Opcióárazás lineáris sztochasztikus differenciálegyenletek által leírt árfolyammodellekben

Írta:

Véber Miklós
ELTE TTK alkalmazott matematikus hallgató

Témavezető:

Arató Miklós, docens
ELTE TTK Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Diplomamunka, 2001. május

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Az értékpapírok (főként a részvények) szabad kereskedelmének kialakulásával egyidejű annak a törekvésnek a megjelenése, hogy a tőzsdén zajló üzleti folyamatokat valahogy modellezzük. Sokan, sokféleképp vélekedtek, és vélekednek a mai napig is arról, hogy mi határozza meg a kereskedésben résztvevő termékek árát. Egyesek szerint az ott zajló folyamatok alapvetően *determinisztikusak*, a véletlennek kicsi a szerepe az árfolyamok alakulásában. Mások szerint még ha ez így is lenne, az árak változását leíró rendszer annyira bonyolult, a bemenő paramétereknek annyira érzékeny, kaotikus viselkedést mutató függvénye, hogy célravezetőbb a *sztochasztikus modellek* alkalmazása. Ezen dolgozat is ebben az irányban próbál meg vizsgálódni.

A klasszikus Black-Scholes-féle elmélet [2] irányvonalát követve európai opciók árát fogjuk meghatározni. Ezen opciók árazása során kulcsfontosságú szerepet játszik az adott részvény árfolyamának modellezése. Ebben –követve a klasszikus elméletet– megmaradunk a *diffúziós folyamatok* osztályánál, hiszen ezek a folytonos realizációjú Markov-folyamatok számos jelenség leírásához elfogadható valószínűségelméleti modellt szolgáltatnak[1]. A dolgozat egyik fő eredményeként a klasszikus megközelítésnél bővebb modellosztályra, az úgynevezett *szűkebb értelemben vett lineáris sztochasztikus differenciálegyenletek* segítségével definiált árfolyammodell-családra próbáljuk meg általánosítani a klasszikus elmélet tételeit. Meghatározzuk az európai vételi opció árát, a fedezésére szolgáló stratégiát, és belátjuk a *put-call paritás* teljesülését. A dolgozat második fejezetében három egzotikusabb opció árát számítjuk ki: a *lookback típusú vételi és eladási opcióét*, valamint illusztrációképpen a *down and out call* opcióét. A harmadik fejezetben a dolgozat másik fő új eredménye, a modell paramétereinek becslése kerül tárgyalásra, ezzel mintegy „élővé”, a gyakorlatban is alkalmazhatóvá téve az előző két fejezet eredményeit. Egy egyszerű összehasonlítással rávilágítunk, mennyire különböző opcióárakat kaphatunk csupán azzal, ha ugyanarra az adatsorra más és más modellt illesztünk.

[1] A diffúziós folyamatok alkalmazásának jogosságát támasztja alá [7] 15. fejezete számos példa segítségével.

1. fejezet

Az európai típusú vételi és eladási opció

1.1. Opcióárazás lineáris sztochasztikus differenciálegyenlet által leírt modellben

Ebben a fejezetben az európai típusú vételi (*call*) és eladási (*put*) opció árát határozzuk meg. Egy európai vételi opció vásárlójának jogot biztosít arra, hogy egy előre meghatározott jövőbeli T időpillanatban egy részvényt K áron megvásároljon. Egy európai eladási opció pedig vásárlóját azzal a joggal ruházza fel, hogy a T időpillanatban egy részvényt K áron eladjon. Arra szeretnénk választ találni, hogy egy ilyen jövőbeli, úgynevezett feltételes követelés pillanatnyilag mennyiért adható el. Az ármeghatározásnál az úgynevezett *portfólió-elméleti* megközelítést használjuk, melynek lényege abban rejlik, hogy a piacon kétfajta értékpapír forog: részvény (t időbeli árfolyamát S_t jelöli) és kötvény (t időbeli árfolyama: B_t). Az opció kiírója olyan áron kívánja eladni opcióját, amelyből befolyt tőkét ezen két típusú értékpapír között forgatva legalább akkora nyereséget tud elérni, mint az opció megvásárlója[1]. Vizsgálódásaink során mind a kötvény, mind a részvény árfolyammozgását folytonosnak tekintjük. A kötvényárfolyam kielégíti az alábbi determinisztikus differenciálegyenletet:

$$dB_t = r(t)B_t dt.$$

Azaz:

$$B_t = B_0 \exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\},$$

[1] A portfólió-elméleti megközelítésről szemléletes képet ad [12].

ahol tegyük fel, hogy $B_0 = 1$ és $r : [0,T] \to \mathbb{R}^+$, folytonosan differenciálható. A részvényárfolyam viselkedése sztochasztikus, legyen ezért $(\Omega, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ a kanonikus filtrációval ellátott Wiener-tér, azaz Ω a $[0,T]$-n értelmezett olyan valós folytonos függvények tere, amelyek 0-ban 0-t vesznek fel, $\mathbf{P}$ a Wiener-mérték, $(\mathcal{F})_{t\geq 0}$ filtráció pedig olyan σ-algebrasorozat, melyre $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s^*$, ahol $\mathcal{F}_s^*$ a megfelelő folytonos függvények $[0,s]$ intervallumra vett megszorításai által generált Borel halmazok $\mathbf{P}$ mérték szerint teljessé tett σ-algebrája. Ekkor $W_t(\omega) = \omega_t$ egy standard Wiener-folyamat ezen a téren. A klasszikus Samuelson-féle árfolyammodell:

$$S_t = S_0 \exp\left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t \right\},$$

ami sztochasztikus differenciálegyenlet formájában is felírható a következő tétel, az úgynevezett Itô-formula segítségével [8]:

1. Tétel. *Legyen $f(t,x)$ egy olyan folytonos függvény, amelynek $f_t'(t,x)$, $f_x'(t,x)$ és $f_{xx}''(t,x)$ parciális deriváltjai folytonosak. Legyen továbbá ξ_t egy olyan $\mathcal{F}_t$-mérhető folyamat, mely kielégíti a*

$$d\xi_t = a(t,\omega)dt + b(t,\omega)dW_t$$

sztochasztikus differenciálegyenletet. Ekkor $f(t,\xi_t)$ folyamat kielégíti az alábbi sztochasztikus differenciálegyenletet:

$$df(t,\xi_t) = \left[f_t'(t,\xi_t) + f_x'(t,\xi_t)a(t,\omega) + \frac{1}{2}f_{xx}''(t,\xi_t)b^2(t,\omega) \right] dt$$

$$+ f_x'(t,\xi_t)b(t,\omega)dW_t.$$

Alkalmazva a tételt az

$$f(t,x) = S_0 \exp\left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma x \right\}$$

függvényre és a standard Wiener-folyamatra:

$$dS_t = S_t\Big[\mu dt + \sigma dW_t\Big]$$

adódik.
Bevezetve a

$$\xi_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t$$

folyamatot nyilván $S_t = S_0 \exp\{\xi_t\}$, és

$$d\xi_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma dW_t$$

adódik. Innen könnyen adódik az ötlet, hogy vizsgáljuk a részvényárfolyam-modellek egy bővebb osztályát, legyen $S_t = \exp\{\xi_t\}$, ahol ξ_t kielégíti a következő, úgynevezett *szűkebb értelemben vett lineáris sztochasztikus differenciálegyenletet*[2]:

$$d\xi_t = \Big[\lambda(t)\xi_t + \mu(t)\Big] dt + \sigma(t) dW_t,$$

ahol $\sigma(t)$ pozitív értékű folytonos, $\lambda(t)$, $\mu(t)$ pedig folytonos (determinisztikus) függvények a $[0, T]$ intervallumon. Tegyük fel még, hogy $\xi_0 \sim N(\mu_*, \sigma_*^2)$, ahol ξ_0 $\mathcal{F}_0$-mérhető és független $\mathcal{F}_t$-től $t > 0$-ra. Ekkor az Itô-formula alkalmazásával az S_t differenciálegyenlete:

$$dS_t = S_t \left\{ \left[\lambda(t)\xi_t + \mu(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right] dt + \sigma(t) dW_t \right\}$$

Jelölje $\tilde{S}_t$ a diszkontált részvényárfolyamot, azaz $\tilde{S}_t := S_t / B_t$. Ekkor az Itô-formula segítségével az $\tilde{S}_t$ differenciálegyenlete:

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \left\{ \left[-r(t) + \lambda(t)\xi_t + \mu(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right] dt + \sigma(t) dW_t \right\}.$$

Jelölje $\theta(t)$ a következő folyamatot:

$$\theta(t) = \frac{\mu(t) - r(t) + \lambda(t)\xi_t + \frac{1}{2}\sigma^2(t)}{\sigma(t)}.$$

Ennek a segítségével pedig vezessük be a következő folyamatot:

$$\Lambda^\theta(t) = \exp\left\{ -\int_0^t \theta(s) dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s) ds \right\}.$$

A szakirodalomban fellelhető analóg tételek alapján belátható a következő:

2. Tétel. *A $\Lambda^\theta(t)$ folyamat $(\mathcal{F}_t, \boldsymbol{P})$-martingál.*

[2] A továbbiakban ezt is az egyszerűség kedvéért csak lineáris differenciálegyenletnek hívjuk, nem írjuk ki mindig a teljes megnevezést.

Bizonyítás: Felhasználjuk azt a tényt, hogy a $d\xi_t = [\lambda(t)\xi_t + \mu(t)]dt + \sigma(t)dW_t$; $\xi_0 = c$ lineáris differenciálegyenlet ξ_t megoldása pontosan akkor Gauss-folyamat, ha c normális eloszlású, vagy konstans[3]. Így mivel ξ_t Gauss, ezért $\theta(t)$ is az. Mivel ξ_t diffúziós folyamat, így folytonos $\mathbf{P}$-m.m. realizációja, ezért $\theta(t)$-nek is $\mathbf{P}$-m.m. realizációja folytonos, azaz speciálisan: $\mathbf{P}(\int_0^t \theta^2(s)ds < \infty) = 1$, így [8] 211. oldal 6.13 miatt $\Lambda^\theta(t)$ szupermartingál. Jelölje $m_t = E\xi_t$; $s_t = D^2\xi_t$. Ekkor [1] 146. oldal 8.2.6 Tétel szerint m_t kielégíti az

$$m_t' = \lambda(t)m_t + \mu(t) \quad m_0 = \mu_*$$

differenciálegyenletet, valamint s_t kielégíti az

$$s_t' = 2\lambda(t)s_t + \sigma^2(t) \quad s_0 = \sigma_*^2$$

differenciálegyenletet, tehát speciálisan m_t és s_t korlátosak $[0, T]$-n, így az is igaz lesz, hogy

$$\sup_{s\le t} E|(\theta(s)| < \infty \quad \text{és} \quad \sup_{s\le t} D((\theta(s)) < \infty,$$

amiből [8] 221. oldal a. megjegyzése miatt $\Lambda^\theta(t)$ martingál. ■

Ezek után definiáljuk a

$$\overline{\mathbf{P}}_t(d\omega) = \Lambda^\theta(t)(\omega)\mathbf{P}_t(d\omega)$$

mértéket, ahol $\mathbf{P}_t = \mathbf{P}\big|_{\mathcal{F}_t}$. Ez a $\overline{\mathbf{P}}_t$ mérték kiterjeszthető $\mathcal{F} = \sigma(\cup_{t\le T}\mathcal{F}_t)$-ra, így kapjuk $\overline{\mathbf{P}}$ mértéket[4]. Ez valószínűségi mérték lesz, hisz $\Lambda^\theta(t)$ martingál, azaz $E\Lambda^\theta(t) = E\Lambda^\theta(0) = 1$. Ez a $\overline{\mathbf{P}}$ mérték lokálisan ekvivalens a $\mathbf{P}$ mértékkel, azaz $\overline{\mathbf{P}}_t \sim \mathbf{P}_t$ és minden egy valószínűséggel $[0, T]$-beli megállításra $\overline{\mathbf{P}}_\tau \sim \mathbf{P}_\tau$, a Radon-Nikodym derivált pedig[5]:

$$\frac{d\overline{\mathbf{P}}_\tau}{d\mathbf{P}_\tau}(\omega) = \Lambda^\theta(\tau)(\omega)$$

Van azonban ennek a mértéknek egy még ennél is lényegesebb tulajdonsága, mely *Girsanov-tétel* néven ismert a szakirodalomban ([4] 132.oldal):

3. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\theta(t)$, $0 \le t \le T$ egy olyan adaptált folyamat, hogy $\int_0^T \theta^2(s)ds < \infty$ $\boldsymbol{P}$-m.m., valamint $\Lambda^\theta(t)$ $(\mathcal{F}_t, \boldsymbol{P})$-martingál. Ekkor $\overline{W}_t := W_t + \int_0^T \theta(s)ds$ standard Wiener-folyamat $(\mathcal{F}_t, \overline{\boldsymbol{P}})$-n.*

[3]Ezen állítás bizonyítása: [1] 148. oldal 8.2.10. Tétel.
[4]Részletesebben erről: [14] 2. fejezetében 3§.
[5]Ennek részletes leírása: [5] 3. fejezet, 3§.

$\overline{W}_t$-re ekkor a következő differenciálegyenlet írható fel:

$$d\overline{W}_t = dW_t + \theta(t)dt$$

Így $\theta(t)$ definícióját beírva és átrendezve:

$$\sigma(t)d\overline{W}_t = \sigma(t)dW_t + \left[\mu(t) - r(t) + \lambda(t)\xi_t + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right] dt,$$

ami alapján $\tilde{S}_t$ differenciálegyenlete $\overline{\mathbf{P}}$ mérték mellett:

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t\sigma(t)d\overline{W}_t.$$

Ha tudnánk, hogy $\tilde{S}_t$ folyamat $\overline{\mathbf{P}}$-m.m. realizációja folytonos, akkor $\tilde{S}_t$-ről bizton állíthatnánk, hogy martingál a $\overline{\mathbf{P}}$ mértékre nézve. Ez azért van, mert ekkor speciálisan

$$\overline{\mathbf{P}}\left(\int_0^T (\tilde{S}_t\sigma(t))^2 dt < \infty\right) = 1$$

teljesülne, így egyrészt [8] 207. oldal 6.1 Lemmája miatt $\tilde{S}_t$ szupermartingál lenne, másrészt [1] 153. oldal 8.4.5 Tétel szerint ennek a várható értéke konstans, konstans várható értékű szupermartingál pedig martingál[6]. De az előbb láttuk, hogy $\mathbf{P}$ és $\overline{\mathbf{P}}$ lokálisan ekvivalens mértékek, ebből kifolyólag $\tilde{S}_t$ lokális martingál lesz mindkét mértékre nézve.

Az új $\overline{W}_t$ folyamat segítségével S_t differenciálegyenlete is átírható a

$$dS_t = S_t\left[r(t)dt + \sigma(t)\overline{W}_t\right]$$

alakra. Ez pedig azt jelenti, hogy $\overline{\mathbf{P}}$ mérték mellett a részvényárfolyam úgy viselkedik, mintha az eredeti modellben $\lambda(t) \equiv 0$; $\mu(t) = r(t) - \sigma^2(t)/2$ választással éltünk volna[7]. Persze a $\mathbf{P}$ mértékről a $\overline{\mathbf{P}}$ mértékre való áttérésnél ξ_0 eloszlása nem változik meg, s róla továbbra is feltétezhető, hogy $\mathcal{F}_t$-től független $t > 0$-ra és eloszlása $N(\mu_*, \sigma_*^2)$.

A további vizsgálatokhoz szükségünk lesz néhány definícióra, térjünk át így most azok ismertetésére. Tegyük fel, hogy kezdetben x tőkénk van, ezt úgy forgatjuk, hogy t időpillanatban a portfóliónk $\Pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$, ahol β_t jelöli a t időpillanatban a birtokunkban lévő kötvény, γ_t pedig a részvény mennyiségét. Tehát a teljes tőkénk a t időpillanatban $X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t$, és persze

[6] Ennek bizonyítása: [8] 216. oldal 6.4 Lemma.

[7] Csak össze kell vetni a részvényárfolyam $\overline{\mathbf{P}}$ mérték melletti fenti egyenletét a $\mathbf{P}$ mérték melletti $dS_t = S_t\{[\lambda(t)\xi_t + \mu(t) + \sigma^2(t)/2]dt + \sigma(t)dW_t\}$ egyenlettel.

$x = X_0 = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0$. Stratégia alatt egy olyan portfólió-folyamatot értünk, amelyben β_t és γ_t $\mathcal{F}_t$-mérhetőek minden $0 \le t \le T$-re, ami annak felel meg, hogy az értékpapírok adása illetve vétele csak a múltbéli részvényárfolyam-mozgástól függhet, azaz nem láthatunk a jövőbe. Egy Π_t stratégia önfinanszírozó, ha $0 \le t \le T$-re:

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t,$$

és $\mathbf{P}$-m.m.:

$$\int_0^T |\beta_u| dB_u < \infty \qquad \text{és} \qquad \int_0^T (\gamma_u S_u)^2 du < \infty.$$

Jelölje ezek osztályát $\mathcal{SF}$. Ha $\Pi \in \mathcal{SF}$, akkor az önfinanszírozó stratégia definíciójából, és B_t illetve S_t differenciálegyenletéből kapjuk, hogy

$$dX_t^\pi = \beta_t r(t) B_t dt + \gamma_t r(t) S_t dt + \gamma_t \sigma(t) S_t d\overline{W}_t$$

$$= r(t) X_t^\pi dt + \gamma_t \sigma(t) S_t d\overline{W}_t.$$

Vezessük be a diszkontált tőkefolyamatot:

$$Y_t^\pi = \frac{X_t^\pi}{B_t}.$$

Alkalmazva az Itô-formulát a diszkontált tőkefolyamatra, mint az X_t^π folyamat függvényére

$$dY_t^\pi = \frac{\sigma(t)\gamma_t S_t}{B_t} d\overline{W}_t$$

differenciálegyenlet adódik. Ez az Y_t^π martingál lenne, ha $\int_0^T (\gamma_u S_u)^2 du < \infty$ teljesülne $\overline{\mathbf{P}}$-m.m., de ez csak a lokálisan ekvivalens $\mathbf{P}$ mértékre lesz igaz, így ez $\overline{\mathbf{P}}$ mértékre nézve csak lokális martingál lesz[8]. Ha ζ egy olyan nemnegatív $\mathcal{F}$-mérhető valószínűségi változó, amelynek $\overline{\mathbf{P}}$ mérték melletti várható értéke véges, akkor azt mondjuk, hogy $\Pi \in \mathcal{SF}^\zeta$, ha $\overline{\mathbf{P}}$-m.m.:

$$Y_t^\pi \ge -\overline{E}(\zeta | \mathcal{F}_t) \qquad t \ge 0\text{-ra}.$$

[14] 2. fejezet 6§-a alapján ha $\Pi \in \mathcal{SF}^\zeta$, akkor Y_t^π szupermartingál $\overline{\mathbf{P}}$-ra nézve, így $\overline{\mathbf{P}}(\tau_1 \le \tau_2) = 1$ esetén: $\overline{\mathbf{E}}(Y_{\tau_2}^\pi | \mathcal{F}_{\tau_1}) \le Y_{\tau_1}^\pi$. Így speciálisan, ha

[8] Ennek a részletes tárgyalása megtalálható: [5] 3. fejezet 3§; illetve [9] 1. fejezet 4§.

$X_0^\pi = x \geq 0$ és $\Pi \in \mathcal{SF}^\zeta$, akkor $\overline{\mathbf{E}}(e^{-r\tau}X_\tau^\pi) \geq x$. Ha $\zeta \equiv 0$, akkor $\mathcal{SF}^\zeta$-t $\mathcal{SF}^+$-nak írjuk, és ilyenkor $\Pi \in \mathcal{SF}^+$ esetén Y_t^π nemnegatív szupermartingál.

Egy $\Pi \in \mathcal{SF}$ stratégiát *európai típusú* (x, f_T)-*hedge*-nek hívunk, ha

$$X_0^\pi = x \qquad \text{és} \qquad \overline{\mathbf{P}}\text{-m.m.} \quad X_T^\pi \geq f_T,$$

ahol f_T $\mathcal{F}_T$-mérhető valószínűségi változó. Egy $\Pi^* \in \mathcal{SF}$ (x, f_T)-hedge *minimális*, ha minden Π (x, f_T)-hedge-re

$$X_T^\pi \geq X_T^{\pi^*} \qquad \overline{\mathbf{P}}\text{-m.m.}$$

Most már végre definiálhatjuk, hogy mit is kell érteni egy f_T kifizetőfüggvényű követelés racionális árán. Jelölje $\Pi_T(x, f_t)$ az $\mathcal{SF}^+$-beli (x, f_T)-hedge-k halmazát. A *racionális ár* az a minimális nagyságú kezdőtőke, amellyel az f_T kifizetés elérhető, tehát létezik olyan $\Pi \in \mathcal{SF}^+$, hogy $X_T^\pi \geq f_T$ $\overline{\mathbf{P}}$-m.m., azaz:

$$\mathbb{C}_T(f_T) = \inf\{x \geq 0 : \ \Pi_T(x, f_T) \neq \emptyset\}.$$

Ezen definíciók ismertetése után most már rátérhetünk az opcióár tényleges meghatározására. Ha $\Pi \in \mathcal{SF}^+$, akkor mivel a diszkontált tőkefolyamat szupermartingál, ezért $X_0^\pi \geq \overline{\mathbf{E}} X_T^\pi / B_T$. Így ha Π még (x, f_T)-hedge is, akkor $X_T^\pi \geq f_T$ miatt $x \geq \overline{\mathbf{E}} f_T / B_T$. Tehát ebből az árra rögtön adódik egy alsó korlát:

$$\mathbb{C}_T(f_T) \geq \overline{\mathbf{E}} \frac{f_T}{B_T}.$$

Jelölje $S(r)$ azt a részvényárfolyam-modellt, amit úgy kapunk, hogy a már említett $\lambda(t) \equiv 0$, $\mu(t) = r(t) - \sigma^2(t)/2$ választással élünk. Ha $f_T = f_T(S)$ alakban előáll, azaz a kifizetőfüggvény csak a részvényárfolyam $[0, T]$-beli értékeitől függ, akkor azt mondjuk, hogy az f_T kifizetőfüggvény *természetes*. Ilyenkor persze mivel S $\overline{\mathbf{P}}$ melletti eloszlása megegyezik $S(r)$ $\mathbf{P}$ melletti eloszlásával, ezért $f_T(S)$ $\overline{\mathbf{P}}$ melletti eloszlása megegyezik $f_T(S(r))$ $\mathbf{P}$ melletti eloszlásával, így speciálisan:

$$\mathbb{C}_T(f_T) \geq \mathbf{E} \frac{f_T(S(r))}{B_T}.$$

Belátjuk, hogy $\mathbb{C}_T(f_T)) = \overline{\mathbf{E}} f_T / B_T$ lesz a racionális ár.

