrix γ *top Ljapunov exponense* szigorúan negatív:

$$\gamma := \inf_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} E(\log \| A_0 A_1 \dots A_n \|) < 0.$$

Továbbá az erősen stacionárius megoldás *ergodikus*.

Megjegyzés: (*Integrated GARCH*) Ha $\omega > 0$ és $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1$, akkor a folyamatot $IGARCH(p, q)$ -nak nevezzük. Az $IGARCH$ folyamatnak ugyanazon feltételek mellett van erősen stacionárius megoldása, mint a $GARCH$ folyamatnak, de az y_n -ek második momentuma végtelen. Vegyük észre, hogy $E\sigma^2 = Ey^2$. Így

$$E\sigma^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j * Ey^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j * E\sigma^2 = \alpha_0 + E\sigma^2,$$

következésképpen $E\sigma^2 = Ey^2 = \infty$.

4.3. GARCH folyamatok paraméterbecslése

Legyen (y_k) , $0 \leq k < \infty$ legyen egy másodrendben stacionárius folyamat. Az $\omega^*, \alpha_1^*, \dots, \alpha_p^*, \beta_1^*, \dots, \beta_q^*$ rendszerparamétereket becsüljük a megfigyelt (y_k) adatokból. A paramétervektor $\theta^* = (\omega^*, \alpha_1^*, \dots, \alpha_p^*, \beta_1^*, \dots, \beta_q^*)$. Legyen $D = \{\theta : A, B \text{ stabilak}\} \subset \mathbb{R}^{p+q+1}$.

Feladatunk a $\log p(y_1, \dots, y_N, \theta)$ loglikelihood-függvény kiszámolása adott (y_1, \dots, y_N) megfigyelésvektor mellett. A folyamategyenletek:

$$\sigma_t^2(\theta) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i * y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j * \sigma_{t-j}^2(\theta),$$

$$\epsilon_t = \frac{y_t}{\sigma_t(\theta)}.$$

1. Feltétel: ([3]) Tegyük fel, hogy az

- $\{\epsilon_n, -\infty < n < \infty\}$ fehérzaj folyamat független, azonos eloszlású sztochasztikus folyamat,
- ϵ_0^2 nem degenerált valószínűségi változó,
- $\exists \delta > 0$ úgy, hogy

$$E(|\epsilon_0^2|^{1+\delta}) < \infty,$$

- ϵ_n sűrűsége a 0 körül ilyen alakú:

$$f_\epsilon(t) = |t|^{-c} \quad 0 < c < 1 - \text{el.}$$

Legyen $D_0 \subset D$ kompakt tartomány úgy, hogy $\theta^* \in \text{int} D_0$. A kvázi maximum-likelihood becslés konzisztenciáját Berkes bizonyította.

Tétel: (Berkes, [3]) Tegyük fel, hogy teljesül

- az 1. Feltétel,
- $\theta^* \in \text{int} D_0$,

- $A(x)$, $B(x)$ stabil és relatív prím polinomok,
- $\gamma < 0$ (erősen stacionárius a GARCH folyamatunk).

Ha Gauss fehérzaj hajtja meg a folyamatunkat, akkor a likelihood-függvény logaritmus:

$$L_n(\theta) = \sum_{k=1}^n -\frac{1}{2} \left(\log \sigma_k^2 + \frac{y_k^2}{\sigma_k^2(\theta)} \right).$$

A $\hat{\theta}_n$ kvázi maximum-likelihood becslés (*quasi maximum estimator*) definíciója:

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta \in D_0} L_n(\theta).$$

Ekkor $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta^*$ majdnem mindenütt, midőn $n \rightarrow \infty$.

Tegyük fel, hogy az **1. Feltétel** teljesül. Feladatunk a

$$\log p(y_1, \dots, y_N, \theta)$$

loglikelihood-függvény kiszámítása adott (y_1, \dots, y_N) megfigyelések esetén [6]. A rendszer a következő:

$$\sigma_n^2(\theta) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{n-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{n-j}^2,$$

$$\epsilon_n = \frac{y_n}{\sigma_n(\theta)}.$$

Legyen $Y = (y_1, \dots, y_N)^T$ és $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)^T$. Ekkor $\epsilon = F(Y)$, a Jacobi-mátrix

$$J = \frac{dF}{dY} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \frac{1}{\sigma_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & \frac{1}{\sigma_N} \end{bmatrix}.$$

Így

$$p(Y, \theta) = p(\epsilon, \theta) \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i},$$

$$\log p(Y, \theta) = - \sum_{i=1}^N \log \sigma_i - \sum_{i=1}^N \frac{\epsilon_i^2}{2}.$$

Tehát N -elemű megfigyelésminta esetén a loglikelihood-függvény

$$L_N(\theta) = \sum_{n=1}^N l_n(\theta) = \sum_{n=1}^N -\frac{1}{2}(\log \sigma_n^2(\theta) + \frac{y_n^2}{\sigma_n^2(\theta)}).$$

Megjegyzés: A tapasztalat azt mutatja, hogy elég hosszú logaritmikus hozamsorozat-minták esetén a $\sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i + \sum_{j=1}^q \hat{\beta}_j \approx 1$. Ha kisebb részmintát használunk a paraméterbecsléshez, akkor a becült paraméterértékek összege bár nem lesz nagyon kicsi, de 1-től távol marad.

4.4. Rekurzív hibabecslés

Célunk a θ^* paramétervektor megtalálása. Először is vegyünk egy tetszőleges $\theta \in D_0$ vektort, majd definiáljuk az $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_n(\theta)$ *becsült predikciós hibafolyamatot* 0 kezdőértéket feltételezve a következő módon:

$$B(S)\sigma^2 = \omega + A(S)y^2,$$

$$\epsilon_n = \frac{y_n}{\sigma_n(\theta)}.$$

A *Jacobi-determináns* ekkor:

$$J = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i(\theta)}.$$

Definiáljuk az *aszimptotikus költségfüggvényt* a következő módon:

$$W(\theta) = \frac{1}{2}E(\bar{\epsilon}_n^2(\theta) + \log \sigma(\theta)).$$

Jelölje $G(\theta)$ az *aszimptotikus költségfüggvény deriváltját*:

$$G(\theta) = W_\theta(\theta) = E(\bar{\epsilon}_{\theta n}(\theta)\bar{\epsilon}_n(\theta) + \frac{\sigma_{\theta n}(\theta)}{\sigma_n(\theta)}) = E(\frac{\sigma_{\theta n}(\theta)}{\sigma_n(\theta)}(1 - \frac{y_n^2}{\sigma_n^2})),$$

ahol $\bar{\epsilon}_{\theta_n}(\theta)$ illetve $\sigma_{\theta_n}(\theta)$ a θ -szerinti deriváltját jelenti az $\bar{\epsilon}_n(\theta)$, $\sigma_n(\theta)$ folyamatoknak. A becslési probléma a $G(\theta) = 0$ egyenlet gyökének megtalálása. Az általános sztochasztikus közelítő eljárás rekurzív módon működik ([8]):

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{n} \left(\frac{\sigma_{\theta_n}}{\sigma_n} \left(\frac{y_n^2}{\sigma_n^2} - 1 \right) \right),$$

ahol $\sigma_n = \sigma_n(\theta)$ kiértékelve a θ_n helyen, $\sigma_{\theta_n} = \sigma_{\theta_n}(\theta)$ szintén a $\theta = \theta_n$ helyen.

4.5. A derivált folyamat stacionárius limesze

Idézzük fel az állapotegyenletet:

$$X_{n+1} = A_{n+1}X_n + B_{n+1}.$$

Deriváljuk le a θ paramétervektor szerint:

$$X_{\theta,n+1} = A_{\theta,n+1}X_n + A_{n+1}X_{\theta n} + B_{\theta,n+1}.$$

Tekintsük a két egyenletet egy közös rendszerben:

$$\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ X_{\theta,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n+1} & 0 \\ A_{\theta,n+1} & A_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ X_{\theta n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{n+1} \\ B_{\theta,n+1} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

ahol $X_{\theta n}$ az X_n θ -szerinti deriváltját jelöli.

A következő lemma *Mikosch* és *Straumann* [10] eredménye, ez bizonyítja az (7) egyenletben szereplő átmenetmátrix *top Ljapunov exponensének* (γ_P) szigorú negativitását.

