Hibadetektáló szűrők tervezése lineáris rendszerekre

Diplomamunka

Stikkel Gábor

Témavezetők: Dr. Bokor József, SZTAKI
Dr. Schipp Ferenc, ELTE

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2001. április 30.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **3**

2. Előzmények **6**
2.1. Állapotteres leírás 6
2.2. Hardy-terek 7
2.3. Külső leírás 9
2.4. Invariáns alterek 11
2.5. Lineáris algebrai eszközök 13
2.6. Invertálhatóság és input-megfigyelhetőség 14

3. Lineáris mátrixegyenlőtlenségek **17**
3.1. Konvex optimalizálás 17
3.2. Az LMI-k alapvető tulajdonságai 19
3.3. Rendszerelméleti problémák LMI alakban 20
3.3.1. Stabilitás 20
3.3.2. Diagonális skálázás 21
3.3.3. Szimultán stabilizálás 21

4. Geometriai megközelítés **22**
4.1. Hibamodell 22
4.2. Megfigyelő alapú detektálás 23
4.3. A feladat átfogalmazása 25
4.4. Approximatív hibadetektálás 27
4.5. $\mathcal{H}_\infty$-megfigyelők paraméterezése LMI-vel 29
4.6. Megfigyelők érzékenysége 32

5. Frekvenciatartománybeli eredmények **34**
5.1. Detektálás átviteli függvényekkel 34

5.2. Performancia indexek 36

6. Invertálhatósági kérdések 38

6.1. A reziduálképzés időtartományban 38

6.2. Frekvenciatartománybeli reziduálok 40

6.3. Inverzión alapuló hibadetektálás 41

7. Összefoglalás, numerikus példák 44

8. Bizonyítások 50

8.1. 3. Fejezet 50

8.2. 4. fejezet 51

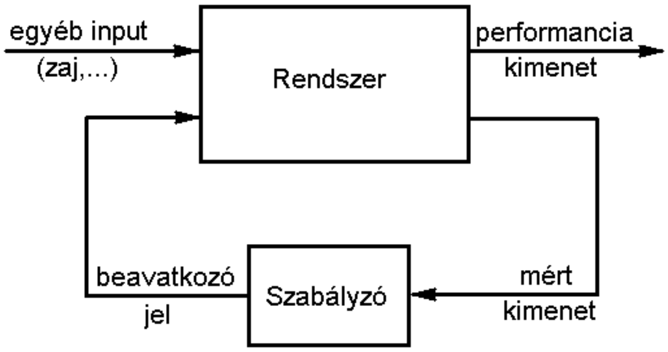
8.3. 7. fejezet 52

1. Fejezet

Bevezetés

A rendszer- és irányításelmélet is, mint sok más mérnöki tudomány azon diszciplínák közé tartozik, melyek nagy mértékben támaszkodnak a matematikára. Amint ebben a diplomamunkában is látni fogjuk a matematikán belül is igen tág területeket ölel fel, kezdve a lineáris algebrától a numerikus analízisen át egészen az optimalizálásig, hogy csak néhányat említsünk közülük.

Ahogyan neve is mutatja eme tudományág dinamikus rendszerek vizsgálatával, bizonyos viselkedésüknek, állapotuknak az elérésével - irányítással foglalkozik. Az 1.1. ábra mutat egy nagyon leegyszerűsített, ám jól érthető diagrammot a szóbanforgó rendszerekről.



1.1. ábra : A rendszer legegyszerűbb blokkdiagrammja

Mint láthatjuk magának a rendszernek bemenetei és kimenetei vannak, azok között is többféle tulajdonságúak. Az inputok közül ki kell emelnünk a beavatkozó jel szerepét, melyet bizonyos jó tulajdonság (pl. stabilitás) eléréséhez szinte mindig alkalmazni kell. A beavatkozó inputot az ún. aktuátorok közvetítik a rendszernek. Emellett érhetik zavarások is a rendszert, melyek speciális inputként foghatók fel.

Magában a "Rendszer" dobozban az állapotokat és azok változásait képzeljük el. A pillanatnyi állapot és a rendszert érő külső hatások határozzák meg a rendszer állapotának fejlődését. Válaszait az őt érő hatásokra a kimeneteken tapasztalhatjük, melyeket ezen a ponton két nagy csoportba soroltunk: mért- és performancia kimenetek. Ahogyan neve is mutatja mért kimeneteken azon outputokat értjük, melyeket a mérőeszközök, szenzorok segítségével mérni tudunk. Performancia kimenetet nem mérünk, ilyen típusú kimenet pl. egy aktív kerékfelfüggesztés csillapítási képessége.

A mért jeleket lehetőségünk van hasznosítani a rendszer bizonyos tulajdonságainak megváltoztatására, bizonyos állapotainak elérésére és egyéb diagnosztikai célokra. Ha az adott rendszert magára hagyva nem a nekünk megfelelő tulajdonságokat mutat (instabilitás, nem kielégítő performancia), akkor irányítani kell. A mért output segítségével a szabályzó egység (elterjedt nevén kontroller) előállítja a kívánt cél eléréséhez szükséges inputot, amit majd a rendszerbe közvetít az ún. visszacsatolás segítségével.

Fussuk át röviden milyen matematikai területeket ölelhet fel a fent leírt műveletsor! A valóság fizikai rendszerei többnyire bonyolultak, teljes mivoltjukban nehezen kezelhetők, esetleg nem tökéletesen ismertek előttünk a paramétereik, ezért gyakran csak azok leegyszerűsített mását, modelljét tudjuk használni. Ahhoz, hogy jól közelítsük a valóságos rendszereket jó modellekre van szükséegünk. Itt lép be tehát a modellalkotás, mint részben matematikai tudományág.

Az időben és térben folytonos rendszerek működését szinte mindig jól leírhatjuk differenciálegyenletekkel, melyek numerikus megoldásaival a rendszer lényegi tulajdonságait felfedhetjük. A rendszer irányításához szükséges kritériumokat többnyire valamilyen optimalizációs feladatként fogalmazzuk meg, melyek megoldásai gyakran igen bonyolult numerikus módszerek használatát igénylik.

Nagy megbízhatóságú irányítási rendszerekre sok mérnöki alkalmazásban szükség van. Példaként említhetjük a műholdakat, repülőgépeket, melyeknek fontos részei a hibaérzékelő részrendszereik. Ezek a részrendszerek a működés során figyelemmel kisérik az összes rendszerben levő egységet és ezek meghibásodása esetén jelezniük kell például a pilótának.

A diplomamunka célja a hibadetektálás különböző módszereinek bemutatása, összehasonlítása, továbbá olyan kutatási irányok vizsgálata, melyekkel az eddigi eredmények általánosíthatók. A rendszerelmélet általunk használt legfontosabb fogalmainak ismertetése (2. Fejezet) után önálló részt (3.) szentelünk a manapság egyre elterjedtebb lineáris mátrixegyenlőtlenségek technikájának bemutatására, melyet a későbbiekben alkalmazni próbálunk. Ezek után következnek a hibadetektálás különböző megközelítéseivel foglalkozó fejezetek (4-5-6.), végül (7.) ezen megközelítési módokat hasonlítjuk össze és példák keretében szemléltetjük alkalmazhatóságukat.

A szerző köszönettel tartozik Dr. Bokor Józsefnek, Dr. Schipp Ferencnek, Szabó Zoltánnak és Szászi Istvánnak segítőkész munkájukért.

2. Fejezet

Előzmények

A rendszer- és irányításelméletben leggyakrabban előforduló fogalmak és állítások rövid összefoglalására kerül sor ebben a fejezetünkben, tekintetbe véve azokat a segédeszközöket, melyekre a későbbi részekben támaszkodni fogunk. Jelölje $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ és $\mathcal{Y}$ rendre az n, m és p dimenziós euklideszi tereket, melyeken a szokásos euklidesz távolságot tekintjük:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

2.1. Állapotteres leírás

Jelen dolgozatban folytonos idejű lineáris időinvariáns (a továbbiakban LTI= Linear Time Invariant) rendszerekkel foglalkozunk, melyek ún. belső leírása a következő differenciálegyenletekkel adható meg:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{2.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2.2}$$

ahol $A : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$, $C : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ és $D : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ lineáris leképezések, melyeket gyakran fogunk azonosítani mátrixukkal, melyek rendre $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbb{R}^{p\times n}$ és $\mathbb{R}^{p\times m}$-ből valók. $\mathcal{X}$-et állapottérnek, $\mathcal{U}$-t inputok-, míg $\mathcal{Y}$-t az outputok terének hívjuk. Az x, u és y időfüggvényeket általában valamilyen időtartományon értelmezett négyzetesen Lebesgue-integrálható függvények teréből vesszük. A későbbiekben az egyszerűbb írásmód kedvéért elhagyjuk az idő jelölését ezen vektorokon. Ugyancsak elhagyjuk a kezdeti feltétel külön feltüntetését, ezt nullának tekintjük, ha másképp külön nem jeleznénk. A fenti első egyenletet szokás állapotegyenletnek, míg a másodikat megfigyelési egyenletnek mondani, míg a rendszernek ezen leírási módját állapotteres, vagy belső leírásnak. A kezdeti feltétel t_0 időpontja az időinvariancia miatt nullának választható.

2.1.1. definíció. *Az (2.1)-(2.2) rendszert* ***asszimptotikusan stabil****nak nevezzük, ha az A mátrix sajátértékei negatív valósrészűek.*

2.1.2. definíció. *Az $(A, B)[(C, A)]$-párt* ***stabilizálható****nak (****detektálható****nak) mondjuk, ha létezik olyan $K(L)$, melyre $A + BK$ $(A - LC)$ asszimptotikusan stabil.*

Jelölje $\mathcal{B}$ a B leképezés képterét, míg $\mathcal{K}$ a C leképezés magterét.

2.1.3. definíció. *Az (A, B)* ***pár irányítható altere****:*

$$\langle A|\mathcal{B}\rangle = \mathcal{B} + A\mathcal{B} + \ldots + A^{n-1}\mathcal{B}.$$

Az (A, B) párt ***irányítható****nak mondjuk, ha $\langle A|\mathcal{B}\rangle = \mathcal{X}$.*

A rendszerelméletben sok fogalom rendelkezik ún. duális párral. Az utóbbi definíció esetében ez a következő:

2.1.4. definíció. *Az (C, A)* ***pár megfigyelhető altere****:*

$$\langle \mathcal{K}|A\rangle = \bigcap_{k=1}^{n} A^{1-k}\mathcal{K} := Ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Az (A, B) párt ***megfigyelhető****nek mondjuk, ha $\langle \mathcal{K}|A\rangle = 0$.*

2.2. Hardy-terek

A hamarosan bevezetésre kerülő átviteli függvények bizonyos tulajdonságainak mérésére kézenfekvő lehetőség valamilyen normájuknak a definiálása. Ehhez a G. H. Hardy-ról elnevezett normált terek kerülnek bevezetésre az alábbiakban. Valós racionális mátrixon olyan mátrixot értünk a továbbiakban, melyek elemei valósegyütthatós racionális függvényei valamely változónak. Valódinak akkor hívünk egy mátrixfüggvényt, ha végtelenben véges hárértékkel rendelkezik. Szigorúan valódi akkor, ha ez a véges határérték nulla.

2.2.1. definíció. *$\mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$**-tér** azon $j\mathbb{R}$-en értelmezett mátrixértékű F függvények Hilbert-tere, melyekre*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Tr}\ F^*(j\omega)F(j\omega)d\omega < \infty.$$

A skalárszorzat ezen a téren:

$$\langle F, G \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Tr}\ F^*(j\omega)G(j\omega)d\omega$$

$F, G \in \mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$, továbbá az ezáltal indukált norma:

$$\|F\|_2 := \sqrt{\langle F, F \rangle}.$$

2.2.2. definíció. *A $\mathcal{H}_2$**-tér** azon $\mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$-beli zárt altér, mely elemei a nyílt jobb félsíkon analitikus mátrixfüggvények*

2.2.3. definíció. *A $\mathcal{H}_2^{\perp}$**-tér** az ortogonális kiegészítője $\mathcal{H}_2$-nek $\mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$-ben: zárt altér, mely elemei a nyílt bal félsíkon analitikus mátrixfüggvények.*

A jól ismert időtartománybeli $\mathcal{L}_2$-terekkel a Fourier-transzformáció segítségével a következő kapcsolat mutatható ki [19]:

$$\mathcal{L}_2(-\infty, \infty) \simeq \mathcal{L}_2(j\mathbb{R})$$
$$\mathcal{L}_2[0, \infty) \simeq \mathcal{H}_2$$
$$\mathcal{L}_2(-\infty, 0] \simeq \mathcal{H}_2^{\perp}.$$

2.2.4. definíció. *A $\mathcal{H}_\infty$**-tér** elemei a nyílt jobb félsíkon analitikus mátrixfüggvények, melyek normájára belátható, hogy*

$$\|F\|_\infty := \sup_{Re\ s>0} \sigma_{\max} F(s) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max} F(j\omega).$$

A második egyenlőtlenség a komplex függvényeknél megismert maximum-elv egy általánosításaként tekinthető. Jelölje $\mathcal{RH}_\infty$ az előbb definiált tér valós racionális alterét, amely tehát azon valós racionális stabil átviteli mátrixokból áll, melyek határértéke a végtelenben véges.

A most definiált terekből való függvényeknek különböző szorzatfelbontásaival fogunk találkozni a későbbi fejezetekben.

2.2.5. definíció. *Az $M, N \in \mathcal{RH}_\infty$ mátrixfüggvényeket $\mathcal{RH}_\infty$* ***felett jobbról relatív prímek****nek mondjuk, ha ugyanannyi oszlopuk van és léteznek olyan $X_r, Y_r \in \mathcal{RH}_\infty$ mátrixfüggvények, melyekkel*

$$X_r M + Y_r N = I.$$

Ha ugyanannyi soruk van és

$$M X_l + N Y_l = I.$$

teljesül valamely $X_l, Y_l \in \mathcal{RH}_\infty$ akkor $\mathcal{RH}_\infty$ ***felett balról relatív prímek****nek nevezzük őket.*

Az egyszerűség kedvéért az "$\mathcal{RH}_\infty$ feletti"-séget nem hangsúlyozzuk a későbbiekben.

