OPTIKAI HÁLÓZATOK FREKVENCIAKIOSZTÁSA

Diplomamunka

Pintér Dömötör
alkalmazott matematikus hallgató

Témavezető:
Király Zoltán egyetemi docens

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Számítógéptudományi Tanszék

Budapest, 2002.

Tartalomjegyzék

Bevezetés **2**

1. Színező algoritmusok **4**
1.1. Néhány definíció 4
1.2. Egyszerűbb modellek 4
1.2.1. Általános gráfok 4
1.2.2. Hiperkocka 5
1.2.3. On-line algoritmusok utakra, fákra és körökre 7
1.3. Optimális mohó frekvenciakiosztás fákra 10
1.3.1. Particionálás 3-reguláris gráfokra (egyszerű esetek) . . 14
1.3.2. Particionálás 3-reguláris gráfokra (nehéz esetek) 16
1.4. Speciális hálózatok 19
1.4.1. Multicasting eredmények 19
1.4.2. Nem-újrakonfigurálható hálózatok 22

2. Konverzió **25**
2.1. A probléma felvetése 25
2.2. A modell 26
2.3. Elégséges halmazok irányított gráfokban 27
2.3.1. Oda-vissza irányított gráfok 27
2.3.2. Általános gráfok 31
2.3.3. Síkgráfok 39

3. Konverzió speciális hálózatokban **41**
3.1. Utak, körök 41
3.2. Fák 41
3.3. Páros gráfok, König-gráfok 42
3.4. Körök fája 50

4. Gyakorlati eredmények **56**

Köszönetnyilvánítás **61**

Hivatkozások **62**

Bevezetés

A modern távközlési hálózatok hatalmas mennyiségű információ-áradata miatt egyre nagyobb kapacitású fizikai jelhordozókra van szükség. A ma elérhető legnagyobb adatátvitelt az optikai kábelek tudják megvalósítani, 10 Gb/s-os adatátviteli sebességre képesek, így nagyságrendekkel jobbak, mint a hagyományos elektromos adattovábbító eszközök.

Az optikai kábel fizikai tulajdonságai lehetővé teszik, hogy *egy időben* több üzenetet is szállítsanak. Mindez az ún. *WDM* (wavelength division multiplexing) hálózatokban lehetséges. A WDM hálózat nagyon leegyszerűsítve routerekből és őket összekötő optikai kábelekből áll. Ha felmerül egy kommunikációs igény, azaz legalább két router kommunikálni szeretne egymással, akkor a hálózat feladata, hogy ezeket az igényeket kielégítse. Egyrészt el kell vezetni az igényeket, másrészt frekvenciákat kell kiosztani a kommunikációs csatornáknak úgy, hogy ha két kommunikációs út használ közös optikai kábelt, akkor különböző frekvenciákat kell használniuk. Mivel egyrészt az elérhető frekvenciák száma korlátos, másrészt a hálózat megépítése annál drágább, minél több frekvenciát használhat, ezért minimalizálni kell a számukat.

A matematikai modell a következő: adott egy $G(V, E)$ gráf, adott V-nek két (nem feltétlenül diszjunkt) ugyanakkora elemű részhalmaza, és egy párosítás a két részhalmaz elemei között (egy elemnek nem lehet önmaga a párja), és az a feladat, hogy a pontpárok között találjunk utat (E-beli éleket felhasználva), majd színezzük meg ezeket az utakat minél kevesebb színnel úgy, hogy ha két különböző párhoz tartozó út használ közös élet E-ből, akkor különböző színűre kell őket színezni.

Természetesen ezen belül sokféle modell létezik attól függően, hogy a G gráf irányított vagy irányítatlan, milyen típusú routerek vannak a hálózatban, illetve a legfontosabb szempont az lesz, hogy a pontpárok előre meg vannak-e adva (ún. off-line modell), vagy időben folyamatosan érkezhetnek új pontpárok illetve el is törölhetünk már meglévő pontpárokat (on-line modell).

Az első fejezetben vázoljuk a legelterjedtebb modelleket, felsorolva az ismert legjobb eredményeket, néhány algoritmust részletesebben is tárgyalni fogunk.

Teljesen új feladatot kapunk, ha a hálózatban megengedjük a konverterek használatát, melyek speciális routerek, alkalmasak frekvenciaváltásra. Ilyen berendezésekkel ugyanis a kommunikációs utak nem csak egy színt használhatnak, ezért csökkenhet a felhasználandó frekvenciák száma. Mivel a konverterek drága berendezések, ezért számukat minimalizálni kell. Az ezen témakör köré csoportosuló problémákkal a második fejezetben foglalkozunk. Rávilágítunk az alapprobléma nehézségére, és approximációs algoritmusokat vizsgálunk meg.

A harmadik fejezet tartalma nagyban kapcsolódik az előzőéhez. Továbbra is a konverzió köré csoportosítva a problémákat egyszerűbb hálózatokkal foglalkozunk, így mélyebb eredményeket kapunk, mint általános hálózatok esetében.

Lévén abszolút gyakorlati problémákról szó, nem elégedhetünk meg pusztán az elméleti eredményekkel. Programozással illetve teszteléssel a negyedik fejezetben foglalkozunk.

A második fejezet 2.22. tételének bizonyítása önálló munka eredménye. A negyedik fejezet klasszikus állításain és tételein kívül a tételeket és az algoritmusokat témavezetőmmel közösen dolgoztuk ki. A negyedik fejezet teljes egészében önálló munka eredménye.

1. Színező algoritmusok

1.1. Néhány definíció

Elöljáróban lássunk néhány, dolgozatunk egészét érintő fontos definíciót. Legyen adott egy igényhalmaz, válasszunk egy tetszőleges igényt. Ekkor megkülönböztetjük az igényhez tartozó *forrást* (aki küldi az információt), és *nyelőt* (aki veszi az információt).

1.1. Definíció. *Legyen adott egy R igényhalmaz. Azt mondjuk, hogy R egy h-reláció, ha a hálózat pontjai forrásként is és nyelőként is (külön-külön) legfeljebb h igényhez tartoznak. Az 1-relációt permutációs igénynek is hívjuk.*

1.2. Definíció. *Adott egy $G(V, E)$ hálózat, benne egy igényhalmaz és egy hozzá tartozó elvezetés. Ekkor a* konfliktus-gráf, *$c(G)$ pontjai a elvezetés útjai, két pont között akkor megy él, ha a megfelelő utaknak van közös (irányított vagy irányítatlan) éle.*

Ebből látható, hogy $\chi(c(G))$ pont az (irányított vagy irányítatlan) utakhoz szükséges frekvenciák minimális számát adja meg.

1.3. Definíció. *Legyen adott egy $G(V, E)$ irányítatlan (irányított) hálózat és benne egy tetszőleges elvezetés. Ekkor a* torlódás *az egy (irányított) élet használó kommunikációk maximális száma. A* dilatáció *pedig a leghosszabb elvezetésbeli út hossza.*

Mivel bebizonyították, hogy a *hullámhossz-kiosztás problémája* (azaz egy adott hálózatban úgy vezessük el az igényeket, hogy minimális számú frekvenciára legyen szükség) általában $\mathcal{NP}$-nehéz ([24]) még egyszerűbb hálózatok esetében is ([25],[18],[16]), ezért approximációs algoritmusokkal fogunk foglalkozni.

1.2. Egyszerűbb modellek

1.2.1. Általános gráfok

Az első modell off-line, tehát az igényeket előre ismerjük. Legyen adott egy $G(V, E)$ irányítatlan hálózat korlátos maximális fokszámmal, és egy permutációs igény. Jelölje az i-edik igényhez tartozó forrást (s_i), a nyelőt (t_i), és tekintsük a következő többtermékes folyamproblémát. Minden (s_i, t_i) forrás-nyelő párhoz tartozzék egységnyi forgalom, minden élnek legyen egységnyi a kapacitása. A torlódás *jelentése* nem változott meg, csak ebben az esetben maga a fogalom azt takarja, hogy egy rögzített élen a folyamérték maximum hányszorosa a kapacitásnak. A torlódás legyen c, a dilatáció d.

1.4. Definíció. *Egy G gráf expanziója jelentse a következőt:*

$$\beta(G) = \min_{\emptyset \neq S \subseteq V(G), |S| \leq |V(G)|/2} \frac{d(S, V \setminus S)}{|S|},$$

ahol $d(U, W)$ az U és W ponthalmazok közötti élek számát jelöli.

Leighton és Rao ([1], Theorem 2) megmutatta, hogyan lehet egészértékű folyamot találni a fenti problémára úgy, hogy mind a torlódás, mind a dilatáció legfeljebb $O(\log n/\beta)$ legyen. Ez azt jelenti, hogy az adott kommunikációs igényekhez van olyan elvezetés, melyhez tartozó konfliktus-gráf maximális fokszáma legfeljebb $O(\log^2 n/\beta^2)$, ezzel a következő állítás bizonyítást nyert:

1.5. Állítás. *Tetszőleges korlátos maximális fokú irányítatlan hálózatra és tetszőleges permutációs igényhez létezik olyan elvezetés és frekvenciakiosztás, mely legfeljebb $O(\log^2 n/\beta^2)$ frekvenciát használ.*

1.2.2. Hiperkocka

Következő modellünkben a hálózat legyen az n dimenziós (irányítatlan) hiperkocka, ismét egy off-line modellünk van, tehát az igényeket előre ismerjük. A hiperkocka olyan gráf, melynek pontjai az n-hosszú 0-1 vektorok, és két pont akkor van összekötve, ha a megfelelő vektorok pontosan egy koordinátában különböznek. Ilyenformán látható, hogy a hiperkockának 2^n pontja van, és mivel n-reguláris, ezért az élek száma $n2^{n-1}$. Azt is könnyű végiggondolni, hogy az n dimenziós hiperkocka két $n-1$ dimenziós hiperkockából és köztük lévő megfelelően elhelyezett 2^{n-1} db élből áll, tehát valóban a kocka általánosításáról van szó.

Pankhaj [3]-ban megmutatta, hogy a hiperkockában tetszőleges permutációs igényhez létezik úgy elvezetés és frekvenciakiosztás, hogy legfeljebb $O(\log^2 n)$ db frekvenciára van szükség. Aggarwal, Bar-Noy, Coppersmith, Ramaswani, Schieber és Sudan ([4]) javítottak ezen az eredményen, $O(\log n)$ frekvencia kiosztásával el tudták vezetni az igényeket. Aumann és Rabani ([2]) bizonyították az eddigi legjobb eredményt:

1.6. Tétel. *A hiperkockán tetszőleges (off-line) permutációs igény elvezethető úgy, hogy 16 szín elég a megszínezésükhöz.*

Bizonyítás: először is definiáljuk az ún. pillangó-gráfot, ami nagyon „hasonlít” a hiperkockára. Legyenek a B_n gráf pontjai:

$$V(B_n) = \{(i, x) : -n \leq i \leq n,\, x \in \{0,1\}^n\}.$$

Élei pedig legyenek $E(B_n) = E_S \cup E_D$, ahol

$$E_S = \{((i,x),\,(i+1,x)) : -n \le i < n\}$$

$$E_D = \left\{((i,x),\,(i-1,x^i)) : 1 \le i \le n\right\} \cup$$

$$\cup \left\{((i,x),\,(i+1,x^{|i|}))) : -n \le i < 0\right\},$$

ahol x^i az a vektor, ami csak az i-edik koordinátájában tér el x-től. Hívjuk az $((i,x),\,(i-1,x^i))$, $((i,x^i),\,(i-1,x))\,(i \ge 0)$, valamint az $((i,x),(i+1,x^{|i|}))$, $((i,x^{|i|}),(i+1,x))\,(i < 0)$ típusú élpárokat keresztező élpárnak. A E_S-beli éleket pedig hívjuk vízszintes éleknek. A pillangó-gráfra igaz a következő lemma (bizonyítása [2]-ben található meg):

1.7. Lemma. *Legyen B_n egy pillangó-gráf, és legyen P egy permutációs igény úgy, hogy a források az első, a nyelők az utolsó szintből kerülnek ki (azaz $i = -n$ vagy $i = n$). Ekkor P kettéosztható P_0 és P_1 permutációs igényekre úgy, hogy a P_0-beli igények elvezethetők pontdiszjunkt utakkal, és ezen utak közül legfeljebb egy használ bármely rögzített keresztező élpárt, annak is legfeljebb egy élét; és ugyanez igaz a P_1-beli igényekre is.*

Ezek után tekintsük ismét magát a hiperkockát, és legyenek H_0 és H_1 azon eggyel kisebb dimenziós hiperkockák, melyekben a pontok első koordinátája rendre 0 illetve 1. Jelölje R_{00} azon igények halmazát, melyek forrása és nyelője egyaránt H_0-ban van, R_{01} jelentse azokat az igényeket, melyek forrása H_0-ban, nyelője H_1-ben van. Hasonlóan lehet definiálni az R_{10}, R_{11} igényhalmazokat.

Először azt látjuk be, hogy az R_{01}-beli igények elvezethetők 2 frekvencia felhasználásával (és nyilván hasonlóan az R_{10}-beli igények másik két frekvencia felhasználásával). Ágyazzuk be a B_{n-1} ($(2n-1) \times 2^{n-1}$ pontú) pillangógráfot H-ba a következő módon: az első n szint pontjait H_0 megfelelő pontjaira, az utolsó n szint pontjait H_1 megfelelő pontjaira képezzük le. Vegyük észre, hogy a középső szint pontjait így kétszer képezzük le, melyek között megy a megfelelő H_0 és H_1 közötti él.
B_{n-1} vízszintes éleinek mindkét végpontja ugyanarra a H-beli pontra képeződik le, ezért ezen élek képe egy hurokél lenne, amit el is felejthetünk. Vegyük észre, hogy E_D éleiből pedig pontosan kettő fog egy B-beli élre képződni, és ezek az élek keresztezők.
Az R_{01}-beli igényeknek feleltessünk meg B_{n-1}-beli igényeket: az forrásoknak feleljenek meg a fenti beágyazás szerinti első szintben lévő ősképei, hasonlóan a nyelőknek a fenti beágyazás szerinti utolsó szintben lévő ősképei. Ekkor

ezekre az igényekre alkalmazva a lemmát, majd az elvezetéseket beágyazva H-ba a fenti módon, elvezettük a H_{01}-beli igényeket úgy, hogy két színnel színezhetőek legyenek, ugyanis a beágyazás csak olyan B_{n-1}-beli utak éleit teheti közössé (keresztező élek), melyek már eleve különböző színűek voltak.

Mindezek után megmutatjuk, hogy az R_{00}-beli igények elvezetéséhez elég 6 szín (nyilván ugyanez áll R_{11} igényeire is), és ekkor készen vagyunk. Először minden igény forrásából vezessük el az igényt a fenti módon abba a pontba, mely az igény nyelőjétől csak az első koordinátájában tér el. Ezt két szín (mondjuk piros és kék) felhasználásával meg tudjuk tenni. Ezután már csak a megfelelő H_0-t H_1-gyel összekötő élet kell felhasználni, hogy a két első koordinátában eltérő pontot összekapcsoljuk, és készen is vagyunk, ha az élet ugyanolyanra színezzük, mint előtte az utat. A problémát az jelentheti, hogy mondjuk egy ilyen piros élet lehet, hogy használ (legfeljebb) egy piros út. Természetesen ha ugyanahhoz az igényhez tartozó út tartalmazza a piros élet, akkor az út már korábban elérte az igény nyelőjét, tehát készen vagyunk. A továbbiakban feltehető, hogy ha egy piros út tartalmaz egy piros élet, akkor különböző igényekhez tartoznak.
Tekintsük az összes ilyen *piros* út-él párost, és definiáljunk egy irányított G gráfot: G pontjai legyenek az út-él párok, akkor megy egy v pontból egy u-ba irányított él, ha a v-nek megfelelő piros út tartalmazza az u-nak megfelelő piros élet. Így egy olyan irányított gráfot kapunk, melynek minden pontja maximum 1-befokú, ami azt jelenti, hogy a gráf minden összefüggő komponense legfeljebb egy irányítatlan értelemben vett kört tartalmaz, tehát 3-színezhető. Ezért a piros út-él párokat – most már jól – meg tudjuk színezni 3 színnel, ugyanez áll a kék út-él párokra, ezzel az állítás bizonyítást nyert. □

1.2.3. On-line algoritmusok utakra, fákra és körökre

Ebben a fejezetben on-line igényekkel fogunk foglalkozni, tehát az igények időben folyamatosan érkeznek és szűnnek meg, és a már zajló kommunikációkat nem szakítjuk meg, így új igény érkezése esetén nem színezzük újra a konfliktus-gráf azon részét, amely eddig már meg volt színezve. Visszatérünk az olyan igényekhez, melyekhez egy forrás és egy nyelő tartozik, tehát megint utakat fogunk színezni, és a hálózat (irányítatlan) út, fa, vagy kör lesz.

1.8. Definíció. *Jelölje $W_{\text{út}}(n,l)$ (és megfelelően $W_{\text{fa}}(n,l)$ és $W_{\text{kör}}(n,l)$) on-line algoritmus esetén a frekvenciák minimális számát az n pontú útban (fában, körben), mint hálózatban, ha a torlódás legfeljebb l.*

1.9. Állítás. *Tetszőleges n pontú útra $W_{\text{út}}(n,l) \leq l + W_{\text{út}}(\lceil n/2 \rceil, l)$.*

Bizonyítás: tekintsünk egy n pontú utat. Vegyük észre, hogy van olyan e éle az útnak, melyet elhagyva az út két, legfeljebb $\lceil n/2 \rceil$ pontú komponensre esik szét. Azon utak, melyek átmennek e-n, legfeljebb l frekvenciát igényelnek. A többi út pedig legfeljebb $W_{\text{út}}(\lceil n/2, l \rceil)$ frekvenciát igényel. □

1.10. Tétel. $W_{\text{út}}(n,l) \leq l \lceil \log_2 n \rceil$.

Bizonyítás: a 1.9. állítás triviális következménye, mivel $W_{\text{út}}(1,l) = 0$. □

1.11. Tétel. $W_{\text{kör}}(n,l) \leq l + l \lceil \log_2 n \rceil$.

Bizonyítás: tekintsünk egy n pontú kört, és vegyük egy e élét. Azon utak, melyek átmennek e-n, legfeljebb l frekvenciát igényelnek. Mivel e elhagyásával kapunk egy n hosszú utat, ezért a 1.9.állítás miatt az e-n nem átmenő utak megszínezhetők legfeljebb $l \lceil \log_2 n \rceil$ éllel, ezzel bebizonyítottuk a tételt. □

1.12. Állítás. *$n > 1$-re* $W_{\text{fa}}(n,l) \leq 2l - 1 + W_{\text{fa}}(\lceil n/2, l \rceil)$.

Bizonyítás: Tekintsünk egy n pontú fát. Szükségünk van a következő lemmára:

1.13. Lemma. *Tetszőleges n pontú fához létezik ún. medián pont, amit elhagyva a fa legfeljebb $n/2$ pontú komponensekre esik szét.*

Bizonyítás: n szerinti indukcióval. 1 és 2 pontú fákra a lemma triviális. Tegyük fel, hogy a lemma teljesül minden $n-1$ pontú fára. Vegyünk egy n pontú F fát, és hagyjuk el egy levelét.. Erre az F' fára alkalmazzuk az indukciós feltételt, van egy v mediánunk. Ha ez medián F-ben, akkor készen vagyunk. v csak akkor nem medián F-ben, ha az a komponens sérti meg a feltételt, amelyikből elvettük a levelet (ui. a többi mérete nem változott, tehát eggyel több pont esetén ők még kisebb hányadát alkotják a pontoknak). Legyen ez a komponens k pontú. A következőket tudjuk: $k > \frac{n}{2}, k - 1 \leq \frac{n-1}{2}$, aminek az a megoldása, hogy $k = \frac{n+1}{2}$, ami viszont azt jelenti, hogy ebben a komponensben a v-hez legközelebbi pont jó lesz mediánnak (ez a pont valóban egyértelműen létezik minden komponensben, mivel az eredeti gráf fa, így a komponensekből csak egy él megy v-be). □

Ezek után folytatva az állítás bizonyítását, vegyük a fa egy v mediánját. Azt kell végiggondolnunk, hogy a v-n átmenő utak megszínezéséhez elég $2l-1$ szín. Ugyanis egy rögzített, v-t érintő út legfeljebb két v végpontú élen megy keresztül, és mivel a torlódás legfeljebb l, ezért ez az út legfeljebb $2l-2$ másik v-t tartalmazó úttal osztozik valamely élen, így a v-n átmenő utak konfliktusgráfjának maximális foka $2l-2$, tehát $2l-1$ színnel megszínezhető.
Mivel v medián, ezért v-t elhagyva minden komponens útjai (tehát azok, melyek nem tartalmazzák v-t) megszínezhetők $W_{\text{fa}}(n/2, l)$ színnel, ezzel az állítás bizonyítást nyert. □

1.14. Tétel. $W_{\text{fa}}(n,l) \leq (2l-1)\log_2 n$.

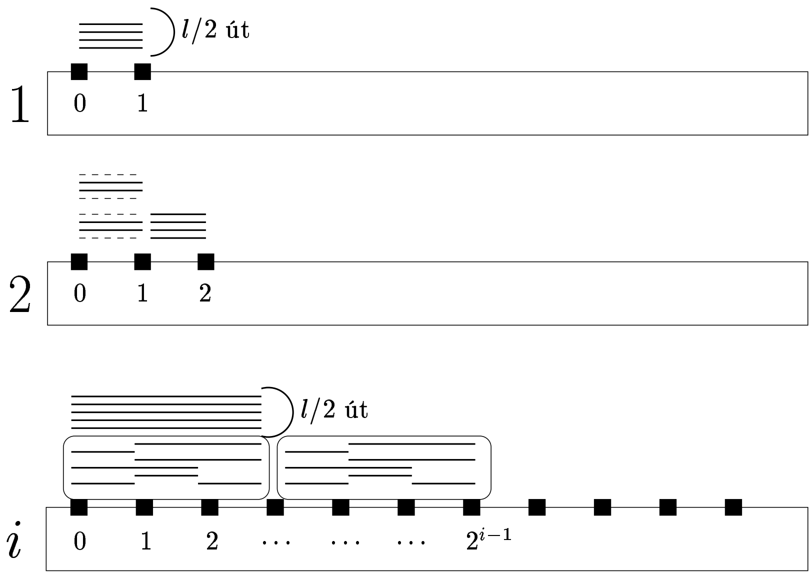
Bizonyítás: a 1.12. állítás triviális következménye, mivel $W_{\text{fa}}(1,l) = 0$. □

Mindezek után nézzünk egy alsó korlátot is. Vegyünk egy n pontú utat, és számozzuk meg a pontjait 0-tól $n-1$-ig. Ekkor igaz a következő

1.15. Tétel. *Egy n pontú úton, mint hálózatban tetszőleges színező on-line algoritmushoz létezik olyan igényhalmaz, melyre a torlódás mindig legfeljebb l, és melynek megszínezéséhez minimum $\frac{1}{2}l\lceil\log_2 n\rceil$ színre van szükség.*

Bizonyítás: Megadjuk az igényeket fázisonként.