Lemma: [*Mikosch* és *Straumann*] Tegyük fel, hogy

$$P_n = \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ B_n & C_n \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

egy $k \times k$ -as i.i.d. mátrixsorozat, melyre $E \| P_1 \|^s < \infty$ valamilyen $s > 0$

esetén. Itt $A_n \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_n \in \mathbb{R}^{(k-r) \times r}$, $C_n \in \mathbb{R}^{(k-r) \times (k-r)}$. Ekkor a P_n top Ljapunov exponense (γ_P) szigorúan negatív akkor és csak akkor, ha az (A_n) , (C_n) mátrixsorozatok top Ljapunov exponensei is szigorúan negatívak:

$$\gamma_P < 0 \Leftrightarrow \gamma_A < 0 \text{ és } \gamma_c < 0.$$

Könnyen látszik, hogy ha még az is teljesül, hogy

- $E(\log^+ \left\| \begin{bmatrix} B_0 \\ B_{\theta 0} \end{bmatrix} \right\|) < \infty$,
- $\gamma_P < 0$,

akkor minden $n \in \mathbb{N}$ -re az

$$\begin{bmatrix} X_n \\ X_{\theta n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_n \\ B_{\theta n} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{k-1} \begin{bmatrix} A_{n-j} & 0 \\ A_{\theta, n-j} & A_{n-j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{n-k} \\ B_{\theta, n-k} \end{bmatrix}$$

sor egy valószínűséggel konvergencia és az $\begin{bmatrix} X_n \\ X_{\theta n} \end{bmatrix}$ folyamat egyértelmű megoldása az (7) közös rendszeregyenletnek.

5. Bilineáris és egyéb alternatív modellek

Definíció: $e(t)$ legyen i.i.d. valószínűségi változó sorozat, $Ee(t) = 0$, $D^2e(t) = \sigma^2$. Ekkor az

$$\epsilon(t) = e(t) + \beta * e(t-1) * e(t-2)$$

folyamatot *bilineáris fehérzaj*nak (*BWN: bilinear white noise*) nevezzük.

Tulajdonságai:

- $E\epsilon(t) = 0$,
- $E[\epsilon(t) * \epsilon(t-1)] = E[(e(t) + \beta * e(t-1) * e(t-2)) * (e(t-1) + \beta * e(t-2) * e(t-3))] = 0$
 $\Rightarrow \epsilon(t)$ is korrelálatlan sorozat 0 várható értékkel, tehát fehérzaj,

- $E[\epsilon(t) * \epsilon(t-2)] = E[(e(t) + \beta * e(t-1) * e(t-2)) * (e(t-2) + \beta * e(t-3) * e(t-4))] = 0,$
- $E[\epsilon(t) * \epsilon(t-p)] = 0 \quad p > 2 - re \text{ is,}$
- $E[\epsilon(t-1) * \epsilon(t) * \epsilon(t+1)] = E[(e(t) + \beta * e(t-1) * e(t-2)) * (e(t-1) + \beta * e(t-2) * e(t-3)) * (e(t+1) + \beta * e(t) * e(t-1))] = E[\beta * e^2(t) * e^2(t-1)] > 0.$

Definíció: $y(k)$ bilineáris folyamat ($BL(p,q,P,Q)$), ha

$$y(k) = \sum_{i=1}^p a_i * y(k-i) + \sum_{j=1}^q b_j * \epsilon(k-j) + \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^Q c_{ij} * y(k-i) * \epsilon(k-j) + \epsilon(k),$$

ahol $\epsilon(k)$ BWN -t jelöl.

A bilineáris folyamatok nemlineárisak, földrengések leírására gyakran használják.

A $BL(1,0,1,1)$ folyamat:

$$y(k) = a * y(k-1) + b * y(k-1) * \epsilon(k-1) + \epsilon(k).$$

Érdekessége, hogy $R(\tau) = a * R(\tau-1) = \dots = a^\tau * R(0)$, éppen az $AR(1)$ folyamat autokovariancia-függvénye. Az erősen stacionárius folyamat létezéséhez elégséges feltételt ad az $a^2 + b^2 \leq 1$ feltétel.

Tekintsük az

$$X(t) = \underbrace{a * X(t-1) + b * X(t-1) * \epsilon(t-1)}_{Y(t-1)} + \epsilon(t) = Y(t-1) + \epsilon(t)$$

$BL(1,0,1,1)$ folyamatot. Tegyük fel, hogy $\epsilon(t)$ GWN . Ekkor $Y(t)$ alakja az alábbi:

$$Y(t) = (a + b * \epsilon(t)) * X(t) = (a + b * \epsilon(t))(Y(t-1) + \epsilon(t)).$$

Következésképpen az $Y(t) = \underbrace{(a + b * \epsilon(t))}_{A(t)} * Y(t - 1) + \underbrace{(a * \epsilon(t) + b * \epsilon^2(t))}_{B(t)}$ sztochasztikus rekurzív egyenlethez jutunk.

$A(t) \sim N(a, b^2)$ esetén keresünk feltételt, amely mellett létezik Y stacionárius megoldás. Ennek érdekében a $E \log | A(t) | < 0$ feltételnek kell teljesülnie, azaz az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b}} * \int_{-\infty}^{\infty} \log | x | * e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx < 0$$

egyenlőtlenségnek kell fennállnia.

$$1 = E(A(t))^{\kappa_1} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} * \int_{-\infty}^{\infty} | x |^{\kappa_1} * e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx = 1.$$

Az $x = by + a$ helyettesítést használva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b}} * \int_{-\infty}^{\infty} | x |^{\kappa_1} * e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} * \int_0^{\infty} (by + a)^{\kappa_1} * e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1.$$

A fenti egyenletet csak speciálisan megválasztott a és b mellett lehet megoldani. $a = 0$ mellett a folyamat:

$$X(t) = b * X(t - 1) * \epsilon(t - 1) + \epsilon(t).$$

A megoldandó egyenlet $x = b * y$ helyettesítéssel az alábbivá egyszerűsödik:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b}} * \int_{-\infty}^{\infty} | x |^{\kappa_1} * e^{-\frac{x^2}{2b^2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} * \int_0^{\infty} (by)^{\kappa_1} * e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1.$$

Most alkalmazzunk $y^2 = t$, majd $\frac{t}{2} = z$ változócserét, így a fenti egyenlet tovább egyenlő az alábbival:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} * b^{\kappa_1} * \int_0^{\infty} t^{\frac{\kappa_1}{2}} * e^{-\frac{t}{2}} * \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{b^{\kappa_1}}{\sqrt{2\pi}} * 2^{\frac{\kappa_1+1}{2}} * \underbrace{\int_0^{\infty} z^{\frac{\kappa_1-1}{2}} * e^{-z} dz}_{\Gamma(\frac{\kappa_1+1}{2})} = 1.$$

Mivel $\frac{b^{\kappa_1}}{\sqrt{2\pi}} * 2^{\frac{\kappa_1+1}{2}} = \frac{b^{\kappa_1}}{\sqrt{\pi}} * (\sqrt{2})^{\kappa_1}$:

$$\frac{(\sqrt{2} * b)^{\kappa_1}}{\sqrt{\pi}} * \Gamma\left(\frac{\kappa_1 + 1}{2}\right) = 1.$$

A $\Gamma\left(\frac{\kappa_1+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{(\sqrt{2}*b)^{\kappa_1}}$ egyenlet numerikusan megoldható, b függvényében kapjuk meg a regularitási indexeket belőle. Amennyiben $a = 0$ és $b = 1$, akkor $\kappa_1 = 2$, $a = 0$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ -hez pedig $\kappa_1 = 0$ tartozik.

Megjegyzés:

- A GARCH(1,1) modell alkalmazásainál gyakori, hogy a becslés során $\alpha_1 + \beta_1 \approx 1$ vagy egyenlőség áll fenn. Ha $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, akkor *IGARCH* (*Integrated GARCH*) folyamatról beszélünk, ekkor az erős stacionaritás feltétele, hogy

$$E[\log \alpha_1 + \epsilon_{n-1} + \beta_1] < 0.$$

- *Baillie, Bollerssev és Mikkelsen* 1996-ban vezették be a *Fractionally Integrated GARCH* modellt a hosszú emlékezetű folyamatok elemzésére. Az alap a *FIGARCH(1,d,0)* modell volt, amely a következő:

$$(1 - S^{-1})^d \epsilon_t^2 = \alpha_0 + \nu_t - \beta_1 * \nu_{t-1},$$

ahol $\nu_t = \epsilon_t^2 - \delta_t$, S^{-1} pedig a visszaléptetés operátora.

- A GARCH folyamatok nem tudják mérni a sokkok irányát, mivel a feltételes variancia csak a sokkok négyzetétől függ. Ennek a hiányságnak a kiküszöbölésére hoztak létre számos különböző nemlineáris GARCH folyamatot. *Nelson* 1991-ben fejlesztette ki az exponenciális GARCH modellt:

$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 * f(z_{t-1}) + \beta_1 * \log(\sigma_{t-1}^2),$$

ahol $f(z_{t-1}) = \lambda_1 * \frac{\epsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + (|z_{t-1}| + E|z_{t-1}|)$ és $z_{t-1} = \frac{\epsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$.

- Az *EGARCH* (*Exponenciális GARCH*) modell a múltbeli sokkok és a feltételes szórásnégyzet logaritmusai közötti kapcsolatot írja le. Ekkor $f(z_t)$ alakja:

$$f(z_t) = (\alpha_1 + \lambda_1) * z_t * \chi_{\{z_t > 0\}} + (\alpha_1 - \lambda_1) * z_t * \chi_{\{z_t < 0\}}.$$

Vagyis a negatív sokkoknak $(\alpha_1 - \lambda_1)$ hatása van a feltételes variancia logaritmusára, míg a pozitív sokkoknak $(\alpha_1 + \lambda_1)$.