2.2.6. definíció. *Legyen T valódi, valós racionális mátrixfüggvény. Ennek jobb (bal) prímfelbontása*

$$T = NM^{-1} \quad (= M^{-1}N)$$

ahol N, M jobbról (balról) relatív prímek.

2.3. Külső leírás

Laplace-transzformálva a (2.1)-(2.2) egyenleteket, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

ahol X, U és Y rendre az állapot-, input- és outputfüggvény Laplace-transzformáltjai. Külső (vagy frekvenciatartománybeli) leíráson azt az input-output relációt értjük, melyre

$$Y(s) = T(s)U(s) \qquad s \in \mathbb{C} \tag{2.3}$$

a nulla kezdeti érték melletti $T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ átviteli (transzfer) függvénnyel (mátrixszal).

2.3.1. megjegyzés. *A (2.3) egyenletet nem csak állapotteres leírásból kapva kepzelhetjük el, hanem bizonyos esetekben ilyen módon adott az LTI rendszerünk. A későbbiekben az s komplex változó jelölését elhagyjuk. A rendszerelmélet egyik fontos ága a realizációelmélet, amely alapproblémája a fenti külső leírásból hogyan készíthető el egy belső, azaz állapotteres leírás.*

Ezen a ponton szeretnénk definiálni a rendszer pólusainak és zérusainak fogalmát is, melyben [12] lesz segítségünkre. Legyen $P(s)$ egy $p \times m$-es polinomiális mátrix, azaz elemei polinomok. Ekkor ahogyan [12]-ben szerepel léteznek olyan unimoduláris (konstans determinánsú) négyzetes $L(s)$ és $R(s)$ mátrixok, melyekkel $S(s) := L(s)P(s)R(s)$ a következő struktúrájú [12]:

$$S(s) = \begin{bmatrix} S^*(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ahol $S^*(s) = \text{diag}\ (p_1(s), p_2(s), \dots, p_r(s))$ és

$$p_1|\ p_2\ | \dots |\ p_r.$$

Itt a $|$ oszthatóságot jelöl. Az S mátrixot szokás a P Smith-alakjának hívni, a p_i polinomokat, pedig a P invariáns polinomjainak. Ennek általánosítása az ún. Smith-McMillan-alak, melynél adott T racionális mátrixfüggvény, és amely ugyancsak unimoduláris mátrixok segítségével a következő alakra hozható:

$$M(s) = \begin{bmatrix} M^*(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ahol $M^*(s) = \text{diag}\ (\frac{\alpha_1(s)}{\beta_1(s)}, \frac{\alpha_2(s)}{\beta_2(s)}, \dots, \frac{\alpha_r(s)}{\beta_r(s)})$ és

$$\alpha_1|\ \alpha_2\ | \dots |\ \alpha_r$$
$$\beta_r|\ \beta_{r-1}\ | \dots |\ \beta_1.$$

2.3.2. definíció. *A $\{\beta_i, i = 1, 2, \dots, r\}$ polinomok gyökeit multiplicitással véve kapjuk meg a (2.3) rendszer* ***pólus****ait, illetve ugyanezeket véve a $\{\beta_i, i = 1, 2, \dots, r\}$ polinomoknak kapjuk a* ***zérus****okat.*

2.3.3. definíció. *A*

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$$

polinommátrix invariáns polinomjainak gyökeit a rendszer ***invariáns zérusainak*** *hívjuk.*

2.4. Invariáns alterek

2.4.1. definíció. *Egy $\mathcal{W} \subset \mathcal{X}$ alteret (C, A)-****invariáns****nak mondunk, ha létezik olyan $L : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ lineáris leképezés, melyre*

$$(A - LC)\mathcal{W} \subset \mathcal{W}. \tag{2.4}$$

Azon L-ek halmazát, melyekre fennáll (2.4) jelölje $\mathbb{L}(\mathcal{W})$.

2.4.2. tétel. *A $\mathcal{W}$ altér pontosan akkor (C, A)-invariáns, ha*

$$A(\mathcal{W} \cap \mathcal{K}) \subset \mathcal{W}$$

Bizonyítás: lásd [14].

Legyen $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}$. Jelölje $\mathbf{W}(\mathcal{L})$ az $\mathcal{L}$-et tartalmazó (C, A)-invariáns alterek halmazát. Az előbbi tételből könnyen adódik, hogy ez a halmaz zárt a metszetképzésre nézve (unióra már nem!). Így tehát tartalmaz egy minimális elemet, melyet minden $\mathbf{W}(\mathcal{L})$-beli halmaz tartalmaz.

2.4.3. tétel. (C, A)***-invariáns altér algoritmus - CAISA****. Legyen $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}$ rögzített és legyen $\mathcal{W}^\star = \inf \mathbf{W}(\mathcal{L})$ a minimális $\mathcal{L}$-et tartalmazó (C, A)-invariáns altér. Ekkor*

$$\mathcal{W}^\star = \lim_{k\to\infty} \mathcal{W}^k$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^0 &= 0 \\ \mathcal{W}^{k+1} &= \mathcal{L} + A(\mathcal{W}^k \cap \mathcal{C}) \qquad k \geq 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

és az iterációban legfeljebb n lépés után már nem változik a $\mathcal{W}^k$ altér.

Bizonyítás: lásd [14].

2.4.4. definíció. *Egy $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ altér (C, A)* ***nem-megfigyelhetőségi altér****, ha*

$$\mathcal{S} = \langle \text{Ker } HC | A - LC \rangle$$

valamely $L : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ és $H : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ lineáris leképezésekre.

A későbbiekben az egyszerűség kedvéért elhagyjuk a (C, A) jelölést ott ahol nem okoz félreértést.

2.4.5. állítás. *$\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ pontosan akkor nem-megfigyelhetőségi altér, ha létezik $L : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ lineáris leképezés, úgy, hogy*

$$\mathcal{S} = \langle \text{Ker } C + \mathcal{S} | A - LC \rangle.$$

Bizonyítás: lásd [14].

2.4.6. tétel. *Legyen $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}$ rögzített és legyen $\mathcal{W}^\star = \inf \mathbf{W}(\mathcal{L})$ a minimális $\mathcal{L}$-et tartalmazó (C, A)-invariáns altér. Ekkor az $\mathcal{L}$-et tartalmazó minimális nem-megfigyelhetőségi altér*

$$\mathcal{S}^\star = \lim_{k \to \infty} \mathcal{S}^k$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^0 &= \mathcal{X} \\ \mathcal{S}^{k+1} &= \mathcal{W}^\star + (A^{-1}\mathcal{S}^k) \cap \mathit{Ker}\ C \qquad k \geq 0. \end{aligned}$$

Bizonyítás: lásd [14].

A teljes (C, A)-invariancia duális fogalmait és állításait most csak felsoroljuk:

2.4.7. definíció. *Egy $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ alteret (A, B)-***invariáns***nak mondunk, ha létezik olyan $K : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ lineáris leképezés, melyre*

$$(A + BK)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}. \tag{2.6}$$

Azon K-k halmazát, melyekre fennáll (2.6) jelölje $\mathbb{K}(\mathcal{V})$.

2.4.8. tétel. *A $\mathcal{V}$ altér pontosan akkor (A, B)-invariáns, ha*

$$A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \mathcal{B}$$

Bizonyítás: lásd [18].

Legyen $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}$. Jelölje $\mathbf{V}(\mathcal{L})$ az $\mathcal{L}$-ben levő (A, B)-invariáns alterek halmazát. Az előbbi tételből könnyen adódik, hogy ez a halmaz zárt az unióra nézve. Így tehát tartalmaz egy maximális elemet, melyben minden $\mathbf{V}(\mathcal{L})$-beli halmaz benne van.

2.4.9. tétel. (A, B)***-invariáns altér algoritmus***. *Legyen $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}$ rögzített és legyen $\mathcal{V}^{\star} = \sup \mathbf{V}(\mathcal{L})$ a maximális $\mathcal{L}$-beli (A, B)-invariáns altér. Ekkor*

$$\mathcal{V}^{\star} = \lim_{k \to \infty} \mathcal{V}^k$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^0 &= \mathcal{L} \\ \mathcal{V}^{k+1} &= \mathcal{L} \cap A^{-1}(\mathcal{V}^k + \mathcal{B}) \qquad k \geq 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Bizonyítás: lásd [18].

2.4.10. definíció. *Egy $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}$ altér (A, B) irányíthatósági altér, ha*

$$\mathcal{R} = \langle A + BK | \mathit{Im}\ BG \rangle$$

valamely $K : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ és $G : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ lineáris leképezésekre.

2.4.11. állítás. *$\mathcal{R} \subset \mathcal{X}$ pontosan akkor irányíthatósági altér, ha létezik $K : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ lineáris leképezés, úgy, hogy*

$$\mathcal{R} = \langle\ A + BK | \mathit{Im}\ B \cap \mathcal{R} \rangle.$$

Bizonyítás: lásd [18].

2.5. Lineáris algebrai eszközök

2.5.1. definíció. *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.* ***Minimális pozitív szinguláris érték normán*** *a következő számot értjük:*

$$\|A\|_{-} = \begin{cases} inf_{Ax \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, & A \neq 0 \\ 0, & A = 0. \end{cases}$$

2.5.2. tétel. *A minimális pozitív szinguláris érték normára igazak a következők ($B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $c \in \mathbb{R}$ és A^+ jelölje az A Moore-Penrose-féle inverzét):*

- $\|A\|_- = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $A = 0$
- $\|cA\|_- = |c|\,\|A\|_-$
- $\|A + B\|_- \leq \|A\|_- + \|B\|_-$
- $\|AB\|_- \geq \|A\|_-\,\|B\|_-$
- $\|A\|_- = \sigma_{\min}(A)$
- $\|A\|_-\,\|A^+\| = \|A^+\|_-\,\|A\| = 1$

Bizonyítás: lásd [10].

Legyen $|T|_{\min} = \inf_{\omega\in\Phi} \|T(j\omega)\|_-$, ahol Φ azon ω ún. frekvenciák halmaza, ahol $T(j\omega) \neq 0$. A jelölésben szándékosan nem normajelet használtunk, ugyanis amint az $\frac{1}{s+1}$ átviteli függvény példája is mutatja ez félnorma.

2.5.3. definíció. *Jelölje $A^\perp$ azt a mátrixot, melyre Ker $A^\perp$ = Im A és $A^\perp A^{\perp T} > 0$, azaz pozitív definit.*

Ez ekvivalens azzal, hogy $A^\perp$ legyen az $A^\perp A = 0$ egyenlet maximális rangú megoldása. Könnyen látható, hogy ez pontosan akkor létezik, ha a mátrix sorai lineárisan összefüggnek, továbbá véve egy bázist A^T magterében és ezen vektorok transzponáltjait egymás alá írva kapunk egy megfelelő $A^\perp$ mátrixot.

2.6. Invertálhatóság és input-megfigyelhetőség

Tekintsük a következő (C, A, B) LTI rendszert:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ and $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

2.6.1. definíció. *Tegyük fel, hogy $x(0) = 0$. Azt mondjuk, hogy (C, A, B)* ***balinvertálható*** *ha $y(t) = 0$, $t \geqq 0$-ból következik, hogy $u(t) = 0$, $t \geqq 0$.*

2.6.2. megjegyzés. *Nyilván a fenti ekvivalens azzal, ha azt követeljük meg, hogy nem nulla inputra nem nulla ouputot adjon a rendszer. Fontos, hogy balinvertálhatóság csak nulla kezdeti feltétel mellett definiált! Nem figyeljük tehát a rendszer teljes fejlődését, hanem egy bizonyos pont után tekintjük csak.*

2.6.3. tétel. *Legyen $\mathcal{V}^*$ a maximális (A, B)-invariáns altér Ker C-ben és $p \geqq m$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

- (C, A, B) *balinvertálható*
- $C(sI - A)^{-1}B$ *balinvertálható, azaz oszlopai a racionális függvények teste fölött függetlenek*
- B *teljes oszloprangú és* $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* = 0$.

Bizonyítás: lásd [14] 36-37. oldal.

Egy másik hasonlóan fontos alapfogalom a következő:

2.6.4. definíció. (C, A, B) ***input-megfigyelhető*** *ha B teljes oszloprangú és $\langle \mathcal{K} | A \rangle \cap \mathcal{B} = 0$.*

2.6.5. tétel. *A következő állítások ekvivalensek:*

- (C, A, B) *input-megfigyelhető*
- *az $y(t)$, $t \geqq 0$ output ismeretében egyértelműen meghatározható u_0, amely az $u(t)$, $t \geqq 0$ step input (olyan bemeneti jel, mely koordinátánként egy bizonyos időpontig nulla majd onnantól nemnulla konstans) erőssége volt*
- $\nexists l \in \mathbb{R}^m$, *melyre $C(sI - A)^{-1}Bl = 0$, azaz a $C(sI - A)^{-1}B$ oszlopai lineárisan függetlenek $\mathbb{R}$ felett.*

Bizonyítás: lásd [14] 37. oldal.

2.6.6. állítás. *Minden balinvertálható rendszer input-megfigyelhető.*

Bizonyítás: lásd [14] 38. oldal.

2.6.7. megjegyzés. *A megfordítás általában nem igaz:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor az átviteli mátrix

$$T(s) = \frac{1}{s^3 - 7s^2 + s + 7} \begin{bmatrix} s-5 & (s-3)(s-5) \\ 2 & 2(s-3) \end{bmatrix}.$$

melynek oszlopai $\mathbb{R}$ felett ugyan függetlenek, de a racionális függvények teste felett már nem.

2.6.8. állítás. *Legyen $m = 1$, ekkor az input-megfigyelhetőség implikálja a balinvertálhatóságot.*

Bizonyítás: lásd [14] 38. oldal.

3. Fejezet

Lineáris mátrixegyenlőtlenségek

Az utóbbi évtizedben egyre hasznosabbá váltak a lineáris mátrixegyenlőtlenségek (engedtessék meg angol fordításának mozaikszavának, az LMI-nek használata). Megjelenésük szorosan kapcsolódik konvex optimalizálási feladatok megoldásához. A későbbi fejezetekben nagy segítségünkre lesznek, ezért nem hiábavaló legfontosabb tulajdonságaikat összefoglalnunk.

