Önhasonló halmazok egybevágóság-invariáns mértékeiről

Diplomamunka

Írta: Máthé András

Matematikus szak

Témavezető:

Keleti Tamás, egyetemi docens
Analízis Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2005

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönönetet mondani témavezetőmnek, Keleti Tamásnak a dolgozat elkészítésében nyújtott nélkülözhetetlen segítségéért. Köszönöm Elekes Mártonnak és Keleti Tamásnak a sok hasznos ötletet, az itt szereplő tételek egy része is közös munkánk eredménye.

1. Bevezetés

Az $\mathbb{R}^d$ euklideszi tér egy K kompakt részhalmazát önhasonlónak nevezzük, ha léteznek $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ $(r \geq 2)$ kontraktív és injektív hasonlóságok, amelyekkel $K = \varphi_1(K) \cup \ldots \cup \varphi_r(K)$. Hutchinson [1] nevezetes eredménye szerint tetszőleges $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ kontrakciókra létezik egyetlen nemüres kompakt K halmaz, amelyre $K = \varphi_1(K) \cup \ldots \cup \varphi_r(K)$.

Jelölje $\sqcup$ a diszjunkt uniót. Egy K önhasonló halmaz eleget tesz az erős elválasztási feltételnek (avagy diszjunkt darabokból áll), ha léteznek $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ hasonlóságok, amelyekre $K = \varphi_1(K) \sqcup \ldots \sqcup \varphi_r(K)$, azaz K véges sok hasonló képe diszjunkt uniója. Az erős elválasztási feltételnek eleget tevő K önhasonló halmaz egy *felírásán* hasonlóságok egy rendszerét, $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r\}$-t értjük, amelyekre $K = \varphi_1(K) \sqcup \ldots \sqcup \varphi_r(K)$. A K ezen felírásához tartozó elemi darabjainak a $(\varphi_{i_1} \circ \ldots \circ \varphi_{i_n})(K)$ alakú halmazokat nevezzük.

Egy felírásával adott önhasoló halmazon tekinthetjük a következő mértékeket. Legyen $p_1, \ldots p_r \in (0,1)$ és $\sum_{i=1}^r p_i = 1$. Ismert, hogy létezik egyetlen μ valószínűségi Borel mérték K-n, amelyre $\mu \circ \varphi_i = p_i \cdot \mu \quad (1 \leq i \leq r)$, vagyis minden $H \subset K$ Borel halmazra $\mu(\varphi_i(H)) = p_i \cdot \mu(H) \quad (1 \leq i \leq r)$, lásd például [1] vagy itt a 2.3. Állítást. Az ilyen mértékeket *természetes* mértékeknek fogjuk nevezni.

Sokat vizsgált terület a különböző önhasonló halmazok (és számegyenesen a Cantor halmazok) egy eltoltjukkal alkotott metszete, illetve annak dimenziója, Lebesgue- és Hausdorff-mértéke, valamint topológiai tulajdonságai (lásd például [2], [3], [4], [5]). Sokszor érdekes kérdés az, hogy különféle halmazok körében mikor jár együtt a pozitív mértékűség a nem üres (relatív) belsővel. A klasszikus (triadikus) Cantor-halmaz és egy eltoltja metszete pontosan akkor pozitív mértékű a Cantor-halmaz természetes szimmetrikus mértéke szerint, ha a (Cantor-halmaz szerinti) relatív belseje nem üres, vagyis ha tartalmaz elemi darabot, lásd [4]. Itt jóval általánosabbat és erősebbet bizonyítunk: ha K önhasonló halmaz diszjunkt darabokból és μ egy természetes mérték rajta, akkor minden g hasonlóságra $K \cap g(K)$ mértéke megegyezik a K-ra vett relatív belseje mértékével, vagyis $\mu\big(K \cap g(K)\big) = \mu\big(\mathrm{int}_K(K \cap g(K))\big)$, lásd a 3.8. Következményt. Ennek a belátásához és a későbbi tételeinkhez is a legfontosabb eszközünk a következő (talán önmagában is érdekes) állítás lesz: Minden diszjunkt darabokból álló K önhasonló halmazhoz és μ természetes mértékhez létezik egy $c < 1$ konstans, hogy minden g hasonlóságra $\mu\big(K \cap g(K)\big) < c$ vagy $K \subset g(K)$, lásd a 3.7. Tételt.

Önaffin halmaznak egy $K = \xi_1(K) \cup \ldots \cup \xi_r(K)$ kompakt halmazt hívunk, ahol ξ_i kontraktív affinitás (ahol affinitáson lineáris transzformáció és eltolás kompozícióját értjük). Sokszor feltesszük, hogy az affinitások teljes rangúak. Speciális, de nagyon gyakran vizsgált önaffin halmazok a *Sierpiński szőnyegek*. Bedford [8] és McMullen [9] meghatározták a Sierpiński szőnyegek Minkowski- és Hausdorff-dimenzióját. Gatzouras és Lalley [10] megmutatták, hogy néhány egyszerű eset kivételével e szőnyegek Hausdorff-mértéke nulla vagy végtelen. Peres [12] eredménye szerint ugyanez fennáll az összes általánosított Hausdorff-mértékre is, és [11] a pakolási mértékre is. E mértékek közös tulajdonsága, hogy mindegyik egybevágóság-invariáns. Jogosan merül fel Keleti Tamás és Elekes Márton kérdése, hogy egy Sierpiński szőnyegre vagy egy önaffin halmazra van-e egyáltalán olyan egybevágóság-invariáns mérték, amely szerint az pozitív és véges mértékű. (Egy publikálatlan eredményük szerint Sierpiński szőnyegre van ilyen tulajdonságú eltolásinvariáns mérték.)

Vannak olyan halmazok, amelyekre nem létezik olyan egybevágóság-invariáns mérték, amely szerint a halmaz pozitív és véges mértékű. Roy O. Davies [6] klasszikus eredménye szerint van olyan kompakt halmaz a számegyenesen, amely nulla vagy nem szigmavéges minden eltolásinvariáns mérték szerint. A Liouville-számok halmaza is ilyen tulajdonságú [7].

Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ egy Borel halmaz és μ egy mérték K Borel részhalmazain. A μ mértéket egybevágóság-invariánsnak hívjuk, ha minden $H \subset K$ Borel halmazra és g egybevágóságra $g(H) \subset K$ esetén $\mu(H) = \mu(g(H))$. Hogy ez valóban jogos elnevezés, jól mutatja a következő (2.4. Állítás): létezik μ^* egybevágóság-invariáns Borel mérték $\mathbb{R}^d$-n, amelyre $\mu^*|_K = \mu$. Emiatt mindig elegendő az adott (önhasonló, önaffin) halmazon vizsgálni a mértékeket, és köztük ebben az értelemben egybevágóság-invariáns mértéket keresni, amely szerint K pozitív és véges mértékű. Érdemes tehát a természetes mértékekkel foglalkozni, és köztük keresni egybevágóság-invariánsat. A fenti kérdést önaffin halmazokra itt nem fogjuk tudni megválaszolni. Ellenben diszjunkt darabokból álló önhasonló halmazokra teljes karakterizációt adunk az egybevágóság-invariáns természetes mértékekre. A továbbiakban ilyen halmazokkal foglalkozunk.

Minden diszjunkt darabokból álló $K \subset \mathbb{R}^d$ önhasonló halmazhoz létezik egy μ_H egybevágóság-invariáns Borel mérték $\mathbb{R}^d$-n, amelyre $\mu_H(K) = 1$, nevezetesen a megfelelő dimenziós Hausdorff-mérték alkalmas konstansszorosa ilyen (lásd például [13], 107. oldal). A Hausdorff-mérték hasonlóságokra vonatkozó viselkedéséből látható, hogy e μ_H mérték megszorítása K-ra egy természetes mértéket ad. Tehát mindig van egybevágóság-invariáns természetes mérték egy diszjunkt darabokból álló önhasonló halmazon. Ezt a Hausdorff-mértéket kihasználva jutunk majd el a már említett a 3.7. Tételhez és az egybevágóság-invariáns mértékek karakterizációjához. Világos, hogy ha a μ természetes mérték egybevágóság-invariáns, akkor az egybevágó elemi darabok egyenlő mértékűek. Megmutatjuk, hogy ez egyben elégséges feltétel is ahhoz, hogy a mérték egybevágóság-invariáns legyen (4.4. Tétel). Emiatt a μ természetes mérték p_i súlyaiból és az önhasonló halmazt előállító φ_i hasonlóságok nagyítási arányaiból egyszerűen kiolvasható, hogy μ egybevágóság-invariáns-e.

Az is kiderül majd, hogy egy egybevágóság-invariáns természetes mérték az összes felírás szerint is természetes, noha a természetes mérték fogalma függ a felírás választásától, lásd a 4.5. Tételt.

2. Előkészület

Ebben a szakaszban újra kimondunk néhány a bevezetésben már szereplő fontosabb definíciót.

Egy diszjunkt darabokból álló önhasonló halmaznak sokféle felírása van, például, ha $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r\}$ felírás, akkor $\{\varphi_1 \circ \varphi_1, \varphi_1 \circ \varphi_2, \dots, \varphi_1 \circ \varphi_r, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_r\}$ is mindig felírás.

A K egy $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$ felírásához tartozó elemi darabjainak a $(\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n})(K)$ alakú halmazokat nevezzük, méghozzá $(\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n})(K)$ n-edik generációs elemi darab. Vezessük be a multiindexes írásmódot: indexek egy rendezett sorozatát értjük multiindexen, $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ esetén legyen például $\varphi_I = \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}$ és $p_I = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_n}$. Az $I = \emptyset$ üres halmaz is multiindex, $\varphi_\emptyset =$ identitás és $p_\emptyset = 1$.

Figyeljük meg, hogy ha K önhasonló halmaz, akkor a $\varphi_I(K)$ elemi darabjai is önhasonló halmazok, valamint tetszőleges injektív h hasonlóságra $h(K)$ is önhasonló, amelynek elemi darabjai a $h(\varphi_I(K))$ halmazok.

2.1. Definíció. *Legyen K diszjunkt darabokból álló önhasonló halmaz, $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r\}$ egy felírása. Egy K Borel halmazain értelmezett μ mértéket természetesnek hívunk, ha valószínűségi, azaz $\mu(K) = 1$, és valamilyen $p_1, \dots, p_r \in (0, 1)$, $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ konstansokkal $\mu \circ \varphi_i = p_i \cdot \mu \quad (i = 1, \dots, r)$.*

Borel mértéken mindvégig olyan mértéket fogunk érteni, amelynek σ-algebrája pontosan a Borel halmazokból áll.

Láttuk, hogy önhasonló halmazoknak nincs egyértelmű felírása. Sőt, általában „legkisebb" felírása sincsen. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r\}$ felírás finomítása az $\mathcal{F}_1 = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_s\}$ felírásnak, ha minden $1 \leq i \leq r$-re létezik I multiindex, hogy $\varphi_i = \psi_I$. Ez egy részbenrendezést definiál a felírásokon, legyen $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}$ ha $\mathcal{F}$ finomítása $\mathcal{F}_1$-nek. Egy felírás minimális, ha semmilyen másik felírásnak nem valódi finomítása. Egy felírás legkisebb felírás, ha minden másik felírás az ő finomítása. Van olyan önhasonló halmaz (diszjunkt darabokból), amelynek több minimális felírása is van, azaz (ami ezzel ekvivalens) nincsen legkisebb felírása (lásd az 5. szakaszt).

A természetes mérték fogalma nemcsak az önhasonló halmaztól függ, hanem a felírástól is. Világos, hogy egy felírás finomítása szerint több természetes mérték van, mint a felírás szerint.

2.2. Definíció. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ nemüres Borel halmaz, μ pedig egy mérték K Borel részhalmazain. Azt mondjuk, hogy μ egybevágóság-invariáns, ha minden $H \subset K$ Borel halmazra és g egybevágóságra $g(H) \subset K$ esetén $\mu(H) = \mu(g(H))$.*

Ez $K = \mathbb{R}^d$ esetén visszaadja a szokásos definícióját az egybevágóság-invarianciának. A 2.4. Állítás mutatja, hogy jogos ez a definíció: K minden egybevágóság-invariáns mértéke kiterjeszthető $\mathbb{R}^d$ egybevágóság-invariáns mértékévé.