- Szintén egy alternatív modell:

$$\sigma = A | y | + \omega.$$

A $\sigma_t = \omega + \alpha_1 * | y_{t-1} |$ abszolútértékes modell véges varianciájú minden $\omega, \alpha_1 > 0$ mellett.

- Általános nemlineáris visszacsatolás:

$$x_{t+1} = f(x_t, y_t),$$

$$\sigma_{t+1} = h(x_t),$$

$$y_t = \sigma_t * \epsilon_t.$$

- Hosszú emlékezetű a *lineáris ARCH modell*:

$$y_n = \sigma_n * \epsilon_n,$$

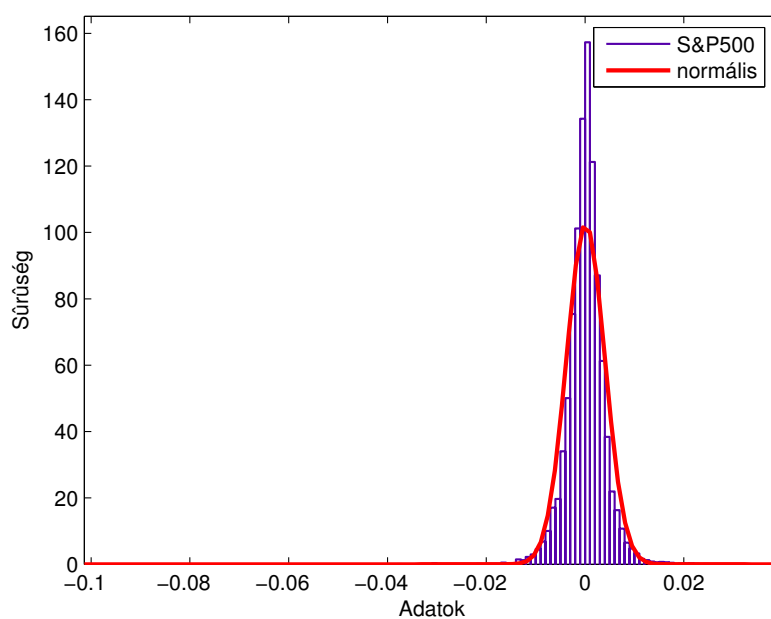
$$\sigma_n = a + \sum_{i=1}^{\infty} b_i y_{n-i},$$

ahol $a > 0$, és $b_i \geq 0$. [L. Giraitis, P. P. Robinson és D. Surgailis (2000)]

6. Historikus és szimulált idősorok

6.1. S&P500

Az amerikai **S&P500** kompozit index (, amely 411 részvényt tartalmaz) logaritmikus hozamfolyamatára illesztett normális eloszlás (1950.01.03-tól 2000.10.09-ig, 13338 adat):

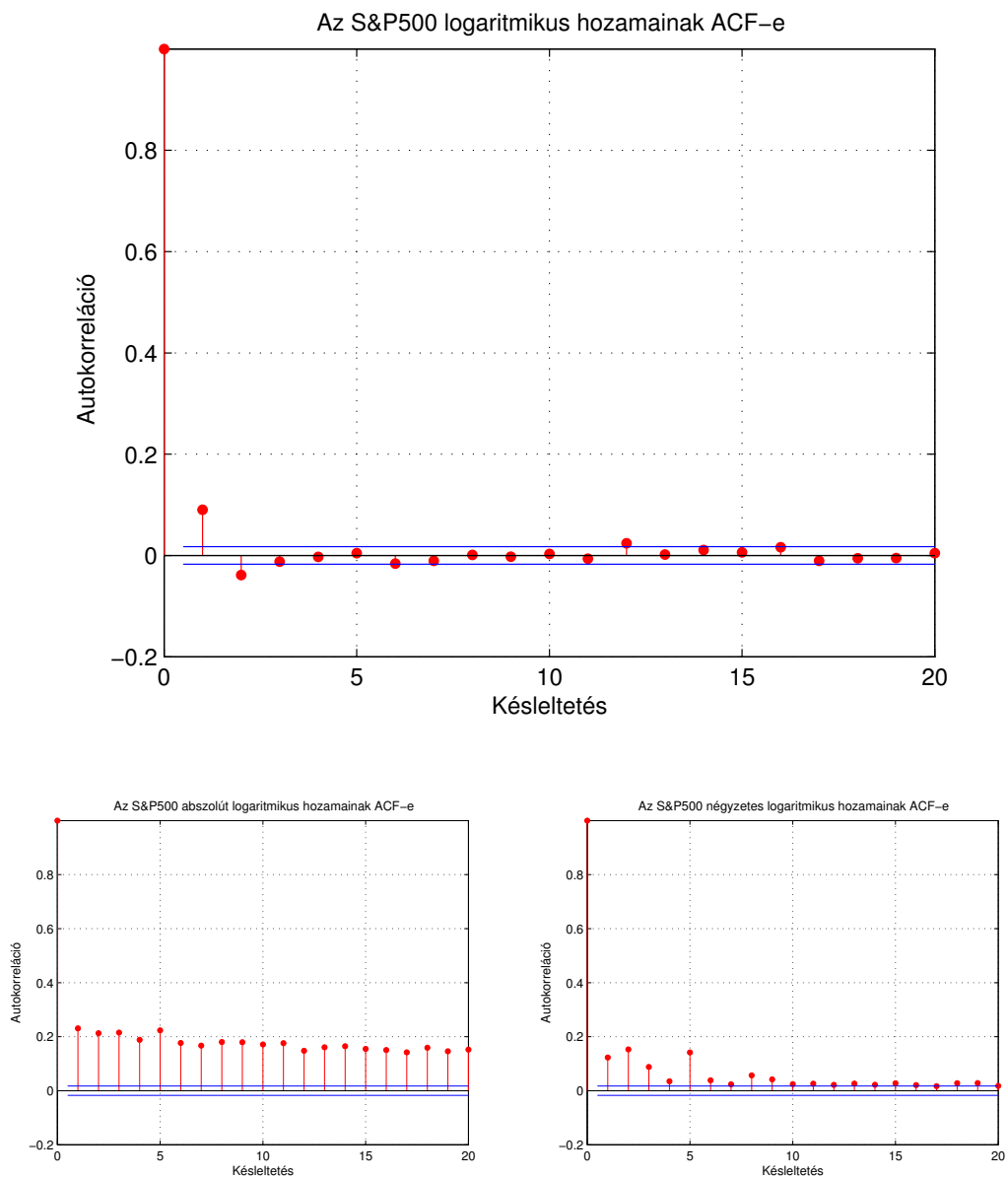


7. ábra. Az **S&P500** loghozamaira illesztett normális eloszlás

Eloszlás:	Normális
Log-likelihood érték:	55096.4
Tartomány:	$-\text{Inf} < y < \text{Inf}$
Várható érték:	0.000125102
Szórásnégyzet:	1.51217e-005

Paraméter	Becslés	Standard hiba
μ	0.000125102	3.3671e-005
σ	0.00388867	2.38103e-005

A fenti logaritmikus hozamfolyamat autokorreláció-függvénye:



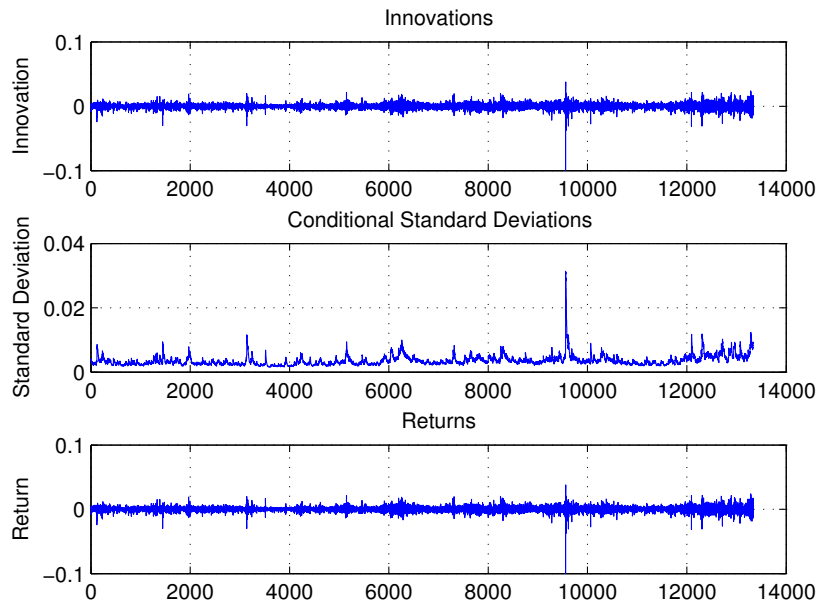
$B(s)$ jelölje az autokovariancia-függvényt: $B(s) = \text{Cov}(\xi_t, \xi_{t+s})$, $s \in \mathbb{Z}$. A becslése pedig:

$$\hat{B}(s) = \frac{1}{n-s} \sum_{t=1}^{n-s} (\xi_t - \bar{\xi}) * (\xi_{t+s} - \bar{\xi}).$$

A külföldi devizaárfolyamok, tőzsdeindexek, részvényárfolyamok $y(t)$ logaritmikus hozamsorozatának az alábbi közös tulajdonságai vannak [5]:

- Az adatok becsült ACF-e minden lag-re (késleltetésre) kicsi, kivéve nagy valószínűséggel az első néhányat. A mintaátlag nem tér el szignifikánsan a 0-tól. Ez arra utal, hogy $y(t)$ fehérzaj folyamat.
- Az abszolútértékben vett és négyzetes megfigyeléseink ACF-e pozitív, gyorsan csökken az első néhány lag-re, és „majdnem konstans” marad a nagyobb lag-ekre.