3.1. Konvex optimalizálás

Legyen $(\mathcal{X}, \| \, \|)$ normált tér; $\mathcal{K}, \mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ részhalmazok.

3.1.1. definíció. *A $\mathcal{K}$ részhalmaz **konvex**, ha*

$$\{x_1, x_2 \in \mathcal{K}\} \Longrightarrow \{x := \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in \mathcal{K} \quad \forall \alpha \in (0,1)\}.$$

3.1.2. definíció. *Az $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ függvényt konvexnek mondjuk, ha*

- *$\mathcal{S}$ konvex*
- *$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{S}$ és $\alpha \in (0,1)$-re*

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

***szigorúan konvex**, ha az utóbbi egyenlőtlenség szigorú formájában is teljesül.*

3.1.3. definíció. *Az $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ függvénynek **lokális minimuma** van $x_0 \in \mathcal{S}$-ben, ha $\exists \varepsilon > 0$ úgy, hogy $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathcal{S}$, melyre $\|x - x_0\| < \varepsilon$ és **globális minimuma** van ott, ha $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathcal{S}$.*

A konvex függvények fontos tulajdonságára mutat rá a következő

3.1.4. állítás. *Legyen $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ konvex. Ha f-nek $x_0 \in \mathcal{S}$-ben lokális minimuma van, akkor $f(x_0)$ egyúttal globális minimum is; szigorúan konvex esetben ha létezik ez a minimum, akkor egyértelmű.*

Bizonyítás: lásd Appendix 50. oldal.

3.1.5. definíció. *Legyenek $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ véges dimenziós vektorterek. Az $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ függvény **affin**, ha $f(x) = f_0 + T(x)$ $\forall x \in \mathcal{M}$, $f_0 \in \mathcal{N}$ és $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ lineáris leképezés.*

Látható, hogy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ pontosan akkor affin, ha $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$, melyre $x \mapsto f(x) - f(x_0)$ leképezés lineáris $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^m$ között. Legyen $n \in \mathbb{Z}_+$ rögzített és jelölje $\mathbb{S}$ az $n \times n$-es szimmetrikus mátrixok halmazát.

3.1.6. definíció. *Adott $F : \mathcal{M} \to \mathbb{S}$ a következőképpen:*

$$F(x) := F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 + \ldots + x_m F_m, \tag{3.1}$$

*ahol $F_i = F_i^T \in \mathbb{S}, i = 0, 1, \ldots, m$ rögzített mátrixok. Az $F(x) > 0$-t **lineáris mátrixegyenlőtlenség**nek (LMI) hívjuk, ahol a "> 0" pozitív definitséget jelent: $u^T F(x) u > 0$ $\forall u \in \mathbb{R}^n$-re.*

Az LMI-ben tehát az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$-et az affin F függvény képzi le a valós szimmetrikus mátrixok halmazába. Bizonyos esetekben $F : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{S}$ alakú. Erre példa az ún. Lyapunov-egyenlőtlenség, melyben $F(X) = A^T X + XA > 0$, ahol $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ adott és $X \in \mathbb{S}$ a változó, ami ebben a formában mátrixként jelentkezik. Ez az alak visszatranszformálható a (3.1) alakra. Legyen ugyanis $E_1, E_2, \ldots, E_m$ egy bázisa $\mathcal{M}$-nek (amely most az $n \times n$-es mátrixok vektortere). Láttuk korábban, hogy $F = F_0 + T$ alakban áll elő. Írjuk fel X-et a választott bázisban: $X = \sum_{k=1}^m x_k E_k$ és legyen $T(E_k) = F_k$. Ekkor

$$F(X) = F_0 + T(\sum_{k=1}^m x_k E_k) = F_0 + \sum_{k=1}^m x_k F_k,$$

amely már a kívánt alakú LMI. A pozitív definitségi feltételt esetenként az $F(x) \geq 0$ egyenlőtlenség váltja fel, ami természetesen pozitív szemidefinitségre utal és ezeket nem szigorú LMI-knek nevezzük.

3.2. Az LMI-k alapvető tulajdonságai

Azonnal adódik a definícióból, hogy az $F(x) > 0$ feltétel konvex x-ben, nevezetesen az $\mathcal{S} := \{x|\ F(x) > 0\}$ halmaz konvex.

3.2.1. definíció. ***LMI-k rendszerén*** *véges sok LMI halmazát értjük:*

$$F_1(x) > 0, \quad F_2(x) > 0, \ \ldots, \ F_p(x) > 0.$$

LMI rendszer egy egyenlőtlenséggé írható az

$$F(x) := \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & F_p(x) \end{bmatrix} > 0$$

affin függvény segítségével.

Másik nagyon fontos és sokszor alkalmazott tulajdonság segítségével bizonyos nemlineáris mátrixegyenlőtlenségek alakíthatók lineárissá. Ez az ún. Schur-komplementer segítségével érhető el. Legyen $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és partícionáljuk őt a következőképp:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix},$$

aholis M_{11} legyen $r \times r$-es, nemszinguláris.

3.2.2. definíció. *Az $S = M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}$ mátrixot M_{11}* ***Schur-komplementerének*** *nevezzük.*

3.2.3. állítás. *Ha M szimmetrikus, akkor*

$$M > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad M_{11} > 0, \quad S > 0.$$

Bizonyítás: lásd Appendix 50. oldal.
Ezt az állítást felhasználva a következőt kaphatjuk LMI-kre:

3.2.4. tétel. *Legyen $F : \mathcal{M} \to \mathbb{S}$ affin leképezés, amely partícionálható az*

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{bmatrix}$$

alakban, ahol $F_{11}(x)$ négyzetes. Ekkor

$$F(x) > 0 \iff \begin{cases} F_{11}(x) > 0 \\ F_{22}(x) - F_{21}(x)F_{11}(x)^{-1}F_{12}(x) > 0 \end{cases}$$

3.2.5. megjegyzés. *A Schur-komplementer definíciójában M_{22} invertálhatóságát feltételezve az előbbi gondolatmenetet alkalmazva a fenti tétel szimmetrikus párja:*

$$F(x) > 0 \iff \begin{cases} F_{22}(x) > 0 \\ F_{11}(x) - F_{12}(x)F_{22}(x)^{-1}F_{21}(x) > 0 \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy $F, G, H : \mathcal{M} \to \mathbb{S}$ affin függvények. Az LMI-kkel kapcsolatos három fő probléma:

- **megoldhatóság**: létezik-e $x \in \mathcal{M} : F(x) > 0$;
- **optimalizálás**: $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, ahol $\mathcal{S} = \{x|\ F(x) > 0\}$, keresendő
$$V_{opt} = \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x);$$
- **általánosított sajátérték probléma**: minimalizálni szeretnénk azon λ valós számot, melyre:
$$\begin{aligned} \lambda F(x) &> G(x) \\ F(x) &> 0 \\ H(x) &> 0 \end{aligned}$$

3.3. Rendszerelméleti problémák LMI alakban

Ebben a részben bemutatunk néhány alapfeladatot, és annak LMI-re történő átírását, külön hangsúlyt helyezve azon lépésekre, melyek általánosságban is alkalmazhatóak.

3.3.1. Stabilitás

Az $\dot{x} = Ax$ rendszer asszimptotikus stabilitását szeretnénk kideríteni. A Lyapunov elméletet segítségül véve tudjuk, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha $\exists X > 0 : A^T X + XA < 0$. Ez tehát megoldhatósági probléma

$$F(X) = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & -A^T X - XA \end{bmatrix} > 0$$

LMI-vel.

3.3.2. Diagonális skálázás

Keresendő az a D diagonális mátrix, melyre $\|DMD^{-1}\| < 1$, ahol $\| \ \|$ az euklideszi normából indukált mátrixnormát jelenti és M adott mátrix.

$$\begin{aligned}
\left\|DMD^{-1}\right\| < 1 \quad &\Longleftrightarrow D^{-T}M^TD^TDMD^{-1} < I \\
&\Longleftrightarrow M^TD^TDM < D^TD \\
&\Longleftrightarrow X - M^TXM > 0,
\end{aligned}$$

az $X := D^TD$ új változó bevezetésével, ami szintén megoldhatósági problémát eredményez ($D^{-T} := (D^T)^{-1}$).

3.3.3. Szimultán stabilizálás

Tekintsük a következő N darab LTI rendszert:

$$\dot{x} = A_ix + B_iu$$

ahol $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Ezen rendszerek szimultán stabilizálása egy $u = Kx$ visszacsatolás keresését tűzi ki célul, mellyel elérhető, hogy az $A_i + B_iK$ $i = 1, 2, \ldots, N$ mátrixok sajátértékei a komplex sík nyílt bal félsíkjába essenek. A stabilitási részben már felhasznált eredmény segítségével keresendő olyan $K \in \mathbb{R}^{n\times m}$ és $X_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $i = 1, 2, \ldots, N$ mátrixok, hogy minden i-re

$$X_i > 0 \tag{3.2}$$

$$(A_i + B_iK)^TX_i + X_i(A_i + B_iK) < 0. \tag{3.3}$$

Ebben a formában a mátrixegyenlőtlenség nemlineáris. Szokásos technika ilyenkor a közös ún. Lyapunov-mátrix alkalmazása: $X_i \equiv X$ minden i-re. A nemlinearitás megszűntetése céljából legyenek $Y = X^{-1}$ és $L = KY$ új változók. Ezek bevezetésével (3.2)-(3.3) átírható:

$$\begin{aligned}
Y &> 0 \\
A_iY + YA_i^T + B_iK + K^TB_i^T &< 0.
\end{aligned}$$

Az érdeklődő olvasó figyelmébe ajánlható [4], [8], [15], melyekben nem csak további rendszer- és irányításelméleti feladatot talál meg LMI alakban, hanem megoldási módszereikről és implementációjukról is talál információkat.

4. Fejezet

A hibadetektálás geometriai megközelítése

Mohammad-Ali Massoumnia korai cikke [13] és disszertációja [14] kiindulópontja a hibaidentifikáció minden lineáris algebrai megközelítésének. A Basile és Marro [1] valamint Wonham és Morse [18] párosok által egymástól függetlenül először alkalmazott (A, B)-invariáns alterekre épül az elmélet, melynek a realisztikus problémáknál való alkalmazhatóságának limitáltságát Massoumnia művei részben feloldották.

4.1. Hibamodell

Adott a következő LTI rendszerünk (kezdeti feltétel gyanánt tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli vektort előírhatunk, ennek külön jelölését a továbbiakban elhagyjuk):

$$\dot{x} = Ax + Bu + \sum_{i=1}^{k} F_i m_i \tag{4.1}$$

$$y = Cx \tag{4.2}$$

melyben $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{U}$ és $y \in \mathcal{Y}$ rendre az állapot, input illetve output vektorok. Az m_i $i = 1, 2, \dots, k$ az ún. **hibamód**ok, ismeretlennek tekintendők, annyit tudunk, hogy k_i dimenziós $\mathcal{M}_i$ térből valók és koordinátánként egy jeltér (ami lehet egy $\mathcal{L}_2$-tér) elemei, továbbá a rendszer hibamentes működése esetén nullák, egyébként nemnullák. $F_i : \mathcal{M}_i \to \mathcal{X}$ lineáris leképezések az ún. **hibairány**ok (bár nem feltétlenül vektorról ($k_i = 1$) van szó). Jelölje $\mathcal{F}_i$

az F_i képterét. Szokásos feltevések a (C, A)-pár megfigyelhetősége és hogy rang $[F_1, F_2, \dots, F_k] = \sum_{i=1}^{k} k_i$.

Ezzel a hibamodellel fogunk foglalkozni a továbbiakban. Általánosabb esetben előfordulhat, hogy a (4.2) megfigyelési egyenlet additív tagokkal bővül. Ezeket a tagokat áttranszformálhatjuk az állapotegyenletbe (részletek [17]).

4.2. Megfigyelő alapú detektálás

Massoumnia megfigyelő alapú szűrőkkel foglalkozott. Ehhez szükségünk van egy teljes rendű (állapottere n dimenziós) megfigyelőre, ami a következő alakú LTI:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \tag{4.3}$$
$$y = C\hat{x}.$$

Itt az $L : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ lineáris leképezés. Legyen $r = y - C\hat{x}$ és $e = x - \hat{x}$. (4.1)-ből (4.3)-at kivonva, (4.2) felhasználásával kapjuk az ún. **hibaegyenlet**et:

$$\dot{e} = (A - LC)e + \sum_{i=1}^{k} F_i m_i \tag{4.4}$$
$$r = Ce. \tag{4.5}$$

A hibaegyenlet kimenetét **reziduálnak** fogjuk hívni. Látható, hogy ha az i. hibamód nullától különbözik, de a többi nulla, akkor $e \in \mathcal{W}_i := \langle A - LC|\mathcal{F}_i\rangle$ és $r \in C\mathcal{W}_i$. Így tehát olyan L leképezésre, melyre a $\{C\mathcal{W}_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ alterek függetlenek, hiba bekövetkezése esetén az r vektor egy rögzített altérben marad.

4.2.1. definíció. *A (4.1)-(4.2) rendszert* ***kimenetszeparálhatónak*** *nevezzük, ha léteznek $\mathcal{W}_i \subset \mathcal{X}$ alterek és $L : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ lineáris leképezés úgy, hogy $i = 1, 2, \dots, k$-ra*

$$\mathcal{F}_i \subset \mathcal{W}_i \tag{4.6}$$
$$(A - LC)\mathcal{W}_i \subset \mathcal{W}_i \tag{4.7}$$
$$C\mathcal{W}_i \cap \sum_{j \neq i} C\mathcal{W}_j = 0 \tag{4.8}$$

és az A-LC leképezés sajátértékei negatív valósrészűek legyenek.