1. fázis: érkezzen $l/2$ db igény 0 és 1 között. A torlódás $l/2$, és ennyi szín elég is és kell is a megszínezéshez.



1. ábra.

2. fázis: érkezzen újabb $l/2$ igény 0 és 1 között, melyek újabb $l/2$ színt igényelnek. Ugyanakkor az 1. fázist „ismételjük meg" úgy, hogy az igények most 1 és 2 között érkezzenek. Ekkor tehát l utunk van 0 és 1 között különböző színekkel, és másik $l/2$ utunk 1 és 2 között $l/2$ különböző színnel (de nem feltétlenül különböző a 0 és 1 közötti utak színeitől). Nyilvánvalóan a 0 és 1 közötti utak l db színe közül ki tudunk választani $l/2$ olyat, melyek mind különböznek az 1 és 2 közti utak színeitől. Ezeket tartsuk meg, a többi 0 és 1 közötti igényt meg szüntessük meg. Így $2 \cdot l/2$ színt használunk, a torlódás $l/2$.

⋮

i-edik fázis: feltevés szerint, a fázis megkezdése előtt $W(i-1) = (i-1)\cdot l/2$ színt használunk éppen a 0 és 2^{i-2} közötti végpontú utak megszínezésére, a torlódás $l/2$. Ezért érkezzen $l/2$ db új igény 0 és 2^{i-2} között (melyek újabb $l/2$ színt igényelnek), így a torlódás még mindig legfeljebb l. A felhasznált színek száma $W(i-1)+l/2$. Ezek után ismételjük meg az $1,2,\ldots,i-1$ fázisokat, de úgy, hogy az összes igény mindkét végpontját toljuk el 2^{i-2}-vel. Tehát 0-tól 2^{i-2}-ig vannak útjaink, melyek $W(i-1)+l/2$ színt használnak, 2^{i-2}-től 2^{i-1}-ig vannak útjaink, melyek $W(i-1)$ színt használnak. Így az első $W(i-1)+l/2$ színű útból kiválasztható $l/2$ olyan különböző színű út, melyek színei nincsenek benne az utóbbi $W(i-1)$ színben. Ezen kiválasztott utak színétől eltérő 0 és 2^{i-2} közötti utakat töröljük el (azaz szüntessük meg a hozzájuk tartozó igényeket) Így kapunk egy olyan elvezetést, mely $W(i-1)+l/2$ színt használ, míg a torlódás csak $l/2$.

$\vdots$

Az utolsó – $\lfloor \log_2 n \rfloor$-edik – fázis után vegyünk még $l/2$ db igényt 0 és $2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$ kezdőpontokkal, így a torlódás l lesz, és a hálózat $\frac{1}{2}l\left\lceil \log_2 n \right\rceil$ db színt használ. □

1.3. Optimális mohó frekvenciakiosztás fákra

Mint a címből is kiderül, ez a fejezet azokkal az esetekkel foglalkozik, amikor a hálózat fa. Az igényeket előre ismerni fogjuk, tehát off-line modellben fogunk dolgozni. Vegyük észre, hogy az igényhalmaz már önmagában meghatározza az elvezetést, mivel a hálózatunkban nincs kör, tehát két tetszőleges pontot összekötő út egyértelmű. A feladat tehát: adott egy fa, mint hálózat, és rajta utak egy rendszere, színezzük meg őket úgy, hogy a nem éldiszjunkt utak különböző színt kapjanak.

Ha a hálózat irányítatlan, azaz minden élen oda-vissza megy a kommunikáció, akkor a legjobb (és egyben optimális) eredményt Raghavan és Upfal írja le [5]-ben: irányítatlan fában az l torlódású kommunikációs elvezetés megszínezhető $3l/2$ színnel. Azt pedig könnyű látni, hogy ennyi kell is, mert pl. a háromágú csillagban 3 színre van szükség, ha bármely két elsőfokú pont kommunikálni szeretne, míg a torlódás csak kettő.

Mindezek után pedig foglalkozzunk az irányított esettel, azaz legyen adott egy *oda-vissza* irányított fa, mint hálózat, és rajta irányított utak egy halmaza. Természetesen a torlódáson most az egy *irányított* élen átmenő utak maximális számát értjük.

1.16. Tétel. *A hullámhossz-kiosztás problémája irányított fában $\mathcal{NP}$-nehéz, még bináris fákra is.*

A bizonyítás [18]-ban található meg. Raghavan és Upfal ugyancsak [5]-ben $2l$-es felső korlátot ad a színek számára. Mihail ezt egy kissé megjavította ([6]), $15l/8$ felső korlátot ért el azáltal, hogy a problémát egy páros gráf élszínezésére vezette vissza. Kaklamanis és Persiano ([7]) (és függetlenül Kumar és Schwabe [8]) már $7l/4$-re javították a felső korlátot. Az alapötlet hasonló volt az ő algoritmusukban is, de új technikákat is bevezettek, a páros gráfot ügyesen olyan párosításokra particionálták, melyek egymástól függetlenül színezhetők. A legjobb eredményt Erlebach, Jansen, Kaklamanis és Persiano érték el [9], $5l/3$-os felső korlátot bizonyítva. Mindemellett azt is megmutatták, hogy mohó algoritmussal nem is lehet jobb felső korlátot elérni, valamint mutattak példát arra, hogy $5l/4$ színre minimálisan szükség van.

És most lássuk az $5l/3$-os felső korlátra a mohó algoritmust! Természetesen először definiálni kell, mit értünk *mohó* algoritmuson. Vegyünk egy tetszőleges levelet, és gyökeresítsük a fát úgy, hogy ez a levél legyen a gyökér. Az algoritmus szakaszokban dolgozik, minden fa-ponthoz tartozik egy külön szakasz. Mindössze annyit teszünk fel, hogy ha egy u pont őse egy v pontnak, akkor az v-hez tartozó szakasz később következik, mint az u-hoz tartozó szakasz. Egy v ponthoz tartozó szakaszban az összes olyan utat megszínezzük, amelyek eddig nem voltak megszínezve, és érintik v-t. Tehát ezen szakasz előtt már az összes olyan út meg van színezve, amely átmegy v valamelyik ősén. Ezért a különböző mohó algoritmusok abban térnek el, hogy egy szakaszon belül mit csinálnak.

Tegyük fel, hogy l osztható 3-mal, $l = 3i$, $i \in \mathbb{N}$. Úgy szeretnénk színezni a szakaszokban, hogy a következő két tulajdonság megmaradjon:

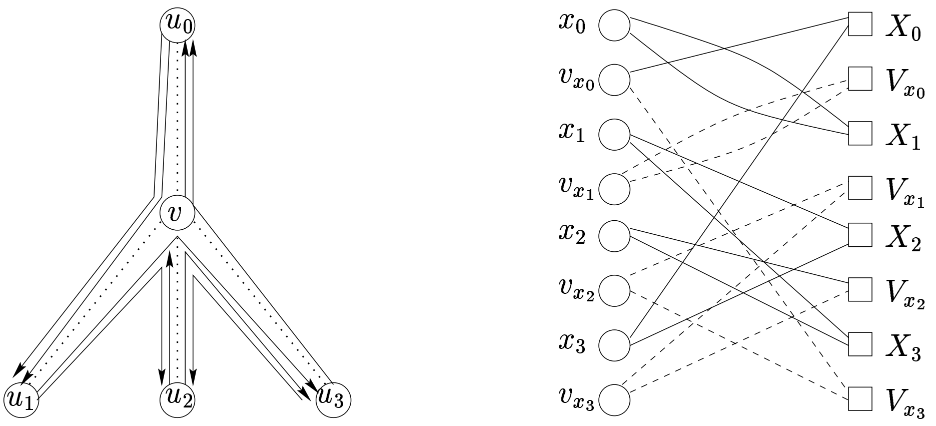
1. Az eddig felhasznált színek száma legfeljebb $\frac{5}{3}l = 5i$.

2. Két szomszédos pontot összekötő két, ellentétes irányú élen átmenő utak megszínezéséhez összesen legfeljebb $\frac{4}{3}l = 4i$ színt használunk.

Ha van ilyen algoritmusunk, akkor azt nem nehéz általánosítani az $l = 3i + 1$ ill. az $l = 3i + 2$ esetre. Ezért csak a $l = 3i$ esetet vizsgáljuk, felteszzük továbbá, hogy minden irányított élet pontosan l út használ (extra utak hozzáadásával ez elérhető).

Tekintsük egy v pontját a fának, legyen a szülője u_0, gyerekei $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Éppen a v szerinti szakaszban van az algoritmus, azaz a v-n átmenő, eddig színezetlen utakat szeretnénk megszínezni. Definiáljuk a G_v páros gráfot a következőképpen: bal pontosztálya legyen $\bigcup_{i=0}^{k} \{x_i, v_{x_i}\}$, jobboldali pedig $\bigcup_{i=0}^{k} \{X_i, V_{x_i}\}$. Minden v-t érintő út megfelel egy élnek G_v-ben:

- u_i felől jövő, u_j felé tartó útnak egy (x_i, X_j) él felel meg,



2. ábra. G_v konstruálása

- u_i felől jövő, v-ben végződő útnak egy (x_i, V_{x_i}) él felel meg,
- v-ben kezdődő, u_i felé tartó útnak egy v_{x_i}, X_i él felel meg.

Vegyük észre, hogy egy sorban lévő pontok nem lehetnek szomszédosak (az x_i, X_i ill. v_{x_i}, V_{x_i} pontpárokat nevezzük sornak). Vegyük észre továbbá, hogy x_i és X_i foka l, míg v_{x_i} és V_{x_i} foka legfeljebb l. A 2. ábrán látható szaggatott éleket azért húzzuk be, hogy egy l-reguláris gráfot kapjunk (könnyű végiggondolni, hogy minden x_iX_j élhez behúzva egy $v_{x_j}V_{x_i}$ élet minden pont foka l lesz, de továbbra sem lesznek élek x_i és X_i, vagy v_{x_i} és V_{x_i} között, és ez megtehető, mert minden egyes u_i felől jövő nem v-ben végződő út eggyel csökkenti V_{x_i} fokát, és minden egyes nem v-ből induló, u_j felé tartó út eggyel csökkenti v_{x_j} fokát). Látható, hogy az így kapott G_v-nek egy jó élszínezése jó az eredeti gráfban is. Mivel az u_0-t érintő utak már egy korábbi fázisban kaptak színt, ezért az x_0-al és X_0-al szomszédos élek már színezettek, őket *előre színezett éleknek* hívjuk, a gráf többi élét *maradék éleknek* nevezzük. Az előre színezett élek színeit *szimpla* illetve *dupla* színeknek hívjuk attól függően, hogy egy vagy két él is olyan színű. Legyen a szimpla színek száma S, a dupláké D. Az második invariáns miatt $D + S \leq \frac{4}{3}l$, és mivel minden élen pontosan l a torlódás, így $S + 2D = 2l$, következésképp $D \geq \frac{2}{3}l$. Sőt, az is feltehető, hogy D pontosan $\frac{2}{3}l$. Csináljuk ugyanis a következő lépések sorozatát. Vegyünk egy dupla színt, és a hozzátartozó két előreszínezett él közül az egyik kapjon egy új színt, ezzel eggyel kevesebb lett a dupla színek száma, kettővel nőtt a szimpla színek száma. Ezért $S + 2D$ nem változott, de $S + D$ eggyel nőtt. Csináljuk ezt addig, amíg $S + D$ el nem éri a $\frac{4}{3}l$-t, ekkor $D = \frac{2}{3}l$ teljesül, és az invariáns tulajdonságok is megmaradtak.

Tehát feltehetjük, hogy $S = D = \frac{2}{3}l$, és megmutatjuk, hogy G_v kiszínezhető legfeljebb $\frac{l}{3}$ új színt használva úgy, hogy G_v semelyik sora sem lát $\frac{4}{3}l$-nél több színt (G_v egy sora „látja" a c színt, ha valamelyik abból a sorból induló él c színű).

Mivel G_v l-reguláris, ezért a König-tétel miatt felbontható l darab teljes párosítás diszjunkt uniójára. Csoportosítsuk a párosításokat az előre színezett élei alapján. Ha mindkét előre színezett éle szimpla szín, akkor SS-párosításról beszélünk. Egy szimpla egy dupla előre színezett éllel ST-párosításnak hívjuk. Ha mind a két előre színezett él dupla, akkor TT-párosításról van szó, ha e két szín különböző, és PP-párosításról, ha e két szín megegyezik. Úgy fogjuk G_v-t felbontani párosítások uniójára, az SS-, ST-, TT-párosítások uniója ne tartalmazzon PP-párosítást.

Ezek után 3-reguláris gráfokat fogunk képezni ezen párosítások uniójából, majd megszínezzük őket úgy, hogy az előre színezett élek színein kívül egy új színt kap minden 3-reguláris gráf, és még azt is biztosítani fogjuk, hogy egy ilyen 3-reguláris gráf egyik sora se lásson 4-nél több színt az első soron kívül.

Lássunk először két fontos definíciót, melyekre nagy szükség lesz a továbbiakban:

1.17. Definíció. *Az olyan 3-reguláris gráfokat, melyekben a 6 előre színezett él közül 2 ugyanazzal a dupla színnel van színezve (hívjuk ezt* megőrzött *dupla színnek), másik kettő is (esetleg különböző) dupla színnel van színezve, és az utolsó kettő szimpla színnel van színezve, melyek közül egyik x_0, másik X_0 végpontú,* KS-*részgráfoknak nevezzük.*

1.18. Definíció. *G_v egy H_1 részgráfját súlyzónak hívjuk, ha x_0 és X_0 foka 3 és minden más pont foka 2.*

Kapcsolatukat a KS-részgráfokkal a következő lemma mutatja:

1.19. Lemma. *Legyen H egy* KS-*részgráfja G-nek d megőrzött dupla színnel és s, s' szimpla színekkel (és d_1, d_2 nem feltétlenül megőrzött dupla színekkel). Ha H particionálható egy H_1 súlyzóra és egy olyan párosításra, mely x_0-on és X_0-on kívül minden pontot lefed, akkor H maradék élei kiszínezhetőek d, s, s' és legfeljebb egy új szín felhasználásával úgy, hogy a felső soron kívül semelyik sor sem lát 4-nél több színt.*

A bizonyítás nem igényel komoly ötletet, de hosszadalmas és sok esetet kell megvizsgálni, ezért itt nem részletezzük, [13]-ban megtalálható.

1.20. Megjegyzés. *A tételben szereplő feltétel (hogy ti. H particionálható egy súlyzóra és egy majdnem párosításra) ekvivalens azzal, hogy x_0 és X_0 egy összefüggő komponensben legyenek.*

1.21. Jelölés. *Az x_0 végpontú, a színű e él másik végpontját jelölje $r(a)$, hasonlóan az X_0 végpontú, b színű f él másik végpontját jelölje $l(b)$.*

1.22. Lemma. *Legyen H egy* KS*-részgráfja G_v-nek, és legyen d a megőrzött dupla szín. Ha H-ban nincs* PP*-párosítás, akkor felbontható egy súlyzó és egy x_0-on és X_0-on kívül minden pontot fedő párosítás uniójára.*

Bizonyítás: jelölje az x_0-ból induló élek színeit d, d_1 és s, az X_0-ból indulóékat pedig d, d_2 és s'. Persze lehet, hogy $d_1 = d_2$. Hagyjuk el az x_0 és X_1 pontokat a gráfból. Húzzuk be a szaggatott $(l(d), r(d)), (l(s'), r(s))$ és $(l(d_2), r(d_1))$ éleket, ekkor egy H' 3-reguláris gráfot kapunk, melynek élei felbonthatók 3 teljes párosításra: M_1, M_2, M_3. Ha mind a három párosítás tartalmaz (pontosan egy) szaggatott élet, akkor az $(l(d), r(d))$ szaggatott élet tartalmazó párosítás PP-párosítás lesz, ellentmondás. Ezért valamelyik a három párosításból, mondjuk M_1, nem tartalmaz szaggatott élet, ez esetben $H \setminus M_1$ pont egy súlyzó lesz, míg M_1 a megfelelő párosítás. $\square$

1.3.1. Particionálás 3-reguláris gráfokra (egyszerű esetek)

Adott M párosítás esetében legyen az x_0-t fedő él színe a párosítás *bal* színe, míg az X_0-t fedő él színe legyen a párosítás *jobb* színe. TT-párosítások egy $\langle M_0, M_1, \ldots, M_{l-1}\rangle$ $(l > 1)$ sorozatát *l hosszú körnek* (vagy l-körnek) hívjuk, ha M_i jobb színe megegyezik M_{i+1} bal színével (az indexek mod$l$ értendők). Párosítások egy $\langle M_0, M_1, \ldots, M_{l-1}\rangle$ $(l > 1)$ sorozatát *l hosszú láncnak* (vagy l-láncnak) hívjuk, ha M_0 és M_{l-1} ST-párosítások, $M_1, M_2, \ldots, M_{l-2}$ TT-párosítások, és minden $0 \geq i - 2$-re M_i jobb színe megegyezik M_{i+1} bal színével.

Ezek után az l db párosítás csoportosítható PP-párosításokra, SS-párosításokra, körökre és láncokra. Mivel $S = D$, ezért a dupla és a szimpla színű élek aránya 2:1. A párosítások egyedüli csoportja, ahol ez az arány kisebb, az SS-párosítások és a 2-láncok. Ezért ha van olyan csoport, ahol a dupla színű élek száma több, mint kétszerese a szimpla színű éleknek, kell hogy legyen elegendő számú SS-párosítás és 2-lánc, hogy ellensúlyozza ezt.

A dupla színeket $a, a', b, b', \ldots$ betűkkel, a szimpla színeket s, s', t, t' betűkkel fogjuk jelölni. Például egy SS-párosítás s bal és s' jobb színekkel, egy 2-lánc, egy 3-lánc és egy 5-kör a következőképpen ábrázolható:

s		*s*	*a*		*s*	*a*	*b*		*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
s'		*a*	*s'*		*a*	*b*	*s'*		*b*	*c*	*d*	*e*	*a*

A következő párosítás-halmazok könnyen kombinálhatók SS-párosítással és 2-láncokkal úgy, hogy végül KS-részgráfokat kapunk.

Egy páros hosszú kör felosztható párosítások párjaira úgy, hogy ezen pároknak van közös dupla színe. Minden ilyen pár kombinálható vagy egy SS-párosítással (és így KS-részgráfot kapunk), vagy két db 2-lánccal (ekkor két KS-részgráfot kapunk). Például egy 4-kör kombinálható két 2-lánccal és egy SS-párosítással:

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{matrix} + \begin{matrix} s & e \\ e & s' \end{matrix} + \begin{matrix} t & f \\ f & t' \end{matrix} + \begin{matrix} u \\ u' \end{matrix} = \begin{matrix} u & a & b \\ u' & b & c \end{matrix} + \begin{matrix} s & e & c \\ e & s' & d \end{matrix} +$$

$$\begin{matrix} t & f & d \\ f & t' & a \end{matrix}$$

Vegyük észre, hogy mindig van elég SS-párosítás vagy 2-lánc a fent említett 2:1 összarány miatt. Ezért ha nincs már több SS-párosítás, akkor a kör minden megmaradó párosításához kell hogy legyen legalább egy 2-lánc.

Az is látható, hogy nem használtuk ki, hogy körről van szó, csak azt, hogy egy olyan láncról, amelynek az első és az utolsó párosítása is TT-párosítás. **Egy páratlan hosszú lánc** felbontható két részre. Az első két párosítás és az utolsó együtt egy KS-részgráfot alkot, ha tehát 3 hosszú volt a lánc, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor van páros sok TT-párosításunk úgy, hogy bármely két egymást követő párosításnak van közös dupla színe. Ezért ez a sorozat kezelhető ugyanúgy, mint egy páros hosszú kör a korábbi megjegyzés miatt.

Két páros hosszú lánc, melyek közül az egyik legalább 4 hosszú, szintén kombinálható SS-párosításokkal vagy 2-láncokkal. Legyen a hosszabbik lánc C_1, a másik C_2. Kombináljuk az első két C_1-párosítást C_2 utolsó párosításával, és C_2 első párosítását C_1 utolsó kettő párosításával. Mind a kettő egy KS-részgráfot eredményez. Marad egy vagy két páros hosszú TT-párosítás-sorozat, melyekben az egymást követő párosításoknak van közös dupla színe. Ezért megint kezelhetők úgy, mint a páros hosszú körök.

Egy 2-lánc és egy páratlan kör esetében a 2-lánc kombinálható a kör első párosításával, és ismét KS-részgráfot kapunk. A maradék párosítás-halmaz megint kezelhető úgy, mintha páros kör lenne.

Egy 2-lánc és egy PP-párosítás kiszínezhető új szín felhasználása nélkül. A PP-párosítást színezzük ki a dupla színével és mind a két 2-láncbeli párosítás színezetlen éleit színezzük meg a szimpla színével. Mivel ebben a részgráfban a színek száma összesen 4, a sorokban lévő színek számára tett megkötés automatikusan teljesül.

Két PP-párosítás és egy SS-párosítás szintén kiszínezhető új szín felhasználása nélkül. A PP-párosításokat megint a dupla színükkel színezzük, az SS-párosítást pedig valamelyik szimpla színével. Ismét csak 4 színt használtunk.

A fentieket tetszőleges sorrendben elég sokszor alkalmazva elérhető, hogy már csak SS-párosítások, legfeljebb egy PP-párosítás, legfeljebb egy db legalább 4 hosszú páros lánc és néhány páratlan kör maradjon. (Ha csak egy 2-lánc maradna, akkor paritási okokból kellene még maradnia vagy egy PP-párosításnak, vagy egy páros láncnak, viszont a 2-lánc bármelyikükkel kombinálható lenne). A következő alfejezet bemutatja, hogy lehet ezen megmaradó párosításokat megszínezni úgy, hogy ne sértsék meg a feltételeket.