Hogyan illeszkedik a GARCH(1,1) modell?



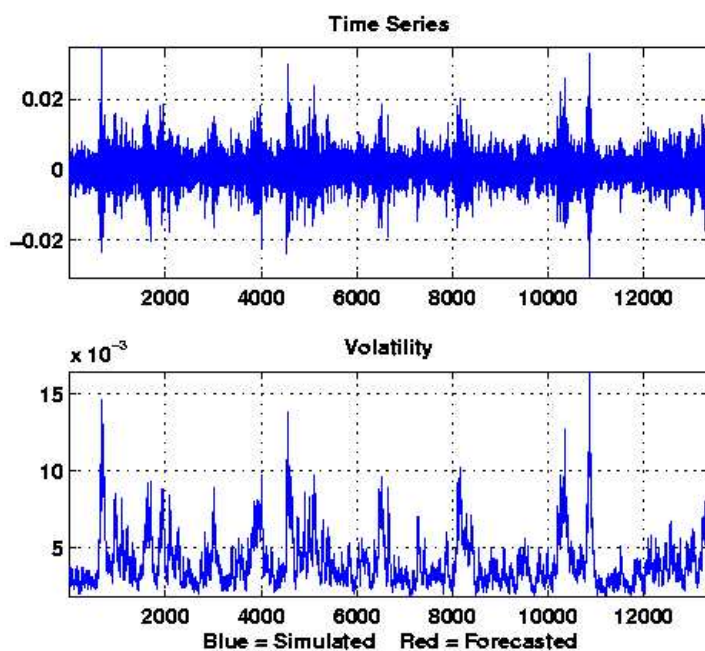
8. ábra. A GARCH(1,1) modellillesztés eredménye

Paraméter	Érték	Standard hiba	T Statisztika
C	0.00020378	2.4932e-005	8.1733
ω	2e-007	1.7136e-008	11.6712
α_1	0.89888	0.0028534	315.0180
β_1	0.090931	0.0019866	45.7723

Log-likelihood érték: 57148.3

C jelöli az y hozamok átlagát.

A logaritmusos hozamfolyamatra illesztett GARCH(1,1) folyamat:



9. ábra. Az illesztett GARCH(1,1) folyamat

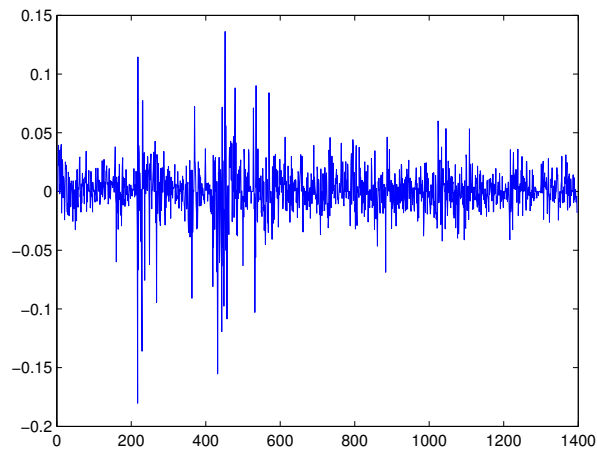
A modell:

$$y_n = \sigma_n * \epsilon_n,$$

$$\sigma_n^2 = 2 * 10^{-7} + 0.89888 * y_{n-1}^2 + 0.090931 * \sigma_{n-1}^2.$$

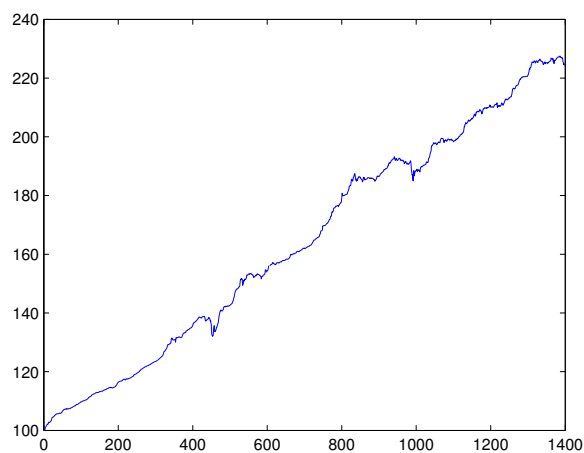
6.2. BUX és MAX

Nézzünk meg egy magyar részvényindex, a **BUX**, napi záró árfolyamait 1996.12.31. és 2002.05.21. között (1397adat):



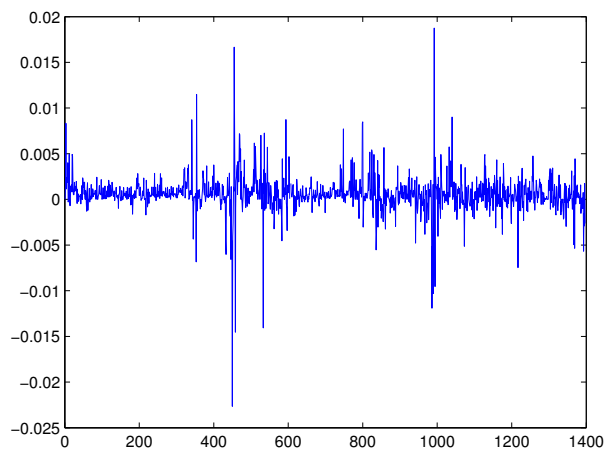
10. ábra. A **BUX** napi záróárfolyamai 1996.12.31-2002.05.21.

Ugyanebben az időintervallumban tekintjük a **MAX** állampapírt, amely láthatóan sokkal kevesebb kockázatot rejtő eszköz:



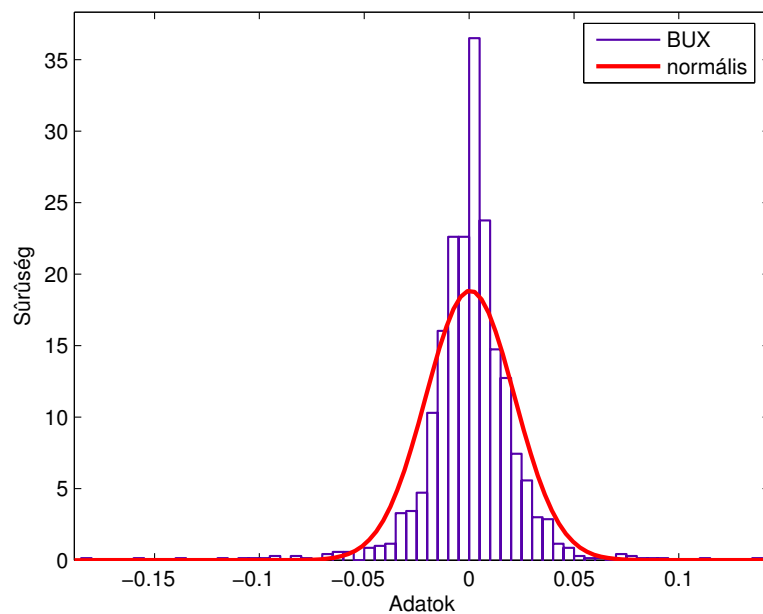
11. ábra. A **MAX** napi záróárfolyamai 1996.12.31-2002.05.21.

A Budapesti Érték Tőzsde indexének (**BUX**) logaritmikus hozamai 1996.12.31. és 2002.05.21. között:



12. ábra. A **BUX** logaritmikus hozamai 1996.12.31-2002.05.21.