A (4.8) feltételt alterek kimenetszeparálhatósági feltételének is hívják. Világos, hogy kimenetszeparálható rendszer esetén egyetlenegy nemnulla hibamód hatására tetszőleges nemnegatív időpillanatban az állapot a $\mathcal{W}_i$ altérben marad (ideális esetben a kezdeti állapot 0!) és az r vektort levetítve a $C\mathcal{W}_i$ alterekre meg tudjuk mondani, hogy melyik hibamód zökkentette ki a rendszert: amelyik vetület nemnulla. Vetítésen most nem a $C\mathcal{W}_i$ altérre történő ortogonális projekcióra kell gondolni, hanem a $\sum_{j\neq i} C\mathcal{W}_j$ altér mentén történőre. Ugyanis (4.8) teljesülése mellett minden $r \in \sum_{j=1}^{k} C\mathcal{W}_j$ előáll egyértelműen $r_i + \overline{r}_i$ összegként, ahol $r_i \in C\mathcal{W}_i$, $\overline{r}_i \in \sum_{j\neq i} C\mathcal{W}_j$; a vetület a $C\mathcal{W}_i$ altérre pedig r_i. $A - LC$ stabilitására például azért van szükség, hogy a nem ideális körülményeknél fellépő nemnulla kezdeti feltételből adódó hibát lehetőleg apróvá tegye.

A (4.7) feltétel nyilván a $\mathcal{W}_i$ alterek (C, A)-invarianciáját jelenti, kiegészítve azzal, hogy az közös L leképezéssel valósuljon meg. Ennek kiemelésére szolgál a következő

4.2.2. definíció. *Ha a $\mathcal{W}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ alterekhez létezik közös $L : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ lineáris leképezés, mellyel (4.7) fennáll, akkor az altereket **kompatibilis**eknek mondjuk.*

4.2.3. lemma. *Ha a $\mathcal{W}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ (C, A)-invariáns alterek kimenetszeparálhatóak, akkor kompatibilisek.*

Bizonyítás: lásd Appendix 51. oldal.

Könnyen igazolható, hogy ha már a minimális, $\mathcal{F}_i$-t tartalmazó (C, A)-invariáns alterekre ($\mathcal{W}_i^\star$) sem teljesül (4.8), akkor semmilyen egyéb alterekre sem fog, melyek kielégítik (4.6)-(4.7)-et.

Tegyük fel, hogy $k_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$ és a (C, A)-pár megfigyelhető. A CAISA (2.5) segítségével kapjuk, hogy

$$\mathcal{W}_i^\star = \mathcal{F}_i \oplus A\mathcal{F}_i \oplus \ldots \oplus A^{\mu_i}\mathcal{F}_i$$

ahol μ_i az a legkisebb nemnegatív egész, melyre $CA^{\mu_i}\mathcal{F}_i \neq 0$.

[13] ezek után az A-LC stabilitásával, pontosabban sajátértékeik tetszőleges elhelyezhetőségével foglalkozik, amennyiben a $\mathcal{W}_i^\star$ alterek szeparálhatóak. Ez a rész nem központi tárgya vizsgalódásunknak ezért csak nagyon röviden annyit, hogy az $A - LC$ sajátértékei közül néhányan nem helyezhetők el máshová. Ezek a sajátértékek a $(C, A, [F_1, F_2, \ldots, F_k])$ rendszer invariáns

zérusai közül kerülnek ki. Ha tehát az el nem mozdítható sajátértékek között vannak nemnegatív valósrészűek, akkor a stabilitás sem érhető el (részletek: [13]).

4.3. A feladat átfogalmazása

Az előbbi részben említettük, hogy a reziduálvektort levetítve a megfelelő alterekre tudjuk eldönteni, hogy történt-e hiba a rendszerben, avagy sem. Megpróbáljuk úgy átogalmazni a problémánkat, hogy ne kelljen a szóbanforgó vetítéseket elvégezni, hanem a projekciós mátrixok már a tervezési folyamatba épüljenek bele. Legyenek $H_i : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ ún. ouputkeverő lineáris leképezések. Ekkor a hibaegyenletet kiegészíthetjük immáron k darab reziduállal:

$$\dot{e} = (A - LC)e + \sum_{i=1}^{k} F_i m_i \tag{4.9}$$

$$r_i = H_i Ce \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{4.10}$$

Elvárásaink ezzel a rendszerrel kapcsolatban:

- a $(H_iC, A - LC, F_i)$ rendszer legyen input-megfigyelhető
- az m_j hibamódnak ne legyen hatása az r_i reziduálra ha $j \neq i$, azaz a $T_{ij}(s) := H_iC(sI - A + LC)^{-1}F_j$ átviteli függvény legyen azonosan nulla
- $A - LC$ legyen stabil.

Az előbb bevezetett feladatot a továbbiakban angol nevének mozaikszavából kiindulva (*restricted diagonal detection filter problem*) RDDFP-nek hívjuk. Az elnevezés némi magyarázatra szorul: "*restricted*" azért, mert a hibarendszer ugyanolyan dimenziósnak választandó, mint az eredeti, illetve "*diagonal*" mert az átviteli mátrix $M = (M_1^T, M_2^T, \ldots, M_k^T)$-ról $R = (R_1^T, R_2^T, \ldots, R_k^T)$-ra (Laplace-transzformáltak) blokkdiagonális lesz ha a feladat megoldható.

Jelöljük $\mathcal{S}_i$-vel az i-edik reziduálhoz tartozó nemmegfigyelhetőségi alteret:

$$\mathcal{S}_i = \langle \text{Ker } H_iC | A - LC \rangle = \langle \text{Ker } C + \mathcal{S}_i | A - LC \rangle, \tag{4.11}$$

ahol az egyenlőség (4.11)-ben következik a 2.4.5. állításból.

4.3.1. állítás. *Az alábbiak ekvivalensek:*

$$\sum_{j \neq i} \mathcal{F}_j \subset \mathcal{S}_i \tag{4.12}$$

$$T_{ij} \equiv 0 \qquad j \neq i.$$

Bizonyítás: lásd Appendix 51. oldal.

Ezt felhasználva az, hogy nemnulla m_j ne hasson r_i-re $j \neq i$ esetén, az előírható a (4.12) feltétellel. Szeretnénk még ezek mellett azt is, hogy a $(H_iC, A - LC, F_i)$ rendszer legyen input-megfigyelhető, azaz

$$\mathcal{F}_i \cap \mathcal{S}_i = 0. \tag{4.13}$$

4.3.2. definíció. ***RDDFP**: adott A, C és F_i, $i = 1, 2, \ldots, k$; keresendő $L : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ és $\mathcal{S}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ kompatibilis nem-megfigyelhetőségi alterek, melyekre (4.11), (4.12) és (4.13) fennállnak.*

4.3.3. megjegyzés. *Nem szabad meglepődnünk azon, hogy ennek a problémának létezik duálisa, amely megtalálható [18]-ban és a "restricted control decoupling problem" (RCDP) nevet viseli. Tekintsük a következő rendszert:*

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$z_i = D_i x \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

továbbá legyen $\mathcal{K}_i$ = Ker D_i, $\mathcal{B}$ = Im B. Keresendő olyan $K : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ lineáris és irányíthatósági alterek $\mathcal{R}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, melyekre

$$\mathcal{R}_i = \langle A + BK | \mathcal{B} \cap \mathcal{R}_i \rangle$$

$$\mathcal{R}_i \subset \cap_{j \neq i} \mathcal{K}_j$$

$$\mathcal{R}_i + \mathcal{K}_i = \mathcal{X}$$

fennálnak $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén.

A legutóbb említett duális problémák megoldása általános esetben nem ismert, csak egyszerűsítésük után vannak eredmények. Erről bővebben [13] tájékoztat.

4.4. Approximatív hibadetektálás

A diplomamunka egyik fontos célja volt olyan lehetőségeknek a felkutatása, melyek segítségével akkor is tudunk hibadetektáló szűrőket tervezni, ha (4.1)-(4.2) rendszerünk nem kimenetszeparálható. Ezen lehetőségek egyik legkecsegtetőbbike az RDDFP-ből indul ki.

Amint láttuk a 4.3.1. állításból következik, hogy RDDFP ekvivalens az alábbi feladattal: keresünk olyan H_i és L leképezéseket, melyekre

- a $(H_iC, A - LC, F_i)$ input-megfigyelhető
- $H_iC(sI - A + LC)^{-1}F_j \equiv 0 \qquad j \neq i$
- $A - LC$ asszimptotikusan stabil.

Fontos szem előtt tartanunk, hogy az előbbi feltételeket csak együtt kezelhetjük. Ugyanis $H_i = 0$ választással minden i-re nyilván T_{ij} is nulla lesz, de ekkor az input-megfigyelhetőséggel bajban leszünk. Most rövid ideig azonban külön-külön fogjuk vizsgálni ezeket a feltételeket.

Rendszerelméletben átviteli függvényt nullává tenni annyit jelent, hogy a hozzá tartozó input (T_{ij} esetében F_j) hatását teljesen elnyomjuk. Ha ez nem sikerül, akkor a hatását minimalizálni szeretnénk. Ezen hatásnak egyik matematikailag is jól kifejezhető mérőszáma a T_{ij} átviteli függvény $\mathcal{H}_\infty$ normája. Erre a meggondolásra épül a $\mathcal{H}_\infty$ irányítások tervezésének témaköre is.

Szeretnénk tehát elérni, hogy

$$\|T_{ij}\|_\infty < \gamma_{ij} \tag{4.14}$$

igaz legyen minden $j \neq i$ indexpárra, majd lehetőség szerint a γ_{ij} értékeket minimalizálni. Szerencsére a (4.14) feltétel konvex a T_{ij} függvényben, ezért létezik is LMI-s feltétel az ő teljesülésére, mely megtalálható [15]-ben:

4.4.1. állítás. *Legyen az*

$$\dot{x} = Ax + Bw$$
$$y = Cx + Dw$$

rendszer asszimptotikusan stabil, $\gamma > 0$*,* $T(s) := C(sI - A)^{-1}B + D$ *az átviteli függvény. Ekkor*

$$\|T\|_\infty < \gamma \iff \exists K = K^T : \begin{bmatrix} A^TK + KA + C^TC & KB + C^TC \\ B^TK + D^TC & D^TD - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

Bizonyítás: lásd [15].

A mi reziduálokkal kiegészített (4.9-4.10) hibarendszerünknél ez a feltétel a következő alakot ölti:

$$\|T_{ij}\|_\infty < \gamma_{ij} \iff$$

$$\begin{bmatrix} (A-LC)^T K_{ij} + K_{ij}(A-LC) + C^T H_i^T H_i C & K_{ij} F_j \\ F_j^T K_{ij} & -\gamma_{ij}^2 I \end{bmatrix} < 0 \qquad (4.15)$$

Nem véletlenül hiányzik feltétel a K_{ij} mátrixról, ugyanis ha alkalmazni szeretnénk a 4.4.1. állítást, akkor az $A - LC$ stabilitását is meg kell követelnünk. Vegyük észre, ha olyan K_{ij} mátrix létezését követeljük meg, mely pozitív definit, akkor (4.15) implicite magában foglalja, hogy

$$(A-LC)^T K_{ij} + K_{ij}(A-LC) \leq (A-LC)^T K_{ij} + K_{ij}(A-LC) + C^T H_i^T H_i C < 0$$

ami pontosan $A - LC$ asszimptotikus stabilitását biztosítja.

Gond a (4.15) egyenlőtlenséggel, hogy változóiban (K_{ij}, L, H_i) nemlineáris. Amint azt a 3. fejezetből megtanultuk új változók bevezetésével orvosolhatjuk ezt a problémát. Legyen tehát $\hat{H}_i = H_i^T H_i \geq 0$ és $S_{ij} = K_{ij} L$.

Ezzel azonban még csak egy rögzített (i, j), $j \neq i$ párra írtuk fel a kívánt normaegyenlőtlenséget. Könnyű látni, hogy minden szóbanforgó párra felírva ezeket majd bevezetve az S_{ij} új változókat, semmi sem garantálja, hogy létezik közös L mátrix, melyre $S_{ij} = K_{ij} L$ minden $j \neq i$ párra.

Itt is egy jól bevált módosítás alkalmazandó, amelyet például a többcélú rendszerelméleti feladatoknál (pl. kevert $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ irányítási feladatok [15]) alkalmaznak hatékonyan; nevezetesen próbáljunk közös $K_{ij} \equiv K$ Lyapunov-mátrixot találni az LMI-k megoldása során. Ezzel közös $S = S_{ij}$-t is keresünk, azaz nem lesz probléma az L kiszámítása.

Vajon elő tudjuk-e állítani az összes olyan L és H_i mátrixokat, melyek által $\|T_{ij}\|_\infty < \gamma_{ij}$ minden $j \neq i$-re és rögzített γ_{ij}-kre? A válasz részben igenlő: ha a H_i-ket nem változóként kezeljük, hanem a-priori meghatározzuk (nem idegen ez a hozzáállás az irodalomban [17]), akkor elő tudjuk állítani szinte az összes (azokat, melyekhez létezik közös Lyapunov-mátrix) létező L-et, ami teljesíti a $\|T_{ij}\|_\infty < \gamma_{ij}$ minden $j \neq i$-re követelményt. Ezzel foglalkozunk a következő részben, vizsgálva a probléma duálisát is.

4.5. $\mathcal{H}_\infty$-megfigyelők paraméterezése LMI-vel

Kiindulópontunk eme témakörben Hou és Patton munkái ([9]-[10]). A jelölésrendszer kissé el fog térni a korábban alkalmazottaktól, de ez nem fogja zavarni előrehaladásunkat.

Legyen

$$\dot{x} = Ax + Ef + Gw \tag{4.16}$$
$$y = Cx + Ff + Hw \tag{4.17}$$

egy LTI rendszer. Megfigyelőn most egy újabb dinamikus rendszer értünk, melyet a következő egyenletek írnak le:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Lr \tag{4.18}$$
$$r = y - C\hat{x}. \tag{4.19}$$

Bevezetve a már jól ismert állapothibát $e = x - \hat{x}$ kapjuk, hogy a hibarendszer:

$$\dot{e} = (A - LC)e + (E - LF)f + (G - LH)w \tag{4.20}$$
$$r = Ce + Ff + Hw. \tag{4.21}$$

4.5.1. definíció. *Adott $\gamma > 0$ valós szám. A (4.18)-(4.19) rendszert $\mathcal{H}_\infty$-**megfigyelő**nek nevezzük, ha*

- *$A - LC$ asszimptotikusan stabil*
- *$\|T_{rw}\|_\infty < \gamma$, ahol $T_{rw}(s) = C(sI - A + LC)^{-1}(G - LH) + H$.*

Mint később látni fogjuk hasznos számunkra ennek a fogalomnak a duálisa is. Ehhez vizsgáljuk a következő LTI rendszert:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw$$
$$y = Cx + Du + Dw.$$

Nem véletlen, hogy az u hibának és a w zavarás ugyanazon D leképezésen keresztül lép be a rendszerbe. Erre a speciális tulajdonságra a dualitás miatt van szükség. A továbbiakban tegyük fel, hogy $\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$ teljes oszloprangú.