1.3.2. Particionálás 3-reguláris gráfokra (nehéz esetek)

A továbbiakban feltételezzük, hogy a megmaradó körök és láncok nem tartalmaznak párhuzamos előre színezett éleket. Ellenkező esetben ugyanis az ilyen körök vagy láncok feloszthatók két körre (melyek közül az egyik páros hosszú lesz, így a fenti módszer működik rá) vagy egy körre és egy rövidebb láncra (vagy SS-párosításra) azáltal, hogy a párhuzamos éleket kicseréljük a két párosítás-halmazban. Például ha $r(b) = r(e)$ a következő példában, akkor egy 6-lánc felbomlik egy 3-láncra és egy 3-körre.

$$\begin{matrix} s & a & \boldsymbol{b} & c & d & \boldsymbol{e} \\ a & b & c & d & e & s' \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} s & a & \boldsymbol{b} \\ a & b & s' \end{matrix} + \begin{matrix} \boldsymbol{e} & c & d \\ c & d & e \end{matrix}$$

Először megmutatjuk, hogy színezünk meg két páratlan kört.

1.23. Lemma. *Ha adott egy $2i+1$ és egy $2j+1$ hosszú páratlan kör párhuzamos élek nélkül, és adott $i+j+1$ darab SS-párosítás, akkor ez az összesen $n = 3(i+j+1)$ párosítás megszínezhető legfeljebb $n/3$ új szín felhasználásával, és semelyik sor sem lát $\frac{4}{3}n$-nél több színt.*

Bizonyítás: Legyenek a körök C_1 és C_2. Ha C_1-nek egy előreszínezett éle párhuzamos C_2 egy előreszínezett élével, akkor egy C páros kört kapunk, ha ezen két élet kicseréljük a körökben. C pedig kiszínezhető fenti módszerrel. Ezért feltehető, hogy $C_1 \cup C_2$-ben nincs párhuzamos előreszínezett élpár.

Vegyünk egy M tetszőleges SS-párosítást s és s' előreszínezett élekkel. Válasszunk C_1-ből egy olyan M_1 párosítást a és b színekkel, melyek előreszínezett élei nem párhuzamosak az M-beli s-sel vagy s'-vel. Válasszunk C_2-ből egy M_2 párosítást hasonlóan a' és b' színekkel. Ilyen párosítások léteznek, mivel mindkét kör legalább 3-hosszú és nincs bennük párhuzamos előreszínezett él. Következésképpen $|\{r(s), r(a), r(a')\}| = 3$ és $|\{l(s'), l(b), l(b')\}| = 3$.

Tekintsük a $H = M \cup M_1 \cup M_2$ 3-reguláris gráfot. Töröljük el az x_0 és X_0 pontokat, és húzzuk be az $(r(a), l(b'))$, $(r(a'), l(b))$ és $(r(s), l(s'))$ szaggatott éleket. A kapott H' gráf szintén 3-reguláris lesz, és particionálható 3 teljes párosításra. Ha mind a három párosítás tartalmaz szaggatott élet, akkor H

felbomlik egy SS-párosításra s és s' előre színezett élekkel, valamint két TT-párosításra a, b' és a', b előre színezett élekkel. Ezeket az új TT-párosításokat használva össze tudom fűzni a két páratlan kört egy páros körré:

$$\begin{array}{ccc} \cdots & a & \cdots \\ \cdots & b & \cdots \end{array} + \begin{array}{ccc} \cdots & a' & \cdots \\ \cdots & b' & \cdots \end{array} \to \begin{array}{ccccc} \cdots & a & \cdots & a' & \cdots \\ \cdots & b' & \cdots & b & \cdots \end{array}$$

Ha valamelyik H'-beli párosítás nem tartalmaz szaggatott élet, akkor ezen párosítás és a maradék H-beli élek egy H_1 súlyzóra és egy H_2 párosításra bontják fel H-t. Ebben az esetben meg tudjuk H_1 éleit színezni pusztán az előre színezett élek színeit használva úgy, hogy a felső soron kívül semelyik sor sem lát 3-nál több színt. Ez azért lehetséges, mert kizártuk azt, hogy az előreszínezett élek párhuzamosak legyenek. Arra persze figyelni kell, hogy a dupla színeket óvatosan használjuk, hogy biztosan ne kerüljenek konfliktusba a nem H_1-beli a, a', b, b' színű élekkel. A részleteket [9]-ben a 3.7. lemma bizonyításában lehet megtalálni.

Ha H-t megszíneztük akkor a megmaradó $C_1 \setminus M_1$ és $C_2 \setminus M_2$-beli párosítás-sorozatok páros hosszúak, és az egymást követő párosításoknak közös dupla élük van, így a korábbiak alkalmazhatók rájuk. □

Mivel az előző lemma a páratlan körök színezését párosával megoldja, ezért maradtak SS-párosításaink, legfeljebb egy PP-párosításunk, legfeljebb egy páratlan körünk és legfeljebb egy páros láncunk. Ezenfelül a dupla színű élek száma osztható 4-gyel, mivel a dupla színek száma feltételezés szerint páros ($D = 2l$). Ezért csak a következő esetek maradhattak (a megfelelő számú SS-párosítással kiegészítve):

- egy PP-párosítás és egy páratlan hosszú kör,
- egy PP-párosítás és egy páros hosszú lánc,
- egy páratlan hosszú kör és egy páros hosszú lánc.

Ezeket az eseteket vizsgáljuk meg a következő 3 lemmában.

1.24. Lemma. *Ha adott egy* PP*-párosítás, egy* $2i + 1\,(i \geq 1)$ *hosszú kör párhuzamos előreszínezett élpár nélkül és* $i + 1$ *db* SS*-párosítás, akkor ez az összesen* $n = 3(i + 1)$ *párosítás kiszínezhető* $n/3$ *új színt használva úgy, hogy semelyik sor sem lát* $\frac{4}{3}n$*-nél több színt.*

Bizonyítás: Jelölje a PP-párosítást P, a dupla színét p. Válasszunk egy tetszőleges SS-párosítást s, s' szimpla színekkel. Vegyünk egy M' párosítást a körből a és b dupla színekkel úgy, hogy M' előreszínezett élei nem párhuzamosak az M-beli s, s' színű élekkel. Tekintsük a H 3-reguláris gráfot, melyet

P, M és M' uniójából nyerünk. Meg fogjuk színezni H maradék éleit a p, s, s' és legfeljebb egy új szín felhasználásával úgy, hogy a felső soron kívül semelyik sor sem lát 4-nél több színt. A PP-párosítás éleit színezzük meg p-vel, és $M \cup M'$-t pedig tekintsük úgy, mint egy kört (itt most a kör szót a „hagyományos" gráfelméleti értelemben használjuk). Legyen ez a kör C, és mivel nincsenek párhuzamos előre színezett élei, ezért C valóban megszínezhető egy új szín felhasználásával úgy, hogy a szemközti pontokból indul ki azonos színű él (a technikaibb jellegű részletek [9]-ben, a 3.8. lemma bizonyításában megtalálhatók). Így H szemközti pontjai valóban legalább két azonos színű él végpontjai, tehát a kapott színezés megfelel a feltételeknek.

Miután H-t megszíneztük, a megmaradó párosítás-sorozat páros hosszú, és az egymást követő párosításokban van közös dupla szín, így a megmaradó SS-párosításokkal KS-részgráfokká kombinálhatjuk őket. □

1.25. Lemma. *Ha adott egy* PP-*párosítás, egy* $2i\,(i \geq 2)$ *hosszú lánc párhuzamos élek nélkül és* $i-1$ *db* SS-*párosítás, akkor ez az* $n = 3i$ *db párosítás megszínezhető legfeljebb* $n/3$ *új szín felhasználásával, és az elsőn kívül semelyik sor sem lát* $\frac{4}{3}n$*-nél több színt.*

Bizonyítás: A bizonyítás hasonló az előző lemmáéhoz. Vegyünk egy tetszőleges M SS-párosítást s, s' szimpla színekkel. Legyen M' a második párosítása a láncnak a, b dupla színekkel. Ha $M \cup M'$ tartalmaz párhuzamos előre színezett éleket, akkor ezeket az éleket kicserélve, a láncból és az SS-párosításból egy 2-láncot és egy $2i-1$-láncot kapunk. Ezt az esetet meg már korábban tárgyaltuk, a $2i-1$ hosszú lánc megszínezhető a feltételeknek megfelelően, a 2-lánc pedig a PP-párosítással kombinálható.

Ezért feltehetjük, hogy $C = M \cup M'$ kör (mint gráf) nem tartalmaz párhuzamos előre színezett éleket. A PP-párosítást megszínezzük a dupla színével, C-t pedig [9] 3.8. lemmája alapján. A lánc első párosítását pedig az utolsó két párosításával kombinálva KS-részgráfot kapunk. Így egy páros hosszú párosítás-sorozatunk marad, melyben az egymást követő párosításoknak van közös dupla színe, ezért ezek kombinálhatók SS-párosításokkal a korábban leírt módon. □

1.26. Lemma. *Ha adott egy* $2i+1\,(i \geq 1)$ *hosszú kör, egy* $2j\,(j \geq 2)$ *hosszú lánc, mindkettő párhuzamos előre színezett élek nélkül, és* $i+j-1$ *darab* SS-*párosítás, akkor ez az* $n = 3(i+j)$ *párosítás megszínezhető legfeljebb* $n/3$ *új színt használva úgy, hogy a felsőn kívül semelyik sor sem lát* $\frac{4}{3}n$*-nél több színt.*

Bizonyítás: A bizonyítás hasonló a 1.23. lemma bizonyításához. Jelölje a kört C, a láncot N. Ha $C \cup N$ tartalmaz párhuzamos előre színezett éleket, akkor ezeket az éleket kicserélve egy $C \cup N$ páratlan hosszú láncot kapunk, így a korábbiak alapján kiszínezhető. Ezért feltehetjük, hogy $C \cup N$-ben nincsenek előre színezett párhuzamos élek.

Vegyünk egy tetszőleges M SS-párosítást s, s' szimpla színekkel. Válasszunk a körből egy M' párosítást a és b dupla színekkel úgy, hogy semelyik előre színezett éle nem párhuzamos s-sel illetve s'-vel (ilyennek a feltételek miatt léteznie kell). Legyen M'' a lánc második párosítása a' és b' dupla színekkel. Legyen $H := M \cup M' \cup M''$. Ha H-ban vannak párhuzamos előre színezett élek, akkor ezek vagy s és a' színűek, vagy s' és b' színűek. Mindkét esetben, kicserélve a párhuzamos előre színezett éleket, $N \cup M$-ből egy 2-láncot és egy $2j-1$ hosszú láncot kapunk. Mint azt már a 1.3.1. alfejezetben is leírtuk, a 2-lánc kombinálható C-vel és a $(2j-1)$-lánc kombinálható az SS-párosításokkal.

Ha H-ban nincsenek párhuzamos előre színezett élek, akkor megpróbáljuk egy H_1 súlyzóra és egy H_2 párosítás úniójára felbontani. Mint a 1.23. lemma bizonyításában, vagy létezik ez a partíció, és ekkor megszínezhető H a megfelelő módon, vagy H felbontható M_1, M_2 és M_3 párosítások úniójára úgy, hogy M_1 TT-párosítás a és b' dupla színekkel, M_2 TT-párosítás a' és b dupla színekkel és M_3 SS-párosítás s és s' szimpla színekkel. Ez utóbbi esetben cseréljük ki a „régi" párosításokat M_1-re, M_2-re és M_3-ra. Ekkor $C \cup N$-ből egy $2(i+j)+1$-lánc lesz, mely a 1.3.1. alfejezetben leírtak alapján megszínezhető. Ha pedig van $H_1 \cup H_2$ súlyzó-párosítás felbontás, akkor a maradék párosítások egyrészt egy páros hosszú sorozatot alkotnak, melyek egymást követő párosításainak van közös dupla színük, másrészt egy páros hosszú „lánc" a második párosítása nélkül. A sorozatot meg tudjuk színezni a már ismert módon, a majdnem-láncra pedig alkalmazhatjuk a 1.24. lemma bizonyítását. □

Ezzel befejeztük az algoritmust, $\frac{5}{3}l$ színnel minden legfeljebb l éltorlódású oda-vissza irányított fa megszínezhető. [14]-ben pedig megtalálható annak bizonyítása, hogy ennél jobb mohó algoritmus nem létezik, tehát a fenti algoritmus optimális a mohó algoritmusok között.

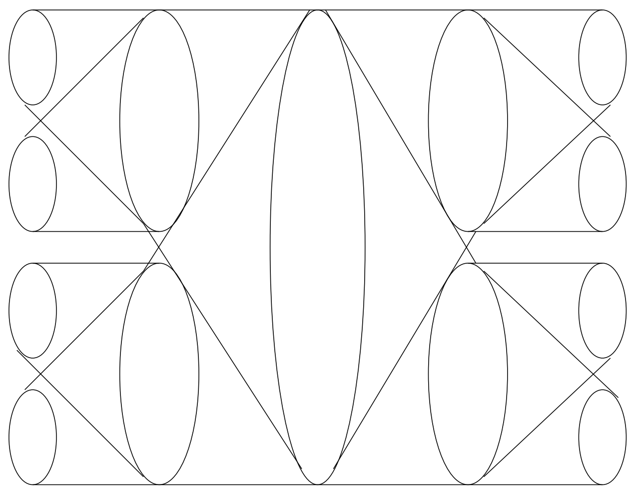
1.4. Speciális hálózatok

1.4.1. Multicasting eredmények

Ebben a fejezetben az igények időben folyamatosan érkeznek és szűnnek meg, tehát a modell on-line; valamint az eddigiektől eltérően egy igényt nem két pont ad meg, hanem ún. multicasting igényeink vannak: minden igényhez egy forrás és több nyelő tartozik, egy nyelő azonban csak egy forrástól kaphat információt, és egy forrás nem lehet egy másik igény egyik nyelője. A feladat természetesen az igények elvezetése és frekvenciakiosztása. Mivel egy igényhez több, mint két pont tartozhat, ezért ezeket a pontokat nem egy út, hanem egy fa fogja lefedni. Lássunk egy konstrukciót, amely a későbbi hálózatok megépítésekor fontos lesz.

1.27. Definíció. *Adott $\alpha > 0$, $\beta > 1$ valósokhoz azt mondjuk, hogy a G páros gráf (α, β)-expander U, V pontosztályokkal, ha minden $S \subseteq U$, $|S| \leq \alpha|U|$-ra S-nek legalább $\beta|S|$ szomszédja van V-ben.*

Expander-gráfok kombinálásával kaphatjuk az ún. *multi-Beneš* hálózatokat: a hálózat pontjait osszuk $2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) szintbe, ezeket a szinteket számozzuk $-k$-tól $+k$-ig. Minden szint tartalmazzon $T2^k$ pontot ($T \in \mathbb{N}$). Minden szint tovább van osztva osztályokra, az i-edik szint $2^{|i|}$ osztályba, egy szinten belül minden osztálynak legyen ugyanannyi pontja. Az élek csak a szomszédos szintek között mennek úgy, hogy bizonyos, szomszédos szinteken lévő osztályok alkossanak (α, β)-expander gráfot, $T \geq c(\alpha, \beta)$ konstans. Ha $-k \leq i \leq -1$, akkor az i-edik szint c-edik osztálya (ez legyen U) az $i+1$-edik szint $\lfloor c/2 \rfloor$-edik osztályával (ez legyen V) alkosson (α, β)-expander gráfot. Ha $i \geq 0$, akkor fordítva, ekkor természetesen az U pontosztály „jobbra" van a V pontosztálytól (3. ábra). A hálózatban α, β, T, k paraméterek mindössze annyi megkötéssel, hogy $T\alpha$ egész legyen.

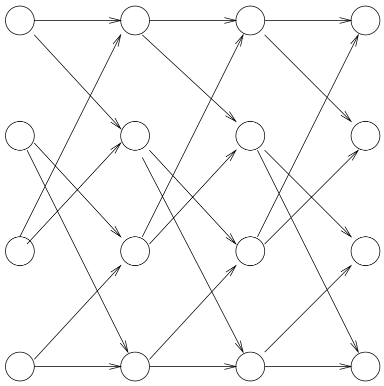


SZINTEK: $-k$ $\quad -k+1 \ldots\ldots\; 0 \ldots\ldots\; k-1 \quad k$

3. ábra. Multi-Beneš-hálózat

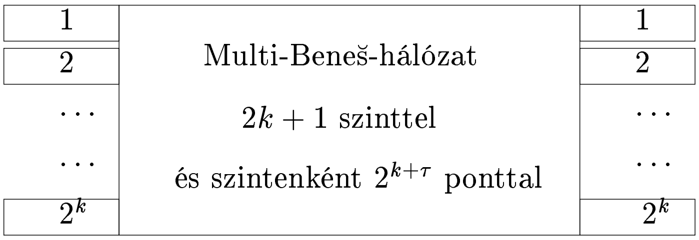
Ezek után lássuk az ún. tökéletes keverő hálózatot. Legyen adott $2^n \times 2^n$ pont, minden pontnak van egy sor- és egy oszlopindexe. Az i-edik oszlop

$(1 \leq i < 2^n)$ minden pontjából két él menjen az $i+1$-edik oszlop egy-egy pontjába: $x_{j,i}$-ből menjen él $x_{2j-1,i+1}$-be és $x_{2j,i+1}$-be (az indexek $\bmod 2^n$ értendők, 4. ábra).



4. ábra. Tökéletes keverő hálózat

Végül egy multi-Beneš hálózatból és $2 \cdot 2^k$ db $T \times T$-es tökéletes keverő hálózatból építsük fel a *keverő Beneš* hálózatot. Ehhez persze az kell, hogy T is 2-hatvány legyen, azaz $T = 2^\tau$ $(\tau \in \mathbb{N})$. A keverő-Beneš hálózat álljon $2(k+2^\tau)+1$ szintből, továbbra is minden szinten $2^{k+\tau}$ ponttal. Az első T szint és az utolsó T szint álljon párhuzamos tökéletes keverő hálózatokból, a középső $2k+1$ szint pedig alkosson egy multi-Beneš-hálózatot (5. ábra).



5. ábra. Keverő Beneš-hálózat

A hálózatot, amelyben ki szeretnénk mondani az állítást, úgy kapjuk meg, ha veszünk 3 db keverő Beneš-hálózatot, és ciklikusan egymás után fűzzük őket: az i-edik keverő Beneš-hálózat utolsó szintje legyen az $i+1$-edik (mod 3) keverő Beneš-hálózat első szintje. Ekkor a kapott hálózatnak $6(2^\tau + k)$ szintje van mindegyik szinten továbbra is $2^{\tau+k}$ ponttal. Erre a hálózatra a következő tétel igaz (a bizonyítás [22]-ben található meg):

1.28. Tétel. *Ha adott a fent definiált, 3 keverő Beneš-hálózatból álló hálózat, akkor benne tetszőleges on-line multicasting igény elvezethető úgy, hogy a felhasznált frekvenciák száma legfeljebb $C(\tau+k)^2/\alpha''$, ahol C a hálózatot felépítő expander-gráf paramétereitől függő konstans.*

Mivel $\tau+k$ nagyságrendileg $\log N$, ha N a pontok számát jelöli, ezért a tétel a felhasználandó színek számára egy $O(\log^2 N)$-es becslést ad. Az eredmény abszolút elméleti jelentőségű, mivel egyrészt a nagy konstans csak viszonylag kis hálózatot enged meg, másrészt a keverő Beneš hálózat a távközlésben gyakorlatilag nem fordul elő, mint optikai hálózat.

1.4.2. Nem-újrakonfigurálható hálózatok

Ebben a fejezetben egy, az eddigiektől teljesen eltérő modellt mutatunk be. Korábbiakban feltételeztük, hogy a routerek egyben kommunikációs adók illetve vevők is lehetnek. Most tételezzük fel, hogy adott külön-külön adók és vevők egy halmaza, és azt is tegyük fel, hogy az adók ill. vevők nem képesek kommunikálni bármely elérhető frekvencián, hanem csak néhányon, ez legyen az adó ill. vevő függvénye. Azt is feltesszük, hogy egy vevő egyszerre csak egy üzenetet képes venni, egy adó pedig csak egy frekvencián tud küldeni. Legyen továbbá adott egy (nem feltétlenül oda-vissza) irányított hálózat, amely routereken keresztül összekapcsolja az adókat a vevőkkel.

A routerekről is kevesebbet teszünk fel, mint eddig: ún. nem-újrakonfigurálható routereket engedünk meg a hálózatban. Ezekben a routerekben a be-éleken jövő információ nem mehet tovább akármelyik ki-élbe, hanem csak néhányba (esetleg csak egybe), minden bemenő élhez a hozzá tartozó kimenő élek halmaza gyárilag meg van határozva, tehát ha egyszer a routert elkészítették, ez nem változhat. Az olyan hálózatot, amely csak ilyen routereket tartalmaz, nem-újrakonfigurálható hálózatoknak hívjuk.

A fentiek azt jelentik, hogy a hálózat meghatározza azt, hogy melyik adó melyik vevőnek küldhet információt. Ezt nyilván egy páros gráffal jól lehet reprezentálni. Mi egy nagyon leegyszerűsített modellt fogunk vizsgálni, feltesszük, egyrészt minden adóból megy út minden vevőbe, másrészt minden adó minden vevővel külön-külön előre megegyezik abban, hogy milyen frekvencián fognak egymással kommunikálni. Feltesszük továbbá, hogy ugyanannyi adó van, mint vevő, és egy kommunikációs igényhalmaz egy bijekciót jelent az adók és vevők halmaza között.

Legyen M_{ij} egy $n\times n$-es ún. *kommunikációs mátrix*, amelynek $M(i,j)$ eleme azt mutatja meg, hogy az i-edik adó a j-edik vevővel milyen frekvenciában egyezett meg. Mivel egy vevő egyszerre csak egy üzenetet képes fogadni, ezért ha van egy olyan igény, amelyben i_1 küld j_1-nek, i_2 küld j_2-nek, és mind a két adó λ frekvencián küldi a jelet, akkor nem lehet az, hogy i_1 és j_2, vagy i_2 és j_1 egymással szintén a λ frekvenciában egyeztek meg.

Ezek után azonnal adódik a kérdés: ha olyan megegyezést keresünk az adók és vevők között, hogy *bármely* bijekció esetén tudjanak egymással kommunikálni, akkor hány frekvencia szükséges és elégséges a hálózat működtetéséhez?