A **BUX** adatokra történő normális eloszlás illesztés eredményei:

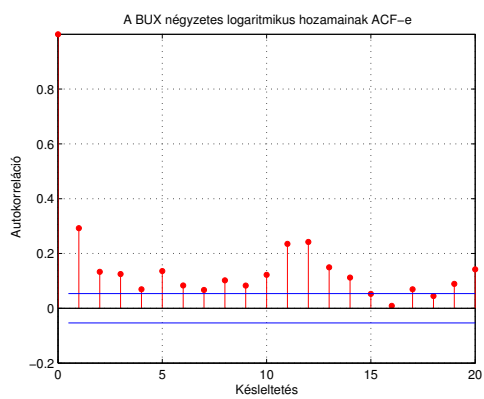
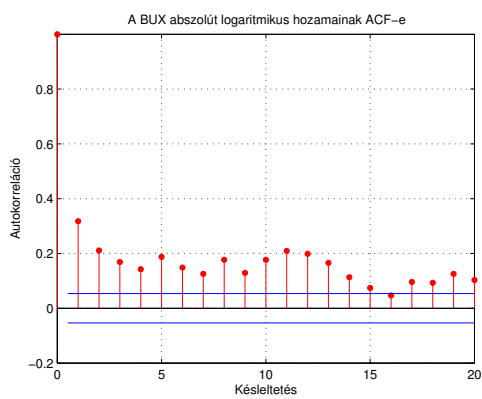
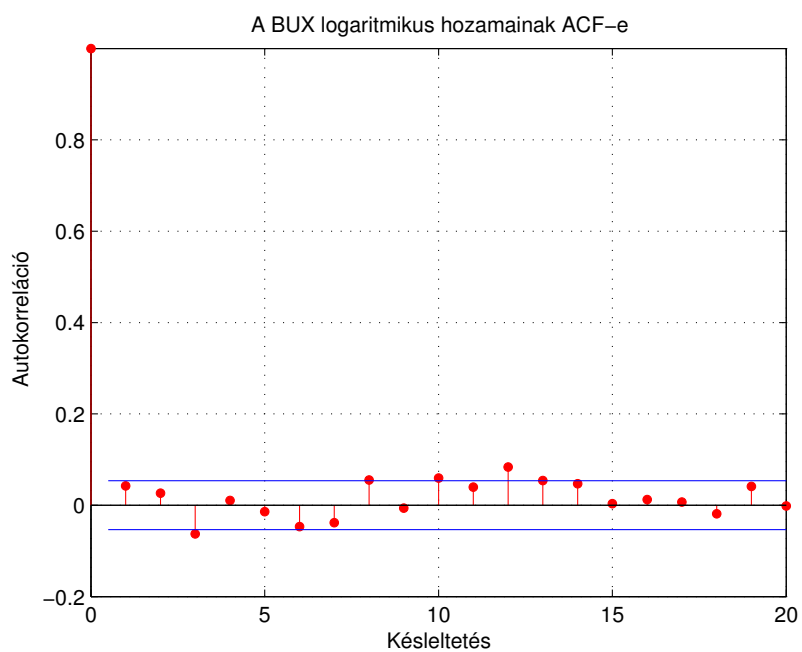


13. ábra. A **BUX** logaritmikus hozamaira illesztett normális eloszlás

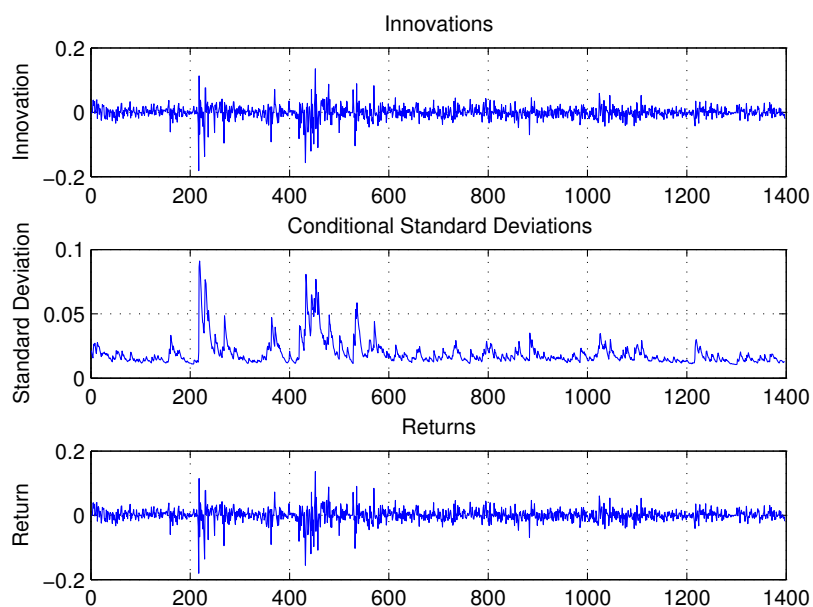
Eloszlás: Normális
Log-likelihood érték: 3404.47
Tartomány: $-\text{Inf} < y < \text{Inf}$
Várható érték: 0.000513945
Varianscia: 0.000447816

Paraméter	Becslés	Standard hiba
mu	0.000513945	0.000566176
sigma	0.0211617	0.000400562

Az **BUX** adatok autokovariancia-függvénye:

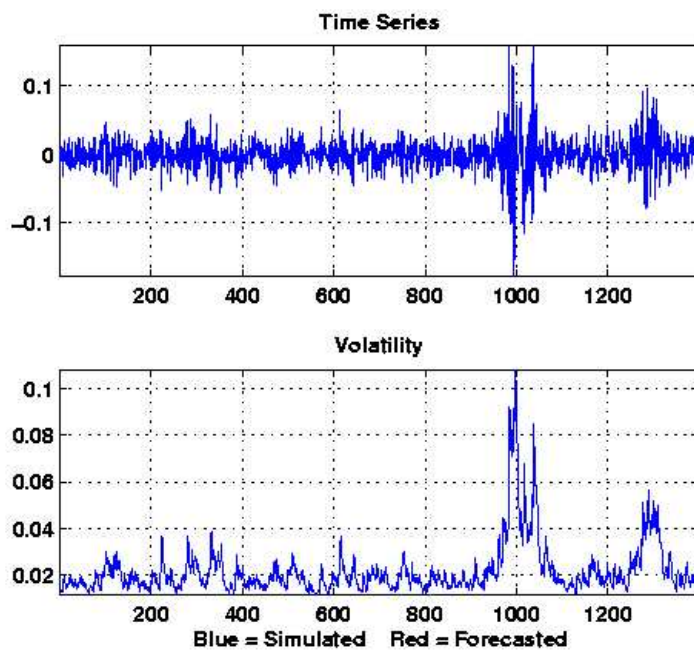


A **BUX** logaritmiikus hozamfolyamatára GARCH(1,1)-et illesztve kapjuk:



14. ábra. A **BUX** adatokra illesztett GARCH(1,1) modell

Paraméter	Érték	Standard hiba	T Statisztika
C	0.0012634	0.00045174	2.7966
ω	2.8605e-005	3.0039e-006	9.5224
α_1	0.7352	0.0133	55.2802
β_1	0.21645	0.0085641	25.2737



15. ábra. A **BUX** adatokra illesztett GARCH(1,1) modell

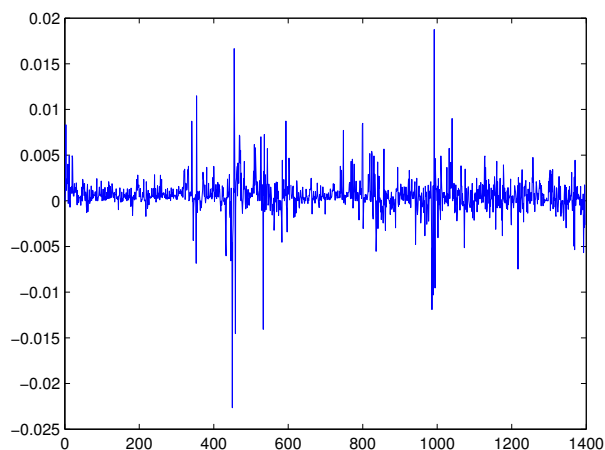
Log-likelihood érték: 3633.8

A modell:

$$y_n = \sigma_n * \epsilon_n$$

$$\sigma_n^2 = 2.8605 * 10^{-5} + 0.7352 * y_{n-1}^2 + 0.21645 * \sigma_{n-1}^2.$$

A **MAX** állampapír logaritmikus hozamai 1996.12.31-től 2002.05.21-ig:



16. ábra. A **MAX** logaritmikus hozamai 1996.12.31-2002.05.21.

Erre is elvégezzük a GARCH(1,1)-modell illesztését, normális eloszlású fehérzajt használva:

Paraméter	Érték	Standard hiba	T Statisztika
C	0.00055813	3.8411e-005	14.5306
ω	2.0000e-007	1.5195e-008	13.1626
α_1	0.75295	0.0090718	82.9989
β_1	0.23159	0.012397	18.6820

Log-likelihood érték: 7036.34

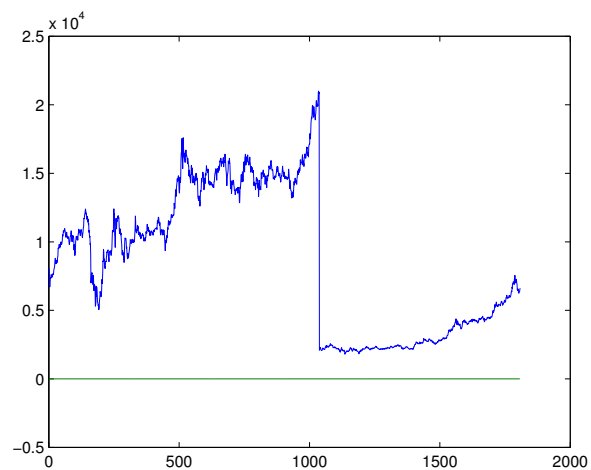
A modell:

$$y_n = \sigma_n * \epsilon_n$$

$$\sigma_n^2 = 2 * 10^{-7} + 0.75295 * y_{n-1}^2 + 0.23159 * \sigma_{n-1}^2.$$

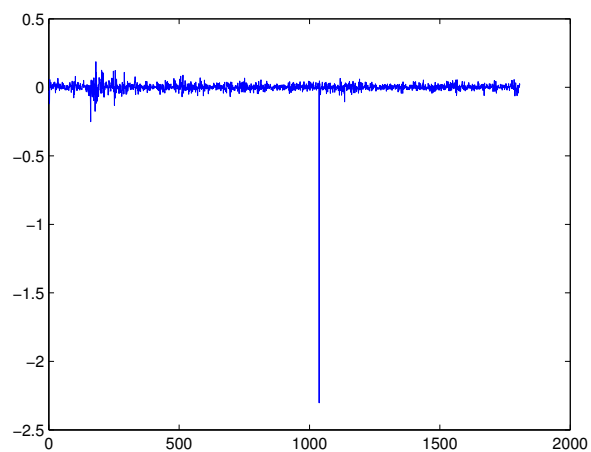
6.3. OTP

Az **OTP** részvény napi értékei 1998.01.07-2005.04.01 (1806 adat):



17. ábra. Az **OTP** napi záróárfolyamai 1998.01.07-2005.04.01.