4.5.2. definíció. *Adott $\gamma > 0$ valós szám. A* **$\mathcal{H}_\infty$-irányítás teljes információval** *[19] feladat: keresünk olyan $u = -Kx$ visszacsatolást, hogy a zárt rendszerre:*

- *$A - BK$ asszimptotikusan stabil*
- *$\|T_{yw}\|_\infty < \gamma$, ahol $T_{yw}(s) = (C - DK)(sI - A + BK)^{-1}G + D$.*

4.5.3. megjegyzés. *A dualitás a fentebb definiált problémák között az $(A, B, C, D, K) \longleftrightarrow (A^T, C^T, G^T, H^T, C^T, L^T)$ mátrixcserével kapható (lásd [9]).*

Iwasaki és Skelton sokkal általánosabb eredményéből [11] vezethető le az alábbi:

4.5.4. tétel. *Legyen $\gamma > 0$. Pontosan akkor létezik a 4.5.2. definíciónak eleget tevő $\mathcal{H}_\infty$-szabályzó, ha létezik $X > 0$, mellyel*

$$\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} AX + XA^T + GG^T & XC^T + GD^T \\ CX + DG^T & DD^T - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}^{\perp T} < 0 \tag{4.22}$$

Ha ez az LMI megoldható, akkor egy lehetséges visszacsatolás az $u = -B^T X x$

Bizonyítás: lásd [9].

4.5.5. tétel. *Amennyiben a (4.22) LMI megoldható, akkor az összes megoldás a $\mathcal{H}_\infty$-irányításra $u = Kx$ alakban áll elő, ahol*

$$K = K_1 + K_2 M K_3$$

olyan M mátrixszal, amire $M^T M < I$ és

$$\begin{aligned} K_1 &= (C_1^T - Q_{12}Q_{22}^{-1}C_2^T)(C_2 Q_{22}^{-1} C_2^T)^{-1} \\ K_2 &= (Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^T - Q_{11} - K_1 K_3^{-2} K_1^T)^{1/2} \\ K_3 &= (-C_2 Q_{22}^{-1} C_2^T)^{-1/2} \end{aligned}$$

a következő jelölésekkel:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \overline{B}^{+} \\ \overline{B}^{\perp} \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} \overline{B}^{+} \\ \overline{B}^{\perp} \end{bmatrix}^T, \quad [C_1 \;\; C_2] := \overline{C} \; [\; \overline{B}^{+T} \;\; \overline{B}^{\perp T}]$$

$$Q := \begin{bmatrix} AX + XA^T & XC^T & G \\ CX & -\gamma I & D \\ G^T & D^T & -\gamma I \end{bmatrix}, \quad \overline{B} := \begin{bmatrix} B \\ D \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{C} := [-X \;\; 0 \;\; 0].$$

Bizonyítás: lásd [9].

4.5.6. megjegyzés. *(4.22) megoldhatóságából következik a szóbanforgó inverzek létezése [11].*

4.5.7. megjegyzés. *Nagy előnye ennek a megoldási módszernek, hogy csak X a változó, így nem lépnek fel nemlinearitási problémák illetve, hogy az összes $\mathcal{H}_\infty$-szabályzót mátrixok egy véges dimenziós alterén parametrizáljuk, szemben a [19]-beli magadással, ahol racionális mátrixfüggvények egy végtelen dimenziós alterén történik ugyanez.*

A fentiek alapján könnyen adódik a 4.5.4. és 4.5.5. tételek duális párjai:

4.5.8. tétel. *Tegyük fel, hogy $[C \;\; H]$ teljes sorrangú és legyen $\gamma > 0$. Pontosan akkor létezik a 4.5.1. definíciónak eleget tevő $\mathcal{H}_\infty$ megfigyelő, ha létezik $Y > 0$, mellyel*

$$\begin{bmatrix} C^T \\ H^T \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} A^TY + YA + C^TC & YG + C^TH \\ G^TY + H^TC & H^TH - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T \\ H^T \end{bmatrix}^{\perp T} < 0 \tag{4.23}$$

Ha ez az LMI megoldható, akkor egy lehetséges megoldás a megfigyelőhöz $L = YC^T$.

Bizonyítás: lásd [9].

4.5.9. tétel. *Amennyiben a (4.23) LMI megoldható, akkor az összes megoldás a $\mathcal{H}_\infty$ megfigyelőre:*

$$L = L_1 + L_2 N L_3 \tag{4.24}$$

olyan N mátrixszal, amire $N^TN < I$ és

$$\begin{aligned} L_1 &= (C_2 R_{22}^{-1} C_2^T)^{-1}(C_1 - C_2 R_{22} R_{12}^T) \\ L_2 &= (-C_2 R_{22}^{-1} C_2^T)^{-1/2} \\ L_3 &= (R_{12} R_{22}^{-1} R_{12}^T - R_{11} - L_1^T L_2^{-2} L_1^T)^{1/2} \end{aligned}$$

a következő jelölésekkel:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{22} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \tilde{B}^{\,+} \\ \tilde{B}^{\,\perp} \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} \tilde{B}^{\,+} \\ \tilde{B}^{\,\perp} \end{bmatrix}^T, \qquad [C_1 \;\; C_2] := \tilde{C}\;[\;\tilde{B}^{\,+T} \;\; \tilde{B}^{\,\perp T}]$$

$$R := \begin{bmatrix} A^TY + YA & YG & C^T \\ G^TY & -\gamma I & H^T \\ C & H & -\gamma I \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} := \begin{bmatrix} C^T \\ H^T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} := [-Y \;\; 0 \;\; 0].$$

Bizonyítás: lásd [9].

Ezen eredményeket a mi esetünkre egy $\|T_{ij}\|_\infty < \gamma_{ij}$-re alkalmazva kapjuk a következő LMI-t:

$$\begin{bmatrix} C^T H_i^T \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp} \begin{bmatrix} A^T Y + YA + C^T H_i^T H_i C & YF_j \\ F_j^T Y & -\gamma_{ij}^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T H_i^T \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp T} < 0$$

4.5.10. megjegyzés. *Szomorúan kell észrevennünk, hogy a $[C \quad H]$ teljes sorrangúságát megkövetelő előírás limitálja ennek az eredménynek az alkalmazhatóságát a mi esetünkben, lévén, hogy ekkor ez a mátrix $[H_iC \quad 0]$ lesz és az előre megadandó H_i mátrixok legtöbbször alterekre történő projekciók, tehát tipikusan nem teljes rangúak.*

4.5.11. megjegyzés. *Mivel minden $j \neq i$ párra lesz egy fenti típusú LMI, valójában $Y = Y_{ij}$ Lyapunov-mátrixokat kellene keresnünk, de a paraméterezés szempontjából pontosan egyre van szükség, azaz az összes olyan megfigyelőt kapjuk így meg, melyekre létezik közös Lyapunov-mátrix.*

4.6. Megfigyelők érzékenysége

Ezek után az észrevételek után áttérhetünk az RDDFP-ben szereplő $(H_iC, A-LC, F_i)$ input-megfigyelhetőségnek a vizsgálatára. Vegyük észre, hogy a 4.3.1. állításból az is következik, hogy $T_{ii} \neq 0$ implikálja az input-megfigyelhetőséget, amennyiben $k_i = 1$, azaz F_i vektor. Ez lehet az első kiindulópont a diagnosztikai rendszerünk hibára való érzékenységének matematikai fogalmának meghatározásában.

Az előző fejezettben alkalmazott ötlet, nevezetesen a $\mathcal{H}_\infty$ norma használata itt is elképzelhető. Ekkor a korábbiakkal analóg módon egy $\|T_{ii}\|_\infty > \gamma_{ii}$ típusú feltételből kellene elindulnunk. Ez azonban már nem lesz konvex az átviteli függvényben, azaz nincs remény, hogy LMI-vel kezelhessük a feltételt. Amint látni fogjuk ebben a részben olyan problémába ütközünk, mely nem vezet konvex optimalizációs feladatokhoz.

A hibára való érzékenységnek a 2. fejezetben bevezetett minimális pozitív szinguláris érték norma definíciót nevezik meg [9]-ben a szerzők. Teljes oszlop- vagy sorrangú mátrix esetében ez a norma a minimális erősítésként értelmezhető tekintve a rá érvényes

$$\|Ax\| \geq \|A\|_- \|x\| \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

összefüggés miatt. Ezt a definíciót a $T_{ii}(0) = H_i C(LC - A)^{-1} F_i$ mátrixra kell alkalmazni, , mégpedig úgy, hogy adott $\beta > 0$ mellett vizsgáljuk a $\|T_{ii}(0)\|_- > \beta$ teljesülését.

Idézzük fel egy pillanatra a (4.16)-(4.17) rendszert. [9]-ben a $\mathcal{H}_-/\mathcal{H}_\infty$ hibadetektáló megfigyelőn olyan (4.18)-(4.19) egyenletekkel definiált dinamikus rendszert értenek, melyre

- $A - LC$ asszimptotikusan stabil
- $\|T_{rw}\|_\infty < \gamma$, ahol $T_{rw}(s) = C(sI - A + LC)^{-1}(G - LH) + H$
- $\|T_{rf}(0)\|_- > \beta$, ahol $T_{rw}(s) = C(sI - A + LC)^{-1}(E - LF) + F$.

Azt a további egyszerűsítést véve, miszerint a $\|T_{rf}(0)\|_-$ norma helyett a Tr $[C(LC - A)^{-1}(E - LF) + F]^T [C(LC - A)^{-1}(E - LF) + F]$ kifejezést tekintik, amely a hibának a reziduálra kifejtett teljes hatásaként fogható fel és a (4.24) megoldásait figyelembe véve az alábbi optimalizálási feladatot kapják:

$$
\begin{aligned}
&\min_N \mathrm{Tr}\ [C(LC - A)^{-1}(E - LF) + F]^T [C(LC - A)^{-1}(E - LF) + F] \\
&\text{s.t.}\ \ N^T N < I.
\end{aligned}
$$

Szerintük eme feladat "jól ismert, hatékony nemlineáris programozási algoritmusokkal megoldható".

Összefoglalva az approximatív hibadetektálásról szóló fejezetet elmondható, hogy a rendszer- és irányításelmélet egyik igen nehezen kezelhető problémájával találtuk szembe magunkat: nemlineáris és nem konvex optimalizációs problémákkal, melyek megoldása nem egyszerű feladat.

5. Fejezet

Frekvenciatartománybeli eredmények

Az előző fejezetben állapotteres leírásból kiindulva vizsgáltuk a hibadetektálást. Itt szeretnénk kitérni a frekvenciatartománybeli eredményekre, mely ág egyik kiindulásul használható cikke Ding és Frank által íródott [6]. Az akkor egyre gyakrabban használt faktorizációs technikát alkalmazták, továbbá definícióik összehasonlíthatók a már vizsgáltakkal.

5.1. Detektálás átviteli függvényekkel

Tekintsük a következő lineáris rendszert:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fm \tag{5.1}$$

$$y = Cx + Du + Em \tag{5.2}$$

ahol a szokásokhoz híven $x \in \mathcal{X}$ az állapotvektor, $u \in \mathcal{U}$ az input, $y \in \mathcal{Y}$ a megfigyelt vektor és $m \in \mathbb{R}^k$ a detektálandó hiba. Laplace-transzformációval kapjuk a külső leírást:

$$Y = T_u U + T_m M \tag{5.3}$$

bevezetve a $T_u(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ és $T_m(s) = C(sI - A)^{-1}E + F$ átviteli függvényeket.

5.1.1. definíció. *A (5.3) rendszerhez tartozó* ***hibadetektáló szűrő*** *egy dinamikai rendszer:*

$$R = FU + HY \tag{5.4}$$

melyre tetszőleges U input esetén

$$\begin{aligned} M = 0 \quad &\Longrightarrow \quad R = 0 \\ M \neq 0 \quad &\Longrightarrow \quad R \neq 0 \end{aligned}$$

továbbá F és H $\mathcal{RH}_\infty$-beli átviteli mátrixok.

Amint láthatjuk ebben a fogalomban a szerzők egyelőre csak a hiba jelenlétét szeretnék kimutatni. Ahhoz, hogy azt is meg tudjuk állapítani, hogy honnan is ered a hiba, a következőre lesz szükségünk:

5.1.2. definíció. ***Hibaizolációs szűrő****nek mondjuk (5.4)-et, ha U-tól függetlenül teljesül rá, hogy*

$$\begin{aligned} M_i = 0 \quad &\Longrightarrow \quad R_i = 0 \\ M_i \neq 0 \quad &\Longrightarrow \quad R_i \neq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \end{aligned}$$

Legyen $T_u = M_u^{-1} N_u$ ($T_m = M_m^{-1} N_m$) egy bal prímfelbontás. Némi számolással (lásd [6]) igazolható, hogy a hibadetektáló rendszerünk a következő alakra hozható:

$$R = P N_m M = P(M_u Y - N_u U) \tag{5.5}$$

ahol $P \in \mathcal{RH}_\infty$. Ebből az alakból könnyen adódik a következő

5.1.3. tétel. *Pontosan akkor létezik hibadetektáló (hibaizolációs) szűrő, ha $N_m \neq 0$ (rang $N_m = k$).*

Bizonyítás: lásd [6].