A következő lemma átfogalmazza a problémát a kommunikációs mátrixra:

1.29. Lemma. *Pontosan akkor működtethető a hálózat m frekvenciát használva a fenti feltételek betartásával, ha egy $n\times n$-es mátrix minden mezőjét ki tudjuk tölteni m különböző szám valamelyikével úgy, hogy a $\lambda = M(i,j) = M(i,l) = M(k,l)$ egyenlőség nem teljesül (egyszerre) semmilyen $1 \geq i,j,k,l \geq n$-re $(i \neq k, j \neq l)$.*

1.30. Tétel. *$n = 4$-re és $n \geq 6$-ra legalább $\lceil n/2\rceil + 2$ szám kell egy $n \times n$-es kommunikációs mátrix kitöltéséhez ahhoz, hogy a hálózat tetszőleges igény esetén működőképes legyen.*

A bizonyítás [4]-ben található meg. Ez az eredmény azonban éles is:

1.31. Tétel. *$n \geq 4$ esetén $\lceil n/2\rceil + 2$ számmal kitölthető az $n\times n$-es kommunikációs mátrix úgy, hogy a hálózat tetszőleges igény esetén működőképes.*

Bizonyítás: 5×5-ös mátrixot 4 számmal is ki tudunk tölteni a megfelelő módon, ezt és 4×4-es és 6×6-os mátrixra a megfelelő kitöltést a 1. táblázat mutatja.

1. táblázat.

1	2	4	3
2	1	3	4
4	3	1	2
3	4	2	1

1	1	3	0	2
3	0	1	1	2
2	2	3	0	1
3	0	2	2	1
0	3	0	3	1

0	0	4	|	2	1	3
1	4	0	|	2	3	1
4	1	0	|	3	2	2
–	–	–	|	–	–	–
2	1	3	|	0	0	4
2	3	1	|	1	4	0
3	2	2	|	4	1	0

Általában pedig páros n-re a következő a módszer: írjunk 0-t minden $1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$-re az $M(1,i)$ mezőbe, minden $2 \leq j \leq \frac{n}{2}$-re az $M(j, \frac{n}{2})$ mezőbe, minden $\frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n - 1$-re az $M(\frac{n}{2}+1, i)$ mezőbe, végül minden $\frac{n}{2} + 2 \leq j \leq n$-re az $M(j,n)$ mezőbe. Látható, hogy ekkor $\lambda = 0$-ra teljesülnek a 1.29. lemma feltételei. $\lambda = 1, 2, \ldots \frac{n}{2} - 1$-re pedig válasszunk ki egy 0-val kitöltött mezőt, és a sorindexéhez adjunk hozzá λ-t, az oszlopindexéből pedig vonjunk ki λ-t (minden művelet modulo n értendő). Könnyű meggondolni, hogy ezzel nem lesz olyan mezője a mátrixnak, ahova több, mint 1 számot szeretnénk írni (a 0-k ügyes felvétele miatt). Másrészt ha valamely $1 \leq \lambda$-ra megsérülnének a 1.29. lemma feltételei, akkor $\lambda = 0$-ra is megsérülne, ami ellentmondás lenne.

Az az állításunk, hogy ezután pontosan az $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$-es sarokrészmátrixok mellékátlói nincsenek kitöltve. Ugyanis ezek a mezők zártak arra a műveletre nézve, hogy hozzáadunk a sorindexhez egy tetszőleges egész számot, és az oszlopindexből kivonjuk ugyanezt a számot. Mivel 0-t nem írtunk ezekbe az mezőkbe, így a fenti módon semmilyen λ nem kerülhet oda. Viszont mivel a mátrix többi mezőjébe nem írtunk két különböző számot, ezért ezen a $2n$ elemen kívül nem lehet üres mező.

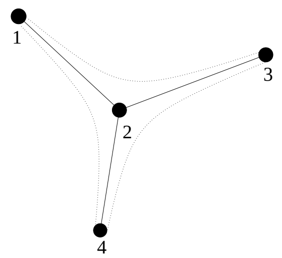
Így a maradék két szabad számmal töltsük ki az üres mezőket: a bal felső és a jobb alsó $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$-es sarokrészmátrix mellékátlóját $\lambda = \frac{n}{2}$-vel, a többi elemet, azaz a teljes mátrix mellékátlóját $\frac{n}{2} + 1$-gyel.

Páratlan n-re pedig először azt kell észrevenni, hogy $\lceil \frac{n}{2} \rceil > \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, tehát eggyel több számot használhatunk, mint a páros $n-1$-re. Vegyünk tehát egy $n \times n$-es mátrixot, a bal alsó $(n-1) \times (n-1)$-es részmátrixát töltsük ki jól $\frac{n-1}{2}+2$ számmal (0-tól $\frac{n-1}{2}+1$-ig), az $M(1,n)$ mezőbe kerüljön $\frac{n-1}{2}+1$, a többi mezőbe pedig kerüljön az „új" szám, $\frac{n-1}{2} + 2$. Könnyen látható, hogy a kapott mátrix valóban teljesíti a kívánt feltételeket, ezzel az állítás bizonyítást nyert. $\square$

2. Konverzió

2.1. A probléma felvetése

Az eddigi eredmények is jól tükrözik, hogy egy hálózatban felhasználandó frekvenciák optimális száma (jóval) több lehet, mint a maximális torlódás. Erre a legegyszerűbb példa az irányítatlan háromágú csillag, mint hálózat, igény bármely két levél között van (6. ábra). Ekkor látható, hogy bár a torlódás csak kettő, három színre van szükség az utak megszínezéséhez.



6. ábra. Egyszerű példa konverter szükségességére

Mivel a felhasználható frekvenciák száma véges (a mai legjobb optikai kábelek néhány száz frekvenciasávot tudnak használni egyszerre, és egyelőre nincs sok esély ennek drasztikus növelésére), ezért a torlódáshoz képest túl sok frekvenciát igénylő kommunikáció-halmaz esetén új technikai eszközre van szükség. A megoldást az ún. *konverterek* jelentik. A konverterek speciális routerek, alkalmasak arra, hogy a rajtuk átmenő kommunikációs utak frekvenciáját megváltoztassák, amivel természetesen csökkentik a hálózatban felhasználandó frekvenciák számát. Például ha a fenti ábrában a 2-es csúcsban elhelyezünk egy konvertert, akkor az 1–4 utat kékre, 1–3 utat pirosra, a 3–4 utat 3 és 2 között kékre, majd 2 és 4 között pirosra színezve két szín elég (a konverter megváltoztatja a 3–4 út színét a 2-es pontban).

Természetesen sokféle típusú konverter létezik attól függően, hogy milyen színű fényt milyen színűvé képes átalakítani. Mi egyelőre feltesszük, hogy minden konverzió *teljes*, azaz a konverter tetszőleges rajta átmenő kábelen képes tetszőleges színről tetszőleges színre konvertálni. Mindez gyakorlatilag azt jelenti, hogy az adódó kommunikációs utakat elvágják a konverterek, és a szakaszoknak egymástól függetlenül kell frekvenciát kiosztani. Mivel a konverterek drága berendezések, ezért a számukat minimalizálni kell, ami újabb matematikai problémát vet fel.

2.2. A modell

2.1. Definíció. *Legyen adott egy (irányított vagy irányítatlan) hálózat, és a pontoknak egy S részhalmaza. Azt mondjuk, hogy az S halmaz elégséges, ha S pontjaiba konvertert elhelyezve* tetszőleges *elvezetés megszínezhető annyi színnel, amennyi a torlódás a hálózatban. A továbbiakban ezentúl a torlódást l-lel jelöljük.*

Természetesen alapvető kérdés lehet egy minimális nagyságú elégséges halmaz megtalálása, vagy annak közelítése. Irányítatlan hálózatokban az alábbi lemma megoldja a problémát.

2.2. Lemma. *Irányítatlan hálózatokban a minimális nagyságú elégséges halmaz tartalmaz minden legalább harmadfokú pontot.*

A bizonyításhoz csak a 6. ábrára kell gondolnunk. Az is látható, hogy a legalább harmadfokú pontok elégséges halmazt alkotnak, így irányítatlan hálózatokban megoldottuk a minimális nagyságú elégséges halmaz problémáját. Azonban az összes legalább harmadfokú pont egy hálózatban általában sok pontot jelentene, tehát gyakorlati szempontból nem nyertünk sokat.

Ezért irányított hálózatokat fogunk vizsgálni. A modell tehát a következő: adott egy $G(V, E)$ irányított gráf. Keresendő V-nek egy részhalmaza, amely minimális nagyságú a következő tulajdonságra nézve: akárhogy adunk meg (irányított) utakat a gráfban, V-ben konvertereket elhelyezve meg lehet színezni az utakat l színnel.

Két pont között mehet mindkét irányban él, de azt feltesszük, hogy egy irányban csak egy él megy két pont között (nincsenek párhuzamos egyirányú élek). Ha egy hálózatban egy irányított éllel együtt az ellentétes irányítású él is benne van a hálózatban, akkor együtt *oda-vissza irányított* élnek nevezzük ezeket az éleket. Egy út oda-vissza irányított, ha minden éle oda-vissza irányított. A továbbiakban feltesszük, hogy a hálózat gyengén összefüggő.

Mind oda-vissza irányított gráfokban, mind a további fejezetekben nagy szerepe lesz a következő definícióknak:

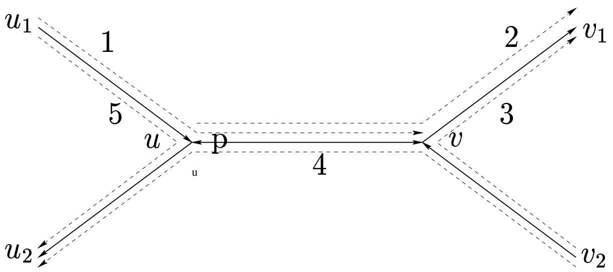
2.3. Definíció. *Legyen $G(V, E)$ irányított gráf. Ekkor G* váza *jelentse a következő irányítatlan gráfot:*

$$s(G) = (V_s, E_s)), \quad V_s = V, \ (u, v) \in E_s \iff (u, v) \in E \vee (v, u) \in E$$

2.4. Definíció. *A G gráf egy v pontját* elágazó pontnak *hívjuk, ha $s(G)$-ben a foka legalább 3,* levélnek *hívjuk, ha $s(G)$-ben a foka 1. Egy G gráfot* póknak *nevezünk, ha $s(G)$-ben nincs kör, és legfeljebb egy elágazó pontja van.*

A fejezet további részében ha egy gráf valamely pontjának fokáról lesz szó, akkor mindig a megfelelő vázbeli pont fokára fogunk gondolni.

2.5. Definíció. *Vegyünk egy P oda-vissza irányított utat, amelynek minden belső pontja másodfokú G vázában, az u és v végpontjából menjen ki egy-egy él az u_2, v_1 pontokba, u-ba és v-be menjen be egy-egy él az u_1, v_2 pontokból ($u_i \notin P$, $v_i \notin P$), és nem engedjük meg az $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ egyenlőségeket (7. ábra). A gráfot χ-gráfnak nevezzük, az oda-vissza irányított P út pedig a χ-gráf* karakterisztikus útja.



7. ábra. χ-gráf

A 7. ábra megad egy elvezetést a χ-gráfban, amelyet nem lehet annyi színnel megszínezni, mint amennyi a torlódás. Tehát konvertert kell elhelyezni, erre a karakterisztikus út bármely pontja megfelel, és csak ezek a pontok felelnek meg. A definíció közvetlen következménye az alábbi lemma:

2.6. Lemma. *(i) Ha a K gráf χ-gráf G-ben P karakterisztikus úttal, akkor nincs olyan $G \setminus P$-beli él, amely szomszédos P egy belső pontjával.*
(ii) Két χ-gráf karakterisztikus útja éldiszjunkt.

2.3. Elégséges halmazok irányított gráfokban

2.7. Tétel. *Irányított hálózatban a minimális elégséges halmaz megtalálása $\mathcal{NP}$-nehéz probléma.*

A bizonyítást a következő alfejezet végén részletezzük. A probléma nehézsége miatt approximációs algoritmusokkal fogunk foglalkozni, egy 2-approximációját adjuk meg a problémának.

2.3.1. Oda-vissza irányított gráfok

Először csak olyan gráfokkal foglalkozunk, melyben minden szomszédos pontpár között mindkét irányban megy él. Vegyük észre, hogy feltehető, hogy van elágazó pontunk, különben vagy egy út vagy egy kör lenne a hálózat. Útban a minimális elégséges halmaz az üres halmaz, ugyanis ekkor a konfliktusgráf két darab pontdiszjunkt intervallum-gráf lesz, az intervallum-gráf pedig megszínezhető annyi színnel, ahány pontú a maximális klikk. Mivel az intervallum-gráfok színezését közvetett módon még sokat fogjuk használni, ezért mondjunk ki egy lemmát:

2.8. Lemma. *Ha egy intervallum-gráf egy klikkje jól meg van színezve, akkor ez a színezés kiterjeszthető az egész gráf egy jó színezésévé úgy, hogy a színek száma egyenlő a maximális klikk méretével, és ezt a jó színezést mohón meg is kapjuk.* □

2.9. Megjegyzés. *A lemma első része (hogy ti. egy klikk jó színezése kiterjeszthető az egész gráf egy legkevesebb színt használó jó színezésévé) tetszőleges gráfra igaz.*

Ha a hálózat kör, akkor látható, hogy szükség van konverterre (és egy konverter elégséges is), mert ha mondjuk n pontú a kör ($n \geq 3$), és 0-tól $n-1$-ig megszámozzuk a pontokat, akkor a következő elvezetés torlódása 2, de 3 szín kell a megszínezéshez: az első út menjen 0 és $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$ között, a második $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ és $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1$ között, a harmadik pedig $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ és 1 között (mind a három esetben az $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$ vagy $\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$ hosszú útra gondolunk).

Azt pedig könnyű látni, hogy a körben *bármelyik* pontban elhelyezve egy kovertert már mindig elég annyi szín, amennyi a torlódás, mert gyakorlatilag a konverter „szétvágja” a gráfot, tehát egy út lett a körből.

Tehát feltehető, hogy van elágazó pontja a hálózatnak, és azt is megmutattuk, hogy ha van benne kör, akkor arra kell konvertert helyezni.

2.10. Állítás. *Ha a hálózat pók, akkor az üres halmaz elégséges.*

Bizonyítás: legyen a v pont a pók elágazó pontja, tekintsük a 1.3. fejezetben leírt G_v páros gráfot. Ekkor G_v maximális foka l, tehát élei megszínezhetők l színnel, mivel előre színezett élek nincsenek. Így az elágazó pontot tartalmazó utak megszínezhetők l színnel. A 2.8.lemma alapján azt pedig könnyű végiggondolni, hogy a többi elvezetést egyszerűen mohón meg lehet színezni, mivel azoknak az elvezetéseknek a konfliktus-gráfja, melyeknek az egyik végpontja a pók egy rögzített lábának v-től különböző pontja, intervallum-gráf lesz, és ebben egy klikk lesz a v-t tartalmazó elvezetések konfliktus-gráfja.

2.11. Definíció. *Legyen G egy irányított gráf (esetleg oda-vissza irányított élekkel), legyen egy pontja v, ezen pont szomszédai legyenek $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Ekkor G-ben a v pont szétvágásán a következő gráfot értjük: tekintjük a $G \setminus v$ gráfot, ehhez hozzávesszük még a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ pontokat, és egy G-beli $u_i v$ (vu_i) élnek megfelel egy $u_i v_i$ ($v_i u_i$) él.*

Vegyük észre, hogy a fenti módon pontosan akkor kapunk több komponenst, ha v elvágó pont volt az eredeti gráfban.

2.12. Lemma. *Legyen G egy oda-vissza irányított gráf. Ekkor $S \subseteq V$ pontosan akkor elégséges, ha az S-beli pontok szétvágása után minden összefüggő komponens pók.*

Bizonyítás: A vissza irányt az előbb láttuk. Az oda irányhoz emlékezzünk arra, hogy ha egy komponens vázában lenne kör, akkor abba még el kellene helyezni kovertert, tehát a komponensek váza biztos, hogy fa. Tegyük fel, hogy van olyan komponens, amely nem pók, azaz van legalább két elágazó pontja. Vegyünk tehát két legközelebbi elágazó pontot (u és v). Ekkor – az oda-vissza irányítottság miatt – az őket összekötő út karakterisztikus útja lesz egy χ-gráfnak (mivel a váz fa), ellentmondás. $\square$

2.13. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy elégséges halmaz* kanonikus, *ha csak elágazó pontot tartalmaz.*

2.14. Állítás. *Legyen G oda-vissza irányított gráf (és legyen elágazó pontja). Ha S elégséges halmaz G-ben, akkor van olyan S' elégséges halmaz is G-ben, amelyre $|S'| \leq |S|$, és S' csak elágazó pontot tartalmaz.*

Bizonyítás: könnyű végiggondolni, hogy ha egy ponthalmaz elégséges, és tartalmaz levelet, akkor a leveleket elhagyva is elégséges marad. Tehát hagyjuk el a leveleket az elégséges halmazból, ha pedig egy másodfokú pontba helyezett konvertert átteszünk egy legközelebbi elágazó pontba, akkor a kapott halmaz még mindig elégséges lesz. $\square$

Konstruáljunk egy H gráfot a következő módon. Legyenek H pontjai G elágazó pontjai, és u és v különböző H-beli pontok között akkor menjen él, ha u és v között van olyan út G-ben, amelynek minden belső pontja másodfokú $s(G)$-ben. Ha pedig u olyan elágazó pont G-ben, hogy rajta van egy olyan körön, melynek u az egyedüli elágazó pontja, akkor H-ban tegyünk egy hurokélt u-ra.

2.15. Tétel. *Legyen G egy oda-vissza irányított gráf, amelyben létezik elágazó pont. Egy $S \subseteq V(G)$ halmaz pontosan akkor kanonikus elégséges, ha S lefogó ponthalmaz H-ban.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy S kanonikus elégséges halmaz G-ben, de nem lefogó ponthalmaz H-ban. Ez azt jelenti, hogy van olyan (u, v) él H-ban, hogy sem u, sem v nincs benne S-ben. H definíciója miatt ha $u \neq v$, akkor u és v között megy G-ben (oda-vissza irányított) út, melynek minden belső pontja másodfokú. Mivel u és v elágazó pontok, ezért ez az út karakterisztikus útja lesz egy χ-gráfnak (az oda-vissza irányítottság miatt), amin viszont nincs konverter, ellentmondás. Ha $u = v$, akkor pedig van egy olyan kör G-ben, amin nincs konverter, ellentmondás.

Fordítva, tegyük fel, hogy S lefogó ponthalmaz H-ban, de nem elégséges G-ben. Ez azt jelenti a 2.12. lemmából, hogy S pontjait szétvágva lesz nempók az összefüggő komponensek között. Mivel G váza összefüggő és nem kör, és az S-nek megfelelő pontok elágazók G-ben, ezért a szétvágás után a komponensek között nem lehet kör. Tekintsünk tehát egy komponenst, és vegyük egy v elágazó pontját (ami – a fentiek miatt – létezik). Nyilván $v \notin S$, mert különben a komponensben v nem lehetne elágazó pont. Ha ő az egyedüli elágazó pont a komponensben, akkor – mivel a komponens megsérti a feltételt – van egy kör a komponensben, aminek v pontja. Ekkor viszont ennek a körnek megfelel egy v végpontú hurokél H-ban, amit nem fed le S, ellentmondás. Ha van egy másik u elágazó pont is a sértő komponensben, akkor nyilván ő sem lehet benne S-ben. Vegyünk két minimális távolságú elágazó pontot G-ben, nyilván az őket összekötő út minden belső pontja másodfokú. Ennek az útnak viszont megfelel egy él H-ban, ami nincs lefedve, ellentmondás. $\square$

Felhasználva azt, hogy lefogó ponthalmaz megtalálására van 2-approximáció ([26]), azt kaptuk, hogy oda-vissza irányított gráfokban a minimális elégséges halmaz megtalálására létezik 2-approximáció. Másrészt tetszőleges H irányítatlan (esetleg hurokélet tartalmazó) gráfhoz konstruálható megfelelő G gráf. Ha ugyanis veszünk annyi pontot, amennyi pontja H-nak van, és minden élnek megfeleltetünk egy oda-vissza irányított utat, minden ponthoz illesztünk még két levelet, és a hurokélek végpontjainak megfelelő pontokra illesztünk egy kört (bármely két szomszédos pont között mindkét irányba menjen él), akkor az így kapott G gráf egy minimális elégséges halmazának minimális lefogó ponthalmaz felel meg H-ban. Ezzel bebizonyítottuk az alábbi tételt:

2.16. Tétel. *Ha van polinomiális c-approximáció a minimális elégséges halmaz problémára oda-vissza irányított gráfokban, akkor van polinomiális c-approximáció a minimális lefogó ponthalmaz problémára is.*

2.17. Megjegyzés. *A 2.16. tételből és a [25]-ban lévő eredményből együtt azt is megkaptuk, hogy nemcsak irányított gráfokban, hanem oda-vissza irányított gráfokban is a minimális lefogó elégséges megtalálása $\mathcal{NP}$-nehéz.*

2.3.2. Általános gráfok

Ebben a fejezetben nem tesszük fel, hogy bármely két szomszédos pont között mindkét irányba megy él, de azt továbbra is feltesszük, hogy egy irányban nem mehetnek párhuzamos élek. Először igazoljunk egy lemmát.

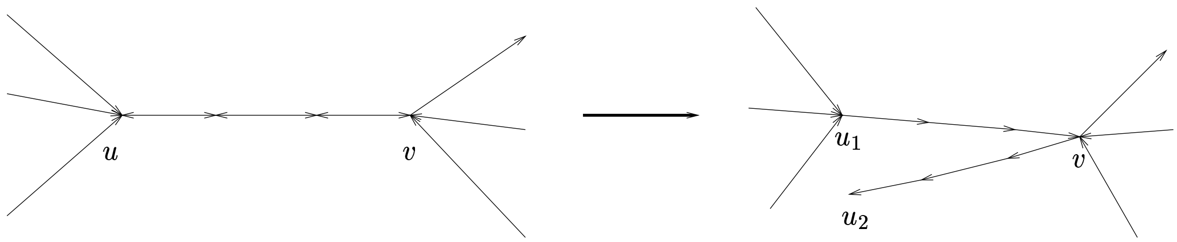
2.18. Lemma. *Tegyük fel, hogy $s(G)$ fa. Ekkor az üres halmaz pontosan akkor elégséges, ha G-ben nincs χ-gráf.*

Bizonyítás: Azt már láttuk, hogy ha az üres halmaz elégséges, akkor nem lehet χ-gráf a fában. Fordítva, tegyük fel, hogy nincs χ-gráf a fában. Legyen n pontja a fának, n szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Nyilván $n = 1, 2, 3$-ra triviálisan teljesül.