A logaritmusos hozamok 1998.01.07-2005.04.01:



18. ábra. Az **OTP** logaritmusos hozamai 1998.01.07-2005.04.01.

Az **OTP** adatsorára illesztettünk t eloszlást:

Eloszlás:	t
Log-likelihood érték:	4272.64
Tartomány:	$-\text{Inf} < y < \text{Inf}$
Várható érték:	0.000986491
Variancia:	0.000687669

Paraméter	Becslés	Standard hiba
mu	0.000986491	0.000472674
sigma	0.01653	0.00048391
nu	3.31864	0.270975

A paraméterek becsült kovarianciamátrixa:

	mu	sigma	nu
mu	2.2342e-007	1.3748e-008	8.30557e-006
sigma	1.3748e-008	2.34169e-007	8.20337e-005
nu	8.30557e-006	8.20337e-005	0.0734273

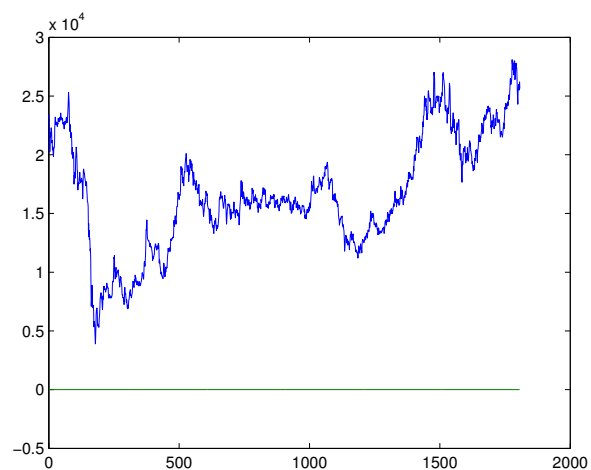
A normális eloszlás illesztésének eredménye:

Eloszlás:	Normális
Loglikelihood érték:	2527.95
Tartomány:	$-\text{Inf} < y < \text{Inf}$
Várható érték:	-0.000111659
Variancia:	0.0035697

Paraméter	Becslés	Standard hiba
mu	-0.000111659	0.00140552
sigma	0.059747	0.000994265

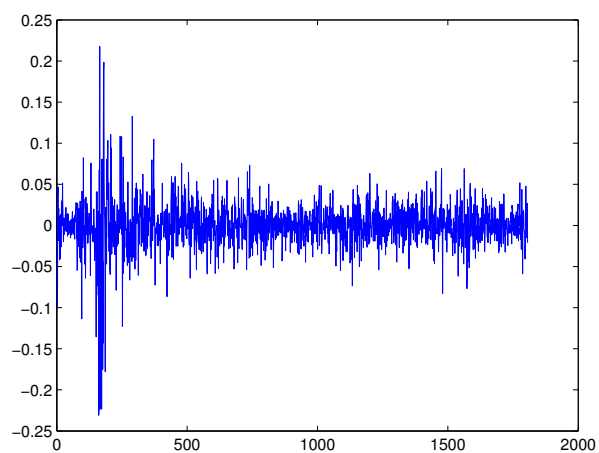
6.4. RICHTER

A **RICHTER** részvény árfolyamainak alakulása (1998.01.07-2005.04.01, 1806 adat):

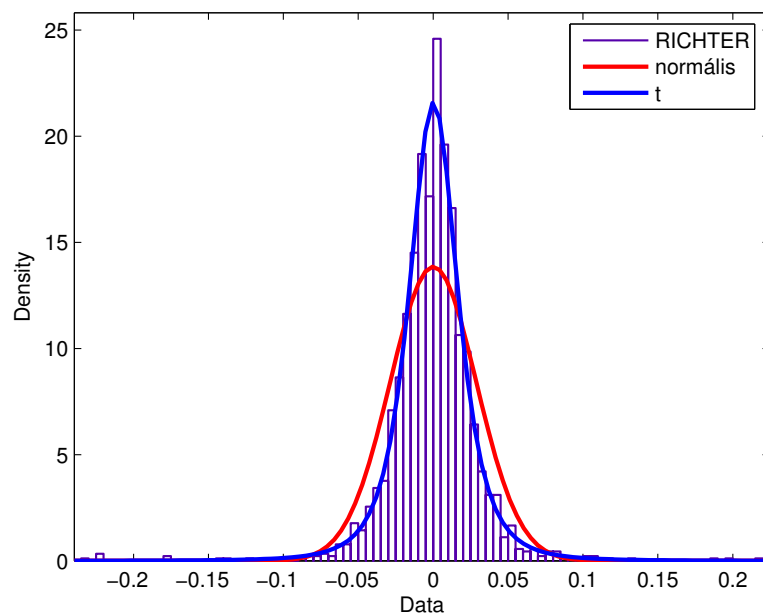


19. ábra. A **RICHTER** napi záróárfoiyamai 1998.01.07-2005.04.01.

Logaritmikus hozamok (1998.01.07-2005.04.01):



20. ábra. A **RICHTER** logaritmikus hozamai 1998.01.07-2005.04.01.



21. ábra. A **RICHTER** logaritmikus hozamaira illesztett normális eloszlás

Normális eloszlást illesztettünk a **RICHTER** logaritmikus hozamaira:

Eloszlás:	Normális
Log-likelihood érték:	3843.94
Tartomány:	$-\text{Inf} < y < \text{Inf}$
Várható érték:	4.96529e-005
Variancia:	4.96529e-005

Paraméter	Becslés	Standard hiba
mu	4.96529e-005	0.000677891
sigma	0.0288084	0.000479541

t eloszlás illesztésének eredménye:

Eloszlás:	t
Log-likelihood érték:	4162.84
Tartomány:	$-\text{Inf} < y < \text{Inf}$
Várható érték:	0.000273933
Variancia:	0.000841193

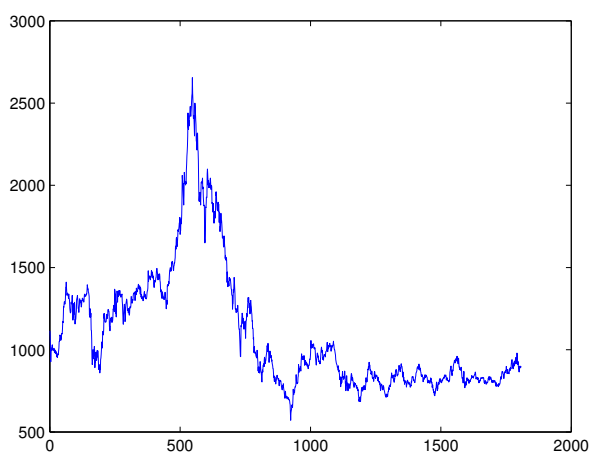
Paraméter	Becslés	Standard hiba
mu	0.000273933	0.000490989
sigma	0.0170476	0.000511721
nu	3.0557	0.238412

A becsült kovarianciamátrix:

	mu	sigma	nu
mu	2.41071e-007	-2.30523e-009	-1.13977e-006
sigma	-2.30523e-009	2.61858e-007	7.66745e-005
nu	-1.13977e-006	7.66745e-005	0.0568401

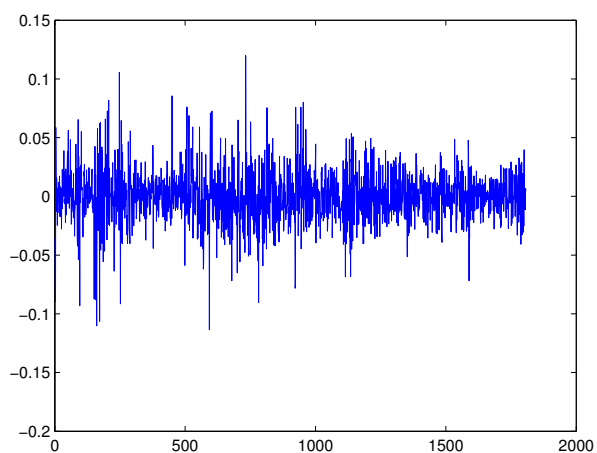
6.5. MATÁV

A MATÁV napi záróárfolyamai 1998.01.07-től 2005.04.01-ig:



22. ábra. A MATÁV napi záróárfolyamai 1998.01.07-2005.04.01.