Legyen f_T olyan $\mathcal{F}_T$-mérhető valószínűségi változó, hogy $\overline{\mathbf{E}} f_T < \infty$ legyen. A Hölder-egyenlőtlenség miatt, mivel $\overline{\mathbf{E}} f_T = \mathbf{E} \Lambda_T^\theta f_T$, ezért elegendő, ha például valamely $\varepsilon > 0$-ra: $\mathbf{E} f_T^{1+\varepsilon} < \infty$. Legyen:

$$Y_T = \overline{\mathbf{E}} \left(\frac{f_T}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t^{\overline{W}} \right) \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Ekkor Y_t egy nemnegatív martingál, így az *Itô-Klark-féle martingálreprezentációs tétel* szerint ([8] 5. fejezet):

$$Y_t = Y_0 + \int_o^t \alpha_u d\overline{W}_u$$

ahol α_u $0 \leq u \leq T$ esetén $\mathcal{F}_u^{\overline{W}}$-mérhető és $\overline{\mathbf{P}}$-m.m. $\int_0^T \alpha_u^2 du < \infty$. De $\mathcal{F}_u^{\overline{W}} = \mathcal{F}_u^S$, így α_u értékei S-folyamat egy funkcionáljaként állnak elő, azaz létezik olyan α_u^* funkcionál, hogy $\alpha_u = \alpha_u^*(S)$[9]. Legyen

$$\gamma_u^*(S) = \frac{\alpha_u^*(S)B_u}{\sigma(u)S_u} \qquad \text{és} \qquad \beta_u^*(S) = Y_u - \gamma_u^*(S)\frac{S_u}{B_u}.$$

Definiáltunk ezzel egy $\Pi_u^* = (\beta_u^*, \gamma_u^*)$ stratégiát. Először belátjuk, hogy ez önfinanszírozó:

$$X_u^{\pi^*} = \beta_u^* B_u + \gamma_u^* S_u = Y_u B_u - \gamma_u^* S_u + \gamma_u^* S_u = Y_u B_u.$$

Így egyrészt ehhez a stratégiához éppen az Y_u diszkontált tőkefolyamat tartozik, másrészt:

$$dX_u^{\pi^*} = B_u dY_u + Y_u dB_u = B_u \alpha_u d\overline{W}_u + Y_u dB_u$$

$$= \left(Y_u - \frac{\alpha_u}{\sigma(u)}\right) dB_u + \frac{\alpha_u}{\sigma(u)} B_u \left[r(u)du + \sigma(u)d\overline{W}_u\right]$$

$$= \beta_u^* dB_u + \gamma_u^* dS_u$$

A két technikai feltétel pedig $\int_0^T \alpha_u^2 du < \infty$ $\mathbf{P}$-m.m. való végessége, és az Y_u trajektóriáinak folytonossága miatt teljesül. Láttuk már, hogy $Y_u^{\pi^*} = Y_u$, így

$$X_u^{\pi^*} = Y_u B_u = \overline{\mathbf{E}}\left(\frac{B_u}{B_T} f_T \middle| \mathcal{F}_u^{\overline{W}}\right) = \overline{\mathbf{E}}\left(\frac{B_u}{B_T} f_T \middle| \mathcal{F}_u^S\right) \qquad \overline{\mathbf{P}}\text{-m.m.},$$

és persze

$$X_0^{\pi^*} = \overline{\mathbf{E}}\frac{f_T}{B_T}\ , \qquad \text{valamint} \qquad X_T^{\pi^*} = f_T \quad \mathbf{P}\text{-m.m.}$$

[9]Részletesebben: [8] 4.9 Lemma.

Tehát Π^* olyan (x, f_T)-hedge, amihez $x = \overline{\mathbf{E}}(f_T/B_T)$ kezdőtőke tartozik, ráadásul minimális is. Így az alsó határt elértük, a racionális ár:

$$\mathbb{C}_T(f_T) = \overline{\mathbf{E}}\frac{f_T}{B_T}$$

Persze ha $f_T = f_T(S)$ alakú, akkor ez nem függ a kezdeti $\mu(t)$ és $\lambda(t)$ függvényektől, hisz

$$\overline{\mathbf{E}}\frac{f_T}{B_T} = \overline{\mathbf{E}}\frac{f_T(S)}{B_T} = \mathbf{E}\frac{f_T(S(r))}{B_T}.$$

Az ehhez tartozó stratégia pedig: β_u^* és γ_u^*, azaz az Itô-Klark reprezentáció során adódott mennyiségek. Persze természetes kifizetés esetén

$$Y_t = \overline{\mathbf{E}}\left(\frac{f_T}{B_T}\middle| \mathcal{F}_t^{\overline{W}}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{f_T(S(r))}{B_T}\middle| \mathcal{F}_t^{S(r)}\right)$$

miatt α^* nem függ $\lambda(t)$-től és $\mu(t)$-től, így a stratégia sem.

1.2. Európai opciók az $f_T = f(S_T)$ speciális esetben

Ezen alfejezetben általános módszert adunk az $f(S_T)$ kifizetőfüggvényű opciók árának és az őket fedező stratégiák meghatározására. A klasszikus vételi és eladási opció is ebbe a kategóriába tartozik, hiszen kifizetőfüggvényeik: $|S_T - K|^+$, illetve $|K - S_T|^+$, ahol $|x|^+ = \max\{0, x\}$.

Legyen T a továbbiakban rögzített, $0 \leq t \leq T$ tetszőleges. Vezessük be a $\vartheta(t) = \int_t^T \sigma^2(s)ds$ jelölést. Mivel a kifizetőfüggvény $f(S_T)$ alakú, ezért természetes, így $\overline{\mathbf{P}}$ mérték szerinti várható érték helyett számolhatunk $\mathbf{P}$ mérték szerintivel, és feltételezhető, hogy a részvényárfolyamot $S(r)$ írja le (ezt a elkövetkezendőkben az egyszerűség kedvéért csak S-sel jelöljük). Mivel a lineáris sztochasztikus differenciálegyenletek megoldásai rendelkeznek a Markov tulajdonsággal ([1] 160. oldal 9.2.3 Tétel), ezért ilyenkor az optimális tőkefolyamat

$$X_t^* = \mathbf{E}\left(\frac{B_t}{B_T}f(S_T)\middle| \mathcal{F}_t\right) = \mathbf{E}\left(\frac{B_t}{B_T}f(S_T)\middle| S_t\right).$$

Ilyenkor a részvényárfolyam kielégíti a

$$dS_t = S_t\Big[r(t)dt + \sigma(t)dW_t\Big] \qquad S_0 = e^{\xi_0}$$

egyenletet, ahol $\xi_0 \sim N(\mu_*, \sigma_*^2)$. Egy ilyen homogén egyenlet megoldása [1] 153. oldal 8.4.3 Következmény szerint:

$$S_t = S_0 B_t \exp\left\{\int_0^t \sigma(s)dW_s - \int_0^t \frac{\sigma^2(s)}{2}ds\right\}.$$

Amiből egyszerűen adódik az

$$S_T = S_t \frac{B_T}{B_t} \exp\left\{\int_t^T \sigma(s)dW_s - \frac{\vartheta(t)}{2}\right\}$$

összefüggés. Bevezetve a $\varphi = \int_t^T \sigma(s)dW_s$ jelölést, a Wiener-folyamat független növekményűségéből és [1] 92. oldal 4.5.6 Következménye alapján $\varphi \sim N(0, \vartheta(t))$ és φ S_t-től független $t > 0$-ra. Ekkor pedig

$$X_t^* = \frac{B_t}{B_T}\mathbf{E}\left[f\left(S_t \frac{B_T}{B_t}\exp\left\{\varphi - \frac{\vartheta(t)}{2}\right\}\right)\right] = \frac{B_t}{B_T}F(t, S_t)$$

adódik, ahol közben bevezettük az

$$F(t,x) = \mathbf{E}\left[f\left(x\frac{B_t}{B_T}\exp\left\{\varphi_t - \frac{\vartheta(t)}{2}\right\}\right)\right]$$

jelölést, ahol $\varphi_t \sim N(0, \vartheta(t))$. Legyen $G(t,x) = F(t, B_t x)$, ekkor az optimális diszkontált tőkefolyamat

$$Y_t^* = \frac{1}{B_T}G\left(t, \frac{S_t}{B_t}\right) \quad , \qquad \text{azaz} \qquad dY_t^* = \frac{1}{B_T}dG\left(t, \frac{S_t}{B_t}\right).$$

Az Itô-formulát alkalmazva az $(x,t) \to G(t, x/B_t)$ függvényre és az S_t folyamatra

$$dG\left(t, \frac{S_t}{B_t}\right) = \left[G_1'\left(t, \frac{S_t}{B_t}\right) + G_2'\left(t, \frac{S_t}{B_t}\right)(-r(t))\frac{S_t}{B_t}\right.$$

$$\left. + G_2'\left(t, \frac{S_t}{B_t}\right) r(t)\frac{S_t}{B_t} + \frac{1}{2}G_{22}''\left(t, \frac{S_t}{B_t}\right)\sigma^2(t)\frac{S_t^2}{B_t^2}\right] dt + G_2'\left(t, \frac{S_t}{B_t}\right)\sigma(t)\frac{S_t}{B_t}dW_t$$

$$= \left[G_1'\left(t, \frac{S_t}{B_t}\right) + \frac{1}{2}G_{22}''\left(t, \frac{S_t}{B_t}\right)\sigma^2(t)\frac{S_t^2}{B_t^2}\right] dt + G_2'\left(t, \frac{S_t}{B_t}\right) d\tilde{S}_t$$

összefüggés adódik. A fentiekből

$$Y_t^* = Y_0^* + \frac{1}{B_T}\int_0^t G_2'\left(u, \frac{S_u}{B_u}\right) d\tilde{S}_u$$

$$+\frac{1}{B_T}\int_0^t \left[G_1'\left(u,\frac{S_u}{B_u}\right)+\frac{1}{2}G_{22}''\left(u,\frac{S_u}{B_u}\right)\sigma^2(u)\frac{S_u^2}{B_u^2}\right]du$$

Az egyenlet baloldalán egy martingál áll, a jobboldalon a második tag lokális martingál, hisz $\tilde{S}_u$ lokális martingál. Így a *Doob-Meyer felbontás* ([8] 3. fejezete) egyértelműségéből a korlátos változású tag 0 kell legyen, azaz

$$Y_t^* = Y_0^* + \frac{1}{B_T}\int_0^t G_2'\left(u,\frac{S_u}{B_u}\right)d\tilde{S}_u$$

$$= Y_0^* + \int_0^t \frac{1}{B_T}G_2'\left(u,\frac{S_u}{B_u}\right)\sigma(u)\frac{S_u}{B_u}dW_u$$

Így az Itô-Klark-tételbeli α_u:

$$\alpha_u = \frac{1}{B_T}G_2'\left(u,\frac{S_u}{B_u}\right)\sigma(u)\frac{S_u}{B_u}.$$

Amiből a kétfajta értékpapír optimális mennyisége:

$$\gamma_u^* = \frac{\alpha_u B_u}{\sigma(u)S_u} = \frac{1}{B_T}G_2'\left(u,\frac{S_u}{B_u}\right) = \frac{B_u}{B_T}F_2'(u,S_u)$$

$$\beta_u^* = Y_u^* - \gamma_u^*\frac{S_u}{B_u} = \frac{1}{B_T}\Big[F(u,S_u) - S_u F_2'(u,S_u)\Big].$$

Az opció ára pedig:

$$\mathbb{C}_T(f_T) = \frac{1}{B_T}F(T,S_0),$$

vagy ha S_0 valószínűségi változó, akkor

$$\mathbb{C}_T(f_T) = \frac{1}{B_T}\mathbf{E}\Big[F(T,S_0)\Big].$$

A következő feladat az lenne, hogy az $f(x)=|x-K|^+$ kifizetőfüggvény esetén határozzuk meg az $F(t,x)$ függvényt. Mivel a mi modellünkben S_0 valószínűségi változó volt, ezért ne is az $F(t,x)$-t, hanem inkább $\mathbf{E}[F(t,\eta)]$-t határozzuk meg, ahol η lognormális eloszlású μ_* és σ_*^2 paraméterekkel (ez éppen e^{ξ_0} eloszlásának felel meg, ha $\xi_0 \sim N(\mu_*,\sigma_*^2)$).

$$\mathbf{E}\Big[F(t,\eta)\Big] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[f\left(\eta\frac{B_t}{B_T}\exp\left\{\varphi_t - \frac{\vartheta(t)}{2}\right\}\right)\right]\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[f\left(\eta e^{\varphi_t} \frac{B_t}{B_T} \exp\left\{ \frac{-\vartheta(t)}{2} \right\} \right) \right],$$

ahol mivel ξ_0 független $\mathcal{F}_t$ -től $t > 0$-ra, ezért η és φ_t függetlenek, ηe^{φ_t} eloszlása így μ_* és $\sigma_*^2 + \vartheta(t)$ paraméterű lognormális eloszlás. Ekkor

$$\mathbf{E}\Big[F(t,\eta)\Big] = \int_y^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_*^2+\vartheta(t))}} \exp\left\{ \frac{-(u-\mu_*)^2}{2(\sigma_*^2+\vartheta(t))} \right\} \left(\frac{B_T}{B_t} e^{-\vartheta(t)/2+u} - K \right) du$$

$$= \frac{B_T}{B_t} e^{\mu_*+\sigma_*^2/2} \int_y^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_*^2+\vartheta(t))}} \exp\left\{ \frac{-(u-\mu_*-\sigma_*^2-\vartheta(t))^2}{2(\sigma_*^2+\vartheta(t))} \right\}$$

$$-K \int_y^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_*^2+\vartheta(t))}} \exp\left\{ \frac{-(u-\mu_*)^2}{2(\sigma_*^2+\vartheta(t))} \right\}$$

$$= \frac{B_T}{B_t} e^{\mu_*+\sigma_*^2/2} \Phi\left(\frac{\mu_*+\sigma_*^2+\vartheta(t)-y}{\sqrt{\sigma_*^2+\vartheta(t)}} \right) - K\Phi\left(\frac{\mu_*-y}{\sqrt{\sigma_*^2+\vartheta(t)}} \right),$$

ahol $y = \ln(K) + \vartheta(t)/2 - \ln(B_T/B_t)$, Φ pedig a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Rövidebben:

$$\mathbf{E}\Big[F(t,\eta)\Big] = \frac{B_T}{B_t} e^{\mu_*+\sigma_*^2/2} \Phi(y_1^*) - K\Phi(y_2^*),$$

ahol

$$y_1^* = \frac{\ln\left(\frac{1}{K}\right) + \frac{\vartheta(t)}{2} + \ln\left(\frac{B_T}{B_t}\right) + \mu_* + \sigma_*^2}{\sqrt{\sigma_*^2+\vartheta(t)}}$$

$$y_2^* = \frac{\ln\left(\frac{1}{K}\right) - \frac{\vartheta(t)}{2} + \ln\left(\frac{B_T}{B_t}\right) + \mu_*}{\sqrt{\sigma_*^2+\vartheta(t)}}.$$

Így speciálisan ha a második változó konstans (x), akkor $\sigma_*^2 = 0$ és $\mu_* = \ln(x)$, tehát

$$F(t,x) = x\frac{B_T}{B_t}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \frac{\vartheta(t)}{2} + \ln\left(\frac{B_T}{B_t}\right)}{\sqrt{\vartheta(t)}} \right) - K\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) - \frac{\vartheta(t)}{2} + \ln\left(\frac{B_T}{B_t}\right)}{\sqrt{\vartheta(t)}} \right).$$

Ezt x változó szerint deriválva az első tag deriváltjának egyik része (szorzat-deriváltról lévén szó) éppen a második tag deriváltjának ellentettje lesz, így azok kiejtik egymást (ezt könnyű ellenőrizni, csak elemi deriválás), marad:

$$F_2'(t,x) = \frac{B_T}{B_t}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \frac{\vartheta(t)}{2} + \ln\left(\frac{B_T}{B_t}\right)}{\sqrt{\vartheta(t)}}\right).$$

Innen az opció ára:

$$\mathbb{C}_T(f_T) = \frac{1}{B_T}\mathbf{E}\Big[F(T,S_0)\Big] = e^{\mu_* + \sigma_*^2/2}\Phi(y_1^*) - \frac{K}{B_T}\Phi(y_2^*),$$

ahol y_1^* és y_2^* képleteiben most t=0. Az optimális portfólióhoz tartozó értékpapír-folyamatok pedig:

$$\gamma_t^* = \Phi(y_1^t) \qquad \text{és} \qquad \beta_t^* = \frac{-K}{B_T}\Phi(y_2^t)\ ,$$

ahol

$$y_1^t = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \frac{\vartheta(t)}{2} + \ln\left(\frac{B_T}{B_t}\right)}{\sqrt{\vartheta(t)}} \qquad \text{és} \qquad y_2^t = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) - \frac{\vartheta(t)}{2} + \ln\left(\frac{B_T}{B_t}\right)}{\sqrt{\vartheta(t)}}.$$

Az optimális tőkefolyamat pedig:

$$X_t^* = \frac{B_t}{B_T}F(t,S_t) = S_t\Phi(y_1^t) - K\frac{B_t}{B_T}\Phi(y_2^t).$$

1.2.1. A Black-Scholes formula

Az eddig elmondottak speciális eseteként megkapjuk az európai típusú klasszikus vételi opció Black-Scholes-féle árát és a hozzá tartozó stratégiát. Az eddigi jelölésekkel a klasszikus Samuelson-féle árfolyammodellben:

$$\begin{array}{lll} \mu(t) \equiv \mu & r(t) \equiv r & \mu_* = \ln S_0 \\ \lambda(t) \equiv 0 & \sigma(t) \equiv \sigma & \sigma_*^2 = 0, \end{array}$$

ami alapján

$$B_t = e^{rt} \qquad \text{és} \qquad \vartheta(t) = (T-t)\sigma^2.$$

Legyen

$$y_1^t = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$y_2^t = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Ekkor a vételi opció ára:

$$\mathbb{C}_T = S_0\Phi(y_1^0) - \frac{K}{B_T}\Phi(y_2^0),$$

az értékpapírok optimális mennyisége pedig:

$$\gamma_t^* = \Phi(y_1^t) \qquad \text{és} \qquad \beta_t^* = -Ke^{-rT}\Phi(y_2^t).$$

Végül az optimális tőkefolyamat:

$$X_t^* = S_t\Phi(y_1^t) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(y_2^t).$$

1.3. A put-call paritás

Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy a vételi opció árának és a hozzá tartozó stratégiának ismeretében hogyan lehet ugyanezeket a mennyiségeket az eladási opciónál megállapítani. Közben belátjuk a két ár kapcsolatát leíró úgynevezett *put-call paritást.*

A két kifizetőfüggvény közti kapcsolat:

$$|K - S_T|^+ = |S_T - K|^+ - S_T + K.$$

Így az eladási opció ára:

$$\mathbb{P}_T = \mathbf{E}\left(\frac{1}{B_T}|K - S_T|^+\right) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{B_T}|S_T - K|^+\right) - \mathbf{E}\left(\frac{S_T}{B_T}\right) + \frac{K}{B_T}$$

$$= \mathbb{C}_T - e^{\mu_* + \sigma_*^2/2} + \frac{K}{B_T},$$

ahol közben kihasználtuk, hogy

$$\mathbf{E}\left(\frac{S_T}{B_T}\right) = \mathbf{E}(S_0) = e^{\mu_* + \sigma_*^2/2}.$$

Tehát a put-call paritás:

$$\mathbb{P}_T + e^{\mu_* + \sigma_*^2/2} = \mathbb{C}_T + \frac{K}{B_T} \ ,$$

azaz hasonló összefüggés lesz érvényben, mint a klasszikus esetben, aholis

$$\mathbb{P}_T + S_0 = \mathbb{C}_T + e^{-rT}K$$

teljesül.

Próbáljuk meg az ehhez tartozó stratégiát is meghatározni. Az 1.2 alfejezet jelöléseivel:

$$\mathbf{E}\Big[F(t,\eta)\Big] = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_*^2+\vartheta(t))}} \exp\left\{\frac{-(u-\mu_*)^2}{2(\sigma_*^2+\vartheta(t))}\right\} \left(K - \frac{B_T}{B_t}e^{-\vartheta(t)/2+u}\right) du$$

$$= K\Phi\left(\frac{y-\mu_*}{\sqrt{\sigma_*^2+\vartheta(t)}}\right) - \frac{B_T}{B_t}e^{\mu_*+\sigma_*^2/2}\Phi\left(\frac{y-\mu_*-\sigma_*^2-\vartheta(t)}{\sqrt{\sigma_*^2+\vartheta(t)}}\right),$$

ahol $y = \ln(K) + \vartheta(t)/2 - \ln(B_T/B_t)$. Így speciálisan:

$$F(t,x) = K\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{x}\right)+\frac{\vartheta(t)}{2}-\ln\left(\frac{B_T}{B_t}\right)}{\sqrt{\vartheta(t)}}\right) - x\frac{B_T}{B_t}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{x}\right)-\frac{\vartheta(t)}{2}-\ln\left(\frac{B_T}{B_t}\right)}{\sqrt{\vartheta(t)}}\right).$$

Deriválva a második változója szerint:

$$F_2'(t,x) = -\frac{B_T}{B_t}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{x}\right)-\frac{\vartheta(t)}{2}-\ln\left(\frac{B_T}{B_t}\right)}{\sqrt{\vartheta(t)}}\right).$$

Amiből az előző alfejezet jelöléseivel:

$$\mathbb{P}_T = \frac{1}{B_T}\mathbf{E}\Big[F(T,S_0)\Big] = \frac{K}{B_T}\Phi(-y_2^*) - e^{\mu_*+\sigma_*^2/2}\Phi(-y_1^*).$$

Azaz a put-call paritás tényleg fennáll, hisz

$$\mathbb{P}_T + e^{\mu_*+\sigma_*^2/2} = \frac{K}{B_T}(1-\Phi(y_2^*)) + e^{\mu_*+\sigma_*^2/2}\Phi(y_1^*) = \mathbb{C}_T + \frac{K}{B_T}.$$

Az optimális értékpapírmennyiségek pedig:

$$\gamma_t^* = -\Phi(-y_1^t) = \Phi(y_1^t) - 1$$

$$\beta_t^* = \frac{1}{B_T}\left[K\Phi(-y_2^t) - S_t\frac{B_T}{B_t}\Phi(-y_1^t) + S_t\frac{B_T}{B_t}\Phi(-y_1^t)\right]$$

$$= \frac{1}{B_T} K\Phi(-y_2^t) = \frac{K}{B_T} - \frac{K}{B_T}\Phi(y_2^t),$$

azaz az optimális stratégia majdnem ugyanaz, mint a vételi opciónál volt, csupán minden időpillanatban egy részvénnyel kevesebbet kell tartani, kötvényből pedig K/B_T jelenértékűvel többet. A put-call paritás elve éppen ezt mondta ki, csak az árak viszonylatában. Jól látható a számítások nyomán (és ez persze várható is volt, azaz tulajdonképpen az optimális stratégia kiszámítása ilyen értelemben felesleges is volt), hogy a paritásnak az optimális stratégiák viszonylatában is fenn kell állnia.