Ha van olyan (u, v) éle a gráfnak, amelyre sem u, sem v nem levél (azaz ún. belső él), és $(v, u) \notin E(G)$, akkor készen vagyunk. Ugyanis töröljük el ezt az élet a gráfból, és a kapott G_1, G_2 komponensekhez pedig adjuk hozzá különkülön a v' és u' pontokat, és vegyük be az uv' illetve $u'v$ éleket. Mivel (u, v) belső él volt, ezért a kapott gráfok kevesebb pontszámúak, mint G. Szorítsuk meg a G-beli utak rendszerét ezen G_1 és G_2 gráfokra: ha van olyan út, amely átment (u, v)-n, akkor ennek az útnak csak azon éleit hagyjuk meg, amelyek benne vannak a megfelelő részgráfban. Az indukciós feltevés miatt ezeket az utakat meg tudjuk színezni l színnel. Ez a színezés pedig kiterjeszthető a G-beli utak megszínezésévé, ugyanis először átnevezzük a színeket az egyik gráfban úgy, hogy a kevesebb elemszámú színhalmaz részhalmaza legyen a nagyobb elemszámúnak, majd úgy permutáljuk meg az egyik halmazban a színek neveit, hogy minden G-beli elvágott útból kapott két út ugyanazt a színt kapja.

Ezért feltehető, hogy minden belső (ti. nem levél végpontú) éle a fának oda-vissza van irányítva. Ha G-ben csak egy elágazó pont van, akkor G pók, és ezért nem kell konverter. Ha pedig van legalább két elágazó pont, akkor vegyünk két minimális távolságút, az őket összekötő út minden éle oda-vissza van irányítva, és csak $s(G)$-ben másodfokú pontokat tartalmaz. És mivel G-ben nincs χ-gráf, ezért legalább az egyik elágazó pontra igaz – legyen ez mondjuk u –, hogy vagy minden u-ra illeszkedő él u felé van irányítva, vagy mindegyik u felől van irányítva. Szimmetria miatt feltehető például az előbbi eset.

Mint a 8. ábrán is látható, csináljunk az $u - v$ út minden v-n kívüli pontjából két pontot, u-ból legyen u_1 és u_2, az oda-vissza irányított útból csináljunk két irányított utat úgy, hogy az $u_1 - v$ út v felé legyen irányítva, a másik út v felől legyen irányítva.
A kapott gráf legyen G'. Annyit kell észrevenni, hogy minden G-beli útnak megfeleltethető egy G'-beli úgy, hogy a torlódás és a konfliktus-gráf nem



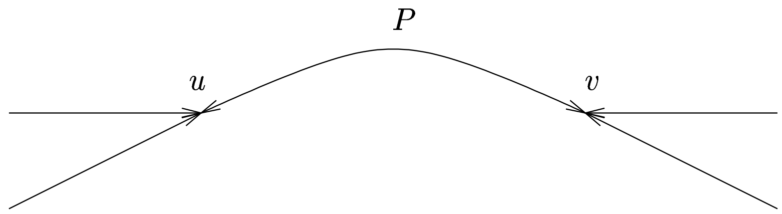
8. ábra.

változik meg. Mivel G'-nek van egyirányú belső éle, ezért alkalmazható rá az indukció, ezzel készen vagyunk (mivel u és v elágazó pontok voltak, tehát a szétvágás után tényleg kevesebb pontja lesz a gráfoknak). □

Most tekintsük azt az esetet, amikor $s(G)$-ben van kör. Nyilván nem kell, hogy egy elégséges halmaz minden $s(G)$-beli kört fedjen, azonban transzformációk sorozatával el szeretnénk érni, hogy a kapott gráfra igaz legyen, hogy benne egy halmaz pontosan akkor elégséges, ha minden χ-gráf karakterisztikus útját illetve minden $s(G)$-beli kört lefed.

Azt mondjuk, hogy egy G-beli pont *konvergáló pont* ha forrás vagy nyelő, azaz minden él felé vagy minden él tőle van irányítva, és nem levél. *Lezárt útnak* hívjuk a következő gráfot: adott egy P oda-vissza irányított út u és v végpontokkal, belső pontjainak a foka kettő, és vagy minden P-n kívüli, u-val ill. v-vel szomszédos él P felé van irányítva (9. ábra), vagy az összes P felől van irányítva.

2.19. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a G irányított gráf* robosztus, *ha nem tartalmaz sem konvergáló pontot, sem lezárt utat.*



9. ábra. Lezárt út

Ezek után nézzük meg vázlatosan, hogyan fogjuk megközelíteni a problémát:
– megmutatjuk, hogy egy minimális elégséges halmaz G bizonyos pontjait nem tartalmazhatja,

- transzformációk sorozatával átalakítjuk G-t robosztus gráffá,
- megmutatjuk, hogy a konfliktus-gráf és a minimális elégséges halmaz mérete ezzel nem változott meg,
- bebizonyítjuk, hogy ebben a gráfban pontosan akkor elégséges egy halmaz, ha minden vázban lévő kört és minden karakterisztikus utat lefed,
- visszavezetjük a problémát irányítatlan gráfban minden kört fedő minimális ponthalmaz keresésére.

2.20. Lemma. *Ha S minimális elégséges halmaz, akkor nem tartalmazhat konvergáló pontot.*

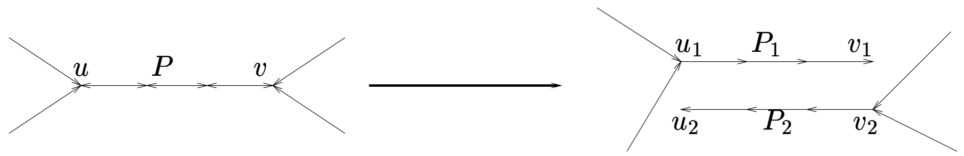
Ez persze triviálisan igaz, mivel nem létezik olyan út, mely átmegy egy konvergáló ponton.

Ezek után alkalmazzuk a következő transzformációkat: a konvergáló pontokban vágjuk szét a gráfot a már korábban leírt módon. Az így kapott gráfban a lemma miatt ugyanakkora a minimális elégséges halmaz.

A lezárt utakat szintén vágjuk szét a következőképpen (tegyük fel, hogy a P-n kívüli, u-val és v-vel szomszédos élek P felé vannak irányítva, a fordított eset hasonlóan oldható meg): u helyett vegyük fel az u_1, u_2 pontokat, hasonlóan v helyett a v_1, v_2 pontokat, és ezt tegyük meg az u-t v-vel összekötő út minden pontjával. P-nek feleljen meg egy u_1-ből v_1-be irányított P_1 út, és egy v_2-ből u_2-be irányított P_2 út. Az u-ba menő nem P-beli éleknek feleljenek meg u_1-be menő élek, a v-be menő nem P-belieknek pedig v_2-be menő élek (10. ábra). Legyen a kapott gráf G', ekkor a G-beli elvezetések megfeleltethetők G'-beli elvezetéseknek, és az is látható, hogy a konfliktus-gráf nem változik meg. A szétvágás az alább lemmát is bebizonyította:

2.21. Lemma. *Legyen P egy lezárt út G-ben, S minimális elégséges halmaz. Ekkor S nem tartalmazza P-nek pontját.*

Ennek következtében a szétvágással a minimális elégséges halmaz nagysága sem változhat meg. Így a konvergáló pontok szétvágásával és a lezárt utak megszüntetésével elérhető, hogy G-ből egy olyan G' gráfot kapjunk, amely robosztus, és a konfliktus-gráfja ugyanaz, mint G-jé.



10. ábra.

Ezek után következzék az „alaptétel”:

2.22. Tétel. *Legyen $G(V, E)$ irányított robosztus gráf. Ekkor tetszőleges elégséges halmaznak tartalmaznia kell legalább egyet minden $s(G)$-beli kör pontjaiból.*

Bizonyítás: Először is vegyük észre, hogy a tételt elég bebizonyítani olyan körökre, amelyeknek megfelelő $s(G)$-beli körben nincs átló, azaz a kör pontjai által feszített részgráf maga a kör.

Legyen tehát C egy G-beli kör, aminek a $s(G)$-beli megfelelőjére fennáll ez a tulajdonság. Nyilván C tartalmazhat oda-vissza éleket és egyirányú éleket is, mindenesetre ha van benne irányított kör, akkor biztos, hogy kell konverter, ezért feltehető, hogy nincs benne irányított kör. Ez azt jelenti, hogy mindkét körüljárási irányhoz létezik olyan él, amelynek az ellentettje nincs benne a körben (az (u, v) él ellentettje legyen a (v, u) él).

A lehető legjobban le szeretnénk egyszerűsíteni a gráfot, és megmutatni, hogy ha az egyszerű gráfban kell konverter, akkor az eredetiben is, majd az egyszerű gráfban konstruálunk olyan elvezetést, aminek a konfliktus-gráfja páratlan kör, ekkor készen leszünk.

A körben az olyan tartalmazásra nézve maximális irányított utakat, amelyeknek semelyik élére nincs benne az ellentétes irányítású él a körben, húzzuk össze egy irányított éllé. Arra ügyeljünk (mivel igazából nem valódi értelemben vett összehúzásról van szó, tehát az eredmény nem egyértelmű), hogy az út pontjait fedő nem körbeli éleket megfelelő pontot fedjenek az összehúzás után is: ha egy él az út felé volt irányítva, akkor mutasson az összehúzott él végpontjába, ha egy él az út felől volt irányítva, akkor mutasson az összehúzott él kezdőpontja felől. Az összehúzással lezárt utat biztos, hogy nem kapunk, konvergáló pontot pedig azért nem kaphatunk, mert a körön egy olyan út végpontjai, mint amilyet összehúztunk, nem voltak konvergáló pontok az eredeti gráfban.

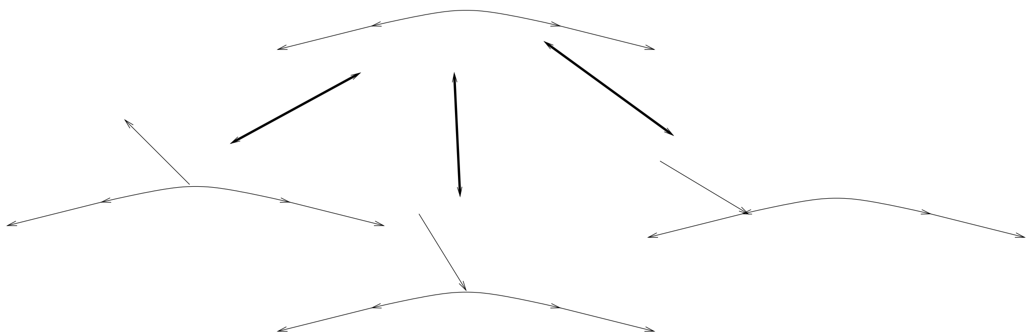
Hasonlóan a körben lévő maximális oda-vissza irányított utakat is (ha legalább 2-hosszúak) húzzuk össze egy 2-hosszú oda-vissza irányított úttá úgy, hogy a *belső* éleit (tehát a végpontokat nem fedő éleit) húzzuk össze egy pontttá. így nyilván konvergáló pontot nem kaphatunk. Lezárt utat pedig azért nem kaphatunk, mert akkor akkor az eredeti gráfban is lett volna lezárt út.

Induljunk el – ezen redukciók után – a kör valamelyik pontjából mondjuk pozitív körüljárással. Tegyük fel, hogy egymás után négy él (három él) a következőképpen van irányítva: az első pozitív irányítású, a következő kettő (egy) oda-vissza irányítású, a negyedik (harmadik) megint pozitív irányítású. Ekkor húzzuk össze ezt a négy (három) élet egy pozitív irányítású éllé (ha négy (három) egymás utáni az előzőekkel pont ellentétes irányítású éleket találunk, akkor egy negatív irányítású éllé húzzuk össze őket).

Itt ügyeljünk a nem körbeli élek elhelyezésére: az oda-vissza irányított él(ek) végpontjait fedő, kör felé irányított éleket az összehúzott él végpontjára illesszük, míg a kör felől irányított éleket az összehúzott él kezdőpontjára illesszük. Erre azért van szükség, hogy az összehúzott gráfban majd később definiált elvezetéseknek egyrészt feleljen meg elvezetés az eredeti gráfban is, másrészt a konfliktus-gráf ugyanaz legyen.

Befejezve a redukciós lépéseket, a következőket biztosan tudjuk: ha van egy maximális oda-vissza irányított utunk (amely most vagy 1- vagy 2-hosszú), akkor a végein induló két él ellentétes irányítású a kör egy körüljárási irányításához képest. Ez azt jelentené, hogy egy maximális oda-vissza irányított út a két, végpontjaiból induló nem útbeli éllel együtt egy lezárt utat alkotna, ami a feltétel szerint nincs a gráfban. Ezt csak az oldhatja fel, hogy van még szomszédos él az oda-vissza irányított út egy pontjával. Ha ez a pont az útnak belső pontja, akkor az él bármilyen irányítású lehet, ha végpontja, akkor csak az egyik irány felel meg, különben még mindig lezárt utat kapnánk (11. ábra). Ezen körből „kilógó" él másik végpontja nem lehet körbeli pont, mivel feltettük, hogy nincs átló a körben.

Vegyük észre, hogy bár a redukciós lépések sorozata *után* állítjuk, hogy bizonyos esetekben van lezárt utunk, de az eddigi redukciós lépések nem változtatták meg a körben lévő lezárt utak számát, csak csökkentették a hosszukat.



11. ábra.

Miközben körbemegyünk a körön, az is előfordulhat, hogy két egymás utáni él csak egy-egy irányba van irányítva, és egymáshoz képest ellentétesen (azonosan nem lehetnek, mert a redukciós lépésekkel az ilyen élekből 1 élet csináltunk). Ekkor a közös u végpont konvergáló pont lenne, tehát kell hogy legyen olyan megfelelő irányú él, aminek egyik végpontja u, és a másik végpontja nincs a körön.

Ezek után nevezzük ezt a három élet (két ellentétes irányú körbeli él + egy harmadik él, ami megszünteti a konvergáló pontot) kvázikonvergáló rendszernek, a középpontját kvázikonvergáló pontnak. Hasonlóan a lezárt út + a megfelelő él, ami ezt megszünteti, kapja a kvázilezárt út nevet. Ehhez tehát egy oda-vissza irányított út, két végén egy-egy egyirányú él és még egy harmadik él tartozik.

Tehát ahogy haladunk körbe, mindig vagy egy kvázilezárt út valamelyik élén, vagy egy kvázikonvergáló rendszer egy élén vagyunk, vagy mind a kettőben, mert az egyirányú élek két rendszerhez is tartoznak.

Különbséget kell tennünk két féle kvázilezárt út között. Ha az oda-vissza irányított út élein kívüli, az út valamely pontját fedő összes él az út felé, vagy az összes az út felől van irányítva, akkor nevezzük ezt a kvázilezárt utat első típusúnak. Ha nem minden ilyen él az út felé vagy nem minden ilyen él az út felől van irányítva, akkor nevezzük második típusúnak a kvázilezárt utat. Rögzítsünk tehát egy ilyen nem körbeli ellentétes irányítású élet. Vegyük észre, hogy ha a kvázilezárt út első típusú, akkor az az él, amelyiknek egyik végpontja nem körbeli pont, az oda-vissza irányított útnak csak *belső* pontjával lehet szomszédos (ellenkező esetben egy lezárt útról lenne szó).

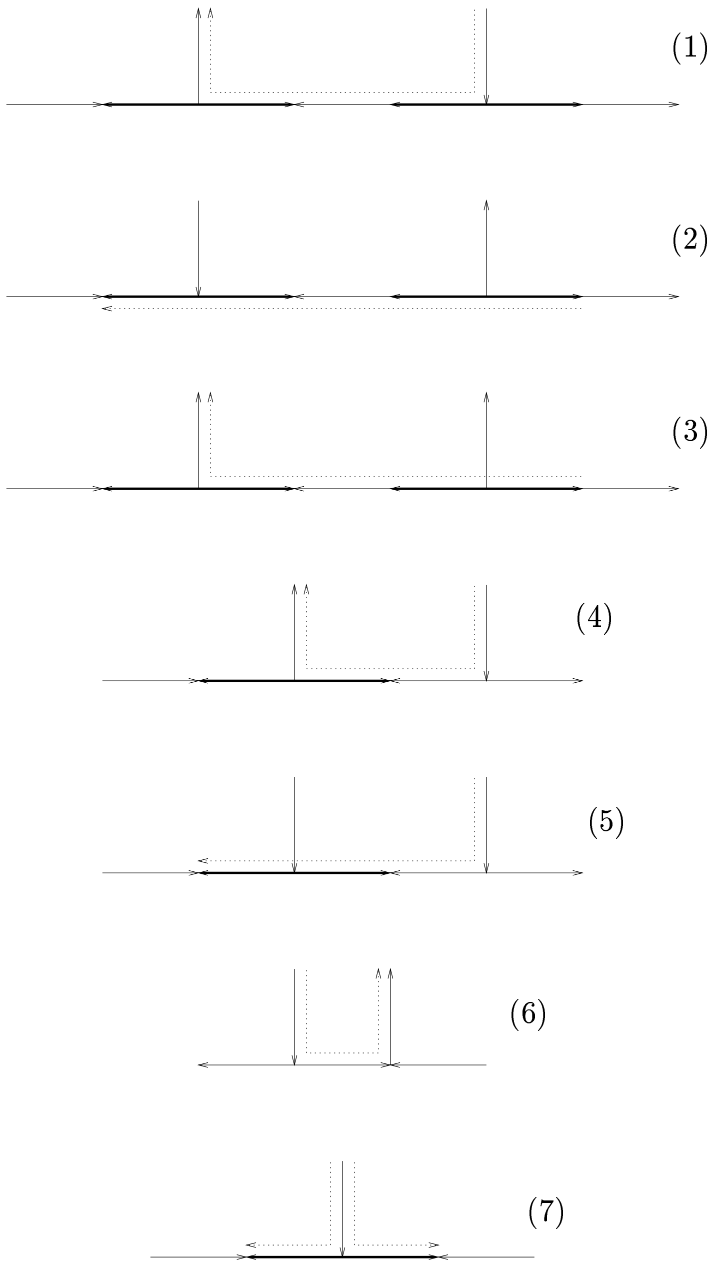
Így alapvetően három típusú részgráfnak lehetnek elemei a kör élei, bizonyosak egyszerre kettőnek is. Ezek után már következhet a konkrét elvezetés. Mivel három részgráf fordul elő, ezért a szomszédos részgráf-párok hatféleképpen alakulhatnak. Ezekben a párokban lévő elvezetéseket a 12. ábrán láthatjuk. A vastag vonalak az oda-vissza irányított utakat, a pontozott vonalak az elvezetéseket jelentik.

- (1) kvázilezárt út II. – kvázilezárt út II.,
- (2) kvázilezárt út I. – kvázilezárt út I.,
- (3) kvázilezárt út I. – kvázilezárt út II.,
- (4) kvázilezárt út I. – kvázikonvergáló rendszer,
- (5) kvázilezárt út II. – kvázikonvergáló rendszer,
- (6) kvázikonvergáló rendszer – kvázikonvergáló rendszer.

A (7)-es rajzon azokat az elvezetéseket mutatjuk, amelyeket egy első típusú kvázilezárt útban még a fentieken kívül felveszünk függetlenül attól, hogy milyen rendszerek a szomszédai.

(Természetesen ezek a szomszéd-párok fordított sorrendben is előfordulhatnak, ekkor az elvezetéseket a nyilvánvaló megfelelő módon alakítjuk át, másrészt az is lehet, hogy eleve az *összes* irányítás fordítva van, ekkor meg egyszerűen megfordítjuk az elvezetéseket is.)

Ezek után könnyű ellenőrizni, hogy akárhogyan fűzünk egymás mellé ilyen rendszereket egy körön, a fenti elvezetéssel kapott konfliktus-gráf mindig egy kör lesz, miután minden út pontosan két másik úttal van konfliktusban (ehhez kellenek a (7)-es rajzon látható „kiegészítő" elvezetések), és a gráf összefüggő.

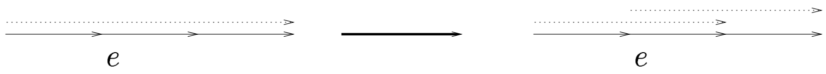


12. ábra.

Ha most ez a konfliktus-gráf *páratlan* kör, akkor készen vagyunk, mivel akkor 3 szín kell a megszínezéshez, holott a torlódás 2.

Ha pedig páros a kör, akkor még egy igény létrehozásával páratlan körré alakítjuk. Ehhez azt kell észrevenni, hogy akárhogyan fűzzük össze egy kör mentén a fenti rendszereket, a rajzokon látható „vízszintes” vékony éleken a torlódás pontosan 1 lesz, és egy ilyen (egyirányú) él két végpontja belső pontja lesz a rajta áthaladó elvezetéshez tartozó útnak. Vegyünk tehát egy olyan elvezetést, amely két szomszédos rendszert összeköt, és vegyük egy vízszintes vékony élét. A 13. ábrán látható módon helyettesítsük az elvezetéshez tartozó igényt két másik igénnyel, így a konfliktus-gráf kör marad, csak eggyel nagyobb lesz.

Könnyű belátni, hogy ezeknek az elvezetéseknek az eredeti gráfban is megfelelnek elvezetések úgy, hogy a konfliktus-gráf nem változik, mivel a visszafújásnál új konfliktusok nem keletkeznek és régiek nem szűnnek meg (pontosan emiatt kellett figyelni az összehúzásnál). Ezzel az állítás bizonyítást nyert. □



13. ábra.

(A 12. ábrán látható rajzok csalnak egy picit, mert egy kvázilezárt útban a függőleges élhez egyrészt lehet, hogy a gráfban van az ellenkező irányú él is, másrészt egy második típusú kvázilezárt útban a függőleges él körön lévő pontja nem feltétlenül belső pontja az oda-vissza irányított útnak, de ez nem jelent problémát, mert a rajzok ilyen jellegű torzítását nem használtuk ki.)

Ezek után már kimondhatjuk a karakterizációs tételt:

2.23. Tétel. *Legyen G robosztus gráf. Ekkor egy S ponthalmaz pontosan akkor elégséges G-ben, ha minden $s(G)$-beli kört lefed, és minden χ-gráf karakterisztikus útját is lefedi.*

Bizonyítás: A szükségességet már láttuk. Az elégségességhez tegyük fel, hogy S olyan ponthalmaz, amely fedi az összes $s(G)$-beli kört és az összes χ-gráf karakterisztikus útját. Ekkor ha szétvágjuk a G gráfban S pontjait, akkor a komponensek fák lesznek és nem tartalmazhatnak χ-gráfot. Így a 2.18. lemma miatt készen vagyunk. □

A 2.14. állítás miatt feltehető, hogy a χ-gráfok karakterisztikus útja 1-hosszú, különben összehúzzuk 1-hosszúvá, és a minimális elégséges halmaz nagysága nem változik. Így a következő problémára vezethető vissza a minimális elégséges halmaz keresése:

Adott egy $G(V,E)$ irányítatlan gráf és ebben egy $I \subseteq E$ élhalmaz, találjunk olyan $S \subseteq V$ ponthalmazt, amely lefed minden G-beli kört és lefogja az I-beli éleket.