5.1.4. megjegyzés. *A fenti szűrők a (5.5) képlet alapján készíthetők el olyan P választással, hogy hibadetektálónál $P N_m \neq 0$, illetve hibaizolációsnál $P N_m = \mathrm{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \mathcal{RH}_\infty$ teljesüljön P-re.*

5.2. Performancia indexek

Újabb cikkükk [7] általánosabb feladat megoldását tűzi ki célul, az általunk már vizsgált approximatív hibadetektálás irányába tesz lépéseket. Ebben a modellükben a detektálandó hiba (M) mellett egyéb zavar (D) is megjelenik, azaz a rendszer (5.3) leírása a következőképp módosul:

$$Y = T_u U + T_m M + T_d D \tag{5.6}$$

ahol D ismeretlen, de korlátos input: $\|D\|_2 \leq K_D$ Heurisztikusan a célkitűzés:

$$\begin{gathered}\text{hibára való érzékenység} \longrightarrow \text{max.}\\ \text{zavar hatása} \longrightarrow \text{min.}\end{gathered}$$

Most is véve a $T_u = M_u^{-1} N_u$ bal prímfelbontást a (5.6) és (5.5) egyenletek felhasználásával kapjuk, hogy

$$R = P M_u (T_m M + T_d D). \tag{5.7}$$

Ebben a megközelítésben R $\mathcal{H}_2$ normájának vizsgálata a kiindulópont:

$$\|R\|_2 = \left(\int_0^\infty r^T(t) r(t) \mathrm{d}t\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R^T(-j\omega) R(j\omega) \mathrm{d}\omega\right)^{1/2}.$$

Az itt alkalmazott módszer lényege olyan küszöbérték (J_{th}) keresése, melyet a következőképp alkalmazunk:

$$\begin{aligned}\|R\|_2 \geq J_{th} \quad &\longrightarrow \quad \text{figyelmeztetés: hiba történt}\\ \|R\|_2 < J_{th} \quad &\longrightarrow \quad \text{a rendszer hibamentes.}\end{aligned}$$

J_{th} értékének meghatározására általánosan elfogadott képlet:

$$J_{th} = \sup_{D, M=0} \|R\|_2 = \|P M_u T_d\|_\infty K_D.$$

Ahhoz, hogy a fentebb említett heurisztikus célkitűzést matematikai formulákba öntsük nézzük a következő szélsőérték feladatokat:

$$J_{\infty/\infty} := \inf_{P \in \mathcal{RH}_\infty} \frac{\|PM_uT_d\|_\infty}{\|PM_uT_f\|_\infty} \tag{5.8}$$

$$J_{\infty/\min} := \inf_{P \in \mathcal{RH}_\infty} \frac{\|PM_uT_d\|_\infty}{|PM_uT_f|_{\min}} \tag{5.9}$$

$$J_{\infty,\infty} := \inf_{P \in \mathcal{RH}_\infty} (\|PM_uT_d\|_\infty - \|PM_uT_f\|_\infty) \tag{5.10}$$

$$J_{\infty,\,\min} := \inf_{P \in \mathcal{RH}_\infty} (\|PM_uT_d\|_\infty - |PM_uT_f|_{\min}) \tag{5.11}$$

5.2.1. megjegyzés. *Az itt definiált mérőszámokat hívják performancia indexeknek. Vegyük észre, hogy a fenti feladatok közül bármelyik megoldásának konstansszorosa is megoldás ugyanannak a feladatnak. Ezért azt, melynek $\mathcal{H}_\infty$ normája 1 névleges megoldásnak tüntetjük ki.*

5.2.2. megjegyzés. *Ezen optimalizációs feladatok segítségével nemcsak a hibadetektáló szűrők tervezését általánosíthatjuk, hanem a fenti megközelítés a hibaizolációs esetre is alkalmazható (lásd [7]).*

5.2.3. tétel. *Tegyük fel, hogy*

- *a (5.6) rendszernek van olyan realizációja, melyben (C, A) detektálható*
- *a T_d egy állapotteres realizációja: (A, E_d, C, F_d)*
- *az*

$$\begin{bmatrix} A - j\omega I & E_d \\ C & F_d \end{bmatrix}$$

  mátrix teljes sorrangú, minden ω-ra.

Legyen $M_uT_d = T_{do}T_{di}$ egy co-inner-outer faktorizáció, aholis T_{di} a co-inner faktor, melyre $T_{di}(j\omega)T_{di}^T(-j\omega) = I$ és T_{do} a co-outer tényező, azaz $\mathcal{RH}_\infty$-ben invertálható.

Ekkor a

$$P_n := \frac{T_{do}^{-1}}{\|T_{do}^{-1}\|}$$

képlettel definiált függvény megoldása a (5.8)-(5.11) feladatok mindegyikének.

Bizonyítás: lásd [7].

6. Fejezet

Invertálhatósági kérdések

Szeretnénk az elkövetkezendőkben általánosabb modellből kiindulva megvizsgálni a detektálási kérdéseket. Az előző fejezeteknél igyekeztünk megfigyelő alapú szűrőket tekinteni, ettől a kötöttségtől most megszabadulunk. Az invertálási kérdések tárgyalásához szükségünk lesz néhány alapvető definícióra és tényre, melyeket az Előzmények című fejezetben már bevezettünk (14. oldal).

6.1. A reziduálképzés időtartományban

6.1.1. definíció. *A* ***reziduálgenerátor*** *olyan LTI rendszer, melynek bemenetei egy előre adott rendszer inputja(u) és outputja(y), kimenete, pedig az ún.* ***reziduál****(r, lásd ábra). Jelöljük a reziduálgenerátor állapotterét $\mathcal{W}$-vel. Állapotteres leírásban:*

$$\dot{w} = Jw - Ey + Gu \tag{6.1}$$

$$r = Mw - Hy + Ku. \tag{6.2}$$

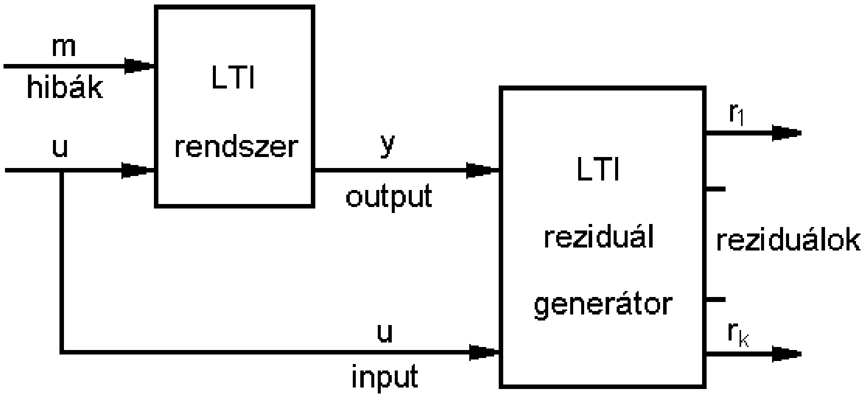
Ezen egyenleteket összekapcsolhatjuk a (4.1)-(4.2) egyenletekkel és y kifejezését beírva a következő adódik az immáron $\mathcal{X} \oplus \mathcal{W}$ állapotterű rendszerre:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -EC & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & F \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ m \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

$$r = \begin{bmatrix} -HC & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ m \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

Vegyük észre, hogy $J = A - LC$, $E = -L$, $G = B$, $M = -C$, $H = -I$, $K = 0$ választással kapjuk a megfigyelő alapú reziduálgenerátort.

Amint láthattuk a már bevezetett (4.1)-(4.2) hibamodellt alkalmazzuk azaz a hibamódok az m_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ vektorok, melyek rendre k_i dimenziósak. Szeretnénk k darab reziduálgenerátort készíteni (r_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ lesznek ezeknek a reziduáljaik, lásd 6.1 ábra), úgy hogy ha az i-edik hibamód, m_i nemnulla, akkor ennek hatása jelenjen meg az i-edik reziduálon, r_i-n de a többin ne. Ennek a követelménynek keresünk egy helytálló matematikai definíciót. Segítségünkre lesznek a 2.6. részben bevezetett definíciók (balinvertálhatóság, input-megfigyelhetőség).



6.1. ábra : A reziduálgenerátor blokkdiagrammja

Ha elsődleges célunk az lenne, hogy nemnulla m_i, nemnulla r_i-t eredményezzen, akkor kézenfekvő, hogy a balinvertálhatóság fogalmához kellene nyúlnunk. Massoumnia ezzel szemben [14]-ben nem ezt teszi. Ő megelégszik a valamivel gyengébb fogalom, az input-megfigyelhetőség alkalmazasával, minden bizonnyal azért, mert gyakorlati szempontból azon hibamódok amelyek valós rendszereknél megjelennek (pl. a step input), azok nem maradnak láthatatlanok egy input-megfigyelhető reziduál esetében; illetve a gyakorlatban a hibamódok többnyire egydimenziósak, amikoris a két fogalom egybeesik. Legyen $\hat{m}_i = (m_1, \ldots, m_{i-1}, m_{i+1}, \ldots, m_k)$.

6.1.2. definíció. *A* ***reziduálképzés alapproblémá****ja: keresendők olyan reziduálgenerátorok (azaz J_i, E_i, G_i, M_i, H_i és K_i, $i = 1, 2, \ldots, k$) úgy, hogy*

$$\begin{aligned} (u, \hat{m}_i) &\mapsto r_j = 0 & j \neq i \\ m_i &\mapsto r_i \text{ input-megfigyelhető} & i = 1, 2, \ldots, k \end{aligned}$$

és a J_i leképezések mátrixa stabil. (Itt "$\mapsto$" az átvitelt jelenti.)

6.1.3. tétel. *A fenti problémának pontosan akkor létezik megoldása, ha*

$$\hat{\mathcal{S}}_i^\star \cap \mathcal{F}_i = 0, \tag{6.5}$$

minden i-re, aholis $\hat{\mathcal{S}}_i^\star$ a $\sum_{j \neq i} \mathcal{F}_i$-t tartalmazó minimális nem-megfigyelhetőségi altér.

Bizonyítás: lásd [14] 88. oldal.

6.1.4. megjegyzés. *A bizonyítás konstruktív, amelyből kitűnik, hogy egy lehetséges megoldási mód valóban a megfigyelő alapú reziduálképzés.*

6.2. Frekvenciatartománybeli reziduálok

Adott a következő frekvenciatartománybeli leírás:

$$Y = T_u U + T_m M, \tag{6.6}$$

ahol T_u és T_m valódi racionális mátrixok. Tegyük fel, hogy minden hibamód egydimenziós, azaz $k_i = 1$ minden i-re.

A 6.1.2. definícióbeli alapprobléma ekkor a következő [14]: keresendők olyan H_y és H_u átviteli mátrixok, melyekkel a k dimenziós

$$R := \begin{bmatrix} H_y & H_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ U \end{bmatrix}$$

reziduálra igaz az, hogy az i. komponensére csak az M_i hibamód van hatással; valamint a $H_y T_s$ illetve a $H = [H_y, H_u]$ átviteli mátrixok stabilak, aholis T_s az eredeti rendszer kezdeti feltételéről a kimenetre való átmenetmátrixát jelöli. Ezen mátrixok stabilitására amiatt van szükség, hogy a nemnulla kezdeti állapot ($x(0) \neq 0$) illetve a reziduálgenerátor ugyancsak nemnulla kezdeti állapotának hatását kioltsa.

A reziduál egyenletébe behelyettesítve az Y-ra vonatkozó (6.6)-ot kapjuk, hogy

$$R = (H_y T_u + H_u)U + H_y T_m M$$

Nyilván $H_y T_u + H_u = 0$ a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a rendszer U inputja ne legyen hatással a reziduálra. Ahhoz pedig, hogy az $M_i \mapsto R_j$ átmenet nulla legyen pontosan az kell, hogy $H_y T_m = -T$, ahol T $k \times k$-as diagonális mátrix nemnulla diagonális elemekkel. Nem meglepő ezek után a következő

6.2.1. tétel. *Azzal a feltételezéssel, hogy a hibamódok skalárok a reziduálképzés frekvenciatartományban pontosan akkor oldható meg, ha T_m balinvertálható.*

Bizonyítás: lásd [14] 145. oldal.

6.3. Inverzión alapuló hibadetektálás

Igen friss eredmény [3] kerül ebben a részben felhasználásra, melyben hibamodellünkön picit változtatnunk kell. Az általánosabb modell tehát

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fm \tag{6.7}$$

$$y = Cx + Du + Gm \tag{6.8}$$

amely a $D : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ és a $G : \mathcal{M} \to \mathcal{Y}$ leképezésekkel bővült.

Elő szeretnénk állítani ennek a rendszernek az inverzét m-re vonatkozólag, azaz egy olyan LTI rendszert, mely az m vektort adja vissza outputként, inputként az u és y változókat használva. Mint később látni fogjuk, nem biztos hogy elegendő információt hordoznak az u és az y vektorok ehhez, előfordulhat, hogy ezeknek deriváltjaikra is szükség van. Az inverz rendszer tehát a következő alakú

$$\dot{\overline{x}} = \overline{A}\overline{x} + B_u \xi_u + B_y \xi_y$$
$$m = \overline{C}\overline{x} + D_u \xi_u + D_y \xi_y.$$

Itt ξ_u és ξ_y az input és otput deriváltakat tartalmazzák a szükséges rendig:

$$\xi_u = [u, \dot{u}, \ddot{u}, \ldots]^T$$
$$\xi_y = [y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots]^T.$$

A következőkben egy rekurzív algoritmus segítségével állítjuk elő az inverz rendszer egy állapottér reprezentációját, mely minimális (az állapottér dimenziója minimális) lesz, ha az eredeti rendszeré az volt (lásd [3] 1. állítás). Kezdetben legyenek

$$\begin{array}{lll} A_0 = A & B_0 = B & F_0 = F \\ C_0 = C & D_0 = D & G_0 = G \\ x_0 = x & y_0 = y & m_0 = m \end{array}$$

(i) Jelölje P_0 az Im G_0-ra való ortogonális projekciót. Ekkor Ker $(I - P_0) =$ Im G_0. P_0-t illetve $(I - P_0)$-t alkalmazva a (6.8) egyenletre kapjuk, hogy

$$P_0 y = P_0 C_0 x_0 + P_0 D_0 u + P_0 G_0 m_0 \tag{6.9}$$
$$(I - P_0) y = (I - P_0) C_0 x_0 + (I - P_0) D_0 u. \tag{6.10}$$

m_0-t bontsuk fel $m_0 = m_1^* + m_1$ összegre, aholis $m_1^* \in \mathcal{M} \ominus \text{Ker } G_0$, azaz $m_1 = m_0 - m_1^* \in \text{Ker } G_0$. A (6.9) egyenletből kapjuk, hogy

$$m_1^* = G_0^+ P_0 (y_0 - C_0 x_0 - D_0 u). \tag{6.11}$$

(ii) Tegyük fel, hogy $(I - P_0) C_0$ teljes rangú. Az állapotvektort is bontsuk $x_0 = x_1^* + x_1$ alakú összegre, ahol $x_1^* = Q_0 x \in \text{Im } C_0^T (I - P_0)$ és $x_1 = x - Q_0 x \in \text{Ker } (I - P_0) C_0$, ahol Q_0 a $C_0^T (I - P_0)$ képterére történő merőleges vetítést jelenti. Ekkor

$$\begin{aligned} x_1^* &= T_0 (y_0 - D_0 u), \\ T_0 &= (C_0^T (I - P_0) C_0)^+ C_0^T (I - P_0). \end{aligned}$$