2. fejezet

Néhány egzotikus opció árazási formulája

Az elkövetkezendőkben az előző fejezet eredményeinek felhasználásával három –a vételi illetve az eladási opciónál bonyolultabb– követelés árát határozzuk meg:

- a lookback típusú eladási opcióét
- a lookback típusú vételi opcióét
- a limitár alatt értéktelen vételi opcióét (down and out call).

Ezen követelések annyiban bonyolultabbak a standard vételi és eladási opciónál, hogy kifizetőfüggvényük nem $f(S_T)$ alakú (így azon speciális eset eredményei nem alkalmazhatóak), ám értékük csak a részvényárfolyam $[0,T]$-beli viselkedésétől függ, azaz kifizetőfüggvényük természetes. Azt már korábban láttuk, hogy természetes kifizetés esetén a $\overline{\mathbf{P}}$ mértékről visszatérhetünk az eredeti $\mathbf{P}$ mértékre, s ekkor az S_t folyamat helyett az $S_t(r)$ folyamattal lehet számolni.

2.1. A lookback típusú eladási opció

1. Definíció. *Egy lookback típusú eladási opció tulajdonosának azt a jogot biztosítja, hogy részvényét a T időpillanatban az adott részvény $[0,T]$ időintervallumbeli legmagasabb árán adhatja el. Kifizetőfüggvénye így:*

$$\max_{0\le t\le T} S_t - S_T.$$

Mivel a részvényárfolyam

$$S_t = e^{\xi_0} \exp\left\{ \int_0^t r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s \right\}$$

alakú, ezért

$$G(t) = \int_0^t g(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s$$

folyamat maximumának és $G(T)$-nek az együttes eloszlására lenne szükségünk $g(s) = r(s) - \sigma^2(s)/2$ esetén[1]. Jelölje

$$M_g(T) = \max_{0 \le t \le T} G(t) \ ,$$

továbbá legyen

$$\Lambda_t = \exp\left\{ - \int_0^t \frac{g(s)}{\sigma(s)} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{g^2(s)}{\sigma^2(s)} ds \right\}.$$

Mivel $g(s)/\sigma(s)$ folytonos determinisztikus függvény $[0, T]$-n, ezért a Girsanov-tétel feltételei teljesülnek, így a Λ_t által definiált $\widetilde{\mathbf{P}}$ mértékre nézve:

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \frac{g(s)}{\sigma(s)} ds$$

standard Wiener-folyamat lesz. Ezt differenciákra átírva, $\sigma(s)$-sel szorozva, és újra integrálva:

$$\int_0^t \sigma(s) d\widetilde{W}_s = \int_0^t \sigma(s) dW_s + \int_0^t \sigma(s) \frac{g(s)}{\sigma(s)} ds = G(t).$$

Jelölje:

$$U(t) = \int_0^t \sigma(s) W_s \qquad \text{és} \qquad V(T) = \max_{0 \le t \le T} U(t).$$

Mivel az $U(t)$ folyamat független növekményű, s növekményei szimmetrikus eloszlásúak, ezért alkalmazható rá az úgynevezett tükrözési elv ([6]):

$$\mathbf{P}(U(T) < b, \quad V(T) \ge c) = \mathbf{P}(U(T) \ge 2c - b) = 1 - F_{0,\vartheta}(2c - b)$$

[1]Nyilván ennél kevesebb is elég, hisz ha tudjuk a maximum eloszlását, már onnan is kiszámítható az ár, viszont látni fogjuk majd, hogy az általunk vizsgált esetben az együttes eloszlásból könnyű meghatározni a maximum eloszlását.

$$= \Phi\left(\frac{b-2c}{\sqrt{\vartheta}}\right) \ , \qquad\qquad \text{ha } c>0 \text{ és } b \le c \ ,$$

ahol $F_{0,\vartheta}$ a 0 várható értékű ϑ varianciájú, Φ pedig a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye, valamint

$$\vartheta = \int_0^T \sigma^2(s)ds.$$

Mivel

$$\mathbf{P}(U(T) < b, \quad V(T) < c) = \mathbf{P}(U(T) < b) - \mathbf{P}(U(T) < b, \quad V(T) \ge c)$$

$$= \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{\vartheta}}\right) - \Phi\left(\frac{b-2c}{\sqrt{\vartheta}}\right) \ ,$$

ezért $U(T)$ és $V(T)$ együttes eloszlásfüggvénye:

$$E_{U,V}(b,c) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{b}{\sqrt{\vartheta}}\right) - \Phi\left(\frac{b-2c}{\sqrt{\vartheta}}\right) & \text{ha } c>0 \text{ és } b \le c \\ \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{\vartheta}}\right) - \Phi\left(\frac{-c}{\sqrt{\vartheta}}\right) & \text{ha } c>0 \text{ és } b > c \\ 0 & \text{ha } c \le 0. \end{cases}$$

Deriválva ezt b szerint[2]:

$$E_{U,V}^{(U)}(b,c) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{b}{\sqrt{\vartheta}}\right)\frac{1}{\sqrt{\vartheta}} - \varphi\left(\frac{b-2c}{\sqrt{\vartheta}}\right)\frac{1}{\sqrt{\vartheta}} & \text{ha } c>0 \text{ és } b \le c \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Tovább c szerint:

$$E_{U,V}^{(U,V)}(b,c) = \begin{cases} \frac{2(2c-b)}{\vartheta\sqrt{\vartheta}}\varphi\left(\frac{b-2c}{\sqrt{\vartheta}}\right) & \text{ha } c>0 \text{ és } b \le c \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Nekünk $G(T)$ és $M_g(T)$ együttes eloszlására lenne szükségünk:

$$\mathbf{P}(G(T) < b, \quad M_g(T) < c) = \mathbf{E}\Big[I(G(T) < b, \quad M_g(T) < c)\Big]$$

$$= \widetilde{\mathbf{E}}\Big[\Lambda_T^{-1} I(G(T) < b, \quad M_g(T) < c)\Big]$$

$$= \widetilde{\mathbf{E}}\left[\exp\left\{\int_0^T \frac{g(s)}{\sigma(s)}dW_s + \frac{1}{2}\int_0^T \frac{g^2(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\} I(G(T) < b, \quad M_g(T) < c)\right]$$

[2] Az alábbi képletekben φ a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét jelöli.

Mivel $dW_s = d\widetilde{W}_s - \frac{g(s)}{\sigma(s)}$, ezért az együttes eloszlást továbbírva

$$\widetilde{\mathbf{E}}\left[\exp\left\{\int_0^T \frac{g(s)}{\sigma(s)}d\widetilde{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{g^2(s)}{\sigma^2(s)}ds\right\} I(G(T) < b, \quad M_g(T) < c)\right]$$

adódik. $G(T)$ és $M_g(T)$ együttes eloszlása $\widetilde{\mathbf{P}}$ mérték mellett ugyanaz, mint $U(T)$ és $V(T)$ együttes eloszlása $\mathbf{P}$ mérték mellett, így a fenti várható érték kiszámítható lenne, ha nemcsak $(U(T), V(T))$ pár együttes eloszlását ismernénk, hanem $(U(T), V(T), Z(T))$-ét, ahol

$$Z(T) = \int_0^T \frac{g(s)}{\sigma(s)}dW_s \ .$$

Mivel ennek a kiszámítása általában rendkívül bonyolult, egy egyszerűsítő feltételt teszünk. Ha $\frac{g(s)}{\sigma(s)}$ $\sigma(s)$ konstansszorosa lenne, akkor a keresett együttes eloszlás kiszámításához elegendő lenne $U(T)$ és $V(T)$ együttes eloszlása. Tegyük fel tehát, hogy

$$\frac{g(s)}{\sigma(s)} = \varkappa\sigma(s) \ , \qquad \text{azaz} \qquad r(s) = \left(\varkappa + \frac{1}{2}\right)\sigma^2(s).$$

Ekkor bevezetve $M_g(T)$-re az $M_\varkappa(T)$ jelölést:

$$\mathbf{P}(G(T) < b, \quad M_\varkappa(T) < c)$$

$$= \widetilde{\mathbf{E}}\left[\exp\left\{\int_0^T \varkappa\sigma(s)d\widetilde{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^T \varkappa^2\sigma^2(s)ds\right\} I(G(T) < b, \quad M_\varkappa(T) < c)\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\exp\left\{\varkappa U(T) - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} I(U(T) < b, \quad V(T) < c)\right].$$

Ezen valószínűség kiszámítása során négy esetet kell megkülönböztetni:

- ha $c \le 0$, akkor mivel olyan halmazon kell venni a várható értéket, ahol az együttes sűrűségfüggvény 0, ezért 0-t kapunk
- ha $c > 0$ és $b \le 0$, akkor a keresett valószínűség:

$$\int_{-\infty}^b \int_0^c \exp\left\{\varkappa z - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} \frac{2(2y-z)}{\vartheta\sqrt{\vartheta}}\varphi\left(\frac{z-2y}{\sqrt{\vartheta}}\right)dydz$$

$$= \int_{-\infty}^b \exp\left\{\varkappa z - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{\vartheta}}\left[\varphi\left(\frac{z}{\sqrt{\vartheta}}\right) - \varphi\left(\frac{z-2c}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right] dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \exp\left\{\varkappa(b+z) - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \left[\varphi\left(\frac{b+z}{\sqrt{\vartheta}}\right) - \varphi\left(\frac{b+z-2c}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right] dz$$

$$= \exp\left\{\varkappa b - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} \Big[A(b) - A(b-2c)\Big] \ ,$$

ahol

$$A(d) = \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \int_{-\infty}^{0} e^{\varkappa z} \varphi\left(\frac{d+z}{\sqrt{\vartheta}}\right) dz$$

$$= \exp\left\{-\varkappa d + \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}} \exp\left\{\frac{-(d+z-\varkappa\vartheta)^2}{2\vartheta}\right\} dz$$

$$= \exp\left\{-\varkappa d + \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} \Phi\left(\frac{d-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) \ ,$$

így a kettős integrál végső értéke:

$$\Phi\left(\frac{b-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{b-2c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)$$

- ha $c > 0$ és $c < b$, akkor a valószínűség az előzőek felhasználásával:

$$\int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{c} \exp\left\{\varkappa z - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} \frac{2(2y-z)}{\vartheta\sqrt{\vartheta}} \varphi\left(\frac{z-2y}{\sqrt{\vartheta}}\right) dydz$$

$$+ \int_{0}^{c}\int_{z}^{c} \exp\left\{\varkappa z - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} \frac{2(2y-z)}{\vartheta\sqrt{\vartheta}} \varphi\left(\frac{z-2y}{\sqrt{\vartheta}}\right) dydz$$

$$= \Phi\left(\frac{-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{-2c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)$$

$$+ \int_{0}^{c} \exp\left\{\varkappa z - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \left[\varphi\left(\frac{-z}{\sqrt{\vartheta}}\right) - \varphi\left(\frac{z-2c}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right] dz \ ,$$

$\varphi(d) = \varphi(-d)$ kihasználásával a harmadik tag:

$$\int_{-\infty}^{c} \exp\left\{\varkappa z - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \left[\varphi\left(\frac{z}{\sqrt{\vartheta}}\right) - \varphi\left(\frac{z-2c}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right] dz$$

$$-\int_{\infty}^{0} \exp\left\{\varkappa z - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \left[\varphi\left(\frac{z}{\sqrt{\vartheta}}\right) - \varphi\left(\frac{z-2c}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right] dz$$

$$= \exp\left\{\varkappa c - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} \Big[A(c) - A(-c)\Big] - \exp\left\{-\frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} \Big[A(0) - A(-2c)\Big]$$

$$= \Phi\left(\frac{c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{-c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - \Phi\left(\frac{-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) + e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{-2c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) \ ,$$

így a keresett valószínűség:

$$\Phi\left(\frac{c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{-c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)$$

- ha pedig $c > 0$ és $0 < b < c$, akkor az előző eset felhasználásával:

$$\Phi\left(\frac{b-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - e^{2\varkappa b}\Phi\left(\frac{-b-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)$$

$$+\int_{-\infty}^{b}\int_{b}^{c} \exp\left\{\varkappa z - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} \frac{2(2y-z)}{\vartheta\sqrt{\vartheta}} \varphi\left(\frac{z-2y}{\sqrt{\vartheta}}\right) dydz \ ,$$

a kettős integrált átalakítva:

$$\int_{-\infty}^{b} \exp\left\{\varkappa z - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \left[\varphi\left(\frac{z-2b}{\sqrt{\vartheta}}\right) - \varphi\left(\frac{z-2c}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right] dz$$

$$= \exp\left\{\varkappa b - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} \Big[A(-b) - A(b-2c)\Big]$$

$$= e^{2\varkappa b}\Phi\left(\frac{-b-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{b-2c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) \ ,$$

amiből a kérdéses valószínűség:

$$\Phi\left(\frac{b-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{b-2c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right).$$

Tehát az eloszlásfüggvény $c > 0 \quad b \le c$ esetén:

$$\Phi\left(\frac{b-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{b-2c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) \quad ,$$

$0 < c < b$ esetén pedig ugyanez, csak b helyére c-t kell írni. Innen látható, hogy az együttes eloszlás tartója a

$$\left\{(b,c) \in \mathbb{R}^2 : \quad b \le c, \quad c > 0\right\}$$

halmaz lesz. Az eloszlásfüggvényt b szerint ezen a halmazon deriválva:

$$\frac{1}{\sqrt{\vartheta}}\left[\varphi\left(\frac{b-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - e^{2\varkappa c}\varphi\left(\frac{b-2c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right] \quad ,$$

tovább c szerint:

$$\frac{-e^{2\varkappa c}}{\sqrt{\vartheta}}\varphi\left(\frac{b-2c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)\left[2\varkappa + \frac{b-2c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\frac{2}{\sqrt{\vartheta}}\right]$$

$$= \frac{2(2c-b)}{\vartheta\sqrt{\vartheta}}e^{2\varkappa c}\varphi\left(\frac{b-2c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) = \frac{2(2c-b)}{\vartheta\sqrt{\vartheta}}\varphi\left(\frac{2c-b}{\sqrt{\vartheta}}\right)\exp\left\{\varkappa b - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\}.$$

Tehát az együttes sűrűségfüggvény:

$$\begin{cases} \frac{2(2c-b)}{\vartheta\sqrt{\vartheta}}\varphi\left(\frac{2c-b}{\sqrt{\vartheta}}\right)\exp\left\{\varkappa b - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} & \text{ha } c > 0 \text{ és } b \le c \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Visszatérve az együttes eloszlásfüggvényre, könnyű kiszámítani ebből az $M_\varkappa(T)$ maximum eloszlását. Az eloszlásfüggvénye $c > 0$ esetén

$$\Phi\left(\frac{c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{-c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right).$$

Így a sűrűségfüggvénye:

$$\frac{1}{\sqrt{\vartheta}}\varphi\left(\frac{c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - 2\varkappa e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{-c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) + e^{2\varkappa c}\frac{1}{\sqrt{\vartheta}}\varphi\left(\frac{-c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\vartheta}}\varphi\left(\frac{c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - 2\varkappa e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{-c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) \quad ,$$

ha $c > 0$, különben 0.

Most már rátérhetünk a lookback típusú eladási opció árának meghatározására:

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{B_T}\left(\max_{0\le t\le T} S_t - S_T\right)\right] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{B_T}e^{\xi_0+M_\varkappa(T)}\right] - e^{\mu_*+\frac{\sigma_*^2}{2}}$$

$$= e^{\mu_*+\frac{\sigma_*^2}{2}}\left[\frac{1}{B_T}\mathbf{E}\left(e^{M_\varkappa(T)}\right)-1\right] ,$$

ahol közben kihasználtuk ξ_0 és $M_\varkappa(T)$ függetlenségét. Az egyedüli, amit ki kell számítani:

$$\mathbf{E}\left(e^{M_\varkappa(T)}\right) = \int_0^\infty e^c\left[\frac{2}{\sqrt{\vartheta}}\varphi\left(\frac{c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - 2\varkappa e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{-c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right]dc.$$

Tagonként számolva:

$$\int_0^\infty e^c\frac{1}{\sqrt{\vartheta}}\varphi\left(\frac{c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)dc = \exp\left\{\frac{(2\varkappa+1)\vartheta^2}{2\vartheta}\right\}\times$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}}\exp\left\{\frac{-(c-(\varkappa+1)\vartheta)^2}{2\vartheta}\right\}dc = e^{\vartheta\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)}\Phi\left(\frac{\vartheta(\varkappa+1)}{\sqrt{\vartheta}}\right) ,$$

valamint a másik parciális integrálással:

$$\int_0^\infty 2\varkappa e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{-c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)e^c dc = \frac{2\varkappa}{2\varkappa+1}\int_0^\infty (2\varkappa+1)e^{(2\varkappa+1)c}\Phi\left(\frac{-c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)dc$$

$$= \frac{2\varkappa}{2\varkappa+1}\left[e^{(2\varkappa+1)c}\Phi\left(\frac{-c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right]_0^\infty + \frac{2\varkappa}{2\varkappa+1}\int_0^\infty e^{(2\varkappa+1)c}\varphi\left(\frac{-c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)\frac{1}{\sqrt{\vartheta}}dc$$

$$= -\frac{2\varkappa}{2\varkappa+1}\Phi\left(\frac{-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) + \frac{2\varkappa}{2\varkappa+1}\exp\left\{\frac{(2\varkappa+1)\vartheta^2}{2\vartheta}\right\}\times$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}}\exp\left\{\frac{-(c-(\varkappa+1)\vartheta)^2}{2\vartheta}\right\}dc$$

$$= -\frac{2\varkappa}{2\varkappa+1}\Phi\left(\frac{-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) + \frac{2\varkappa}{2\varkappa+1}e^{\vartheta\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)}\Phi\left(\frac{\vartheta(\varkappa+1)}{\sqrt{\vartheta}}\right) ,$$

ahol közben kihasználtuk, hogy a L'Hospital-szabály miatt:

$$\lim_{c\to\infty}\frac{\Phi\left(\frac{-c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)}{e^{-(2\varkappa+1)c}}=\lim_{c\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-(c+\varkappa\vartheta)^2}{2\vartheta}\right\}\frac{-1}{\sqrt{\vartheta}}}{-(2\varkappa+1)e^{-(2\varkappa+1)c}}$$

$$=\text{egy } c\text{-től nem függő konstans}\cdot\lim_{c\to\infty}\exp\left\{\frac{-(c-(\varkappa-1)\vartheta)^2}{2\vartheta}\right\}=0.$$

Így bevezetve a $d=(\varkappa+1)\sqrt{\vartheta}$ jelölést:

$$\mathbf{E}\left(e^{M_\varkappa(T)}\right)=2e^{\vartheta\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)}\Phi(d)+\frac{2\varkappa}{2\varkappa+1}\Phi(-d+\sqrt{\vartheta})-\frac{2\varkappa}{2\varkappa+1}e^{\vartheta\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)}\Phi(d)\ ,$$

amiből az eladási opció ára:

$$e^{\mu_*+\frac{\sigma_*^2}{2}}\left\{\frac{1}{B_T(2\varkappa+1)}\left[(2\varkappa+2)e^{\vartheta\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)}\Phi(d)+2\varkappa\Phi(-d+\sqrt{\vartheta})\right]-1\right\}.$$

2.1.1. A lookback típusú eladási opció a Samuelson-féle árfolyammodellben

Számítsuk ki, hogy mit ad a fenti formula a klasszikus árfolyammodell feltételei mellett. Mivel ekkor σ és r is konstans, ezért működik az árazási formula:

$$\varkappa=\frac{r}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\ ,\qquad \text{amiből:}\qquad d=\frac{2r+\sigma^2}{2\sigma}\sqrt{T}\ ,$$

és az opció ára így ($S_0=e^{\mu_*}$, $\sigma_*^2=0$):

$$S_0\left\{e^{-rT}\frac{\sigma^2}{2r}\left[\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)e^{rT}\Phi(d)+\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)\Phi(-d+\sigma\sqrt{T})\right]-1\right\}=$$

$$S_0\left\{-\Phi(-d)+e^{-rT}\Phi(-d+\sigma\sqrt{T})+\frac{\sigma^2}{2r}e^{-rT}\left[-\Phi(-d+\sigma\sqrt{T})+e^{rT}\Phi(d)\right]\right\}\ ,$$

ami megfelel a szakirodalomban ([4] 175. oldal, [13]) található eredménynek.