Jelöljük α_i-vel a φ_i hasonlóság nagyítását. Világos, hogy két elemi darab pontosan akkor egybevágó, ha K-nak két megegyező nagyítású hasonlóság szerinti képeik. Vagyis $\varphi_I(K)$ és $\varphi_J(K)$ egybevágó, ha $\alpha_I = \alpha_J$. A 4.4. karakterizációs tétel szerint egy μ természetes mérték pontosan akkor egybevágóság-invariáns, ha minden $\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\dots\alpha_{i_n} = \alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\dots\alpha_{j_m}$ esetben $p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_n} = p_{j_1}p_{j_2}\dots p_{j_m}$ fennáll a μ mérték p_i súlyaira.

Minden diszjunkt darabokból álló önhasonló halmaz megfelelő dimenziós Hausdorff-mértéke pozitív és véges [13], és ha lenormáljuk 1-re, akkor (az alapján, ahogy a Hausdorff-mérték a hasonlóságokra viselkedik) egy természetes mértéket kapunk, amely persze egybevágóság-invariáns. A Hausdorff-mérték annak a súlyozásnak felel meg, amikor $p_i = \alpha_i^s$ arra az s pozitív valós számra, amelyre $\sum \alpha_i^s = 1$, vagyis éppen a hasonlósági dimenzióra.

Az $\mathbb{R}^d$ euklideszi tér hasonlóságai természetes módon elláthatók egy topológiával. Minden hasonlóság $x \mapsto \alpha Ax + b$ alakú, ahol $\alpha \geq 0$ valós szám, a nagyítási arány, A egy $n \times n$-es ortogonális mátrix, vagyis egybevágóság, $b \in \mathbb{R}^d$ pedig egy eltolásvektor. Emiatt a hasonlóságok az $\mathbb{R}^{d^2+d}$ egy zárt részhalmazát alkotják: az első d^2 koordináta az αA mátrix elemeiből adódik, a maradék d pedig b koordinátáiból. Vegyük $\mathbb{R}^{d^2+d}$-n a standard metrikát, lássuk el a hasonlóságok terét az $\mathbb{R}^{d^2+d}$-ből örökölt metrikával, és jelölje $\mathcal{H}$ a hasonlóságok metrikus terét. Mivel a hasonlóságok $\mathbb{R}^{d^2+d}$-ben zárt halmazt alkotnak, a $\mathcal{H}$ metrikus tér lokálisan kompakt, azaz minden pontjának van olyan nyílt környezete, amelynek lezárása kompakt.

A hasonlóságok zártak a kompozícióra, a nem nulla nagyítású hasonlóságok pedig csoportot alkotnak a kompozícióra nézve. Ez a csoport topologikus csoport az imént definiált topológiával (pontosabban e csoportra vett megszorításával), vagyis $(h, g) \mapsto h \circ g$ és $g \mapsto g^{-1}$ folytonos leképezések.

Egyszerűen belátható, hogy a $g_n \in \mathcal{H}$ hasonlóságok pontosan akkor tartanak a $h \in \mathcal{H}$ hasonlósághoz ($g_n \to h$), ha minden $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt halmazra és $\varepsilon > 0$-ra létezik N, hogy $n \geq N$, $x \in K$ esetén $\mathrm{dist}\big(g_n(x), h(x)\big) < \varepsilon$. Itt és a későbbiekben is *dist* jelöli a távolságot a tér két pontja vagy két halmaza közt.

2.3. Állítás. *Legyen $K = \varphi_1(K) \sqcup \ldots \sqcup \varphi_r(K)$ egy önhasonló halmaz diszjunkt darabokból. Ekkor minden $0 \leq p_1, \dots, p_r \leq 1$, $\sum p_i = 1$ számok esetén létezik egyetlen μ valószínűségi Borel mérték K-n, amelyre minden $H \subset K$ Borel halmazra és minden $1 \leq i \leq r$-re $\mu(\varphi_i(H)) = p_i \cdot \mu(H)$, vagyis $\mu \circ \varphi_i = p_i \cdot \mu$.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\varphi_I(K)$ mértéke p_I kell legyen. Ezért definiáljuk a μ_k külső mértéket így:

$$\mu_k(H) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} p_{I_i} : H \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi_{I_i}(K)\Big\}.$$

Amiatt, hogy K eleget tesz az erős szétválasztási tulajdonságnak, azaz diszjunkt darabokból áll, ez a külső mérték metrikus külső mérték. Tehát belőle a szokásos módon képzett mérték szerint a Borel halmazok mérhetőek. Szorítsuk meg a Borel halmazok σ-algebrájára, és jelöljük az így kapott mértéket μ-vel.

Azt állítjuk, hogy $\mu(K) = 1$. Világos, hogy $\mu(K) \leq 1$. Vegyük K egy fedését elemi darabokból, $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi_{I_i}(K)$. A $\varphi_{I_i}(K)$ nemcsak kompakt, hanem nyílt részhalmaza is K-nak, tehát már véges sok is lefedi K-t. Válasszunk egy minimális lefedő rendszert ebből a fedésből. Ekkor esetleg más indexekre áttérve $K = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_{I_i}(K)$ és $\varphi_{I_i}(K) \cap \varphi_{I_j}(K) = \emptyset$ ha $i \neq j$. Ebben a fedésben szereplő legkisebb elemi darab, azaz a leghosszabb multiindex hosszára való indukcióval kapjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} p_{I_i} = 1$. Tehát $\mu(K) = 1$.

A külső mérték, μ_k definíciója alapján világos, hogy minden $H \subset K$ Borel halmazra $\mu(\varphi_i(H)) = p_i \cdot \mu(H)$ minden $1 \leq i \leq r$-re.

Legyen μ' egy másik valószínűségi Borel mérték, amelyre szintén $\mu' \circ \varphi_i = p_i \cdot \mu' \quad (1 \leq i \leq r)$. Az elemi darabok mértéke μ és μ' szerint megegyezik, hiszen $\mu'(\varphi_I) = \mu(\varphi_I) = p_I$. K minden nyílt részhalmaza előáll megszámlálható diszjunkt elemi darab uniójaként, ezért minden nyílt halmaz mértéke is azonos μ és μ' szerint. μ_k definíciója alapján

$$\mu(H) = \inf \{\mu(G) : H \subset G \text{ nyílt}\},$$

$$\mu'(H) \leq \mu'(G) = \mu(G) \quad (H \subset G \text{ nyílt}).$$

Emiatt $\mu'(H) \leq \mu(H)$, ugyanígy $\mu'(K \setminus H) \leq \mu(K \setminus H)$, a kettőt összeadva egyenlőséget kapunk, ezért minden $H \subset K$ Borelre $\mu'(H) = \mu(H)$. □

2.4. Állítás. *Legyen $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^d$ Borel halmaz, μ egybevágóság-invariáns Borel mérték K-n. Létezik μ^* egybevágóság-invariáns Borel mérték $\mathbb{R}^d$-n, amelyre $\mu^*|_K = \mu$.*

Bizonyítás. Ha egy $H \subset \mathbb{R}^d$ Borel halmaz nem fedhető le K megszámlálható egybevágó példányával, akkor legyen a μ^* mértéke végtelen. Ha lefedhető, akkor válasszunk egy $H = \bigsqcup_i H_i$ megszámlálható Borel-partíciót, amelyre $H_i \subset g_i(K)$ valamilyen g_i egybevágóságokra. Legyen

$$\mu^*(H) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mu(g_i^{-1}(H_i)).$$

Azt állítjuk, hogy ez jó definíció, tehát független a partíció és az egybevágóságok választásától. Legyen $H = \bigsqcup_j H'_j$, $H'_j \subset g'_j(K)$ egy másik partíció. Tekintsük a $H = \bigsqcup_{i,j} H_i \cap H'_j$ partíciót:

$$\sum_i \mu(g_i^{-1}(H_i)) = \sum_i \sum_j \mu(g_i^{-1}(H_i \cap H'_j)) =$$
$$= \sum_i \sum_j \mu(g_j'^{-1}(H_i \cap H'_j)) = \sum_j \mu(g_j'^{-1}(H'_j)).$$

Vagyis μ^* nem függ a partíció és az egybevágóságok választásától.

Belátjuk, hogy μ^* mérték. $\mu^*(\emptyset) = 0$. A σ-additivitáshoz tekintsünk megszámlálható sok diszjunkt A_i Borel halmazt. Ha egyikük nem fedhető le K megszámlálható sok egybevágó példányával, akkor az uniójuk sem, vagyis mértékeik összege és az unió mértéke is végtelen. Különben pedig legyen $A_i = \bigsqcup_j H_{ij}$, $H_{ij} \subset g_{ij}(K)$. Ekkor a $\bigsqcup_i A_i = \bigsqcup_{i,j} H_{ij}$ partícióból adódik, hogy $\mu^*\left(\bigsqcup_i A_i\right) = \sum_i \mu^*(A_i)$.

Az pedig világos, hogy $\mu^*|_K = \mu$ és μ^* egybevágóság-invariáns. $\square$

Most belátunk néhány alapvető lemmát, amelyeknek később majd nagy hasznát vesszük.

2.5. Lemma. *Legyen $K = \varphi_1(K) \sqcup \ldots \sqcup \varphi_r(K)$ önhasonló halmaz diszjunkt darabokból, μ pedig egy természetes mérték rajta. Minden $H \subset K$ pozitív mértékű Borel halmazhoz és $\varepsilon > 0$-hoz létezik $a(K)$ elemi darab, amelyre $\mu\big(H \cap a(K)\big) > (1-\varepsilon)\mu\big(a(K)\big)$.*

Bizonyítás. Mivel H mértéke pozitív, létezik H-nak olyan $\bigsqcup_i \varphi_{I_i}(K)$ megszámlálható fedése, hogy

$$(1+\varepsilon)\,\mu(H) > \sum_i \mu(\varphi_{I_i}(K)).$$

Ha létezik i, hogy

$$(1+\varepsilon)\,\mu(H \cap \varphi_{I_i}(K)) > \mu(\varphi_{I_i}(K)),$$

akkor ez a φ_{I_i} megfelel a-nak. Ellenkező esetben viszont $(1+\varepsilon)\,\mu\big(H \cap \varphi_{I_i}(K)\big) \leq \mu(\varphi_{I_i}(K))$, amiből

$$(1+\varepsilon)\,\mu(H) = (1+\varepsilon)\,\mu\big(H \cap \bigsqcup \varphi_{I_i}(K)\big) \leq \sum_i \mu\big(\varphi_i(K)\big),$$

ellentmondva a fenti egyenlőtlenségnek. $\square$

2.6. Lemma. *Legyen $K = \varphi_1(K) \sqcup \ldots \sqcup \varphi_r(K)$ önhasonló halmaz diszjunkt darabokból, μ pedig egy természetes mérték rajta. Minden $H \subset K$ Borel halmazhoz és $\varepsilon > 0$-hoz létezik megszámlálható sok diszjunkt $a_i(K)$ elemi darab, amelyekre $\mu\big(H \cap a_i(K)\big) > (1-\varepsilon)\mu\big(a_i(K)\big)$ és $H \setminus \bigsqcup_i a_i(K)$ nullmértékű.*

Bizonyítás. Mohó módon választjuk ki az $a_i(K)$ elemi darabokat. Az n-edik lépésben ($n = 0, 1, 2, \ldots$) válasszuk azt a lehető legnagyobb (átmérőjű) $a_n(K)$ elemi darabot, amelyre $a_n(K) \cap a_i(K) = \emptyset \quad (0 \leq i < n)$ és $\mu\big(H \cap a_n(K)\big) > (1-\varepsilon)\mu\big(a_n(K)\big)$. Ha nincs ilyen, akkor megállunk, nem választunk többet.