Azonban ez a probléma közvetlenül visszavezethető az általánosított körlefogó problémára, ha az I-beli élek két végpontja között még egy élet behúzunk, és ekkor keresünk minimális körlefogó ponthalmazt (a 2-hosszú köröket is le szeretnénk fedni). Ha a párhuzamos élek jelenlétét el szeretnénk kerülni, akkor egy 2-hosszú utat húzunk be az él helyett. Mivel irányítatlan gráfokban a minimális körlefogó halmaz megtalálására van 2-approximáció ([17]), ezért

2.24. Következmény. *Irányított gráfokban van 2-approximáció a minimális elégséges halmaz megtalálására.*

2.3.3. Síkgráfok

2.25. Tétel. *Síkgráfokra a minimális elégséges halmaz megtalálása $\mathcal{NP}$-nehéz.*

A bizonyítás [16]-ben található meg, a problémát síkbeli 3-SAT problémára vezetik vissza: egy konjuktív normálforma síkbeli 3-SAT, ha minden elemi diszjunkció 3 változót tartalmaz, és ha az a páros gráf síkbeli, aminek egyik pontosztályát az összes változó, a másik pontosztályát az elemi diszjunkciók alkotják, él akkor van két pont között, ha a megfelelő elemi diszjunkció tartalmazza a változót vagy a negáltját. A síkbeli 3-SAT probléma $\mathcal{NP}$-teljes.

Az általános irányított gráfokról szóló alfejezetben leírt módszerek a síkgráfokra is jók, mivel a transzformációk megőrzik a síkgráf tulajdonságot. Azonban síkgráfokra létezik jobb approximációs algoritmus a minimális körlefedő ponthalmaz megtalálására.

2.26. Tétel. *Legyen G síkgráf. Ekkor tetszőleges $\epsilon > 0$-ra létezik polinomiális $(1+\epsilon)$-approximációs algoritmus a minimális körlefedő halmaz megtalálására.*

A részletes bizonyítás [15]-ben található meg, mi csak a bizonyítás vázlatát írjuk le.

A bizonyítás három nagy részből áll. Az első rész a korlátos maximális fokszám esetével foglalkozik. A Lipton-Tarjan síkbeli szeparációs tétel ([20], [21]) azt mondja ki, hogy egy n pontú korlátos fokszámú G gráfból el lehet hagyni egy $O(n/\log n)$ méretű S ponthalmazt úgy, hogy $G \setminus S$-ben az összefüggő komponensek legfeljebb $\log n$ pontúak legyenek. Ennek segítségével megadható egy algoritmus, amely $(1+\epsilon)$-approximálja a körlefogó pontok számát, ha a gráfnak korlátos a maximális foka.

A második részben az algoritmust egyszerűen kiterjesztjük az általános esetre, és kiderül, hogy az jelenti a problémát, ha a gráfban van *nagyon összefüggő pár*.

2.27. Definíció. *Legyen egy $v \in V(G)$ pont foka nagyobb, mint $r = 8\epsilon^{-1} + 3$. Ekkor azt mondjuk, hogy v az u ponttal nagyon összefüggő párt alkot, ha következő két tulajdonság teljesül:*

- *létezik $r' \geq r$ pontdiszjunkt út u és v között, legyenek ezek az utak $P_1, \ldots, P_{r'}$ (természetesen e két ponton kívül kell az utaknak pontdiszjunktaknak lenni),*
- *tetszőleges $i \neq j$-re minden olyan G-beli út, amely P_i belső pontját köti össze P_j belső pontjával, tartalmazza vagy u-t vagy v-t.*

Amennyiben nincs nagyon összefüggő pár, akkor bebizonyítható, hogy az első részben megadott algoritmus továbbra is a megfelelő approximációs algoritmus.

A harmadik részben egy a nagyon összefüggő párok számára vonatkozó indukciós bizonyítással visszavezethető az általános eset arra az esetre, ha nincs nagyon összefüggő pár a gráfban.

3. Konverzió speciális hálózatokban

Mint azt már írtuk, a minimális elégséges halmaz megtalálása $\mathcal{NP}$-teljes probléma teljes általánosságában. Vannak azonban speciális gráfok, amelyekre polinomidőben meghatározható a minimális elégséges halmaz, vagy a nagyságát tudjuk más mennyiséggel jellemezni.

3.1. Utak, körök

A legegyszerűbb eset akkor merül fel, ha a hálózati gráf váza út. Ekkor – mivel a hálózat sem kört, sem elágazó pontot nem tartalmaz – nyilván nincs szükség konverterre, tetszőleges elvezetést (amely mellesleg az igények megadása után egyértelmű) meg lehet színezni optimálisan (ugyanis – mint már korábban írtuk – a konfliktus-gráf két pontdiszjunkt intervallumgráf, amelyek perfektek, azaz megszínezhetők annyi színnel, amennyi a legnagyobb klikk mérete).

A másik nagyon egyszerű esettel akkor találkozunk, ha a hálózati gráf váza kör. Ugyanis ekkor – felhasználva az előző fejezetben írtakat – pontosan akkor kell konverter (1 db), ha irányított értelemben is tartalmaz a hálózat kört.

3.2. Fák

Legyen most a hálózatunk egy $T(V,E)$ **oda-vissza** irányított fa. Nyilván amennyiben van legalább két elágazó pont $s(G)$-ben (azaz a hálózat nem pók), akkor szükség van konverterre. Mivel kör nem lehet a hálózatban, ezért csak a χ-gráfok jelentenek problémát. Tudjuk azt a korábbiakból, hogy minden minimális χ-gráf karakterisztikus útján kell lenni konverternek, sőt, feltehető, hogy ez a karakterisztikus útján egy végpontja. Ez pedig nyilván elágazó pont az eredeti fában.
Ha a fának n pontja van, akkor egyrészt

$$n = n_1 + n_2 + n_3,$$

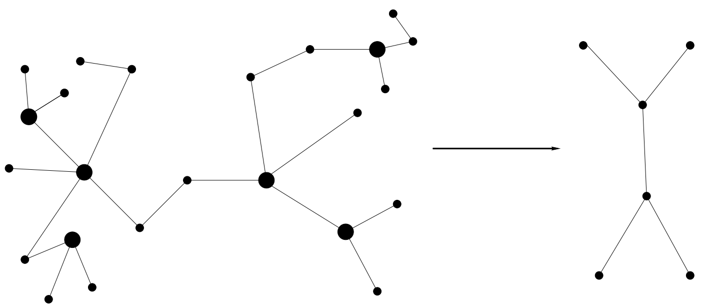
másrészt

$$2(n-1) \geq n_1 + 2n_2 + 3n_3,$$

ahol n_1 a levelek, n_2 a másodfokú pontok, n_3 pedig az elágazó pontok számát jelöli. Ebből következően

$$n - 2 - n_2 \geq 2n_3, \quad \text{azaz} \quad \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \geq n_3.$$

Ha most T'-vel azt az irányítatlan gráfot jelöljük, melynek pontjai T elágazó pontjai, és két pont akkor van összekötve, ha a nekik megfelelő T-beli pontok közti út minden belső pontja másodfokú, akkor nyilván ez a T' gráf is fa. A



14. ábra.

feladatunk pedig pontosan az, hogy ebben a gráfban egy lefogó ponthalmazt találjunk, mivel egy T'-beli lefogó ponthalmaz lefedi minden T-beli χ-gráf karakterisztikus útját, azaz elégséges.
Mivel a fa páros gráf, ezért egy jó kétszínezés bármelyik pontosztálya lefogó ponthalmaz, így a minimális lefogó ponthalmaz legfeljebb $\frac{1}{2}|T'|$ elemszámú. Így megkaptuk a következő eredményt:

3.1. Tétel. *Egy $T(V,E)$ oda-vissza irányított fában, mint hálózatban a minimális elégséges halmaz legfeljebb $\frac{1}{2}\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1\right)$ elemből áll.*

Tehát ekkor méretű lefogó ponthalmaz mindig van a fában, de persze mivel a fa páros gráf, ezért a magyar módszerrel a minimális lefogó ponthalmaz is meghatározható. Másrészt viszont a fenti eredmény éles is abból a szempontból, hogy végtelen sok n-re van olyan n pontú fa, melyben a minimális elégséges halmaz $\frac{1}{2}\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1\right)$ elemszámú. Legyen k páros szám, vegyünk egy k hosszú utat, minden belső pontjához akasszunk egy levelet, a végpontokhoz két levelet. Az így kapott fa $n = 2k+2$ pontú, és a k hosszú úton legalább minden második pontra konvertert kell tenni, tehát $\frac{k}{2}$ konverter kell, ami valóban $\frac{1}{2}(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - 1)$.

3.3. Páros gráfok, König-gráfok

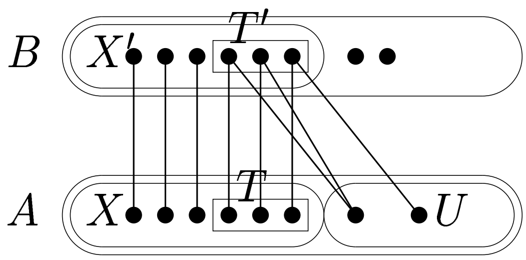
Mindenekelőtt következzék egy definíció:

3.2. Definíció. *Legyen $G(V,E)$ tetszőleges gráf. Ekkor jelölje $\nu(G)$ a független élek maximális számát, $\tau(G)$ a lefogó pontok minimális számát.*

Mivel láttuk, hogy egy ponthalmaz pontosan akkor minimális elégséges, ha egy neki megfelelő ponthalmaz egy másik gráfban lefogó ponthalmaz, ezért érdemes megvizsgálni, hogy mely gráfok esetében tudunk polinomiális időben meghatározni minimális lefogó ponthalmazt. Itt jönnek be a páros gráfok, mivel rájuk érvényes a következő tétel:

1. König-tétel. *Legyen $G(V, E)$ páros gráf. Ekkor $\nu(G) = \tau(G)$.*

Bizonyítás: Ha tekintünk egy legnagyobb párosítást, akkor egy lefogó ponthalmaznak tartalmaznia kell minden párosításbeli él legalább egyik végpontját, és mivel ezek független élek, ezért a pontok különbözőek, tehát $\nu(G) \leq \tau(G)$.
A másik irányú egyenlőtlenséghez vegyünk egy M legnagyobb párosítást. Legyenek X és X' az M által lefedett A és B-beli pontok (ahol A és B a páros gráf pontosztályai), $U := A \setminus U$, legyen továbbá T' azon B-beli pontok halmaza, melyek elérhetők U-ból alternáló úton, T pedig legyen ezen pontok párosítás szerinti párjainak halmaza (15. ábra).



15. ábra.

Könnyű belátni, hogy T' nem tartalmazhat X'-n kívüli pontokat, ellenkező esetben ugyanis az alternáló út segítségével lehetne olyan párosítást találni, melynek több éle lenne, mint M-nek.
Legyen $Y = T' \cup (X \setminus T)$. Ez lefogó ponthalmaz, mert $T \cup U$ pontjaiból induló éleket lefogják T' pontjai, $B \setminus X'$ szomszédai pedig csak $X \setminus T$ pontjai közül kerülhetnek ki, mivel $T' \subseteq X'$. Másrészt azt könnyű látni, hogy Y elemszáma éppen $\nu(G)$, ezzel a tétel bizonyítást nyert. $\square$

Láttuk, hogy egy G oda-vissza irányított hálózatban egy elégséges halmaznak megfelel egy lefogó halmaz a 2.3.1. alfejezetben definiált H gráfban. König tételének a fenti bizonyításából látszik, hogy ha a H gráf páros, akkor megtalálható egy minimális lefogó halmaz H-ban polinom időben, azaz megtalálható egy minimális elégséges halmaz H-ban. Ehhez az kell (ami $O(e)$ időben megy), hogy előállítsuk a H gráfot, másrészt el kell tudnunk dönteni, hogy H páros-e. Ezt pedig szélességi kereséssel könnyű eldönteni, ugyanis a gráf pontosan akkor páros, ha azonos szintbeli pontok között nem megy él.

Persze a H gráf elég ritka esetben lesz páros, mivel lehetnek H-ban hurokélek is. Hívjunk majdnem párosnak egy gráfot, ha a hurokélek végpontjait elhagyva a kapott gráf páros lesz.

3.3. Állítás. *Tetszőleges G hálózatra polinomidőben eldönthető, hogy a 2.3.1. alfejezetben definiált H gráf majdnem páros-e, és ha igen, akkor polinomidőben megtalálható G egy minimális elégséges halmaza.*

Bizonyítás: Az állítás első részét megint megoldja a szélességi keresés, csak most azt kell vizsgálni, hogy H-ban a hurokéleken kívül megy-e egy szinten belül él.

A második részhez pedig a következőket kell végiggondolni: egy majdnem páros gráfban minimális lefogó ponthalmaz lesz a következő: veszem a hurokél-végpontokat, majd ezeket elhagyva a H gráfból a maradék – most már páros – gráfban veszek egy minimális lefogó ponthalmazt. Az világos, hogy ez valóban lefogó ponthalmaz. Az kell csak, hogy minimális.
Tegyük fel, hogy van egy kisebb minimális lefogó ponthalmaz. Ekkor ennek is tartalmaznia kell a hurokél-végpontokat (nekik minden lefogó ponthalmazban benne kell lenniük), akkor viszont azt kaptuk, hogy a hurokél-végpontok elhagyásával keletkezett gráfban van egy kisebb számosságú lefogó ponthalmazom, ellentmondás. □

Vegyük észre, hogy eddig nem azt használtuk ki, hogy a H gráfunk páros vagy majdnem páros, hanem csak azt, hogy $\nu(H) = \tau(H)$. Ez pedig nem csak a páros gráfokra igaz, definíció szerint az ilyen gráfokat hívjuk König-gráfoknak (ill. azt mondjuk, hogy a gráfnak megvan a König-tulajdonsága, vagy a gráf König).

3.4. Definíció. *Adott egy G gráf. Súlyozzuk meg az éleket a 0, 1, 2 számokkal. Ezt a számozást 2-párosításnak nevezzük, ha minden pontra teljesül, hogy a ponttal szomszédos élekre írt számok összege legfeljebb 2.*

Általában a 2-párosításon magán a nem nulla súlyú élek halmazát értjük. A 2-párosítás méretét az élekre írt súlyok összege jelenti, és legnagyobb 2-párosításon legnagyobb élsúlyú 2-párosítást értünk, egy ilyen méretét jelölje $\nu_2(G)$. Teljes a 2-párosítás, ha minden pontban a pontot fedő élekre írt súlyok összege kettő (ami ekvivalens azzal, hogy a gráf összes élén összeadva a súlyokat n-et kapunk).

3.5. Definíció. *Hívjunk egy 2-párosítást kanonikusnak, ha csak éleket és páratlan köröket tartalmaz.*

3.6. Lemma. *Minden gráfban létezik kanonikus legnagyobb 2-párosítás, sőt, egy él pontosan akkor van benne legnagyobb 2-párosításban, ha benne van kanonikus legnagyobb 2-párosításban.*

A bizonyításhoz mindössze annyit kell végiggondolni, hogy ha egy legnagyobb 2-párosítás útjai és páros körei helyett minden második élüket vesszük (2 súllyal), akkor is legnagyobb 2-párosítást kapunk (páratlan hosszú utat nyilván nem tartalmazhat a legnagyobb 2-párosítás). A második állítás pedig azért igaz, mivel páros hosszú (2-párosításbeli) utak és körök felbonthatók két diszjunkt párosítás uniójára.

A következő tétel szükséges és elégséges feltételt mond ki arra, hogy egy gráfnak meglegyen a König-tulajdonsága. A bizonyítás megtalálható [19]-ben, 6.3.5. tétel.

3.7. Tétel. *Egy G gráf pontosan akkor König-gráf, ha azok az élek, amelyek legalább egy legnagyobb 2-párosításban benne vannak, páros gráfot alkotnak.*

A tétel néhány következményét foglaljuk össze egy lemmában.

3.8. Lemma. *Legyen G egy König-gráf. Ekkor*

- *$\nu_2 = 2\nu$, tehát egy legnagyobb párosítás (éleit 2 súllyal véve) egyúttal legnagyobb 2-párosítás is,*
- *semelyik legnagyobb 2-párosítás nem tartalmaz páratlan kört,*
- *ha veszünk egy M legnagyobb párosítást G-ben, és tekintjük néhány élét, akkor a végpontjaik által kifeszített gráf König.*

Az első két állítás triviális, a harmadik pedig azért igaz, mivel $\nu(G) = \tau(G)$, ami azt jelenti, hogy egy minimális lefogó ponthalmaznak pontosan egyet kell tartalmaznia minden párosításbeli él végpontjaiból, tehát ha veszünk néhány M-beli élet, akkor az éleken lévő G-beli lefogó pontok szükségképpen lefogják az ezen élek végpontjai által feszített gráfot is.

A 3.7. tétel segítségével szeretnénk egy olyan algoritmust adni, amely eldönti egy gráfról, hogy megvan-e a König-tulajdonsága, és ha tudjuk egy gráfról, hogy König, akkor szeretnénk megtalálni a minimális lefogó ponthalmazt.

Mivel azt gyorsan el tudjuk dönteni (pl. szélességi kereséssel), hogy egy gráf páros-e, ezért elég azt minél gyorsabban meghatározni, hogy G mely élei vannak benne legalább egy legnagyobb 2-párosításban.

Legyenek G pontjai $v_1, \dots, v_n$. Definiáljunk egy segédgráfot: legyen a G' egy $A = \{v_{01}, \dots, v_{0n}\}$ és egy $B = \{v_{11}, \dots, v_{1n}\}$ pontosztályú páros gráf, él pontosan akkor menjen v_{0i}-ből v_{1j}-be, ha v_i és v_j között van él G-ben (vegyük észre, hogy ekkor persze v_{0j} és v_{1i} között is megy él, tehát G'-nek van egy ilyen jellegű szimmetriája). Vegyük észre, hogy G-ben egy legnagyobb 2-párosításnak egy legnagyobb párosítás felel meg G'-ben, és fordítva. Tehát G' minden éléről el kell tudnunk dönteni, hogy benne van-e egy legnagyobb párosításban. Ha a magyar-módszerrel ([19]) megkeresünk egy legnagyobb párosítást $O(e\sqrt{n})$ időben, akkor ennek segítségével $v_{0i}v_{1j}$ élről $O(e)$ lépésben eldönthető, hogy benne van-e egy legnagyobb párosításban, ugyanis azt kell megnézni, hogy eltörölve az él két végpontját van-e eggyel kisebb párosítás a megmaradt gráfban, ami – felhasználva az eredeti párosítást – megy $O(e)$ időben, mivel legfeljebb egyszer kell javító utat keresni.

Azonban ezzel az algoritmus $O(e^2)$ idejű lenne, ezért próbáljuk meg egyszerre minden élről eldönteni, hogy benne van-e egy legnagyobb párosításban.

Legyen tehát adott egy tetszőleges G' páros gráf, $O(e\sqrt{n})$ időben el szeretnénk dönteni minden éléről, hogy benne van-e legnagyobb párosításban. Ehhez először a magyar módszerrel keressünk egy M legnagyobb párosítást.

Mikor lehet egy G'-beli él benne legnagyobb párosításban? Ha az él benne van M-ben, akkor nyilvánvalóan. Ha az él egyik végpontját nem fedi M-beli él, akkor is benne van legnagyobb párosításban. Ha pedig az él $u_1 \in A$ és $v_1 \in B$ végpontjai le vannak fedve egy-egy M-beli e és f éllel ($e = (u_1, u_2)$, $f = (v_1, v_2)$), akkor az él pontosan akkor van benne legnagyobb párosításban, ha

- u_2 és v_2 között van javító út
- u_2-ből A_1-be van javító út
- v_2-ből B_1-be van javító út

közül legalább az egyik teljesül.

Ennek alapján particionáljuk G' pontjait: $A = A_f \cup A^* \cup A_m$, ahol A_f jelenti az M által le nem fedett pontokat, A^* pedig az A_f-ből alternáló úton elérhető pontok halmaza, A_m pedig a maradék A-beli pontok halmaza (hasonlóan definiáljuk a $B = B_f \cup B^* \cup B_m$ partíciót). A konstrukcióból látszik, hogy azok az élek, amelyeknek legalább az egyik végpontja $A_f \cup A^* \cup B_f \cup B^*$-ban van, benne vannak legnagyobb párosításban.

Ahhoz, hogy a többi élről el tudjuk dönteni, hogy benne vannak-e legnagyobb párosításban, irányítsuk meg G'-t úgy, hogy minden él A-beli pontból B-beli felé legyen irányítva, majd húzzuk össze az M-beli éleket. Ekkor kapjuk a G'' gráfot. Vizsgáljuk meg, hogy mit jelent az, hogy ha egy $e = uv$ él két végpontja egy erősen összefüggő komponensben van G''-ben. Ekkor tehát van irányított út v-ből u-ba, ami pontosan annak felel meg, hogy a v-nek megfelelő G'-beli (bármelyik) pontból el tudok jutni alternáló úton az

u-nak megfelelő G'-beli (bármelyik) pontba. Ha tehát G' egy éle A_m és B_m között megy, akkor az él pontosan akkor van benne legnagyobb párosításban, ha a két végpontjának megfelelő G''-beli pontok egy erősen összefüggő komponensben vannak.

Tehát elég meghatározni G''-ben az erősen összefüggő komponenseket, ami megtehető két mélységi kereséssel $O(e)$ időben ([23]). (Vegyük észre, hogy bár három különböző gráfunk van, G'-nek kétszer annyi éle van, mint G-nek, ezért G''-nek legfeljebb kétszer annyi éle van, mint G-nek, tehát az $O(e)$ mennyiség mind a három gráfra ugyanazt jelenti).

Ebből minden élre összesen $O(e)$ időben visszakereshető, hogy a végpontok egy erősen összefüggő komponensben vannak-e, azaz G' élei benne vannak-e teljes párosításban. Ha tehát egy él egyik végpontja sincs benne $A_f \cup A^* \cup B_f \cup B^*$-ban, és a két végpontnak megfelelő G''-beli pont nincs egy erősen összefüggő komponensben, akkor az él nincs benne legnagyobb párosításban, egyébként igen, és ezt a fentiek miatt $O(en)$ időben el tudjuk dönteni.