2.2. A lookback típusú vételi opció

2. Definíció. *Egy lookback típusú vételi opció tulajdonosának azt a jogot biztosítja, hogy T időpillanatban az adott részvény $[0,T]$ időintervallumbeli legalacsonyabb árán egy részvényt megvásároljon. Kifizetőfüggvénye tehát:*

$$S_T - \min_{0\le t\le T} S_t \ .$$

Minden képlet az előző alfejezet analógiájára egyszerűen számítható, így csak a végeredményeket írjuk fel. Legyen

$$m_\varkappa(T) = \min_{0\le t\le T} G(t) \qquad \text{és} \qquad v(T) = \min_{0\le t\le T} U(T).$$

Ekkor mivel az $U(T)$ folyamat szimmetrikus:

$$\mathbf{P}(U(T) > b, \quad v(T) > c) = \mathbf{P}(-U(T) < -b, \quad V(T) < -c)$$

$$= \begin{cases} \Phi\left(\frac{-b}{\sqrt{\vartheta}}\right) - \Phi\left(\frac{-b+2c}{\sqrt{\vartheta}}\right) & \text{ha } c < 0 \text{ és } b \ge c \\ \Phi\left(\frac{-c}{\sqrt{\vartheta}}\right) - \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{\vartheta}}\right) & \text{ha } c < 0 \text{ és } b < c \\ 0 & \text{ha } c \ge 0 \ , \end{cases}$$

amiből az együttes sűrűségfüggvényre

$$\frac{2(b-2c)}{\vartheta\sqrt{\vartheta}} \varphi\left(\frac{2c-b}{\sqrt{\vartheta}}\right)$$

adódik, ha $c < 0$ és $b \ge c$, különben pedig 0. Innen:

$$\mathbf{P}(G(T) > b, \quad m_\varkappa(T) > c) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{-b+\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{-b+2c+\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) & \text{ha } c < 0 \text{ és } b \ge c \\ \Phi\left(\frac{-c+\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{c+\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) & \text{ha } c < 0 \text{ és } b < c \\ 0 & \text{ha } c \ge 0 \ , \end{cases}$$

amiből az együttes sűrűségfüggvény:

$$\begin{cases} \frac{2(b-2c)}{\vartheta\sqrt{\vartheta}} \varphi\left(\frac{2c-b}{\sqrt{\vartheta}}\right) \exp\left\{\varkappa b - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\} & \text{ha } c < 0 \text{ és } b \ge c \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az $m_\varkappa(T)$ túlélésfüggvénye:

$$\Phi\left(\frac{-c+\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) - e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{c+\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) \qquad \text{ha } c < 0.$$

Ennek a deriváltjának az ellentettje lesz $m_\varkappa(T)$ sűrűségfüggvénye:

$$2\varkappa e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{c+\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)+\frac{2}{\sqrt{\vartheta}}\varphi\left(\frac{c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right) \qquad \text{ha } c<0\ ,$$

amiből:

$$\mathbf{E}\left(e^{m_\varkappa(T)}\right)=\int_{-\infty}^{0}e^{c}\left[2\varkappa e^{2\varkappa c}\Phi\left(\frac{c+\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)+\frac{2}{\sqrt{\vartheta}}\varphi\left(\frac{c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right]dc.$$

Kiszámítva az első tagot parciális integrálással:

$$\int_{-\infty}^{0}2\varkappa e^{(2\varkappa+1)c}\Phi\left(\frac{c+\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)dc=\frac{2\varkappa}{2\varkappa+1}\left[e^{(2\varkappa+1)c}\Phi\left(\frac{c+\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right]_{\infty}^{0}-$$

$$\frac{2\varkappa}{2\varkappa+1}e^{\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)\vartheta}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}}\exp\left\{\frac{-(c-(\varkappa+1)\vartheta)^2}{2\vartheta}\right\}dc$$

$$=\frac{2\varkappa}{2\varkappa+1}\Phi\left(\frac{\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)-\frac{2\varkappa}{2\varkappa+1}e^{\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)\vartheta}\Phi\left(\frac{-(\varkappa+1)\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right).$$

A második tag pedig:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{2}{\sqrt{\vartheta}}e^{c}\varphi\left(\frac{c-\varkappa\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right)dc=2\exp\left\{\frac{2\varkappa\vartheta^2+\vartheta^2}{2\vartheta}\right\}\times$$

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}}\exp\left\{\frac{-(c-(\varkappa+1)\vartheta)^2}{2\vartheta}\right\}dc=2e^{\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)\vartheta}\Phi\left(\frac{-(\varkappa+1)\vartheta}{\sqrt{\vartheta}}\right).$$

Így a már bevezetett d jelöléssel:

$$\mathbf{E}\left(e^{m_\varkappa(T)}\right)=\frac{2\varkappa}{2\varkappa+1}\Phi(d-\sqrt{\vartheta})+\frac{2\varkappa+2}{2\varkappa+1}e^{\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)\vartheta}\Phi(-d)\ ,$$

amiből az opció ára:

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{B_T}\left(S_T-\min_{0\le t\le T}S_t\right)\right]=e^{\mu_*+\frac{\sigma_*^2}{2}}\left\{1-\frac{1}{B_T}\mathbf{E}\left(e^{m_\varkappa(T)}\right)\right\}$$

$$=e^{\mu_*+\frac{\sigma_*^2}{2}}\left\{1-\frac{1}{B_T(2\varkappa+1)}\left[2\varkappa\Phi(d-\sqrt{\vartheta})+(2\varkappa+2)e^{\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)\vartheta}\Phi(-d)\right]\right\}.$$

2.2.1. A lookback típusú vételi opció a Samuelson-féle árfolyammodellben

A klasszikus árfolyammodell feltételezései:

$$S_0 = e^{\mu_*} \qquad \sigma_*^2 = 0 \qquad r,\ \sigma \text{ konstansok.}$$

Ekkor az opció ára a szakirodalomban ([4] 176. oldal) fellelhetőknek megfelelően:

$$S_0 \left\{ 1 - e^{-rT} \frac{\sigma^2}{2r} \left[\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) \Phi(d - \sigma\sqrt{T}) + \left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1 \right) e^{rT} \Phi(-d) \right] \right\}$$

$$= S_0 \left\{ \Phi(d) - e^{-rT} \Phi(d - \sigma\sqrt{T}) + \frac{\sigma^2}{2r} e^{-rT} \left[\Phi(d - \sigma\sqrt{T}) - e^{rT} \Phi(-d) \right] \right\}.$$

2.3. A down and out call (limitár alatt értéktelen vételi) opció

3. Definíció. *Egy limitár alatt értéktelen vételi opció K lehívási árfolyammal, T lejárati idővel és H limitárral az opció tulajdonosának azt a jogot nyújtja, hogy egy részvényt T időpillanatban K áron megvásárolhat, feltéve, ha a részvény ára a $[0, T]$ időintervallumban nem esett a H szint alá. Tehát az opció kifizetőfüggvénye:*

$$|S_T - K|^+ I \left(\min_{0 \le t \le T} S_t \ge H \right) \quad ,$$

ahol fel szokás tenni, hogy $K > H$ és $S_0 > H$.

Minden szükséges segédeszköz rendelkezésünkre áll, hogy ennek az opciónak az árát kiszámítsuk. Jelölje $\mathbb{C}_T(K|H \downarrow O)$ az opció árát. Itt a „$\downarrow$" jel arra utal, hogy a „limit alá" nem mehet a részvényárfolyam, az „O" pedig az angol „out" szóra utal. Ekkor

$$\mathbb{C}_T(K|H \downarrow O) = \frac{1}{B_T} \mathbf{E} \left[|S_T - K|^+ I \left(\min_{0 \le t \le T} S_t \ge H \right) \right] =$$

$$\frac{1}{B_T} \left\{ \mathbf{E} \left[S_T I \left(S_T \ge K,\ \min_{0 \le t \le T} S_t \ge H \right) \right] - K \mathbf{E} \left[I \left(S_T \ge K,\ \min_{0 \le t \le T} S_t \ge H \right) \right] \right\}$$

A számolások egyszerűbbé tétele miatt tegyük fel, hogy $\sigma_*^2 = 0$, tehát hogy ξ_0 konstans. Ekkor nyilván:

$$S_T \geq K \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{\mu_* + G(T)} \geq K \qquad \Longleftrightarrow \qquad G(T) \geq \ln K - \mu_* \ ,$$

továbbá:

$$\min_{0 \leq t \leq T} S_t \geq H \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\mu_* + m_\varkappa(T)} \geq H \quad \Longleftrightarrow \quad m_\varkappa(T) \geq \ln H - \mu_* \ .$$

Mivel $K > H$ és $S_0 > H$, ezért

$$\ln K - \mu_* > \ln H - \mu_* \qquad \text{és} \qquad \ln H - \mu_* < 0.$$

Az együttes sűrűségfüggvény tartójának és az indikátor által kijelölt tartomány metszetén integrálva az első várható érték:

$$\mathbf{E}\left[e^{\mu_* + G(T)} I\Big(G(T) \geq \ln K - \mu_*, \quad m_\varkappa(T) \geq \ln H - \mu_*\Big)\right]$$

$$= \int_{\ln K - \mu_*}^{0} \int_{\ln H - \mu_*}^{z} e^{\mu_* + z} \frac{2(z-2y)}{\vartheta\sqrt{\vartheta}} \varphi\left(\frac{2y-z}{\sqrt{\vartheta}}\right) e^{\varkappa z - \frac{\varkappa^2 \vartheta}{2}} dy dz$$

$$+ \int_{0}^{\infty} \int_{\ln H - \mu_*}^{0} e^{\mu_* + z} \frac{2(z-2y)}{\vartheta\sqrt{\vartheta}} \varphi\left(\frac{2y-z}{\sqrt{\vartheta}}\right) e^{\varkappa z - \frac{\varkappa^2 \vartheta}{2}} dy dz$$

$$= \int_{\ln K - \mu_*}^{0} \exp\left\{\mu_* + z(\varkappa + 1) - \frac{\varkappa^2 \vartheta}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \left[\varphi\left(\frac{z}{\sqrt{\vartheta}}\right) - \varphi\left(\frac{-z + \ln H^2 - 2\mu_*}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right] dz$$

$$+ \int_{0}^{\infty} \exp\left\{\mu_* + z(\varkappa + 1) - \frac{\varkappa^2 \vartheta}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \left[\varphi\left(\frac{-z}{\sqrt{\vartheta}}\right) - \varphi\left(\frac{-z + \ln H^2 - 2\mu_*}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right] dz$$

$$= e^{\mu_* - \frac{\varkappa^2 \vartheta}{2}} \left[A(0) - A(\ln H^2 - 2\mu_*)\right] \ ,$$

ahol:

$$A(b) = \int_{\ln K - \mu_*}^{\infty} e^{z(\varkappa+1)} \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \varphi\left(\frac{-z+b}{\sqrt{\vartheta}}\right) dz =$$

$$\exp\left\{\frac{2b(\varkappa+1)\vartheta + (\varkappa+1)^2\vartheta^2}{2\vartheta}\right\} \int_{\ln K - \mu_*}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\vartheta}} \exp\left\{\frac{-(z - b - (\varkappa+1)\vartheta)^2}{2\vartheta}\right\} dz$$

$$= \exp\left\{(\varkappa+1)\left[\frac{(\varkappa+1)\vartheta}{2}+b\right]\right\}\Phi\left(\frac{(\varkappa+1)\vartheta+b-\ln K+\mu_*}{\sqrt{\vartheta}}\right).$$

Tehát az első várható érték:

$$\exp\left\{\mu_* - \frac{\varkappa^2\vartheta}{2}+\frac{(\varkappa+1)^2\vartheta}{2}\right\}\left[\Phi\left(\frac{(\varkappa+1)\vartheta-\ln K+\mu_*}{\sqrt{\vartheta}}\right)-\right.$$

$$\left. e^{(\varkappa+1)(\ln H^2-2\mu_*)}\Phi\left(\frac{(\varkappa+1)\vartheta+\ln H^2-\mu_*-\ln K}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right]=$$

$$e^{\mu_*+\varkappa\vartheta+\frac{\vartheta}{2}}\left[\Phi\left(\frac{(\varkappa+1)\vartheta-\ln\left(\frac{K}{e^{\mu_*}}\right)}{\sqrt{\vartheta}}\right)-\left(\frac{H}{e^{\mu_*}}\right)^{2(\varkappa+1)}\Phi\left(\frac{(\varkappa+1)\vartheta+\ln\left(\frac{H^2}{Ke^{\mu_*}}\right)}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right].$$

A második várható érték pedig:

$$\mathbf{E}\left[I\Big(G(T)\geq \ln K-\mu_*,\quad m_\varkappa(T)\geq \ln H-\mu_*\Big)\right]$$

$$=\int_{\ln K-\mu_*}^{0}\int_{\ln H-\mu_*}^{z}\frac{2(z-2y)}{\vartheta\sqrt{\vartheta}}\varphi\left(\frac{2y-z}{\sqrt{\vartheta}}\right)e^{\varkappa z-\frac{\varkappa^2\vartheta}{2}}dydz$$

$$+\int_{0}^{\infty}\int_{\ln H-\mu_*}^{0}\frac{2(z-2y)}{\vartheta\sqrt{\vartheta}}\varphi\left(\frac{2y-z}{\sqrt{\vartheta}}\right)e^{\varkappa z-\frac{\varkappa^2\vartheta}{2}}dydz$$

$$=\int_{\ln K-\mu_*}^{0}\exp\left\{\varkappa z-\frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\}\frac{1}{\sqrt{\vartheta}}\left[\varphi\left(\frac{z}{\sqrt{\vartheta}}\right)-\varphi\left(\frac{-z+\ln H^2-2\mu_*}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right]dz$$

$$+\int_{0}^{\infty}\exp\left\{\varkappa z-\frac{\varkappa^2\vartheta}{2}\right\}\frac{1}{\sqrt{\vartheta}}\left[\varphi\left(\frac{-z}{\sqrt{\vartheta}}\right)-\varphi\left(\frac{-z+\ln H^2-2\mu_*}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right]dz$$

$$=e^{-\frac{\varkappa^2\vartheta}{2}}\left[B(0)-B(\ln H^2-2\mu_*)\right]\quad,$$

ahol:

$$B(b)=\int_{\ln K-\mu_*}^{\infty}e^{\varkappa z}\frac{1}{\sqrt{\vartheta}}\varphi\left(\frac{-z+b}{\sqrt{\vartheta}}\right)dz$$

$$= \exp\left\{\varkappa\left[\frac{\varkappa\vartheta}{2}+b\right]\right\}\Phi\left(\frac{\varkappa\vartheta+b-\ln K+\mu_*}{\sqrt{\vartheta}}\right).$$

Így a második várható érték:

$$\Phi\left(\frac{\varkappa\vartheta-\ln K+\mu_*}{\sqrt{\vartheta}}\right)-e^{\varkappa(\ln H^2-2\mu_*)}\Phi\left(\frac{\varkappa\vartheta+\ln H^2-\mu_*-\ln K}{\sqrt{\vartheta}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{(\varkappa\vartheta-\ln\left(\frac{K}{e^{\mu_*}}\right)}{\sqrt{\vartheta}}\right)-\left(\frac{H}{e^{\mu_*}}\right)^{2\varkappa}\Phi\left(\frac{\varkappa\vartheta+\ln\left(\frac{H^2}{Ke^{\mu_*}}\right)}{\sqrt{\vartheta}}\right).$$

Tehát kihasználva, hogy $B_T = e^{\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)\vartheta}$, az opció ára:

$$e^{\mu_*}\left[\Phi\left(\frac{(\varkappa+1)\vartheta-\ln\left(\frac{K}{e^{\mu_*}}\right)}{\sqrt{\vartheta}}\right)-\left(\frac{H}{e^{\mu_*}}\right)^{2(\varkappa+1)}\Phi\left(\frac{(\varkappa+1)\vartheta+\ln\left(\frac{H^2}{Ke^{\mu_*}}\right)}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right]-$$

$$\frac{K}{B_T}\left[\Phi\left(\frac{\varkappa\vartheta-\ln\left(\frac{K}{e^{\mu_*}}\right)}{\sqrt{\vartheta}}\right)-\left(\frac{H}{e^{\mu_*}}\right)^{2\varkappa}\Phi\left(\frac{\varkappa\vartheta+\ln\left(\frac{H^2}{Ke^{\mu_*}}\right)}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right].$$

A klasszikus Samuelson-féle árfolyammodellben ez még egyszerűbb alakot ölt:

$$S_0\left[\Phi\left(\frac{rT+\frac{\sigma^2T}{2}-\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{rT+\frac{\sigma^2T}{2}+\ln\left(\frac{H^2}{KS_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]-$$

$$Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{rT-\frac{\sigma^2T}{2}-\ln\left(\frac{K}{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\left(\frac{H}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi\left(\frac{rT-\frac{\sigma^2T}{2}+\ln\left(\frac{H^2}{KS_0}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right],$$

ami megfelel a szakirodalomban fellelhető formulának ([4] 173. oldal).

A down and out call opció analógiájára hasonló opciók definiálhatók. Olyanok, amelyek akkor biztosítanak vételi jogot, ha az ár nem emelkedik egy adott szint fölé, vagy éppen akkor, ha igen. Mindezen opciók eladási jogosultságot is nyújthatnak. Összesen így nyolcféle opció definiálható az

$$\frac{\textit{up}}{\textit{down}} \quad \text{and} \quad \frac{\textit{out}}{\textit{in}} \quad \frac{\textit{call}}{\textit{put}}$$

nevekkel. Ezek árainak meghatározása a down and out call mintájára megy, így ezek árazásától eltekintünk.

2.4. Opcióárazás, ha $r(t)/\sigma^2(t)$ hányados nem állandó

Ebben az alfejezetben azt nézzük meg, hogy mit lehet mondani az eddig tárgyalt egzotikus opciók áráról, ha az

$$\frac{r(t)}{\sigma^2(t)} \equiv \text{konstans}$$

feltétel nem teljesül. Az egyik lehetőség $U(T)$, $V(T)$ és $Z(T)$ együttes eloszlásának meghatározása. Ha ez meglenne, akkor az összes eddig vizsgált egzotikus opció árát könnyen kiszámíthatnánk. A gond azonban az, hogy az együttes eloszlás kiszámítása rendkívül bonyolult, teljes általánosságban explicit formula nem is adható rá.

A másik lehetőség az, hogy megadjuk egy általános lineáris sztochasztikus differenciálegyenlettel leírt diffúziós folyamat maximumának az eloszlását. Ezzel persze csak a lookback típusú eladási (illetve alkalmas transzformálással a vételi) opció árát tudjuk meghatározni, a limitáras opciókét nem, hiszen ahhoz a végponttal vett együttes eloszlás kellene. Megelégszünk mégis a maximum eloszlásának vizsgálatával, ugyanis annak meghatározása is rendkívül bonyolult már.

Elsőként az lesz a célunk, hogy a maximum eloszlásának vizsgálatát a Wiener-folyamat egy egyszerű szintátmetszési problémájává alakítsuk át. Láttuk, hogy elég

$$G(t) = \int_0^t \sigma(s)dW_s - \int_0^t g(s)ds$$

$[0,T]$-n vett maximumának eloszlását ismerni, ezt a maximumot jelöltük $M_g(T)$-vel:

$$\mathbf{P}(M_g(T) < c) = \mathbf{P}\left(\int_0^t \sigma(s)dW_s < c + \int_0^t g(s)ds \qquad \forall t \in [0,T]\text{-re}\right).$$

Bevezetve az

$$f(t) = c + \int_0^t g(s)ds$$

függvényt:

$$\mathbf{P}\left(\int_0^t \sigma(s)dW_s < c + \int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0,T]\text{-re}\right)$$

$$= \mathbf{P}\left(\int_0^t \sigma(s)dW_s < f(t) \quad \forall t \in [0,T]\text{-re}\right) = \mathbf{P}(\tau > T) \ ,$$

ahol τ a következő megállítás[3]:

$$\tau = \inf\left\{t: \ \ 0 \le t \le T, \ \int_0^t \sigma(s)dW_s \ge f(t)\right\}.$$

τ eloszlásának ismeretében rendelkezésünkre állna a maximum eloszlása is. Ez a következő tétel alapján visszavezethető a standard Wiener-folyamat szintátmetszési problémájára:

4. Tétel. *Legyen $y(t)$ egy olyan folytonos trajektóriájú Gauss-Markov folyamat, melyre $y(0) = 0$ egy valószínűséggel és $\boldsymbol{E}(y(t)) = 0 \quad \forall t$-re. Ekkor*

(i) $y(t)$ kovarianciafüggvénye: $h_1(s)h_2(t)$ alakú $s \le t$ esetén,

(ii) bevezetve a $k(t) = h_1(t)/h_2(t)$ függvényt, $y(t)$ folyamat $a_y(t)$ szinten való első átlépésének sűrűségfüggvénye:

$$p_y(t) = p_W(k(t))k'(t) \ ,$$

ahol $p_W(s)$ a standard Wiener-folyamat

$$a_W(s) = h_2(k^{-1}(s))a_y(k^{-1}(s))$$

szinten való első átlépésének sűrűségfüggvénye.

A fenti tétel megtalálható [3]-ban, így nem bizonyítjuk. Ennek segítségével azonban (lévén $\int_0^t \sigma(s)dW_s$ folytonos trajektóriájú Gauss-Markov folyamat) elegendő a Wiener-folyamat szintátmetszésével foglalkozni. τ eloszlásának[4] kiszámítása persze ettől még továbbra is elég bonyolult, így csak idézzük az idevágó szakirodalom eredményét ([3]):

5. Tétel. *Legyen $f(t)$ folytonosan differenciálható függvény $[0,T]$-n. Ekkor a fenti τ eloszlásának sűrűségfüggvénye egy $0 < t < T$ helyen előáll a következő sor határértékeként:*

$$p(t) = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}q_j(t) \ ,$$

[3] Itt természetesen úgy értve ezt, hogy az üres halmaz infimuma $+\infty$.

[4] Itt már τ definíciójába $\int_0^t \sigma(s)dW_s$ helyett egyszerűen W_t-t kell írni, az eredeti $f(t)$ helyébe pedig a 4. Tételnek megfelelő átskálázott határfüggvényt.

ahol

$$q_j(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{j-2}} \left[\frac{f(t_{j-1})}{t_{j-1}} - f'(t_{j-1})\right] \times$$

$$\prod_{i=1}^{j-1} \left[\frac{f(t_{i-1}) - f(t_i)}{t_{i-1} - t_i} - f'(t_{i-1})\right] h(t_{j-1}, \ldots\ t_1,\ t) dt_{j-1} \ldots dt_1 \qquad (t_0 = t),$$

$h(t_{j-1}, \ldots\ t_1,\ t)$ pedig $W_{t_{j-1}}, \ldots\ W_{t_1}$, W_t együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye az $f(t_{j-1}), \ldots\ f(t_1)$, $f(t)$ helyen.

A $p(t)$ függvény ismeretében amire nekünk szükségünk van:

$$\mathbf{P}(\tau > T) = 1 - \mathbf{P}(\tau \leq T) = 1 - \int_0^T p(t)dt.$$

Persze mivel $p(t)$ csupán végtelen sorelőállítással van megadva, ezért ezt a valószínűséget egyáltalán nem könnyű kiszámítani. Szerencsére azonban a végtelen sor viszonylag gyorsan konvergál, így általában a negyedik, ötödik tagig ha kiszámítjuk a részletösszeget, az már elég jó közelítést ad ([3]).

Bizonyos esetekben az opció árára pontosan nincs is szükségünk, inkább csak valamiféle közelítő, de egyszerű formulát szeretnénk. Ilyenkor elég, ha τ eloszlását alulról, illetve felülről becsülni tudjuk. Ebben segít a következő –Novikovtól származó– két tétel ([10]):

6. Tétel. *Legyen $f(t)$ olyan abszolút folytonos függvény, melyre*

$$f(0) > 0 \qquad \text{és} \qquad \int_0^T (f'(t))^2 dt < \infty$$

Ekkor tetszőleges $p > 1$ számra:

$$\boldsymbol{P}(\tau > T) \geq \left(\Phi_0\left(\frac{|f(0)|}{\sqrt{T}}\right)\right)^{\frac{p}{p-1}} \exp\left\{-\frac{p}{2}\int_0^T (f'(t))^2 dt\right\}$$

és

$$\boldsymbol{P}(\tau > T) \leq \Phi_0\left(\frac{|f(0)|}{\sqrt{T}}\right)^{\frac{1}{p}} \exp\left\{\frac{1}{2(p-1)}\int_0^T (f'(t))^2 dt\right\} \ ,$$

ahol

$$\Phi_0(x) = 2\Phi(x) - 1.$$

7. Tétel. *Az előző tétel feltételei mellett, ha α egy tetszőleges pozitív szám, akkor:*

$$\boldsymbol{P}(\tau > T) \geq \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T (f'(t))^2 dt - \alpha\left(\int_0^T (f'(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \times$$

$$\left[\Phi_0\left(\frac{-f(0)}{\sqrt{T}}\right) + \Phi(\alpha) - 1\right]$$

és

$$\boldsymbol{P}(\tau > T) \leq \Phi_0\left(\frac{-f(0)}{\sqrt{T}}\right)\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T (f'(t))^2 dt +\right.$$

$$\left.\alpha\left(\int_0^T (f'(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\} + 1 - \Phi(\alpha).$$

A tételek feltételei elegendően sima $\sigma(t)$ és $r(t)$ választása esetén persze teljesülnek (a gyakorlatban úgyis mindig ilyeneket érdemes használni), így a p illetve az α szám ügyes megválasztásával a τ eloszlása ezen két tétel segítségével jól közelíthető, onnan pedig az opciók ára már számolható.