A logaritmikus hozamok 1998.01.07-2005.04.01 (1806 adat):

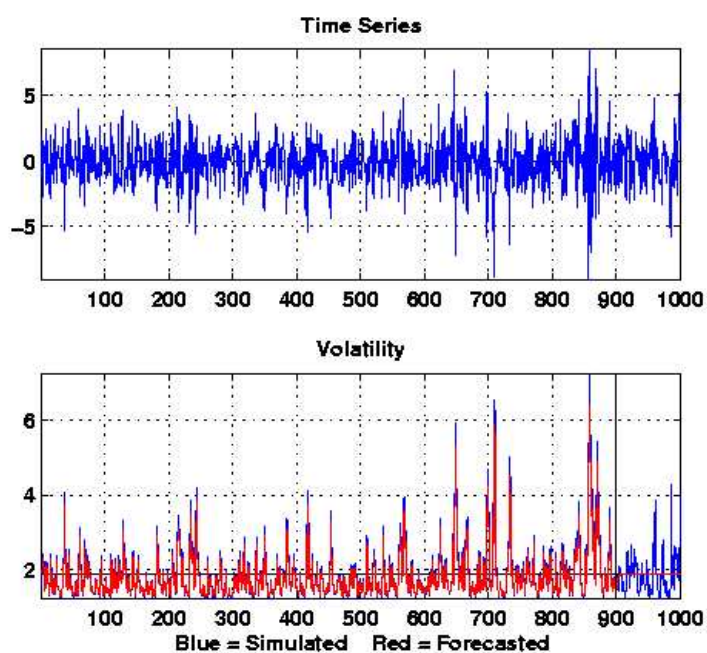


23. ábra. A MATÁV logaritmikus hozamai 1998.01.07-2005.04.01.

7. Szimulációk Matlabbal

A Matlab Financial Toolboxának segítségével szimuláltunk **GARCH(1,1)** folyamatot $\omega = 1$, $\alpha_1 = 0.3$, $\beta_1 = 0.5$ együtthatókkal.

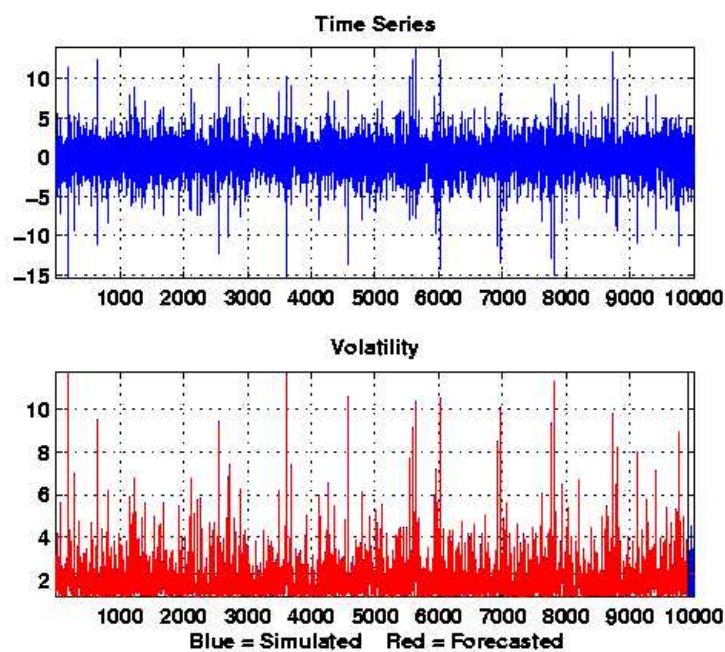
- $N = 1000$ mintaelemszámmal:



	ω	α_1	β_1
Valódi érték	1	0.3	0.5
Becsült érték	1.2	0.26	0.41

	ω	α_1	β_1
Becslési hiba	20%	4%	9%

- $N = 10000$ esetén:



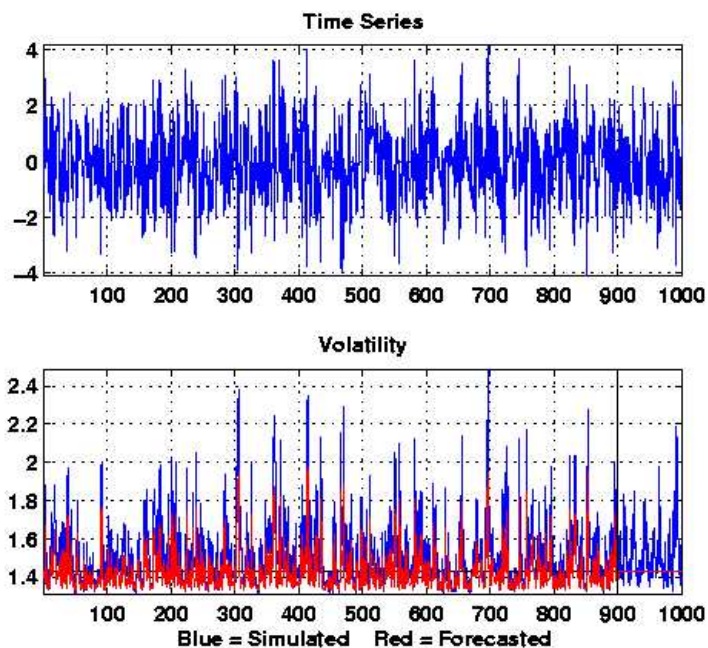
	ω	α_1	β_1
Valódi érték	1	0.3	0.5
Becsült érték	0.93	0.34	0.48

	ω	α_1	β_1
Becslési hiba	7%	4%	2%

A nagyobb mintaelemszám esetén jelentősen jobb lett a becslés eredménye.

Tekintsünk egy szimulált **GARCH(2,1)** folyamatot $\omega = 1, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.3, \beta_1 = 0.2$.

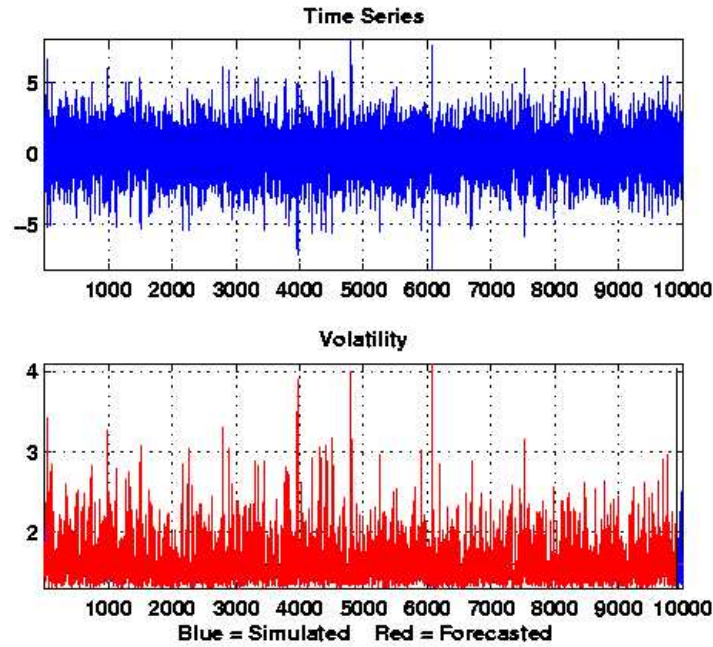
- $N = 1000$ elemszámmal:



	ω	α_1	α_2	β_1
Valódi érték	1	0.1	0.3	0.2
Becsült érték	1.4	0.19	0	0.11

	ω	α_1	α_2	β_1
Becslési hiba	40%	9%	30%	9%

- $N = 10000$ -es mintaelemszámmal:



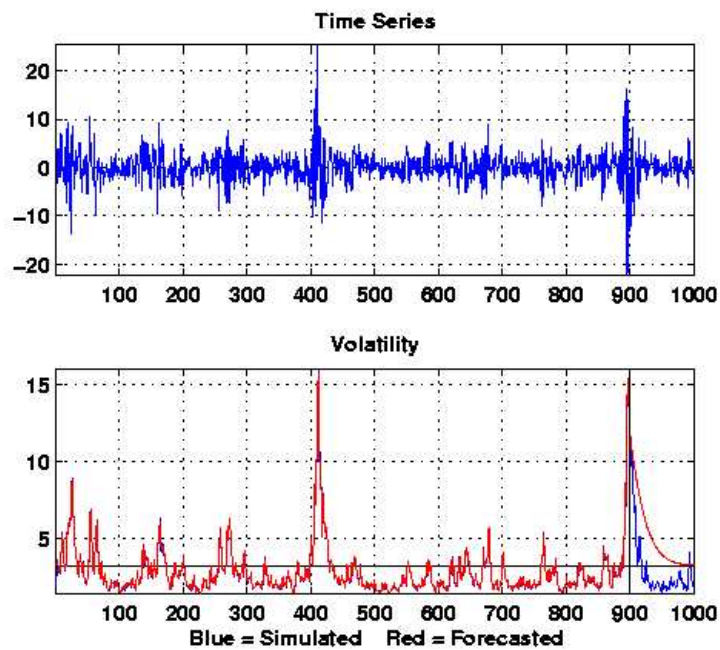
	ω	α_1	α_2	β_1
Valódi érték	1	0.1	0.3	0.2
Becsült érték	0.93	0.098	0.33	0.27

	ω	α_1	α_2	β_1
Becslési hiba	7%	0.2%	3%	7%

A tízszeres mintaelemszámnak köszönhetően sokkal kisebb lett a becslés hibája.