Behelyettesítve ezt (6.11)-be kapjuk, hogy

$$m_1^* = G_0^+ P_0 (I - C_0 T_0)(y_0 - D_0 u) - G_0^+ P_0 C_0 x_1.$$

(iii) Az x_1-re vonatkozó új dinamika tehát

$$\dot{x}_1 = (I - Q_0)\dot{x} = (I - Q_0)[A(x_1^* + x_1) + Bu + F(m_1^* + m_1)].$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_0 &= A_0 - F_0 G_0^+ P_0 C_0 \\
\tilde{B}_{y,0} &= A_0 T_0 + F_0 G_0^+ P_0 (I - C_0 T_0) \\
\tilde{B}_0 &= B_0 - \tilde{B}_{y,0} D_0 \\
A_1 &= (I - Q_0)\tilde{A}_0 \qquad B_{u,1} = (I - Q_0)\tilde{B}_0 \\
B_{y,1} &= (I - Q_0)\tilde{B}_{y,0} \qquad F_1 = (I - Q_0) F_0 \\
C_1 &= Q_0 \tilde{A}_0 \qquad D_{u,1} = Q_0 \tilde{B}_0 \\
D_{y,1} &= Q_0 \tilde{B}_{y,0} \qquad G_1 = Q_0 F_0.
\end{aligned}
$$

Ezen jelölések mellett az új rendszer egyenletei:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_{u,1} u + B_{y,1} y_0 + F_1 m_1 \\
y_1 &= C_1 x_1 + D_{u,1} u + D_{y,1} y_0 + G_1 m_1
\end{aligned}
$$

aholis $y_1 := T_0 \dot{y}_0$.

Általában a k. lépésben [3]:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_k &= A_k x_k + B_{u,k} \xi_{u,k-1} + B_{y,k} \xi_{y,k-1} + F_k m_k \\
y_k &= C_k x_k + D_{u,k} \xi_{u,k} + D_{y,k} \xi_{y,k-1} + G_k m_k,
\end{aligned}
$$

ahol

$$
\begin{aligned}
\xi_{u,k} &= [u, \dot{u}, \ldots, u^{(k)}]^T \\
\xi_{y,k-1} &= [y, \dot{y}, \ldots, y^{(k-1)}]^T.
\end{aligned}
$$

A rekurzió addig folytatódik, amíg olyan lépéshez nem érünk, mikoris G_k invertálható. Az eddig tesztelt rendszereken ez így is volt. Az inverz efajta előállításának problémái még nem teljesen tisztázottak. Az algoritmus végén az m hiba:

$$
m = \sum_{i=1}^{k+1} m_i^*.
$$

7. Fejezet

Összefoglalás, numerikus példák

A stabilitási kérdések figyelembe vétele nélkül és feltéve azt, hogy a hibairányok egydimenziósak az alábbi három probléma közötti kapcsolatot szeretnénk feltárni (adott a C, A, F rendszer, $F = [F_1, F_2, \ldots, F_k]$ a (C, A) pár megfigyelhetőségét illetve a C és F teljesrangúságát továbbra is feltesszük):

I. **Kimenetszeparálhatóság**: léteznek-e olyan $\mathcal{W}_i \subset \mathcal{X}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ alterek és $L : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, melyekre

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i &\subset \mathcal{W}_i \\ (A - LC)\mathcal{W}_i &\subset \mathcal{W}_i \\ C\mathcal{W}_i \cap \sum_{j \neq i} C\mathcal{W}_j &= 0 \quad ? \end{aligned}$$

II. **Reziduálok időtartományban**: keresendők olyan J_i, E_i, G_i, M_i, H_i és K_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ amik segítségével elkészített

$$\begin{aligned} \dot{w}_i &= J_i w_i - E_i y + G_i u \\ r_i &= M_i w_i - H_i y + K_i u \end{aligned}$$

reziduálgenerátorokra

$$\begin{aligned} (u, \hat{m}_i) &\mapsto r_j = 0 & & j \neq i \\ m_i &\mapsto r_i \ \text{ input-megfigyelhető} & & i = 1, 2, \ldots, k. \end{aligned}$$

III. **Reziduálok frekvenciatartományban**: keressünk olyan $H = [H_y\ H_u]$ transzfer mátrixot, mellyel

$$H_y T_u + H_u = 0$$
$$H_y T_m = \mathrm{diag}(t_1, t_2, \ldots, t_k).$$

7.1.1. tétel. *Az I. feladat megoldhatóságából következik a másik kettő megoldhatósága, de visszafelé ez egyikre sem igaz; illetve a II. probléma pontosan akkor oldható meg, amikor III.*

Bizonyítás: lásd Appendix 52. oldal.

7.1.2. megjegyzés. *Az alábbi rendszer példa arra, hogy ha II-nek és III-nak van megoldása, akkor a I-re ez nem feltétlenül igaz:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor az átviteli mátrix a hibamódokról az y kimenetre

$$T_m(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ -\frac{1}{s^2+s+1} & -\frac{1}{s^2+s+1} \end{bmatrix}$$

ami balinvertálható. A CAISA, valamint a nem-megfigyelhetőségi algoritmust használva adódik, hogy

$$\mathcal{W}_1^\star = \hat{\mathcal{S}}_2^\star = \mathcal{F}_1 \quad \mathcal{W}_2^\star = \hat{\mathcal{S}}_1^\star = \mathcal{F}_2$$

melyekből könnyen leolvasható, hogy $C\mathcal{W}_1^\star \cap C\mathcal{W}_2^\star \neq 0$ (azaz nem kimenetszeparálható alterek), de a II. megolhatóságához szükséges és elégséges (6.5) feltétel teljesül.

Végezetül egy valós alkalmazásbeli F-16-os repülőgép modell egyszerűsített változatán mutatunk be két megközelítés, a Massoumnia-féle kimenetszeparálhatóság és az inverzión alapuló hibadetektálás eredményeit. A rendszer alakja

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fm$$
$$y = Cx + Gm$$

ahol a mátrixok a következők:

$$A = \begin{bmatrix} -0.1270 & -235 & -32.2000 & -9.5100 & -0.4880 \\ -0.0007 & -0.9690 & 0 & 0.9080 & -0.0042 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0009 & -4.5600 & 0 & -1.5800 & -0.3980 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2000 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.0208 & 15.2000 & 0 & 1.4500 & 0.0666 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 57.3000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = F = \begin{bmatrix} -0.2440 \\ -0.0021 \\ 0 \\ -0.1990 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Látható, hogy ez még nem az az alak, amelyet a 4. fejezetben hibamodelként kezeltünk. Ahhoz, hogy ezt elérjük a G vektort át kell transzformálnunk az állapotegyenletbe. Ennek módszere megtalálható [17]-ben és [14]-ben. Az így kapott új F mátrix melyben három hibamód van a következő lesz:

$$F = \begin{bmatrix} -0.2440 & 0 & 1.1146 \\ -0.0021 & 0 & 0.9990 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.1990 & 1 & 7.0852 \\ 0 & -21.7718 & 4.3544 \end{bmatrix}.$$

A CAISA segítségével kapjuk, hogy $\mathcal{W}_i^\star = \mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, 3$. Ekkor a CF mátrix

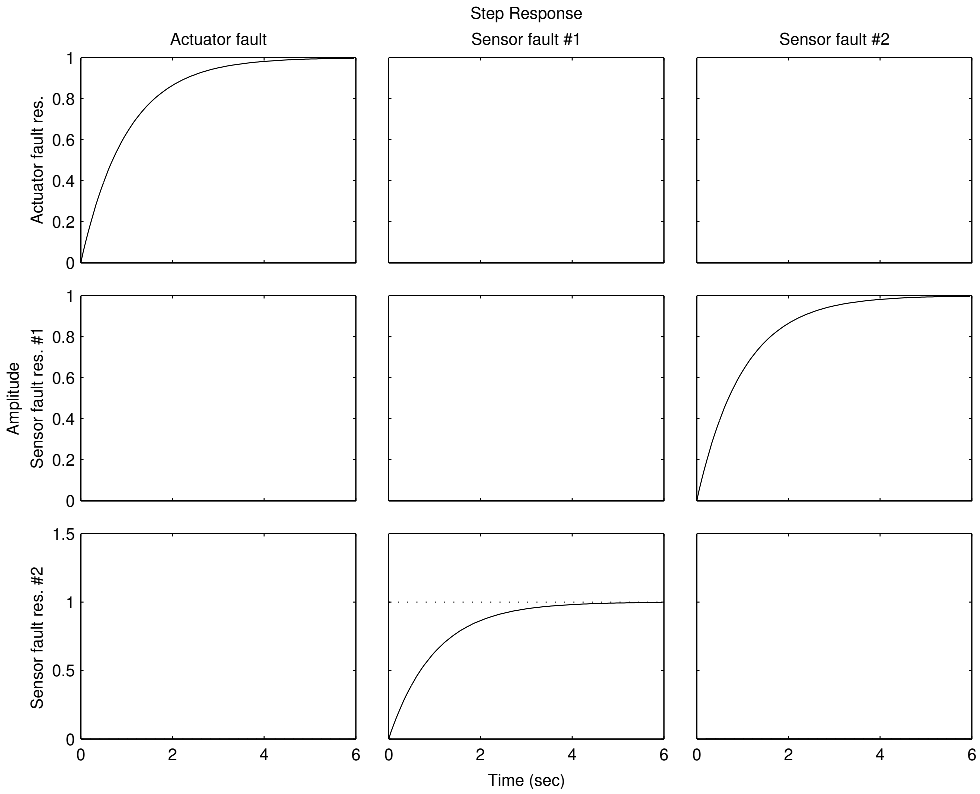
$$CF = \begin{bmatrix} -0.3254 & 0 & 25.7716 \\ -0.1990 & 1 & 7.0852 \\ -0.1198 & 0 & 57.2430 \end{bmatrix},$$

melynek rangja három, azaz kimenetszeparálható altereket kaptunk.

A Massoumnia műveiben ([13],[14]) található módszer segítségével számolt

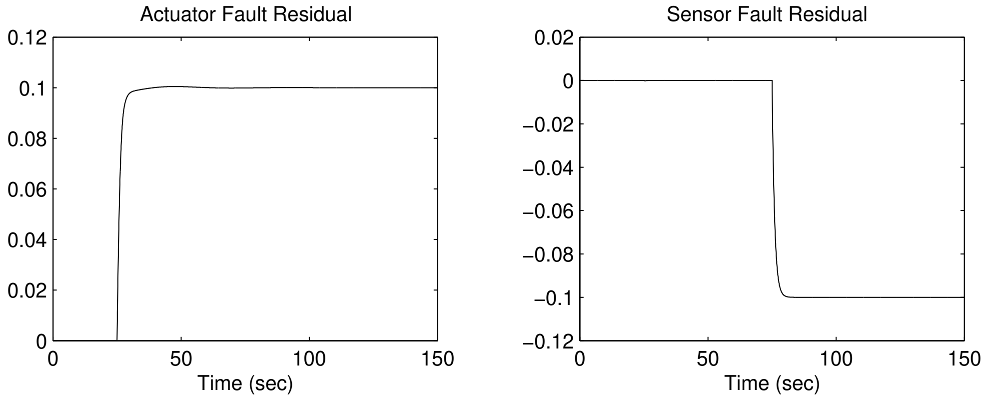
$$L = \begin{bmatrix} -6.1664 & 1.1146 & -3.2227 \\ -0.0622 & 0.9990 & 0.0170 \\ -0.0077 & 1 & 0.0209 \\ -5.8645 & 8.0852 & 1.4579 \\ 11.7896 & -17.4174 & -3.0912 \end{bmatrix}$$

mátrix megfelel a stabilitási feltétellel kiegészült előírásoknak, azaz kimenet-szeparálható rendszert valósít meg. Elkészítve a (4.4) hibarendszer szimulációját kaptuk a 7.1 ábrát. Minden oszlop különböző szimulációt jelöl, melyeknél rendre az első, második és harmadik hibamódhoz tartozó m függvény kapott nemnulla értékeket. Jól látható, hogy a hatásokat szétcsatoltuk, habár a második hibamód hatása a harmadik reziduálon, míg a harmadiké a másodikon jelenik meg. Mivel mindketten ugyanahhoz a szenzorhibához tartoznak, így ez elfogadható.



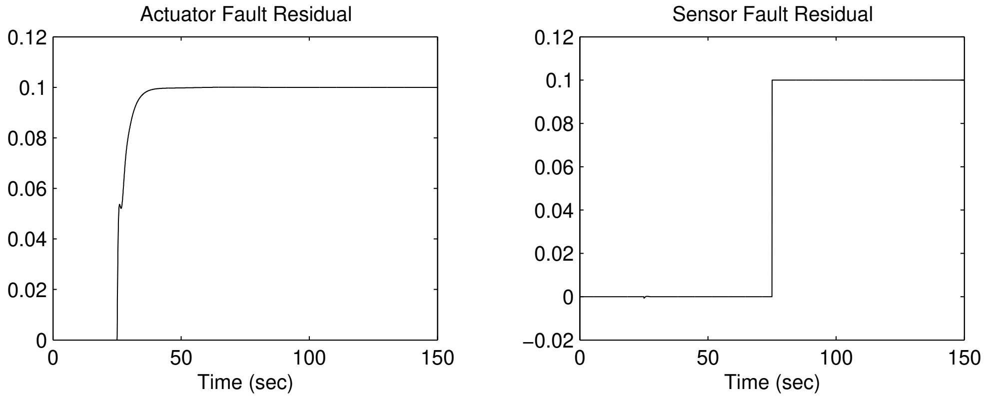
7.1. ábra : A hibarendszer szimulációjának eredménye

A hibarendszer a valóságban nem létező, fiktív rendszer, ezért a hibadetektáló szűrőnket az eredeti rendszerre is ki kell próbálnunk. Ennek eredményeit mutatja a 7.2 ábra. Ebben a tesztben a 25. és a 75. másodpercben generáltunk hibát először az állapotegyenletbeli hibamódhoz (aktuátor hiba), majd a megfigyelési egyenletben levőhöz (szenzor hiba).