Ezek után tegyük fel, hogy az előbbi algoritmus futtatásával azt kaptuk, hogy a G gráf König, tehát a legnagyobb 2-párosítások éleiből alkotott gráf páros, az a feladatunk, hogy megtaláljuk a minimális lefogó ponthalmazt. Ekkor persze megkaptunk egy legnagyobb 2-párosítást is, amelyből a 3.6. lemma miatt könnyű legnagyobb párosítást csinálni. Így a továbbiakban mindig feltételezzük, hogy van egy M legnagyobb párosításunk.

Tegyük fel először, hogy nincs G-ben teljes párosítás. Először definiáljunk néhány fontos fogalmat:

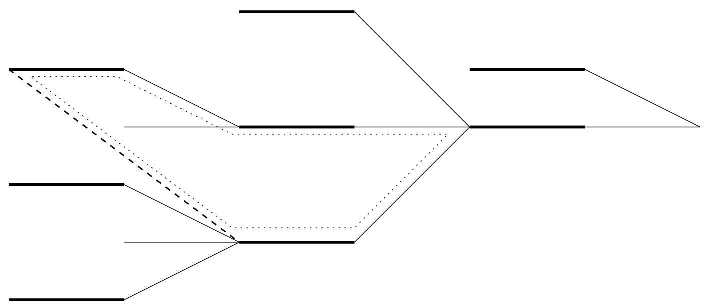
3.9. Definíció. *Legyen adott egy G tetszőleges gráf és benne egy M párosítás. Ekkor egy erdőt alternálónak hívunk, ha*

- *az összes M által le nem fedett pont gyökere valamelyik komponensnek,*
- *az összes komponens tartalmaz pontosan egy M által le nem fedett pontot,*
- *minden gyökértől levélig vezető út alternáló.*

Hívjuk az erdő M-beli éleinek gyökérhez közelebbi pontjait belső pontoknak, a gyökértől távolabbi pontjait külső pontoknak.

Nyilván ha a gráfban van olyan él, amely két különböző komponensben lévő külső pontot köt össze, akkor M nem lehet legnagyobb, mivel van javító út.

3.10. Definíció. *Adott egy G gráf, benne egy M párosítás és egy alternáló erdő. Két, azonos komponensben lévő külső pontot összekötő élet* hídnak *hívunk, azt az egyértelmű páratlan kört, amelyet a híd az erdő éleivel meghatároz,* kehelynek *nevezzük (16. ábra).*



16. ábra. Híd és kehely

3.11. Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy alternáló erdő* maximális, *ha a gráfban nincs él külső pont és nem erdőbeli pont között.*

3.12. Definíció. *Adott egy G gráf, egy M párosítás és egy maximális alternáló erdő. Ha G-ben nincs külső pontok között él, akkor azt mondjuk, hogy az alternáló erdő* magyar erdő.

Nyilván ha van egy magyar erdő, akkor a gráfban nem lehet kehely.

3.13. Állítás. *Ha a G gráfban $\nu_2(G) = 2\nu(G)$, akkor egy M legnagyobb párosításból indított maximális alternáló erdő magyar erdő.*

Bizonyítás: olyan él nyilván nem lehet a gráfban, amely különböző komponensek külső pontjait köti össze, mivel akkor a párosítás nem lenne legnagyobb. Ezért elég belátni, hogy G-ben nincs kehely. Ez viszont nyilvánvaló abból, hogy ha lenne kehely, akkor a kehelyben lévő párosításbeli éleket kicserélve a kehelyre nagyobb 2-párosítást kapnánk, ellentmondás.

3.14. Megjegyzés. *Ha a G gráf König, persze akkor teljesülnek a tétel feltételei, tehát a tétel igaz König-gráfokra is.*

Tehát, mint azt már korábban is írtuk, egy G gráfról az algoritmus megállapította, hogy König, és talált egy M legnagyobb párosítást. Kezdjük el építeni az alternáló erdőt az M által lefedetlen pontokból szélességi kereséssel! Az előző lemma miatt nem kaphatunk sem kelyhet, sem különböző komponensek közötti, külső pontokat összekötő élet. Amikor az algoritmus leáll, azaz maximális alternáló erdőt kaptunk, akkor a 3.13. állítás miatt a belső pontok lefogják az összes olyan élet, amelynek valamelyik végpontja a maximális alternáló erdőben van, és belső pontból pedig annyi van, mint amennyi az erdőben a párosításbeli élek száma. Így a 3.8. lemma miatt ha elhagyjuk az erdő pontjait a gráfból, akkor elég a megmaradó gráfban megtalálni a minimális lefogó ponthalmazt, amelyben viszont van teljes párosítás (amelyet ismerünk).

Legyen tehát a továbbiakban G egy König-gráf, benne egy M teljes párosítással. A minimális lefogó ponthalmazt megtaláló algoritmus a következőképpen néz ki: válasszuk ki egy e párosításbeli élét a G gráfnak, a két végpontja legyen u és v. Hagyjuk el v-t a gráfból, és nézzük meg, hogy ha a maradék gráfban elkezdjük építeni az u gyökerű alternáló erdőt, akkor találunk-e kelyhet. Ha nem, akkor az erdő magyar, a belső pontjait vegyük bele a minimális lefogó ponthalmazba, hagyjuk el az erdő pontjait, és a maradék gráfban keressünk minimális lefogó ponthalmazt. Ha van kehely a gráfban, akkor építsük meg u elhagyásával (az eredeti G gráfból) a magyar erdőt, a belső pontokat vegyük bele a minimális lefogó ponthalmazba, hagyjuk el a magyar erdő pontjait, és a maradék gráfban keressünk minimális lefogó ponthalmazt.

3.15. Állítás. *A fenti algoritmus teljes párosítást tartalmazó König-gráfok esetén megtalálja a minimális lefogó ponthalmazt $O(en)$ időben.*

Bizonyítás: az első triviális észrevételünk az, hogy ha – a fenti jelölésekkel – a G gráf König, és u benne van egy minimális lefogó ponthalmazban, akkor $G \setminus u$ is König. A második észrevétel, hogy ha u-t elhagyva a v gyökerű alternáló erdő építésekor nem találunk kelyhet, akkor $G \setminus u$ König. Ugyanis az alternáló erdő egy fa, amelynek egy lefogó ponthalmaza a belső pontok halmaza, belső pontból pedig – a párosítás maximalitása miatt – pont annyi van, mint ahány párosításbeli él van a fában. Nem lehet olyan él a gráfban, amelynek egyik végpontja külső pont az erdőben, másik végpontja nincs benne az erdőben, mivel az alternáló erdő maximális (tartalmazásra nézve), tehát az erdő magyar erdő, ezért a belső pontok lefogják az összes olyan élet, amelynek valamelyik végpontja benne van a fában. Mivel a fa elhagyásával kapott gráfban van teljes párosítás, így a 3.8. lemma miatt König, tehát $G \setminus u$ is König.

A harmadik észrevétel, hogy mivel G König, ezért ha u elhagyásával a magyar erdő építésekor találunk kelyhet, akkor v-nek benne kell lennie bármelyik G-beli minimális lefogó ponthalmazban. Ugyanis a híd lefogásához a minimális G-beli lefogó ponthalmaznak tartalmaznia kell egy x külső pontot, ekkor viszont az x-től a gyökérig vezető alternáló úton minden külső pontnak benne kell lenni a minimális lefogó ponthalmazban (mivel G König, tehát egy párosításbeli élnek csak az egyik végpontja lehet benne a minimális lefogó ponthalmazban), tehát speciálisan a gyökérnek is.

Tehát nem lehetséges az, hogy ha u-t elhagyjuk, akkor a v-ből indított magyar erdő építésekor is találunk kelyhet, és ha v-t elhagyjuk, akkor az u-ból indított erdő építésekor is találunk kelyhet, tehát az egyik magyar erdő belső pontjai lefogják az összes olyan élet, amelynek valamelyik végpontja a magyar erdőben van, ezzel a 3.8. lemma értelmében elég egy legalább 2-vel kisebb pontszámú teljes párosítást tartalmazó König-gráfban megtalálni a minimális lefogó ponthalmazt.

Ezen fenti három gondolatmenet segítségével beláttuk az állítást, ami azt jelenti, hogy mivel $O(n)$-szer törlünk pontokat, és minden törlés előtt egy szélességi keresést végzünk, adtunk egy $O(ne)$ idejű algoritmust, amely König-gráfokban megtalálja a minimális lefogó ponthalmazt.

3.4. Körök fája

Nem véletlenül nem közvetlenül a fák után tárgyaljuk ezeket a gráfokat, mivel bár első látásra egyszerű hálózatoknak tűnnek, a minimális elégséges halmaz nagyságának jellemzéséhez szükségünk van a König-gráfokra kapott eredményekre.

A hálózat a következő: adott egy fa, és néhány (esetleg az összes, esetleg semennyi) pontját fújjuk fel egy körré, azaz a fa néhány pontjának feleljen meg egy kör, és két kör között akkor legyen (tetszőleges pontok között) él, ha az eredeti pontok szomszédosak voltak, minden élet oda-vissza irányítunk. Az így kapott F hálózatban szeretnénk minimális elégséges ponthalmazt találni. Konstruáljuk meg a 2.3.1. alfejezetben leírt H gráfot. Vegyük észre, hogy a kapott H gráf szintén körök fája lesz, persze lehet, hogy kapunk hurokéleket is és párhuzamos éleket is, ezeket nevezzük 1 ill. 2 hosszú köröknek.

Tehát a feladat az, hogy egy körök fája gráfban találjuk meg a minimális lefogó ponthalmazt. Nyilván a hurokélek végpontjai biztos, hogy benne lesznek egy lefogó ponthalmazban, ezért a hurokélek végpontjait eltörölhetjük a gráfból. A párhuzamos élek jelenléte pedig nem befolyásolja a minimális lefogó ponthalmaz nagyságát (és helyét), ezért eltörölhetjük őket. Ezek után következzék az alfejezet lényeges állítása.

3.16. Tétel. *Adott egy F körök fája gráf. Ekkor ha veszünk egy olyan legnagyobb 2-párosítást, amely a legtöbb páratlan kört tartalmazza, akkor a minimális lefogó ponthalmaz nagysága $\frac{1}{2}(\nu_2 + k)$, ahol ν_2 a ennek a legnagyobb 2-párosításnak a mérete, míg k jelentse az ebben a legnagyobb 2-párosításban előforduló páratlan körök számát.*

A szükségességhez azt kell csak észrevenni a 3.6. lemma miatt, hogy egy minimális lefogó ponthalmaznak le kell fogni minden független élet a 2-párosításból, és minden páratlan kört is, ami körönként legalább a felső egészrésze a kör félhosszának.

Az elégségesség megmutatásához vegyünk egy olyan legnagyobb 2-párosítást, amely a legtöbb páratlan kört tartalmazza. Nevezzük ezeket a köröket fontos páratlan köröknek. Nyilván a fontos páratlan körök rendszere is fát alkot (ha a fontos páratlan köröket tekintem pontoknak, és két pont között akkor megy él, ha az eredeti gráfban a két fontos páratlan kör között van olyan út, amely nem tartalmaz más fontos páratlan kör pontját). Válasszunk ki egy olyan fontos páratlan kört, amely levél ebben a rendszerben, legyen ez C, a hossza legyen $2c+1$. Ekkor ha az eredeti gráfból kitörölnénk ezt a fontos páratlan kört, akkor a maradék gráf komponensei közül lenne egy, amely az összes fontos páratlan kört tartalmazza.

Válasszunk ki egy ettől különböző komponensét a gráfnak, legyen ez K, vegyük hozzá C-t és K-t összekötő élet, legyen ez az él e. Mivel a 2-párosítás tartalmazza C-t, ezért nem tartalmazhatja e-t.

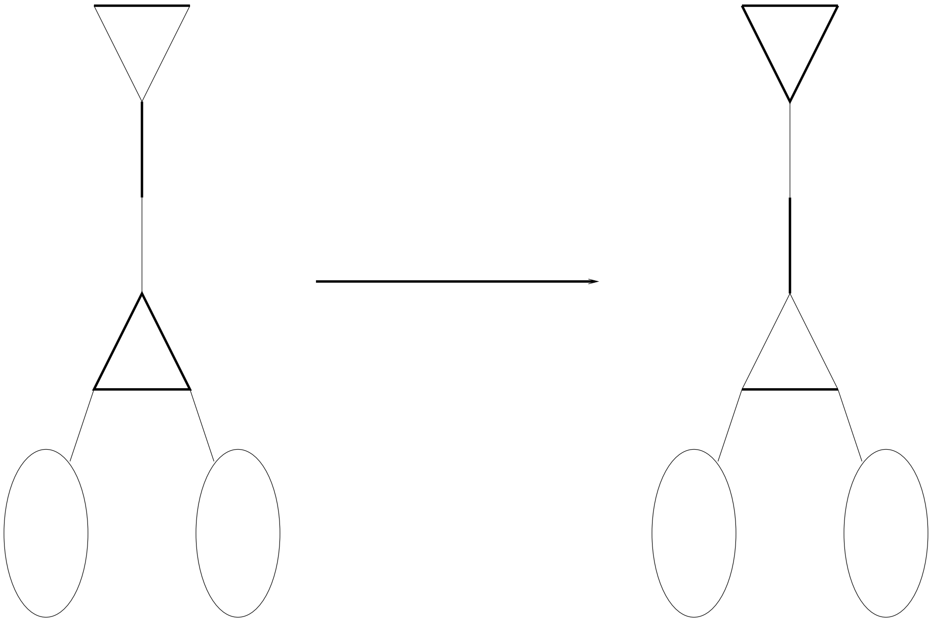
3.17. Állítás. *A fenti K-val és e-vel $\nu_2(K \cup e) \leq \nu_2(K) + 1$.*

Bizonyítás: Ha lenne 2-vel nagyobb 2-párosítás $K \cup e$-ben, akkor ezt kiegészítve C-nek e-től független c darab élével, az eredeti gráfban nagyobb 2-párosítást kapnánk, ellentmondás. □

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor $K \cup e$-ben 1-gyel nagyobb a legnagyobb 2-párosítás, mint K-ban. Nyilván ez a nagyobb párosítás szükségképpen tartalmazza e-t (2 súllyal) . Mivel a K-beli bármelyik legnagyobb 2-párosításban nincs páratlan kör (mivel az eredeti gráfban a legnagyobb 2-párosítás a lehető legtöbb páratlan kört tartalmazta), ez csak úgy lehetséges, ha a legnagyobb 2-párosítás $K \cup e$-ben tartalmaz páratlan kört.

Hajtsuk végre az ún. *pumpálás* lépést: vegyük $K \cup e$-ben a legnagyobb 2-párosítást (amely tehát tartalmazza e-t), vegyük hozzá C-nek c darab (a 2-párosítás éleitől is) független élét, ekkor egy ugyanakkora 2-párosítást kapunk az egész gráfban, és a páratlan körök száma nem nőhetett, tehát a C kör helyett egy másik páratlan kör van benne a 2-párosításban, tehát „kifele pumpáltuk" a 2-párosításbeli páratlan kört (17. ábra), ezzel persze megváltoztak a fontos páratlan körök F-ben.

Ezt a műveletet hajtsuk végre ahányszor tudjuk (ügyelve arra, hogy ne azt a komponenst válasszuk, amely a többi fontos kört tartalmazza, különben végtelen sokszor végre tudjuk hajtani a műveletet), véges sok lépésben (igazából $O(n)$ lépésben, ahol n az eredeti F gráf pontszáma) leállunk.



17. ábra.

Amikor tehát nem tudunk többet pumpálni, akkor van egy olyan C fontos páratlan kör, amelyet elhagyva a maradék komponensek közül az egyik tartalmazza az összes többi fontos páratlan kört, a többibe pedig nem tudunk pumpálni, ami azt jelenti, hogy egy ilyen K komponensben egyrészt semelyik legnagyobb 2-párosítás nem tartalmaz páratlan kört, másrészt a mérete ugyanakkora, mint a legnagyobb 2-párosítás mérete $K \cup e$-ben.

3.18. Lemma. *A K gráfnak megvan a König-tulajdonsága. A $K \cup e$ gráfnak megvan a König-tulajdonsága.*

Bizonyítás: Először azt látjuk be, hogy ha K König, akkor $K \cup e$ is az. Ehhez belátunk egy lemmát, aminek ez közvetlen következménye lesz.

3.19. Lemma. *Ha egy tetszőleges G gráfra és egy $x \in V(G)$ pontra teljesül, hogy $\nu_2(G \setminus x) = \nu_2(G) - 2$, akkor ha G König, akkor $G \setminus x$ is az.*

Bizonyítás: A feltételből következik, hogy x-et fedi minden legnagyobb 2-párosítás. Sőt, mivel G König, ezért $\nu_2(G) = 2\nu(G)$, ezért x-et fedi minden legnagyobb párosítás is. Tehát ha M egy legnagyobb párosítás G-ben, akkor valamely y pontra $xy \in M$, és $M - xy$ egy legnagyobb párosítás $G \setminus x$-ben (2 súllyal egy legnagyobb 2-párosítás). Ha tehát elkezdjük építeni az F alternáló erdőt $G \setminus x$-ben az $M - xy$ párosításra, akkor nem kaphatunk kelyhet a 3.13. állítás miatt. Ezért az alternáló erdő belső pontjai plusz $(G \setminus x) \setminus F$ minimális lefogó ponthalmaza egy $\nu(G \setminus x)$ méretű minimális lefogó ponthalmaz lesz $G \setminus x$-ben. $\square$

3.20. Megjegyzés. *Ezzel közvetve azt is megkaptuk, hogy van olyan minimális lefogó ponthalmaz G-ben, amely tartalmazza x-et.*

Így a lemmát alkalmazva $K \cup e$-re és $x = K \cap e$-re, azt kapjuk, hogy ha K König, akkor $K \setminus x$ is az, és akkor persze $K \cup e$ is König.

Ezek után tehát már csak azt kell belátni, hogy K König, ahol tehát K körök fája, és semelyik legnagyobb 2-párosítás nem tartalmaz páratlan kört.

Keressünk meg egy M legnagyobb párosítást, amely egyben egy kanonikus legnagyobb 2-párosítás is lesz, ha az éleket dupla súllyal vesszük (3.6. lemma), és kezdjük el építeni az alternáló erdőt. Mint azt már a 3.13. állításban megmutattuk, mivel semelyik legnagyobb 2-párosítás nem tartalmaz páratlan kört, ezért a legnagyobb párosításból elindított alternáló erdő építésekor nem találunk kelyhet, tehát a belső pontok lefogják az összes olyan élet, amelynek valamelyik végpontja az erdőben van. Ezért elég azt megmutatni, hogy ha egy körök fájában semelyik legnagyobb 2-párosítás nem tartalmaz páratlan kört, és van a gráfban teljes párosítás, akkor a gráf König.

Persze ha a gráf páros, akkor készen vagyunk. Ha K tartalmaz egy C páratlan kört, akkor szeretnénk megmutatni, hogy C-nek nincs benne minden éle legnagyobb 2-párosításban. Ehhez az első észrevétel, hogy ha az e él elvágó él K-ban, akkor e vagy benne van minden legnagyobb párosításban, vagy nincs benne egyben sem – ezt az határozza meg, hogy az él elhagyásával páratlan vagy páros komponensekre esik szét a gráf. Vegyük továbbá észre, hogy ha egy e elvágó él benne van minden legnagyobb párosításban, akkor ez az él benne van minden kanonikus legnagyobb 2-párosításban is (2 súllyal).

Tekintsük tehát azokat az éleket, amelyeknek pontosan az egyik végpontja van benne a körben, ezek elvágó élek. Ha ezek között nincs olyan e él, amelyik minden legnagyobb párosításban benne van, akkor K-ban a legnagyobb 2-párosítás tartalmazná a kört, ellentmondás. Ha viszont van ilyen e él, akkor a fentiek miatt azok a körbeli élek, melyek szomszédosak e-vel, nem lehetnek benne legnagyobb kanonikus 2-párosításban. $\square$

Ezzel tehát megmutattuk, hogy ha egy körök fájában semelyik legnagyobb 2-párosítás nem tartalmaz páratlan kört, akkor a gráf König. Ezért a K gráf is König, amiből következően $K \cup e$ is, tehát a minimális lefogó ponthalmaz mérete egyenlő a legnagyobb párosítás méretével, ami egyben a legnagyobb 2-párosítás méretének a fele.

Tegyük fel tehát, hogy a pumpálást nem tudjuk többet végrehajtani a C

fontos páratlan körből. Töröljük el gondolatban C éleit. Ekkor a megmaradó gráfban az egyik komponens tartalmazza az összes fontos páratlan kört, míg a többi komponens König-tulajdonságú. Keressük meg a komponensekben a minimális lefogó ponthalmazt, majd egészítsük ki a kör megfelelő $c+1$ pontjával ($|C| = 2c+1$) úgy, hogy legyen ezek között az a pont, amelyből leágazik a többi fontos páratlan kört tartalmazó komponens.

Ha levágjuk a többi fontos kört tartalmazó komponenst, akkor a maradék gráf egy legnagyobb 2-párosításában pontosan egy páratlan kör van, és lefogtuk annyi ponttal a gráfot, mint amennyit a tételben állítottunk. Így tehát levágva ezt a gráfot az eredeti körök fájáról, az összekötő élet lefogtuk körbeli ponttal, tehát a legtöbb páratlan kört tartalmazó legnagyobb 2-párosítások páratlan köreinek a számára vonatkozóan indukcióval bizonyíthatunk. Annyit kell még meggondolni, hogy ha a legtöbb páratlan kört tartalmazó maximális 2-párosítás egy páratlan kört tartalmaz, akkor az elmondottak kis egyszerűsítéssel működnek. □

3.21. Megjegyzés. *A bizonyítás során csak azt használtuk ki, hogy a páratlan körök bármilyen körtől pontdiszjunktak, tehát az eredeti fa pontjaiba páratlan köröket, és tetszőleges páros gráfot is fújhattunk volna.*

A tételből közvetlenül nem kapjuk meg azt a legnagyobb 2-párosítást, amely a legtöbb páratlan kört tartalmazza, azonban a tétel és az alábbi algoritmus segítségével már könnyen meghatározható.

Ezek után adjunk algoritmust a minimális lefogó ponthalmaz megtalálására körök fájában, sőt, az algoritmus minden olyan gráfban megtalálja a minimális lefogó ponthalmazt, amelyben a páratlan körök pontdiszjunktak. Vegyük a G gráf maximális 2-összefüggő komponenseit, ez megkapható egy módosított mélységi kereséssel ([27]), nevezzük ezeket a komponenseket egyszerűen blokkoknak. Vegyünk egy olyan blokkot, amely csak egy pontban érintkezik más blokkokkal (ilyen blokk nyilván létezik), legyen ez a blokk G_1, és érintkezzék más blokkokkal az x pontban! Legyen G_2 a többi blokk által feszített gráf, nyilván x benne van G_2-ben is.