3. fejezet

A modellt leíró függvények becslése

Ebben a fejezetben az árfolyammodellt leíró ξ_t folyamat paramétereit próbáljuk valamilyen módon megbecsülni. Ez alapvető fontosságú az előző két fejezet eredményeinek alkalmazásához, hisz az árazási formulákban szereplő $\sigma(t)$, illetve az ebből származtatott $\vartheta(t)$ függvények közvetlenül nem megfigyelhetőek, a részvényárfolyam korábbi viselkedéséből kell következtetnünk ezekre. Ugyan a $\mu(t)$ és a $\lambda(t)$ függvények explicite nem szerepelnek egyetlen árazási képletben sem, látni fogjuk, hogy az illesztett modelltől mégis igen jelentősen függ a $\sigma(t)$ függvény becslése. Ennek eredményeként a becsülendő $\mu(t)$ és $\lambda(t)$ függvények alakjának megválasztása közvetetten jelentős befolyással bír az opciók árára is.

3.1. A probléma paraméteres becslési feladattá alakítása

A 3. fejezet egészét végigkíséri az a feltételezés, hogy ξ_0-t nem tekintjük valószínűségi változónak, értékét ismertnek tételezzük fel. Ha ξ_0-t normális eloszlású valószínűségi változónak vennénk, akkor természetesen a paramétereit is valahogy becsülni kellene. Ezekre értelmes becslést azonban csak akkor tudnánk adni, ha a részvényárfolyamból (mint folyamatból) több trajektóriát (vagy legalább csak azok kezdőpontjait) megismerhetnénk a mintavételezés során. Általában azonban a tőzsdén forgó részvények mindegyikének másképp fejlődik az árfolyama, így megfigyeléseink legtöbbször egy trajektóriára, sőt legtöbb esetben annak diszkrét időpontokban felvett értékeire koncentrálódnak. Maradunk tehát annál a feltételezésnél, hogy ξ_0 egy konstans érték.

Tegyük fel továbbá, hogy a részvényárfolyam folyamatos fejlődését nem ismerjük, annak csupán $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$ diszkrét időpontokban felvett értékei állnak rendelkezésünkre. Ez olyan szempontból nem irreális feltételezés, hogy a modell segítségével az opciók árára a múltbeli részvényárfolyam-mozgás alapján akarunk következtetni, múltbeli adatok viszont nem állnak olyan nagy mennyiségben rendelkezésünkre, hogy az árfolyamváltozásokat egyik pillanatról a másikra követni tudjuk. Általában napi, legfeljebb óránkénti árfolyamértékeket tartanak nyilván, így ha az ember amúgyis csak diszkrét adatokhoz tud hozzájutni, akkor érdemes a becslést is ezek alapján végezni.

Ugyancsak fontos lehet, hogy nem feltétlen áll elő minden $0 \leq i \leq n$ esetén t_i it alakban, azaz nem feltétlen egyenlő időközönként figyeljük meg a részvényárfolyam változását. Bár a legszebb eredmények egyenletes időfelosztás mellett érhetők el (például, ha ξ_t elsőrendű folytonos idejű autoregresszió, akkor a folyamatot diszkrét egyenletes időközönként megfigyelve, az diszkrét AR(1) folyamat lesz[1]). Mi azonban egyrészt ξ_t-t ennél bonyolultabb folyamatként is szeretnénk közelíteni, másrészt az egyenletes időfelosztás sem mindig elfogadható feltételezés. Egy tőzsdei részvény árfolyama olyan időszakokban is fejlődhet, mikor azt nem tudjuk megfigyelni. Ilyen például a hétvége (amikoris zárva tart a tőzsde), vagy óránkénti adatok elemzése esetén az éjszakai órák. Persze ezekben az időszakokban nem fejlődik a részvényárfolyam olyan ütemben, mint a tényleges aktív kereskedési órákban, ám egy alkalmas időközválasztással ez a kevésbé aktív fejlődés kezelhetővé válik.

Legyen tehát $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$ időpontokban a részvényárfolyam értéke: S_{t_0}, S_{t_1}, ... S_{t_n}. Ez alapján a ξ_t folyamat ezen időpontokban megfigyelt értékei:

$$s_i = \ln(S_{t_i}) \qquad 0 \leq i \leq n.$$

Rendelkezésünkre áll tehát $(n+1)$ db adat, ezek alapján $\lambda(t)$, $\mu(t)$ és $\sigma(t)$ függvényeket mindenféle korlátozás nélkül nem érdemes becsülni. Tegyük fel, hogy ezek polinomok, azaz:

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t + ... + \lambda_p t^p \ ,$$

$$\mu(t) = \mu_0 + \mu_1 t + ... + \mu_q t^q \ ,$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_1 t + ... + \sigma_u t^u \ ,$$

ahol a p, q és u a becslés elején rögzített, pozitív egész számok. Ezzel a becslési feladatunk paraméteres formát öltött, célunk $\{\lambda_i\}_{i=0}^p$, $\{\mu_i\}_{i=0}^q$, $\{\sigma_i\}_{i=0}^u$

[1] Például megtalálható: [11].

együtthatók becslése. Maximum likelihood (ML) módszert szeretnénk használni. Ehhez kellene a $(\xi_{t_1}, \ldots\ \xi_{t_n})$ vektor eloszlásának a sűrűségfüggvénye, ebbe beírjuk a megfigyelt $\{s_i\}_{i=0}^n$ értékeket, majd az így kapott kifejezést a paraméterekben, mint változókban maximalizáljuk. Mivel a ξ_t folyamatot egy olyan lineáris sztochasztikus differenciálegyenlet írja le, ahol ξ_0 konstans, ezért ξ_t Gauss-folyamat, azaz minden véges dimenziós eloszlása Gauss. Elég lenne éppen ezért $(\xi_{t_1}, \ldots\ \xi_{t_n})$ vektor várható értékét és kovarianciamátrixát ismerni, ebből felírható a ξ_{t_1}, ... ξ_{t_n} valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye.

[1] 146. oldal 8.2.6 Tétel alapján:

$$\mathbf{E}\xi_t = \Psi(t)\left(\xi_0 + \int_0^t \Psi^{-1}(\tau)\mu(\tau)d\tau\right) \qquad \text{és}$$

$$\mathbf{Cov}(\xi_t, \xi_s) = \Psi(t)\Psi(s)\int_0^{\min\{t,s\}} \Psi^{-2}(\tau)\sigma^2(\tau)d\tau \ ,$$

ahol $\Psi(t)$ a $\dot{\Psi}(t) = \lambda(t)\Psi(t)$ determinisztikus differenciálegyenlet alapmegoldása. A mi feltételeink mellett ez az alapmegoldás

$$\Psi_t = \exp\left\{\lambda_0 t + \lambda_1\frac{t^2}{2} + \ldots + \lambda_p\frac{t^{p+1}}{p+1}\right\} \ ,$$

amiből

$$\mathbf{E}\xi_t = e^{\lambda_0 t + \ldots + \lambda_p\frac{t^{p+1}}{p+1}}\left(\xi_0 + \int_0^t e^{-\lambda_0\tau - \ldots - \lambda_p\frac{\tau^{p+1}}{p+1}}(\mu_0 + \mu_1\tau + \ldots + \mu_q\tau^q)d\tau\right) \ ,$$

valamint

$$\mathbf{Cov}(\xi_t, \xi_s) = e^{\lambda_0(t+s) + \ldots + \lambda_p\frac{t^{p+1} + s^{p+1}}{p+1}}\int_0^{\min\{t,s\}} e^{-2\lambda_0\tau - \ldots - 2\lambda_p\frac{\tau^{p+1}}{p+1}}(\sigma_0 + \ldots + \sigma_u\tau^u)^2 d\tau.$$

Bevezetve az

$$m = (\mathbf{E}\xi_{t_1}, \mathbf{E}\xi_{t_2}, \ldots\ \mathbf{E}\xi_{t_n})^T$$

$$\Sigma_{ij} = (\mathbf{Cov}(\xi_{t_i}, \xi_{t_j}))_{ij}$$

$$s = (s_1, \ldots\ s_n)^T$$

jelöléseket a likekihood függvény a

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\det\Sigma)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(s-m)^T\Sigma^{-1}(s-m)\right\}$$

alakot ölti, ezt kell maximalizálni a $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\sigma(t)$ polinomok együtthatóinak függvényében. Ennek a szélsőérték-problémának a megoldása általánosságban egy igen nehéz, bonyolult numerikus módszereket igénylő optimalizálási feladat, így mi csupán a legegyszerűbb formában oldjuk meg, majd szólunk egy-két általánosabb alak numerikus megoldásának lehetőségeiről is.

3.2. ML-becslés állandó együtthatós lineáris sztochasztikus differenciálegyenlet esetén

Ebben az alfejezetben a $\lambda(t)\equiv\lambda$, $\mu(t)\equiv\mu$, $\sigma(t)\equiv\sigma$ feltételezésekkel élünk, azaz feltételezzük, hogy ξ_t kielégíti a

$$d\xi_t=\Big[\lambda\xi_t+\mu\Big]dt+\sigma dW_t$$

állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletet. Ilyen feltételek mellett próbáljuk megbecsülni az együtthatókat, majd a σ-ra ilyen módon kapott becslést összevetjük azzal az eredménnyel, amit $\lambda=0$ feltétel mellett, azaz a klasszikus esetben kapnánk.

Ha $\lambda(t)$ és $\mu(t)$ függvények egyaránt konstans értékűek, akkor

$$\mathbf{E}\xi_t=e^{\lambda t}\left(\xi_0+\int_0^t e^{-\lambda\tau}\mu d\tau\right)=e^{\lambda t}s_0+\frac{\mu}{\lambda}\left(e^{\lambda t}-1\right)\quad,$$

és ha $\sigma(t)$ is konstans, akkor pedig:

$$\mathbf{Cov}(\xi_t,\xi_s)=e^{\lambda(t+s)}\int_0^{\min\{t,s\}}e^{-2\lambda\tau}\sigma^2d\tau=\frac{\sigma^2}{2\lambda}e^{\lambda(t+s)}\left(1-e^{-2\lambda\min\{t,s\}}\right).$$

Bevezetve az $a=e^{\lambda}$ és a $b_i=1-e^{-2\lambda t_i}$ jelöléseket, a kovarianciamátrix:

$$\Sigma=\frac{\sigma^2}{2\lambda}\begin{pmatrix} a^{t_1+t_1}b_1 & a^{t_1+t_2}b_1 & a^{t_1+t_3}b_1 & \dots & a^{t_1+t_n}b_1\\ a^{t_2+t_1}b_1 & a^{t_2+t_2}b_2 & a^{t_2+t_3}b_2 & \dots & a^{t_2+t_n}b_2\\ a^{t_3+t_1}b_1 & a^{t_3+t_2}b_2 & a^{t_3+t_3}b_3 & \dots & a^{t_3+t_n}b_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a^{t_n+t_1}b_1 & a^{t_n+t_2}b_2 & a^{t_n+t_3}b_3 & \dots & a^{t_n+t_n}b_n \end{pmatrix}.$$

A továbbiakhoz két lemmára lesz szükségünk:

1. Lemma. *Legyenek* $a \geq 0$, b_i, $c_i \in \mathbb{R}$, $t_i > 0$, *és legyen*

$$A = \begin{pmatrix} a^{t_1+t_1}b_1 & a^{t_1+t_2}c_1 & a^{t_1+t_3}c_1 & \dots & a^{t_1+t_n}c_1 \\ a^{t_2+t_1}b_1 & a^{t_2+t_2}b_2 & a^{t_2+t_3}c_2 & \dots & a^{t_2+t_n}c_2 \\ a^{t_3+t_1}b_1 & a^{t_3+t_2}b_2 & a^{t_3+t_3}b_3 & \dots & a^{t_3+t_n}c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{t_n+t_1}b_1 & a^{t_n+t_2}b_2 & a^{t_n+t_3}b_3 & \dots & a^{t_n+t_n}b_n \end{pmatrix},$$

azaz

$$A_{ij} = \begin{cases} a^{t_i+t_j}b_j & \text{ha } i \geq j \\ a^{t_i+t_j}c_i & \text{ha } i < j \end{cases}.$$

Ekkor

$$\det A = a^{2\sum_{i=1}^n t_i} b_1(b_2 - c_1)(b_3 - c_2)\dots(b_n - c_{n-1}).$$

Bizonyítás: Ha $a = 0$, akkor a lemma állítása triviális. Tegyük fel, hogy $a \neq 0$. Osszuk le az A mátrix első sorát a^{t_1}-gyel, majd az első oszlopát is. A második sorát a^{t_2}-nel, majd a második oszlopát is, stb... Így kapjuk a B mátrixot, ahol

$$B_{ij} = \begin{cases} b_j & \text{ha } i \geq j \\ c_i & \text{ha } i < j \end{cases}.$$

Nyilván $\det A = a^{2\sum_{i=1}^n t_i} \det B$, így elég belátni, hogy

$$\det B = b_1(b_2 - c_1)(b_3 - c_2)\dots(b_n - c_{n-1}).$$

Ezt n szerinti teljes indukcióval látjuk be. $n = 1$-re triviális az állítás. Általában $n > 1$ esetén fejtsük ki az első sor szerint a mátrixot, és alkalmazzuk az első két tag esetén az indukciós feltételt. A többi tag úgyis nulla, hisz a megfelelő aldetermináns első két oszlopa egymás konstansszorosa. Tehát

$$\det B = b_1b_2(b_3 - c_2)(b_4 - c_3)\dots(b_n - c_{n-1}) - b_1c_1(b_3 - c_2)(b_4 - c_3)\dots(b_n - c_{n-1})$$

$$= b_1(b_2 - c_1)(b_3 - c_2)(b_4 - c_3)\dots(b_n - c_{n-1}). \quad \blacksquare$$

2. Lemma. *Legyen* $a > 0$, $b_i \in \mathbb{R}$, $b_{i+1} \neq b_i$, $b_1 \neq 0$, $t_i > 0$, *valamint*

$$A = \begin{pmatrix} a^{t_1+t_1}b_1 & a^{t_1+t_2}b_1 & a^{t_1+t_3}b_1 & \dots & a^{t_1+t_n}b_1 \\ a^{t_2+t_1}b_1 & a^{t_2+t_2}b_2 & a^{t_2+t_3}b_2 & \dots & a^{t_2+t_n}b_2 \\ a^{t_3+t_1}b_1 & a^{t_3+t_2}b_2 & a^{t_3+t_3}b_3 & \dots & a^{t_3+t_n}b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{t_n+t_1}b_1 & a^{t_n+t_2}b_2 & a^{t_n+t_3}b_3 & \dots & a^{t_n+t_n}b_n \end{pmatrix},$$

azaz

$$A_{ij} = a^{t_i+t_j} b_{\min\{i,j\}}.$$

Ekkor

$$A^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} a^{-(t_1+t_1)}\frac{b_2}{b_1(b_2-b_1)} & a^{-(t_1+t_2)}\frac{1}{b_1-b_2} & 0 & \dots & 0 \\ a^{-(t_2+t_1)}\frac{1}{b_1-b_2} & a^{-(t_2+t_2)}\frac{b_3-b_1}{(b_2-b_1)(b_3-b_2)} & a^{-(t_2+t_3)}\frac{1}{b_2-b_3} & \dots & 0 \\ 0 & a^{-(t_3+t_2)}\frac{1}{b_2-b_3} & a^{-(t_3+t_3)}\frac{b_4-b_2}{(b_3-b_2)(b_4-b_3)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a^{-(t_n+t_n)}\frac{1}{b_n-b_{n-1}} \end{pmatrix}$$

azaz

$$(A^{-1})_{ij} = \begin{cases} 0 & ha \quad |i-j| \geq 2 \\ a^{-(t_i+t_j)}\frac{1}{b_{\min\{i,j\}}-b_{\max\{i,j\}}} & ha \quad |i-j| = 1 \\ a^{-2t_1}\frac{b_2}{b_1(b_2-b_1)} & ha \quad i=j=1 \\ a^{-2t_i}\frac{b_{i+1}-b_{i-1}}{(b_i-b_{i-1})(b_{i+1}-b_i)} & ha \quad 1<i=j<n \\ a^{-2t_n}\frac{1}{b_n-b_{n-1}} & ha \quad i=j=n \end{cases}.$$

Bizonyítás: Jelölje B azt a mátrixot, amit A-ból úgy kapunk, hogy az „a-hatványos" tényezőt minden elem elejéről elhagyjuk. Jelölje B' pedig azt, amit ugyanilyen módon A^{-1}-ből kapunk[2]. Ekkor világosan látszik, hogy

$$(AA^{-1})_{ij} = a^{t_i-t_j}(BB')_{ij}.$$

Ha belátjuk, hogy $BB' = I_n$ (nxn-es egységmátrix), akkor készen is leszünk, hiszen $i=j$ esetén $a^{t_i-t_j}=1$, különben meg $(BB')_{ij}$ úgyis 0. Számítsuk ki B^{-1}-t, s lássuk be, hogy megegyezik B'-sal. Ehhez az előző lemmát használjuk $a=1$ speciális esetben.

[2]Úgy értve ezt, hogy A^{-1} nem a tényleges inverzet jelöli, hanem azt a mátrixot, amiről szeretnénk belátni, hogy az az inverz.

- Ha $|i-j| \geq 2$, akkor szimmetrikus mátrixról lévén szó, elég belátni, hogy $i > j$ esetén az i. sor j. eleméhez tartozó aldetermináns nulla. Két esetet kell megkülönböztetni:

  – ha $j = 1$, akkor az aldetermináns első két sora egymás konstansszorosa, így nyilván 0 az aldeterminláns értéke,

  – ha $j > 1$, akkor tekintsük az aldeterminláns $(j-1)$., j. és $(j+1)$. sorát. Ezek rendre:

$$\begin{matrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{j-1} & b_{j-1} & b_{j-1} & \dots & b_{j-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{j-1} & b_j & b_j & \dots & b_j \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{j-1} & b_{j+1} & b_{j+1} & \dots & b_{j+1} \end{matrix}$$

  A $(j+1)$. sorból kivonva a j.-et, majd a j.-ből a $(j-1)$.-et, a j. és a $(j+1)$. sor:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_j - b_{j-1} & b_j - b_{j-1} & \dots & b_j - b_{j-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{j+1} - b_j & b_{j+1} - b_j & \dots & b_{j+1} - b_j \end{matrix}$$

  Tehát ezek egymás konstansszorosai, így megintcsak 0 az aldeterminláns értéke.

- Ha $|i-j| = 1$, akkor az előző lemmából:

$$(B^{-1})_{ij} = \begin{cases} -\frac{b_1(b_2-b_1)\dots(b_i-b_{i-1})(b_{i+2}-b_{i+1})\dots(b_n-b_{n-1})}{b_1(b_2-b_1)\dots(b_n-b_{n-1})} = \frac{1}{b_i-b_{i+1}} & \text{ha } j = i+1 \\ \\ -\frac{b_1(b_2-b_1)\dots(b_{i-2}-b_{i-1})(b_i-b_{i-1})\dots(b_n-b_{n-1})}{b_1(b_2-b_1)\dots(b_n-b_{n-1})} = \frac{1}{b_{i-1}-b_i} & \text{ha } j = i-1. \end{cases}$$

- Ha $i = j = 1$, akkor szintén az előző lemmából:

$$(B^{-1})_{11} = \frac{b_2(b_3-b_2)\dots(b_n-b_{n-1})}{b_1(b_2-b_1)\dots(b_n-b_{n-1})} = \frac{b_2}{b_1(b_2-b_1)}.$$

- Ha $1 < i = j < n$, akkor hasonló okokból, mint az előbb:

$$(B^{-1})_{ii} = \frac{b_1(b_2-b_1)\dots(b_{i-1}-b_{i-2})(b_{i+1}-b_{i-1})(b_{i+2}-b_{i+1})(b_n-b_{n-1})}{b_1(b_2-b_1)\dots(b_n-b_{n-1})}$$

$$= \frac{b_{i+1}-b_{i-1}}{(b_i-b_{i-1})(b_{i+1}-b_i)}.$$

- Ha $i = j = n$, akkor pedig:

$$(B^{-1})_{nn} = \frac{b_1(b_2-b_1)\dots(b_{n-2}-b_{n-1})}{b_1(b_2-b_1)\dots(b_n-b_{n-1})} = \frac{1}{b_n-b_{n-1}}.$$

Ezzel a lemmát beláttuk. ■

Megjegyzés: Bár egyelőre a két lemma állítása nekünk bőven elég lesz, később szükségünk lesz ezek általánosítására. Triviálisan igazolható, hogy a két lemma úgy is érvényben marad, ha a^{t_i} helyére mindenhova egy hasonló alakú, de többtényezős szorzatot írunk, méghozzá a következőt:

$$a_{(1)}^{t_i^{(1)}+t_j^{(1)}} a_{(2)}^{t_i^{(2)}+t_j^{(2)}} \dots a_{(m)}^{t_i^{(m)}+t_j^{(m)}}.$$

Persze a determináns ekkor

$$\left(\prod_{j=1}^{m} a_{(j)}^{2\sum_{i=1}^{n} t_i^{(j)}}\right) b_1(b_2-c_1)\dots(b_n-c_{n-1})$$

lesz, az inverzmátrixban pedig $a^{-(t_i+t_j)}$ helyett

$$a_{(1)}^{-(t_i^{(1)}+t_j^{(1)})} a_{(2)}^{-(t_i^{(2)}+t_j^{(2)})} \dots a_{(m)}^{-(t_i^{(m)}+t_j^{(m)})}$$

áll. Ezen általánosítások igazolása pontosan ugyanígy megy, mint ahogy a lemmák egyszerűbb változatát beláttuk.