7.2. ábra : Az eredeti rendszer viselkedése

Ugyanerre a rendszerre kipróbáltuk az inverzó alapú detektálást is, mely hasonlóan az előzőhöz jól visszaadta a keletkezett hibákat (7.3 ábra). A hibákat itt is 25. és 75. másodpercben generáltuk a szimuláció során. Az inputok első deriváltjaira volt szükségünk ehhez. A szükséges MATLAB programokat Szászi István készítette.



7.3. ábra : A visszaállított hibamódok

Mint láthattuk a $\mathcal{H}_\infty$ technikák és LMI-k segítségével történő próbálkozásaink bonyolult optimalizációs feladathoz vezettek, viszont amint azt a 7.1.1. tétel mutatja a kimenetszeparálhatóság feltételét sikerült enyhíteni. A további kutatások éppen ezért az ott megfogalmazott invertálhatósági megközelítésben igyekeznek a hibadetektáló diagnosztikai rendszerek tervezését elősegíteni. Ehhez kapcsolódik a 6.3. részben bemutatott inverz rendszert előállító algoritmus további vizsgálata és összehasonlítása más eddig az irodalomban szerepelt inverziós technikákkal (ilyen módszer található meg pl. [16]-ban).

8. Fejezet

Bizonyítások

8.1. 3. Fejezet

Bizonyítás: 3.1.4. állítás.

Legyen $x_0 \in \mathcal{S}$ és $\alpha \in (0,1)$, mely kisebb x_0 lokális minimum definíciójabeli ε-nál. Ekkor

$$f(x_0) \leq f((1-\alpha)x_0 + \alpha x) \leq (1-\alpha)f(x_0) + \alpha f(x) \tag{8.1}$$

amelyből $0 \leq \alpha(f(x) - f(x_0))$, tehát $f(x_0) \leq f(x)$. Ha f szigorúan konvex, akkor (8.1)-ben a második egyenlőtlenség szigorú, így x_0 egyértelmű.

Bizonyítás: 3.2.3. állítás.

Tetszőleges $F \in \mathbb{R}^{r\times r}$ esetén

$$\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -F \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} I & -F \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & I \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -F \\ 0 & I \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} I & -F \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{11}F + M_{12} \\ M_{21} + F^T M_{11} & F^T M_{11} F + F^T M_{12} + M_{21} F + M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -F \\ 0 & I \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ami pontosan akkor pozitív definit, ha az utólsó kifejezésben levő középső tényező az. $F = -M_{11}^{-1} M_{12}$ választással adódik az állítás.

8.2. 4. fejezet

Bizonyítás: 4.2.3. lemma.

Legyenek $\mathcal{V}_i$ olyan alterek, melyekre $\mathcal{W}_i = \mathcal{V}_i \oplus (\mathcal{W}_i \cap \text{Ker } C)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $\dim \mathcal{W}_i = n_i$, $\dim \mathcal{V}_i = p_i$. Alkossanak a w_{ji}, $i = 1, 2, \ldots, n_j$ vektorok bázist $\mathcal{W}_j$-ben, úgy, hogy $\mathcal{V}_j = \text{span}\,\{w_{ji}, i = 1, 2, \ldots, p_j\}$. Ekkor $Aw_{ji} = x_{ji}$ valamely $x_{ji} \in \mathcal{X}$ vektorokra. A (4.8) feltétel miatt a

$$C[w_{1,1}, \ldots, w_{1,p_1}, \ldots, w_{k,1}, \ldots, w_{k,p_k}]$$

mátrix teljes oszloprangú, ezért létezik $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ megoldása a

$$\begin{aligned}
&[x_{1,1}, \ldots, x_{1,p_1}, \ldots, x_{k,1}, \ldots, x_{k,p_k}] = \\
&= LC[w_{1,1}, \ldots, w_{1,p_1}, \ldots, w_{k,1}, \ldots, w_{k,p_k}]
\end{aligned}$$

egyenletnek. Mivel $\mathcal{W}_j$-k (C, A)-invariánsak $(A - LC)w_{ji} = Aw_{ji} = s_{ji}$, $p_j < i \leq n_j$, valamely $s_{ji} \in \mathcal{W}_j$ vektorokra. Tehát $(A - LC)w_{ji} = s_{ji}$, $i = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, $s_{ji} \in \mathcal{W}_j$; azaz $(A - LC)\mathcal{W}_i \subset \mathcal{W}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Bizonyítás: 4.3.1. állítás.

Nyilván elég belátni, hogy $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{S}_i$ akkor és csak akkor, ha $T_{ij}(s) = 0$, $s \in \mathbb{C}$. Ez pedig azonnal adódik az átviteli függvény

$$\begin{aligned}
T_{ij}(s) = \frac{1}{\chi_{A-LC}(s)}&[H_i C F_j s^{n-1} + H_i C(A - LC + \alpha_{n-1} I) F_j s^{n-2} + \ldots \\
&\ldots + H_i C((A - LC)^{n-1} + \alpha_{n-1}(A - LC)^{n-2} + \ldots + \alpha_1 I) F_j]
\end{aligned}$$

alakjából, amelyben

$$\chi_{A-LC}(s) = s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \alpha_0$$

ami az $A - LC$ karakterisztikus függvénye. Mindez megtalálható [2]-ben.

8.3. 7. fejezet

Bizonyítás: 7.1.1. tétel.

I. $\Longrightarrow$ II.
Jelölje most is mint a 4. fejezetben $\mathcal{W}_i^\star$ az $\mathcal{F}_i$-t tartalmazó minimális (C, A)-invariáns alteret. Legyen H_i az ugyancsak ott emlegetett vetítés, mely a $C\mathcal{W}_i^\star$-ra történik $\sum_{j\neq i} C\mathcal{W}_j^\star$ mentén. A kimenetszeparálhatóság, mint tudjuk (4.2.3. lemma) kompatibilitást von maga után, azaz létezik $L \in \cap_{j=1}^k \mathbb{L}(\mathcal{W}_j^\star)$.

Ezek alapján $j \neq i$ esetén $\mathcal{F}_j \in \langle \mathrm{Ker}\ H_iC | A - LC\rangle$, illetve,

$$\langle \mathrm{Ker}\ H_iC | A - LC\rangle \cap \mathcal{F}_i = 0,$$

amelyből azonnal adódik a II. megoldhatóságához szükséges és elégséges (6.5) feltétel.

II. $\Longrightarrow$ III.
A 6.1.3. tétel [14]-beli bizonyításából adódik, hogy létezik olyan H_y átviteli mátrix, mely segítségével a H_yT_m szorzat diagonális ([14] 93. oldal). A diagonális elemek nem lesznek nullák, ami azonnal eredményezi, hogy egy további diagonális racionális mátrixszal szorozva H_yT_m-et egységmátrixot kaptunk, azaz T_m balinverze létezik.

III. $\Longrightarrow$ II.
Tegyük fel tehát, hogy a balinvertálható T_m mellett létezik olyan i, melyre az $m_i \mapsto r_i$ átmenethez tartozó rendszer nem input-megfigyelhető. Mivel a hibairányok egydimenziósak használva a 2.6.8. állítást kapjuk, hogy az ehhez az átmenethez tartozó rendszer nem balinvertálható. Következésképp az $m \mapsto r$ sem lehet az. A frekvenciatartománybeli reziduálgenerátoroknál ezt az átmenetet a H_yT_m átviteli mátrix valósítja meg, mint azt láttuk a 6. fejezetben. Az itt megfogalmazott feladatból kitünik, hogy balinvertálható H_y-t keresünk, mely segítségével a T_m mátrixot diagonalizáljuk. Ha tehát az $m \mapsto r$ átmenetet megvalósító H_yT_m nem balinvertálható, az csak úgy lehet, hogy T_m nem az, amely az állítás igazságát jelentő ellentmondást adja.

Ezzel a tételt beláttuk, érdekességként álljon itt egy közvetlen bizonyítás arra, hogy
I. $\Longrightarrow$ III.
Láttuk, hogy III. megoldhatósága a T_m átviteli mátrix $(= (C, A, F)$ rendszer$)$

balinvertálhatóságával egyenértékű. Ez utóbbi azt jelenti, hogy $\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = 0$, aholis $\mathcal{F} = \operatorname{Im} F$ és $\mathcal{V}$ a Ker C-beli maximális (A, F)-invariáns altér. Tegyük fel tehát a bizonyítás céljából, hogy a szóbanforgó rendszer nem balinvertálható, azaz létezik $0 \neq f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{V}$. Ekkor a 2.4.8. tétel felhasználásával a következőket írhatjuk:

$$f = \sum_{j=1}^{s_0} \alpha_{i_j^0} F_{i_j^0} \tag{8.2}$$

$$Cf = 0 \tag{8.3}$$

$$Af = v_1 + f_1 \qquad v_1 \in \mathcal{V},\ f_1 \in \mathcal{F}, \tag{8.4}$$

ahol f előállításában csak a nemnulla $\alpha_{i_j^0}$ együtthatókat tüntettük fel.

Ha létezne olyan $r \in \{1, 2, \ldots, s_0\}$, mellyel $CF_{i_r^0} \neq 0$, akkor (8.3)-at átalakítva kapjuk, hogy

$$0 \neq CF_{i_r^0} = \sum_{j \neq r} -\frac{\alpha_{i_j^0}}{\alpha_{i_r^0}} CF_{i_j^0},$$

melynek bal oldala nyilván eleme $C\mathcal{W}^{\star}_{i_r^0}$-nak, jobboldala pedig $\sum_{j \neq i_r^0} C\mathcal{W}^{\star}_j$-beli ami azonnal mutatja a nem outputszeparálhatóságot.

Feltehetjük a továbbiakban tehát, hogy $CF_{i_j^0} = 0$ minden j-re. Ekkor a (8.4) azonosságban f_1-et felírva a (8.2)-höz hasonlóan nemnulla együtthatókkal

$$f_1 = \sum_{j=1}^{s_1} \alpha_{i_j^1} F_{i_j^1}.$$

C-vel megszorozva (8.4)-et:

$$CAf = \sum_{j=1}^{s_0} \alpha_{i_j^0} CAF_{i_j^0} = \sum_{j=1}^{s_1} \alpha_{i_j^1} CF_{i_j^1}.$$

Itt is elmondhatjuk, hogy ha létezik r, melyre $CAF_{i_r^0} \neq 0$, akkor a fenti gondolatmenetet használva kapnánk, hogy nem teljesül a kimenetszeparálhatóság. Ha viszont minden j-re $CAF_{i_j^0} = 0$, akkor az v_1 vektorra felírva egy (8.2) alakú összeget azzal folytatható a fenti meggondolás, miután (8.4)-et A-val szorozzuk. A folyamat a (C, A) pár megfigyelhetősége miatt egyszer meg kell álljon, azaz létezik olyan l természetes szám és j index, melyre $CA^l F_{i_j^0} \neq 0$, amellyel kapjuk a kívánt ellentmondást.

Irodalomjegyzék

[1] G. Basile, G. Marro: *Controlled and Conditioned Invariant Subspaces in Linear System Theory*, J. Optimiz. Theory Appl. **3**, 306-315, 1969.

[2] S.P. Bhattacharyya: *Disturbance Rejection in Linear Systems*, Int. J. Systems Sci. **5**, 7, 633-637, 1974.

[3] J. Bokor, A. Edelmayer, F. Szigeti, C. E. Vera:*Inversion Based Fault Detection and Isolation* megjelenés előtt.

[4] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan: *Linear Matrix Ineqaulities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, 1994.

[5] R. H. Chen, J. L. Speyer: *Robust Multiple-Fault Detection Filter* megjelenés előtt.

[6] X. Ding, P. M. Frank: *Fault Detection via Factorization Approach*, System & Control Letters **14**, 431436, 1990.

[7] S. X. Ding, T. Jeinsch, P. M. Frank, E.L. Ding: *A Unified Approach to the Optimization of Fault Detection Systems*, Int. J. Adapt. Control Signal Process. **14**, 725-745, 2000.

[8] L. El Ghaoui, S. Niculescu: *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, SIAM, Philadelphia, 2000.

[9] M. Hou, R. J. Patton: *An LMI Approach to $\mathcal{H}_-/\mathcal{H}_\infty$ Fault Detection Observers* Proceedings of IEE Conference on Control 96, 1996.

[10] M. Hou, R. J. Patton: *On Sensitivity of Robust Fault Detection Observers* Proceedings of IFAC Workshop 1996.

[11] T. Iwasaki, R.E. Skelton: *All Controllers for the General $\mathcal{H}_\infty$ Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas*, Automatica, **30**, 8, 1307-1317, 1994.

[12] A. G. J. Macfarlane, N. Karcanias: *Poles and Zeros of Multivariable Systems: A Survey of the Algebraic, Geometric and Complex-variable Theory* Int. J. Contr., **24**, 33-74, 1976.

[13] M. A. Massoumnia: *A Geometric Approach to the Synthesis of Failure Detection Filters*, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-**27**, 839-846, 1986.

[14] M. A. Massoumnia: *A Geometric Approach to Failure Detection and Identification in Linear Systems*, PhD dissertation, Dep. Aeronautics and Astronautics, Mass. Inst. Technol., 1986.

[15] C. Scherer, S. Weiland: *Linear Matrix Inequalities in Control* elérhető: `http://www.er.ele.tue.nl/SWeiland/lmi.htm`

[16] L. M. Silverman: *Inversion of Multivariable Linear Systems*, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-**14**, 270-276, 1969.

[17] J. E. White, J. L. Speyer: *Detection Filter Design: Spectral Theory and Algorithms*, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-**32**, 593-603, 1987.

[18] W. M. Wonham: *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[19] K. Zhou, J. C. Doyle: *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, New Jersey, 1998.