Azt állítjuk, hogy $H \setminus \bigsqcup_i a_i(K)$ nullmértékű. Tegyük fel, hogy pozitív mértékű. Ekkor a 2.5. Lemma szerint létezik $a(K)$ elemi darab, amelyre $\mu\big((H \setminus \bigsqcup_i a_i(K)) \cap a(K)\big) > (1-\varepsilon)\mu\big(a(K)\big)$. Tehát ez az $a(K)$ elemi darab nem szerepel a kiválasztottak közt. Az is teljesül, hogy $\mu\big(H \cap a(K)\big) > (1-\varepsilon)\mu\big(a(K)\big)$. Ha végtelen sok lépést tettünk, akkor választottunk $a(K)$-nál kisebb elemi darabot is, tehát $a(K)$-t csak azért nem vehettük be egyik lépésben sem, mert valamelyik $a_i(K)$-ba belemetszett. Ha véges sok lépést tettünk, akkor $a(K)$-t ugyancsak azért nem választhattuk ki egyszer sem, mert valamelyik $a_i(K)$-ba belemetszett. Node ekkor $a_i(K) \supset a(K)$ vagy $a_i(K) \subset a(K)$, mindkettő lehetetlen. $\square$

2.7. Lemma. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, μ valószínűségi Borel mérték $\mathbb{R}^d$-n, amelyre $\operatorname{supp} \mu = K$. Legyen g_n hasonlóságoknak egy konvergens sorozata, $g_n \to h$, és $\mu(g_n(K) \cap K) \to 1$. Ekkor $\mu(h(K) \cap K) = 1$, sőt $K \subset h(K)$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mu(h(K) \cap K) = q < 1$. Jelölje $h(K)_\varepsilon$ a $h(K)$ ε sugarú környezetét. Mivel $\bigcap_{n=1}^{\infty}(h(K)_{1/n} \cap K) = h(K) \cap K$ és μ véges mérték, ezért $\mu\big(h(K)_{1/n} \cap K\big) \to \mu\big(h(K) \cap K\big) = q$. Létezik tehát $\varepsilon > 0$, amelyre $\mu\big(h(K)_\varepsilon \cap K\big) \leq \frac{1+q}{2} < 1$. Elég nagy n-re $g_n(K) \subset h(K)_\varepsilon$, $\mu\big(g_n(K) \cap K\big) \leq \frac{1+q}{2}$, ez ellentmond annak, hogy $\mu(g_n(K) \cap K) \to 1$. Tehát $\mu(h(K) \cap K) = 1$. Mivel μ tartója K, ezért K minden nemüres nyílt részhalmaza pozitív mértékű. A $K \setminus h(K)$ nyílt és nullmértékű, ezért üres, vagyis $K \subset h(K)$. □

2.8. Lemma. *Legyen $K = \varphi_1(K) \sqcup \ldots \sqcup \varphi_r(K)$ önhasonló halmaz diszjunkt darabokból, μ pedig egy természetes mérték K-n. Ekkor minden A affin altérre $\mu(A \cap K) = 0$ vagy $A \supset K$.*

Bizonyítás. Minden J multiindexre a $\varphi_J(K)$ által generált affin altér éppen annyi dimenziós, mint a K által generált, hiszen φ_J hasonlóság. Az előbbi része is az utóbbinak $\varphi_J(K) \subset K$ miatt, tehát valójában megegyeznek. Ezért egy A affin altérre $A \supset K$ pontosan akkor, ha $A \supset \varphi_J(K)$.

Válasszunk maximális sok affin független pontot K-ban, legyenek ezek $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Létezik olyan $U_1, U_2, \ldots, U_k$ konvex nyílt környezetük, hogy bárhogyan választva ezekből egy-egy pontot, a kapott k pont affin független. Minden $1 \leq i \leq k$ esetén legyen $\varphi_{I_i}(K)$ egy elemi darab U_i-ben. Legyen $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq k} \mu(\varphi_{I_i}(K)) > 0$. Világos, hogy minden K-t nem tartalmazó A affin altér nem metszi valamelyik $\varphi_{I_i}(K)$ elemi darabot. És ugyanígy minden J multiindexre egy A affin altér nem metszi $(\varphi_J \circ \varphi_{I_i})(K)$-t valamilyen $1 \leq i \leq k$-ra, vagy $A \supset \varphi_J(K)$, ami ekvivalens azzal, hogy $A \supset K$.

Emiatt $\mu(A \cap \varphi_J(K)) \leq (1 - \varepsilon)\mu(\varphi_J(K))$ vagy $A \supset K$.

Tegyük fel, hogy $A \not\supset K$ és $\mu(A \cap K) > 0$. A 2.5. Lemma szerint létezik $\varphi_J(K)$ elemi darab, amelyre

$$(1 - \varepsilon)\mu(\varphi_J(K)) < \mu(A \cap \varphi_J(K)),$$

ellentmondva a fenti egyenlőtlenségnek. □

A következő fejezetben olyan típusú kérdésekkel fogunk foglalkozni, hogy K-ból milyen halmazt metszhet ki a K-nak egy $g(K)$ hasonló példánya (g hasonlóság). Például mikor lehet $K \subset g(K)$, vagy mekkora lehet a kimetszett halmaz mértéke. Az előbbi 2.8. Állítás szerint ha egy g hasonlóság a K által generált A affin alteret nem önmagába viszi, akkor $\mu(g(K) \cap K) = 0$, mert $K \not\subset g(A)$. Emiatt csak olyan hasonlóságokkal foglalkozzunk, amelyek A-t fixen hagyják, sőt hasonlóságon is mindig csak az A-ra vett megszorítást értsük. Tehát az összes következő állításban ha külön nem is jelezzük, az önhasonló halmaz egy valamekkora dimenziós eulideszi tér része, és hasonlóságokon az affin burkán élő hasonlóságokat értsünk, és ezek tere legyen $\mathcal{H}$. Másképpen, mindig hallgatólagosan feltesszük, hogy K affin burka az egész euklideszi tér. Egyébként nehézség nélkül átfogalmazható lenne az összes következő állítás az általános esetre, és néha nem is lenne szükség az átfogalmazásra.

3. Mérték és metszet

E fejezet nagy részében a következő tételt bizonyítjuk: Minden diszjunkt darabokból álló K önhasonló halmazra és μ természetes mértékre létezik egy $c < 1$ konstans, hogy minden g hasonlóságra $\mu(g(K) \cap K) < c$ vagy $K \subset g(K)$. A megértés könnyítése céljából most megpróbáljuk előre felvázolni a bizonyítás főbb vonalát.

Belátjuk, hogy létezik a hasonlóságoknak egy $\mathcal{G}$ kompakt részhalmaza, amelyre minden $g' \in \mathcal{H}$-ra létezik $g \in \mathcal{G}$, hogy $g'(K) \cap K = g(K) \cap K$. Könnyű meggondolni, hogy ekkor elég a tételt a $\mathcal{G}$-beli hasonlóságokra bizonyítani. Találunk $V, U \subset \mathcal{H}$ nyílt környezeteit az identitásnak, amelyekre $V \subset U \subset \mathcal{H}$ és az $U \setminus V$-beli g hasonlóságokra fennáll a tétel (valamilyen c konstanssal). Az ilyen $g \in U \setminus V$ hasonlóságok „elég jól elmozdítják" a K önhasonló halmazt. Ezután belátjuk a tételt a V-beli hasonlóságokra is ugyanezzel a c konstanssal: bár $g \in V \setminus \{\text{identitás}\}$ „nem mozdítja el eléggé" a K halmazt, ha képzeletben ráközelítünk a K egy elég pici elemi darabjára, azt g már „eléggé elmozdítja" (az elemi darab méretéhez képest), és ezzel visszavezetjük a problémát az előző esetre.

Legyen μ_H a megfelelő dimenziós Hausdorff-mérték konstansszorosa, amelyre $\mu_H(K) = 1$. Ennek K-ra vett megszorítása természetes mérték. Tekintsük azon $h \in G$ hasonlóságokat, amelyekre $K \subset h(K)$. A Hausdorff-mérték és az előbbiek segítségével belátjuk, hogy csak véges sok ilyen h hasonlóság van, és hogy az ilyen h-k kis nyílt környezeteiben is igaz a tétel valamilyen c konstansokkal a μ_H mértékre. E konstansoknak vehetjük a maximumát, az még mindig 1-nél kisebb. Most vágjuk ki $\mathcal{G}$-ből az ilyen h hasonlóságok előbbi kis nyílt környezeteit. A mérték felülről félig folytonossága alapján (2.7. Lemma) belátjuk, hogy létezik egy $c < 1$ konstans, hogy az így kapott térben lévő g hasonlóságokra $\mu_H(g(K) \cap K) < c$. Ekkor tehát ugyanez igaz az összes $\mathcal{G}$-beli hasonlóságra is esetleg egy másik $c < 1$ konstanssal, és ezzel belátjuk a tétel állítását a μ_H mértékre.

Felhasználva, hogy a tétel állítását már ismerjük a μ_H mértékre és ismerjük az identitás egy U nyílt környezetében is minden μ természetes mértékre, belátjuk, hogy a $K \subset h(K)$ feltételnek eleget tevő $h \in \mathcal{G}$ hasonlóságok kis nyílt környezeteiben lévő g hasonlóságokra $\mu(g(K) \cap K) < c$. Ezután az előbbi (felülről félig folytonosságra hivatkozó) érvelés ismétlésével adódik a tétel állítása (esetleg más $c < 1$ konstanssal).

3.1. Állítás. *Legyen K egy önhasonló halmaz diszjunkt darabokból. Létezik $U \subset \mathcal{H}$ nyílt környezete az identitásnak, hogy minden $g \in U$-ra $g(K) \supset K \iff g = \text{identitás}$.*

Bizonyítás. Jelölje n a K affin burkának dimenzióját.

Azt látjuk be, hogy létezik az identitásnak olyan kis U' nyílt környezete, hogy minden $g \in U'$-re $g(K) \subset K \iff g = \text{identitás}$. Ekkor minden $g \in U'$-re $K \subset g^{-1}(K) \iff g = \text{identitás}$, tehát $U = U'^{-1} = \{g^{-1} : g \in U'\}$ választással U az identitás nyílt környezete és minden $h \in U$-ra $K \subset h(K) \iff h = \text{identitás}$, és ezzel belátjuk az állítást.

Mint a 2.8. Állítás bizonyításában, válasszunk $\varphi_{I_1}(K), \ldots, \varphi_{I_k}(K)$ elemi darabokat, hogy akárhogyan is választva egy-egy pontot a konvex burkukból, a kapott $k = n+1$ pont maximális sok affin független pont K affin burkában.

Legyen $d = \min_{1 \le i \le k} \operatorname{dist}(\varphi_{I_i}(K), K \setminus \varphi_{I_i}(K))$, $d > 0$. Legyen U' olyan kis nyílt környezete az identitásnak, hogy minden $g \in U'$ hasonlóság K minden pontját kevesebb, mint d-vel mozgatja.

Legyen $g \in U'$ és $g(K) \subset K$. Ekkor d és U' definíciója miatt $g(\varphi_{I_i}(K)) \subset \varphi_{I_i}(K)$ minden $1 \le i \le k$-ra. Minden hasonlóság konvex kombináció tartó, ezért nem csak ezek az elemi darabok képződnek önmagukba, hanem a konvex burkuk is önmagába képződik. A konvex burok valahány dimenziós euklideszi golyóval homeomorf, igaz rá Brouwer fixpont tétele, ezért van benne fixpontja g-nek. Mivel g fixpontjainak halmaza affin altér, és ezen $k = n+1$ fixpont affin burka éppen K affin burka, ezért $g =$ identitás. □

3.2. Állítás. *Legyen $K = \varphi_1(K) \sqcup \ldots \sqcup \varphi_r(K)$ önhasonló halmaz diszjunkt darabokból, μ pedig természetes mérték rajta. Létezik $c < 1$ és az identitás egy $U \subset \mathcal{H}$ nyílt környezete, hogy $g \in U \setminus \{identitás\} \Longrightarrow \mu(K \cap g(K)) < c$.*

Bizonyítás. Felhasználva a 3.1. Állítást, legyen U az identitás kis nyílt környezete, amelynek lezártjában sincs az identitáson kívül olyan g hasonlóság, amelyre $g(K)$ tartalmazza K-t, és amelyre $g \in U$ és $x \in K$ esetén $\operatorname{dist}(x, g(x)) \le 1$. Feltehetjük, hogy U lezártja kompakt, mert $\mathcal{H}$ lokálisan kompakt.