Az 1. Lemma segítségével a kovarianciamátrix determinánsa $\sigma^{2n}k_1$ alakú, ahol

$$k_1 = \frac{1}{2^n\lambda^n} e^{2\lambda\sum_{i=1}^{n} t_i} b_1(b_2-b_1)\dots(b_n-b_{n-1}) \ ,$$

tehát k_1 csak λ-tól függ, μ-től és σ-tól nem. Másrészt a $c_i = (e^{\lambda t_i}-1)/\lambda$ jelöléssel:

$$(s-m)^T\Sigma^{-1}(s-m) = \frac{2\lambda}{\sigma^2}\left[\frac{b_2 a^{-2t_1}}{b_1(b_2-b_1)}(s_1-a^{t_1}s_0-\mu c_1)^2+\dots\right.$$

$$\dots+\frac{a^{-2t_n}}{b_n-b_{n-1}}(s_n-a^{t_n}s_0-\mu c_n)^2+\frac{2a^{-(t_1+t_2)}}{b_1-b_2}(s_1-a^{t_1}s_0-\mu c_1)(s_2-a^{t_2}s_0-\mu c_2)+\dots$$

$$\left.\dots+\frac{2a^{-(t_{n-1}+t_n)}}{b_{n-1}-b_n}(s_{n-1}-a^{t_{n-1}}s_0-\mu c_{n-1})(s_n-a^{t_n}s_0-\mu c_n)\right] = \frac{k_2}{\sigma^2} \ ,$$

ahol k_2 csak λ-tól és μ-től függ, σ-tól nem. Ezekkel a jelölésekkel a likelihood-függvény a

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^{2n}k_1)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{k_2}{\sigma^2}\right\}$$

alakot ölti, így a loglikelihood-függvény:

$$-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln(k_1\sigma^{2n})-\frac{1}{2}\frac{k_2}{\sigma^2}.$$

Először rögzített λ és μ esetén σ-ban maximalizáljuk ezt. Deriválva σ szerint

$$-\frac{n}{\sigma}+\frac{k_2}{\sigma^3}=0$$

egyenletet kapjuk, amiből

$$\widehat{\sigma}^2=\frac{k_2}{n}$$

adódik. A likelihood-függvény második deriváltjába beírva az így kapott $\widehat{\sigma}^2$ értéket:

$$\frac{n}{\sigma^2}-\frac{3k_2}{\sigma^4}=\frac{n^2}{k_2}-\frac{3n^2}{k_2}=\frac{-2n^2}{k_2}<0$$

tehát ez valóban maximumhely. Itt közben kihasználtuk, hogy k_2 1 valószínűséggel pozitív. Hogy ez miért van így, arra hamarosan visszatérünk még. Visszaírva a loglikelihood-függvénybe a kapott $\widehat{\sigma}^2$-et:

$$-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln(k_1\frac{k_2^n}{n^n})-\frac{n}{2}$$

adódik. További célunk tehát a $k_1k_2^n$ mennyiség minimalizálása lesz μ és λ változókban. Először minimalizáljunk μ-ben!

Mivel k_1 csak λ-tól függ, ezért lényegében k_2-t kell minimalizálni. Ehhez alakítsuk át egy kicsit:

$$k_2=2\lambda\left[\frac{(b_2-b_1)a^{-2t_1}+b_1a^{-2t_1}}{b_1(b_2-b_1)}(s_1-a^{t_1}s_0-\mu c_1)^2\right.$$

$$\left.+\frac{(b_3-b_2)a^{-2t_2}+(b_2-b_1)a^{-2t_2}}{(b_2-b_1)(b_3-b_2)}(s_2-a^{t_2}s_0-\mu c_2)^2\right.$$

$$+\frac{a^{-2t_n}}{b_n - b_{n-1}}(s_n - a^{t_n}s_0 - \mu c_n)^2 + \text{a vegyes tagok}\Bigg]$$

A négyzetes tagokat a fentieknek megfelelően két részre bontva, és a vegyes tagokból a megfelelőket felhasználva a szögletes zárójelen belüli kifejezés teljes négyzetek összegévé alakítható:

$$k_2 = 2\lambda\left[\frac{1}{b_1}\left(\frac{s_1}{a^{t_1}} - s_0 - \frac{\mu c_1}{a^{t_1}}\right)^2 + \frac{1}{b_2 - b_1}\left(\frac{s_2 - \mu c_2}{a^{t_2}} - \frac{s_1 - \mu c_1}{a^{t_1}}\right)^2 + \dots\right.$$

$$\left.\dots + \frac{1}{b_n - b_{n-1}}\left(\frac{s_n - \mu c_n}{a^{t_n}} - \frac{s_{n-1} - \mu c_{n-1}}{a^{t_{n-1}}}\right)^2\right].$$

Innen már leolvasható, hogy miért lesz k_2 1 valószínűséggel pozitív. Vezessük be a $b_0 = 0$ jelölést! Ha

- $\lambda < 0$, akkor $0 \le i \le n-1$ esetén $b_{i+1} - b_i < 0$, így k_2 pozitív együtthatós teljes négyzetek összege, tehát nemnegatív
- $\lambda = 0$, akkor az egész becslés így nem működik, de erről az esetről később még szót ejtünk
- $\lambda > 0$, akkor $0 \le i \le n-1$ esetén $b_{i+1} - b_i > 0$, így k_2 megintcsak nemnegatív.

ξ_t Gauss-folyamat, így bármelyik négyzetes tagot választjuk is ki, az 1 valószínűséggel nem lesz 0, tehát k_2 valóban 1 valószínűséggel pozitív[3]. Bevezetve a

$$d_i = \frac{1}{b_i - b_{i-1}} \qquad e_i = \frac{c_i}{a^{t_i}} - \frac{c_{i-1}}{a^{t_{i-1}}} \qquad y_i = \frac{s_i}{a^{t_i}} - \frac{s_{i-1}}{a^{t_{i-1}}}$$

jelöléseket, ezek egyike sem függ μ-től, csak λ-tól, valamint ezek segítségével k_2 a

$$2\lambda\sum_{i=1}^{n} d_i(y_i - e_i\mu)^2$$

alakot ölti. Ez μ-ben egy másodfokú kifejezés, aminek pozitív a főegyütthatója, hisz

$$e_i^2 = \left(\frac{1}{e^{\lambda t_{i-1}}} - \frac{1}{e^{\lambda t_i}}\right)^2 \frac{1}{\lambda^2} > 0 \qquad \text{és} \qquad \lambda d_i > 0\ ,$$

[3] k_2-ről láttuk, hogy 1 valószínűséggel pozitív, k_1-re ez pontosan ugyanígy látható be.

ahol az utóbbi egyenlőtlenséget éppen az előbb láttuk be. Deriválva a minimalizálandó kifejezést így biztosan minimumhelyet kapunk. A deriváltat nullával egyenlővé téve:

$$-4\lambda \sum_{i=1}^{n} d_i e_i (y_i - e_i \mu) = 0$$

adódik, amiből

$$\widehat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i e_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i e_i^2}.$$

Végső soron nekünk a $k_1 k_2^n$ szorzatot kell minimalizálni. Beírva a $\widehat{\mu}$ becslést:

$$k_1 k_2^n = 2^n \lambda^n \left[\sum_{i=1}^{n} d_i \left(y_i - e_i \frac{\sum_{j=1}^{n} d_j e_j y_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j e_j^2} \right)^2 \right]^n \frac{1}{2^n \lambda^n} e^{2\lambda \sum_{i=1}^{n} t_i} \frac{1}{d_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{d_n}$$

$$= \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} d_i \left(y_i - e_i \frac{\sum_{j=1}^{n} d_j e_j y_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j e_j^2} \right)^2 \right]^n}{e^{-2\lambda \sum_{i=1}^{n} t_i} d_1 \cdot \ldots \cdot d_n}$$

Bevezetve az $x = 1/a = e^{-\lambda}$ jelölést:

$$d_i = \frac{1}{-x^{2t_i} + x^{2t_{i-1}}} \qquad e_i = \frac{1}{\lambda}(x^{t_{i-1}} - x^{t_i}) \qquad y_i = s_i x^{t_i} - s_{i-1} x^{t_{i-1}} \ ,$$

amiből x függvényeként előáll $k_1 k_2^n$:

$$k_1 k_2^n =$$

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x^{2t_{i-1}} - x^{2t_i}} \left(s_i x^{t_i} - s_{i-1} x^{t_{i-1}} - (x^{t_{i-1}} - x^{t_i}) \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{x^{t_{j-1}} - x^{t_j}}{x^{2t_{j-1}} - x^{2t_j}} (s_j x^{t_j} - s_{j-1} x^{t_{j-1}})}{\sum_{j=1}^{n} \frac{(x^{t_{j-1}} - x^{t_j})^2}{x^{2t_{j-1}} - x^{2t_j}}} \right)^2 \right]^n}{x^{2\sum_{i=1}^{n} t_i} \frac{1}{x^{2t_0} - x^{2t_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x^{2t_{n-1}} - x^{2t_n}}}$$

$$= (-1 + x^{2(t_0 - t_1)}) \cdot \ldots \cdot (-1 + x^{2(t_{n-1} - t_n)})$$

$$\cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x^{2t_{i-1}} - x^{2t_i}} \left(s_i x^{t_i} - s_{i-1} x^{t_{i-1}} - (x^{t_{i-1}} - x^{t_i}) \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{s_j x^{t_j} - s_{j-1} x^{t_{j-1}}}{x^{t_{j-1}} + x^{t_j}}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{x^{t_{j-1}} - x^{t_j}}{x^{t_{j-1}} + x^{t_j}}} \right)^2 \right]^n$$

Ha létezik egy olyan pozitív t érték, hogy minden t_i ennek egészszámú többszöröse, akkor $y = x^t$ függvényében a fenti kifejezés racionális törtfüggvény alakra hozható. Ezt y szerint deriválva y racionális törtfüggvényének gyökhelyeit kell megvizsgálni, hiszen legfeljebb ott lehet $k_1 k_2^n$ minimális. Lényegében tehát egy polinom gyökhelyeit kell megtalálni, erre pedig rengeteg algebrai és numerikus módszer áll rendelkezésre, így a minimumhelyet adó $\widehat{\lambda}$ kiszámítható. $\widehat{\lambda}$ ismeretében $\widehat{\mu}$ és $\widehat{\sigma}$ meghatározása már csupán egyszerű képletbe helyettesítés.

Abban a speciális esetben, ha $t_i = it$ alakú valamely pozitív t-re, azaz ha egyenletes időközönként ismerjük a ξ folyamat értékeit, akkor a $\widehat{\lambda}$ becslés explicit módon kiszámítható, s a következőkben ezt nézzük meg.

Jelölje $y = x^t = e^{-\lambda t}$. Ekkor

$$k_1 k_2^n =$$

$$\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)^n \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y^{2(i-1)} - y^{2i}} \left(s_i y^i - s_{i-1} y^{i-1} - (y^{i-1} - y^i) \frac{\sum_{j=1}^n \frac{s_j y^j - s_{j-1} y^{j-1}}{y^{j-1} + y^j}}{\sum_{j=1}^n \frac{y^{j-1} - y^j}{y^{j-1} + y^j}} \right)^2 \right]^n$$

$$= \left[\frac{1}{y^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y^{2(i-1)}} \left(s_i y^i - s_{i-1} y^{i-1} - (y^{i-1} - y^i) \frac{\sum_{j=1}^n s_j y - s_{j-1}}{\sum_{j=1}^n 1 - y} \right)^2 \right]^n$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} \left(s_i - \frac{s_{i-1}}{y} - \frac{\sum_{j=1}^n s_j - \frac{s_{j-1}}{y}}{n} \right)^2 \right]^n .$$

A szögletes zárójelben lévő kifejezés nemnegatív, így a fenti akkor minimális, ha a szögletes zárójelben lévő az. $1/y$-ban ez egy másodfokú kifejezés, ahol a főegyüttható:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sum_{j=1}^n s_{j-1}}{n} - s_{i-1} \right)^2 > 0 \ ,$$

tehát a másodfokú kifejezés szélsőértéke minimumhely lesz. Átalakítva a főegyütthatót:

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \left(n^2 s_{i-1}^2 - 2n s_{i-1} \sum_{j=1}^{n} s_{j-1} + \left(\sum_{j=1}^{n} s_{j-1} \right)^2 \right) = \frac{1}{n} \left(n \sum_{i=1}^{n} s_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} s_{i-1} \right)^2 \right) .$$

Az elsőfokú tag együtthatója:

$$-\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(ns_i-\sum_{j=1}^{n}s_j\right)\left(ns_{i-1}-\sum_{j=1}^{n}s_{j-1}\right)=-\frac{2}{n}\left(n\sum_{i=1}^{n}s_is_{i-1}-\sum_{i=1}^{n}s_i\sum_{i=1}^{n}s_{i-1}\right) \quad ,$$

amiből a minimumot biztosító $1/y$ úgy kapható meg, hogy az elsőfokú tag együtthatójának ellentettjét osztjuk a főegyüttható kétszeresével, azaz

$$\frac{1}{y}=\frac{n\sum_{i=1}^{n}s_is_{i-1}-\sum_{i=1}^{n}s_i\sum_{i=1}^{n}s_{i-1}}{n\sum_{i=1}^{n}s_{i-1}^2-\left(\sum_{i=1}^{n}s_{i-1}\right)^2}.$$

Jelölje a fenti kifejezést α. Ekkor persze $\alpha=1/y=e^{\lambda t}$, amiből

$$\widehat{\lambda}=\frac{\ln\alpha}{t}$$

adódik.

Vizsgáljuk meg ennek a becslésnek a viselkedését! α nevezője 1 valószínűséggel pozitív, hiszen a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség alapján csak akkor lehet 0, ha $s_0=s_1=...=s_{n-1}$, ez pedig nulla valószínűségű esemény, hisz Gauss-folyamatról lévén szó már annak is nulla a valószínűsége, hogy $s_1=s_0$. A számláló vizsgálata során célszerű s_1, s_2, $...s_{n-1}$ változókat rögzíteni, s így nézni s_n feltételes eloszlását. Ekkor az α nevezője rögzített, a számláló pedig $l_1+l_2s_n$ alakú, ahol l_1 és l_2 rögzített konstansok. Innen látható, hogy $e^{\lambda t}$ becslése pozitív valószínűséggel lesz pozitív, illetve nempozitív, valamint nulla valószínűséggel 1. Ennek megfelelően pozitív valószínűséggel nem létezik a $\widehat{\lambda}$ becslés (ez annak felel meg, hogy a bekövetkezett realizációja a ξ folyamatnak erősen ellentmond a feltételezett modell szerinti tipikus viselkedésnek). Igaz lesz továbbá az is, hogy a $\widehat{\lambda}$ becslés pozitív valószínűséggel létezik, ám 1 valószínűséggel nem nulla, így nem követtünk el nagy hibát, mikor a levezetés során ezzel az esettel nem foglalkoztunk.

Nézzük meg, hogy mit kapunk ezek után μ becsléseként:

$$\widehat{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{n}d_ie_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}d_ie_i^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y^{2(i-1)}-y^{2i}}\frac{1}{\widehat{\lambda}}(y^{i-1}-y^i)(s_iy^i-s_{i-1}y^{i-1})}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y^{2(i-1)}-y^{2i}}\frac{1}{\widehat{\lambda}^2}(y^{i-1}-y^i)^2}$$

$$=\widehat{\lambda}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-y^2}(1-y)(s_iy-s_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-y^2}(1-y)^2}=\widehat{\lambda}\frac{\sum_{i=1}^{n}(s_iy-s_{i-1})}{n(1-y)}$$

$$=\frac{\ln\alpha}{t}\frac{\sum_{i=1}^{n}s_i-\alpha\sum_{i=1}^{n}s_{i-1}}{(\alpha-1)n}.$$

Végül $\widehat{\sigma}$ kellene, ehhez k_2-re van szükségünk:

$$k_2 = 2\widehat{\lambda}\sum_{i=1}^{n} d_i(y_i - e_i\widehat{\mu})^2$$

$$= 2\widehat{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y^{2(i-1)} - y^{2i}}\left(s_i y^i - s_{i-1}y^{i-1} - \frac{1}{\widehat{\lambda}}(y^{i-1} - y^i)\widehat{\lambda}\frac{\sum_{j=1}^{n}(s_j y - s_{j-1})}{n(1-y)}\right)^2$$

$$= 2\widehat{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{y^2} - 1}\left(s_i - \frac{s_{i-1}}{y} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(s_j - \frac{s_{j-1}}{y}\right)\right)^2$$

$$= \frac{2\ln\alpha}{t(\alpha^2 - 1)}\sum_{i=1}^{n}\left(s_i - \frac{s_{i-1}}{y} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(s_j - \frac{s_{j-1}}{y}\right)\right)^2$$

Látható, hogy az így kapott képlet második tényezőjét adó összeg éppen az a négyzetes kifejezés, aminek minimalizálásával α-t kaptuk. Egy $ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) kifejezés minimumhelye $x = -b/2a$, a minimum értéke pedig $c - b^2/(4a)$. Így a kérdéses összeg:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(s_i - \sum_{j=1}^{n}\frac{s_j}{n}\right)^2 - \frac{\frac{4}{n^2}\left(n\sum_{i=1}^{n} s_i s_{i-1} - \sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{i=1}^{n} s_{i-1}\right)^2}{\frac{4}{n}\left(n\sum_{i=1}^{n} s_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} s_{i-1}\right)^2\right)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)^2 - \frac{\left(n\sum_{i=1}^{n} s_i s_{i-1} - \sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{i=1}^{n} s_{i-1}\right)^2}{n\left(n\sum_{i=1}^{n} s_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} s_{i-1}\right)^2\right)}$$

Amiből

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{k_2}{n} = \frac{2\ln\alpha}{n^2(\alpha^2 - 1)t}\left[n\sum_{i=1}^{n} s_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)^2 - \frac{\left(n\sum_{i=1}^{n} s_i s_{i-1} - \sum_{i=1}^{n} s_i \sum_{i=1}^{n} s_{i-1}\right)^2}{n\sum_{i=1}^{n} s_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} s_{i-1}\right)^2}\right]$$

σ^2 pontos becslése, de ha egy kicsit egyszerűbb formulát szeretnénk, és nincs szükségünk ennyire pontos becslésre, akkor az utolsó tagot elhagyhatjuk, így kapjuk

$$\widehat{\sigma}^2 \approx \frac{2\ln\alpha}{\alpha^2 - 1}\frac{1}{t}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} s_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} s_i}{n}\right)^2\right] = \frac{2\ln\alpha}{\alpha^2 - 1}\frac{\mathcal{D}^2(s)}{t}$$

formulát, ahol $\mathcal{D}^2(s)$ az s_1, s_2, ...s_n mennyiségek tapasztalati szórásnégyzetét jelöli. Ez az s-eknek még mindig elég bonyolult függvénye, így az $\alpha \approx 1$ közelítés felhasználásával az $\ln x$ függvény 1 körüli Taylor-sorfejtéséből[4]:

$$\widehat{\sigma}^2 \approx \frac{3-\alpha}{\alpha+1}\frac{\mathcal{D}^2(s)}{t}$$

3.2.1. ML-becslés a klasszikus esetben

Ebben a részben megvizsgáljuk, hogyan módosulnak az előző rész eredményei abban az esetben, ha a klasszikus modellben nézzük az ML-becslést, azaz $\lambda = 0$ feltételezéssel élünk. Az előző rész jelöléseit és gondolatmenetét megismételve $\Psi \equiv 1$ lesz az alapmegoldás, innen:

$$\mathbf{E}\xi_t = \xi_0 + \int_0^t \mu d\tau = \xi_0 + \mu t$$

$$\mathbf{Cov}(\xi_t, \xi_s) = \int_0^{\min\{t,s\}} \sigma^2 d\tau = \sigma^2 \min\{t, s\}.$$

Ekkor a kovarianciamátrix:

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \dots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_n \end{pmatrix} ,$$

aminek a determinánsa:

$$\det \Sigma = \sigma^{2n} t_1(t_2-t_1)(t_3-t_2)...(t_n-t_{n-1}) ,$$

az inverze pedig:

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \frac{t_2}{t_1(t_2-t_1)} & \frac{1}{t_1-t_2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{t_1-t_2} & \frac{t_3-t_1}{(t_2-t_1)(t_3-t_2)} & \frac{1}{t_2-t_3} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{t_2-t_3} & \frac{t_4-t_2}{(t_3-t_2)(t_4-t_3)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{t_n-t_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

[4]A másodfokú tagig vesszük a sorfejtést: $\ln x \approx (x-1) - 1/2(x-1)^2$.

A megfelelő k_1 és k_2 jelöléseket bevezetve a loglikelihood-függvény:

$$-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln(k_1\sigma^{2n})-\frac{1}{2}\frac{k_2}{\sigma^2}\ ,$$

ahol

$$k_1=t_1(t_2-t_1)(t_3-t_2)...(t_n-t_{n-1})$$

$$k_2=\frac{t_2}{t_1(t_2-t_1)}(s_1-s_0-\mu t_1)^2+...+\frac{1}{t_n-t_{n-1}}(s_n-s_0-\mu t_n)^2$$

$$+\frac{2}{t_1-t_2}(s_1-s_0-\mu t_1)(s_2-s_0-\mu t_2)+...$$

$$...+\frac{2}{t_{n-1}-t_n}(s_{n-1}-s_n-\mu t_{n-1})(s_n-s_0-\mu t_n)$$

$$=\frac{1}{t_1}(s_1-s_0-\mu t_1)^2+\frac{1}{t_2-t_1}(s_2-s_1-\mu t_2+\mu t_1)^2+...$$

$$...+\frac{1}{t_n-t_{n-1}}(s_n-s_{n-1}-\mu t_n+\mu t_{n-1})^2=\sum_{i=1}^{n}d_i(y_i-e_i\mu)^2.$$

Közben bevezettük a következő jelöléseket:

$$d_i=\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\qquad y_i=s_i-s_{i-1}\qquad e_i=t_i-t_{i-1}.$$

A loglikelihood-függvény σ szerinti deriváltját 0-val egyenlővé téve adódik:

$$\widehat{\sigma}^2=\frac{k_2}{n}\ .$$

A második deriváltba ezt beírva:

$$\frac{n}{\sigma^2}-\frac{3k_2}{\sigma^4}=\frac{2n^2}{k_2}<0\ ,$$

így ez tényleg minimumhely, hisz k_2 (hasonló okokból, mint az előző részben) 1 valószínűséggel pozitív[5]. Visszaírva ezt a becslést a loglikelihood-függvénybe, megint k_2-t kell lényegében minimalizálni μ-ben. Teljesen hasonló módon, mint az előző részben a minimumhely ismét

$$\widehat{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{n}d_ie_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}d_ie_i^2}$$

[5]Nyilván itt $k_1>0$ minden esetben.

lesz. Ezt tovább számolva:

$$\widehat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i e_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i e_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i - s_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} t_i - t_{i-1}} = \frac{s_n - s_0}{t_n}$$

adódik. Ebből k_2 értéke:

$$k_2 = \sum_{i=1}^{n} d_i (y_i - e_i \widehat{\mu})^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \left(s_i - s_{i-1} - \frac{s_n - s_0}{t_n}(t_i - t_{i-1}) \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(s_i - s_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{(s_i - s_{i-1})(s_n - s_0)}{t_n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(s_n - s_0)^2}{t_n^2}(t_i - t_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(s_i - s_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} - \frac{(s_n - s_0)^2}{t_n}.$$

Így a $\widehat{\sigma}^2$ becslése:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{(s_i - s_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} - \frac{(s_n - s_0)^2}{t_n} \right].$$

Ha speciálisan egyenletes időközönként vannak megfigyeléseink, azaz $t_i = it$, akkor:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{t} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (s_i - s_{i-1})^2}{n} - \left(\frac{s_n - s_0}{n} \right)^2 \right] = \frac{\mathcal{D}^2(\Delta s)}{t} \quad ,$$

ahol $\mathcal{D}^2(\Delta s)$ a ξ folyamat növekményeinek tapasztalati szórásnégyzete.