Szimulált **GARCH(2,2)** folyamat látható az alábbi ábrán $\omega = 1$,
 $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.3$, $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$ paraméterekkel.

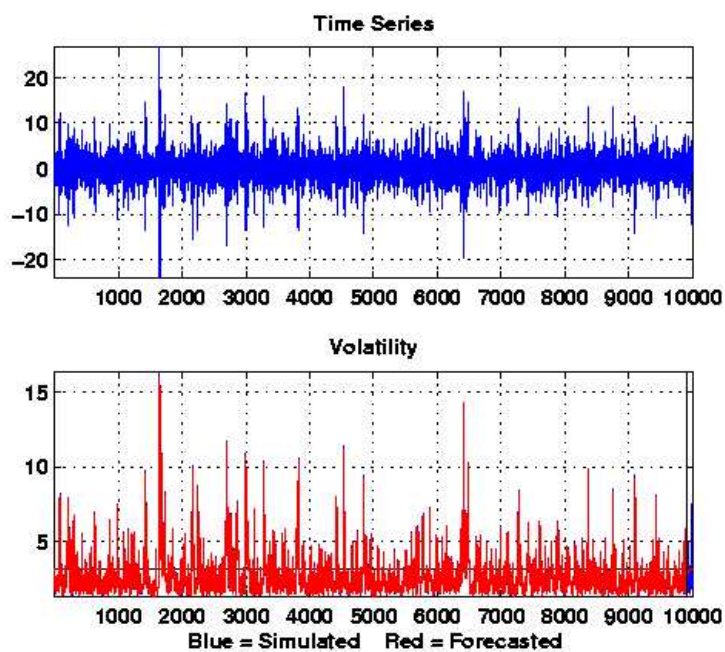
- $N = 1000$ esetén:



	ω	α_1	α_2	β_1	β_2
Valódi érték	1	0.1	0.3	0.2	0.3
Becsült érték	0.98	0.021	0.22	0.21	0.26

	ω	α_1	α_2	β_1	β_2
Becslési hiba	2%	7.9%	8%	9%	4%

- $N = 10000$ esetén:



	ω	α_1	α_2	β_1	β_2
Valódi érték	1	0.1	0.3	0.2	0.3
Becsült érték	1	0.013	0.28	0.21	0.28

	ω	α_1	α_2	β_1	β_2
Becslési hiba	0%	8.7%	2%	1%	2%

7.1. Paraméterbecslés Matlab programmal

Matlab program segítségével szimuláltunk **ARCH(1)** folyamatot, majd elvégeztük a paraméterbecslést maximum-likelihood módszerrel. Az adódó nemlineáris egyenletet gradiens módszerrel oldottuk meg. Az iterációs lépések számának maximumát 100-ra állítottuk be.

- $N = 1000$ mintaelemszám esetén:

	ω	α_1
Valódi érték	1	0.1
Becsült érték	0.4998	0.0143

	ω	α_1
Becslési hiba	50.02%	8.57%

- $N = 10000$ mellett:

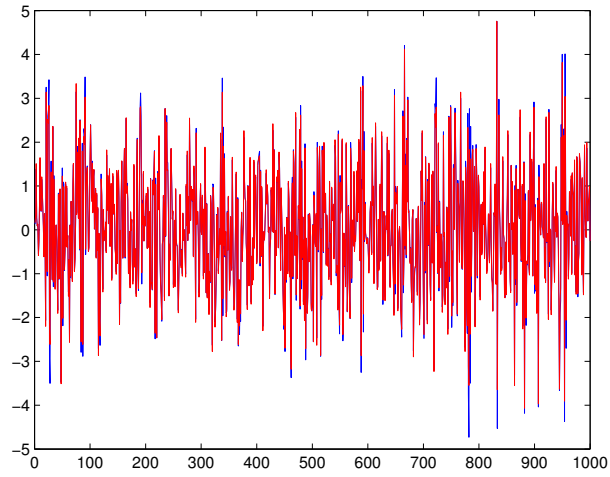
	ω	α_1
Valódi érték	1	0.1
Becsült érték	0.5	0.039

	ω	α_1
Becslési hiba	50%	6.1%

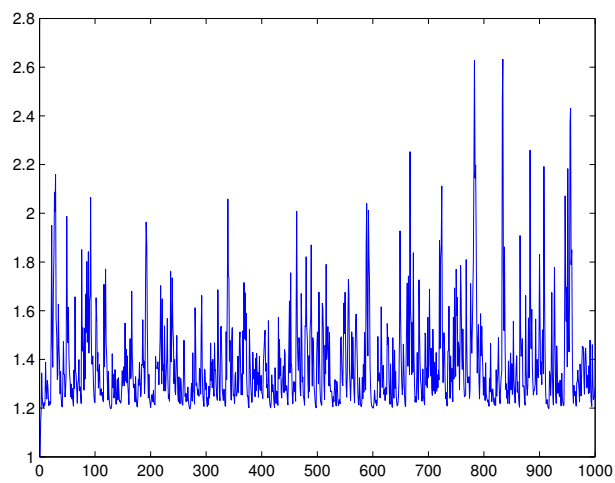
Szimuláltunk **GARCH(1,1)** folyamatot $N = 1000$ mintaelemszám mellett:

	ω	α_1	β_1
Valódi érték	1	0.1	0.1
Becsült érték	0.4702	0.0927	0.1424

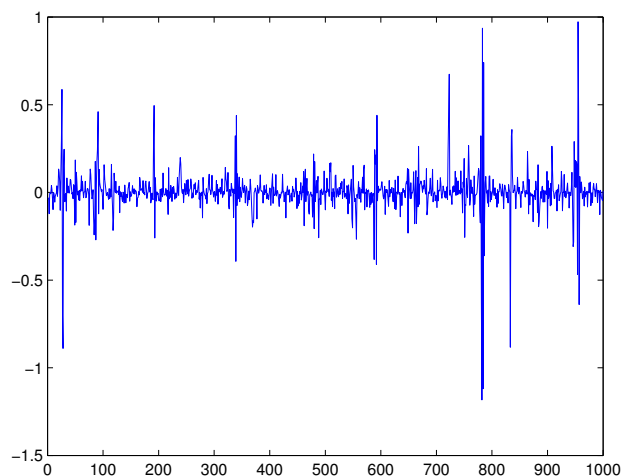
	ω	α_1	β_1
Becslési hiba	52.98%	0.73%	4.24%



24. ábra. A kék az eredeti y , a piros a becsült idősort ábrázolja



25. ábra. A σ^2 folyamat alakulása



26. ábra. Az y és a becsült folyamat különbsége

Az eredeti és a becsült folyamat különbségének L_2 -normája: 4.0288

Hivatkozások

- [1] Tim Bollerslev (1986), Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*
- [2] P. Bougerol and N. Picard (1992), Stationarity of GARCH processes and of some non-negative time series, *Journal of Econometrics*
- [3] I. Berkes, L. Horváth and P. S. Koszoka (2003), GARCH processes: Structure and Estimation
- [4] R. F. Engle (1982), Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of variances of the United Kingdom inflation, *Econometrica*
- [5] Thomas Mikosch and Catalin Starica (2000), Long range dependence effects and ARCH modelling
- [6] László Gerencsér and Zsanett Orlovits, Recursive estimation of GARCH processes. Submitted to 44th IEEE Conference on Decision and Control,

and European Control Conference ECC 2005, Seville, Spain, December 12-15, 2005

- [7] László Gerencsér and Zsanett Orlovits, Modelling Stochastic Volatility ERNSI Workshop System Identification 2004, Manreza Conference Center, Dobogókő
www.sztaki.hu/~orlovits/ERNSI_slide.pdf,
www.sztaki.hu/sztaki/ake/applmath/stoch/ERNSI2004.pdf
- [8] A. Benveniste, M. Métivier and P. Priouret (1990), *Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations*, Springer Verlag, Berlin.
- [9] Doukhan (1994), *Mixing: Properties and Examples*, Spriner Verlag, New York.
- [10] T. Mikosch, D. Straumann (2003), Stable limit of martingale transforms with application to the estimation of GARCH parameters, *Working paper*
<http://www.math.ku.dk/mikosch/Preprint/Stab/s.ps>