Legyen $V \subset U$ az identitás még kisebb nyílt környezete, amelyre minden $i = 1, \ldots, r$-re $\varphi_i^{-1} \circ V \circ \varphi_i \subset U$, továbbá $i \ne j$-re és $g \in V$-re $g(\varphi_i(K)) \cap \varphi_j(K) = \emptyset$. Az első tulajdonság kielégíthető a kompozíció folytonossága miatt, a másodiknak nem eleget tevő g-k pedig messze vannak az identitástól.

Azt állítjuk, hogy létezik $c < 1$, hogy $g \in \overline{U} \setminus V \Longrightarrow \mu(g(K) \cap K) < c$. Indirekt tegyük fel, hogy létezik $\overline{U} \setminus V$-beli hasonlóságoknak egy g_n sorozata, amelyre $\mu(K \cap g_n(K)) \to 1$. Az $\overline{U} \setminus V$ kompakt halmaz, létezik tehát g_n-eknek olyan g_{n_i} részsorozata, amelyre $g_{n_i} \to h \in \overline{U} \setminus V$. A 2.7. Lemma szerint ekkor $h(K) \supset K$, ám $\overline{U} \setminus V$-ben nincs ilyen h hasonlóság.

Célunk belátni, hogy minden $g \in U \setminus \{\text{identitás}\}$-ra $\mu(K \cap g(K)) < c$ ugyanezzel a c konstanssal.

Ha $g \in U \setminus V$, akkor már készen vagyunk. Legyen $g \in V \setminus \{\text{identitás}\}$. Jelölje A a g fixpontjainak halmazát. Belátjuk, hogy minden $x \in K \setminus A$-ra létezik az a $\varphi_{I_x}(K)$ legnagyobb x-et tartalmazó elemi darab, amelyre $\varphi_{I_x}^{-1} \circ g \circ \varphi_{I_x} \in U \setminus V$. Legyen $(i_1, i_2, \ldots)$ azon indexsorozat, amelyre

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \ldots \circ \varphi_{i_n})(K).$$

Legyen $I_n = (i_1, \ldots, i_n)$. Mivel $g \in V$, ezért $\varphi_{i_1}^{-1} \circ g \circ \varphi_{i_1} \in U$ a V definíciója folytán. Ha valamely n-re $\varphi_{I_n}^{-1} \circ g \circ \varphi_{I_n} \in V$, akkor V definíciója miatt

$$\varphi_{I_{n+1}}^{-1} \circ g \circ \varphi_{I_{n+1}} = \varphi_{i_{n+1}}^{-1} \circ \varphi_{I_n}^{-1} \circ g \circ \varphi_{I_n} \circ \varphi_{i_{n+1}} \in U.$$

Belátjuk, hogy nem lehet minden n-re $\varphi_{I_n}^{-1} \circ g \circ \varphi_{I_n} \in V$. Legyen $y = \varphi_{I_n}^{-1}(x)$, ekkor $y \in K$ hiszen $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_{I_n}(K)$, és $(\varphi_{I_n}^{-1} \circ g \circ \varphi_{I_n})(y) = \varphi_{I_n}^{-1}(g(x))$. Mivel x nem fixpontja g-nek, elég nagy n-re

$$\operatorname{dist}\big(g(x), \varphi_{I_n}(K)\big) > \frac{\operatorname{dist}(g(x), x)}{2} \stackrel{\text{def}}{=} t > 0.$$

Jelölje φ_i nagyítását α_i és értelemszerűen φ_I nagyítását α_I $\quad (0 < \alpha_I < 1)$. Ekkor $\operatorname{dist}\big(\varphi_{I_n}^{-1}(g(x)), K\big) > t/\alpha_{I_n}$, vagyis $\operatorname{dist}\big((\varphi_{I_n}^{-1} \circ g \circ \varphi_{I_n})(y), K\big) > t/\alpha_{I_n}$, ami elég nagy n-re nagyobb, mint 1, ezért elég nagy n-re $\varphi_{I_n}^{-1} \circ g \circ \varphi_{I_n}$ nem eleme V-nek, hiszen még U-nak sem eleme.

Mindezek miatt van egy legkisebb pozitív egész n, amelyre $\varphi_{I_n}^{-1} \circ g \circ \varphi_{I_n} \in U \setminus V$, és erre az n-re $I_x = I_n$.

Azt állítjuk, hogy ekkor $g(\varphi_{I_x}(K)) \cap K \subset \varphi_{I_x}(K)$. Tudjuk, hogy $k < n$-re $\varphi_{I_k}^{-1} \circ g \circ \varphi_{I_k} \in V$, ezért $(\varphi_{I_k}^{-1} \circ g \circ \varphi_{I_k} \circ \varphi_j)(K) \cap \varphi_l(K) = \emptyset$, ha $j \neq l$. Válasszuk j-t i_{k+1}-nek, ekkor $(\varphi_{I_k}^{-1} \circ g \circ \varphi_{I_{k+1}})(K) \cap \varphi_l(K) = \emptyset$, ha $l \neq i_{k+1}$, másképpen $(g \circ \varphi_{I_{k+1}})(K) \cap (\varphi_{I_k} \circ \varphi_l)(K) = \emptyset$ $(l \neq i_{k+1})$. Speciálisan

$$(g \circ \varphi_{I_n})(K) \cap (\varphi_{I_k} \circ \varphi_l)(K) = \emptyset \quad (l \neq i_{k+1}).$$

Ez $k = 0$-ra, 1-re, …, $n-1$-re együtt éppen azt adja, hogy $g(\varphi_{I_n}(K)) \cap K \subset \varphi_{I_n}(K)$.

A $\{\varphi_{I_x}(K) : x \in K \setminus A\}$ egy fedése $K \setminus A$-nak. Minden $x \neq y$-ra $\varphi_{I_x}(K) \cap \varphi_{I_y}(K) = \emptyset$ vagy $\varphi_{I_x}(K) \subset \varphi_{I_y}(K)$ vagy $\varphi_{I_x}(K) \supset \varphi_{I_y}(K)$, ezért ebből a fedésből kiválasztható megszámlálható méretű diszjunkt fedése is $K \setminus A$-nak. Legyen $K \setminus A \subset \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \varphi_{J_i}(K)$ egy ilyen fedés. Ekkor $g(\varphi_{J_i}(K) \cap K) \subset \varphi_{J_i}(K)$. Szemelőtt tartva, hogy A kevesebb dimenziós, mint a K által generált affin altér, a 2.8. Lemma alapján

$$\begin{aligned}
&\mu(g(K) \cap K) \leq \mu(g(A) \cap K) + \mu(g(K \setminus A) \cap K) = \mu(g(K \setminus A) \cap K) \leq \\
&\leq \mu\left(g\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} \varphi_{J_i}(K)\right) \cap K\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\big(g(\varphi_{J_i}(K)) \cap K\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\big(g(\varphi_{J_i}(K)) \cap \varphi_{J_i}(K)\big) = \\
&\qquad = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\big(\varphi_{J_i}((\varphi_{J_i}^{-1} \circ g \circ \varphi_{J_i})(K) \cap K)\big) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{J_i}\, \mu\big((\varphi_{J_i}^{-1} \circ g \circ \varphi_{J_i})(K) \cap K\big).
\end{aligned}$$

Mivel $\varphi_{J_i}^{-1} \circ g \circ \varphi_{J_i} \in U \setminus V$, ezért az utolsó kifejezésben szereplő mértékek c-nél kisebbek. Tehát $\mu(g(K) \cap K) < \sum p_{J_i} \cdot c = \sum \mu(\varphi_{J_i}(K)) \cdot c = \mu\left(\bigsqcup \varphi_{J_i}(K)\right) \cdot c = c$. Ezzel beláttuk az állítást. □

3.3. Állítás. *Legyen $K = \varphi_1(K) \sqcup \ldots \sqcup \varphi_r(K)$ önhasonló halmaz diszjunkt darabokból. Létezik a hasonlóságoknak egy olyan $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ kompakt részhalmaza, hogy minden g' hasonlóságra van $g \in \mathcal{G}$, amelyre $g'(K) \cap K = g(K) \cap K$.*

Bizonyítás. A K által generált affin alteret tekintsük $\mathbb{R}^d$-nek. Legyen $\delta = \min_{1 \leq i < j \leq r} \operatorname{dist}(\varphi_i(K), \varphi_j(K))$, $D = \operatorname{diam}(K)$, K átmérője. Ha egy g' hasonlóság nagyítása nagyobb, mint D/δ, akkor $g'(K)$ első generációs $g'(\varphi_j(K))$ elemi darabjai közt a minimális távolság nagyobb, mint D, és ekkor létezik φ_i, hogy $g'(K) \cap K \subset g'(\varphi_i(K))$. Ebben az esetben a g' hasonlóság lecserélhető a $g' \circ \varphi_i$ kisebb nagyítású hasonlóságra. $\mathbb{R}^d$-ben minden hasonlóság $x \mapsto Ax + b$ alakba írható, ahol A egy mátrix, amely egy hasonlóság, és b pedig eltolásvektor. Világos, hogy korlátos azon b-k halmaza ($\mathbb{R}^d$-ben), amelyre $g(K) \cap K \neq \emptyset$ valamely $g(x) = Ax + b$ alakú legfeljebb D/δ nagyítású hasonlóságra. Felhasználva, hogy $\mathbb{R}^d$ origót helybenhagyó egybevágóságai (az ortogonális mátrixok) tere kompakt, következik a keresett $\mathcal{G}$ kompakt halmaz létezése. $\square$

3.4. Állítás. *Legyen $K = \varphi_1(K) \sqcup \ldots \sqcup \varphi_r(K)$ önhasonló halmaz diszjunkt darabokból.*

1. *Ekkor a hasonlóságok terében azon g hasonlóságok halmaza, amelyekre $g(K) \supset K$, diszkrét és zárt.*
2. *Legyen μ_H a megfelelő dimenziós Hausdorff-mérték konstansszorosa, amelyre $\mu_H(K) = 1$. Létezik $c < 1$, hogy minden g hasonlóságra $\mu_H(g(K) \cap K) < c$ vagy $K \subset g(K)$.*

3.5. Következmény. *Ugyanezen feltételekkel és az előbbi c konstanssal minden g hasonlóságra és $\varphi_I(K)$ elemi darabra $\mu_H\big(g(\varphi_I(K)) \cap \varphi_I(K)\big) < c \cdot \mu_H\big(\varphi_I(K)\big)$ vagy $\varphi_I(K) \subset g(\varphi_I(K))$.*

Bizonyítás. Az állításból világosan adódik a következmény, ezért az előbbit bizonyítjuk.

Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Legyen h egy olyan hasonlóság, amelyre $K \subset h(K)$. Jelölje K_δ a K δ sugarú környezetét. Mivel $\mu_H\big(h(K)\big)$ véges, létezik egy elég kicsi $\delta > 0$, amelyre $\mu_H\big(K_\delta \cap (h(K) \setminus K)\big) < \varepsilon$. Alkalmazzuk a 3.2. Állítást K-ra és a μ_H természetes mértékre, jelölje U illetve c_H az így kapott nyílt környezetet illetve konstanst. Legyen $W \subset \mathcal{H}$ az identitás olyan nyílt környezete, amelyre $W \cup W^{-1} \subset U$, $\ g \in W \cup W^{-1} \Longrightarrow \mu_H(g(H)) \leq (1+\varepsilon)\mu_H(H)$ minden H Borel halmazra, és minden $x \in K$-ra $\operatorname{dist}(g(x), x) < \delta$.