3.22. Lemma. *Érvényes a következő két egyenlőtlenség:*
(i) $\tau(G_1) + \tau(G_2) - 1 \leq \tau(G)$, *és egyenlőség csak akkor lehet, ha* G_1*-ben is és* G_2*-ben is van* x*-et tartalmazó minimális lefogó ponthalmaz.*
(ii) $\tau(G_1) + \tau(G_2 \setminus x) \leq \tau(G)$

Az állítások triviálisak, azonban segítségükkel belátunk egy másik állítást:

3.23. Állítás. *Ha* G_1*-ben létezik* x*-et tartalmazó minimális* T *lefogó ponthalmaz, akkor* $\tau(G) = \tau(G_1) + \tau(G_2 \setminus x)$, *ha nem létezik* x*-et tartalmazó minimális lefogó ponthalmaz* G_1*-ben, akkor* $\tau(G) = \tau(G_1) + \tau(G_2)$.

Bizonyítás: Az első esetben ha veszünk G_1-ben egy x-et tartalmazó minimális lefogó ponthalmazt, $G_2 \setminus x$-ben egy minimális lefogó ponthalmazt, akkor a kettő együtt lefogó ponthalmaz lesz G-ben is, és a lemma (ii) állítása miatt minimális is.

Ha nincs benne x semmilyen minimális G_1-lefogó ponthalmazban, akkor a G_1-ben egy minimális lefogó ponthalmaz és G_2-ben egy minimális lefogó ponthalmaz együtt minimális T lefogó ponthalmaz lesz G-ben is. Ugyanis T nyilván lefogó ponthalmaz lesz, kisebb lefogó ponthalmaz pedig azért nincs, mivel x nincs benne G_1 egy minimális lefogó ponthalmazában, tehát az előző lemma (i) egyenlőtlensége szigorúan teljesül. $\square$

Így az algoritmus a következőképpen néz ki: vegyünk egy olyan G_1 blokkot, amely csak egy x pontban érintkezik más blokkokkal, és nézzük meg, hogy x benne van-e egy minimális G_1 lefogó ponthalmazban. Ha G_1 páratlan kör, akkor ez közvetlenül látszik, ha pedig páros gráf, akkor azt kell megnézni, hogy x-et elhagyva G_1-ből csökken-e a legnagyobb párosítás nagysága (ha igen, akkor x benne van minimális lefogó ponthalmazban). Ha azt kapjuk, hogy x benne van minimális lefogó ponthalmazban, akkor rekurzióval vizsgáljuk tovább G_2-t, ha nincs, akkor vizsgáljuk $G_2 \setminus x$-et. Ehhez természetesen azt kell észrevenni, hogy az a gráfosztály, amelyben a minimális lefogó ponthalmazt keressük, zárt a pontelhagyásra nézve.

Mivel egy blokk levágásához legfeljebb egy teljes párosítást kell lefuttatni, ami nagyon durva becsléssel $O(n_{G_1}^3)$, a $T(G) = n_{G_1}^3 + T(G_2)$ rekurziós egyenletet megoldva (felhasználva, hogy $n_{G_1} + n_{G_2} = n + 1$) azt kapjuk, hogy a futási idő $O(n^3)$.

4. Gyakorlati eredmények

Az elméleti eredmények, korlátok élességét, gyakorlati alkalmazhatóságát megvizsgálandó, írtunk néhány útszínező programot C++-ban.

Az első programban az input általános (irányított vagy irányítatlan) gráf volt, és az inputhoz tartozott az elvezetés is. Ez azt jelentette, hogy gyakorlatilag egy off-line modellben kellett színeznünk. A program egy teljesen mohó algoritmust használt a színek kiosztására: miután csökkenő sorrendben rendezte az utakat a hosszuk szerint, sorban megszínezte őket, mindig a legkisebb sorszámú szabad színt adva az aktuális útnak. A színek számának és a torlódásnak az arányát szerettük volna ezzel minimalizálni.

Mivel az algoritmus a lehető legegyszerűbb volt, ezért nem vártunk hatékony színezést, emiatt meglepő volt, hogy először az összes inputra megtalálta az elméleti optimumot az algoritmus, elég volt annyi szín az utak megszínezéséhez, mint amennyi a torlódás. Ez persze nem az algoritmus jóságát bizonyítja, mivel mint azt már korábban is írtuk, bizonyos inputokat semmilyen algoritmussal nem lehet annyi színnel megszínezni, mint amennyi a torlódás. Ezért megvizsgáltuk az inputot, ami az Ericssontól származott, tehát feltételezhetően valós adatokon alapult. Megvizsgálva az éleken a torlódást, kiderült, hogy van egy nagy torlódású e él, a többi élen a torlódás jóval kisebb, ezért bár lehettek olyan utak, amelyekből alkotott konfliktusgráf megszínezéséhez több szín kellett, mint az *ezen* utak által meghatározott maximális torlódás, volt elég színünk, mivel az e élet használó utak megszínezéséhez eleve sok színre volt szükség (tehát ha például van egy 100 torlódású él, és utak egy olyan részrendszere, amelyben a maximális torlódás 50, de legalább 70 szín kell a megszínezéshez, akkor a végeredményben nem tükröződik a részrendszerben az arány megnövekedése).

Ennek kiküszöbölésére olyan inputot próbáltunk megadni, amelyben sok maximális (vagy annak közelében lévő) torlódású él van. Az eredmény még így sem volt olyan, mint amilyennek vártuk (2. táblázat), az algoritmus majdnem mindig az elvi alsó határt adta a színek számára.

Ez egyrészt azt mutatta, hogy még mindig kevés volt a maximális torlódású él, másrészt arra enged következtetni, hogy a gyakorlatban a maximális torlódás viszonylag kevés élen fordul elő, így általában már a maximális torlódás meghatározhatja a felhasználandó frekvenciák számát.

Megvizsgáltunk egy olyan esetet is, amikor minden élen ugyanakkora volt a torlódás. Az input gráf a teljes 6 pontú gráf volt, és az elvezetést az összes 3 hosszú út alkotta. A torlódás így 36 lett, és a mohó algoritmus 49 színnel tudta megszínezni az utakat. Tehát lehetséges, hogy egy más algoritmus

2. táblázat.

pontok száma	25	30	50	60
élek száma	88	80	196	226
utak száma	2848	870	1190	3540
torlódás	111	88	36	183
színek száma	111	88	40	183

kevesebb színnel meg tudja színezni az utakat.

Mivel a gyakorlatban általában egyrészt on-line módon kell az utakat megszínezni, másrészt a frekvenciakiosztással együtt az elvezetés is feladat, ezért írtunk egy olyan programot is, amely egyszerre elvezet és színez is. Az input egy hálózat volt, valamint egymás után érkező véletlenszerű igények halmaza.

Az algoritmus minden e élhez nyilvántartott egy $c(e)$ foglaltságot, ami azt mondta meg, hogy hány elvezetés használja az e élet. Az elvezetésekhez egy *zsúfoltság* nevű változót rendelt hozzá az algoritmus, amely azt mondta meg, hogy mennyi az elvezetésbeli élek foglaltságának a maximuma.

Ezek után az algoritmus adott igényre először szélességi kereséssel megkereste azokat az utakat a végpontok között, melyek hossza élszámban minimális, majd ezen utak közül egy módosított Dijkstra-algoritmussal meghatározta azt az utat, amelynek a legkisebb volt a zsúfoltsága. Ha s-ből t-be szeretnénk meghatározni a legkisebb zsúfoltságú utat, és $d(t)$ jelöli a legkisebb zsúfoltságot, akkor igaz a következő lemma:

4.1. Lemma. *Változtassuk meg a Dijkstra-algoritmusban a „csökkentő” lépést: ha* $d(u) > \max(d(v), c(e))$*, akkor* $d(u) := \max(d(v), c(e))$*. Ekkor a módosított Dijkstra-algoritmus megtalálja a legkisebb zsúfoltságú utat.*

A bizonyítás nagyon hasonló az eredeti Dijkstra-algoritmus jóságának a bizonyításához, itt most nem részletezzük ([23]).

Az algoritmus, miután meghatározta az elvezetést, a legkisebb sorszámú szabad színt adja az útnak.

Természetesen az on-line algoritmusok fontos része a törlés, azaz az igények megszűnése, hiszen hosszútávon ez növelheti meg nagyon a színek számának és a torlódásnak az arányát (pl. 1.15. tétel). Az algoritmus egy szakaszban vagy töröl, vagy elvezet egy új igényt: minden szakaszban kiszámolja a $p = \sqrt{m/n^2}$ értéket (m az éppen zajló kommunikációk száma), és p valószínűséggel töröl egy igényt, $1 - p$ valószínűséggel elvezet egy új igényt.

Miután ez megtörént, a módosított adatokkal újra kiszámolja az algoritmus p-t, és megint vagy elvezet egy új igényt, vagy töröl egy igényt. Tehát minél több az éppen zajló kommunikációk száma, annál valószínűbb, hogy az algoritmus megszüntet egy igényt, speciálisan n^2-nél több kommunikáció nem zajlik egyszerre (tehát valóban jogos p-t minden szakaszban valószínűségként kezelni).

A futási időket a 3. táblázat mutatja, 10, 20, 30, 40 és 50 pontú oda-vissza irányított gráfokat vizsgáltunk 3, 4, 5 és 6 átlagos ki-fokkal, az összesen érkező új igények száma 2500 volt.

		átlagos ki-fok			
		3	4	5	6
pon-	10	13	18	22	30
tok	20	28	38	49	56
	30	43	57	75	90
szá-	40	58	77	97	111
ma	50	65	89	112	160

3. táblázat.
Futási idő másodpercben a pontszám és az élsűrűség függvényében

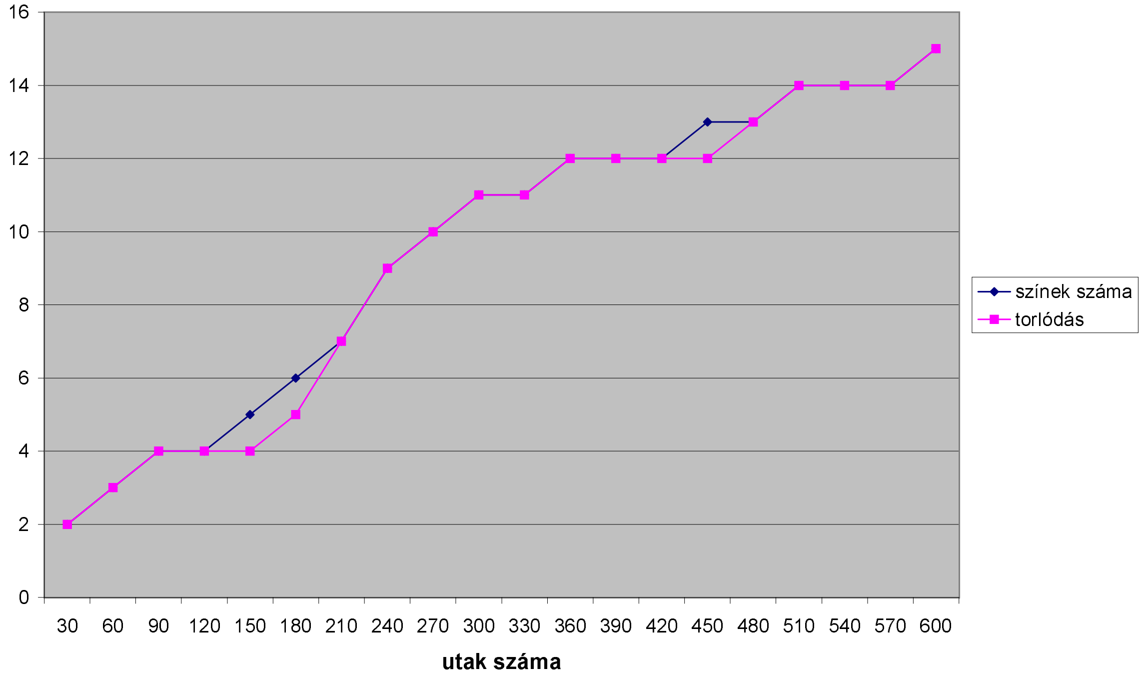
A 18. és 19. ábra ugyanarra az inputra az on-line algoritmus eredményét mutatja először törlés nélkül majd törléssel (a gráfban 50 pont van, az átlagos ki-fok 6). Látható, hogy ha nincs törlés, akkor az algoritmus majdnem mindig tud annyi színnel színezni, mint a torlódás, ez persze nem feltétlenül jelent optimális színszámot, mert a torlódás lehet, hogy nagy. Két pont között átlagosan legfeljebb 6 éldiszjunkt út vezet (mivel ennyi az átlagos ki-fok), de ha a hat éldiszjunkt út különböző hosszú, akkor minden igény a legrövidebb úton lesz elvezetve, holott legfeljebb hat igényt el lehetne vezetni úgy is, hogy a torlódás egy legyen. Tehát mivel az elvezető algoritmus a legrövidebb utak között válogat, ezért akkor lehet a torlódás közelebb az optimumhoz, ha két pont között az átlagos úthossz nagy, tehát a gráf ritka, ezért választottunk olyan input hálózatokat, ahol a pontoknak kicsi az átlagos ki-foka.

Ha a törlést is megengedjük, akkor megnő a színek száma és a torlódás között a különbség (más inputokra kaptunk jelentősebb különbséget is). Másrészt vannak olyan időperiódusok, amikor *csökken* a torlódás, ami nyilván csak a törlést megengedő modellre lehet jellemző.

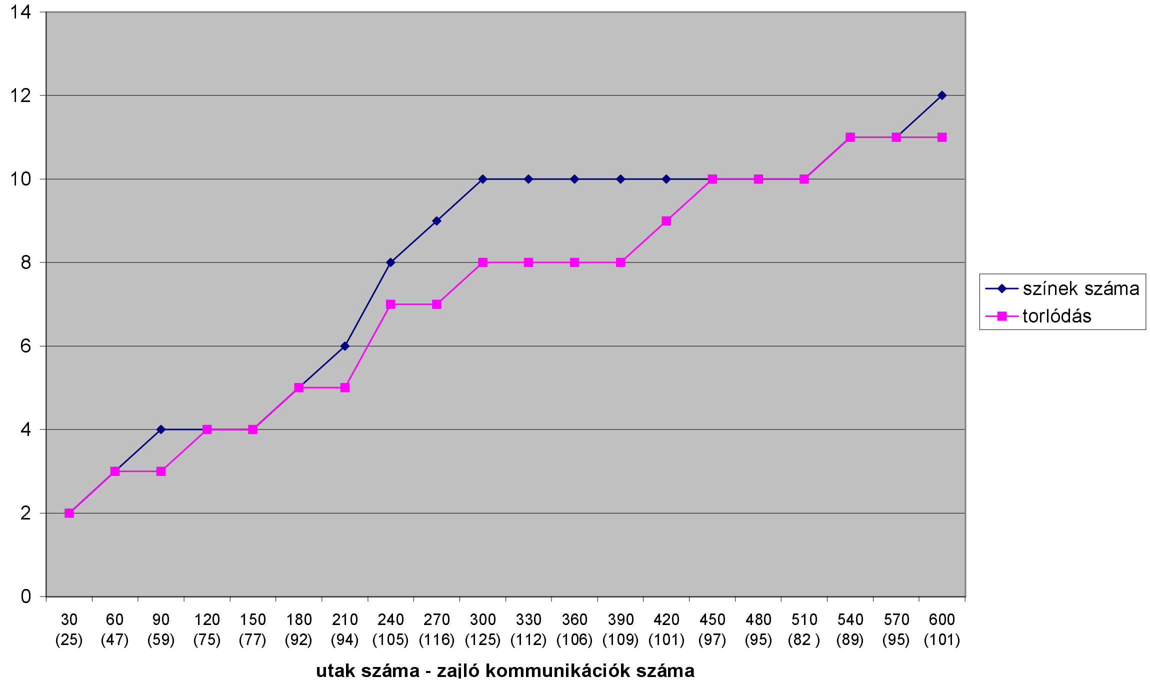
Ami miatt azonban túlságosan nem nőtt meg a különbség a színek száma és a torlódás között, annak az az oka, hogy mind az új igények, mind a megszüntetések véletlenszerűen érkeztek, ezért kis valószínűséggel fordult az elő, hogy egymás után olyan elvezetések szűntek meg, amelyek mind használtak egy maximális torlódású élet. Ezért érdemes lehet olyan inputokat figyelni, amelyben az aktuális törlések olyan elvezetésekre koncentrálódnak, amelyek használnak maximális torlódású élet.

A jövőre vonatkozó tervek között szerepel az is, hogy egy általánosabb modellt vizsgáljunk, amelyben adott egy `MAXSZIN` változó, mely a hálózatban működtethető frekvenciák maximális számát jelenti, az éleknek kapacitásuk van, az utaknak forgalmuk, és az eddigiekhez hasonló módon szeretnénk az utakat megszínezni ügyelve arra, hogy egy rögzített élet használó egyszínű utak forgalmának az összege ne haladja meg a kapacitás/`MAXSZIN` hányadost.

A programokhoz tartozó forráskódok megtalálhatók a
http://www.bolyai1.elte.hu/~dome honlapon.



18. ábra.



19. ábra.

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt témavezetőmnek, Király Zoltánnak szeretném megköszönni a segítségét, egy gyakorlatban felmerülő problémacsoporton keresztül a gráfelmélet és a számítástudomány több nagyon érdekes területére vezetett el. Köszönöm továbbá lelkiismeretes és aprólékos javító munkáját, építő kritikái fontos problémákra hívták fel a figyelmemet mind szakmai, mind stilisztikai szempontból.

Köszönöm Fige Péternek, Rokob Tibor Andrásnak és Wágner Ferencnek a programozásban és a szövegszerkesztésben nyújtott segítséget.

A dolgozat létrejöttét támogatta az ETIK (Egyetemközi Távközlési és Informatika Központ).

Hivatkozások

[1] F. T. Leighton and S. Rao. An Approximate Max-Flow Min-Cut Theorem for Uniform Multicommodity Flow Problems with Applications to Approximation Algorithms. In *Proceedings of the 29th Annual IEEE Synposium on Foundations of Computer Science. pages 422-431, 1998.*

[2] Y. Aumann, Y. Rabani. Improved Bounds for All Optical Routing, In Proc. of 6th SODA (1995), pp. 567-576.

[3] R. K. Pankhaj. Architectures for Linear Lightwave Networks. Ph. D. thesis, MIT, Cambridge MA, 1992

[4] A. Aggarwal, A.Bar-Noy, D. Coppersmith, R. Ramaswami, B. Schieber, and M. Sudan. Efficient Routing and Scheduling algorithms for optical networks. In *Proceedings of the 5th Annual ACM-SIAM Symphosuim on Discrete Algorithms, pages 412-423, 1994.*

[5] P. Raghavan, E. Upfal. Efficient Routing in All-Optical Networks, Proc. 26th Ann. ACM Symp. on the Theory of Computing (STOC '94), 1994, pp. 133-143.

[6] M. Mihail, K. Kakalmanis, S. Tano. Efficient access to optical bandwidth, Proc. 36th Ann. IEEE Symp. on Foundations of Computer Science (FOCS '95), October 1995, pp. 548-557.

[7] C. Kaklamanis, P. Persiano. Efficient Wavelength Routing in Directed Fiber Trees, Proc. 4th European Symp. on Algorithms (ESA '96), Lecture Notes in Computer Science, vol. 1136, Springer, Berlin, pp. 460-470.

[8] E. Kumar, E. Schwabe. Improved Access to Optical Bandwidth in Trees, Proc. 8th Ann. ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms (SODA '97), January 1997, pp. 437-444.

[9] T. Erlebach, K. Jansen, C. Kaklamanis, P. Persiano. An Optimal Geedy Algorithm for Wavelength Allocation in Directed Tree Networks, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Sciende, vol. 40, 1998, pp. 117-129.

[10] A. Aggarwal, A. Bar-Noy, D. Coppersmith, R. Ramaswami, B. Schieber, M. Sudan. Efficient Routing in Optical Networks, Journal of the ACM, vol. 46, No. 6, November 1996, pp. 973-1001.

[11] O. Gerstel, G. Sasaki, S. Kutten, R. Ramaswami. Worst-case Analysis, of Dynamic Wavelength Allocation in Optical Networks, IEEE/ACM Transactions on Networking, vol. 7. No. 6., December 1999.

[12] Katona Gy., Recski A. Bevezetés a véges matematikába, egyetemi jegyzet, ELTE Budapest, 1993.

[13] V. Kumar, E. J. Schwabe. Improved Access to Optical Bandwidth in Trees, Proceedings of the 8th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms SODA '97, 1997, pp. 437-444.

[14] K. Jansen. Approximation Results for Wavelength Routing in Directed Trees, Proceedings of IPPS '97, Second Workshop on Optics and Computer Science (WOCS), 1997.

[15] J. Kleinberg, A. Kumar. Wavelength Conversion in Optical Networks, Proc. 10th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 1999.

[16] G. Wilfong, P. Winkler. Ring Routing and Wavelength translation, Proc. 9th ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms, 1998.

[17] F. Chudak, M. Goemans, D. Hochbaum, D. Williamson. A Primal-Dual Interpretation of Two 2-approximation Algorithms for the Feedback Vertex Set Problem in Undirected Graphs, Operations Researcs Letters,

[18] T. Erlebach, K. Jansen. Scheduling of Virtual Connections in Fast Networks, Proc. 4th Workshop on Parallel Systems and Algorithms (PASA '96), World Scinetific, Singapore, 1997, pp. 13-32.

[19] Lovász L., M. D. Plummer. Matching Theory, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986

[20] R. Lipton, R. Tarjan. A Separator Theorem for Planar Graphs, IAM J. Applied Math. 36(1979).

[21] R. Lipton, R. Tarjan. Applications of a Planar Separator Theorem, SIAM J. Computing, 9(1980).

[22] R. K. Pankhaj. Wavelength Requirements for Multicasting in All-Optical Networks, IEEE/ACM Transactions on Networking, vol. 7, No.3, June 1999

[23] T. H. Cormen, C. E. Leiserson. R. L. Rivest. Algoritmusok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1999.

[24] S. Even, A. Itai, A. Samir. On the Complexity of Timetable and Multicommodity Flow Problems, SIAM J. Comput. 5, pp. 691-703.

[25] R. M. Karp. Reducibility among Combinatorial Problems, in R. E. Miller and J. W. Tatcher (eds.), Complexity of Computer Computations, Plenum Press, New York, 85-103.

[26] D. Hochbaum. Approximation Algorithms for the Set Covering and Vertex Cover Problems. SIAM Journal on Computing, 11 (1982), pp. 555-556.

[27] Elekes Gy. Véges matematika jegyzet elsőéves matematikusoknak