Látható tehát, hogy amennyiben a klasszikus modellt használjuk, a $\widehat{\sigma}^2$-re teljesen eltérő becslést kapunk, mintha az általánosabb modellben végeztük volna el a becslést. Az eddig ismertetett opciók egyikének árában sem szerepeltek ugyan a $\mu(t)$ és a $\lambda(t)$ függvények (csupán $\sigma(t)$), ám a feltételezett modell határozza meg $\sigma(t)$ becslését, ilyen módon maga az opcióár közvetve ugyan, de mégis csak függ $\mu(t)$ és $\lambda(t)$ függvényektől.

3.3. ML-becslés általánosabb modellek esetén

Ebben az alfejezetben feloldjuk az előző alfejezet korlátozó feltételeit, s kissé általánosabb esetben próbáljuk meg a paraméterfüggvényeket becsülni.

Nem tekintjük a $\mu(t)$, $\lambda(t)$ és a $\sigma(t)$ függvények mindegyikét konstansnak, s ezzel párhuzamosan explicit formulák levezetésére sem fogunk törekedni, megelégszünk azzal, ha olyan alakra hozzuk a megoldandó feladatokat, amelyet már valamilyen egyszerűbb algebrai vagy numerikus módszerrel meg tudunk oldani. Sohasem oldjuk fel az előző alfejezet összes korlátozó feltételét egyszerre (hiszen az –mint korábban említettük– olyan bonyolult numerikus optimalizálási feladatot állítana elénk, melynek megoldása szinte kezelhetetlen), hanem apró lépéseken keresztül próbálunk meg közelíteni az általános probléma megoldásának irányába. A másik ok, ami miatt nem törekszünk az általános probléma megoldására, az, hogy a legtöbb gyakorlati alkalmazásnál már az állandó együtthatós modell is jól leírja a részvényárfolyam mozgását, a paraméterfüggvények egyikét-másikát lineáris függvénynek választva pedig szinte tökéletes modellezés érhető el. Ebből kifolyólag a teljesen általános probléma megoldásának mind tisztán elméleti, mind gyakorlati haszna csekély.

3.3.1. Becslés általános $\mu(t)$ polinom esetén

Ebben a részben megszabadulunk attól a feltevéstől, hogy μ konstans, és általános $\mu(t)$ polinom esetén próbálunk meg az együtthatókra becslést adni. $\mu(t)$ alakja tehát:

$$\mu(t) = \mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2 + ... + \mu_q t^q \ ,$$

ahol tegyük fel, hogy $q \ll n$, különben esetleg egyszerű polinom-interpolációba menne át a becslési feladatunk. λ-t és σ-t továbbra is konstansnak tekintjük. Az előző alfejezet gondolatmenetét követve ekkor

$$\mathbf{E}\xi_t = e^{\lambda t}\left(\xi_0 + \int_0^{t_i} e^{-\lambda\tau}(\mu_0 + \mu_1\tau + ... + \mu_q\tau^q)d\tau\right).$$

Jelölje:

$$I_i^k = \int_0^{t_i} e^{-\lambda\tau}\tau^k d\tau.$$

Ekkor

$$I_i^0 = \int_0^{t_i} e^{-\lambda\tau} d\tau = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t_i}) \ ,$$

továbbá parciális integrálással:

$$\int_0^t e^{-\lambda\tau}\tau^{k+1}d\tau = \frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda}t^{k+1} + \frac{k+1}{\lambda}\int_0^t e^{-\lambda\tau}\tau^k d\tau \ ,$$

azaz

$$I_i^{k+1} = \frac{k+1}{\lambda} I_i^k - \frac{e^{-\lambda t_i} t_i^{k+1}}{\lambda} \quad ,$$

tehát rekurzióval könnyen számíthatóak ezek. Ezzel a jelöléssel:

$$\mathbf{E}\xi_{t_i} = e^{\lambda t_i} \left(\xi_0 + \sum_{k=0}^{q} \mu_k I_i^k \right).$$

A kovarianciastruktúrát $\mu(t)$ nem befolyásolja, így az ugyanaz, mint az állandó együtthatós esetben. σ becslése $\mu(t)$ és λ ismeretében ennek eredményeként ugyanaz lesz, mint az előző alfejezetben. A jelöléseket megőrizve:

$$k_2 = 2\lambda \left[\frac{1}{b_1} \left(\frac{s_1}{a^{t_1}} - s_0 - \frac{1}{a^{t_1}} e^{\lambda t_1} \sum_{k=0}^{q} \mu_k I_1^k \right)^2 \right.$$

$$+ \frac{1}{b_2 - b_1} \left(\frac{s_2}{a^{t_2}} - \frac{s_1}{a^{t_1}} - \frac{1}{a^{t_2}} e^{\lambda t_2} \sum_{k=0}^{q} \mu_k I_2^k + \frac{1}{a^{t_1}} e^{\lambda t_1} \sum_{k=0}^{q} \mu_k I_1^k \right)^2 + ...$$

$$\left. ... + \frac{1}{b_n - b_{n-1}} \left(\frac{s_n}{a^{t_n}} - \frac{s_{n-1}}{a^{t_{n-1}}} - \frac{1}{a^{t_n}} e^{\lambda t_n} \sum_{k=0}^{q} \mu_k I_n^k + \frac{1}{a^{t_{n-1}}} e^{\lambda t_{n-1}} \sum_{k=0}^{q} \mu_k I_{n-1}^k \right)^2 \right]$$

$$= 2\lambda \sum_{i=1}^{n} d_i \left(y_i - \sum_{k=0}^{q} e_i^k \mu_k \right)^2 \quad ,$$

ahol

$$a = e^{\lambda} \qquad b_i = 1 - e^{-2\lambda t_i}$$

$$d_i = \frac{1}{b_i - b_{i-1}} \qquad y_i = \frac{s_i}{a^{t_i}} - \frac{s_{i-1}}{a^{t_{i-1}}} \qquad e_i^k = I_i^k - I_{i-1}^k.$$

k_2-t kell μ_0, $...\mu_q$ változókban minimalizálni. μ_l szerinti parciális deriváltja:

$$-4\lambda \sum_{i=1}^{n} d_i e_i^l \left(y_i - \sum_{k=0}^{q} e_i^k \mu_k \right).$$

Ezzel $l = 0, ...q$ esetén egy lineáris egyenletrendszert kapunk, ebből $\widehat{\mu}_0, ...\widehat{\mu}_q$ létezik és egyértelmű, ha a következő mátrix nemszinguláris:

$$\begin{pmatrix} 4\lambda \sum_{i=1}^n d_i e_i^0 e_i^0 & 4\lambda \sum_{i=1}^n d_i e_i^0 e_i^1 & \dots & 4\lambda \sum_{i=1}^n d_i e_i^0 e_i^q \\ 4\lambda \sum_{i=1}^n d_i e_i^1 e_i^0 & 4\lambda \sum_{i=1}^n d_i e_i^1 e_i^1 & \dots & 4\lambda \sum_{i=1}^n d_i e_i^1 e_i^q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 4\lambda \sum\limits_{i=1}^n d_i e_i^q e_i^0 & 4\lambda \sum\limits_{i=1}^n d_i e_i^q e_i^1 & \dots & 4\lambda \sum\limits_{i=1}^n d_i e_i^q e_i^q \end{pmatrix} = 4\lambda \sum_{i=1}^n d_i e_i e_i^T \ ,$$

ahol

$$e_i = (e_i^0, \ e_i^1, \ ...e_i^q)^T.$$

Szimmetrikus mátrixról lévén szó elég belátni, hogy pozitív definit ez a mátrix. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}^q$ tetszőleges. Ekkor

$$\alpha^T 4\lambda \sum_{i=1}^n d_i e_i e_i^T \alpha = 4 \sum_{i=1}^n \lambda d_i (e_i^T \alpha)^2 \geq 0 \ ,$$

hisz $\lambda d_i > 0$ 1 valószínűséggel. Be kellene még látni, hogy egyenlőség csak nullvektor esetén állhat fenn. Ha egyenlőség van, akkor speciálisan $e_1^T \alpha = e_2^T \alpha = ... = e_{q+1}^T \alpha = 0$, azaz bevezetve az $E = (e_1, \ e_2, \ ...e_{q+1})^T$ mátrixot: $E\alpha = 0$. Ha belátjuk, hogy E nemszinguláris, akkor készen leszünk. Kiírva az E mátrixot:

$$E = \begin{pmatrix} I_1^0 & I_1^1 & I_1^2 & \dots & I_1^q \\ I_2^0 - I_1^0 & I_2^1 - I_1^1 & I_2^2 - I_1^2 & \dots & I_2^q - I_1^q \\ I_3^0 - I_2^0 & I_3^1 - I_2^1 & I_3^2 - I_2^2 & \dots & I_3^q - I_2^q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{q+1}^0 - I_q^0 & I_{q+1}^1 - I_q^1 & I_{q+1}^2 - I_q^2 & \dots & I_{q+1}^q - I_q^q \end{pmatrix}.$$

A második sorhoz hozzáadva az elsőt, a harmadikhoz a másodikat, stb... a mátrix determinánsa nem változik meg. Kapjuk

$$\begin{pmatrix} I_1^0 & I_1^1 & I_1^2 & \dots & I_1^q \\ I_2^0 & I_2^1 & I_2^2 & \dots & I_2^q \\ I_3^0 & I_3^1 & I_3^2 & \dots & I_3^q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{q+1}^0 & I_{q+1}^1 & I_{q+1}^2 & \dots & I_{q+1}^q \end{pmatrix}$$

mátrixot. A rekurzió kihasználásával az utolsó oszlopból kivonva az utolsó előtti (q/λ)-szorosát, az utolsó előttiből az az előtti $(\{q-1\}/\lambda)$-szorosát, stb... a második oszlopból kivonva első $(2/\lambda)$-szorosát, az első oszlopba pedig beírva a rekurzió kezdőértékét:

$$-\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} e^{-\lambda t_1}-1 & e^{-\lambda t_1}t_1 & e^{-\lambda t_1}t_1^2 & \dots & e^{-\lambda t_1}t_1^q \\ e^{-\lambda t_2}-1 & e^{-\lambda t_2}t_2 & e^{-\lambda t_2}t_2^2 & \dots & e^{-\lambda t_2}t_2^q \\ e^{-\lambda t_3}-1 & e^{-\lambda t_3}t_3 & e^{-\lambda t_3}t_3^2 & \dots & e^{-\lambda t_3}t_3^q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-\lambda t_{q+1}}-1 & e^{-\lambda t_{q+1}}t_{q+1} & e^{-\lambda t_{q+1}}t_{q+1}^2 & \dots & e^{-\lambda t_{q+1}}t_{q+1}^q \end{pmatrix}.$$

Szorozva a mátrix első sorát $(-e^{\lambda t_1}/\lambda)$-val, a másodikat $(-e^{\lambda t_2}/\lambda)$-val, stb...:

$$\begin{pmatrix} 1-e^{\lambda t_1} & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^q \\ 1-e^{\lambda t_2} & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^q \\ 1-e^{\lambda t_3} & t_3 & t_3^2 & \dots & t_3^q \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-e^{\lambda t_{q+1}} & t_{q+1} & t_{q+1}^2 & \dots & t_{q+1}^q \end{pmatrix}$$

adódik. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy létezik olyan $t>0$, hogy minden t_i ennek egész számú többszöröse, azaz $t_i = tt'_i$, ahol $t'_i \in \mathbb{Z}^+ \quad 1 \le i \le n$ esetén. Ekkor bevezetve az $a_0 = e^{-\lambda t}$ jelölést, a determináns az első oszlop szerint kifejtve:

$$l_0 + l_1 a_0^{t'_1} + l_2 a_0^{t'_2} + \dots + l_{q+1} a_0^{t'_{q+1}} \qquad l_i \in \mathbb{R},\ \ l_i \text{ nem függ } \lambda\text{-tól}$$

adódik. Ez a_0-ban egy t'_{q+1}-edfokú polinom, így speciálisan legfeljebb véges sok olyan a_0 lesz, amire ez a 0 értéket veszi fel. Ez azt jelenti, hogy legfeljebb véges sok λ esetén lehet a vizsgált mátrix szinguláris. A becslésből később majd (ugyanúgy, mint az előző alfejezetben) látni lehet, hogy egy fix értéket λ 0 valószínűséggel vesz fel, így véges sok értéket is, tehát a mátrix 1 valószínűséggel nemszinguláris. Ennek eredményeként $\widehat{\mu}_0, \dots \widehat{\mu}_q$ 1 valószínűséggel léteznek, be kellene még látni, hogy ez minimumhely. A második parciális derivált:

$$4\lambda \sum_{i=1}^{n} d_i e_i^l e_i^m.$$

Az ezekből elkészített mátrix épp a megoldás létezése során vizsgált mátrix, így egy valószínűséggel pozitív definit, tehát ez tényleg minimumhely.

Ezek után vezessünk be az $\mathcal{EL}$ és a $\mathcal{PEL}$ függvényosztályokat[6]!

[6]Ezek nem a szakirodalomban elterjedt jelölések, csak „házi" használatra vezetjük be őket, hogy könnyebb legyen a becslések alakjáról beszélni.

4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $\mathcal{EL}$-beli, ha előáll*

$$\sum_{i \in I} l_i^{(1)} \exp\{l_i^{(2)} x\} x^{l_i^{(3)}}$$

alakban, ahol $l_i^{(1)} \in \mathbb{R}$, $l_i^{(2)}$, $l_i^{(3)} \in \mathbb{N}$ konstansok $i \in I$ esetén, I pedig egy véges indexhalmax.

5. Definíció. *Egy $f(x)$ valósértékű függvényről azt mondjuk, hogy $\mathcal{PEL}$-beli, ha előáll két $\mathcal{EL}$-beli hányadosaként.*

Nyilván az összeadásra és a szorzásra nézve mindkét osztály zárt, $\mathcal{PEL}$ pedig még az osztásra is. I_i^k definíciójából rögtön látszik, hogy $I_i^k \in \mathcal{PEL}$, így $e_i^k \in \mathcal{PEL}$, ugyanígy $d_i \in \mathcal{PEL}$ és $y_i \in \mathcal{PEL}$, ha mindegyiket, mint λt függvényét tekintjük. Ha a $\widehat{\mu}_i$ becsléseket elkészítjük, akkor a Cramer-szabályból jól látszik, hogy ezek is $\mathcal{PEL}$-beliek lesznek.

Hátra van még a λ becslésének meghatározása. Ezt úgy kaphatjuk meg, ha $k_1 k_2^n$-t minimalizáljuk. Nyilván $b_i \in \mathcal{PEL}$, így mivel

$$k_2 = 2\lambda \sum_{i=1}^{n} d_i \left(y_i - \sum_{k=0}^{q} e_i^k \widehat{\mu}_k \right)^2$$

$$k_1 = \frac{1}{2^n \lambda^n} e^{2\sum_{i=1}^{n} t_i} b_1 (b_2 - b_1)...(b_n - b_{n-1}) \ ,$$

ezért k_1, $k_2 \in \mathcal{PEL}$. Mivel így a minimalizálandó kifejezésünk λt-ben $\mathcal{PEL}$-beli, ezért λ szerint deriválva szintén $\mathcal{PEL}$-beli kifejezést kapunk. Ennek a számlálójának a gyökhelyei jöhetnek csak, mint lehetséges $\widehat{\lambda}$ becslések, számításba. A számláló egy $\mathcal{EL}$-beli kifejezés, így ha igaz lenne az, hogy minden $\mathcal{EL}$-beli kifejezésnek legfeljebb véges sok gyökhelye van, akkor véges sok lehetséges $\widehat{\lambda}$ közül kellene kiválasztani a minimumhelyet. Ez pedig triviális, hisz az $\mathcal{EL}$-beli kifejezésben ha nincs olyan exponenciális tag, ahol az exponensben x pozitív számmal van szorozva, akkor polinomról van szó, annak pedig véges sok gyökhelye van, ezekre korlátokat is könnyű adni. Ha van ilyen, akkor vegyük az(oka)t, ahol az exponensben a lehető legnagyobb pozitív szorzó áll. Ezek közül válasszuk ki azt, ahol az x kitevője a legnagyobb, nyilván a végtelenben való viselkedésnél ez lesz a domináns tag. Ha $x \to \infty$, akkor ez tart $\pm\infty$-be, attól függően, hogy milyen előjelű az együtthatója. Ha pedig $x \to -\infty$, akkor ki kell választani az(oka)t a tago(ka)t, ahol az exponensben a lehető legkisebb szorzó áll, ezek közül válasszuk ki azt, ahol az x kitevője a lehető legnagyobb. Egy idő után ($x \to -\infty$) ez a tag lesz a domináns, abszolútértéke nagyobb lesz az összes többi abszolútértékének összegénél. De ez a tag magában sosem lesz nulla, így ennél kisebb x-ekre nem lesz a függvényünknek gyökhelye. Meg lehet adni tehát (ennek az explicit meghatározásával most nem foglalkozunk) egy olyan kompakt intervallumot, amelyen kívül biztosan nincs gyökhely. Ebben az intervallumban is legfeljebb csak véges sok gyökhely lehet, hiszen különben a gyökhelyeknek lenne torlódási pontja, így analitikus függvényről lévén szó ez csak az azonosan nulla függvény lehetne. A λt-re számításba jövő véges sok értéket numerikus módszerekkel könnyen kiszámíthatjuk, hiszen a legtöbb klasszikus numerikus eljárás (húrmódszer, stb...) jól működik, mivel ezen a kompakt intervallumon korlátos a derivált is.

Van még egy apróság, amit figyelembe kell venni, nevezetesen látni kellene, hogy $\widehat{\lambda}$ becslés 1 valószínűséggel nem nulla. Könnyű meggondolni, hogy a minimalizálandó kifejezés a Cramer-szabály miatt egy olyan λt-ben $\mathcal{PEL}$-beli elem, aminek van olyan törtelőállítása, ahol a számláló s_n-ek polinomja, a nevező pedig nem függ s_n-től. Ezt deriválva λ szerint ugyancsak olyan (λt-ben $\mathcal{PEL}$-beli) kifejezést kapunk, ahol a számláló s_n-nek polinomja, a nevező pedig független s_n-től. A számlálót tekintve csak, s_0, $...s_{n-1}$ értékének fixálásával, $\lambda = 0$ -t beírva s_n-ben egy polinomot kapunk. Ez pedig azt jelenti, hogy legfeljebb véges sok s_n esetén lehet a számláló nulla. Így annak az s_1, $...s_{n-1}$ szerinti feltételes valószínűsége, hogy $\lambda = 0$ gyökhely lesz nulla, hisz ennyi annak a feltételes valószínűsége, hogy s_n éppen az előbb említett polinom véges sok gyökhelyének egyikét vegye fel. A teljes valószínűség tételéből így azt kapjuk, hogy $\widehat{\lambda}$ 1 valószínűséggel nem nulla.

3.3.2. Becslés monoton növekedő lineáris $\lambda(t)$ függvény esetén

Ebben a részben csak a $\mu(t) \equiv 0$ esetet vizsgáljuk meg. σ továbbra is konstans lesz, viszont $\lambda(t)$-ről feltesszük, hogy monoton növekedő lineáris függvény, azaz

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 t \ , \qquad \text{ahol} \qquad \lambda_1 > 0.$$

Ekkor:

$$\mathbf{E}\xi_t = e^{\lambda_0 t + \frac{\lambda_1}{2} t^2} \xi_0$$

$$\mathbf{Cov}(\xi_t, \xi_s) = e^{\lambda_0 (s+t) + \lambda_1 \frac{s^2+t^2}{2}} \int_0^{\min\{t,s\}} e^{-2\lambda_0 \tau - \frac{2\lambda_1}{2} \tau^2} \sigma^2 d\tau$$

$$= \sigma^2 \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}} e^{\lambda_0(s+t)+\lambda_1 \frac{s^2+t^2}{2}} \exp\left\{\frac{\lambda_0^2}{\lambda_1}\right\} \int\limits_0^{\min\{t,s\}} \left(\frac{2\pi}{2\lambda_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{-2\lambda_1\left(\tau+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^2}{2}\right\} d\tau$$

$$= \sigma^2 \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}} \exp\left\{\lambda_0(s+t)+\lambda_1\frac{s^2+t^2}{2}+\frac{\lambda_0^2}{\lambda_1}\right\} \times$$

$$\left[\Phi\left(\sqrt{2\lambda_1}\min\{t,s\}+\frac{\sqrt{2}\lambda_0}{\sqrt{\lambda_1}}\right)-\Phi\left(\frac{\sqrt{2}\lambda_0}{\sqrt{\lambda_1}}\right)\right].$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$a_1 = e^{\lambda_0} \qquad a_2 = e^{\lambda_1/2} \qquad b_i = \Phi\left(\sqrt{2\lambda_1}t_i+\frac{\sqrt{2}\lambda_0}{\sqrt{\lambda_1}}\right)-\Phi\left(\frac{\sqrt{2}\lambda_0}{\sqrt{\lambda_1}}\right).$$

Ekkor a kovarianciamátrix:

$$\Sigma = \sigma^2 \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}} \exp\left\{\frac{\lambda_0^2}{\lambda_1}\right\} \begin{pmatrix} a_1^{t_1+t_1} a_2^{t_1^2+t_1^2} b_1 & a_1^{t_1+t_2} a_2^{t_1^2+t_2^2} b_1 & \dots & a_1^{t_1+t_n} a_2^{t_1^2+t_n^2} b_1 \\ a_1^{t_2+t_1} a_2^{t_2^2+t_1^2} b_1 & a_1^{t_2+t_2} a_2^{t_2^2+t_2^2} b_2 & \dots & a_1^{t_2+t_n} a_2^{t_2^2+t_n^2} b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{t_n+t_1} a_2^{t_n^2+t_1^2} b_1 & a_1^{t_n+t_2} a_2^{t_n^2+t_2^2} b_2 & \dots & a_1^{t_n+t_n} a_2^{t_n^2+t_n^2} b_n \end{pmatrix}.$$

Ennek a determinánsa egy korábbi lemma után tett megjegyzés alapján:

$$\det\Sigma = \sigma^{2n}\left(\frac{\pi}{\lambda_1}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{\frac{n\lambda_0^2}{\lambda_1}\right\} a_1^{2\sum_{i=1}^n t_i} a_2^{2\sum_{i=1}^n t_i^2} b_1(b_2-b_1)...(b_n-b_{n-1})$$

$$= \sigma^{2n} k_1 \ ,$$

ahol közben definiáltuk k_1 λ_0-tól és λ_1-től függő konstanst. Ugyanezen megjegyzés miatt:

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\frac{\lambda_1}{\pi}} \exp\left\{-\frac{\lambda_0^2}{\lambda_1}\right\} \times$$

$$\begin{pmatrix} a_1^{-(t_1+t_1)}a_2^{-(t_1^2+t_1^2)}\frac{b_2}{b_1(b_2-b_1)} & a_1^{-(t_1+t_2)}a_2^{-(t_1^2+t_2^2)}\frac{1}{b_1-b_2} & \cdots \\ a_1^{-(t_2+t_1)}a_2^{-(t_2^2+t_1^2)}\frac{1}{b_1-b_2} & a_1^{-(t_2+t_2)}a_2^{-(t_2^2+t_2^2)}\frac{b_3-b_1}{(b_2-b_1)(b_3-b_2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Innen a már sokszor látott levezetés analógiájára legyen

$$k_2 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\pi}}\exp\left\{-\frac{\lambda_0^2}{\lambda_1}\right\}\left[\frac{1}{b_1}\left(\frac{s_1}{a_1^{t_1}a_2^{t_1^2}} - s_0\right)^2 + \frac{1}{b_2-b_1}\left(\frac{s_2}{a_1^{t_2}a_2^{t_2^2}} - \frac{s_1}{a_1^{t_1}a_2^{t_1^2}}\right)^2 + \dots\right.$$

$$\left.\dots + \frac{1}{b_n-b_{n-1}}\left(\frac{s_n}{a_1^{t_n}a_2^{t_n^2}} - \frac{s_{n-1}}{a_1^{t_{n-1}}a_2^{t_{n-1}^2}}\right)^2\right].$$

Ekkor a likelihood-függvény a

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^{2n}k_1)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{-k_2}{2\sigma^2}\right\}$$

alakot ölti, így σ^2 becslése λ_1 és λ_0 függvényében ugyanúgy k_2/n lesz, mint eddig mindig. A továbbiakban az eddigiekhez hasonlóan $k_1k_2^n$-t kell minimalizálni. Mivel $t_0 = 0$, ezért $b_0 = 0$ lesz, így bevezetve a

$$d_i = \frac{1}{b_i - b_{i-1}} = \frac{1}{\Phi\left(\sqrt{2\lambda_1}t_i + \frac{\sqrt{2}\lambda_0}{\sqrt{\lambda_1}}\right) - \Phi\left(\sqrt{2\lambda_1}t_{i-1} + \frac{\sqrt{2}\lambda_0}{\sqrt{\lambda_1}}\right)}$$

$$y_i = \frac{s_i}{a_1^{t_i}a_2^{t_i^2}} - \frac{s_{i-1}}{a_1^{t_{i-1}}a_2^{t_{i-1}^2}}$$

jelöléseket:

$$k_1k_2^n = a_1^{2\sum_{i=1}^n t_i}a_2^{2\sum_{i=1}^n t_i^2}\frac{\left[\sum_{i=1}^n d_iy_i^2\right]^n}{d_1d_2\dots d_n}.$$

Ez a λ_0, λ_1 változóknak eléggé bonyolult függvénye, így d_i nevezőjét közelítsük úgy, hogy vesszük a Φ függvény két vizsgált pontjában a Φ deriváltjainak mértani közepét és ezt szorozzuk be a két pont által meghatározott intervallum hosszával:

$$d_i \approx \frac{1}{\sqrt{2\lambda_1}(t_i - t_{i-1})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\lambda_1}{2}(t_i^2 + t_{i-1}^2) - \lambda_0(t_i + t_{i-1}) - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_1}\right\}}.$$

Ekkor:

$$k_1 k_2^n = a_2^{t_n^2} a_1^{t_n} \prod_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \times$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\exp\left\{\frac{\lambda_1}{2}(t_i^2 + t_{i-1}^2) + \lambda_0(t_i + t_{i-1})\right\}}{(t_i - t_{i-1})} \left(\frac{s_i}{e^{\lambda_0 t_i} e^{\frac{\lambda_1}{2} t_i^2}} - \frac{s_{i-1}}{e^{\lambda_0 t_{i-1}} e^{\frac{\lambda_1}{2} t_{i-1}^2}} \right)^2 \right]^n$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \times$$

$$\left[e^{\lambda_0 \frac{t_n}{n}} e^{\frac{\lambda_1}{2} \frac{t_n^2}{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \left(\frac{s_i}{e^{\frac{\lambda_1}{4}(t_i^2 - t_{i-1}^2)} e^{\frac{\lambda_0}{2}(t_i - t_{i-1})}} - \frac{s_{i-1}}{e^{\frac{\lambda_1}{4}(t_{i-1}^2 - t_i^2)} e^{\frac{\lambda_0}{2}(t_{i-1} - t_i)}} \right)^2 \right]^n .$$

Tegyük fel, hogy egyenletes időközönként állnak rendelkezésre az adatok, azaz $t_i = it$. Ekkor

$$k_1 k_2^n = \left[e^{\lambda_0 t} e^{\frac{\lambda_1}{2} t^2 n} \sum_{i=1}^{n} \left(s_i e^{\frac{\lambda_1 t^2}{4}(1-2i) - \frac{\lambda_0}{2} t} - s_{i-1} e^{\frac{\lambda_1 t^2}{4}(2i-1) + \frac{\lambda_0}{2} t} \right)^2 \right]^n .$$

Az n. gyökvonásnak (nemnegatív kifejezésről lévén szó) nincs szerepe a minimalizálásban, így azt el is hagyhatjuk. Vezessük be továbbá az

$$x_1 = e^{\frac{\lambda_0}{2} t} \qquad \text{és az} \qquad x_2 = e^{\frac{\lambda_1}{4} t^2}$$

jelöléseket. Ekkor minimalizálandó az

$$x_1^2 x_2^{2n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{s_i}{x_1 x_2^{2i-1}} - s_{i-1} x_1 x_2^{2i-1} \right)^2$$

kifejezés. Átalakítva:

$$x_1^2 x_2^{2n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i^2}{x_1^2 x_2^{4i-2}} - 2 \sum_{i=1}^{n} s_i s_{i-1} + \sum_{i=1}^{n} s_{i-1}^2 x_1^2 x_2^{4i-2} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i^2 x_2^{2n-4i+2} - 2 x_1^2 x_2^{2n} \sum_{i=1}^{n} s_i s_{i-1} + \sum_{i=1}^{n} s_{i-1}^2 x_1^4 x_2^{2n+4i-2} .$$

Ezt x_1 szerint deriválva:

$$-4x_1x_2^{2n}\sum_{i=1}^{n}s_is_{i-1}+4\sum_{i=1}^{n}s_{i-1}^2x_1^3x_2^{2n+4i-2}=0.$$

Amiből:

$$\widehat{x}_1^2=\frac{x_2^2\sum\limits_{i=1}^{n}s_is_{i-1}}{\sum\limits_{i=1}^{n}s_{i-1}^2x_2^{4i}}\qquad\text{illetve}\qquad\widehat{x}_1^2=0.$$

A második deriváltba pedig ezt beírva:

$$-4x_2^{2n}\sum_{i=1}^{n}s_is_{i-1}+12\sum_{i=1}^{n}s_{i-1}^2x_1^2x_2^{2n+4i-2}=-4x_2^{2n}\sum_{i=1}^{n}s_is_{i-1}+12x_2^{2n}\sum_{i=1}^{n}s_is_{i-1}$$

$$=8x_2^{2n}\sum_{i=1}^{n}s_is_{i-1}\ ,$$

illetve

$$-4x_2^{2n}\sum_{i=1}^{n}s_is_{i-1}+12\sum_{i=1}^{n}s_{i-1}^2x_1^2x_2^{2n+4i-2}=-4x_2^{2n}\sum_{i=1}^{n}s_is_{i-1}.$$

A már sokszor alkalmazott s_1, $...s_{n-1}$-re való feltételes valószínűség elvével könnyen látható, hogy $\sum_{i=1}^{n}s_is_{i-1}$ 1 valószínűséggel nem nulla. Ekkor pedig x_1^2-ben a minimumhely

$$\widehat{x}_1^2=\begin{cases}\frac{x_2^2\sum_{i=1}^{n}s_is_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n}s_{i-1}^2x_2^{4i}} & \text{ha } \sum\limits_{i=1}^{n}s_is_{i-1}>0\\ 0 & \text{ha } \sum\limits_{i=1}^{n}s_is_{i-1}<0.\end{cases}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy mivel $x_1^2=e^{\lambda_0 t}$, ezért a második esetben λ_0 becslése nem létezik. Tehát ha $\sum_{i=1}^{n}s_is_{i-1}<0$, akkor az adatok nem támasztják alá ennek a modellnek az alkalmazását. A $\sum_{i=1}^{n}s_is_{i-1}>0$ esettel foglalkozunk ezek után. Visszaírva a minimalizálandó képletbe x_1^2 becslését:

$$\sum_{i=1}^{n}s_i^2x_2^{2n-4i+2}-2x_2^{2n+2}\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}s_is_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}s_{i-1}^2x_2^{4i}}+x_2^{2n+2}\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}s_is_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}s_{i-1}^2x_2^{4i}}$$

$$= x_2^{2n+2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i^2}{x_2^{4i}} - \frac{(\sum_{i=1}^{n} s_i s_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} s_{i-1}^2 x_2^{4i}}\right).$$

Bevezetve az

$$f_i = s_i^2 \qquad g = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i s_{i-1}\right)^2 \qquad x_3 = x_2^2$$

jelöléseket:

$$x_3^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{x_3^{2i}} - \frac{g}{\sum_{i=1}^{n} f_{i-1}x_3^{2i}}\right)$$

adódik. Deriválva ezt x_3 szerint:

$$(n+1)x_3^n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i}{x_3^{2i}} - \frac{g}{\sum_{i=1}^{n} f_{i-1}x_3^{2i}}\right) - 2x_3^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{if_i}{x_3^{2i+1}} - \frac{g\sum_{i=1}^{n} if_{i-1}x_3^{2i-1}}{(\sum_{i=1}^{n} f_{i-1}x_3^{2i})^2}\right) = 0$$

Mivel $x_3 = e^{\frac{\lambda_1}{2}t^2}$, ezért értelmes becslést csak úgy kaphatunk, ha $x_3 > 1$, így szorozzunk be $x_3^n(\sum_{i=1}^{n} f_{i-1}x_3^{2i})^2$-nel, valamint vezessük be az $x_4 = x_3^2$ jelölést:

$$(n+1)\left(\sum_{i=1}^{n} f_i x_4^{n-i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} f_{i-1}x_4^i\right)^2 - (n+1)x_4^n g\left(\sum_{i=1}^{n} f_{i-1}x_4^i\right)$$

$$-2\sum_{i=1}^{n} if_i x_4^{n-i}\left(\sum_{i=1}^{n} f_{i-1}x_4^i\right)^2 + 2x_4^n g\left(\sum_{i=1}^{n} if_{i-1}x_4^i\right).$$

Ez x_4-ben egy $(3n-1)$-edfokú polinom, ami numerikus, vagy algebrai módszerekkel megoldható. A gyökhelyei közül ki kell választani azt, amelyik az eredeti kifejezés minimumát adja (persze csak az 1-nél nagyobb x_4-ek jöhetnek számításba). Ez lesz x_4 becslése. Ez alapján:

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{\ln \widehat{x}_4}{t^2} \ .$$

Továbbá

$$\widehat{x}_1^2 = \frac{\sqrt{\widehat{x}_4}\sum_{i=1}^{n} s_i s_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} s_{i-1}^2 \widehat{x}_4^i}$$

miatt:

$$\widehat{\lambda}_0 = \frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}\ln\widehat{x}_4 + \ln\left(\sum_{i=1}^{n} s_i s_{i-1}\right) - \ln\left(\sum_{i=1}^{n} s_{i-1}^2 \widehat{x}_4^i\right)\right].$$

Kell még k_2 a σ^2 becsléséhez:

$$k_2 = \sqrt{\frac{\widehat{\lambda}_1}{\pi}}\exp\left\{-\frac{\widehat{\lambda}_0^2}{\widehat{\lambda}_1}\right\}\times$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(s_i\exp\left\{\frac{\widehat{\lambda}_1 t^2}{4}(1-2i)-\frac{\widehat{\lambda}_0}{2}t\right\}-s_{i-1}\exp\left\{\frac{\widehat{\lambda}_1 t^2}{4}(2i-1)+\frac{\widehat{\lambda}_0}{2}t\right\}\right)^2}{\sqrt{2\widehat{\lambda}_1}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\widehat{\lambda}_0^2}{\widehat{\lambda}_1}\right\}}$$

$$= \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n}\left(s_i\widehat{x}_4^{\frac{1-2i}{4}}\widehat{x}_1^{-1} - s_{i-1}\widehat{x}_4^{\frac{2i-1}{4}}\widehat{x}_1\right)^2.$$

Így a σ^2 becslése:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{nt}\sum_{i=1}^{n}\left(s_i\widehat{x}_4^{\frac{1-2i}{4}}\widehat{x}_1^{-1} - s_{i-1}\widehat{x}_4^{\frac{2i-1}{4}}\widehat{x}_1\right)^2.$$

3.3.3. Becslés lineáris $\sigma(t)$ függvény esetén

Ebben a részben feltételezzük, hogy $\sigma(t)$ a t-nek lineáris függvénye, azaz:

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_1 t.$$

Kényelmesebben tudjuk azonban becsülni az együtthatókat, ha ehelyett az előállítás helyett inkább a

$$\sigma(t) = \sigma\sigma_1 + \sigma_1 t$$

alakot választjuk. Az egyszerűség kedvéért legyen $\lambda(t) \equiv 0$, $\mu(t)$ pedig tetszőleges polinom:

$$\mu(t) = \mu_0 + \mu_1 t + ... + \mu_q t^q \ ,$$

ahol megint tegyük fel, hogy $q \ll n$. Ekkor

$$\mathbf{E}(\xi_t) = \xi_0 + \int_0^t \mu_0 + \mu_1\tau + ... + \mu_q\tau^q d\tau = \xi_0 + \mu_0 t + \mu_1\frac{t^2}{2} + ... + \mu_q\frac{t^{q+1}}{q+1} \ ,$$

továbbá

$$\mathbf{Cov}(\xi_t, \xi_s) = \int_0^{\min\{t,s\}} \sigma^2\sigma_1^2 + 2\sigma\sigma_1^2\tau + \sigma_1^2\tau^2 d\tau$$

$$= \sigma_1^2 \left[\sigma^2 \min\{t,s\} + \sigma(\min\{t,s\})^2 + \frac{1}{3}(\min\{t,s\})^3\right].$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$b_i = \sigma^2 t_i + \sigma t_i^2 + \frac{t_i^3}{3}.$$

Ezzel a kovarianciamátrix:

$$\Sigma = \sigma_1^2 \begin{pmatrix} b_1 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_1 & b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

A determinánsa[7]:

$$\det \Sigma = \sigma_1^{2n} b_1(b_2 - b_1)...(b_n - b_{n-1}) = \sigma_1^{2n} k_1.$$

Az inverze pedig a szokásos alakban írható fel, így

$$k_2 = \frac{1}{b_1}\left(s_1 - s_0 - \sum_{k=0}^{q} \mu_k \frac{t_1^{k+1}}{k+1}\right)^2 + \frac{1}{b_2 - b_1}\left(s_2 - s_1 - \sum_{k=0}^{q} \mu_k \frac{t_2^{k+1} - t_1^{k+1}}{k+1}\right)^2 + ...$$

$$... + \frac{1}{b_n - b_{n-1}}\left(s_n - s_{n-1} - \sum_{k=0}^{q} \mu_k \frac{t_n^{k+1} - t_{n-1}^{k+1}}{k+1}\right)^2$$

jelöléssel a loglikelihood-függvény:

$$-\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(\sigma_1^{2n} k_1) - \frac{k_2}{2\sigma_1^2}.$$

Amiből σ_1^2 becslése a szokásos módon adódik:

$$\widehat{\sigma}_1^2 = \frac{k_2}{n} \ .$$

[7] Közben bevezetjük értelemszerűen a k_1 jelölést.

Ezt visszaírva a loglikelihood-függvénybe, látható, hogy megint $k_1 k_2^n$-t kell minimalizálni. Először $\mu_0, \ldots \mu_q$ változókban optimalizáljunk. Ekkor lényegében k_2-t kell minimalizálni, hisz k_1-ben ezek a változók nem szerepelnek. Itt közben kihasználtunk, hogy $k_1 > 0$ és $k_2 > 0$ 1 valószínűséggel. Ehhez elég azt látni, hogy $b_i > b_{i-1}$ $1 \leq i \leq n$ esetén. Ez pedig triviális, hisz az $x \to \sigma^2 x + \sigma x^2 + x^3/3$ függvény szigorúan monoton növekedő, mivel a deriváltja

$$\left(\sigma^2 x + \sigma x^2 + \frac{x^3}{3}\right)' = \sigma^2 + 2\sigma x + x^2 = (\sigma + x)^2 > 0.$$

Bevezetve a

$$d_i = \frac{1}{b_i - b_{i-1}} \qquad e_i^k = \frac{t_i^{k+1} - t_{i-1}^{k+1}}{k+1} \qquad y_i = s_i - s_{i-1}$$

jelöléseket:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \left(y_i - \sum_{k=0}^{q} \mu_k e_i^k\right)^2$$

kifejezést kell minimalizálni. Deriválva μ_l szerint:

$$2 \sum_{i=1}^{n} d_i e_i^l \left(y_i - \sum_{k=0}^{q} \mu_k e_i^k\right) = 0 \qquad l = 0 \ldots q$$

lineáris egyenletrendszert kell megoldani. Ennek egyértelmű lesz a megoldása, hiszen a *3.3.1. rész* gondolatmenetét lemásolva látni kell, hogy

$$\begin{pmatrix} e_1^0 & e_1^1 & \ldots & e_1^q \\ e_2^0 & e_2^1 & \ldots & e_2^q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{q+1}^0 & e_{q+1}^1 & \ldots & e_{q+1}^q \end{pmatrix}$$

mátrix nemszinguláris. Beszorozva a második oszlopot 2-vel, a harmadikat 3-mal, stb... , majd az első sort hozzáadva a másodikhoz, a másodikat a harmadikhoz, stb... , kapjuk:

$$\begin{pmatrix} t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^{q+1} \\ t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^{q+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{q+1} & t_{q+1}^2 & \ldots & t_{q+1}^{q+1} \end{pmatrix}$$

mátrixot, ez pedig Vandermonde-típusú, így nemszinguláris, tehát az eredeti sem volt szinguláris. A második parciális deriváltakból elkészített mátrix pozitív definitsége is triviális innen.

$\widehat{\mu}_0, ...\widehat{\mu}_q$ becslések a Cramer-szabállyal számíthatók, innen látszik az is, hogy ezek a becslések a d_i-k parciális törtfüggvényeként állnak elő, így mivel minden d_i a σ-nak racionális törtfüggvénye, ezért ezek a becslések is σ racionális törtfüggvényei lesznek. Az optimális σ megtalálásához $k_1 k_2^n$-t kell minimalizálni. k_2-be beírva a $\widehat{\mu}_0, ...\widehat{\mu}_q$ becsléseket, $k_1 k_2^n$ σ-nak racionális törtfüggvénye lesz. σ szerint deriválva ezt, továbbra is racionális törtfüggvény marad ez, így számlálójának gyökhelyei jöhetnek csak szóba, mint optimális $\widehat{\sigma}$. Ezeket numerikus módszerekkel könnyen meghatározhatjuk, és ha a $\widehat{\sigma}$ becslés megvan, akkor visszahelyettesítve $\widehat{\mu}_0, ...\widehat{\mu}_q$ képleteibe ezt, a $\mu(t)$ függvény együtthatóinak becslése is meglesz. Innen $\widehat{\sigma}_1^2$ becslése:

$$\widehat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \widehat{d}_i \left(y_i - \sum_{k=0}^{q} \widehat{\mu}_k e_i^k \right)^2 \quad ,$$

ahol

$$\widehat{d}_i = \frac{1}{\widehat{\sigma}^2 (t_i - t_{i-1}) + \widehat{\sigma}(t_i^2 - t_{i-1}^2) + \frac{1}{3}(t_i^3 - t_{i-1}^3)} \quad .$$

3.4. Még néhány összefoglaló megjegyzés a becslésekhez...

Az eddigiekben a felhasználható modelleknek csupán egy töredékével foglalkoztunk, néha szükség lehet azonban ezeknél sokkal bonyolultabb (esetleg nem polinom paraméterfüggvénnyel leírt) modellek alkalmazására. Ezek természetesen megfelelő paraméterezés bevezetésével ugyanúgy becsülhetők, csak legfeljebb a számolások lesznek bonyolultabbak, a maximalizálás során komplikáltabb numerikus eljárások használata válik szükségessé. Polinom paraméterfüggvények alkalmazása esetén is láthattuk néhány alapprobléma felvillantásán keresztül, hogy a legegyszerűbbnek tűnő esetek megoldása is mennyire bonyolult lehet. Sokszor a számolások megkönnyítése végett közelítéseket kell alkalmazni, míg máskor csak numerikusan oldható meg a szélsőértékkeresés. Ennek ellenére egy-egy opció árának meghatározása előtt érdemes több modellt kipróbálni. Néha a rendelkezésre álló adatok alapján egyszerűen meg sem lehet becsülni az együtthatókat (erre az előbbiekben láttunk számos példát), hiszen az adatok annyira ellentmondanak az illeszteni próbált modell által leírt folyamat tipikus viselkedésének. Ebben az esetben persze az adott modellel nem érdemes foglalkozni, más, becsülhető modellt kell keresni. Ha esetleg több modell is jól illeszthető az adatokra, akkor célszerű azt választani, amelyikhez hasonló modellt már sikeresen alkalmaztak más, valamilyen értelemben a vizsgált részvénnyel rokon értékpapír árfolyamának modellezésénél.

Irodalomjegyzék

[1] Ludwig Arnold: *Sztochasztikus differenciálegyenletek. Elmélet és alkalmazás.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.

[2] F. Black, M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81: 637-659, 1973.

[3] J. Durbin. The first-passage density of the Brownian motion process to a curved boundary. *Journal of Applied Probability*, 29: 291-304, 1992.

[4] R. J. Elliot, P. E. Kopp: *Pénzpiacok matematikája*, Typotex Kiadó, Budapest, 2000.

[5] J. Jacod, A. N. Shiryayev. Limit theorems for stochastic processes. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* 288., Springer-Verlag, New York, 1987.

[6] S. Karlin, H. M. Taylor: *Sztochasztikus folyamatok*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1985.

[7] S. Karlin, H. M. Taylor: *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1981.

[8] R. S. Liptser, A. N. Shiryayev: *Statistics of Random Processes. I. General Theory*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[9] R. S. Liptser: *Theory of Martingales*, Kluwer, Dordrecht, 1989.

[10] A. A. Novikov. On estimates and the asymptotic behaviour of nonexit probabilitities of a Wiener process to a moving boundary. *Math. Sb.*, 110: 539-550, 1979.

[11] M. B. Priestley: *Spectral Analysis and Time Series*, Academic Press, London, 1981.

[12] A. N. Shiryayev, Y. M. Kabanov, O. D. Kramkov, A. V. Melnikov: Toward the theory of pricing of options of both European and American types. I. Discrete time. *Theory of Probability and its applications*, 39: 14-60, 1994.

[13] A. N. Shiryayev, Y. M. Kabanov, O. D. Kramkov, A. V. Melnikov: Toward the theory of pricing of options of both European and American types. II. Continuous time. *Theory of Probability and its applications*, 39: 61-102, 1994.

[14] A. N. Shiryayev, R. P. Boas: *Probability*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1984.