Legyen $g \in Wh$ és $g \neq h$, Wh a h egy nyílt környezete. Ekkor $g \circ h^{-1} \in W \setminus \{\text{identitás}\}$, $h \circ g^{-1} \in W^{-1} \setminus \{\text{identitás}\}$, és $(h \circ g^{-1})(K) \subset K_\delta$. Emiatt

$$\begin{aligned}\mu_H\big(K \cap g(K)\big) &\leq (1+\varepsilon)\mu_H\big((h \circ g^{-1})(K \cap g(K))\big) = (1+\varepsilon)\mu_H\big((h \circ g^{-1})(K) \cap h(K)\big) = \\ &= (1+\varepsilon)\mu_H\big((h \circ g^{-1})(K) \cap K\big) + (1+\varepsilon)\mu_H\big((h \circ g^{-1})(K) \cap (h(K) \setminus K)\big) \leq \\ &\leq (1+\varepsilon)c_H + (1+\varepsilon)\mu_H\big(K_\delta \cap (h(K) \setminus K)\big) \leq (1+\varepsilon)c_H + (1+\varepsilon)\varepsilon.\end{aligned}$$

Ez kisebb, mint 1, ha ε-t elég kicsinek választjuk. Tehát a h Wh környezetében lévő $g \neq h$ hasonlóságokra $g(K) \not\supset K$. Ezzel beláttuk, hogy a $g(K) \supset K$ hasonlóságok tere diszkrét. A 2.7. Lemmából következik, hogy szükségképpen zárt is.

Tegyük fel indirekt, hogy $\sup\{\mu_H(g(K) \cap K) : g \in \mathcal{H}, g(K) \not\supset K\} = 1$. Ekkor $\sup\{\mu_H(g(K) \cap K) : g \in \mathcal{G}, g(K) \not\supset K\} = 1$ szintén. Legyen g_n olyan konvergens sorozat $\mathcal{G}$-ben, amelyre $g_n(K) \not\supset K$, $\mu_H(g_n(K) \cap K) \to 1$, $g_n \to h$. Ekkor a 2.7. Lemma szerint $h(K) \supset K$, emiatt $g_n \neq h$. Elég nagy n-re $g_n \in Wh$ és $\mu_H(K \cap g_n(K)) \leq (1+\varepsilon)c_H + (1+\varepsilon)\varepsilon$, ellentmondva annak, hogy $\mu_H(g_n(K) \cap K) \to 1$. $\square$

3.6. Lemma. *Egy diszjunkt darabokból álló önhasonló halmaz minden kompakt relatív nyílt részhalmaza véges sok elemi darab uniója.*

Bizonyítás. Legyen U kompakt relatív nyílt részhalmaza K-nak. Minden $x \in U$-ra létezik E_x elemi darab, hogy $x \in E_x \subset U$. Mivel U kompakt és az E_x halmazok relatív nyíltak, ezért már véges sok is lefedi. $\square$

A következő tétel a legfontosabb eszközünk lesz a későbbiekben.

3.7. Tétel. *Legyen $K = \varphi_1(K) \sqcup \ldots \sqcup \varphi_r(K)$ önhasonló halmaz diszjunkt darabokból, μ pedig egy természetes mérték rajta. Létezik egy $c < 1$ konstans, hogy minden g hasonlóságra $\mu(g(K) \cap K) < c$ vagy $K \subset g(K)$.*

Bizonyítás. Elegendő csak a $\mathcal{G}$-beli hasonlóságokra bebizonyítani a 3.3. Állítás szerint. Legyen c_H a 3.4. Állítás második pontja szerint K-hoz és μ_H-hoz rendelt konstans. Legyen $h \in \mathcal{G}$ egy olyan hasonlóság, amelyre $h(K) \supset K$. Az ilyen h-k száma véges, mert diszkrét és zárt alteret alkotnak (3.4. Állítás első pontja), és $\mathcal{G}$ kompakt halmaz.

Alkalmazzuk most a 2.5. Lemmát a $h(K)$ önhasonló halmazra és μ_H mértékre $0 < \varepsilon \leq 1 - c_H$ és $H = K \subset h(K)$ választással. Eszerint létezik φ_I, hogy

$$\mu_H\big(K \cap h(\varphi_I(K))\big) \geq (1-\varepsilon)\, \mu_H\big(h(\varphi_I(K))\big).$$

A 3.5. Következményt alkalmazva a $h(\varphi_I(K))$ elemi darabra és annak K hasonló képére, $K \supset h(\varphi_I(K))$.

Mivel $h(\varphi_I(K))$ relatív nyílt részhalmaza $h(K)$-nak, ezért K-nak is relatív nyílt részhalmaza. $h(\varphi_I(K))$ kompakt is, ezért a 3.6. Lemma szerint $h(\varphi_I(K))$ véges sok K-beli elemi darab uniója. Ezek egyike legyen $\varphi_J(K)$. Tehát $\varphi_J(K) \subset h(\varphi_I(K)) \subset K \subset h(K)$. Mivel $\varphi_J(K)$ relatív nyílt K-ban, ezért relatív nyílt $h(\varphi_I(K))$-ban is, tehát $h(K)$-ban is. Emiatt $\operatorname{dist}(\varphi_J(K), h(K) \setminus \varphi_J(K)) > 0$, és tetszőleges h-hoz elég közeli g-re

$$\big(g \circ h^{-1}\big)\big(h(K) \setminus \varphi_J(K)\big) \cap \varphi_J(K) = \emptyset.$$

Ezért ilyen g-re

$$\begin{aligned} g(K) \cap \varphi_J(K) &= \big(g \circ h^{-1}\big)\big(h(K)\big) \cap \varphi_J(K) = \\ &= \Big(\big(g \circ h^{-1}\big)\big(\varphi_J(K)\big) \cap \varphi_J(K)\Big) \sqcup \Big(\big(g \circ h^{-1}\big)\big(h(K) \setminus \varphi_J(K)\big) \cap \varphi_J(K)\Big) = \\ &= \big(g \circ h^{-1}\big)\big(\varphi_J(K)\big) \cap \varphi_J(K). \end{aligned}$$

Alkalmazva a 3.2. Állítást kapjuk, hogy h-hoz elég közeli g-re $g \neq h$ esetén

$$\mu\Big(\big(g \circ h^{-1}\big)\big(\varphi_J(K)\big) \cap \varphi_J(K)\Big) < c \cdot \mu\big(\varphi_J(K)\big) = c \cdot p_J.$$

Tehát $\mu\big(g(K) \cap \varphi_J(K)\big) = \mu\big((g \circ h^{-1})(\varphi_J(K)) \cap \varphi_J(K)\big) < c \cdot p_J$ és

$$\mu\big(g(K) \cap K\big) = \mu\big(g(K) \cap \varphi_J(K)\big) + \mu\big(g(K) \cap (K \setminus \varphi_J(K))\big) < c \cdot p_J + 1 - p_J = 1 - (1-c)p_J.$$

Mivel összesen csak véges sok ilyen h hasonlóság jött szóba, létezik $c' < 1$, amelyre ezen véges sok $\mathcal{G}$-beli h kis pontozott környezeteiben lévő g-kre $\mu\big(g(K) \cap K\big) < c'$. Emiatt (felhasználva a 2.7. Lemmát) létezik $c'' < 1$, hogy minden $g \in \mathcal{G}$-re $\mu\big(g(K) \cap K\big) < c''$ vagy $g(K) \supset K$ (lásd a 3.4. Állítás bizonyításának legvégét). Kezdő megjegyzésünk szerint ez igaz a nem $\mathcal{G}$-beli hasonlóságokra is. □

Ezt a tételt is legtöbbször a K önhasonló halmaz helyett egy $\varphi_I(K)$ elemi darabjára alkalmazzuk. A $\varphi_I(K)$-ra természetesen ugyanaz a c konstans jó, mint K-ra, vagyis $\mu\big(g(K) \cap \varphi_I(K)\big) < c \cdot \mu\big(\varphi_I(K)\big)$ vagy $\varphi_I(K) \subset g(K)$.

3.8. Következmény. *Legyen $K = \varphi_1(K) \sqcup \ldots \sqcup \varphi_r(K)$ önhasonló halmaz diszjunkt darabokból, μ egy természetes mérték K-n. Egy g hasonlóságra $\mu\big(g(K) \cap K\big) > 0$ pontosan akkor teljesül, ha $g(K) \cap K$ relatív belseje K-ban nem üres. Sőt, tetszőleges g hasonlóságra $\mu\big(int_K(g(K) \cap K)\big) = \mu\big(g(K) \cap K\big)$.*

Bizonyítás. Ha $g(K) \cap K$ relatív belseje nem üres, akkor persze a mértéke pozitív, mert természetes mérték szerint minden elemi darab pozitív mértékű.

Legyen c a 3.7. Tétel szerint K-hoz tartozó konstans. Legyen g olyan hasonlóság, amelyre $\mu\big(g(K) \cap K\big) > 0$. Alkalmazzuk a 2.6. Lemmát $\varepsilon = 1 - c$ választással. Létezik megszámlálható sok diszjunkt $a_i(K)$ elemi darab, amelyekre

$$\mu\big(g(K) \cap a_i(K)\big) = \mu\big((g(K) \cap K) \cap a_i(K)\big) > c \cdot \mu\big(a_i(K)\big)$$

és $\big(g(K) \cap K\big) \setminus \bigsqcup_i a_i(K)$ nullmértékű. A 3.7. Tétel szerint $a_i(K) \subset g(K)$. Mivel $a_i(K)$ relatív nyílt K-ban, ezért relatív nyílt $g(K) \cap K$-ban is, vagyis $\bigsqcup_i a_i(K) \subset \mathrm{int}_K(g(K) \cap K)$. Ekkor

$$\mu\big(g(K) \cap K\big) = \mu\big(g(K) \cap K \cap \bigsqcup_i a_i(K)\big) + \mu\big((g(K) \cap K) \setminus \bigsqcup_i a_i(K)\big) =$$
$$= \mu\Big(\bigsqcup_i a_i(K)\Big) \leq \mu\big(\mathrm{int}_K(g(K) \cap K)\big),$$

ami bizonyítja az állítást. □

4. Egybevágóság-invariáns mértékek

Az előző fejezet eredményei alapján már egyszerűen adódik a következő két lemma.

4.1. Lemma. *Legyen $K = \varphi_1(K) \sqcup \ldots \sqcup \varphi_r(K)$ önhasonló halmaz diszjunkt darabokból. Véges sok olyan g hasonlóság van, amelyre $g(K) \subset K$ és $g(K)$ legalább két első generációs elemi darabba belemetsz.*

Bizonyítás. Az ilyen g hasonlóságok nagyítási aránya szigorúan el van határolva a nullától. Az inverzük nagyítása ezért felülről korlátos és $K \subset g^{-1}(K)$. Az utóbbi tulajdonságnak eleget tevő hasonlóságok diszkrét és zárt halmazt alkotnak a 3.4. Állítás első pontja szerint.

Azon $h \in \mathcal{H}$ hasonlóságok, amelyek nagyítása valamely fix korlátot nem halad meg és $h(K) \cap K \neq \emptyset$, kompakt halmazt alkotnak $\mathcal{H}$-ban (lásd a 3.3. Állítás bizonyítását). Mivel kompakt halmaz diszkrét és zárt altere véges, a bizonyítást befejeztük. $\square$

4.2. Lemma. *Legyen $K = \varphi_1(K) \sqcup \ldots \sqcup \varphi_r(K)$ önhasonló halmaz diszjunkt darabokból, λ egy injektív hasonlóság, amelyre $\lambda(K) \subset K$. Ekkor létezik $k \geq 1$ egész és I, J multiindex, amelyekre $\lambda^k \circ \varphi_I = \varphi_J$.*

Bizonyítás. Minden $k \geq 1$-re létezik egy legkisebb $\varphi_I(K)$ elemi darab, amely tartalmazza $\lambda^k(K)$-t. Erre az I-re $(\varphi_I^{-1} \circ \lambda^k)(K) \subset K$ és legalább két első generációs elemi darabba belemetsz. Ilyen hasonlóságból csak véges sok van a 4.1. Lemma szerint, tehát létezik $k < k'$, I, I', hogy $\varphi_I^{-1} \circ \lambda^k = \varphi_{I'}^{-1} \circ \lambda^{k'}$, átrendezve $\varphi_{I'} \circ \varphi_I^{-1} = \lambda^{k'-k}$, $\lambda^{k'-k} \circ \varphi_I = \varphi_{I'}$. $\square$

Jelölés. A rövidség kedvéért egy $\lambda(K) \subset K$-nak eleget tevő λ hasonlóságra $\mu(\lambda)$ jelölje $\mu\big(\lambda(K)\big)$-t. Hasonlóságok kompozíciója esetén néha nem írjuk ki a $\circ$ jelet, a $g_1 g_2$ szorzat jelentse $g_1 \circ g_2$-t, és g^k jelentse k darab g kompozícióját.

A következő állítás szerint ha egy μ természetes mérték szerint az egybevágó elemi darabok egyenlő mértékűek, akkor nem csak a felírásból származó φ_I hasonlóságokra $\mu \circ \varphi_I = \mu(\varphi_I) \cdot \mu$, hanem minden $\lambda(K) \subset K$ tulajdonságú λ hasonlóságra is $\mu \circ \lambda = \mu(\lambda) \cdot \mu$. A természetes mértékre tett kikötés nélkül ez általában nem igaz.

4.3. Állítás. *Legyen $K = \varphi_1(K) \sqcup \ldots \sqcup \varphi_r(K)$ önhasonló halmaz diszjunkt darabokból, μ pedig egy természetes mérték rajta, amely szerint az egybevágó elemi darabok egyenlő mértékűek.*

1. *Ekkor minden olyan λ hasonlóságra, amelyre $\lambda(K) \subset K$, $\mu \circ \lambda = \mu\big(\lambda(K)\big) \cdot \mu$ teljesül, vagyis minden $H \subset K$ Borel halmazra $\mu\big(\lambda(H)\big) = \mu\big(\lambda(K)\big) \cdot \mu\big(H\big)$.*
2. *Minden $\varphi_I(K)$ elemi darabra és g egybevágóságra $g(\varphi_I(K)) \subset K$ esetén $\mu\big(\varphi_I(K)\big) = \mu\big(g(\varphi_I(K))\big)$.*

Bizonyítás. Az állítás első része triviális olyan λ hasonlóságra, amely nem injektív, vagyis mindent egy pontba képez. A továbbiakban injektív hasonlóságokra bizonyítunk.

A 4.1. Lemma szerint csak véges sok olyan λ hasonlóság van, amelyre $\lambda(K) \subset K$ és $\lambda(K)$ legalább kettő első generációs elemi darabba belemetsz. Jelölje ezeket $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_t$, ahol λ_0 legyen maga az identitás.

Azt állítjuk, hogy az első állítást elegendő ezekre a hasonlóságokra belátni. Valóban, minden injektív λ hasonlóság, amelyre $\lambda(K) \subset K$, az $\varphi_I \circ \lambda_i$ alakú valamilyen I-re és i-re (ugyanis legyen $\varphi_I(K)$ a legkisebb elemi darab, amely tartalmazza $\lambda(K)$-t, ekkor a $\varphi_I^{-1} \circ \lambda$ hasonlóság K-t önmagába képezi, és legalább két első generációs elemi darabba belemetsz, vagyis valamelyik λ_i-vel egyezik meg). A mérték természetessége miatt pedig $\mu \circ \varphi_J = p_J \cdot \mu = \mu(\varphi_J(K)) \cdot \mu$ minden J multiindexre, ezért tetszőleges $H \subset K$ Borelre

$$\mu\big(\lambda(H)\big) = \mu\big((\varphi_I \circ \lambda_i)(H)\big) = \mu\big(\varphi_I(K)\big) \cdot \mu\big(\lambda_i(H)\big) = \mu\big(\varphi_I(K)\big) \cdot \mu\big(\lambda_i(K)\big) \cdot \mu\big(H\big) = \\ = \mu\big((\varphi_I \circ \lambda_i)(K)\big) \cdot \mu\big(H\big) = \mu\big(\lambda(K)\big) \cdot \mu\big(H\big),$$

ahogyan állítottuk.

Minden $0 \le i \le t$-re a 4.2. Lemma szerint léteznek I_i, J_i multiindexek és k_i pozitív egész, amelyekre $\lambda_i^{k_i} \circ \varphi_{I_i} = \varphi_{J_i}$. Legyen $b_i \overset{\text{def}}{=} \varphi_{I_i}$, $c_i \overset{\text{def}}{=} \varphi_{J_i}$, tehát $\lambda_i^{k_i} b_i = c_i$.

Legyen

$$\mu^*(\lambda_i) \overset{\text{def}}{=} \sqrt[k_i]{\frac{\mu(c_i)}{\mu(b_i)}}.$$

Célunk belátni, hogy $\mu^*(\lambda_i) = \mu(\lambda_i)$.

Minden $0 \le i \le t$ egészre és I multiindexre létezik $0 \le j \le t$ egész és J multiindex, hogy $\lambda_i \circ \varphi_I = \varphi_J \circ \lambda_j$ (legyen $\varphi_J(K)$ a legkisebb elemi darab, amely tartalmazza $(\lambda_i \circ \varphi_I)(K)$-t).

Hasonlóságok körében bevezetjük az *egybevágóság* ekvivalencia-relációt: g_1 és g_2 hasonlóságokra $g_1 \approx g_2$ jelölje azt, hogy $g_1 \circ g_2^{-1}$ egybevágóság, vagyis minden H halmazra $g_1(H)$ és $g_2(H)$ egybevágó, ez ekvivalens azzal, hogy g_1 és g_2 nagyítása egyforma. Emiatt az egybevágóság nem függ a komponálás sorrendjétől, vagyis $g_1 \circ g_2 \approx g_3 \iff g_2 \circ g_1 \approx g_3$. Kiindulva a $\lambda_i \varphi_I = \varphi_J \lambda_j$, $\lambda_i^{k_i} b_i = c_i$ és $\lambda_j^{k_j} b_j = c_j$ azonosságokból

$$\underbrace{\lambda_i^{k_i k_j}\, \varphi_I^{k_i k_j}}_{\approx \varphi_J^{k_i k_j} \lambda_j^{k_i k_j}}\, b_i^{k_j}\, b_j^{k_i} \;\approx\; \varphi_J^{k_i k_j}\, b_i^{k_j}\, \underbrace{\lambda_j^{k_i k_j}\, b_j^{k_i}}_{\approx c_j^{k_i}} \;\approx\; \varphi_J^{k_i k_j}\, b_i^{k_j}\, c_j^{k_i},$$

$$\lambda_i^{k_i k_j}\, \varphi_I^{k_i k_j}\, b_i^{k_j}\, b_j^{k_i} \;\approx\; \underbrace{\lambda_i^{k_i k_j}\, b_i^{k_j}}_{\approx c_i^{k_j}}\, \varphi_I^{k_i k_j}\, b_j^{k_i} \;\approx\; c_i^{k_j}\, \varphi_I^{k_i k_j}\, b_j^{k_i}.$$

A kettőt összevetve

$$\varphi_J^{k_i k_j}\, b_i^{k_j}\, c_j^{k_i} \;\approx\; c_i^{k_j}\, \varphi_I^{k_i k_j}\, b_j^{k_i}.$$

A b_i, b_j, c_i, c_j is a felíráshoz tartozó hasonlóságok kompozíciójából áll, tehát a $\left(\varphi_J^{k_i k_j}\, b_i^{k_j}\, c_j^{k_i}\right)(K)$ és a $\left(c_i^{k_j}\, \varphi_I^{k_i k_j}\, b_j^{k_i}\right)(K)$ elemi darab egybevágó, és a feltétel szerint mértékük egyenlő. A mérték természetes, ezért

$$\mu(\varphi_J)^{k_i k_j} \mu(b_i)^{k_j} \mu(c_j)^{k_i} = \mu(c_i)^{k_j} \mu(\varphi_I)^{k_i k_j} \mu(b_j)^{k_i},$$

amiből μ^* definíciója alapján

$$\mu(\varphi_J)^{k_i k_j} \mu^*(\lambda_j)^{k_i k_j} = \mu^*(\lambda_i)^{k_i k_j} \mu(\varphi_I)^{k_i k_j},$$

$$\mu^*(\lambda_j)\mu(\varphi_J) = \mu^*(\lambda_i)\mu(\varphi_I).$$

Tehát

$$\mu(\lambda_i \varphi_I) = \mu(\varphi_J \lambda_j) = \mu(\varphi_J)\mu(\lambda_j) = \frac{\mu^*(\lambda_i)\mu(\varphi_I)}{\mu^*(\lambda_j)} \mu(\lambda_j).$$

Ezt kicsit átalakítva a következő azonosságot nyerjük: minden i-re és I-re létezik j, amelyre

$$\mu(\lambda_i\varphi_I) = \mu^*(\lambda_i)\frac{\mu(\lambda_j)}{\mu^*(\lambda_j)}\mu(\varphi_I).$$

Említsük meg, hogy $\mu^*(\lambda_j) \neq 0$ a definíciója folytán.

Legyen m egy olyan index, amelyre

$$\frac{\mu(\lambda_m)}{\mu^*(\lambda_m)} \dot{\leq} \frac{\mu(\lambda_i)}{\mu^*(\lambda_i)}$$

minden $0 \leq i \leq t$ indexre. Néhány egyenlőtlenséget ponttal megjelölünk, hogy később könnyen visszautalhassunk rájuk. Ekkor tetszőleges φ_I-re

$$\mu(\lambda_m\varphi_I) = \mu^*(\lambda_m)\frac{\mu(\lambda_j)}{\mu^*(\lambda_j)}\mu(\varphi_I) \dot{\geq} \mu^*(\lambda_m)\frac{\mu(\lambda_m)}{\mu^*(\lambda_m)}\mu(\varphi_I) = \mu(\lambda_m)\mu(\varphi_I)$$

valamilyen $0 \leq j \leq t$-vel.

Legyen $\{\varphi_{I_i}(K)\}$ egy elemi darabokból álló véges partíciója K-nak, amelyben $\varphi_I(K)$ is szerepel. Ekkor

$$\begin{aligned}\mu\big(\lambda_m(K)\big) = \mu\Big(\lambda_m\Big(\bigsqcup\varphi_{I_i}(K)\Big)\Big) = \mu\Big(\bigsqcup\lambda_m(\varphi_{I_i}(K))\Big) = \sum\mu\big(\lambda_m\varphi_{I_i}\big) \dot{\geq} \\ \dot{\geq} \sum\mu(\lambda_m)\mu(\varphi_{I_i}) = \mu(\lambda_m),\end{aligned}$$

emiatt mindenhol egyenlőség áll, vagyis $\mu(\lambda_m\varphi_I) = \mu(\lambda_m)\mu(\varphi_I)$ minden I multiindexre.

Legyen $H \subset K$ Borel halmaz. A μ mérték definíciója folytán léteznek $a_{ij}(K)$ elemi darabok, amelyekre $H \subset \bigcap_j\bigsqcup_i a_{ij}(K)$ és $\mu(H) = \inf_j \mu\Big(\bigsqcup_i a_{ij}(K)\Big) = \mu\Big(\bigcap_j\bigsqcup_i a_{ij}(K)\Big)$. Ekkor

$$\begin{aligned}\mu(\lambda_m(H)) \leq \mu\Big(\lambda_m\Big(\bigcap_j\bigsqcup_i a_{ij}(K)\Big)\Big) = \mu\Big(\bigcap_j\bigsqcup_i \lambda_m(a_{ij}(K))\Big) \leq \\ \leq \inf_j \mu\Big(\bigsqcup_i \lambda_m(a_{ij}(K))\Big) = \inf_j \sum_i \mu(\lambda_m a_{ij}) = \inf_j \sum_i \mu(\lambda_m)\mu(a_{ij}) = \\ = \mu(\lambda_m)\inf_j\sum_i\mu(a_{ij}) = \mu(\lambda_m)\mu\Big(\bigcap_j\bigsqcup_i a_{ij}(K)\Big) = \mu(\lambda_m)\mu(H).\end{aligned}$$

Ugyanezt $H^c \stackrel{\text{def}}{=} K \setminus H$-ra elmondva $\mu\big(\lambda_m(H^c)\big) \leq \mu(\lambda_m)\mu(H^c)$. A kettőt összeadva $\mu\big(\lambda_m(H)\big) + \mu\big(\lambda_m(H^c)\big) \leq \mu(\lambda_m)\mu(H) + \mu(\lambda_m)\mu(H^c)$, itt valójában egyenlőség áll, ezért már H-ra is $\mu\big(\lambda_m(H)\big) = \mu(\lambda_m)\mu(H)$. Tehát $\mu \circ \lambda_m = \mu(\lambda_m) \cdot \mu$.

Ebből kapjuk, hogy minden $H \subset K$ Borel halmazra

$$\mu\big(\lambda_m^n(H)\big) = \mu\big(\lambda_m(\lambda_m^{n-1}(H))\big) = \mu(\lambda_m)\mu\big(\lambda_m^{n-1}(H)\big),$$

indukcióval $\mu\big(\lambda_m^n(H)\big) = \mu(\lambda_m)^n\mu(H)$, speciálisan $\mu(\lambda_m^n) = \mu(\lambda_m)^n$.

Ezért $\mu(\lambda_m^{k_m}b_m) = \mu(\lambda_m)^{k_m}\mu(b_m)$. A $\mu^*(\lambda_m)$ definíciója szerint $\mu(c_m) = \mu^*(\lambda_m)^{k_m}\mu(b_m)$, és $c_m = \lambda_m^{k_m}b_m$, tehát

$$\mu(\lambda_m)^{k_m}\mu(b_m) = \mu(\lambda_m^{k_m}b_m) = \mu(c_m) = \mu^*(\lambda_m)^{k_m}\mu(b_m).$$

Mivel $\mu(b_m) > 0$, kapjuk, hogy $\mu(\lambda_m) = \mu^*(\lambda_m)$. Mivel m volt azon i index, amelyre $\frac{\mu(\lambda_i)}{\mu^*(\lambda_i)}$ minimális, ezért minden $0 \leq i \leq t$-re $\mu^*(\lambda_i) \dot{\leq} \mu(\lambda_i)$.

Az egész gondolatmenetet elismételhetjük egy olyan m indexre is, amelyre $\frac{\mu(\lambda_m)}{\mu^*(\lambda_m)} \geq \frac{\mu(\lambda_i)}{\mu^*(\lambda_i)}$ minden $0 \leq i \leq t$-re, csak a ponttal megjelölt egyenlőtlenségeket kell megfordítanunk, és azt kapjuk, hogy minden $0 \leq i \leq t$-re $\mu^*(\lambda_i) \geq \mu(\lambda_i)$. Ezért minden $0 \leq i \leq t$-re $\mu^*(\lambda_i) = \mu(\lambda_i)$. Emiatt m-nek valójában minden $0 \leq i \leq t$-t választhattuk, vagyis minden i-re teljesül, hogy $\mu \circ \lambda_i = \mu(\lambda_i) \cdot \mu$. A bizonyítás elején tett megjegyzésünk szerint ekkor minden $\lambda(K) \subset K$-nak eleget tevő injektív λ hasonlóságra $\mu \circ \lambda = \mu(\lambda) \cdot \mu$, és ebből $\mu \circ \lambda^n = \mu(\lambda)^n \cdot \mu$.

Most rátérünk az állítás második pontjának bizonyítására. Tegyük fel, hogy a $\varphi_L(K)$ elemi darabot a g hasonlóság K-ba képezi, $g(\varphi_L(K)) \subset K$. A 4.2. Lemma szerint léteznek I, J multiindexek és k pozitív egész, hogy $(g \circ \varphi_L)^k \circ \varphi_I = \varphi_J$. Ekkor a már bizonyított első pont szerint

$$\mu(\varphi_J) = \mu\big((g \circ \varphi_L)^k \circ \varphi_I\big) = \mu(g \circ \varphi_L)^k \mu(\varphi_I),$$

másrészt $\varphi_J = (g \circ \varphi_L)^k \circ \varphi_I \approx (\varphi_L)^k \varphi_I$, tehát

$$\mu(\varphi_J) = \mu((\varphi_L)^k \varphi_I) = \mu(\varphi_L)^k \mu(\varphi_I),$$

amiből

$$\mu(g \circ \varphi_L)^k \mu(\varphi_I) = \mu(\varphi_L)^k \mu(\varphi_I),$$

$$\mu(g \circ \varphi_L) = \mu(\varphi_L),$$

és ezzel beláttuk az állítást. $\square$

4.4. Tétel (Egybevágóság-invariáns mértékek karakterizációja). *Legyen $K = \varphi_1(K) \sqcup \ldots \sqcup \varphi_r(K)$ önhasonló halmaz diszjunkt darabokból, μ pedig egy természetes mérték rajta, amely szerint az egybevágó elemi darabok egyenlő mértékűek. Ekkor μ egybevágóság-invariáns mérték K-n.*

Bizonyítás. Azt kell belátnunk, hogy minden g egybevágóságra és $H \subset K$ Borel halmazra $g(H) \subset K$ esetén $\mu(H) = \mu(g(H))$.

Legyen c a 3.7. Tétel szerinti $c < 1$ konstans. Először legyen $H \subset K$ pozitív mértékű. Alkalmazzuk a 2.5. Lemmát $\varepsilon = 1 - c$ választással a H halmazra, kapjuk, hogy létezik $a(K)$ elemi darab, amelyre $\mu\big(H \cap a(K)\big) > c \cdot \mu\big(a(K)\big)$. Mivel $H \subset g^{-1}(K)$, ezért $\mu\big(g^{-1}(K) \cap a(K)\big) > c \cdot \mu\big(a(K)\big)$, vagyis a 3.7. Tétel szerint $a(K) \subset g^{-1}(K)$, $g(a(K)) \subset K$. Legyen $\lambda = g \circ a$. A 4.3. Állítás második pontja szerint $\mu(\lambda) = \mu(a)$ (ahol tehát $\mu(\lambda)$ $\mu\big(\lambda(K)\big)$ rövidítése), valamint $H_0 \stackrel{\text{def}}{=} a^{-1}(a(K) \cap H)$ jelöléssel $\mu(\lambda(H_0)) = \mu(\lambda)\mu(H_0)$, tehát

$$\begin{aligned} 0 < c \cdot \mu\big(a(K)\big) < \mu\big(a(K) \cap H\big) = \mu\big(a(H_0)\big) = \mu(a)\mu(H_0) = \mu(\lambda)\mu(H_0) = \\ = \mu\big(\lambda(H_0)\big) = \mu\big(g(a(H_0))\big) = \mu\big(g(a(K) \cap H)\big) \leq \mu\big(g(H)\big), \end{aligned}$$

azaz $g(H)$ is pozitív mértékű. Vagyis pozitív mértékű egybevágó képe is pozitív mértékű, másképpen nullmértékű egybevágó képe nullmértékű.

Legyen most $H \subset K$ tetszőleges Borel halmaz, g pedig egy egybevágóság, amelyre $g(H) \subset K$. Alkalmazzuk a 2.6. Lemmát valamilyen $0 < \varepsilon < 1 - c$ választással. Eszerint léteznek $a_i(K)$ elemi darabok, hogy

$$\mu\big(H \cap a_i(K)\big) > (1-\varepsilon) \cdot \mu\big(a_i(K)\big) \quad \text{és} \quad \mu\Big(H \setminus \bigsqcup_i a_i(K)\Big) = 0.$$

Ekkor $H \subset g^{-1}(K)$, s ezért $\mu\big(g^{-1}(K) \cap a_i(K)\big) > (1-\varepsilon) \cdot \mu\big(a_i(K)\big)$. A 3.7. Tétel szerint $g^{-1}(K) \supset a_i(K)$, vagyis $g(a_i(K)) \subset K$. A 4.3. Állítás második pontja szerint $\mu\big(g(a_i(K))\big) = \mu\big(a_i(K)\big)$, és felhasználva, hogy nullmértékű egybevágó képe nullmértékű

$$\begin{aligned}\mu\big(g(H)\big) &= \mu\Big(g\Big(H \cap \bigsqcup_i a_i(K)\Big)\Big) + \mu\Big(g\Big(H \setminus \bigsqcup_i a_i(K)\Big)\Big) = \mu\Big(g\Big(H \cap \bigsqcup_i a_i(K)\Big)\Big) = \\ &= \sum_i \mu\big(g(H \cap a_i(K))\big) \leq \sum_i \mu\big(g(a_i(K))\big) = \sum_i \mu\big(a_i(K)\big) \leq \\ &\leq \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \sum_i \mu\big(H \cap a_i(K)\big) = \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \mu\Big(H \cap \bigsqcup_i a_i(K)\Big) = \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \mu(H).\end{aligned}$$

Ez igaz minden $0 < \varepsilon < 1 - c$-re, ezért $\mu\big(g(H)\big) \leq \mu\big(H\big)$. Ugyanez H helyett $g(H)$-ra és g helyett g^{-1}-re elmondva adja, hogy $\mu\big(H\big) \leq \mu\big(g(H)\big)$, vagyis $\mu\big(H\big) = \mu\big(g(H)\big)$. Tehát μ egybevágóság-invariáns. $\square$

Megjegyzés. Mint azt már a 2. szakaszban jeleztük, e tétel ismeretében könnyű eldönteni, hogy egy természetes mérték egybevágóság-invariáns-e vagy sem. Jelöljük α_i-vel a φ_i hasonlóság nagyítását. Világos, hogy két elemi darab pontosan akkor egybevágó, ha K-nak két megegyező nagyítású hasonlóság szerinti képeik. Tehát egy μ természetes mérték pontosan akkor egybevágóság-invariáns, ha minden $\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\dots\alpha_{i_n} = \alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\dots\alpha_{j_m}$ esetben a $p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_n} = p_{j_1}p_{j_2}\dots p_{j_m}$ egyenlet fennáll a μ mérték p_i súlyaira. Az α_i nagyítási arányok és a p_i súlyok logaritmusának negáltjára áttérve lineáris egyenletrendszert kapunk a $-\log p_i$ számokra. Könnyen láthatóan minden azon múlik, hogy a $-\log \alpha_i$ $(i = 1, \dots, r)$ pozitív valós számok hogyan függenek össze a racionális számok $\mathbb{Q}$ teste fölött. Speciálisan ha ez az r szám lineárisan független $\mathbb{Q}$ fölött, akkor minden természetes mérték egybevágóság-invariáns.

Az egybevágóság-invariáns mértékek $-\log p_i$ súlyaiból képzett r dimenziós vektoroknak tehát az $\mathbb{R}^r$ tér pozitív térrészében egy valahány dimenziós (origón átmenő) altér és a $\sum_i p_i = 1$ kényszerfeltételnek megfelelő hiperfelület metszete felel meg. Hogy ez az altér legalább 1 dimenziós és átmegy a pozitív térrészen, vagyis legalább 1 metszéspont létezik, a Hausdorff-mérték létezéséből tudjuk. (Illetve már abból, hogy a $p_i = \alpha_i^s$ súlyok automatikusan teljesítik az összes egyenletet.)

A természetes mértékek fogalma függött a felírás választásától. Az egybevágóság-invariáns természetes mértékekre ez azonban nem így van.

4.5. Tétel. *Legyen K önhasonló halmaz diszjunkt darabokból, $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r\}$ egy felírása. Legyen μ egybevágóság-invariáns és természetes mérték e felírás szerint. Ekkor μ minden felírás szerint is természetes mérték. Tehát az egybevágóság-invariáns természetes mértékek halmaza független a felírás választásától.*

Bizonyítás. Legyen $\{\psi_1, \ldots, \psi_s\}$ egy másik felírás. A 4.2. Lemma szerint létezik k pozitív egész és φ_I, φ_J elemi darabok, hogy $\psi_i^k \circ \varphi_I = \varphi_J$, tehát a 4.3. Állítás első pontja alapján

$$0 < \mu(\varphi_J) = \mu(\psi_i^k \circ \varphi_I) = \mu(\psi_i)^k \mu(\varphi_I),$$

vagyis $\mu(\psi_i) > 0$ minden $1 \leq i \leq s$-re.

A 4.3. Állítás első pontja szerint $\mu \circ \psi_i = \mu(\psi_i) \cdot \mu$, és $\sum \mu\big(\psi_i(K)\big) = 1$ miatt ez pont azt jelenti, hogy μ természetes mérték a $\{\psi_1, \ldots, \psi_s\}$ felírás szerint. □

A karakterizációs tétel egy egyszerű következménye az alábbi.

4.6. Következmény. *Legyen $K = \varphi_1(K) \sqcup \ldots \sqcup \varphi_r(K)$ önhasonló halmaz diszjunkt darabokból, μ pedig egy természetes mérték rajta. Ekkor ha μ invariáns az irányítástartó egybevágósági transzformációkra, akkor invariáns az összes egybevágóságra is.*

Bizonyítás. A 4.4. Tétel szerint elegendő belátnunk, hogy az egybevágó elemi darabok mértéke egyenlő. Legyenek $\varphi_I(K)$ és $\varphi_J(K)$ egybevágó elemi darabok. Ekkor $\varphi_I^2(K)$ és $\varphi_J^2(K)$ is egybevágó elemi darabok, φ_I^2 és φ_J^2 irányítástartó, tehát $\varphi_I^2 \circ \varphi_J^{-2}$ is, a feltétel szerint $\mu(\varphi_I^2(K)) = \mu(\varphi_J^2(K))$. A mérték természetessége miatt $\mu(\varphi_I^2(K)) = \mu(\varphi_I(K))^2$ és $\mu(\varphi_J^2(K)) = \mu(\varphi_J(K))^2$, tehát $\mu(\varphi_I(K)) = \mu(\varphi_J(K))$. Ezzel bebizonyítottuk az állítást. □

5. Minimális felírások

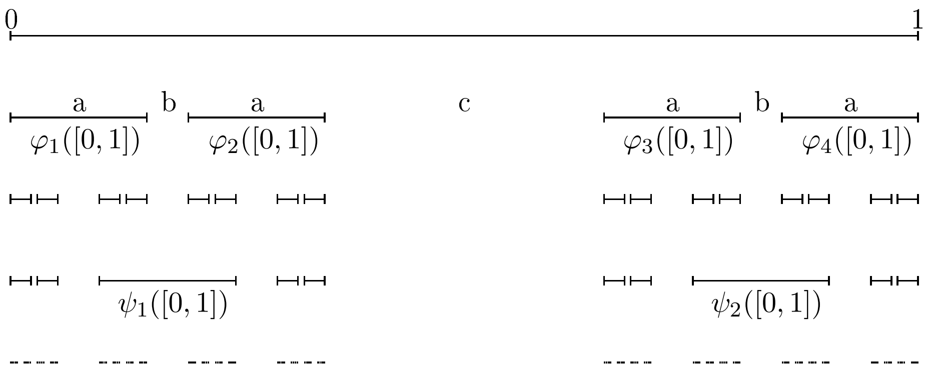
Először mutatunk egy olyan önhasonló halmazt a számegyenesen (természetesen diszjunkt darabokból), amelynek nincsen legkisebb felírása, vagyis több minimális felírása is van. Legyen $\varphi_1(x) = \frac{x}{3}$, $\varphi_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$, legyen K az egyetlen kompakt halmaz, amelyre $K = \varphi_1(K) \cup \varphi_2(K)$, ez nem más, mint a Cantor-halmaz. Legyen $\psi_1(x) = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$. Ekkor $K = \psi_1(K) \sqcup \varphi_2(K)$, és világos, hogy ez a két különböző felírás minimális, hiszen csak két-két hasonlóságból állnak.

Ez a két felírás azonban nem „lényegesen különböző”: a $\{\varphi_1(K), \varphi_2(K)\}$ és a $\{\psi_1(K), \varphi_2(K)\}$ halmaz megegyezik. *Lényegi felíráson* ne a hasonlóságok halmazát értsük, hanem az első generációs elemi darabokat, és az $\{a_1(K), \ldots, a_r(K)\}$ lényegi felírás legyen *tömörebb* a $\{b_1(K), \ldots, b_s(K)\}$ lényegi felírásnál, ha a minden $j = 1, \ldots s$-re létezik $1 \leq i \leq r$, hogy $b_j(K) \subset a_i(K)$. Egy lényegi felírást minimálisnak hívunk, ha önmagától eltekintve nincs nála tömörebb, és legkisebbnek hívjuk, ha minden másnál tömörebb. Könnyű meggondolni, hogy a Cantor-halmaznak van legkisebb lényegi felírása.

A következőkben mutatni fogunk egy olyan önhasonló halmazt, amelynek nincsen legkisebb lényegi felírása, vagyis több minimális lényegi felírása is van.

Sok K önhasonló halmazra igaz a következő állítás: Ha λ_1 és λ_2 olyan hasonlóságok, amelyekre $\lambda_1(K) \subset K$, $\lambda_2(K) \subset K$ és $\lambda_1(K) \cap \lambda_2(K) \neq \emptyset$, akkor $\lambda_1(K) \subset \lambda_2(K)$ vagy $\lambda_2(K) \subset \lambda_1(K)$. A 3. szakasz bizonyításai sokat egyszerűsödnének, ha ez minden diszjunkt darabokból álló önhasonló halmazra igaz lenne. Azonban ez az állítás általában nem igaz, a következő konstrukció majd mutatja. Megjegyezzük, hogy ez az állítás nem feltétlenül ekvivalens azzal, hogy K-nak csak egyetlen minimális lényegi felírása van.

Legyenek a, b, c pozitív valós számok, amelyekre $a+b+a+c+a+b+a = 1$ és $b = a \cdot c$. Egyszerű belátni, hogy minden $0 < a < 1/4$ esetén létezik egyetlen b és c ezen feltételekkel. Legyen φ_1 a $[0,1]$ szakaszt a $[0,a]$ szakaszba képező irányítástartó hasonlóság. Vigye φ_2 a $[0,1]$ szakaszt az $[a+b, a+b+a]$ szakaszba, φ_3 az $[1-a-b-a, 1-a-b]$ szakaszba, φ_4 pedig az $[1-a, 1]$ szakaszba, mindegyik irányítástartóan. Vagyis $\varphi_1(x) = a \cdot x$, $\varphi_2(x) = a \cdot x + a + b$, $\varphi_3(x) = a \cdot x + 1 - a - b - a$, $\varphi_4(x) = a \cdot x + 1 - a$.



Legyen K azon egyetlen kompakt halmaz, amelyre $K = \varphi_1(K) \sqcup \varphi_2(K) \sqcup \varphi_3(K) \sqcup \varphi_4(K)$. Ekkor K első generációs elemi darabjai a átmérőjűek, köztük kettő b nagyságú és egy c nagyságú lyuk van. Világos, hogy $K \subset [0,1]$ és K szimmetrikus az $\frac{1}{2}$-re.

Az ábra második sora szimbolizálja K ezen felírását, pontosabban a $\varphi_i([0,1])$ szakaszok láthatóak rajta ($a = 0,15$, $c = \frac{0,4}{1,3}$ választással). Az első sorban a $[0,1]$ szakasz látható. Az ábra harmadik sorában a $\varphi_i(\varphi_j([0,1]))$ $(1 \leq i, j \leq 4)$ szakaszokat tüntettük fel. Az ötödik sorban magát a K halmazt próbáltuk láthatóvá tenni.

Legyen $\psi_1(x) = a \cdot x + a^2 + a \cdot b + a^2 + a \cdot c$ és $\psi_2(x) = a \cdot x + 1 - a - b - a^2 - a \cdot b - a^2$. Az ábra negyedik sorában a $[0,1]$ szakasz φ_1^2, $\varphi_1 \circ \varphi_2$, ψ_1, $\varphi_2 \circ \varphi_3$, $\varphi_2 \circ \varphi_4$, $\varphi_3 \circ \varphi_1$, $\varphi_3 \circ \varphi_2$, ψ_2, $\varphi_4 \circ \varphi_3$, φ_4^2 hasonlóságok általi képét tüntettük fel.

Azt állítjuk, hogy $\psi_1(K) \subset K$ és $\psi_2(K) \subset K$, sőt

$$\{\varphi_1^2,\ \varphi_1 \circ \varphi_2,\ \psi_1,\ \varphi_2 \circ \varphi_3,\ \varphi_2 \circ \varphi_4,\ \varphi_3 \circ \varphi_1,\ \varphi_3 \circ \varphi_2,\ \psi_2,\ \varphi_4 \circ \varphi_3,\ \varphi_4^2\}$$

a K önhasonló halmaz egy felírása (lásd az ábra negyedik sorát). Ehhez elegendő belátnunk, hogy $\psi_1 \circ \varphi_1 = \varphi_1 \circ \varphi_3$, $\psi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_4$, $\psi_1 \circ \varphi_3 = \varphi_2 \circ \varphi_1$, $\psi_1 \circ \varphi_4 = \varphi_2 \circ \varphi_2$, valamint

$\psi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_3 \circ \varphi_3$, $\psi_2 \circ \varphi_2 = \varphi_3 \circ \varphi_4$, $\psi_2 \circ \varphi_3 = \varphi_4 \circ \varphi_1$, $\psi_2 \circ \varphi_4 = \varphi_4 \circ \varphi_2$. Ez egyszerűen ellenőrizhető, minden egyenlőség a $b = a \cdot c$ választáson múlik.

Most megmutatjuk, hogy nincs olyan $\{\varrho_1(K), \dots, \varrho_r(K)\}$ lényegi felírása a K önhasonló halmaznak, amely tömörebb a K eredeti $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ felírásához és az imént definiált másik felíráshoz tartozó lényegi felírásoknál. Ez bizonyítja, hogy K-nak nem egyértelmű a minimális lényegi felírása. (Valójában ez a két lényegi felírás már minimális.) Indirekt tegyük fel, hogy létezik ilyen $\{\varrho_1(K), \dots, \varrho_r(K)\}$ lényegi felírás. Mivel $\varphi_1(K) \cap \psi_1(K) \neq \emptyset$, ezért valamilyen i-re $\varphi_1(K) \cup \psi_1(K) \subset \varrho_i(K)$. Ugyanezen i-re $\varphi_2(K) \cup \psi_1(K) \subset \varrho_i(K)$. Hasonlóan létezik egy j index, hogy $\varphi_3(K) \cup \psi_2(K) \cup \varphi_4(K) \subset \varrho_j(K)$. Ebből következik, hogy $K = \varrho_i(K) \sqcup \varrho_j(K)$, ám ekkor a ϱ_i és ϱ_j hasonlóságok csak azok lehetnének, amelyek $[0,1]$-et $[0, a+b+a]$-ra és $[1-a-b-a, 1]$-re képezik, ám ekkor $b = (a+b+a) \cdot c$ állna fenn $b = a \cdot c$ helyett, ez ellentmondás.

Az ígért λ_1 és λ_2 hasonlóságoknak például a φ_1 és ψ_1 hasonlóságok felelnek meg.

Hivatkozások

[1] John E. Hutchinson, Fractals and self-similarity, *Indiana Univ. Math. J.* **30** (1981), no. 5, 713–747.

[2] Yuval Peres és Boris Solomyak, Self-similar measures and intersections of Cantor sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 10, 4065–4087.

[3] Carlos Gustavo T. de A. Moreira és Jean-Christophe Yoccoz, Stable intersections of regular Cantor sets with large Hausdorff dimensions, *Ann. of Math. (2)* **154** (2001), no. 1, 45–96.

[4] Fahima Nekka és Jun Li, Intersection of triadic Cantor sets with their translates, I. Fundamental properties, *Chaos Solitons Fractals* **13** (2002), no. 9, 1807–1817.

[5] Wenxia Li és Dongmei Xiao, Intersection of translations of Cantor triadic set, *Acta Math. Sci. (English Ed.)* **19** (1999), no. 2, 214–219.

[6] Roy O. Davies, Sets which are null or non-sigma-finite for every translation-invariant measure, *Mathematika* **18** (1971), 161–162.

[7] Elekes Márton és Keleti Tamás, Borel sets which are null or non-σ-finite for every translation invariant measure, *Adv. Math.*, megjelenés alatt.

[8] Tim Bedford, *Crinkly curves, Markov partitions and box dimension in self-similar sets*, Ph. D. Thesis, University of Warwick, 1984.

[9] Curt McMullen, The Hausdorff dimension of general Sierpiński carpets, *Nagoya Math. J.* **96** (1984), 1–9.

[10] Dimitrios Gatzouras és Steven P. Lalley, Hausdorff and box dimensions of certain self-affine fractals, *Indiana University Math. J.* **41** (1992), 533–568.

[11] Yuval Peres, The packing measure of self-affine carpets, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **115** (1994), no. 3, 437–450.

[12] Yuval Peres, The self-affine carpets of McMullen and Bedford have infinite Hausdorff measure, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **116** (1994), 513–526.

[13] Laczkovich Miklós, *Valós függvénytan*, egyetemi jegyzet, ELTE TTK, 1995.